

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA



TESIS

**EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE ÓRBITAS PERIÓDICAS EN SISTEMAS
HAMILTONIANOS CON 2 Y 3 GRADOS DE LIBERTAD MEDIANTE LOS
MÉTODOS DEL PROMEDIO Y DE REDUCCIÓN**

**Para optar el Grado Académico de Maestro en Ciencias con Mención en Matemática
Aplicada**

Investigador:

Walter Orlando Gonzales Caicedo

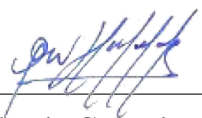
Asesor:

Dr. Jhon Edder Vidarte Olivera

Lambayeque - Perú

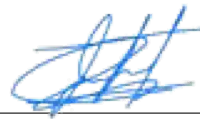
2022

EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE ÓRBITAS PERIÓDICAS EN SISTEMAS HAMILTONIANOS CON 2 Y 3 GRADOS DE LIBERTAD MEDIANTE LOS MÉTODOS DEL PROMEDIO Y DE REDUCCIÓN



Walter Orlando Gonzales Caicedo

Autor

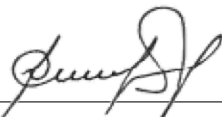


Dr. Jhon Edder Vidarte Olivera

Asesor

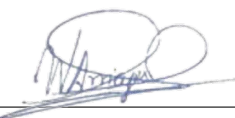
Proyecto de Tesis presentado a la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo para optar el Grado Académico de: MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA.

Aprobado por:



Mag. / Dr.

Presidente del jurado



Mag. / Dr.

Secretario del jurado



Mag. / Dr.

Vocal del jurado

Lambayeque - Perú

2022

Acta de sustentación (copia)

 UNPRG <small>UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO</small>	ESCUELA DE POSGRADO <i>M. Sc. Francisco Villena Rodríguez</i>	Versión:	01
		Fecha de Aprobación	29-8-2020
UNIDAD DE INVESTIGACION	<u>FORMATO DE ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS</u>	Pág. 1 de 3	

ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS

Siendo las 17:07 p.m. del miércoles 19 de enero de 2022, se dio inicio a la Sustentación Virtual de Tesis soportado por el sistema Google Meet, preparado y controlado por la Unidad de Tele Educación de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Lambayeque, con la participación en la Video Conferencia de los miembros del Jurado, nombrados con Resolución N°628-2021-EPG, de fecha 13 de agosto de 2021, conformado por:

Dr. LUIS JAIME COLLANTES SANTISTEBAN	Presidente
Dr. WALTER ARRIAGA DELGADO	Secretario
Dra. MIRIAM MARIA ESTRADA HUANCAS	Vocal
Dr. JHON EDDER VIDARTE OLIVERA	Asesor

Para evaluar el informe de tesis del tesista WALTER ORLANDO GONZÁLES CAICEDO, candidato a optar el grado de MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA con la tesis titulada "EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE ORBITAS PERIODICAS EN SISTEMAS HAMILTONIANOS CON 2 Y 3 GRADOS DE LIBERTAD MEDIANTE LOS METODOS DEL PROMEDIO Y DE REDUCCION".

El Sr. Presidente, después de transmitir el saludo a todos los participantes en la Video Conferencia de la Sustentación Virtual ordenó la lectura de la Resolución N°037-2022-EPG de fecha 13 de enero de 2022 que autoriza la Sustentación Virtual del Informe de tesis correspondiente, luego de lo cual autorizó al candidato a efectuar la Sustentación Virtual, otorgándole 30 minutos de tiempo y autorizando también compartir su pantalla.

Culminada la exposición del candidato, se procedió a la intervención de los miembros del jurado, exponiendo sus opiniones y observaciones correspondientes, posteriormente se realizaron las preguntas al candidato.

Culminadas las preguntas y respuestas, el Sr. Presidente, autorizó el pase de los miembros del Jurado a la sala de video conferencia reservada para el debate sobre la Sustentación Virtual del Informe de tesis realizada por el candidato, evaluando en base a la rúbrica de sustentación y determinando el resultado total de la tesis con puntos 19, equivalente a muy bueno, quedando el candidato apto para optar el Grado de MAESTRO EN CIENCIAS CON

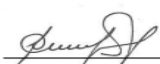
Formato : Físico/Digital	Ubicación : UI- EPG - UNPRG	Actualización:
--------------------------	-----------------------------	----------------

 UNPRG <small>UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO</small>	ESCUELA DE POSGRADO <i>M. Sc. Francisco Villena Rodríguez</i>	Versión:	01
		Fecha de Aprobación	29-8-2020
UNIDAD DE INVESTIGACION	<u>FORMATO DE ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS</u>	Pág. 2 de 3	

MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA.

Se retornó a la Video Conferencia de Sustentación Virtual, se dio a conocer el resultado, dando lectura del acta y se culminó con los actos finales en la Video Conferencia de Sustentación Virtual.

Siendo las 17:08 p.m. se dio por concluido el acto de Sustentación Virtual.


PRESIDENTE


SECRETARIO

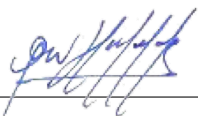

VOCAL


ASESOR

Declaración jurada de originalidad

Yo, Walter Orlando Gonzales Caicedo investigador principal, y Dr. Jhon Edder Vidarte Olivera, asesor del trabajo de investigación “EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE ÓRBITAS PERIÓDICAS EN SISTEMAS HAMILTONIANOS CON 2 Y 3 GRADOS DE LIBERTAD MEDIANTE LOS MÉTODOS DEL PROMEDIO Y DE REDUCCIÓN”, declaramos bajo juramento que este trabajo no ha sido plagiado, ni contiene datos falsos. En caso se demostrara lo contrario, asumo responsablemente la anulación de este informe y por ende el proceso administrativo a que hubiere lugar. Que puede conducir a la anulación del título o grado emitido como consecuencia de este informe.

Lambayeque, 17 de enero de 2022



Walter Orlando Gonzales Caicedo

Autor



Dr. Jhon Edder Vidarte Olivera

Asesor

Dedicatoria

Xiomi Gabriela

y

Walter Alejandro

Agradecimientos

A Dios, razón de mi existencia, por darme sabiduría para seguir el camino del bien y hacer realidad mis metas personales y profesionales propuestas.

Al director de esta investigación, Dr. Jhon Edder Vidarte Olivera, por su dedicación, orientación y apoyo incondicional en la culminación del trabajo de investigación.

Al Dr. Dante Carrasco Olivera, por sus sugerencias realizadas que permitieron enriquecer la investigación.

A mi familia por su amor y apoyo incondicional.

Índice General

Acta de sustentación	iii
Declaración jurada de originalidad	iv
Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Índice General	vii
Índice de Tablas	ix
Índice de Figuras	x
Resumen	xi
Abstract	xii
Introducción	xiii
1. DISEÑO TEÓRICO	14
1.1. Antecedentes de la investigación	14
1.2. Base teórica	15
1.3. Sistemas Hamiltonianos autónomos	15
1.3.1. Corchete de Poisson	17

1.3.2. El oscilador armónico	19
1.4. Transformaciones simplécticas	20
1.4.1. Funciones Generadoras	25
1.4.2. Transformaciones de Lie	27
1.4.3. Formas Normales	29
1.5. Estabilidad en sistemas Hamiltonianos	35
1.6. Teorema del Promedio de Reeb	37
1.7. Teorema de estabilidad lineal	41
1.8. Hipótesis	42
2. MÉTODOS Y MATERIALES	43
2.1. Tipo de investigación	43
2.2. Método de investigación	43
3. EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE SOLUCIONES PERIÓDICAS EN HAMILTONIANOS CON DOS Y TRES GRADOS DE LIBERTAD	45
3.1. Hamiltonianos en resonancia 1:1	46
3.1.1. Normalización y Reducción	47
3.1.2. Coordenadas simplécticas en el espacio reducido \mathbb{CP}_h	51
3.1.3. Soluciones periódicas reconstruidas de \mathbb{CP}_h	55
3.2. Hamiltonianos en resonancia 1:1:1	59
3.2.1. Normalización y Reducción	60
3.2.2. Coordenadas simplécticas en el espacio reducido \mathbb{CP}_h^2	67
3.2.3. Soluciones periódicas reconstruidas desde \mathbb{CP}_h^2	69
4. DISCUSIÓN	80
Referencias Bibliográficas	84

Índice de cuadros

3.1. Corchetes de Poisson entre los invariantes π	48
3.2. Puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$ en \mathbb{CP}_h . (1), (2), (3) y (4) corresponden a puntos críticos de tipo rectilíneo; (5) y (6) corresponden a puntos críticos de tipo elíptico (o circular).	51
3.3. Puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$ en las variables (Q_1, P_1) : $O_1^{\mathcal{R}}$ corresponde al punto (1) de la Tabla 3.2, $O_2^{\mathcal{R}}$ al punto (2), $O_3^{\mathcal{R}}$ al punto (3), $O_4^{\mathcal{R}}$ al punto (4), $O_1^{\mathcal{C}}$ al punto (5), y $O_2^{\mathcal{C}}$ al punto (6), respectivamente.	55
3.4. Determinantes de la matriz Hessiana en los puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$	57
3.5. Corchete de Poisson sobre los invariantes π	62
3.6. Puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$ en \mathbb{CP}_h^2	65
3.7. Puntos críticos adicionales de $\bar{\mathcal{H}}$ en \mathbb{CP}_h^2 (dependiendo de α y β)	66
3.8. Puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$ en las variables (Q_1, Q_2, P_1, P_2) : $O_1^{\mathcal{R}}$ corresponde al punto (1) de la Tabla 3.6, $O_2^{\mathcal{R}}$ al punto (2), \dots , $O_{13}^{\mathcal{R}}$ al punto (13), $O_1^{\mathcal{C}}$ al punto (14), \dots , y $O_{14}^{\mathcal{C}}$ al punto (27) respectivamente.	70
3.9. Puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$ en las variables (Q_1, Q_2, P_1, P_2) : $O_1^{\mathcal{E}}$ corresponde al punto (28) de la Tabla 3.6, $O_2^{\mathcal{E}}$ al punto (29), \dots , y $O_{12}^{\mathcal{E}}$ al punto (39) respectivamente.	71
3.10. Determinantes de la matriz Hessiana en los puntos críticos y correcciones para los periodos de las soluciones periódicas	72
3.11. Valores propios de la matriz A para cada caso	79

Índice de figuras

1.1. Desplazamiento de los multiplicadores de una matriz paramétricamente estable.	42
3.1. Diagrama de bifurcación de puntos críticos sobre el espacio reducido \mathbb{CP}_h . .	52
3.2. Soluciones periódicas aproximadas de tipo rectilíneo en los ejes principales. .	53
3.3. Soluciones periódicas aproximadas de tipo rectilíneo inclinadas.	53
3.4. Soluciones periódicas aproximadas de tipo circular y elíptica.	54
3.5. Diagrama de bifurcación de soluciones periódicas.	58
3.6. Diagrama de bifurcación de puntos críticos sobre el espacio reducido \mathbb{CP}_h^2 . .	65
3.7. Soluciones periódicas aproximadas de tipo rectilíneo. Izquierda: rectilínea en el eje x_1 . Centro: rectilínea contenida en el plano x_1x_2 . Derecha: rectilínea en un plano inclinado.	66
3.8. Soluciones periódicas aproximadas de tipo circular y elíptica. Izquierda: circular contenida en el plano x_1x_2 . Centro: circular en un plano inclinado. Derecha: elíptica en un plano inclinado.	67
3.9. Diagrama de bifurcación de soluciones periódicas.	73

Resumen

En esta investigación, estudiamos la dinámica de una familia de sistemas Hamiltonianos perturbados con dos y tres grados de libertad en resonancia 1:1 y 1:1:1, respectivamente. La perturbación consiste de potenciales homogéneos de grado 4 dependiendo de tres parámetros reales. La existencia y estabilidad de las soluciones periódicas son establecidas usando teorías de reducción y del promedio. Los diferentes tipos de soluciones periódicas y sus curvas de bifurcación son caracterizadas en términos de los parámetros.

Palabras clave: Hamiltonianos resonantes, resonancia 1:1 y resonancia 1:1:1, normalización y reducción, promedio, espacio reducido e invariantes, Teorema de Reeb, soluciones periódicas y estabilidad lineal.

Abstract

In this investigation, we study the dynamics of a family of two perturbed Hamiltonian systems with two and three degrees of freedom in 1:1 resonance and 1:1:1 resonance, respectively. The perturbation consists of homogeneous potentials of degree four depending on three real parameters. The existence and stability of the periodic solutions are established using reduction and averaging theories. The different types of periodic solutions and their bifurcations curves are characterized in terms of the parameters.

Keywords: resonant Hamiltonians, 1:1 resonance and 1:1:1 resonance, normalization and reduction, averaging, reduced space and invariants, Reeb's theorem, periodic solutions and linear stability.

Introducción

Diversas investigaciones relacionadas con el estudio de sistemas dinámicos Hamiltonianos se han venido desarrollando durante los últimos años.

Los principales problemas abordados por muchos investigadores están relacionados a la estabilidad de soluciones de equilibrio, existencia de soluciones periódicas, determinación de su estabilidad paramétrica y posibles bifurcaciones y existencia de toros KAM rodeando soluciones periódicas linealmente estables.

Esta tesis se centra en el estudio de la existencia y estabilidad de órbitas periódicas en sistemas Hamiltonianos autónomos con 2 y 3 grados de libertad que dependen de parámetros reales. Las familias de Hamiltonianos estudiados son de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}^*$, donde \mathcal{H}_0 es el Hamiltoniano asociado al oscilador armónico en dos y tres dimensiones, respectivamente y \mathcal{H}^* es una perturbación polinómica. Más precisamente, los Hamiltonianos tratados en esta tesis son dados por

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon^2(ax_1^4 + bx_2^4 + cx_1^2x_2^2), \quad (1)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon = & \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2) + \varepsilon\gamma x_1x_2x_3 \\ & + \varepsilon^2[\alpha(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + \beta(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2)], \end{aligned} \quad (2)$$

donde a, b, c, α, β y γ son parámetros reales.

Algunas de las principales herramientas disponibles para el estudio de sistemas Hamiltonianos desde un punto de vista analítico y geométrico son: teoría de formas normales [10, 14, 16], teoría de reducción simpléctica [6, 15], teoría de invariantes [7], teoría del promedio [17, 19, 24, 21] y teoría KAM [3].

En este trabajo, usando reducción simpléctica y teoría del promedio en el sentido Hamiltoniano, encontramos a lo más 6 familias de soluciones periódicas en el Hamiltoniano (1) y a lo más 39 familias de soluciones periódicas en el Hamiltoniano (2) para cada nivel de energía. Las soluciones periódicas son cercanas a soluciones de tipo rectilíneo, circular o elíptico. Además, determinamos las curvas de bifurcación de las soluciones periódicas como

función de los parámetros. Adicionalmente, proporcionamos la estabilidad o inestabilidad lineal de las soluciones periódicas, aplicando la noción de estabilidad paramétrica (o estabilidad fuerte).

La tesis considera cuatro capítulos. En el primer capítulo, presentamos algunos conceptos básicos acerca del estudio de sistemas Hamiltonianos tales como: sistemas Hamiltonianos autónomos, el oscilador armónico, transformaciones simpléticas, transformaciones de Lie, formas normales y estabilidad en sistemas Hamiltonianos. En el segundo capítulo, se presentan los resultados básicos de la teoría del promedio como el teorema del promedio de Reeb y el teorema de estabilidad lineal para soluciones periódicas. El tercer capítulo está dedicado al análisis de la dinámica de los Hamiltonianos en resonancia 1:1 y 1:1:1 dados por (1) y (2), respectivamente. En ambos casos se describe la normalización y reducción del sistema Hamiltoniano, la construcción de coordenadas simpléticas en el espacio reducido \mathbb{CP}_h asociado al Hamiltoniano (1) y en el espacio reducido \mathbb{CP}_h^2 relacionado con el Hamiltoniano (2), la determinación de soluciones periódicas reconstruidas desde ambos espacios, así como el estudio de su estabilidad es tratada. Finalmente, en el cuarto capítulo, se exponen las consideraciones finales referentes a la investigación realizada, así como las perspectivas de los trabajos a futuro.

DISEÑO TEÓRICO

En este capítulo se presentarán los antecedentes de la investigación, la base teórica y algunos conceptos básicos acerca del estudio de sistemas Hamiltonianos. Particularmente, sistemas Hamiltonianos autónomos, oscilador armónico, transformaciones simpléticas, transformaciones de Lie, formas normales, estabilidad en sistemas Hamiltonianos y la teoría del promedio para sistemas Hamiltonianos.

1.1. Antecedentes de la investigación

La dinámica galáctica es un campo de aplicación de los estudios relacionados a sistemas Hamiltonianos que consisten de un oscilador armónico más un potencial homogéneo de grado 4. En particular, de Zeeuw y Merritt [9] sugieren que muchos potenciales pueden ser descritos como sistemas Hamiltoninos en resonancia 1:1 y 1:1:1.

La principal propiedad de tales potenciales en tres dimensiones es que una partícula, es decir, una estrella, moviéndose en uno de los planos principales (planos xy , xz o yz) pueda permanecer en éste. Truncando el potencial hasta orden cuatro, la perturbación contiene solamente términos cuárticos, lo cual es suficiente para obtener las principales propiedades de un determinado modelo. Después de realizar el promedio o calcular la forma normal, el análisis de las soluciones periódicas es obtenida como los equilibrios de un sistema normalizado y las posibles bifurcaciones es crucial para entender la naturaleza de la galaxia, ver las referencias dadas en [20].

La situación es similar en otros campos en física y química tales como dinámica molecular. De hecho, pequeñas vibraciones de amplitud en moléculas siguen una ley oscilatoria, como muestran sus espectros y reacciones [13]. Químicos adoptan modelos basados en perturbaciones de osciladores para describir el movimiento del núcleo en pequeñas moléculas.

Por otro lado, en nuestro medio no existe un trabajo similar centrado en un estudio detallado y completo sobre la existencia de soluciones periódicas y su estabilidad en sistemas Hamiltonianos en resonancia 1:1 y 1:1:1 de la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + P(x_1, x_2), \quad (1.1)$$

y

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2) + P(x_1, x_2, x_3), \quad (1.2)$$

donde $P(x_1, x_2)$, $P(x_1, x_2, x_3)$ representan polinomios de grado a lo más 4 en las posiciones. Por lo tanto, consideramos que nuestra investigación sería un primer aporte en el tema.

1.2. Base teórica

Este trabajo se sustenta principalmente en conocimientos de ecuaciones diferenciales ordinarias, teoría de reducción regular, teoría de formas normales y teoría del promedio para sistemas Hamiltonianos.

1.3. Sistemas Hamiltonianos autónomos

Definición 1.3.1. *Un sistema Hamiltoniano autónomo es un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma*

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \mathcal{H}_{\mathbf{p}_j}, \quad \dot{\mathbf{p}}_j = -\mathcal{H}_{\mathbf{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

donde $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p)$, llamado el Hamiltoniano, es una función diferenciable real

definida en un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^{2n} .

Los vectores $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ y $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ son usualmente llamados vectores posición y momento, respectivamente. Las variables \mathbf{q} y \mathbf{p} son llamadas variables conjugadas: \mathbf{p} es conjugada a \mathbf{q} y el entero n es el número de grados de libertad del sistema. El conjunto donde las variables de posición están definidas es llamado espacio de configuraciones, el espacio que describe las posiciones versus momentos es llamado espacio fase y el conjunto formado por todas las trayectorias de (1.3) es llamado retrato fase.

Considerando la función Hamiltoniana \mathcal{H} y una solución $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ de (1.3) se tiene que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\mathcal{H}_{\mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i - \mathcal{H}_{\mathbf{p}_i} \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathcal{H}_{\mathbf{q}_i} \mathcal{H}_{\mathbf{p}_i} - \mathcal{H}_{\mathbf{p}_i} \mathcal{H}_{\mathbf{q}_i}) = 0,$$

para todo t . De allí que \mathcal{H} es una cantidad conservada llamada *integral* o constante de movimiento. El hecho de que \mathcal{H} sea una integral implica que las soluciones están contenidas en alguna superficie de energía, es decir, si $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ denota una solución de (1.3) entonces $\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = h$, donde h es un valor que puede ser negativo, nulo o positivo dependiendo de la solución. El espacio fase $\mathcal{N}(h)$ es dado por la superficie de energía

$$\mathcal{N}(h) = \mathcal{H}^{-1}(h) = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U : \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h\}, \quad (1.4)$$

y muchas veces puede ser un espacio Euclidiano o un subconjunto de él, pero también puede tener una estructura no Euclidiana tal como un círculo, una esfera, un toro o alguna otra variedad diferenciable, por esta razón $\mathcal{N}(h)$ es llamada superficie de energía.

La ecuación (1.3) también se puede escribir en forma compacta, como

$$\dot{z} = \mathbb{J} \nabla \mathcal{H}(z), \quad (1.5)$$

donde el vector z tiene $2n$ componentes, \mathbb{J} es la matriz antisimétrica por bloques de

dimensión $2n \times 2n$ y $\nabla \mathcal{H}$ es el gradiente de \mathcal{H} , esto es,

$$z = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{J} = \mathbb{J}_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla \mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_{2n}} \end{bmatrix}$$

en \mathbb{J} , 0 es la matriz nula y I_n es la matriz identidad ambas de dimensión $n \times n$.

1.3.1. Corchete de Poisson

Muchas de las propiedades de los sistemas Hamiltonianos son formuladas en términos del operador Corchete de Poisson.

Definición 1.3.2. Sean F y G funciones diferenciables reales definidas en un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^{2n} . El corchete de Poisson de F y G es la aplicación diferenciable $\{F, G\}: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \nabla F^T \mathbb{J} \nabla G = \frac{\partial F^T}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F^T}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial q_i}(q, p) \frac{\partial G}{\partial p_i}(q, p) - \frac{\partial F}{\partial p_i}(q, p) \frac{\partial G}{\partial q_i}(q, p) \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Fácilmente podemos verificar que el operador corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ es una aplicación antisimétrica y bilineal. Además, a partir de ciertos cálculos se verifica la identidad de Jacobi, es decir

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \quad (1.7)$$

Por un abuso de notación, sea $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(\phi(t, t_0, z_0))$, donde ϕ es la solución de (1.5). Por la regla de la cadena y la definición de corchete de Poisson, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) = \{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}(\phi(t, t_0, z_0)), \quad (1.8)$$

donde $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$.

Teorema 1.3.1. Sean F, G y H funciones reales diferenciables definidas en un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^{2n} . Entonces

1. F es una integral de (1.5) si y sólo si $\{F, H\} = 0$.
2. H es una integral de (1.5).
3. Si F y G son integrales de (1.5), entonces también lo es $\{F, G\}$.

Demostración. La afirmación (1) se sigue directamente de la definición de integral y de (1.8). (2) se obtiene de (1) y del hecho de que el corchete de Poisson es antisimétrico, por lo que $\{H, H\} = 0$. Finalmente, (3) se obtiene de la identidad de Jacobi (1.7). ■

Si $\{F, G\} = 0$ entonces F y G se dice que están en *involución*. Si un Hamiltoniano \mathcal{H} de n grados de libertad tiene n integrales independientes en involución, entonces diremos que el Hamiltoniano es *integrable*.

Definición 1.3.3. Un punto de equilibrio ζ del sistema Hamiltoniano (1.5), esto es, $\nabla \mathcal{H}(\zeta) = 0$ es estable si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\zeta - \phi(t, z_0)\| < \varepsilon$ para todo t cuando $\|\zeta - z_0\| < \delta$.

Teorema 1.3.2 (Dirichlet). Si ζ es un mínimo o máximo local estricto de \mathcal{H} , entonces ζ es estable.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\zeta = 0$ y $\mathcal{H}(0) = 0$. Desde que $\mathcal{H}(0) = 0$ y 0 es un mínimo estricto para \mathcal{H} , entonces existe un $\eta > 0$ tal que $\mathcal{H}(z)$ es definido positivo para $0 < \|z\| \leq \eta$. Sea $\kappa = \min(\varepsilon, \eta)$ y $M = \min\{\mathcal{H}(z) : \|z\| = \kappa\}$, entonces $M > 0$. Como $\mathcal{H}(0) = 0$ y \mathcal{H} es una función continua, existe un $\delta > 0$ tal que $\mathcal{H}(z) < M$ para $\|z\| < \delta$. Si $\|z_0\| < \delta$, entonces $\mathcal{H}(z_0) = \mathcal{H}(\phi(t, z_0)) < M$ para todo t . Esto implica que $\|\phi(t, z_0)\| < \kappa \leq \varepsilon$ para todo t , pues de lo contrario, existiría un tiempo t' con $\|\phi(t', z_0)\| = \kappa$ tal que $\mathcal{H}(\phi(t', z_0)) \geq M$, una contradicción. Por lo tanto, $\zeta = 0$ es una solución de equilibrio estable. ■

1.3.2. El oscilador armónico

Un oscilador armónico es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal y autónomo, de la forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.9)$$

donde ω es una constante positiva. Si introducimos la variable conjugada $u = \dot{x}/\omega$ el sistema (1.9) se puede escribir como el sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega u = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \\ \dot{u} &= -\omega x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.10)$$

con función Hamiltoniana $\mathcal{H} = \frac{\omega}{2}(x^2 + u^2)$.

La variable u es una velocidad escalar y, así, el plano x, u es esencialmente el plano posición-velocidad, o el espacio de fase de la física. El teorema básico de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales establece que a través de cada punto (x_0, u_0) en el plano, existe una solución única, que pasa por este punto en particular, para el instante t_0 . La solución general esta dada por

$$\begin{bmatrix} x(t, t_0, x_0, u_0) \\ u(t, t_0, x_0, u_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega(t - t_0) & -\sin \omega(t - t_0) \\ \sin \omega(t - t_0) & \cos \omega(t - t_0) \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Las curvas solución son círculos parametrizados. La razón por la que se introduce la velocidad escalar en lugar de utilizar la velocidad en sí, es para que las curvas solución se conviertan en círculos en lugar de elipses. En sistemas dinámicos, la geometría de la familia de curvas es de gran importancia. Desde que el sistema es independiente del tiempo, éste admite \mathcal{H} como una integral según el Teorema 1.3.1 (obsérvese que $\dot{\mathcal{H}} = \omega x \dot{x} + \omega u \dot{u} = 0$).

Debido a que una solución se encuentra en el conjunto, donde $\mathcal{H} = \text{constante}$, que es un círculo en el plano x, u , la integral por sí sola da la geometría de las curvas solución en el plano. Como el origen es un mínimo local para \mathcal{H} , por lo que el origen es estable. Al introducir las coordenadas polares, $r^2 = x^2 + u^2$, $\theta = \tan^{-1}(u/x)$, las ecuaciones (1.10) se

conviertan en

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = -\omega. \quad (1.12)$$

Se observa nuevamente que las soluciones se encuentran en círculos alrededor del origen porque, $\dot{r} = 0$. Los círculos se barren en el sentido de las agujas del reloj con velocidad angular constante ω . Pero, las ecuaciones en coordenadas polares no se parecen a las ecuaciones Hamiltonianas ya que $\mathcal{H}(r, \theta) = \frac{1}{2}r^2$, por lo que una mejor opción será

$$I = \frac{1}{2}(x^2 + u^2), \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{x}\right)$$

de modo que, $\mathcal{H}(I, \theta) = \frac{1}{2}\omega I$ y las ecuaciones se convierten en

$$\dot{I} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0, \quad \dot{\theta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \omega$$

Así, tenemos que (I, θ) son las coordenadas polares naturales en el estudio de los sistemas Hamiltonianos y se denominan variables acción ángulo. Las coordenadas que conservan el carácter Hamiltoniano del problema, se denominan coordenadas simplécticas o coordenadas canónicas. Este tipo de transformaciones serán tratadas en la sección 1.4.

1.4. Transformaciones simplécticas

Las transformaciones simplécticas juegan un papel importante en la teoría de Sistemas Hamiltonianos, pues son un tipo de cambio de coordenadas que preservan la estructura Hamiltoniana.

Definición 1.4.1. Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{K}^{2n} , donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . Una transformación de coordenadas $E: U \mapsto \mathbb{K}^{2n}$ es llamada simpléctica o transformación canónica si es un difeomorfismo y para cada $z \in U$ satisface

$$[D_z E(z)]^T \mathbb{J} D_z E(z) = \mathbb{J}. \quad (1.13)$$

En lo que sigue, se denotará el cambio de coordenadas simplécticas por $\zeta = E(z)$ y su inversa por $z = \mathbf{Z}(\zeta)$, o aún,

$$\zeta = E(z), \quad z = \mathbf{Z}(E(z)) = \mathbf{Z}(\zeta)$$

y también usaremos la notación

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = E(z) = E(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (1.14)$$

Se sigue inmediatamente de la definición de transformación simpléctica que

$$D_z E(z) \mathbb{J} [D_z E(z)]^T = \mathbb{J}.$$

La principal importancia de las transformaciones simplécticas radica en el hecho de preservar la estructura Hamiltoniana de las ecuaciones. O sea, al definir la función “Hamiltoniana” $\mathcal{K}: \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{K}(\zeta) = \mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) := \mathcal{H}(\mathbf{Z}(\zeta)), \quad (1.15)$$

donde $\mathcal{U} = E(U)$, entonces se verifica que

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{\partial E}{\partial z}(\mathbf{z}) \dot{z} = \frac{\partial E}{\partial z}(z) \mathbb{J} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}(z) \right)^T \\ &= \frac{\partial E}{\partial z}(z) \mathbb{J} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}(\zeta) \frac{\partial E}{\partial z}(z) \right)^T \\ &= \mathbb{J} \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \zeta}(\zeta) = \mathbb{J} \nabla_{\zeta} \mathcal{H}(\zeta). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Existe una generalización de los resultados anteriores para el caso de transformaciones μ -simplécticas, definidas como difeomorfismos que satisfacen la propiedad

$$[D_z E(z)]^T \mathbb{J} D_z E(z) = \mu \mathbb{J}, \quad (1.17)$$

o equivalentemente,

$$[D_\zeta Z(\zeta)]^T \mathbb{J} D_\zeta Z(\zeta) = \mu \mathbb{J}, \quad (1.18)$$

donde $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ es una constante llamada multiplicador. Al igual que las transformaciones simplécticas las transformaciones μ -simplécticas preservan la estructura Hamiltoniana de las ecuaciones con la sustitución de la función Hamiltoniana \mathcal{K} por el Hamiltoniano

$$\mathcal{K}(\zeta) = \mu \mathcal{H}(\mathbf{Z}(\zeta)). \quad (1.19)$$

Ejemplo 1.4.1. Un isomorfismo $T: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ es una aplicación μ -simpléctica si y sólo si,

$$T^T \mathbb{J} T = \mu \mathbb{J}.$$

Ejemplo 1.4.2. Consideremos en \mathbb{R}^{2n} las coordenadas $z = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ y sea la transformación de coordenadas

$$E: (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P}),$$

definida por

$$\mathbf{Q} = \alpha \mathbf{q}, \quad \mathbf{P} = \alpha \mathbf{p},$$

donde α es una constante no nula. Luego,

$$T := \frac{\partial E}{\partial z} = \alpha \text{diag}(1, \dots, 1) = \alpha I$$

donde I es la matriz identidad de orden $2n$. Por lo tanto,

$$T^T \mathbb{J} T = \alpha^2 \mathbb{J},$$

es decir, la transformación de coordenadas E es $\mu := \alpha^2$ -simpléctica.

Ahora, aplicando esta transformación de coordenadas al problema de los n -cuerpos

cuyo Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}, \quad (1.20)$$

obtenemos el Hamiltoniano transformado

$$\mathcal{K}(\zeta) = \alpha^2 \mathcal{H}(E^{-1}(\zeta)), \quad (1.21)$$

donde $\zeta = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Luego, substituyendo $\mathbf{q} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{Q}$ y $\mathbf{p} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{P}$ en (1.21) llegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\zeta) &= \alpha^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{P}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G\alpha m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{P}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G\alpha^3 m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Así, esta transformación de coordenadas E nos permite suponer sin pérdida de generalidad que siempre podemos tomar $G = 1$, para ésto basta considerar α tal que $G\alpha^3 = 1$. De esta forma podemos suponer desde el inicio que en el problema de los n -cuerpos la constante de Gravitación Universal toma el valor de 1.

Ejemplo 1.4.3 (Coordenadas acción ángulo). Consideremos la transformación de coordenadas

$$E: (r_1, \dots, r_n, \theta_1, \dots, \theta_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

definida por

$$x_j = \sqrt{2r_j} \cos \theta_j, \quad y_j = \sqrt{2r_j} \sin \theta_j \quad (1.23)$$

cuya inversa es dada por

$$r_j = \frac{1}{2}(x_j^2 + y_j^2), \quad \theta_j = \arctan\left(\frac{y_j}{x_j}\right). \quad (1.24)$$

Este cambio de coordenadas es una transformación simpléctica, dado que su matriz

Jacobiana $T = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ con $z = (r, \theta)$ y $\zeta = (x, y)$ consiste de los cuatro bloques diagonales

$$A = \text{diag} \left[\frac{1}{\sqrt{2r_1}} \cos \theta_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{2r_n}} \cos \theta_n \right],$$

$$B = \text{diag} \left[-\sqrt{2r_1} \sin \theta_1, \dots, -\sqrt{2r_n} \sin \theta_n \right],$$

$$C = \text{diag} \left[\frac{1}{\sqrt{2r_1}} \sin \theta_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{2r_n}} \sin \theta_n \right],$$

$$D = \text{diag} \left[\sqrt{2r_1} \cos \theta_1, \dots, \sqrt{2r_n} \cos \theta_n \right],$$

de donde vemos que $A^T C$ y $B^T D$ son matrices simétricas y $A^T D - C^T B = I$. En este caso $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

Las variables r_j, θ_j con $j = 1, \dots, n$ son llamadas *variables acción ángulo*.

Una aplicación inmediata de esta transformación de coordenadas es la siguiente. Considere el Hamiltoniano \mathcal{H} en \mathbb{R}^{2n} que consiste de n -osciladores armónicos desacoplados, o sea,

$$\mathcal{H} = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \dots + \frac{\omega_n}{2}(x_n^2 + y_n^2).$$

Por medio del cambio de coordenadas acción ángulo, este Hamiltoniano asume la forma

$$\mathcal{K} = \omega_1 r_1 + \dots + \omega_n r_n.$$

Ejemplo 1.4.4 (Coordenadas complejas). Consideremos la transformación de coordenadas

$$E: (x_1, x_2, y_1, y_2) \longmapsto (q_1, q_2, p_1, p_2)$$

definida por

$$q_1 = y_1 + ix_1, \quad q_2 = y_2 + ix_2, \tag{1.25}$$

$$p_1 = y_1 - ix_1, \quad p_2 = y_2 - ix_2.$$

Este cambio de coordenadas es una transformación $2i$ -simpléctica. Como aplicación de esta transformación de coordenadas, consideremos la función Hamiltoniana en la

forma

$$\mathcal{H} = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + y_2^2).$$

El nuevo Hamiltoniano será $\mathcal{K} = 2i\mathcal{H}$, donde \mathcal{H} es la función Hamiltoniana arriba expresada en términos de q_k, p_k por la fórmula (1.25), o sea,

$$\mathcal{K} = 2i\mathcal{H} = i\omega_1 q_1 p_1 + i\omega_2 q_2 p_2.$$

1.4.1. Funciones Generadoras

Usaremos la notación clásica $z = (q, p)$, así la forma simpléctica estándar es

$$\Omega = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j := dq \wedge dp.$$

Sea $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$ una transformación de variables, y asuma que las funciones Q y P están definidas en una bola abierta U en \mathbb{R}^{2n} . Esta transformación será simpléctica si y sólo si,

$$dq \wedge dp = dQ \wedge dP \iff d(qdp - QdP) = 0. \quad (1.26)$$

Definiendo la 1-forma $\sigma_1 = qdp - QdP$ tendremos que σ_1 es cerrada si y sólo si, $\sigma_2 = \sigma_1 + d(QP) = qdp + PdQ$ es cerrada. Desde que U es una bola abierta en \mathbb{R}^{2n} , por el lema de Poincaré (cerrada, si y sólo si, exacta) se tiene que el cambio de coordenadas es simpléctica, si y sólo si, cada una de las siguientes 1-formas es cerrada

$$\sigma_1 = qdp - QdP$$

$$\sigma_2 = qdp + PdQ = \sigma_1 + d(QP)$$

$$\sigma_3 = pdq - PdQ = \sigma_2 + d(pq)$$

$$\sigma_4 = pdq + QdP = \sigma_3 + d(PQ).$$

Luego, la transformación de coordenadas es simpléctica si y sólo si, una de las funciones $S_1 = S(p, P), S_2 = S_2(p, Q), S_3 = S_3(q, Q), S_4 = S_4(q, P)$ existe y satisface respectivamente

$$dS_1 = \sigma_1, \quad dS_2 = \sigma_2, \quad dS_3 = \sigma_3, \quad dS_4 = \sigma_4.$$

Estas informaciones dan una forma fácil de construir coordenadas simplécticas. Por ejemplo, asumamos que exista una función $S_1(p, P)$ tal que $dS_1 = \sigma_1$, así

$$dS_1 = \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P)dp + \frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)dP = \sigma_1$$

si y sólo si,

$$\frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P) = q, \quad -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) = Q. \quad (1.27)$$

Por lo tanto, si (1.27) define una transformación de coordenadas de (q, p) a (Q, P) , entonces ésta es simpléctica. Asumiendo ahora que el Hessiano de S_1 es no singular y considerando la función $F(q, p, P) = \frac{\partial S_1}{\partial P} - q = 0$ se sigue del Teorema de la Función Implícita que podemos determinar P como función de q y p y de la ecuación $Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P)$, obtenemos $Q = Q(q, p)$. Así, de forma similar tenemos

Teorema 1.4.1. *Los siguientes cambios de variables definen una transformación local de coordenadas simplécticas*

$$\begin{aligned} q &= \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P), \quad Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) \quad \text{cuando} \quad \frac{\partial^2 S_1}{\partial p \partial P}(p, P) \quad \text{es no singular;} \\ q &= \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q), \quad P = \frac{\partial S_2}{\partial Q}(p, Q) \quad \text{cuando} \quad \frac{\partial^2 S_2}{\partial p \partial Q}(p, Q) \quad \text{es no singular;} \\ p &= \frac{\partial S_3}{\partial q}(q, Q), \quad P = -\frac{\partial S_3}{\partial Q}(q, Q) \quad \text{cuando} \quad \frac{\partial^2 S_3}{\partial q \partial Q}(q, Q) \quad \text{es no singular;} \\ p &= \frac{\partial S_4}{\partial q}(q, P), \quad Q = \frac{\partial S_4}{\partial P}(q, P) \quad \text{cuando} \quad \frac{\partial^2 S_4}{\partial q \partial P}(q, P) \quad \text{es no singular.} \end{aligned}$$

Cada una de las funciones S_j ($j = 1, 2, 3, 4$) es llamada *función generadora o función generatriz*.

Sea $S_2(p, Q) = pQ$, entonces $\frac{\partial^2 S_2}{\partial p \partial Q}(p, Q) = I$ es no singular. Así, esta función

define una transformación de coordenadas simplécticas $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ dada por

$$q = \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q) = Q, \quad P = \frac{\partial S_2}{\partial Q} = p.$$

Es decir, $(q, p) \rightarrow (Q = q, P = p)$ es la aplicación identidad.

Ejemplo 1.4.5 (Transformaciones de Mathieu). Supongamos que tenemos una transformación $Q = f(q)$, con $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que $\partial f / \partial q$ es invertible. Entonces esta transformación se puede extender a una transformación simpléctica definiendo

$$S_4(q, P) = f(q)^T P$$

esto es,

$$Q = f(q), \quad p = \frac{\partial f}{\partial q}(q) P.$$

Estas transformaciones son llamadas transformaciones de Mathieu.

1.4.2. Transformaciones de Lie

El método de transformaciones de Lie, iniciado por Deprit [10], es un proceso para definir un cambio simpléctico de variables próximo de la identidad en un sistema de ecuaciones que depende de un pequeño parámetro (ver detalles en [16]).

Definición 1.4.2. Un cambio simpléctico de variables $\mathbf{x} \equiv \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ se dice próximo de la identidad si es simpléctico para cada ε fijo y es de la forma $\mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon) = \mathbf{y} + \mathcal{O}(\varepsilon)$; es decir, $\mathbf{X}(\mathbf{y}; 0) = \mathbf{y}$.

Se tiene que $\mathbf{X}(y, 0) = 0$ y $\partial \mathbf{X}(y, \varepsilon) / \partial y$ es no singular para el pequeño parámetro ε , por el teorema la función inversa, la transformación $y \rightarrow \mathbf{X}(y, \varepsilon)$ tiene inversa diferenciable. En consecuencia, si $\mathbf{y} \equiv \mathbf{Y}(\mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon); \varepsilon)$ es la inversa de $\mathbf{x} \equiv \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}; \varepsilon); \varepsilon)$, entonces ambas son simplécticas para ε fijo.

Teorema 1.4.2. La transformación $\mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ es un cambio simpléctico de variables próxima

de la identidad si y sólo si es la solución general de un sistema Hamiltoniano de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\varepsilon} = \mathbb{J}\nabla\mathcal{W}(\mathbf{x}; \varepsilon), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$$

donde \mathcal{W} es diferenciable y \mathbb{J} es la matriz antisimétrica clásica.

Ver la demostración en [16].

Sea $\mathcal{H}(\mathbf{x}; \varepsilon)$ un Hamiltoniano y $\mathcal{G}(\mathbf{y}; \varepsilon) \equiv \mathcal{H}(\mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon); \varepsilon)$ el Hamiltoniano en las nuevas coordenadas. \mathcal{G} es llamada la transformación de Lie de \mathcal{H} generada por \mathcal{W} . Denotando \mathcal{H} por \mathcal{H}_* y \mathcal{G} por \mathcal{H}^* , el método de *transformaciones de Lie* es introducido por las siguientes fórmulas

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}; \varepsilon) = \mathcal{H}_*(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathcal{H}_i^0(\mathbf{x}), \quad (1.28)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{y}; \varepsilon) = \mathcal{H}^*(\mathbf{y}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathcal{H}_i^0(\mathbf{y}), \quad (1.29)$$

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathcal{W}_{i+1}(\mathbf{x}), \quad (1.30)$$

donde $\{\mathcal{H}_j^i\}$ para $i = 1, 2, \dots$ y $j = 0, 1, \dots$ verifican las identidades recursivas

$$\mathcal{H}_j^i = \mathcal{H}_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{\mathcal{H}_{j+k}^{i-1}, \mathcal{W}_{k+1}\}.$$

Las relaciones entre esas funciones es ilustrada más fácilmente en el triángulo de Lie

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}_0^0 & & & & \\ \downarrow & & & & \\ \mathcal{H}_1^0 & \rightarrow & \mathcal{H}_0^1 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{H}_2^0 & \rightarrow & \mathcal{H}_1^1 & \rightarrow & \mathcal{H}_0^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Por ejemplo, para calcular la expansión en series para \mathcal{H}_* a través de términos de

orden ε^2 , primero determinamos \mathcal{H}_0^1 por la fórmula

$$\mathcal{H}_0^1 = \mathcal{H}_1^0 + \{\mathcal{H}_0^0, \mathcal{W}_1\}$$

el cual, nos da el término de orden ε y entonces calculamos

$$\mathcal{H}_1^1 = \mathcal{H}_2^0 + \{\mathcal{H}_1^0, \mathcal{W}_1\} + \{\mathcal{H}_0^0, \mathcal{W}_2\}$$

y $\mathcal{H}_0^2 = \mathcal{H}_1^1 + \{\mathcal{H}_0^1, \mathcal{W}_1\}$ obteniendo

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{x}; \varepsilon) = \mathcal{H}_0^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathcal{H}_0^1(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_0^2(\mathbf{x}) + \dots$$

1.4.3. Formas Normales

La esencia de normalización es el uso de transformaciones de Lie para simplificar un sistema Hamiltoniano [10]. Cuando el Hamiltoniano, y por ende las ecuaciones, están en una forma suficientemente simple, ellas se dicen en “forma normal”. En este sentido, si $\mathbf{x} \equiv \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ es una transformación de Lie, tal que el Hamiltoniano transformado $\mathcal{K}(\mathbf{y}; \varepsilon) = \mathcal{H}(\mathbf{x}; \varepsilon)$ está en su forma normal. Entonces, \mathcal{K} es llamado la forma normal de \mathcal{H} .

Dado un Hamiltoniano analítico \mathcal{H} , el cual, tiene un punto de equilibrio en el origen de \mathbb{R}^{2n} y es cero en el origen, entonces \mathcal{H} puede ser expandido en series de Taylor por

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathcal{H}_i^0(\mathbf{x}), \quad (1.31)$$

donde \mathcal{H}_i^0 es un polinomio homogéneo en \mathbf{x} de grado $i + 2$. Las ecuaciones linealizadas alrededor del punto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \mathbb{J}S\mathbf{x} = \mathbb{J}\nabla\mathcal{H}_0^0,$$

donde S es una matriz real simétrica de orden $2n \times 2n$, y $A = \mathbb{J}S$ es una matriz Hamiltoniana. La solución general del sistema linealizado es $\varphi(t, \xi) = \exp(At)\xi$.

El teorema general sobre formas normales es como sigue.

Teorema 1.4.3. *Sea A una matriz Hamiltoniana. Entonces existe un cambio de variables formal simpléctica, $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon) = \mathbf{y} + \dots$, que transforma el Hamiltoniano (1.31) a*

$$\mathcal{H}(\mathbf{y}; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \mathcal{H}_0^j(\mathbf{y}),$$

donde \mathcal{H}_0^j es un polinomio homogéneo de grado $j + 2$ tal que

$$\mathcal{H}_0^j(e^{A^T t} \mathbf{y}) \equiv \mathcal{H}_0^j(\mathbf{y}), \quad (1.32)$$

para todo $j = 0, 1, \dots$, todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$, y todo $t \in \mathbb{R}$.

Sea $\mathcal{H}_0^T = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T R \mathbf{x}$ el Hamiltoniano cuadrático para la ecuación lineal adjunta; esto es, $A^T = \mathbb{J}R$. Entonces (1.32) es equivalente a $\{\mathcal{H}^i, \mathcal{H}_0^T\} = 0$ para todo i .

Para el caso, en el cual la matriz A es semisimple, esto es, diagonalizable sobre los números complejos, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.4.4. *Sea A semisimple. Entonces existe un cambio de variables formal simpléctico, $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon) = \mathbf{y} + \dots$, que transforma el Hamiltoniano (1.31) a*

$$\mathcal{H}(\mathbf{y}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathcal{H}_0^i(\mathbf{y}), \quad (1.33)$$

donde \mathcal{H}^i es un polinomio homogéneo de grado $i + 2$ tal que

$$\mathcal{H}_0^i(e^{At} \mathbf{y}) \equiv \mathcal{H}_0^i(\mathbf{y}) \quad (1.34)$$

para todo $i = 0, 1, \dots$, todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$, y todo $t \in \mathbb{R}$.

La fórmula (1.34) es la definición clásica de forma normal para un Hamiltoniano cercano a un punto de equilibrio con parte lineal semisimple, y es equivalente a $\{\mathcal{H}_0^i, \mathcal{H}_0^0\} = 0$ para todo i .

Ejemplo 1.4.6 (Ecuación de Duffing). El Hamiltoniano de la ecuación de Duffing en coordenadas rectangulares (q, p) está dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) + \frac{\gamma}{4}q^4, \quad (1.35)$$

y en variables de acción ángulo, (I, ϕ) asume la forma

$$\mathcal{H} = I + \frac{\gamma}{8}I^2(3 + 4 \cos 2\phi + \cos 4\phi). \quad (1.36)$$

Para encontrar la forma normal de (1.36) procedemos como sigue:

Consideremos γ como un pequeño parámetro y tomemos $\varepsilon = \gamma/8$. Luego, podemos escribir el Hamiltoniano (1.36) en la forma

$$\mathcal{H}(\varepsilon, I, \phi) = \mathcal{H}^*(\varepsilon, I, \phi) = \mathcal{H}_0^0(I, \phi) + \varepsilon \mathcal{H}_1^0(I, \phi),$$

donde

$$\mathcal{H}_0^0 = I, \quad \mathcal{H}_1^0 = I^2(3 + 4 \cos 2\phi + \cos 4\phi).$$

Ahora, de la primera etapa del triángulo de Lie, se obtiene la ecuación

$$\mathcal{H}_0^1 = \mathcal{H}_1^0 + \{\mathcal{H}_0^0, W_1\},$$

de la cual resulta

$$\mathcal{H}_0^1 = I^2(3 + 4 \cos 2\phi + \cos 4\phi) - \frac{\partial W_1}{\partial \phi}. \quad (1.37)$$

A continuación, elegimos W_1 de modo que \mathcal{H}_0^1 contenga el menor número posible de términos. Desde que, la forma más simple de \mathcal{H}_0^1 es

$$\mathcal{H}_0^1 = 3I^2,$$

reemplazando esta expresión en la ecuación (1.37) encontramos que la función gene-

radora W_1 tiene la forma

$$W_1 = I^2 \left(2 \sin 2\phi + \frac{1}{4} \sin 4\phi \right).$$

Con esta elección de W_1 , el Hamiltoniano en las nuevas coordenadas, (J, θ) , queda expresado por

$$\mathcal{H}_*(\varepsilon, J, \theta) = J + \frac{3\gamma}{8} J^2 + \mathcal{O}(\gamma^2),$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{J} = \mathcal{O}(\gamma^2), \quad \dot{\theta} = -1 - \frac{3\gamma}{4} J + \mathcal{O}(\gamma^2).$$

Obsérvese, que en estas coordenadas, hasta los términos $\mathcal{O}(\gamma^2)$, las soluciones se mueven en círculos $J = \text{constante}$ con una frecuencia angular uniforme de $-1 - \frac{3\gamma}{4} J$.

Ejemplo 1.4.7. Consideremos el Hamiltoniano con dos grados de libertad

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{H}_0(q, p) + \mathcal{H}_1(q, p) + \mathcal{H}_2(q, p) + \dots, \quad (1.38)$$

donde

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2)$$

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son las frecuencias y \mathcal{H}_j representa un polinomio de grado $j + 2$ en las variables q_1, q_2, p_1, p_2 .

Para calcular la forma normal del Hamiltoniano (1.38) realizamos los siguientes pasos:

- Introducimos un parámetro ε por medio de la transformación lineal ε^{-2} -simplética,

$$Q_1 = \varepsilon^{-1} q_1, \quad Q_2 = \varepsilon^{-1} q_2, \quad P_1 = \varepsilon^{-1} p_1, \quad P_2 = \varepsilon^{-1} p_2.$$

- Pasamos a coordenadas complejas $(z, \bar{z}) = (z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ a través de la transformación

$-2i$ -simplética,

$$z_1 = Q_1 + iP_1, \quad \bar{z}_1 = Q_1 - iP_1, \quad z_2 = Q_2 + iP_2, \quad \bar{z}_2 = Q_2 - iP_2. \quad (1.39)$$

- El Hamiltoniano resultante asume la forma

$$\mathcal{H}_*(z, \bar{z}) = -i(\omega_1 z_1 \bar{z}_1 + \omega_2 z_2 \bar{z}_2) + \varepsilon \mathcal{H}_1^0(z, \bar{z}) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2^0(z, \bar{z}) + \dots,$$

donde

$$\mathcal{H}_j^0 = \sum_{k_1+k_2+\ell_1+\ell_2=j+2} a_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \bar{z}_1^{\ell_1} \bar{z}_2^{\ell_2}.$$

- En variables complejas el operador de Lie asociado a \mathcal{H}_0 es

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}_0} = -i \left[\omega_1 \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) + \omega_2 \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right) \right].$$

- La acción del operador de Lie sobre un monomio

$$m(z, \bar{z}) = g_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \bar{z}_1^{\ell_1} \bar{z}_2^{\ell_2}$$

da como resultado

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}_0}(m) = -i g_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} [\omega_1(k_1 - \ell_1) + \omega_2(k_2 - \ell_2)] m.$$

- Consideremos la función generadora

$$W(z, \bar{z}) = W_1(z, \bar{z}) + \varepsilon W_2(z, \bar{z}) + \dots$$

donde

$$W_j = \sum_{k_1+k_2+\ell_1+\ell_2=j+2} g_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \bar{z}_1^{\ell_1} \bar{z}_2^{\ell_2}$$

y el Hamiltoniano normalizado

$$\mathcal{H}^*(z, \bar{z}) = -i(\omega_1 z_1 \bar{z}_1 + \omega_2 z_1 \bar{z}_2) + \varepsilon \mathcal{H}_0^1(z, \bar{z}) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_0^2(z, \bar{z}) + \dots$$

donde

$$\mathcal{H}_0^j = \sum_{k_1+k_2+\ell_1+\ell_2=j+2} b_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \bar{z}_1^{\ell_1} \bar{z}_2^{\ell_2}$$

- De la primera etapa del Triángulo de Lie obtenemos

$$b_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} = a_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} + i g_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} [\omega_1(k_1 - \ell_1) + \omega_2(k_2 - \ell_2)].$$

- Si ω_1, ω_2 son independientes sobre \mathbb{Q} , es decir, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ entonces el factor $\omega_1(k_1 - \ell_1) + \omega_2(k_2 - \ell_2) \neq 0, \forall (k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in \mathbb{N}^4$. Luego, los coeficientes de la función generadora W_1 pueden ser elegidos como

$$g_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} = i \frac{a_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2}}{\omega_1(k_1 - \ell_1) + \omega_2(k_2 - \ell_2)}$$

y en consecuencia, los coeficientes $b_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2}$ del Hamiltoniano normalizado \mathcal{H}_0^1 son cero.

- Si $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$, definimos el \mathbb{Z} -módulo

$$M_\omega = \{(k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^4 : \omega_1(k_1 - \ell_1) + \omega_2(k_2 - \ell_2) = 0\}.$$

En este caso, los coeficientes de la función generadora se eligen como

$$g_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} = \begin{cases} 0, & (k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in M_\omega \\ i \frac{a_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2}}{\omega_1(k_1 - \ell_1) + \omega_2(k_2 - \ell_2)}, & (k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \notin M_\omega \end{cases}$$

y los coeficientes de los términos en el Hamiltoniano normalizado \mathcal{H}_1 son

$$b_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} = \begin{cases} a_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2}, & (k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in M_\omega \\ 0, & (k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \notin M_\omega \end{cases}$$

Los términos $b_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} = a_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2}$ que no son eliminados durante el proceso de normalización son llamados términos resonantes.

En consecuencia, los términos que aparecen en el Hamiltoniano normalizado son de la forma

$$b_{k_1 k_2 \ell_1 \ell_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \bar{z}_1^{\ell_1} \bar{z}_2^{\ell_2}$$

con

$$\omega_1(k_1 - \ell_1) + \omega_2(k_2 - \ell_2) = 0.$$

1.5. Estabilidad en sistemas Hamiltonianos

En esta subsección se presentarán algunos conceptos y resultados sobre estabilidad para sistemas Hamiltonianos. Principalmente, introducimos un teorema sobre estabilidad paramétrica para sistemas Hamiltonianos.

Considere el sistema lineal Hamiltoniano

$$\dot{z} = Az = \mathbb{J} \nabla \mathcal{H}(z), \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} z^T S z \quad (1.40)$$

donde S es una matriz real simétrica $2n \times 2n$, \mathbb{J} es la matriz simpléctica $2n \times 2n$ de la teoría Hamiltoniana y $A = \mathbb{J}S$ es una matriz Hamiltoniana.

Definición 1.5.1. *El sistema de ecuaciones lineales Hamiltonianas (1.40) es estable si todas las soluciones de (1.40) son acotadas para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, $\|e^{At}\|$ es uniformemente acotada. Equivalentemente (1.40) es estable si todos los valores propios de A son imaginarios puros y A es diagonalizable sobre los números complejos.*

Así, si el sistema lineal (1.40) es estable, entonces podemos escoger coordenadas reales simplécticas $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$\mathcal{H} = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \dots + \frac{\omega_n}{2}(x_n^2 + y_n^2),$$

donde los valores propios de A son $\pm\omega_1 i, \pm\omega_2 i, \dots, \pm\omega_n i$. En el mismo sentido, podemos escoger variables acción ángulo

$$I_j = \frac{1}{2}(x_j^2 + y_j^2), \quad \phi_j = \arctan\left(\frac{y_j}{x_j}\right), \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n \quad (1.41)$$

tal que

$$\mathcal{H} = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \dots + \omega_n I_n. \quad (1.42)$$

Ahora, si S es una matriz definida o equivalentemente todos los ω_j 's son del mismo signo, entonces por el Teorema de Dirichlet implica que el sistema (1.40) es estable y también implica que una pequeña perturbación lineal Hamiltoniana es estable. Esto conduce al siguiente concepto y Teorema.

Definición 1.5.2. *El sistema lineal Hamiltoniano (1.40) es paramétricamente estable (o fuertemente estable) si éste y cualquier perturbación lineal Hamiltoniana suficientemente pequeña son estables. Esto es, (1.40) es paramétricamente estable si existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\dot{z} = Bz$ es estable, donde B es cualquier matriz lineal Hamiltoniana con $\|B - A\| < \varepsilon$.*

Sean $\pm\alpha_1 i, \pm\alpha_2 i, \dots, \pm\alpha_s i$ los valores propios de la matriz A , y sean \mathbb{V}_j , $j = 1, \dots, s$, los subespacios lineales reales maximales donde A tiene valores propios $\pm\alpha_j i$. Así \mathbb{V}_j es un subespacio simpléctico A -invariante, A restringido a \mathbb{V}_j tiene valores propios $\pm\alpha_j i$, y $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_s$. Sea \mathbb{H}_j la restricción de \mathbb{H} a \mathbb{V}_j .

Teorema 1.5.1 (Krein-Gel'fand). *El sistema (1.40) es paramétricamente estable si y sólo si*

- i) todos los valores propios de A son imaginarios puros,*
- ii) A es no singular,*
- iii) A es diagonalizable sobre los números complejos, y*
- iv) el Hamiltoniano \mathcal{H}_j es definido positivo o negativo para cada j .*

Ver la demostración en [23] o [16].

1.6. Teorema del Promedio de Reeb

Consideremos el Hamiltoniano autónomo con n grados de libertad

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0(I) + \varepsilon \mathcal{H}_1(I, \theta, y) + O(\varepsilon^2), \quad (1.43)$$

donde $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1: U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables, \mathcal{H}_1 es 2π -periódica en θ , $(\theta, I) \in TS^1$, $y \in \mathbb{R}^{2n-2}$ son coordenadas simplécticas y ε es un pequeño parámetro. Supongamos además que $\omega(I) = \partial \mathcal{H}_0 / \partial I \neq 0$. Las ecuaciones de movimiento asociadas al Hamiltoniano (1.43) están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{I} &= O(\varepsilon), & \dot{y} &= \varepsilon \mathbb{J} \nabla_y \mathcal{H}_1(I, \theta, y) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{\theta} &= -\omega - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial I}(I, \theta, y) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde \mathbb{J} es la matriz antisimétrica de Poisson. Es claro que, para $\varepsilon = 0$, el Hamiltoniano (1.43) es integrable y todas sus soluciones son periódicas de periodo $T(I) = 2\pi/\omega(I)$ y están dadas por

$$\varphi_t^0(I, \theta, y) = (I, -\omega t + \theta, y). \quad (1.45)$$

Se define el Promedio de \mathcal{H}_1 sobre el flujo del sistema no perturbado ($\varepsilon = 0$) como

la integral

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{H}_1(\varphi_s^0) ds. \quad (1.46)$$

Efectuando el cambio de variable $u = -\omega t + \theta$, usando la periodicidad de \mathcal{H}_1 y realizando algunas manipulaciones, la integral (1.46) asume la forma

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(I, \theta, y) d\theta. \quad (1.47)$$

De este modo, $\bar{\mathcal{H}}$ no depende de θ y en consecuencia $\{\mathcal{H}_0, \bar{\mathcal{H}}\} = 0$, donde $\{ , \}$ es el Corchete de Poisson para funciones, definido por

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \nabla f(I, \theta, y) \mathbb{J} \nabla g(I, \theta, y), \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial I} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial I} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial g}{\partial y_{j+n-1}} - \frac{\partial f}{\partial y_{n+j-1}} \frac{\partial g}{\partial y_j} \right). \end{aligned}$$

Sea un valor fijo h y considere $\mathcal{N}_\varepsilon(h) = \mathcal{H}_\varepsilon^{-1}(h)$. Sobre $\mathcal{N}_0(h) = \mathcal{H}_0^{-1}(h)$, defina la relación de equivalencia “ \sim ” que identifica dos puntos en $\mathcal{N}_0(h)$ que están sobre la misma órbita. Denotemos por $\mathcal{B}(h)$ el espacio cociente $\mathcal{N}_0(h)/\sim$ y por $\pi: \mathcal{N}_0(h) \rightarrow \mathcal{B}(h)$ la proyección.

El siguiente resultado da condiciones suficientes para caracterizar las soluciones periódicas del sistema Hamiltoniano asociado a \mathcal{H}_ε . Para mayor información relacionado a este tema consulte [21], [24] y [17].

Teorema 1.6.1 (Reeb 1952). *Si $\bar{\mathcal{H}}$ tiene un punto crítico no degenerado en $\bar{p} \in \mathcal{B}(h)$ con $p \in \mathcal{N}_0(h)$, existen funciones diferenciables $p(\varepsilon)$ y $T(\varepsilon)$ para ε pequeño con $p(0) = p$, $T(0) = T$ y $p(\varepsilon) \in \mathcal{N}_\varepsilon(h)$ la solución de (1.44) pasando por $p(\varepsilon)$ es $T(\varepsilon)$ -periódica. En particular, si los exponentes característicos del punto crítico esto es, los valores propios de la matriz $A = \mathbb{J} D^2 \bar{\mathcal{H}}(\bar{p})$ son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n-2}$, entonces los multiplicadores característicos de la solución periódica pasando por $p(\varepsilon)$ son*

$$1, 1, 1 + \varepsilon \lambda_1 T + O(\varepsilon^2), 1 + \varepsilon \lambda_2 T + O(\varepsilon^2), \dots, 1 + \varepsilon \lambda_{2n-2} T + O(\varepsilon^2).$$

Demostración. En primer lugar, normalizamos el Hamiltoniano (1.43) hasta orden ε por medio de una transformación próxima de la identidad $(I, \theta, y) \rightarrow (I, \theta, y) + \varepsilon \mathbb{J} \nabla W_1(I, \theta, y)$. Para este fin, usando el Método de Lie-Deprit, determinamos la función generadora W_1 , la cual debe ser 2π -periódica en θ . La relación entre \mathcal{H}_1 , W_1 y el Hamiltoniano normalizado a orden ε que denotamos por \mathcal{K}_1 y cuya forma determinaremos, es

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{H}_0 + \{\mathcal{H}_0, W_1\},$$

de lo cual, se sigue que

$$W_1(I, \theta, y) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} \right)^{-1} \int^\theta (\mathcal{K}_1 - \mathcal{H}_1) d\theta. \quad (1.48)$$

Ahora, la función \mathcal{K}_1 estará en la forma normal de Lie, si se verifica que

$$\{\mathcal{H}_0, \mathcal{K}_1\} = \omega \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial \theta} = 0,$$

lo que implica que \mathcal{K}_1 no depende de θ . Por otro lado, la función W_1 dada en (1.48) es 2π -periódica si y sólo si

$$2\pi \mathcal{K}_1 - \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1 d\theta = \int_0^{2\pi} (\mathcal{K}_1 - \mathcal{H}_1) d\theta = 0.$$

Así, para que W_1 exista, \mathcal{K}_1 debe ser el promedio de \mathcal{H}_1 , es decir $\mathcal{K}_1 = \bar{\mathcal{H}}$. De este modo, el sistema (1.44) es equivalente al sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{I} &= O(\varepsilon^2), & \dot{y} &= \varepsilon \mathbb{J} \nabla_y \bar{\mathcal{H}} + O(\varepsilon^2), \\ \dot{\theta} &= -\omega - \varepsilon \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial I}(I, y) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (1.49)$$

con función Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0(I) + \varepsilon \bar{\mathcal{H}}(I, y) + O(\varepsilon^2). \quad (1.50)$$

Por lo tanto, en lo que sigue nos restringimos a trabajar con el Hamiltoniano (1.50).

Para h y θ_0 fijos, consideremos la sección transversal $\Sigma : \theta = \theta_0$ y la sección transversal en el nivel de energía $\sigma = \Sigma \cap \mathcal{N}_\varepsilon(h)$. Ahora dado $z = (I, \theta_0, y) \in \sigma$, se tiene por el Teorema de la Función Implícita que $I = I(\varepsilon) = I(\theta_0, y, \varepsilon) = I_0 + O(\varepsilon)$, con $I_0 = \mathcal{H}_0^{-1}(h)$. De este modo, la aplicación de Poincaré sobre σ , $P_\varepsilon : \sigma \rightarrow \sigma$ es dada por

$$P_\varepsilon(y) = \tilde{\varphi}(T_\varepsilon, z, \varepsilon) = y + \varepsilon T \mathbb{J} \nabla_y \bar{\mathcal{H}}(I_0, y) + O(\varepsilon^2), \quad (1.51)$$

donde $T_\varepsilon = T + O(\varepsilon)$ es el tiempo de primer retorno. Además, la diferencial de P_ε verifica la relación

$$DP_\varepsilon(y) = I + \varepsilon T \mathbb{J} D^2 \bar{\mathcal{H}}(I_0, y) + O(\varepsilon^2). \quad (1.52)$$

Ahora, y es un punto fijo de P_ε si y sólo si

$$f(y, \varepsilon) = T \mathbb{J} \nabla_y \bar{\mathcal{H}}(I_0, y) + O(\varepsilon) = 0.$$

En consecuencia, dado que \bar{p} es un punto crítico no degenerado de $\bar{\mathcal{H}}$, tenemos que $f(\bar{p}, 0) = 0$ y $Df(\bar{p}, 0) = T \mathbb{J} D^2 \bar{\mathcal{H}}(I_0, \bar{p}) \neq 0$. Así, por el Teorema de la Función Implícita, existe una única curva de puntos fijos $\bar{p}(\varepsilon) = \bar{p} + O(\varepsilon)$ de la aplicación P_ε . Por lo tanto, $p(\varepsilon) = (I(\varepsilon), \theta_0, \bar{p}(\varepsilon))$ son condiciones iniciales de soluciones $T_\varepsilon = T + O(\varepsilon)$ periódicas del sistema (1.49).

Por otro lado, si $\varphi(t, p(\varepsilon), \varepsilon)$ es la solución periódica asociada a la condición inicial $p(\varepsilon)$ y $D\varphi(T(\varepsilon), p(\varepsilon), \varepsilon)$ es su matriz de monodromía, entonces se verifica la relación

$$\det(D\varphi(T(\varepsilon), p(\varepsilon), \varepsilon) - \lambda I) = (\lambda - 1)^2 \det(DP_\varepsilon(\bar{p}(\varepsilon)) - \lambda I),$$

donde

$$DP_\varepsilon(\bar{p}(\varepsilon)) = I + \varepsilon T A + O(\varepsilon^2) \quad \text{y} \quad A = \mathbb{J} D^2 \bar{\mathcal{H}}(I_0, \bar{p}).$$

En consecuencia, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n-2}$ son los valores propios de A (exponentes ca-

racterísticos), se sigue que

$$1, 1, 1 + \varepsilon \lambda_1 T + O(\varepsilon^2), \dots, 1 + \varepsilon \lambda_{2n-2} T + O(\varepsilon^2)$$

son los multiplicadores característicos de la solución periódica $\varphi(t, p(\varepsilon), \varepsilon)$. ■

1.7. Teorema de estabilidad lineal

Teorema 1.7.1. *Sean p y \bar{p} como en el Teorema 1.6.1. Si uno o más de los exponentes característicos λ_j es real o tiene parte real no nula, entonces la solución periódica pasando por $p(\varepsilon)$ es inestable en el sentido de Lyapunov. Si la matriz A es paramétricamente estable, entonces la solución periódica pasando por $p(\varepsilon)$ es linealmente estable.*

Demostración. La primera afirmación es inmediata.

Para probar la segunda afirmación, consideramos la transformación de Cayley

$$\Psi: z \rightarrow w = (z - 1)(z + 1)^{-1}, \quad \Psi^{-1}: w \rightarrow z = (1 + w)(1 - w)^{-1}, \quad (1.53)$$

la cual satisface las siguientes propiedades

- $\Psi(1) = 0$, $\Psi(i) = i$ y $\Psi(-1) = \infty$,
- Ψ lleva el círculo unitario del plano z en el eje imaginario del plano w ,
- α es un valor propio de una matriz M si y sólo si $\Psi(\alpha)$ es un valor propio $\Psi(M)$.
- Si M es una matriz simpléctica y no tiene -1 como valor propio, entonces $C = \Psi(M)$ es una matriz Hamiltoniana. Además, si M tiene sólo valores propios con módulo uno y es diagonalizable entonces C tiene sólo valores propios imaginarios puros y es diagonalizable.

Ahora, desde que la diferencial de la aplicación de Poincaré $M = DP_\varepsilon$ dada en (1.52) es una matriz simpléctica, entonces $C = \Psi(M)$ es una matriz Hamiltoniana y asume la forma

$$C = \Psi(I + \varepsilon T A + O(\varepsilon^2)) = \frac{1}{2} \varepsilon T(A + O(\varepsilon)).$$

Luego, si A es paramétricamente estable, la matriz C es estable, es decir, sus valores propios son imaginarios puros y en consecuencia, los valores propios de $M = \Psi^{-1}(C)$ están en el círculo unitario.

Por lo tanto, la solución periódica pasando por $p(\varepsilon)$ es linealmente estable. ■

Observación 1.7.1. El Teorema anterior implica que bajo una pequeña perturbación de la matriz A , los multiplicadores se desplazan levemente, sin embargo permanecen en el círculo unitario (ver Figura 1.1).

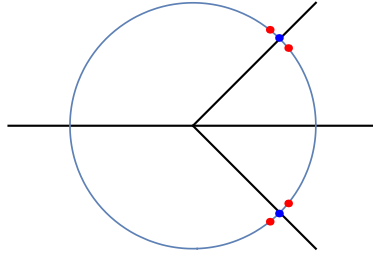


Figura 1.1: Desplazamiento de los multiplicadores de una matriz paraméricamente estable.

1.8. Hipótesis

Bajo el contexto de sistemas Hamiltonianos, si es posible establecer condiciones suficientes que garanticen la existencia y estabilidad de soluciones periódicas, así como sus bifurcaciones en un sistema Hamiltoniano de la forma (1.1) y (1.2).

MÉTODOS Y MATERIALES

En este capítulo, se presentarán el tipo de investigación y el método de investigación los que permitirán probar los resultados de nuestra investigación.

2.1. Tipo de investigación

Científico-Teórico-Conceptual

2.2. Método de investigación

El método a usar en la investigación que desarrollaremos es el Inductivo-Deductivo, en la cual estudiaremos la existencia y estabilidad de órbitas periódicas en sistemas Hamiltonianos con 2 y 3 grados de libertad; a través de la inducción se establecen generalizaciones a partir de lo común en varios casos, luego a partir de esa generalización se deducen varias conclusiones lógicas, que mediante la inducción se traducen en generalizaciones enriquecidas, por lo que forman una unidad dialéctica.

Para nuestro estudio, y con el propósito de cumplir con el objetivo planteado, consideramos las siguientes etapas de investigación:

- **Etapas 1: Análisis de la existencia y estabilidad de soluciones periódicas en Hamiltonianos con 2 grados de libertad.**

En esta etapa se consideró los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Aplicar formas normales para introducir la simetría del oscilador al Hamiltoniano.
 - **Paso 2:** Aplicar la teoría de reducción: para reducir la simetría continua obteniendo un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad en el espacio reducido correspondiente.
 - **Paso 3:** Investigar la dinámica del problema reducido: existencia, estabilidad y bifurcaciones de los equilibrios relativos (puntos críticos) en términos de los parámetros que tiene el Hamiltoniano.
 - **Paso 4:** Obtener conclusiones sobre el sistema completo reconstruyendo el flujo del problema original; mediante el teorema de Reeb (Teorema del promedio para sistemas Hamiltonianos), obteniendo familias de soluciones periódicas y su estabilidad.
- **Etapla 2: Análisis de la existencia y estabilidad de soluciones periódicas en Hamiltonianos con 3 grados de libertad.**

En esta etapa se consideró los siguientes pasos.

- **Paso 1:** Aplicar formas normales para introducir la simetría del oscilador al Hamiltoniano.
- **Paso 2:** Aplicar la teoría de reducción: para reducir la simetría continua obteniendo un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad en el espacio reducido correspondiente.
- **Paso 3:** Investigar la dinámica del problema reducido: existencia, estabilidad y bifurcaciones de los equilibrios relativos (puntos críticos) en términos de los parámetros que tiene el Hamiltoniano.
- **Paso 4:** Obtener conclusiones sobre el sistema completo reconstruyendo el flujo del problema original; mediante el teorema de Reeb (Teorema del promedio para sistemas Hamiltonianos), obteniendo familias de soluciones periódicas y su estabilidad.

EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE SOLUCIONES PERIÓDICAS EN HAMILTONIANOS CON DOS Y TRES GRADOS DE LIBERTAD

Este capítulo está dividido en dos secciones. En la sección 3.1 estudiaremos la dinámica de una familia de sistemas Hamiltonianos autónomos con dos grados de libertad (2-DOF) que consisten de un oscilador armónico en resonancia 1:1 más un potencial cuártico dependiendo de tres parámetros a, b y c . La sección 3.2 está orientada al estudio de la dinámica de una familia de Hamiltonianos con tres grados de libertad (3-DOF) que consisten de un oscilador en resonancia 1:1:1 más una perturbación de grado 4 dependiendo de tres parámetros α, β y γ . En ambas secciones, la existencia y estabilidad de soluciones periódicas es establecida usando teoría de reducción y del promedio. Los diferentes tipos de soluciones periódicas así como sus curvas de bifurcación son caracterizadas en términos de los parámetros. Finalmente, la estabilidad lineal e inestabilidad de cada solución periódica es tratada.

3.1. Hamiltonianos en resonancia 1:1

En esta sección estudiamos la dinámica del sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad asociado al Hamiltoniano en resonancia 1 : 1 dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + ax_1^4 + bx_2^4 + cx_1^2x_2^2, \quad (3.1)$$

el cual consiste de un oscilador armónico 2D más un potencial homogéneo de grado cuatro dependiendo de tres parámetros reales a, b y c . Este Hamiltoniano es invariante por la transformación asociada a una rotación de $\pi/2$ radianes dada por $R_{\pi/2} : (x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (x_2, x_1, y_2, y_1)$.

El Hamiltoniano (3.1) fue propuesto por Andrle [2] para modelar un sistema estelar con un eje y un plano de simetría, y después ha sido usado en otras aplicaciones [4].

Hamiltonianos de la forma (3.1) con $b = a$ han sido analizados en problemas relacionados a dinámica galáctica [11] y con $c = 0$ han sido estudiados por algunos autores con el objetivo de estudiar la no integrabilidad y la existencia de soluciones periódicas, ver por ejemplo [1, 2] y sus referencias. Sin embargo cuando $c \neq 0$ y a, b son arbitrarios el problema no ha sido abordado.

En esta sección trataremos el caso $c \neq 0$, para lo cual sin pérdida de generalidad podemos asumir $c = 1$.

Con el fin de estudiar la dinámica de (3.1) cerca del origen, hacemos un escalamiento en las variables mediante la transformación ε^2 -simpléctica dada por

$$x_i \rightarrow \varepsilon x_i, \quad y_i \rightarrow \varepsilon y_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

Aplicando el cambio de variables (3.2) al Hamiltoniano (3.1), obtenemos el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0(x, y) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(x), \quad (3.3)$$

donde

$$\mathcal{H}_0(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2),$$

y

$$\mathcal{H}_2(x) = ax_1^4 + bx_2^4 + x_1^2x_2^2.$$

3.1.1. Normalización y Reducción

Con el objetivo de describir el espacio orbital del oscilador \mathcal{H}_0 , identificamos \mathbb{R}^4 con \mathbb{C} a través del cambio de variables $\xi_1 = x_1 + y_1i$, $\xi_2 = x_2 + y_2i$. Así, el Hamiltoniano no perturbado \mathcal{H}_0 escrito en términos de $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ asume la forma

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2),$$

El flujo de \mathcal{H}_0 induce la acción $\varphi: S^1 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $\varphi_t(\xi) = e^{ti}\xi$, la cual para $t \in [0, 2\pi)$ es una S^1 -acción libre y propia sobre cualquier superficie de energía $\mathcal{N}_0(h) = \mathcal{H}_0^{-1}(h) \subset \mathbb{R}^4$ para $h > 0$. Desde que $\mathcal{N}_0(h)$ es la esfera en tres dimensiones

$$S_{\sqrt{2h}}^3 = \{\xi \in \mathbb{C}^2 : |\xi|^2 = 2h\},$$

el espacio orbital de la S^1 -acción sobre $\mathcal{N}_0(h)$ es $\mathcal{B}(h) = S_{\sqrt{2h}}^3/S^1$. Este espacio es difeomorfo al espacio proyectivo complejo \mathbb{CP} , razón por la cual será denotado por \mathbb{CP}_h .

A continuación, para usar la simetría del oscilador, normalizamos el Hamiltoniano (3.3) hasta orden 4 en el pequeño parámetro aplicando el método de Lie-Deprit [10]. En coordenadas rectangulares el Hamiltoniano normalizado es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 \left[\frac{3a}{8} (x_1^2 + y_1^2)^2 + \frac{3b}{8} (x_2^2 + y_2^2)^2 \right. \\ \left. + \frac{3}{8} (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + \frac{1}{8} (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \right] + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (3.4)$$

El espacio orbital es descrito por 4 constantes de movimiento asociadas al oscilador, llamadas invariantes de la resonancia 1:1 (ver detalles en [7] y [18]). Estos invariantes que denotaremos por π_1, π_2, π_3 y π_4 son polinomios cuadráticos en las variables (x_1, x_2, y_1, y_2) que generan el espacio de funciones invariantes por la acción dada por el flujo de \mathcal{H}_0 . Explícitamente ellos son

$$\pi_1 = x_1^2 + y_1^2, \quad \pi_2 = x_2^2 + y_2^2, \quad \pi_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad \pi_4 = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad (3.5)$$

y satisfacen las siguientes relaciones de dependencia

$$\pi_1 + \pi_2 = 2h, \quad \pi_3^2 + \pi_4^2 = \pi_1 \pi_2, \quad (3.6)$$

así como las restricciones $\pi_1 \geq 0$ y $\pi_2 \geq 0$.

En la Tabla 3.1 se presenta la estructura de Poisson de los invariantes, estos corchetes de Poisson describen el álgebra de Lie formada por los invariantes.

$\{\pi_j, \pi_k\}$	π_1	π_2	π_3	π_4
π_1	0	0	$2\pi_4$	$-2\pi_3$
π_2	0	0	$-2\pi_4$	$2\pi_3$
π_3	$-2\pi_4$	$2\pi_4$	0	$\pi_1 - \pi_2$
π_4	$2\pi_3$	$-2\pi_3$	$-\pi_1 + \pi_2$	0

Tabla 3.1: Corchetes de Poisson entre los invariantes π .

El Hamiltoniano (3.4) en términos de los invariantes asume la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\pi) = \mathcal{H}_0(\pi) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(\pi) + O(\varepsilon^4), \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\pi) &= \frac{1}{2} (\pi_1 + \pi_2), \\ \mathcal{H}_2(\pi) &= \frac{3a}{8} \pi_1^2 + \frac{3b}{8} \pi_2^2 + \frac{3}{8} \pi_3^2 + \frac{1}{8} \pi_4^2. \end{aligned}$$

y el campo asociado al Hamiltoniano (3.7) en las variables $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ es dado

por

$$\frac{d\pi_j}{dt} = \{\pi_j, \mathcal{H}_\varepsilon\} = \sum_{k=1}^4 \{\pi_j, \pi_k\} \frac{\partial \mathcal{H}_\varepsilon}{\partial \pi_k}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (3.8)$$

La reducción es ahora realizada introduciendo la aplicación de Hilbert $\rho_\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $\rho_\pi(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$. El Hamiltoniano reducido es obtenido de (3.7) truncando términos de orden mayor o igual a ε^4 , eliminando términos constantes y dividiendo el Hamiltoniano resultante por ε^2 , esto es

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{8} (3a\pi_1^2 + 3b\pi_2^2 + 3\pi_3^2 + \pi_4^2), \quad (3.9)$$

Las ecuaciones de movimiento para el Hamiltoniano (3.9) son

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= \pi_3\pi_4, \\ \dot{\pi}_2 &= -\pi_3\pi_4, \\ \dot{\pi}_3 &= \frac{\pi_4}{4} [(1-6a)\pi_1 - (1-6b)\pi_2], \\ \dot{\pi}_4 &= \frac{3\pi_3}{4} [(1-2b)\pi_2 - (1-2a)\pi_1]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Todas las soluciones del oscilador isotrópico \mathcal{H}_0 pueden ser descritas por medio de los invariantes, pues son coordenadas globales para el espacio reducido \mathbb{CP}_h . De las restricciones en (3.6), se sigue que los puntos críticos de (3.10) son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} \pi_3\pi_4 &= 0, \\ [(1-6a)\pi_1 - (1-6b)\pi_2]\pi_4 &= 0, \\ [(1-2b)\pi_2 - (1-2a)\pi_1]\pi_3 &= 0, \\ \pi_1\pi_2 - \pi_3^2 - \pi_4^2 &= 0, \\ \pi_1 + \pi_2 - 2h &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Con el fin de caracterizar todos los puntos críticos, definimos las siguientes regiones

de parámetros,

$$\mathcal{A}_1 =] - \infty, 1/6[\times] - \infty, 1/6[; \mathcal{A}_2 =]1/6, 1/2[\times]1/6, 1/2[;$$

$$\mathcal{A}_3 =]1/2, +\infty[\times]1/2, +\infty[;$$

$$\mathcal{B}_1 =] - \infty, 1/6[\times]1/6, 1/2[; \mathcal{B}_2 =]1/6, 1/2[\times] - \infty, 1/6[;$$

$$\mathcal{C}_1 =]1/6, 1/2[\times]1/2, +\infty[; \mathcal{C}_2 =]1/2, +\infty[\times]1/6, 1/2[;$$

$$\mathcal{D}_1 =] - \infty, 1/6[\times]1/2, +\infty[; \mathcal{D}_2 =]1/2, +\infty[\times] - \infty, 1/6[;$$

$$\mathcal{E}_1 = \{1/2\} \times] - \infty, 1/6[; \mathcal{E}_2 = \{1/6\} \times]1/2, \infty[;$$

$$\mathcal{E}_3 =] - \infty, 1/6[\times \{1/2\}; \mathcal{E}_4 =]1/2, \infty[\times \{1/6\};$$

$$\mathcal{F}_1 = \{1/6\} \times] - \infty, 1/6[; \mathcal{F}_2 = \{1/6\} \times]1/6, 1/2[;$$

$$\mathcal{F}_3 =] - \infty, 1/6[\times \{1/6\}; \mathcal{F}_4 =]1/6, 1/2[\times \{1/6\};$$

$$\mathcal{G}_1 = \{1/2\} \times]1/6, 1/2[; \mathcal{G}_2 = \{1/2\} \times]1/2, +\infty[;$$

$$\mathcal{G}_3 =]1/6, 1/2[\times \{1/2\}; \mathcal{G}_4 =]1/2, +\infty[\times \{1/2\};$$

y los puntos $S_1 = (1/6, 1/6)$, $S_2 = (1/6, 1/2)$, $S_3 = (1/2, 1/6)$ y $S_4 = (1/2, 1/2)$.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sobre el espacio reducido \mathbb{CP}_h , el sistema (3.10) tiene a lo más 6 puntos críticos aislados. Más precisamente, considerando $\hat{\mathcal{A}} = \bigcup_{j=1}^3 \mathcal{A}_j$, $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{B}_j$, $\hat{\mathcal{C}} = \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{C}_j$, $\mathcal{D} = \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{D}_j$, $\hat{\mathcal{E}} = \bigcup_{j=1}^4 \mathcal{E}_j$, $\hat{\mathcal{F}} = \bigcup_{j=1}^4 \mathcal{F}_j$ y $\hat{\mathcal{G}} = \bigcup_{j=1}^4 \mathcal{G}_j$, las siguientes afirmaciones se verifican:*

i) Si $(a, b) \in \hat{\mathcal{A}}$ entonces el sistema tiene exactamente 6 puntos críticos, dados por los puntos (1), (2), (3), ..., (6) de la Tabla 3.2.

ii) Si $(a, b) \in \mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{C}} \cup \hat{\mathcal{F}} \cup \hat{\mathcal{G}}$ entonces el sistema tiene exactamente 4 puntos críticos.

- *Cuando $(a, b) \in \mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{F}}$, los puntos críticos corresponden a los puntos (1), (2), (5) y (6) de la Tabla 3.2.*
- *Cuando $(a, b) \in \hat{\mathcal{C}} \cup \hat{\mathcal{G}}$ los puntos críticos corresponden a los puntos (1), (2), (3) y (4) de la Tabla 3.2.*

iii) Si $(a, b) \in \mathcal{D} \cup \widehat{\mathcal{E}} \cup \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ entonces el sistema tiene exactamente 2 puntos críticos.

- Cuando $(a, b) \in \mathcal{D} \cup \widehat{\mathcal{E}} \cup \{S_2, S_3\}$, los puntos críticos corresponden a los puntos (1) y (2) de la Tabla 3.2.
- Cuando $(a, b) \in \{S_1\}$, los puntos críticos corresponden a los puntos (5) y (6) de la Tabla 3.2.
- Cuando $(a, b) \in \{S_4\}$, los puntos críticos corresponden a los puntos (3) y (4) de la Tabla 3.2.

Demostración. Resolviendo el sistema (3.11) obtenemos los equilibrios aislados de la Tabla 3.3. ■

Puntos Rectilíneos	(1)	$(2h, 0, 0, 0)$
	(2)	$(0, 2h, 0, 0)$
	(3)	$\left(\frac{(6b-1)h}{3a+3b-1}, \frac{(6a-1)h}{3a+3b-1}, 0, \frac{\sqrt{(6a-1)(6b-1)h}}{ 3a+3b-1 } \right)$
	(4)	$\left(\frac{(6b-1)h}{3a+3b-1}, \frac{(6a-1)h}{3a+3b-1}, 0, -\frac{\sqrt{(6a-1)(6b-1)h}}{ 3a+3b-1 } \right)$
Puntos Elípticos / Circulares	(5)	$\left(\frac{(2b-1)h}{a+b-1}, \frac{(2a-1)h}{a+b-1}, \frac{\sqrt{(2a-1)(2b-1)h}}{ a+b-1 }, 0 \right)$
	(6)	$\left(\frac{(2b-1)h}{a+b-1}, \frac{(2a-1)h}{a+b-1}, -\frac{\sqrt{(2a-1)(2b-1)h}}{ a+b-1 }, 0 \right)$

Tabla 3.2: Puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$ en \mathbb{CP}_h . (1), (2), (3) y (4) corresponden a puntos críticos de tipo rectilíneo; (5) y (6) corresponden a puntos críticos de tipo elíptico (o circular).

Observación 3.1.1. Los puntos críticos de la Proposición 3.1 originan soluciones periódicas del Hamiltoniano (3.3) siempre que satisfagan ciertas condiciones de no degeneración.

En las figuras 3.2, 3.3 y 3.4 se muestran algunas de las soluciones periódicas aproximadas correspondientes al Hamiltonian (3.3).

3.1.2. Coordenadas simplécticas en el espacio reducido \mathbb{CP}_h

En esta sección, consideramos coordenadas simplécticas definidas en vecindades de los puntos críticos de la Proposición 3.1. Específicamente, usaremos las coordenadas

(L, Q_1, ℓ, P_1) para la resonancia 1:1 definidas a través de las transformaciones $T_1, T_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ dadas por

y $T_2 = R_{\pi/2} \circ T_1$, donde $R_{\pi/2}$ es el cambio lineal $R_{\pi/2} : (x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (x_2, x_1, y_2, y_1)$
y $\Omega = \{(L, Q_1, \ell, P_1) : L > 0, Q_1^2 + P_1^2 < 2L, 0 \leq \ell < 2\pi\}$. Aplicando la definición de T_1
y T_2 junto con las relaciones (3.5) obtenemos

y

$$Q_1 = \frac{\pi_3}{\sqrt{\pi_2}}, \quad P_1 = -\frac{\pi_4}{\sqrt{\pi_2}} \quad (3.14)$$

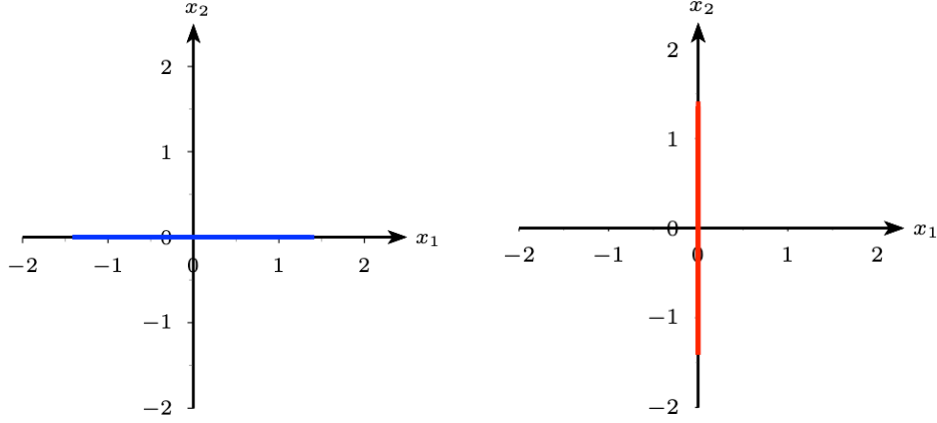


Figura 3.2: Soluciones periódicas aproximadas de tipo rectilíneo en los ejes principales.

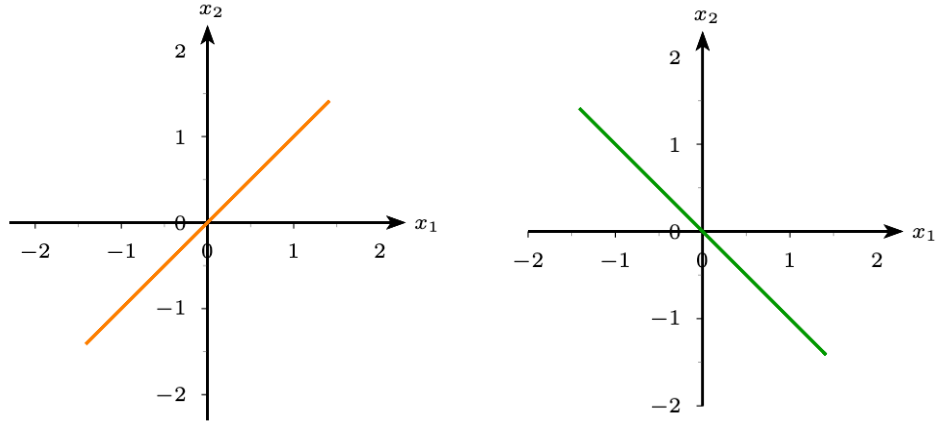


Figura 3.3: Soluciones periódicas aproximadas de tipo rectilíneo inclinadas.

En las coordenadas introducidas mediante las transformaciones T_1 y T_2 , el Hamiltoniano (3.3) toma la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon = L + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(L, Q_1, \ell, P_1), \quad (3.15)$$

y el Hamiltoniano normalizado es

$$\mathcal{H}_\varepsilon = L + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(L, Q_1, P_1) + O(\varepsilon^4), \quad (3.16)$$

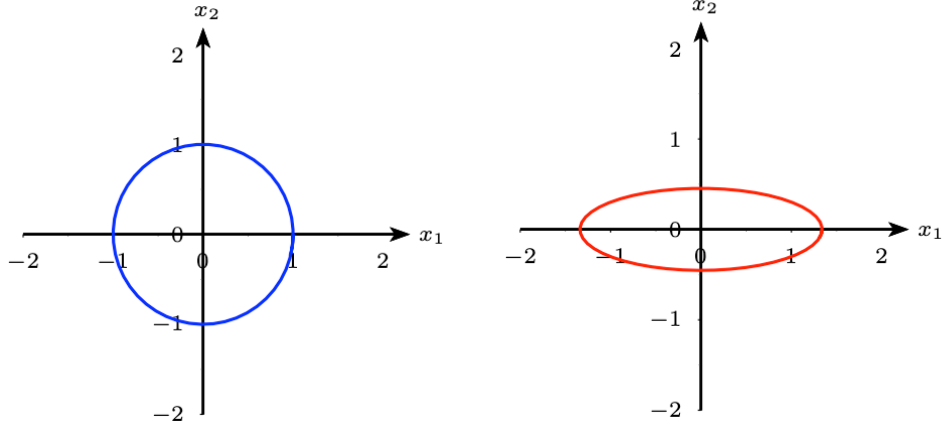


Figura 3.4: Soluciones periódicas aproximadas de tipo circular y elíptica.

donde \mathcal{H}_2 en relación a T_1 es dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^{T_1} = & \frac{1}{8} [12aL^2 + 3(Q_1^2 + P_1^2) [(a+b)(Q_1^2 + P_1^2) - 4aL] \\ & + (2L - Q_1^2 - P_1^2)(3Q_1^2 + P_1^2)] , \end{aligned}$$

y con respecto a T_2 es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^{T_2} = & \frac{1}{8} [12bL^2 + 3(Q_1^2 + P_1^2) [(a+b)(Q_1^2 + P_1^2) - 4bL] \\ & + (2L - Q_1^2 - P_1^2)(3Q_1^2 + P_1^2)] , \end{aligned}$$

Para obtener el Hamiltoniano reducido sobre el espacio reducido \mathbb{CP}_h , reemplazamos L por $h > 0$ en \mathcal{H}_2 , reescalamos \mathcal{H}_ϵ cambiando el tiempo y removiendo términos constantes, obteniendo

$$\bar{\mathcal{H}}^{T_1} = 3(Q_1^2 + P_1^2) [(a+b)(Q_1^2 + P_1^2) - 4ah] + (2h - Q_1^2 - P_1^2)(3Q_1^2 + P_1^2), \quad (3.17)$$

y

$$\bar{\mathcal{H}}^{T_2} = 3(Q_1^2 + P_1^2) [(a+b)(Q_1^2 + P_1^2) - 4bh] + (2h - Q_1^2 - P_1^2)(3Q_1^2 + P_1^2), \quad (3.18)$$

Por otra parte, las aplicaciones $\psi_1, \psi_2: U_j \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi_j(\pi) = (Q_1, P_1)$ definidas por

las ecuaciones (3.13) y (3.14), respectivamente, son cartas locales para el espacio reducido \mathbb{CP}_h , donde $U_j = \{\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \in \mathbb{CP}_h : \pi_j > 0\}$ para $j = 1, 2$. En consecuencia, el conjunto $\mathcal{A} = \{(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2)\}$ es una atlas para el espacio reducido y los puntos críticos de la Tabla 3.2 pueden ser identificados con puntos de \mathbb{R}^2 por medio de las cartas ψ_1 y ψ_2 . Esos puntos en las coordenadas (Q_1, P_1) se muestran en la Tabla 3.3. Ahora, por conveniencia definimos los conjuntos

$$\mathcal{R}_1 = \{O_1^{\mathcal{R}}, O_2^{\mathcal{R}}\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{O_3^{\mathcal{R}}, O_4^{\mathcal{R}}\}, \quad \mathcal{C} = \{O_1^{\mathcal{C}}, O_2^{\mathcal{C}}\}.$$

El conjunto $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ corresponde a soluciones periódicas rectilíneas del hamiltoniano truncado de orden 4 en ε y el conjunto \mathcal{C} corresponde a soluciones periódicas elípticas (o circulares).

Punto crítico	(U_1, ψ_1)	(U_2, ψ_2)
$O_1^{\mathcal{R}}$	$(0, 0)$	—
$O_2^{\mathcal{R}}$	—	$(0, 0)$
$O_3^{\mathcal{R}}$	$\left(0, \frac{\sqrt{6a-1}h}{\sqrt{(3a+3b-1)h}}\right)$	$\left(0, -\frac{\sqrt{6b-1}h}{\sqrt{(3a+3b-1)h}}\right)$
$O_4^{\mathcal{R}}$	$\left(0, -\frac{\sqrt{(6a-1)h}}{\sqrt{3a+3b-1}}\right)$	$\left(0, \frac{\sqrt{6b-1}h}{\sqrt{(3a+3b-1)h}}\right)$
$O_1^{\mathcal{C}}$	$\left(\frac{\sqrt{(2a-1)h}}{\sqrt{a+b-1}}, 0\right)$	$\left(\frac{\sqrt{(2b-1)h}}{\sqrt{a+b-1}}, 0\right)$
$O_2^{\mathcal{C}}$	$\left(-\frac{\sqrt{(2a-1)h}}{\sqrt{a+b-1}}, 0\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{(2b-1)h}}{\sqrt{a+b-1}}, 0\right)$

Tabla 3.3: Puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$ en las variables (Q_1, P_1) : $O_1^{\mathcal{R}}$ corresponde al punto (1) de la Tabla 3.2, $O_2^{\mathcal{R}}$ al punto (2), $O_3^{\mathcal{R}}$ al punto (3), $O_4^{\mathcal{R}}$ al punto (4), $O_1^{\mathcal{C}}$ al punto (5), y $O_2^{\mathcal{C}}$ al punto (6), respectivamente.

3.1.3. Soluciones periódicas reconstruidas de \mathbb{CP}_h

En lo que sigue denotaremos por

$$p(t, \varepsilon) = (x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon))$$

una solución del sistema (3.3) y por $p^* \in \mathcal{N}_0(h)$ la solución periódica asociada al

punto crítico $\bar{p} \in \mathbb{CP}_h$, es decir, $p^* = \rho_\pi^{-1}(\bar{p})$.

Nuestros principales resultados sobre soluciones periódicas del sistema Hamiltoniano asociado al Hamiltoniano (3.3) son los siguientes.

Teorema 3.1.1. *Sea $\mathcal{H}_0 = h > 0$. Para el sistema asociado al Hamiltoniano (3.3), existen a lo más 6 soluciones $T(\varepsilon)$ - periódicas $p(t, \varepsilon)$, tales que $p(t, 0) = p^*$ y $T(0) = 2\pi$, donde $\bar{p} \in \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$. Más precisamente*

(i) *Si $(a, b) \in \widehat{\mathcal{A}}$ entonces existen 6 soluciones periódicas generadas por los puntos $\bar{p} \in \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$.*

(ii) *Si $(a, b) \in \mathcal{B} \cup \widehat{\mathcal{C}} \cup \widehat{\mathcal{F}} \cup \widehat{\mathcal{G}}$ entonces existen a lo más 4 soluciones periódicas.*

- *Cuando $(a, b) \in \mathcal{B}$ existen 4 soluciones periódicas generadas por los puntos $\bar{p} \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{C}$ y cuando $(a, b) \in \widehat{\mathcal{C}}$ las soluciones son generadas por los puntos $\bar{p} \in \mathcal{R}$.*
- *Cuando $(a, b) \in \cup \widehat{\mathcal{F}}$ existen 3 soluciones periódicas generadas por los puntos $\bar{p} \in \{O_1^{\mathcal{R}}\} \cup \mathcal{C}$ y cuando $(a, b) \in \widehat{\mathcal{G}}$ las soluciones son generadas por los puntos $\bar{p} \in \{O_2^{\mathcal{R}}\} \cup \mathcal{R}_2$.*

(iii) *Si $(a, b) \in \mathcal{D} \cup \widehat{\mathcal{E}} \cup \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ entonces existen a lo más 2 soluciones periódicas.*

- *Cuando $(a, b) \in \mathcal{D} \cup \widehat{\mathcal{E}}$, entonces existen 2 soluciones periódicas con $\bar{p} \in \mathcal{R}_1$.*
- *Cuando $(a, b) \in \{S_1\}$, la soluciones periódicas son generadas por los puntos $\bar{p} \in \mathcal{C}$ y cuando $(a, b) \in \{S_4\}$ son generadas por los puntos $\bar{p} \in \mathcal{R}_2$.*
- *Cuando $(a, b) \in \{S_2, S_3\}$ no existen soluciones periódicas.*

Los periodos de las soluciones periódicas en (i), (ii) y (iii) son dados hasta términos en ε^2 por $T(\varepsilon) = 2\pi(1 - \varepsilon^2 T^) + O(\varepsilon^4)$, donde los valores de las correcciones T^* aparecen en la Tabla 3.4 para cada solución periódica. Las soluciones periódicas en (i), (ii) y (iii) están organizadas en familias que dependen de la energía h así como de dos parámetros, esto es, a y b .*

Demostración. El sistema Hamiltoniano asociado al Hamiltoniano reducido (3.17) es

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= 4P_1[(1-6a)h - 2Q_1^2 - P_1^2 + 3(a+b)(Q_1^2 + P_2^2)] \\ \dot{P}_1 &= 4Q_1[(6a-3)h + 3Q_1^2 + 2P_1^2 - 3(a+b)(Q_1^2 + P_2^2)]\end{aligned}\quad (3.19)$$

y el sistema Hamiltoniano asociado al Hamiltoniano reducido (3.18) es

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= 4P_1[(1-6b)h - 2Q_1^2 - P_1^2 + 3(a+b)(Q_1^2 + P_2^2)] \\ \dot{P}_1 &= 4Q_1[(6b-3)h + 3Q_1^2 + 2P_1^2 - 3(a+b)(Q_1^2 + P_2^2)]\end{aligned}\quad (3.20)$$

Desde que los puntos de la Tabla 3.3 satisfacen los sistemas (3.19) y (3.20), ellos son puntos críticos para el Hamiltoniano reducido (3.17). A continuación, al calcular el determinante de la matriz Hessiana $D^2\bar{\mathcal{H}}$ en cada punto crítico, obtenemos las expresiones de la Tabla 3.4.

Los periodos son calculados a partir del Hamiltoniano (3.16) tomando $\dot{\ell} = \partial\mathcal{H}_\varepsilon/\partial L$ y reemplazando Q y P por los diferentes valores de \bar{p} en \mathcal{R} y \mathcal{C} . Luego, obtenemos $T(\varepsilon)$ de $\dot{\ell} = 2\pi/T(\varepsilon)$, expandiendo el resultado en potencias de ε . Ahora, en virtud del Teorema de Reeb 1.6.1 se infiere que cada punto crítico da origen a una familia de soluciones periódicas siempre que $\det(D^2\bar{\mathcal{H}}) \neq 0$. En consecuencia, de la Table 3.4 la demostración del teorema se sigue. ■

Conjunto de puntos críticos	$\det(D^2\bar{\mathcal{H}})$	T^*
$O_1^{\mathcal{R}}$	$\frac{3}{4}(2a-1)(6a-1)h^2$	$-3ah$
$O_2^{\mathcal{R}}$	$\frac{3}{4}(2b-1)(6b-1)h^2$	$-3bh$
\mathcal{R}_2	$\frac{(6a-1)(6b-1)h^2}{6a+6b-2}$	$-\frac{(36ab-1)h}{4(3a+3b-1)}$
\mathcal{C}	$-\frac{3(2a-1)(2b-1)h^2}{2(a+b-1)}$	$-\frac{3(4ab-1)h}{4(a+b-1)}$

Tabla 3.4: Determinantes de la matriz Hessiana en los puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$.

Teorema 3.1.2. *Bajo las afirmaciones del Teorema 3.1.1, tenemos las siguientes situaciones*

- (i) *La solución periódica rectilínea cercana a $O_1^{\mathcal{R}}$ es linealmente estable cuando $(2a-1)(6a-1) > 0$ e inestable en el sentido de Lyapunov cuando $(2a-1)(6a-1) < 0$.*

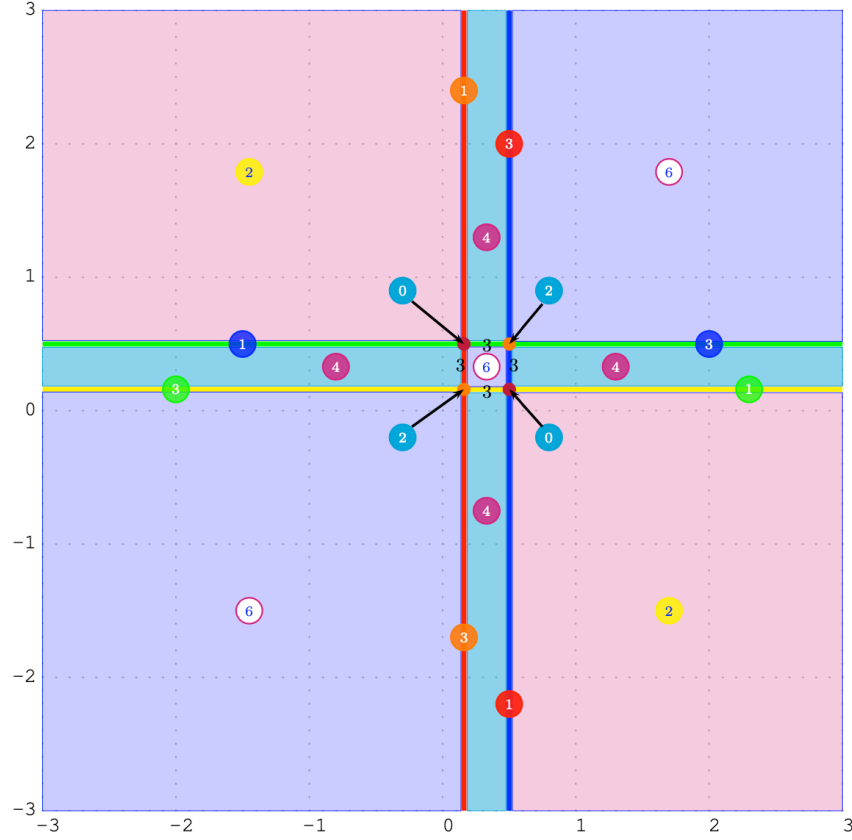


Figura 3.5: Diagrama de bifurcación de soluciones periódicas.

- (ii) La solución periódica rectilínea cercana a $O_2^{\mathcal{R}}$ es linealmente estable cuando $(2b - 1)(6b - 1) > 0$ e inestable en el sentido de Lyapunov cuando $(2b - 1)(6b - 1) < 0$.
- (iii) Las soluciones periódicas rectilíneas cercanas a las soluciones en \mathcal{R}_2 son linealmente estables cuando $(6a - 1)(6b - 1) > 0$ e inestables en el sentido de Lyapunov cuando $(6a - 1)(6b - 1) < 0$.
- (iv) Las soluciones periódicas circulares cercanas a las soluciones en \mathcal{C} son linealmente estables cuando $-(2a - 1)(2b - 1) > 0$ e inestables en el sentido de Lyapunov cuando $-(2a - 1)(2b - 1) < 0$.

Los multiplicadores característicos de las soluciones periódicas son $1, 1, 1 \pm \varepsilon^2 \lambda_1 + O(\varepsilon^4)$, donde λ_1 es el valor propio de la matriz $A = \mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}$.

Demostración. Desde que la matriz de linearización en cada punto crítico \bar{p} que denotamos por $A_{\bar{p}}$ es una matriz Hamiltoniana de orden 2, su traza es cero y luego el polinomio

característico asociado toma la forma

$$C_{\bar{p}}(\lambda) = \lambda^2 + \det(A_{\bar{p}}) = \lambda^2 + \det(D^2\bar{\mathcal{H}}).$$

De aquí, teniendo en cuenta que la existencia de los valores propios de la forma $\pm i\omega$ implica la estabilidad paramétrica de la matriz $A_{\bar{p}}$ (ver Teorema 1.5.1), deducimos que la estabilidad o inestabilidad de la solución periódica generada por \bar{p} puede ser obtenida a partir del determinante de la matriz Hessiana en el punto crítico \bar{p} y la aplicación del Teorema 1.7.1. Más exactamente, el punto crítico \bar{p} será paramétricamente estable cuando $\det(D^2\bar{\mathcal{H}}(\bar{p}))$ es positivo e inestable cuando $\det(D^2\bar{\mathcal{H}}(\bar{p}))$ es negativo. Así, de la Tabla 3.4 el resultado se sigue. ■

3.2. Hamiltonianos en resonancia 1:1:1

En esta sección estudiaremos el Hamiltoniano con tres grados de libertad

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2) + \gamma x_1 x_2 x_3 \\ & + \alpha(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + \beta(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

el cual consiste de un oscilador armónico 3D más un potencial con términos de grado 3 y 4 dependiendo de tres parámetros reales α, β y γ .

El Hamiltoniano (3.21) es usado para modelar el movimiento en el núcleo de un potencial triaxial galáctico [8, 9]. De hecho, la dinámica galáctica es un campo de aplicación de los estudios relacionados con osciladores armónicos perturbados en el espacio. Se conoce que la mayoría de las galaxias no muestran actividad violenta, pero se supone que exhiben un comportamiento estacionario.

El caso $\gamma = 0$ ha sido estudiado por algunos autores, ver por ejemplo [5, 20] y sus referencias, sin embargo cuando $\gamma \neq 0$ el problema no ha sido abordado. En esta sección trataremos el caso $\gamma \neq 0$, para lo cual sin pérdida de generalidad podemos asumir $\gamma = 1$.

Aplicando al Hamiltoniano (3.21), la transformación ε^2 -simpléctica dada por

$$x_i \rightarrow \varepsilon x_i, \quad y_i \rightarrow \varepsilon y_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

obtenemos el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0(x, y) + \varepsilon \mathcal{H}_1(x) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(x), \quad (3.23)$$

donde

$$\mathcal{H}_1 = x_1 x_2 x_3,$$

$$\mathcal{H}_2 = \alpha(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + \beta(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2).$$

3.2.1. Normalización y Reducción

En primer lugar, identificamos \mathbb{R}^6 con \mathbb{C}^3 a través del cambio de variables $\zeta_1 = x_1 + y_1 i$, $\zeta_2 = x_2 + y_2 i$ y $\zeta_3 = x_3 + y_3 i$. Así, el Hamiltoniano no perturbado \mathcal{H}_0 escrito en términos de $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ toma la forma

$$\mathcal{H}_0(\zeta) = \frac{1}{2}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + |\zeta_3|^2). \quad (3.24)$$

El flujo de \mathcal{H}_0 induce la acción $\varphi: S^1 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por $\varphi_t(\zeta) = e^{ti}\zeta$, la cual para $t \in [0, 2\pi)$ es una S^1 -acción libre y propia sobre cualquier nivel de energía $\mathcal{N}_0(h) = \mathcal{H}_0^{-1}(h) \subset \mathbb{R}^6$ para $h > 0$. Desde que $\mathcal{N}_0(h)$ es la esfera

$$S_{\sqrt{2h}}^5 = \{\zeta \in \mathbb{C}^3 : |\zeta|^2 = 2h\},$$

entonces el espacio orbital de la S^1 acción sobre $\mathcal{N}_0(h)$ es $\mathcal{B}(h) = S_{\sqrt{2h}}^5 / S^1$. Este espacio es una variedad compacta y simpléctica de dimensión cuatro y además es difeomorfo al espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}(2)$ (ver detalles en [19]), por lo que en adelante será denotado por \mathbb{CP}_h^2 .

A continuación, para usar la simetría del oscilador 3D, normalizamos el Hamiltoniano (3.23) hasta orden 4 en el parámetro ε aplicando el método de Lie-Deprit [10]. En coordenadas rectangulares el Hamiltoniano normalizado es

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\varepsilon = & \mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 \left[\frac{36\alpha}{48} [(x_1^2 + y_1^2)^2 + (x_2^2 + y_2^2)^2 + (x_3^2 + y_3^2)^2] \right. \\ & + \frac{12\beta}{48} [3(x_2x_3 + y_2y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2] \\ & + \frac{(36\beta-5)}{48} [(x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1x_3 + y_1y_3)^2] \\ & \left. + \frac{1}{48} [-5(x_2x_3 + y_2y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2] \right] + O(\varepsilon^4),\end{aligned}\tag{3.25}$$

El espacio orbital $\mathcal{B}(h)$ es propiamente descrito por los invariantes asociados al oscilador que son polinomios cuadráticos en las variables $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ que generan el espacio de funciones invariantes con respecto a la acción dada por el flujo de \mathcal{H}_0 , esto es, $\{\mathcal{H}_0, \pi_j\} = 0$, para $j = 1, \dots, 9$ (ver detalles en [18] y [20]). Los invariantes son denotados por $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_9$ y explícitamente son dados por

$$\begin{aligned}\pi_1 &= x_1^2 + y_1^2, & \pi_2 &= x_2^2 + y_2^2, & \pi_3 &= x_3^2 + y_3^2, \\ \pi_4 &= x_1x_2 + y_1y_2, & \pi_5 &= x_1x_3 + y_1y_3, & \pi_6 &= x_2x_3 + y_2y_3, \\ \pi_7 &= x_1y_2 - x_2y_1, & \pi_8 &= x_1y_3 - x_3y_1, & \pi_9 &= x_2y_3 - x_3y_2.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Así, el Hamiltoniano normalizado (3.25) puede ser expresando en términos de los invariantes. Algunas de las relaciones de dependencia de grado uno y dos entre los invariantes son

$$\begin{aligned}\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 2h, \\ \pi_1\pi_2 &= \pi_4^2 + \pi_7^2, & \pi_1\pi_3 &= \pi_5^2 + \pi_8^2, & \pi_2\pi_3 &= \pi_6^2 + \pi_9^2, \\ \pi_1\pi_6 &= \pi_4\pi_5 + \pi_7\pi_8, & \pi_2\pi_8 &= \pi_4\pi_9 + \pi_6\pi_7, & \pi_3\pi_4 &= \pi_5\pi_6 + \pi_8\pi_9, \\ \pi_4\pi_6 &= \pi_2\pi_5 + \pi_7\pi_9, & \pi_4\pi_8 &= \pi_1\pi_9 + \pi_5\pi_7, & \pi_6\pi_8 &= \pi_3\pi_7 + \pi_5\pi_9.\end{aligned}\tag{3.27}$$

junto con las siguientes restricciones

$$\pi_1 \geq 0, \quad \pi_2 \geq 0, \quad \pi_3 \geq 0.\tag{3.28}$$

La Tabla 3.5 contiene la estructura de Poisson de los invariantes, la cual describe el álgebra de Lie formado por los invariantes.

$\{\pi_j, \pi_k\}$	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9
π_1	0	0	0	$2\pi_7$	$2\pi_8$	0	$-2\pi_4$	$-2\pi_5$	0
π_2	0	0	0	$-2\pi_7$	0	$2\pi_9$	$2\pi_4$	0	$-2\pi_6$
π_3	0	0	0	0	$-2\pi_8$	$-2\pi_9$	0	$2\pi_5$	$2\pi_6$
π_4	$-2\pi_7$	$2\pi_7$	0	0	π_9	π_8	$\pi_1 - \pi_2$	$-\pi_6$	$-\pi_5$
π_5	$-2\pi_8$	0	$2\pi_8$	$-\pi_9$	0	π_7	$-\pi_6$	$\pi_1 - \pi_3$	π_4
π_6	0	$-2\pi_9$	$2\pi_9$	$-\pi_8$	$-\pi_7$	0	π_5	π_4	$\pi_2 - \pi_3$
π_7	$2\pi_4$	$-2\pi_4$	0	$\pi_2 - \pi_1$	π_6	$-\pi_5$	0	π_9	$-\pi_8$
π_8	$2\pi_5$	0	$-2\pi_5$	π_6	$\pi_3 - \pi_1$	$-\pi_4$	$-\pi_9$	0	π_7
π_9	0	$2\pi_6$	$-2\pi_6$	π_5	$-\pi_4$	$\pi_3 - \pi_2$	π_8	$-\pi_7$	0

Tabla 3.5: Corchete de Poisson sobre los invariantes π .

El Hamiltoniano (3.25) en términos de los invariantes es

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\pi) = \mathcal{H}_0(\pi) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(\pi) + O(\varepsilon^4), \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\pi) &= \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3), \\ \mathcal{H}_2(\pi) &= \frac{36\alpha}{48}(\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2) + \frac{12\beta}{48}(3\pi_6^2 + \pi_7^2 + \pi_9^2) + \frac{(36\beta - 5)}{48}(\pi_4^2 + \pi_5^2) \\ &\quad + \frac{1}{48}(-5\pi_6^2 + \pi_7^2 + \pi_9^2). \end{aligned}$$

A continuación, tomamos en cuenta que el campo vectorial asociado a (3.29) en las variables $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_9)$ es dado por

$$\frac{d\pi_j}{dt} = \{\pi_j, \mathcal{H}_\varepsilon\} = \sum_{k=1}^9 \{\pi_j, \pi_k\} \frac{\partial \mathcal{H}_\varepsilon}{\partial \pi_k}, \quad j = 1, \dots, 9. \quad (3.30)$$

La reducción es realizada introduciendo la aplicación de Hilbert $\rho_\pi: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^9$ definida por $\rho_\pi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (\pi_1, \dots, \pi_9)$. La imagen de esta aplicación es el espacio orbital para la \mathcal{H}_0 -acción y la imagen de un nivel de energía $\mathcal{N}_0(h)$ bajo ρ_π es el espacio reducido, esto es, $\mathcal{B}(h) = \rho_\pi(\mathcal{N}_0(h))$. En este sentido, fijando un valor constante $h > 0$, el espacio reducido $\mathcal{B}(h)$, es decir, \mathbb{CP}_h^2 , es dado por las relaciones (3.27).

El Hamiltoniano reducido es obtenido de (3.29) truncando términos de orden ε^4 ,

eliminando términos constantes y dividiendo el Hamiltoniano resultante por ε^2 , esto es,

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{48} [36\alpha (\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2) + 12\beta(3\pi_6^2 + \pi_7^2 + \pi_9^2) + (36\beta - 5)(\pi_4^2 + \pi_5^2) - 5\pi_6^2 + \pi_7^2 + \pi_9^2]. \quad (3.31)$$

Las ecuaciones de movimiento para el Hamiltoniano (3.31) son

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= \frac{1}{2}(4\beta - 1)(\pi_4\pi_7 + \pi_5\pi_8), \\ \dot{\pi}_2 &= -\frac{1}{2}(4\beta - 1)(\pi_4\pi_7 - \pi_6\pi_9), \\ \dot{\pi}_3 &= -\frac{1}{2}(\pi_5\pi_8 + \pi_6\pi_9)(4\beta - 1), \\ \dot{\pi}_4 &= \frac{1}{24}[(72\alpha - 12\beta - 1)(\pi_2 - \pi_1)\pi_7 + 6(4\beta - 1)(\pi_6\pi_8 + \pi_5\pi_9)], \\ \dot{\pi}_5 &= \frac{1}{24}[(72\alpha - 12\beta - 1)(\pi_3 - \pi_1)\pi_8 + 6(4\beta - 1)(\pi_6\pi_7 - \pi_4\pi_9)], \\ \dot{\pi}_6 &= \frac{1}{24}[(72\alpha - 12\beta - 1)(\pi_3 - \pi_2)\pi_9 + 6(4\beta - 1)(\pi_5\pi_7 + \pi_4\pi_8)], \\ \dot{\pi}_7 &= \frac{1}{24}(72\alpha - 36\beta + 5)(\pi_1 - \pi_2)\pi_4, \\ \dot{\pi}_8 &= \frac{1}{24}(72\alpha - 36\beta + 5)(\pi_1 - \pi_3)\pi_5, \\ \dot{\pi}_9 &= \frac{1}{24}(72\alpha - 36\beta + 5)(\pi_2 - \pi_3)\pi_6 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Definiendo los conjuntos de parámetros

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{A}}_1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta > 7/12 - 6\alpha \wedge 6\alpha - 1/12 > \beta, \alpha \in]1/18, \infty[\}; \\
\widetilde{\mathcal{A}}_2 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta < 7/12 - 6\alpha \wedge 6\alpha - 1/12 < \beta, \alpha \in]-\infty, 1/18[\}; \\
\widetilde{\mathcal{A}}_3 &= \{1/18\} \times]1/4, \infty[; \quad \widetilde{\mathcal{A}}_4 = \{1/18\} \times]-\infty, 1/4[; \\
\widetilde{\mathcal{B}}_1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 1/18 \wedge \beta > 6\alpha - 1/12\}; \\
\widetilde{\mathcal{B}}_2 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < 1/18 \wedge \beta < 7/12 - 6\alpha\}; \\
\widetilde{\mathcal{B}}_3 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < 1/18 \wedge \beta < 6\alpha - 1/12\}; \\
\widetilde{\mathcal{B}}_4 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 1/18 \wedge \beta < 7/12 - 6\alpha\}; \\
\widetilde{\mathcal{C}}_1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta = 6\alpha - 1/12, \alpha \in]1/18, \infty[\}; \\
\widetilde{\mathcal{C}}_2 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta = 7/12 - 6\alpha, \alpha \in]-\infty, 1/18[\}; \\
\widetilde{\mathcal{C}}_3 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta = 6\alpha - 1/12, \alpha \in]-\infty, 1/18[\}; \\
\widetilde{\mathcal{C}}_4 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta = 7/12 - 6\alpha, \alpha \in]1/18, \infty[\};
\end{aligned}$$

y el punto $S = (1/18, 1/4)$ tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.2. *Sobre el espacio reducido \mathbb{CP}_h^2 , el sistema (3.32) tiene a lo más 39 puntos críticos aislados. Más precisamente, considerando $\widetilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{j=1}^4 \widetilde{\mathcal{A}}_j$, $\widetilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{j=1}^4 \widetilde{\mathcal{B}}_j$ y $\widetilde{\mathcal{C}} = \bigcup_{j=1}^4 \widetilde{\mathcal{C}}_j$, las siguientes afirmaciones se cumplen*

- i) Si $(\alpha, \beta) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ entonces el sistema tiene exactamente 39 puntos críticos, dados por los puntos que aparecen en las Tablas 3.6 y 3.7.*
- ii) Si $(\alpha, \beta) \in \widetilde{\mathcal{B}} \cup \widetilde{\mathcal{C}}$ entonces el sistema tiene exactamente 27 puntos críticos, correspondientes a los puntos de la Tabla 3.6.*
- iii) Si $(\alpha, \beta) \in \{S\}$ entonces el sistema tiene exactamente 3 puntos críticos que corresponden a los puntos (1), (2) y (3) de la Tabla 3.6.*

Demostración. El sistema (3.32) ha sido resuelto tomando en cuenta las restricciones de (3.27) y (3.28). Usando MATHEMATICA 12 obtenemos los equilibrios aislados que aparecen en las Tablas 3.6 y 3.7. ■

Tipo Rectilíneo	1)	$(2h, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
	2)	$(0, 2h, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
	3)	$(0, 0, 2h, 0, 0, 0, 0, 0)$
	4)	$(h, h, 0, h, 0, 0, 0, 0)$
	5)	$(h, h, 0, -h, 0, 0, 0, 0)$
	6)	$(h, 0, h, 0, h, 0, 0, 0)$
	7)	$(h, 0, h, 0, -h, 0, 0, 0)$
	8)	$(0, h, h, 0, 0, h, 0, 0)$
	9)	$(0, h, h, 0, 0, -h, 0, 0)$
	10)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, 2h/3, 2h/3, 2h/3, 0, 0)$
	11)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, 2h/3, -2h/3, -2h/3, 0, 0)$
	12)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, -2h/3, 2h/3, -2h/3, 0, 0)$
	13)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, -2h/3, -2h/3, 2h/3, 0, 0)$
Tipo Circular	14)	$(h, h, 0, 0, 0, 0, h, 0)$
	15)	$(h, h, 0, 0, 0, 0, -h, 0)$
	16)	$(h, 0, h, 0, 0, 0, 0, h)$
	17)	$(h, 0, h, 0, 0, 0, 0, -h)$
	18)	$(0, h, h, 0, 0, 0, 0, h)$
	19)	$(0, h, h, 0, 0, 0, 0, -h)$
	20)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, h/3, h/3, -h/3, h/\sqrt{3}, -h/\sqrt{3})$
	21)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, h/3, h/3, -h/3, -h/\sqrt{3}, h/\sqrt{3})$
	22)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, h/3, -h/3, h/3, h/\sqrt{3}, h/\sqrt{3})$
	23)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, h/3, -h/3, h/3, -h/\sqrt{3}, -h/\sqrt{3})$
	24)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, -h/3, h/3, h/3, h/\sqrt{3}, -h/\sqrt{3})$
	25)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, -h/3, h/3, h/3, -h/\sqrt{3}, h/\sqrt{3})$
	26)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, -h/3, -h/3, -h/3, h/\sqrt{3}, -h/\sqrt{3})$
	27)	$(2h/3, 2h/3, 2h/3, -h/3, -h/3, -h/3, -h/\sqrt{3}, h/\sqrt{3})$

Tabla 3.6: Puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$ en \mathbb{CP}_h^2

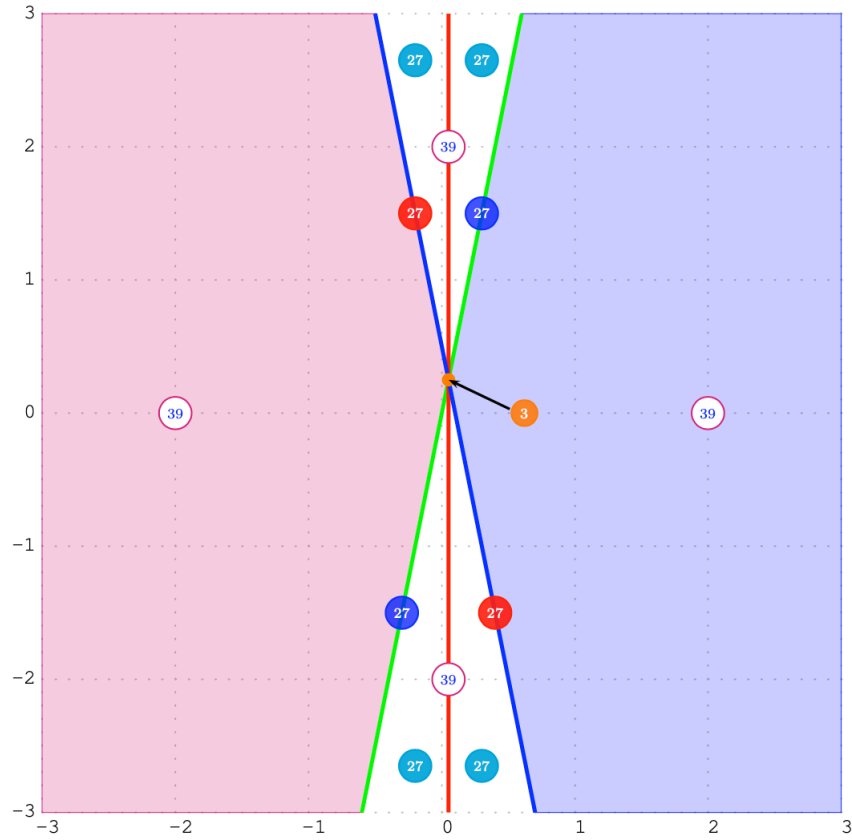


Figura 3.6: Diagrama de bifurcación de puntos críticos sobre el espacio reducido \mathbb{CP}_h^2 .

Tipo	28)	$\left(\frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, 0, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \right.$ $\left. \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, 0 \right)$
	29)	$\left(\frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, 0, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \right.$ $\left. -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, 0 \right)$
	30)	$\left(\frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, 0, -\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \right.$ $\left. \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, 0 \right)$
	31)	$\left(\frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, 0, -\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \right.$ $\left. -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, 0 \right)$
	32)	$\left(\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, \right.$ $\left. \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, 0, -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 } \right)$
	33)	$\left(\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, \right.$ $\left. -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, 0, \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 } \right)$
	34)	$\left(\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, -\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, \right.$ $\left. \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, 0, \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 } \right)$
	35)	$\left(\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, -\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, \right.$ $\left. -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, 0, -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 } \right)$
	36)	$\left(\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, 0, 0, \right.$ $\left. \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 } \right)$
	37)	$\left(\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, 0, 0, \right.$ $\left. -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 } \right)$
	38)	$\left(\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, 0, 0, \right.$ $\left. \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 } \right)$
	39)	$\left(\frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha+12\beta-7)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, \frac{2h(72\alpha-12\beta-1)}{3(72\alpha-4\beta-3)}, 0, 0, 0, \right.$ $\left. -\frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 }, \frac{2h\sqrt{(72\alpha+12\beta-7)(72\alpha-12\beta-1)}}{3 72\alpha-4\beta-3 } \right)$
Elíptico		

Tabla 3.7: Puntos críticos adicionales de $\bar{\mathcal{H}}$ en \mathbb{CP}_h^2 (dependiendo de α y β)

En las figuras 3.7 y 3.8 se muestran algunas de las soluciones periódicas aproximadas correspondientes al Hamiltoniano (3.23).

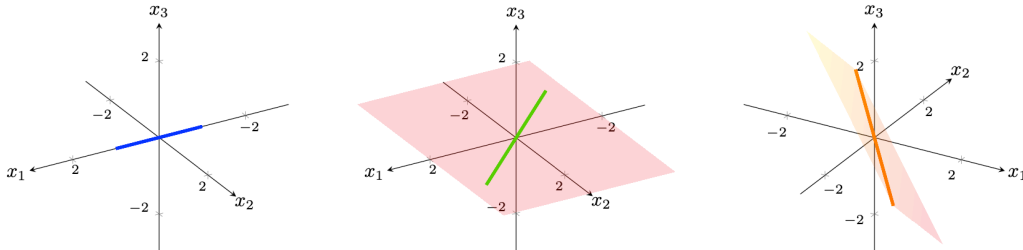


Figura 3.7: Soluciones periódicas aproximadas de tipo rectilíneo. Izquierda: rectilínea en el eje x_1 . Centro: rectilínea contenida en el plano x_1x_2 . Derecha: rectilínea en un plano inclinado.

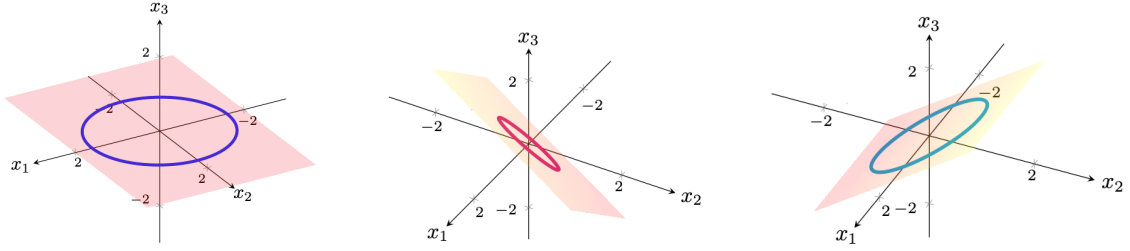


Figura 3.8: Soluciones periódicas aproximadas de tipo circular y elíptica. Izquierda: circular contenida en el plano x_1x_2 . Centro: circular en un plano inclinado. Derecha: elíptica en un plano inclinado.

3.2.2. Coordenadas simplécticas en el espacio reducido \mathbb{CP}_h^2

En esta sección, consideramos coordenadas simplécticas definidas en vecindades de los puntos críticos de la Proposición 3.2. Específicamente, usaremos las coordenadas $(L, Q_1, Q_2, \ell, P_1, P_2)$ para la resonancia 1:1:1 definidas a través de las transformaciones $T_1, T_2, T_3: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$ dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2L - Q_1^2 - Q_2^2 - P_1^2 - P_2^2} \cos \ell, & y_1 &= \sqrt{2L - Q_1^2 - Q_2^2 - P_1^2 - P_2^2} \sin \ell, \\ x_2 &= Q_1 \cos \ell - P_1 \sin \ell, & y_2 &= P_1 \cos \ell + Q_1 \sin \ell, \\ x_3 &= Q_2 \cos \ell - P_2 \sin \ell, & y_3 &= P_2 \cos \ell + Q_2 \sin \ell, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$T_2 = R_{\pi/2} \circ T_1$ y $T_3 = R_{\pi} \circ T_1$, donde $R_{\pi/2}$ es el cambio lineal

$$R_{\pi/2} : (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \rightarrow (x_3, x_2, x_1, y_3, y_2, y_1)$$

y $\Omega = \{(L, Q_1, Q_2, \ell, P_1, P_2) : L > 0, Q_1^2 + Q_2^2 + P_1^2 + P_2^2 < 2L, 0 \leq \ell < 2\pi\}$.

Aplicando la definición de T_1, T_2 y T_3 junto con las relaciones (3.26) obtenemos

$$Q_1 = \frac{\pi_4}{\sqrt{\pi_1}}, \quad Q_2 = \frac{\pi_5}{\sqrt{\pi_1}}, \quad P_1 = \frac{\pi_7}{\sqrt{\pi_1}}, \quad P_2 = \frac{\pi_8}{\sqrt{\pi_1}}, \quad (3.34)$$

$$Q_1 = \frac{\pi_4}{\sqrt{\pi_2}}, \quad Q_2 = \frac{\pi_6}{\sqrt{\pi_2}}, \quad P_1 = -\frac{\pi_7}{\sqrt{\pi_2}}, \quad P_2 = \frac{\pi_9}{\sqrt{\pi_2}}, \quad (3.35)$$

y

$$Q_1 = \frac{\pi_5}{\sqrt{\pi_3}}, \quad Q_2 = \frac{\pi_6}{\sqrt{\pi_3}}, \quad P_1 = -\frac{\pi_8}{\sqrt{\pi_3}}, \quad P_2 = -\frac{\pi_9}{\sqrt{\pi_3}}. \quad (3.36)$$

En las coordenadas introducidas mediante las transformaciones T_1 , T_2 y T_3 , el Hamiltoniano (3.25) toma la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon = L + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(L, Q_1, Q_2, \ell, P_1, P_2), \quad (3.37)$$

y el Hamiltoniano normalizado es

$$\mathcal{H}_\varepsilon = L + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(L, Q_1, Q_2, P_1, P_2) + O(\varepsilon^4), \quad (3.38)$$

donde \mathcal{H}_2 en relación a cualquiera de las transformaciones T_1 , T_2 y T_3 es dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & \frac{1}{48} [144\alpha L^2 - 2L(72\alpha - 36\beta + 5)(Q_1^2 + Q_2^2) - 2L(72\alpha - 12\beta - 1)(P_1^2 + P_2^2) \\ & + (72\alpha - 36\beta + 5)(Q_1^2(Q_1^2 + P_2^2) + Q_2^2(Q_1^2 + Q_2^2 + P_1^2)) \\ & + 12(4\beta - 1)Q_1Q_2P_1P_2 + 4(36\alpha - 12\beta + 1)(Q_1^2P_1^2 + Q_2^2P_2^2) \\ & + (72\alpha - 12\beta - 1)(P_1^4 + P_2^4) + (72\alpha + 12\beta - 7)P_1^2P_2^2]. \end{aligned}$$

Para obtener el Hamiltoniano reducido sobre el espacio reducido \mathbb{CP}_h^2 , reemplazamos L por $h > 0$ en \mathcal{H}_2 , reescalamos \mathcal{H}_ε cambiando el tiempo y removiendo términos constantes, obteniendo

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}} = & -2h(72\alpha - 36\beta + 5)(Q_1^2 + Q_2^2) - 2h(72\alpha - 12\beta - 1)(P_1^2 + P_2^2) \\ & + (72\alpha - 36\beta + 5)(Q_1^2(Q_1^2 + P_2^2) + Q_2^2(Q_1^2 + Q_2^2 + P_1^2)) \\ & + 12(4\beta - 1)Q_1Q_2P_1P_2 + 4(36\alpha - 12\beta + 1)(Q_1^2P_1^2 + Q_2^2P_2^2) \\ & + (72\alpha - 12\beta - 1)(P_1^4 + P_2^4) + (72\alpha + 12\beta - 7)P_1^2P_2^2, \end{aligned} \quad (3.39)$$

Por otra parte, las aplicaciones $\psi_1, \psi_2, \psi_3: U_j \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\psi_j(\pi) = (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ definidas por las ecuaciones (3.34), (3.35) y (3.36) respectivamente, son cartas locales para el

espacio reducido \mathbb{CP}_h^2 , donde $U_j = \pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_9) \in \mathbb{CP}_h^2 : \pi_j > 0\}$ para $j = 1, 3$. En consecuencia, el conjunto $\mathcal{A} = \{(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2), (U_3, \psi_3)\}$ es una atlas para el espacio reducido y los puntos críticos de las Tablas 3.6 y 3.7 pueden ser identificados con puntos de \mathbb{R}^4 por medio de las cartas ψ_1, ψ_2 y ψ_3 . Esos puntos en las coordenadas (Q_1, Q_2, P_1, P_2) se muestran en las Tablas 3.8 y 3.9.

Ahora, por conveniencia definimos los conjuntos

$$\mathcal{R}_1 = \{O_1^{\mathcal{R}}, O_2^{\mathcal{R}}, O_3^{\mathcal{R}}\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{O_4^{\mathcal{R}}, O_5^{\mathcal{R}}, O_6^{\mathcal{R}}, O_7^{\mathcal{R}}, O_8^{\mathcal{R}}, O_9^{\mathcal{R}}\},$$

$$\mathcal{R}_3 = \{O_{10}^{\mathcal{R}}, O_{11}^{\mathcal{R}}, O_{12}^{\mathcal{R}}, O_{13}^{\mathcal{R}}\},$$

$$\mathcal{C}_1 = \{O_1^{\mathcal{C}}, O_2^{\mathcal{C}}, O_3^{\mathcal{C}}, O_4^{\mathcal{C}}, O_5^{\mathcal{C}}, O_6^{\mathcal{C}}\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{O_7^{\mathcal{C}}, O_8^{\mathcal{C}}, O_9^{\mathcal{C}}, O_{10}^{\mathcal{C}}, O_{11}^{\mathcal{C}}, O_{12}^{\mathcal{C}}, O_{13}^{\mathcal{C}}, O_{14}^{\mathcal{C}}\},$$

$$\mathcal{E} = \{O_1^{\mathcal{E}}, O_2^{\mathcal{E}}, O_3^{\mathcal{E}}, O_4^{\mathcal{E}}, O_5^{\mathcal{E}}, O_6^{\mathcal{E}}, O_7^{\mathcal{E}}, O_8^{\mathcal{E}}, O_9^{\mathcal{E}}, O_{10}^{\mathcal{E}}, O_{11}^{\mathcal{E}}, O_{12}^{\mathcal{E}}\},$$

El conjunto $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$ corresponde a soluciones periódicas rectilíneas del Hamiltoniano truncado de orden 4 en ε , el conjunto $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ corresponde a soluciones periódicas circulares y el conjunto \mathcal{E} corresponde a soluciones periódicas elípticas.

Observación 3.2.1. Los puntos en color en las Tablas 3.8 y 3.9 representan los prototipos que serán estudiados en la Subsección 3.2.3 ya que los no coloreados pueden ser puestos en términos de los coloreados escogiendo la carta adecuada en cada caso.

3.2.3. Soluciones periódicas reconstruidas desde \mathbb{CP}_h^2

En lo que sigue denotamos por

$$p(t, \varepsilon) = (x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), x_3(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), y_3(t, \varepsilon))$$

una solución del sistema (1.43) y por $p^* \in \mathcal{N}_0(h)$ la solución periódica asociada al punto crítico $p \in \mathbb{CP}_h^2$, esto es, $p^* = \rho_\pi^{-1}(p)$.

Nuestros principales resultados sobre soluciones periódicas del sistema Hamiltoniano

Punto crítico	(U_1, ψ_1)	(U_2, ψ_2)	(U_3, ψ_3)
$O_1^{\mathcal{R}}$	$(0, 0, 0, 0)$	---	---
$O_2^{\mathcal{R}}$	---	$(0, 0, 0, 0)$	---
$O_3^{\mathcal{R}}$	---	---	$(0, 0, 0, 0)$
$O_4^{\mathcal{R}}$	$(\sqrt{h}, 0, 0, 0)$	$(\sqrt{h}, 0, 0, 0)$	---
$O_5^{\mathcal{R}}$	$(-\sqrt{h}, 0, 0, 0)$	$(-\sqrt{h}, 0, 0, 0)$	---
$O_6^{\mathcal{R}}$	$(0, \sqrt{h}, 0, 0)$	---	$(\sqrt{h}, 0, 0, 0)$
$O_7^{\mathcal{R}}$	$(0, -\sqrt{h}, 0, 0)$	---	$(-\sqrt{h}, 0, 0, 0)$
$O_8^{\mathcal{R}}$	---	$(0, \sqrt{h}, 0, 0)$	$(0, \sqrt{h}, 0, 0)$
$O_9^{\mathcal{R}}$	---	$(0, -\sqrt{h}, 0, 0)$	$(0, -\sqrt{h}, 0, 0)$
$O_{10}^{\mathcal{R}}$	$(\sqrt{2h/3}, \sqrt{2h/3}, 0, 0)$	$(\sqrt{2h/3}, \sqrt{2h/3}, 0, 0)$	$(\sqrt{2h/3}, \sqrt{2h/3}, 0, 0)$
$O_{11}^{\mathcal{R}}$	$(\sqrt{2h/3}, -\sqrt{2h/3}, 0, 0)$	$(\sqrt{2h/3}, -\sqrt{2h/3}, 0, 0)$	$(-\sqrt{2h/3}, -\sqrt{2h/3}, 0, 0)$
$O_{12}^{\mathcal{R}}$	$(-\sqrt{2h/3}, \sqrt{2h/3}, 0, 0)$	$(-\sqrt{2h/3}, -\sqrt{2h/3}, 0, 0)$	$(\sqrt{2h/3}, -\sqrt{2h/3}, 0, 0)$
$O_{13}^{\mathcal{R}}$	$(-\sqrt{2h/3}, -\sqrt{2h/3}, 0, 0)$	$(-\sqrt{2h/3}, \sqrt{2h/3}, 0, 0)$	$(-\sqrt{2h/3}, \sqrt{2h/3}, 0, 0)$
$O_1^{\mathcal{C}}$	$(0, 0, \sqrt{h}, 0)$	$(0, 0, -\sqrt{h}, 0)$	---
$O_2^{\mathcal{C}}$	$(0, 0, -\sqrt{h}, 0)$	$(0, 0, \sqrt{h}, 0)$	---
$O_3^{\mathcal{C}}$	$(0, 0, 0, \sqrt{h})$	---	$(0, 0, -\sqrt{h}, 0)$
$O_4^{\mathcal{C}}$	$(0, 0, 0, -\sqrt{h})$	---	$(0, 0, \sqrt{h}, 0)$
$O_5^{\mathcal{C}}$	---	$(0, 0, 0, \sqrt{h})$	$(0, 0, 0, -\sqrt{h})$
$O_6^{\mathcal{C}}$	---	$(0, 0, 0, -\sqrt{h})$	$(0, 0, 0, \sqrt{h})$
$O_7^{\mathcal{C}}$	$(\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$	$(\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$	$(\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$
$O_8^{\mathcal{C}}$	$(\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$	$(\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$	$(\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$
$O_9^{\mathcal{C}}$	$(\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$	$(\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$	$(-\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$
$O_{10}^{\mathcal{C}}$	$(\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$	$(\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$	$(-\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$
$O_{11}^{\mathcal{C}}$	$(-\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$	$(-\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$	$(\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$
$O_{12}^{\mathcal{C}}$	$(-\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$	$(-\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$	$(\sqrt{h/6}, \sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$
$O_{13}^{\mathcal{C}}$	$(-\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$	$(-\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$	$(-\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$
$O_{14}^{\mathcal{C}}$	$(-\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$	$(-\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, \sqrt{h/2}, -\sqrt{h/2})$	$(-\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/6}, -\sqrt{h/2}, \sqrt{h/2})$

Tabla 3.8: Puntos críticos de \mathcal{H} en las variables (Q_1, Q_2, P_1, P_2) : $O_1^{\mathcal{R}}$ corresponde al punto (1) de la Tabla 3.6, $O_2^{\mathcal{R}}$ al punto (2), \dots , $O_{13}^{\mathcal{R}}$ al punto (13), $O_1^{\mathcal{C}}$ al punto (14), \dots , y $O_{14}^{\mathcal{C}}$ al punto (27) respectivamente.

asociado al Hamiltoniano (3.23) son los siguientes.

Teorema 3.2.1. *Sea $\mathcal{H}_0 = h > 0$. Para el sistema Hamiltoniano asociado al Hamiltoniano (3.23) las siguientes afirmaciones se cumplen*

(i) *Si $(\alpha, \beta) \in \tilde{\mathcal{B}} \cup \tilde{\mathcal{C}}$, entonces existen a lo más 27, soluciones periódicas $p(t, \varepsilon)$ de periodo*

$T(\varepsilon)$, tales que $p(t, 0) = p^$ y $T(0) = 2\pi$, donde $p \in \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$. Más precisamente,*

- *Si $(\alpha, \beta) \in \tilde{\mathcal{C}}$, entonces existen 21 soluciones periódicas con $\rho_\pi(p^*) = p \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{C}$.*
- *Si $(\alpha, \beta) \in \tilde{\mathcal{B}}$, entonces existen 27 soluciones periódicas con $\rho_\pi(p^*) = p \in \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$.*

Punto crítico	(U_1, ψ_1)	(U_2, ψ_2)	(U_3, ψ_3)
O_1^ε	$(0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_2^ε	$(0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_3^ε	$(0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_4^ε	$(0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_5^ε	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_6^ε	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_7^ε	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_8^ε	$(0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_9^ε	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_{10}^ε	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_{11}^ε	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$
O_{12}^ε	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, 0, 0, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$	$(0, 0, \sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}}, -\sqrt{\frac{2(72\alpha-12\beta-1)h}{3(72\alpha-4\beta-3)}})$

Tabla 3.9: Puntos críticos de $\tilde{\mathcal{H}}$ en las variables (Q_1, Q_2, P_1, P_2) : O_1^ε corresponde al punto (28) de la Tabla 3.6, O_2^ε al punto (29), \dots , y O_{12}^ε al punto (39) respectivamente.

(ii) Si $(\alpha, \beta) \in \tilde{\mathcal{A}}$, entonces existen 39, $p(t, \varepsilon)$ de periodo $T(\varepsilon)$ tales que $p(t, 0) = p^*$ y $T(0) = 2\pi$, donde $\rho_\pi(p^*) = p \in \mathcal{R} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{E}$.

(iii) Cuando $(\alpha, \beta) \in \{S\}$, existen 3 soluciones periódicas con $\rho_\pi(p^*) = p \in \mathcal{R}_1$.

Los periodos de las soluciones periódicas en (i), (ii) y (iii) son dados hasta términos en ε^2 por $T(\varepsilon) = 2\pi(1 - \varepsilon^2 T^*) + O(\varepsilon^4)$, donde los valores de las correcciones T^* aparecen en la Tabla 3.10 para cada solución periódica. Las soluciones periódicas en (i), (ii) y (iii) están organizadas en familias que dependen de la energía h así como de dos parámetros, esto es, α y β .

Demostración. Las ecuaciones de movimiento relacionadas al Hamiltoniano (3.39) son

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_1 &= 2(72\alpha - 36\beta + 5) [2Q_1^3 + Q_1(Q_2^2 + P_2^2 - 2h)] + 12(4\beta - 1)Q_2P_1P_2 \\
&\quad + 8(36\alpha - 12\beta + 1)Q_1P_1^2, \\
\dot{Q}_2 &= 2(72\alpha - 36\beta + 5) [2Q_2^3 + Q_2(Q_1^2 + P_1^2 - 2h)] + 12(4\beta - 1)Q_1P_1P_2 \\
&\quad + 8(36\alpha - 12\beta + 1)Q_2P_2^2, \\
\dot{P}_1 &= 2P_1 [(72\alpha - 36\beta + 5)Q_2^2 + 4(36\alpha - 12\beta + 1)Q_1^2 + (72\alpha + 12\beta - 7)P_2^2] \\
&\quad + 4(72\alpha - 12\beta - 1)(P_1^3 - hP_1) + 12(4\beta - 1)Q_1Q_2P_2, \\
\dot{P}_2 &= 2P_2 [(72\alpha - 36\beta + 5)Q_1^2 + 4(36\alpha - 12\beta + 1)Q_2^2 + (72\alpha + 12\beta - 7)P_1^2] \\
&\quad + 4(72\alpha - 12\beta - 1)(P_2^3 - hP_2) + 12(4\beta - 1)Q_1Q_2P_1,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Desde que los puntos de las Tablas 3.8 y 3.9 satisfacen el sistema (3.40), ellos son puntos de equilibrio para el Hamiltoniano reducido (3.39). A continuación, el determinante de la matriz Hessiana $D^2\bar{\mathcal{H}}$ en cada punto crítico es dado en la Tabla 3.10.

Finalmente los periodos son calculados a partir del Hamiltoniano (3.38) como sigue. Tomamos $\dot{\ell} = -\partial\mathcal{H}_\varepsilon/\partial L$ y reemplazamos Q y P en los diferentes valores \bar{p} en $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y \mathcal{E} . Luego, obtenemos $T(\varepsilon)$ de $\dot{\ell} = 2\pi/T(\varepsilon)$, expandiendo el resultado en potencias de ε . ■

Conjunto de puntos críticos	$\det(D^2\bar{\mathcal{H}})$	T^*
\mathcal{R}_1	$\frac{(72\alpha-36\beta+5)^2(72\alpha-12\beta-1)^2h^4}{20736}$	$-6\alpha h$
\mathcal{R}_2	$-\frac{(72\alpha-36\beta+5)^2(72\alpha+12\beta-7)(4\beta-1)h^4}{13824}$	$-\frac{(72\alpha+36\beta-5)h}{24}$
\mathcal{R}_3	$\frac{(72\alpha+36\beta-5)^2(4\beta-1)^2h^4}{1296}$	$-\frac{(36\alpha+36\beta-5)h}{18}$
\mathcal{C}_1	$\frac{(72\alpha-36\beta+5)^2(72\alpha-12\beta-1)(4\beta-1)h^4}{13824}$	$-\frac{72\alpha+12\beta+1}{24}$
\mathcal{C}_2	$\frac{(72\alpha-36\beta+5)^2(4\beta-1)^2h^4}{5184}$	$-\frac{(72\alpha+36\beta-1)h}{36}$
\mathcal{E}	$-\frac{(72\alpha-36\beta+5)^2(72\alpha-12\beta-1)^2(4\beta-1)^2(72\alpha+12\beta-7)h^4}{3888(72\alpha-4\beta-3)^3}$	$-\frac{[2592\alpha^2-(12\beta+1)^2+36\alpha(36\beta-5)]h}{18(72\alpha-4\beta-3)}$

Tabla 3.10: Determinantes de la matriz Hessiana en los puntos críticos y correcciones para los periodos de las soluciones periódicas

En virtud del Teorema de Reeb (1.6.1), un punto crítico dará origen a una familia de soluciones periódicas siempre que $\det(D^2\bar{\mathcal{H}}) \neq 0$. En consecuencia, de la Tabla 3.10 la prueba del teorema se sigue.

Teorema 3.2.2. *Bajo los supuestos del Teorema 3.2.1, las siguientes afirmaciones se cumplen*

- (i) *Las soluciones periódicas cercanas a rectilíneas en los ejes principales son linealmente estables cuando $(72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha - 12\beta - 1) > 0$ e inestables en el sentido de Lyapunov cuando $(72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha - 12\beta - 1) < 0$.*
- (ii) *Las soluciones periódicas cercanas a rectilíneas en los planos principales son linealmente estables si $(72\alpha - 36\beta + 5)(4\beta - 1) < 0 \wedge (72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha + 12\beta - 7) > 0$ e inestables en el sentido de Lyapunov cuando $(72\alpha - 36\beta + 5)(4\beta - 1) > 0 \vee (72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha + 12\beta - 7) < 0$.*

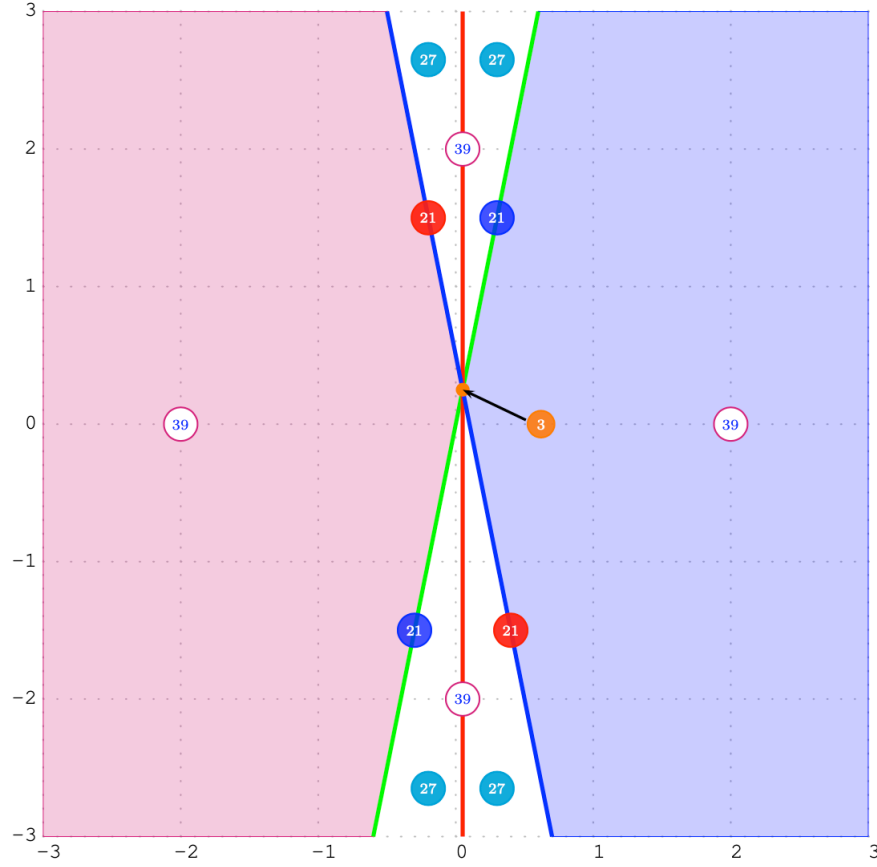


Figura 3.9: Diagrama de bifurcación de soluciones periódicas.

- (iii) Las soluciones periódicas cercanas cruzando los ejes principales son linealmente estables si $(72\alpha - 36\beta + 5)(4\beta - 1) < 0$ e inestables en el sentido de Lyapunov cuando $(72\alpha - 36\beta + 5)(4\beta - 1) > 0$.
- (iv) Las soluciones periódicas cercanas a circulares ecuatoriales son linealmente estables si $(72\alpha - 12\beta - 1)(1 - 4\beta) < 0$ e inestables en el sentido de Lyapunov cuando $(72\alpha - 12\beta - 1)(1 - 4\beta) > 0$.
- (v) Las soluciones periódicas cercanas a circulares no ecuatoriales son linealmente estables para $(144\alpha - 36\beta + 1)(4\beta - 1)^3 > 0$ e inestables en el sentido de Lyapunov cuando $(144\alpha - 36\beta + 1)(4\beta - 1)^3 < 0$.
- (vi) Las soluciones periódicas cercanas a elípticas polares, que existen cuando $(72\alpha - 12\beta - 1)(1 - 4\beta) > 0 \vee (72\alpha - 12\beta - 1)(72\alpha + 12\beta - 7)(1 - 4\beta) > 0$, son inestables en el sentido de Lyapunov.

Los multiplicadores característicos de las soluciones periódicas son dadas por $1, 1, 1 \pm \pi \varepsilon^2 \lambda_1 + O(\varepsilon^4), 1 \pm \pi \varepsilon^2 \lambda_2 + O(\varepsilon^4)$ donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz $A = \mathbb{J} D^2 \bar{\mathcal{H}}$ (ver Tabla 3.11).

Demostración. La estabilidad lineal o inestabilidad de las soluciones periódicas en el Teorema 3.2.1 corresponde a la estabilidad paramétrica o inestabilidad del correspondiente punto crítico en el conjunto $\mathcal{R} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{E}$. Para ver esto, si \mathbb{J} denota la matriz antisimétrica clásica de orden 4, calculamos los valores propios de la matriz $A = \mathbb{J} D^2 \bar{\mathcal{H}}$ para cada punto crítico y usamos la notación del Teorema 1.7.1.

Aplicando la observación 3.2.1 y teniendo en cuenta las Tablas 3.8 y 3.9, el análisis de la estabilidad lineal de las 39 soluciones periódicas obtenidas en el Teorema 3.2.1, es simplificada al análisis de 15 soluciones periódicas correspondientes a las coordenadas escritas en color rojo.

(i) Para los puntos críticos en \mathcal{R}_1 , la matriz de linealización es

$$A(\mathcal{R}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{h(72\alpha-12\beta-1)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h(72\alpha-12\beta-1)}{12} \\ \frac{h(72\alpha-36\beta+5)}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h(72\alpha-36\beta+5)}{12} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y el polinomio característico es

$$C(\lambda) = \left[\lambda^2 + \frac{h^2}{144} (72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha - 12\beta - 1) \right]^2.$$

Así, para $(72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha - 12\beta - 1) < 0$ la matriz $A(\mathcal{R}_1)$ tiene valores propios con parte real no nula, en consecuencia por el Teorema 1.7.1 las soluciones periódicas cercanas a rectilíneas en los ejes principales son inestables en el sentido de Lyapunov.

Por otra parte, para $(72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha - 12\beta - 1) > 0$, $A(\mathcal{R}_1)$ es diagonalizable y sus valores propios son $\pm \alpha_1 i$ (con multiplicidad 2) con

$$\alpha_1 = \frac{1}{12} h \sqrt{(72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha - 12\beta - 1)}.$$

El Hamiltoniano cuadrático asociado a $A(\mathcal{R}_1)$ en coordenadas simplécticas q_1, q_2, p_1, p_2 , es dado por

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{24}h \left[(72\alpha - 36\beta + 5)(q_1^2 + q_2^2) + (72\alpha - 12\beta - 1)(p_1^2 + p_2^2) \right],$$

el subespacio lineal real maximal asociado a α_1 es $V_1 = \text{Ker}(A - \alpha_1 iI) = \mathbb{R}^4$ y $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}|_{V_1} = \mathcal{K}$ tiene signo definido. Así, $A(\mathcal{R}_1)$ es paramétricamente estable y por el Teorema 1.7.1 se sigue que las soluciones periódicas cercanas a rectilíneas en los ejes principales son linealmente estables.

(ii) Para los puntos críticos en \mathcal{R}_2 , la matriz de linealización es

$$A(\mathcal{R}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{h(4\beta-1)}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h(72\alpha+12\beta-7)}{24} \\ -\frac{h(72\alpha-36\beta+5)}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h(72\alpha-36\beta+5)}{24} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y el polinomio característico es

$$C(\lambda) = \left[\lambda^2 - \frac{h^2}{24}(72\alpha - 36\beta + 5)(4\beta - 1) \right] \left[\lambda^2 + \frac{h^2}{576}(72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha + 12\beta - 7) \right].$$

Así, para $(72\alpha - 36\beta + 5)(4\beta - 1) > 0 \vee (72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha + 12\beta - 7) < 0$ la matriz $A(\mathcal{R}_2)$ tiene valores propios con parte real no nula, en consecuencia por el Teorema 1.7.1 las soluciones periódicas cercanas a rectilíneas en los ejes principales son inestables en el sentido de Lyapunov.

Por otra parte, para $(72\alpha - 36\beta + 5)(4\beta - 1) < 0 \wedge (72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha + 12\beta - 7) > 0$, $A(\mathcal{R}_2)$ es diagonalizable y sus valores propios son $\pm\alpha_1 i, \pm\alpha_2 i$ (con multiplicidad 2) con

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}h\sqrt{(72\alpha - 36\beta + 5)(1 - 4\beta)}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{24}h\sqrt{(72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha + 12\beta - 7)}.$$

El Hamiltoniano cuadrático asociado a $A(\mathcal{R}_2)$ en coordenadas simplécticas q_1, q_2, p_1, p_2 , es dado por

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{48}h \left[(72\alpha - 36\beta + 5)(4q_1^2 - q_2^2) - (24\beta - 6)p_1^2 - (72\alpha + 12\beta - 7)p_2^2 \right],$$

el subespacio lineal real maximal asociado a α_1 y α_2 es $V_1 = \text{Ker}(A - \alpha_1 iI) = \text{Span}\{e_1, e_3\}$ y $V_2 = \text{Ker}(A - \alpha_2 iI) = \text{Span}\{e_2, e_4\}$ con $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}|_{V_1}$ y $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}|_{V_2}$ tiene signo definido. Así, $A(\mathcal{R}_2)$ es paramétricamente estable y por el Teorema 1.7.1 se sigue que las soluciones periódicas cercanas a rectilíneas en los ejes principales son linealmente estables.

(iii) Para los puntos críticos en \mathcal{R}_3 , la matriz de linealización es

$$A(\mathcal{R}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{h(4\beta-1)}{3} & \frac{h(4\beta-1)}{6} \\ 0 & 0 & \frac{h(4\beta-1)}{6} & -\frac{h(4\beta-1)}{3} \\ -\frac{h(72\alpha-36\beta+5)}{9} & -\frac{h(72\alpha-36\beta+5)}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{h(72\alpha-36\beta+5)}{18} & -\frac{h(72\alpha-36\beta+5)}{9} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y el polinomio característico es

$$C(\lambda) = \left[\lambda^2 - \frac{h^2}{36}(72\alpha - 36\beta + 5)(4\beta - 1) \right]^2.$$

Así, para $(72\alpha - 36\beta + 5)(4\beta - 1) > 0$ la matriz $A(\mathcal{R}_3)$ tiene valores propios con parte real no nula, en consecuencia por el Teorema 1.7.1 las soluciones periódicas cercanas a rectilíneas en los ejes principales son inestables en el sentido de Lyapunov.

Por otra parte, para $(72\alpha - 36\beta + 5)(4\beta - 1) < 0$, $A(\mathcal{R}_3)$ es diagonalizable y sus valores propios son $\pm\alpha_1 i$, (con multiplicidad 2) con

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}h\sqrt{(72\alpha - 36\beta + 5)(1 - 4\beta)}.$$

El Hamiltoniano cuadrático asociado a $A(\mathcal{R}_3)$ en coordenadas simplécticas $q_1, q_2,$

p_1, p_2 , es dado por

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{18}h \left[(72\alpha - 36\beta + 5)(q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2) - (12\beta - 3)(p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2) \right],$$

el subespacio lineal real maximal asociado a α_1 es $V_1 = \text{Ker}(A - \alpha_1 iI) = \mathbb{R}^4$ y $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}|_{V_1} = \mathcal{K}$ tiene signo definido. Así, $A(\mathcal{R}_3)$ es paramétricamente estable y por el Teorema 1.7.1 se sigue que las soluciones periódicas cercanas a rectilíneas en los ejes principales son linealmente estables.

(iv) Para los puntos críticos en \mathcal{C}_1 , la matriz de linealización es

$$A(\mathcal{C}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h(72\alpha - 12\beta - 1)}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h(72\alpha - 36\beta + 5)}{24} \\ -\frac{h(4\beta - 1)}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h(72\alpha - 36\beta + 5)}{24} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y el polinomio característico es

$$C(\lambda) = \left[\lambda^2 + \frac{h^2}{24}(72\alpha - 12\beta - 1)(4\beta - 1) \right] \left[\lambda^2 + \frac{h^2}{576}(72\alpha - 36\beta + 5)^2 \right].$$

Así, para $(72\alpha - 12\beta - 1)(1 - 4\beta) > 0$ la matriz $A(\mathcal{C}_1)$ tiene valores propios con parte real no nula, en consecuencia por el Teorema 1.7.1 las soluciones periódicas cercanas a circulares ecuatoriales son inestables en el sentido de Lyapunov.

Por otra parte, para $(72\alpha - 12\beta - 1)(1 - 4\beta) < 0$, $A(\mathcal{C}_1)$ es diagonalizable y sus valores propios son $\pm\alpha_1 i, \pm\alpha_2 i$ (con multiplicidad 2) con

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}h\sqrt{(72\alpha - 12\beta - 1)(4\beta - 1)}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{24}h(72\alpha - 36\beta + 5).$$

El Hamiltoniano cuadrático asociado a $A(\mathcal{C}_1)$ en coordenadas simplécticas q_1, q_2, p_1, p_2 ,

es dado por

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{48}h \left[(72\alpha - 36\beta + 5)(q_2^2 + p_2^2) - (24\beta - 6)q_1^2 - 4(72\alpha - 12\beta - 1)p_1^2 \right],$$

el subespacio lineal real maximal asociado a α_1 y α_2 es $V_1 = \text{Ker}(A - \alpha_1 iI) = \text{Span}\{e_2, e_4\}$ y $V_2 = \text{Ker}(A - \alpha_2 iI) = \text{Span}\{e_1, e_3\}$ con $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}|_{V_1}$ y $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}|_{V_2}$ tiene signo definido. Así, $A(\mathcal{C}_1)$ es paramétricamente estable y por el Teorema 1.7.1 se sigue que las soluciones periódicas cercanas a circulares ecuatoriales son linealmente estables.

(v) Para los puntos críticos en \mathcal{C}_2 , la matriz de linealización es

$$A(\mathcal{C}_2) = \begin{bmatrix} \frac{h(144\alpha-60\beta+7)}{24\sqrt{3}} & \frac{h(9\alpha-6\beta+1)}{3\sqrt{3}} & \frac{h(144\alpha-20\beta-3)}{24} & -\frac{h(36\alpha+4\beta-3)}{12} \\ -\frac{h(9\alpha-6\beta+1)}{3\sqrt{3}} & -\frac{h(144\alpha-60\beta+7)}{24\sqrt{3}} & -\frac{h(36\alpha+4\beta-3)}{12} & \frac{h(144\alpha-20\beta-3)}{24} \\ -\frac{h(144\alpha-36\beta+1)}{72} & -\frac{h(36\alpha-36\beta+7)}{36} & -\frac{h(144\alpha-60\beta+7)}{24\sqrt{3}} & \frac{h(9\alpha-6\beta+1)}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{h(36\alpha-36\beta+7)}{36} & -\frac{h(144\alpha-36\beta+1)}{72} & -\frac{h(9\alpha-6\beta+1)}{3\sqrt{3}} & \frac{h(144\alpha-60\beta+7)}{24\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

y el polinomio característico es

$$C(\lambda) = \left[\lambda^2 + \frac{h^2}{36} \left(2(18\alpha - 1)(1 - 4\beta) - \frac{3}{2} \sqrt{(144\alpha - 36\beta + 1)(4\beta - 1)^3} \right) \right] \\ \left[\lambda^2 + \frac{h^2}{36} \left(2(18\alpha - 1)(1 - 4\beta) + \frac{3}{2} \sqrt{(144\alpha - 36\beta + 1)(4\beta - 1)^3} \right) \right].$$

Procediendo de manera análoga a los casos anteriores, verificamos que para $(144\alpha - 36\beta + 1)(4\beta - 1)^3 > 0$ es paramétricamente estable y por el Teorema 1.7.1 las soluciones periódicas cercanas a circulares ecuatoriales son linealmente estables. Cuando $(144\alpha - 36\beta + 1)(4\beta - 1)^3 < 0$ hay raíces en $C(\lambda)$ con una parte real distinta de cero, obteniendo inestabilidad en este caso.

(vi) Para los puntos críticos en \mathcal{E} , la matriz de linealización es

$$A(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h(72\alpha-12\beta-1)^2}{9(72\alpha-4\beta-3)} & \frac{h(72\alpha-12\beta-1)(72\alpha+12\beta-7)}{18(72\alpha-4\beta-3)} \\ 0 & 0 & \frac{h(72\alpha-12\beta-1)(72\alpha+12\beta-7)}{18(72\alpha-4\beta-3)} & \frac{h(72\alpha-12\beta-1)^2}{9(72\alpha-4\beta-3)} \\ -\frac{h(4\beta-1)^2}{72\alpha-4\beta-3} & -\frac{h(72\alpha-12\beta-1)(4\beta-1)}{6(72\alpha-4\beta-3)} & 0 & 0 \\ -\frac{h(72\alpha-12\beta-1)(4\beta-1)}{6(72\alpha-4\beta-3)} & -\frac{h(4\beta-1)^2}{72\alpha-4\beta-3} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y el polinomio característico es

$$C(\lambda) = \left[\lambda^2 - \frac{h^2(72\alpha - 36\beta + 5)^2(72\alpha - 12\beta - 1)(4\beta - 1)}{108(72\alpha - 4\beta - 3)^2} \right] \\ \left[\lambda^2 + \frac{h^2(72\alpha - 12\beta - 7)(72\alpha - 12\beta - 1)(4\beta - 1)}{36(72\alpha - 4\beta - 3)} \right].$$

Así, para $(72\alpha - 12\beta - 1)(1 - 4\beta) > 0 \vee (72\alpha - 12\beta - 1)(72\alpha + 12\beta - 7)(1 - 4\beta) > 0$ la matriz $A(\mathcal{E})$ tiene valores propios con parte real no nula, en consecuencia por el Teorema 1.7.1 las soluciones periódicas cercanas a elípticas polares son inestables en el sentido de Lyapunov.

Puntos críticos	Valores propios
\mathcal{R}_1	$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{12}h\sqrt{(72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha - 12\beta - 1)}$
\mathcal{R}_2	$\lambda_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}h\sqrt{(72\alpha - 36\beta + 5)(1 - 4\beta)},$ $\lambda_2 = \frac{1}{24}h\sqrt{(72\alpha - 36\beta + 5)(72\alpha + 12\beta - 7)}$
\mathcal{R}_3	$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{6}h\sqrt{(72\alpha - 36\beta + 5)(1 - 4\beta)}$
\mathcal{C}_1	$\lambda_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}h\sqrt{(72\alpha - 12\beta - 1)(4\beta - 1)}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{24}h(72\alpha - 36\beta + 5)$
\mathcal{C}_2	$\lambda_1 = \frac{1}{6}h\sqrt{\left(2(18\alpha - 1)(1 - 4\beta) + \frac{3}{2}\sqrt{(144\alpha - 36\beta + 1)(4\beta - 1)^3}\right)},$ $\lambda_2 = \frac{1}{6}h\sqrt{\left(2(18\alpha - 1)(1 - 4\beta) - \frac{3}{2}\sqrt{(144\alpha - 36\beta + 1)(4\beta - 1)^3}\right)}$
\mathcal{E}	$\lambda_1 = \frac{h(72\alpha - 36\beta + 5)\sqrt{(72\alpha - 12\beta - 1)(4\beta - 1)}}{6\sqrt{3}(72\alpha - 4\beta - 3)}, \quad \lambda_2 = \frac{h\sqrt{(72\alpha - 12\beta - 7)(72\alpha - 12\beta - 1)(4\beta - 1)}}{6\sqrt{(72\alpha - 4\beta - 3)}}$

Tabla 3.11: Valores propios de la matriz A para cada caso

■

DISCUSIÓN

Conclusiones

En esta tesis, hemos estudiado analíticamente aspectos dinámicos relevantes asociados a Hamiltonianos perturbados en resonancia 1:1 y 1:1:1. Nuestras principales contribuciones se resumen en los siguientes ítems.

- I. HAMILTONIANOS EN RESONANCIA 1:1.** En este primer proyecto de la tesis y de acuerdo a nuestros objetivos planteados se estudió la familia de Hamiltonianos perturbados de la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon^2(ax_1^4 + bx_2^4 + cx_1^2x_2^2), \quad (4.1)$$

donde a, b y c son parámetros reales. A continuación, resumimos nuestras principales contribuciones:

- Se usó reducción simpléctica en nuestro análisis. La reducción se ha realizado introduciendo la simetría del oscilador por normalización y calculando los invariantes y el espacio reducido asociado a la simetría.
- Se introdujeron dos conjuntos de coordenadas simplécticas en el espacio reducido \mathbb{CP}_h . Estas coordenadas nos permiten estudiar todos los tipos de movimientos, ya que son coordenadas globales que parametrizan el espacio reducido.

- Aplicando el Teorema de Reeb obtuvimos a lo más 6 familias de soluciones periódicas cercanas a rectilíneas, circulares y elípticas en cualquier nivel de energía $h > 0$. Cabe destacar que se determinó el máximo número posible de soluciones periódicas para perturbaciones de grado 4 (ver detalles en [22]).
- Usando la noción de estabilidad paramétrica se determinó la estabilidad (lineal) o inestabilidad de todas las soluciones periódicas.

Los resultados obtenidos en esta parte serán sometidos para publicación en una revista indexada en **WOS** o **SCOPUS** en el artículo:

W. Gonzales and J. Vidarte, “Periodic orbits in a quartic perturbed Hamiltonian system in 1:1 resonance”. Preprint, 2022.

II. HAMILTONIANOS EN RESONANCIA 1:1:1. Como segundo proyecto de la tesis y de acuerdo a nuestros objetivos planteados se estudió la familia de Hamiltonianos de la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2) + \varepsilon\gamma x_1 x_2 x_3 + \varepsilon^2[\alpha(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + \beta(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2)], \quad (4.2)$$

donde α, β y γ son parámetros reales.

- Nuestro análisis fue realizado en el mismo estilo de (4.1), estudiando la existencia de soluciones periódicas, su estabilidad lineal y caracterizando las curvas de bifurcación. Desde que el Hamiltoniano tratado en esta sección tiene tres grados de libertad, el análisis de la dinámica fue más complicado.
- Como en la primera parte, se usó reducción simpléctica en nuestro análisis, para lo cual normalizamos el Hamiltoniano, se calcularon los invariantes y el espacio reducido asociado a la simetría del oscilador $3D$.

- Se introdujeron tres conjuntos de coordenadas simplécticas en el espacio reducido \mathbb{CP}_h^2 , las cuales nos permitieron estudiar todos los tipos de movimientos.
- Aplicando el Teorema de Reeb se obtuvo a lo más 39 familias de soluciones periódicas cercanas a soluciones rectilíneas, circulares y elípticas en cualquier nivel de energía $h > 0$. De acuerdo a la referencia [22], destacamos que 39 es el máximo número posible de soluciones periódicas que un Hamiltoniano en resonancia 1:1:1 puede tener en el caso de una perturbación cuártica.
- Finalmente, usando la noción de estabilidad paramétrica se determinó la estabilidad (lineal) o inestabilidad de todas las soluciones periódicas.

Los resultados obtenidos en este proyecto constituyen parte de la investigación titulada “Bifurcations of periodic orbits in perturbed Hamiltonian systems in 1:1:1 resonance” que el candidato a magíster y su asesor vienen realizando.

Trabajo futuro

Como trabajo futuro, citamos algunos proyectos que pueden ser considerados como una continuación natural de nuestro estudio.

- Analizar la existencia de soluciones periódicas simétricas en los modelos 2D y 3D usando el método de continuación de Poincaré.
- Analizar la existencia y los tipos de bifurcaciones de soluciones periódicas en los modelos 2D y 3D.
- Analizar la existencia de toros KAM (Kolmogorov, Arnold y Moser) de dimensión máxima encerrando las soluciones periódicas linealmente estables en los modelos 2D y 3D.
- Analizar la existencia y estabilidad de órbitas periódicas en sistemas Hamiltonianos para n grados de libertad con $n \geq 4$ mediante los métodos del promedio y de reducción. Como una generalización de los modelos estudiados en esta tesis, se pretende

estudiar el siguiente Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) + \varepsilon^2 \left(\alpha \sum_{i=1}^n x_i^4 + \beta \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n x_i^2 x_j^2 \right).$$

Bibliografía

- [1] M. ALVAREZ-RAMÍREZ, A. GARCÍA, AND J. VIDARTE, *Armbruster-Guckenheimer-Kim Hamiltonian in 1:1 resonance*, Russian Journal of Nonlinear Dynamics. **17** (2021), 59-76.
- [2] P. ANDRLE, *A third integral of motion in a system with a potential of the fourth degree*, Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia, **17** (1966), 169-175.
- [3] V.I. ARNOLD, V.V. KOZLOV, AND A.I. NEISHTADT, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Third Edition, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 3. Dynamical Systems III, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [4] R. BARRIO, F. BLESÁ, A. DENA, AND S. PIASECKI, *Connecting symmetric and asymmetric families periodic orbits in squared symmetric Hamiltonians*, International Journal of Modern Physics **23** (2012), 1-22.
- [5] N.D. CARANICOLAS, *1:1:1 resonant periodic orbits in 3-dimensional galactic-type Hamiltonians*, Astron. Astrophys. **282** (1994), 34-36.
- [6] R.C. CHURCHILL, M. KUMMER, AND D.L. ROD, *On averaging, reduction, and symmetry in Hamiltonian systems*, J. Differential Equations. **49** (3) (1983), 359-414.
- [7] R.H. CUSHMAN AND L.M. BATES, *Global Aspects of Classical Integrable Systems*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

- [8] T. DE ZEEUW, *Motion in the core of a triaxial potential*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **215** (4) (1985), 731-760.
- [9] T. DE ZEEUW AND D. MERRITT, *Stellar orbits in a triaxial galaxy. I. Orbits in the plane of rotation*, Astrophys. J. **267** (1983), 571-595.
- [10] A. DEPRIT, *Canonical transformations depending on a small parameter*, Celestial Mech. **1** (1) (1969), 12-30.
- [11] A. DEPRIT, *The Lissajous transformations. I. Basics*, Celestial Mech. **51** (1991), 201-225.
- [12] A. DEPRIT AND A. ELIPE, *The Lissajous transformations. II Normalization*, Celestial Mech. **51** (1991), 227-250.
- [13] K. EFSTATHIOU AND D.A. SADOVSKIĬ, *Perturbations of the 1:1:1 resonance with tetrahedral symmetry: a three degree of freedom analogue of the two degree of freedom Hénon-Heiles Hamiltonian*, Nonlinearity **17** (2) (2004), 415-446.
- [14] A.P. MARKEEV, *Libration Points in Celestial Mechanics and Space Dynamics*, Nauka, Moscow, 1978.
- [15] J. MARSDEN AND A. WEINSTEIN, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Math. Phys. **5** (1) (1974), 121-130.
- [16] K.R. MEYER, G.R. HALL, AND D. OFFIN, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Thrid Edition, Springer-Verlag, New York, 2017.
- [17] K.R. MEYER, J.F. PALACIÁN, AND P. YANGUAS, *Geometric averaging of Hamiltonian systems: periodic solutions, stability, and KAM tori*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **10** (3) (2011), 817-856.
- [18] K.R. MEYER, J.F. PALACIÁN, AND P. YANGUAS, *Singular reduction of resonant Hamiltonians*, Nonlinearity **31** (2018), 2854-2894.

- [19] J. MOSER, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Comm. Pure Appl. Math. **XXIII** (4) (1970), 609-636.
- [20] J. F. PALACIÁN, C. VIDAL, J. VIDARTE, AND P. YANGUAS, *Periodic Solutions and KAM tori in a Triaxial Potential*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **16** (1) (2017), 159-187.
- [21] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques*, Acad. Roy. Sci. Lett. et Beaux-Arts de Belgique. Cl. des Sci. Mém. in 8°, Ser. 2, **27** (1952), No. 9.
- [22] D. VAN STRATEN, *A note on the number of periodic orbits near a resonant equilibrium point*, Nonlinearity **2** (1989), 445-458.
- [23] V.A. YAKUBOVICH AND V.M. STARZHINSKII, *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [24] P. YANGUAS, J.F. PALACIÁN, K.R. MEYER, AND H.S. DUMAS, *Periodic solutions in Hamiltonian systems, averaging, and the Lunar problem*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **7** (2) (2008), 311-340.