



UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



La Foliación de Reeb para la Esfera S^3

Tesis para optar el Título **Profesional de:**
Licenciado en Matemáticas

Presentada por:

Bach. Mat. Luis Gustavo LLontop Cornejo

Asesor:

Dra. Gloria María Ortiz Basauri

LAMBAYEQUE – PERU
2019

Resumen

En la actualidad la “*Teoría de Foliaciones*” es un campo multidisciplinar que precisa de la aplicación de complejas y diversas técnicas geométricas, topológicas y analíticas.

El primer impulso para esta teoría viene dado por la pregunta planteada por H. Hopf acerca de la existencia de una foliación de codimensión uno en la esfera \mathbb{S}^3 , la cual fue respondida afirmativamente por G. Reeb. Este trabajo se centra en el estudio de esta foliación: “*La foliación de Reeb para la esfera \mathbb{S}^3* ”; ya que a partir de ésta es como se inicia el desenvolvimiento de la “*Teoría de Foliaciones*”.

Intuitivamente, una *foliación* es esencialmente una descomposición de una variedad en subvariedades de igual dimensión, llamadas hojas de la foliación, que se pegan como las hojas de un libro y, de la misma manera, estas hojas contienen información valiosa, tanto geométrica como topológica sobre la variedad misma, pero que globalmente pueden tener una estructura más complicada.

El objetivo de este trabajo es construir la foliación de Reeb para la esfera \mathbb{S}^3 ; para esto se tiene que descomponer \mathbb{S}^3 como unión de dos toros sólidos $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$; para luego construir una foliación en cada uno de los toros sólidos, para así identificar sus fronteras mediante un homeomorfismo que lleva los paralelos de uno sobre los meridianos del otro y viceversa; para de esta forma obtener una foliación de la esfera \mathbb{S}^3 .

Palabras Claves

- Submersión
- Foliación
- Esfera \mathbb{S}^3
- Toro Sólido

Abstract

At present the “*Foliation Theory*” is a multidisciplinary field that requires the application of complex and diverse geometric, topological and analytical techniques.

The first impulse for this theory was given by the question posed by H. Hopf about the existence of a foliation of codimension on the \mathbb{S}^3 , which was used by G. Reeb. This project focuses on the study of this foliation: “*The Reeb foliation of \mathbb{S}^3 sphere*”; and that is why the “*Foliation Theory*” is being developed

Intuitively, a foliation is a decomposition of a manifold into submanifolds with the same dimension, these are called the leaves of foliation, which stick like the leaves of a book, these contain valuable information, both geometric and topological, but in a global way they can have a more complicated structure.

The aim of this project is to build the Reeb foliation on the \mathbb{S}^3 sphere. For this to happen, it has to be decomposed the sum of two solid horned spheres $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$; in each of them it must to build a foliation, finally the borders are identified by a homeomorphism which takes the parallels of one over the meridians of the other and vice versa.

Keywords

- Submersión
- Foliation
- \mathbb{S}^3 sphere
- Solid bull

UNIVERSIDAD NACIONAL “PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación y aprobación de la tesis titulada **“La Foliación de Reeb para la Esfera S^3 ”**, presentada por el bachiller en matemáticas, Llontop Cornejo Luis Gustavo, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Dra. Olinda Luzmila Vigo Vargas
Presidente del Jurado de Tesis

Lic. Mat. Miriam María Estrada Huancas
Secretario del Jurado de Tesis

Lic. Mat. Miguel Ángel Baca Ferreyros
Vocal del Jurado de Tesis

Fecha de Defensa de Tesis: _____

UNIVERSIDAD NACIONAL “PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“La Foliación de Reeb para la Esfera \mathbb{S}^3 ”

Bach. Mat. Llontop Cornejo Luis Gustavo
Autor

Dra. Gloria María Ortiz Basauri
Asesor de la Tesis

LAMBAYEQUE – PERU
2019

*A mis queridísimos padres: Eusebio y Francisca,
con mucho cariño, por su abnegada perseverancia
en pro de mi superación.*

Agradecimientos

Un trabajo de tesis marca el final de una época. Al detenerme en la culminación de esta etapa y volver la mirada atrás aparecen los sentimientos de gratitud ya que el esfuerzo desplegado para llegar con éxito a este peldaño de la vida profesional depende también de la personas e instituciones que te estimulan a continuar en esta senda.

En primer lugar agradecer a Dios por darme sabiduría y fuerza para poder cumplir esta meta, agradecer a mis padres señor Eusebio Llontop y señora Paula Cornejo, por su apoyo incondicional, comprensión y estimulación constante, agradecer también a mis hermanos Edgar y Fernando por su apoyo emocional e incondicional.

A la Dra. Gloria María Ortiz Basauri, quien fue mi asesor en el presente trabajo, quien con su valiosa y desinteresada orientación, paciencia y excelentes consejos lograron que se concluya este trabajo de tesis.

A mis amigos del pregrado, en especial a Christine, Mónica, Christian, José Martín, Pedro, Tony con los que pasamos momentos amenos.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Variedades Diferenciables	1
1.2. Aplicaciones Diferenciables	3
1.3. Espacio Tangente y Diferencial de una Aplicación Diferenciable	5
1.4. Inmersiones y Submersiones	12
1.5. Aplicaciones de Recubrimiento	15
1.6. Acción de Grupo sobre una Variedad Diferenciable	20
2. Foliaciones	23
2.1. Definición y Ejemplos	23
3. La Foliación de Reeb para la Esfera \mathbb{S}^3	29
3.1. Descomposición Tórica de la Esfera \mathbb{S}^3	29
3.2. Foliación de Reeb en $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$	31
3.3. Foliación de Reeb para la Esfera \mathbb{S}^3	35
A. Algunos resultados de acción de grupo sobre un espacio topológico	38

Introducción

La idea intuitiva de *foliación* corresponde a la descomposición de una variedad en unión de subvariedades conexas, disjuntas, de una misma dimensión llamadas *hojas*, las cuales se acumulan localmente como las hojas de un libro.

El estudio de las *foliaciones* tiene una larga historia en matemáticas, se inició en la década de 1940 con los trabajos de C. Ehresmann y G. Reeb, que estudiaban la existencia de campos de vectores completamente integrables sobre variedades de dimensión tres; desde ese tiempo, la *teoría de foliaciones* ha disfrutado de un rápido desarrollo.

En la actualidad, la teoría de foliaciones es un campo multidisciplinar que precisa de la aplicación de complejas y diversas técnicas geométricas, topológicas y analíticas. El estudio de las variedades foliadas a llevado a los especialistas en el tema al desarrollo de nuevas líneas de investigación, en particular en este trabajo se pretende reconstruir una foliación para la esfera \mathbb{S}^3 llamada la “*foliación de Reeb para la esfera \mathbb{S}^3* ”, ya que a partir de ésta es como se inicia el desarrollo de la teoría de foliaciones.

En el primer capítulo, son expuestas nociones básicas sobre variedades diferenciables, mostrando ejemplos y definiciones; además de presentar los conceptos de las formas locales sobre una variedad, inmersiones y submersiones, aplicaciones de recubrimiento y acciones de grupo; que permitirán un mejor entendimiento de lo que será tratado en los capítulos siguientes.

En el segundo capítulo, se da el concepto de foliación, además se presentan ejemplos para una mejor comprensión de éste concepto.

En el tercer capítulo, se construirá una foliación para la esfera \mathbb{S}^3 , para esto se descompondrá la esfera \mathbb{S}^3 como unión de dos toros sólidos, luego construiremos una foliación en cada uno de los toros sólidos, para luego unir estas foliaciones y así obtener una foliación de \mathbb{S}^3 , llamada “*Foliación de Reeb para la esfera \mathbb{S}^3* ”.

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es presentar algunas definiciones básicas y ejemplos así como resultados clásicos que permitirán un mejor entendimiento de lo que será tratado en los capítulos que siguen, donde todo girará en torno al objeto principal llamado *foliación*.

1.1. Variedades Diferenciables

Existen diversas formas de introducir la noción de variedad diferenciable, muchas de las cuales parten de la idea de espacio topológico o variedad topológica. En este trabajo, se prefiere introducir las estructuras diferenciables sobre un conjunto sin ninguna otra estructura adicional.

Definición 1.1. Sea M un conjunto. Una *carta m -dimensional* sobre M es un par (U, φ) , donde $U \subset M$ es un conjunto abierto y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo de U sobre el subconjunto abierto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.

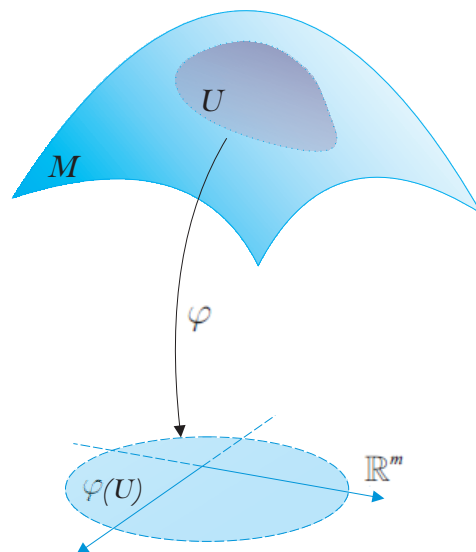


Figura 1.1: Sistema de Coordenadas en una Variedad Diferenciable

Cada homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ (Figura 1.1) recibe el nombre de *sistema de coordenadas* (o carta) con dominio U . Para cada punto $p \in U$ tal que $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_m)$ entonces (x_1, \dots, x_m) reciben el nombre de *coordenadas locales de p* .

Al igual que ocurre en las superficies, hay conjuntos que no será posible cubrir mediante una sola carta, de modo que se necesita colecciones de cartas entre las que exista compatibilidad, en el sentido a precisar en la siguiente definición.

Definición 1.2. Sea M un conjunto de dimensión m . Dos sistemas de coordenadas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) en M son C^k - compatibles ($k \in \mathbb{N}$) si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $U_i \cap U_j = \emptyset$ ó
2. $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y el cambio de coordenadas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es un difeomorfismo de clase C^k entre los abiertos $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ y $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ en el espacio \mathbb{R}^m .

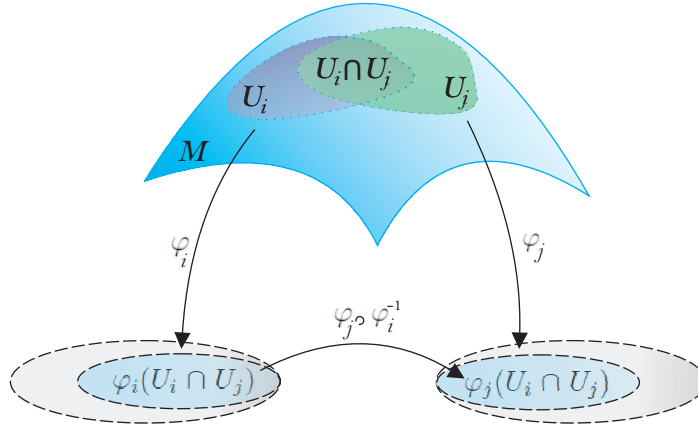


Figura 1.2: Cambio de Coordenadas

Definición 1.3. Un *atlas diferenciable m -dimensional* sobre un conjunto M es una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in L}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

- a) $\cup_{i \in L} U_i = M$.
- b) Para todo par de índices i y j , las cartas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) son C^k - compatibles.

Ejemplo 1.1. Un atlas de clase C^∞ en \mathbb{R}^m es el conjunto $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^m, Id)\}$.

Ejemplo 1.2. En la esfera \mathbb{S}^m , un atlas de clase C^∞ es el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(\mathbb{S}^m - \{N\}, \varphi_N), (\mathbb{S}^m - \{S\}, \varphi_S)\},$$

donde φ_N y φ_S son las proyecciones estereográficas relativas a los polos norte y sur respectivamente.

Definición 1.4. Un atlas \mathcal{A} de clase C^k en M es *maximal* si no está propiamente contenido en ningún otro atlas de clase C^k en M .

Definición 1.5. Una *variedad diferenciable* de clase C^k y dimensión m es un par (M, \mathcal{A}) formado por un conjunto M y una estructura diferenciable de clase C^k y dimensión m \mathcal{A} sobre M .

Ejemplo 1.3. En el espacio euclídeo \mathbb{R}^m se puede definir una estructura diferenciable considerando como carta global la aplicación identidad. Se refiere a ella como la estructura diferenciable estándar de \mathbb{R}^m .

Ejemplo 1.4. La esfera \mathbb{S}^m definida como:

$$\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}, \text{ donde } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+1} x_i^2}$$

con la topología inducida de \mathbb{R}^{m+1} posee una estructura de variedad diferenciable y dimensión m .

1.2. Aplicaciones Diferenciables

En esta sección se discutirá la noción de diferenciabilidad de aplicaciones entre variedades diferenciables, transfiriendo algunas nociones básicas del cálculo en \mathbb{R}^m .

Definición 1.6. Sean (M, \mathcal{A}) y (N, \mathcal{B}) variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente y de clase C^k ($k \geq 1$).

- 1.- Una función $f : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (N, \mathcal{B})$ es diferenciable en el punto $p \in M$ si existen sistemas de coordenadas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ de M en p y $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ de N en $f(p)$, con $f(U) \subseteq V$, tal que la función $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ es diferenciable de clase C^k en el punto $\varphi(p)$.
- 2.- La función $f : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (N, \mathcal{B})$ es diferenciable en M , si es diferenciable en cada punto de M .

Observación 1.1. La función $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ de la Definición 1.6, es llamada *expresión local de f* , en términos de los sistemas de coordenadas (U, φ) y (V, ψ) . En adelante, esta función será denotada abreviadamente por $f_{\varphi\psi}$.

Proposición 1.1. Si $f : M \rightarrow N$ es diferenciable en un punto $p \in M$, entonces f es continua en p .

Demostración. Siendo f diferenciable en el punto $p \in M$, por definición existen sistemas de coordenadas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ de M en p y $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ de N en $f(p)$, con $f(U) \subseteq V$, tal que la función $f_{\varphi\psi} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ es diferenciable en el punto $\varphi(p) \in \varphi(U)$, por lo tanto continua en ese punto, y como en U podemos escribir $f = \psi \circ f_{\varphi\psi} \circ \varphi$, y como φ es continua en p , $f_{\varphi\psi}$ es continua en $\varphi(p)$ y ψ^{-1} es continua en $f_{\varphi\psi}(\varphi(p))$, entonces se tiene que f es continua en p . \square

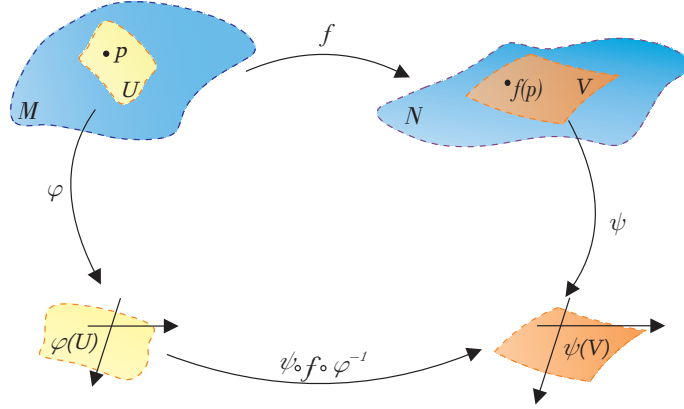


Figura 1.3: Expresión local de una función definida entre variedades

Proposición 1.2. *La composición de funciones diferenciables es una función diferenciable.*

Demostración. Sean $f : (M^m, \mathcal{A}) \rightarrow (N^n, \mathcal{B})$ y $g : (N^n, \mathcal{B}) \rightarrow (P^q, \mathcal{C})$ aplicaciones de clase C^k . Se demostrará que $g \circ f : (M^m, \mathcal{A}) \rightarrow (P^q, \mathcal{C})$ también es de clase C^k . Sea $p \in M$ un punto arbitrario.

Como f es diferenciable de clase C^k en p , existen sistemas de coordenadas, (U, φ) de M en p y (V_1, ψ_1) de N en $f(p)$ con $f(U) \subseteq V_1$, tal que la aplicación $\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1} \equiv f_{\varphi\psi_1} : \varphi(U) \rightarrow \psi_1(V_1)$ es de clase C^k .

Análogamente por ser g diferenciable en $f(p)$, existen sistemas de coordenadas (V_2, ψ_2) de N en $f(p)$ y (W, ϕ) de P en $g(f(p))$, con $g(V_2) \subseteq W$, tal que la aplicación $\phi \circ g \circ \psi_2^{-1} \equiv g_{\psi_2\phi} : \psi_2(V_2) \rightarrow \phi(W)$ es de clase C^k . Restringiendo a U de tal manera que $f(U) \subseteq V_1 \cap V_2$, y debido a la igualdad

$$\phi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} \equiv (\phi \circ g \circ \psi_2^{-1}) \circ (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1})$$

y como $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(V_1 \cap V_2) \rightarrow \psi_2(V_1 \cap V_2)$ es un difeomorfismo de clase C^k , se concluye que $\phi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable de clase C^k en $\varphi(p)$, por lo tanto $g \circ f$ es diferenciable de clase C^k en $p \in M$. \square

Ejemplo 1.5.

- 1.- La función identidad $Id : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{A})$ es diferenciable en M .
- 2.- Dadas las variedades de clase C^k , M^m y N^n , sean $p_1 : M^m \times N^n \rightarrow M^m$ y $p_2 : M^m \times N^n \rightarrow N^n$, las proyecciones $p_1(x, y) = x$ y $p_2(x, y) = y$, entonces ambas aplicaciones son de clase C^k .
- 3.- Sea (M, \mathcal{A}) es una variedad m -dimensional de clase C^k y $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Entonces f es diferenciable de clase C^k en M si, y sólo si, para cada $p \in M$ existe un sistema de coordenadas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, con $p \in U$, tal que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^k .
- 4.- Si $f : M \rightarrow N$ es diferenciable de clase C^k , la restricción de f a cualquier conjunto abierto W en M también es diferenciable de la misma clase de diferenciabilidad.

Definición 1.7. Una función $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo de clase C^k si f es una biyección, diferenciable de clase C^k y f^{-1} es diferenciable de clase C^k .

Ejemplo 1.6.

- 1.- Sea M^m una variedad de clase C^k y sea (U, φ) una carta en M . Considerando U como variedad C^k con la estructura inducida por la de M , se tiene que $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo de clase C^k .
- 2.- La aplicación antipodal $a : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$, la cual es definida por $a(x) = -x$ es un difeomorfismo C^∞ .

1.3. Espacio Tangente y Diferencial de una Aplicación Diferenciable

A continuación, se introducirá la noción de derivada de una aplicación diferenciable entre dos variedades, tomando como modelo la interpretación geométrica de la derivada de una aplicación diferenciable en \mathbb{R}^m .

Definición 1.8. Sea M una variedad diferenciable m -dimensional de clase C^k . Sea $p \in M$ un punto fijo, considere el conjunto $C_p(M)$ formado por todas las curvas $\alpha : J_\alpha \longrightarrow M$ de clase C^k , con $\alpha(0) = p$, donde $J_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto conteniendo el origen.

Definición 1.9. Sean las curvas $\alpha, \beta \in C_p(M)$. Se dice que α y β son *equivalentes* y se escribe $\alpha \sim \beta$ si existe un sistema de coordenadas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, con $p \in U$, tal que:

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

Observación 1.2. La definición anterior garantiza que la relación \sim no depende del sistema de coordenadas que se escoja.

En efecto:

Sea $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, $p \in V$, otro sistema de coordenadas, entonces por la regla de la cadena se tiene que:

$$(\psi \circ \alpha)'(0) = ((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha))'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'_{(\varphi \circ \alpha)(0)} \circ (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

es decir:

$$(\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'_{(\varphi \circ \alpha)(0)} \circ (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

como $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$ entonces:

$$(\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'_{(\varphi \circ \beta)(0)} \circ (\varphi \circ \beta)'(0) = (\psi \circ \beta)'(0),$$

Además de la observación anterior, se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.1. La relación \sim en $C_p(M)$ es de equivalencia.

Demostración.

i) Reflexiva: $\forall \alpha \in C_p(M); \alpha \sim \alpha$.

Sea $\alpha : J_\alpha \rightarrow M$ tal que $0 \in J_\alpha$, $\alpha(0) = p$. Por ser M una variedad diferenciable, existe un sistema de coordenadas $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que la composición: $\varphi \circ \alpha : J_\alpha \rightarrow \varphi(U)$ es diferenciable en 0, entonces:

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

Por lo tanto $\alpha \sim \alpha$.

ii) Simétrica: $\forall \alpha, \beta \in C_p(M); \alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta \sim \alpha$.

Sean $\alpha : J_\alpha \rightarrow M$ y $\beta : J_\beta \rightarrow M$ curvas en $C_p(M)$ tales que $0 \in J_\alpha \cap J_\beta$, $\alpha(0) = p = \beta(0)$ y $\alpha \sim \beta$, entonces existe un sistema de coordenadas $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

Luego por la simetría de la igualdad de números reales se tiene que:

$$(\varphi \circ \beta)'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

Por lo tanto $\beta \sim \alpha$.

iii) Transitiva $\forall \alpha, \beta, \lambda \in C_p(M); (\alpha \sim \beta) \wedge (\beta \sim \lambda) \Rightarrow (\alpha \sim \lambda)$.

Sean $\alpha : J_\alpha \rightarrow M$ y $\beta : J_\beta \rightarrow M$ y $\lambda : J_\lambda \rightarrow M$ curvas en $C_p(M)$ tales que $0 \in J_\alpha \cap J_\beta \cap J_\lambda$, $\alpha(0) = p = \beta(0) = \lambda(0)$ y $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \lambda$, entonces existen sistemas de coordenadas $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\psi : V \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que:

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0) \text{ y } (\psi \circ \beta)'(0) = (\psi \circ \lambda)'(0),$$

luego

$$\begin{aligned} (\psi \circ \lambda)'(0) &= (\psi \circ \beta)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \beta)'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1})'_{\varphi(p)} \circ (\varphi \circ \beta)'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1})'_{\varphi(p)} \circ (\varphi \circ \alpha)'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \alpha)'(0) \end{aligned}$$

Es decir $(\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \lambda)'(0)$, por lo tanto, $\alpha \sim \lambda$.

□

Definición 1.10. Sea (M, \mathcal{A}) una variedad diferenciable.

El espacio tangente a M en el punto p , denotado por $T_p M$, es definido por:

$$T_p M = C_p / \sim .$$

Observación 1.3. Denotando por v a un vector tangente a M en p , se tiene que:

$$v = [\alpha] = \{\lambda \in C_p(M) : \lambda \sim \alpha\}.$$

Si (U, φ) es un sistema de coordenadas de M en p , la representación local de cada camino $\lambda \in v = [\alpha] \in T_p M$ tiene en \mathbb{R}^m , cuando $t = 0$, el mismo vector velocidad $(\varphi \circ \alpha)'(0)$. Esto sugiere la idea de relacionar cada vector $v = [\alpha] \in T_p M$ con un vector en \mathbb{R}^m . Específicamente, se relaciona el vector $v = [\alpha]$ con el vector $(\varphi \circ \alpha)'(0)$. Lo que resulta ser una biyección entre $T_p M$ y \mathbb{R}^m . Esto último se formaliza mediante el siguiente resultado.

Proposición 1.3. Sea (U, φ) un sistema de coordenadas de M en p . Entonces asociado a este sistema existe una biyección $\overline{\varphi}_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definido por:

$$\overline{\varphi}_p([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0).$$

Demostración. Sean λ y β elementos de $C_p(M)$ tales que $\lambda \sim \beta$, entonces:

$$(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0).$$

Por la definición de $\overline{\varphi}_p$ se tiene que:

$$\overline{\varphi}_p([\lambda]) = \overline{\varphi}_p([\beta]).$$

Esto muestra que la definición de $\overline{\varphi}_p([\alpha])$ no depende del representante que se elija en la clase $[\alpha]$, es decir, $\overline{\varphi}_p$ está bien definida.

Ahora se mostrará que la función $\overline{\varphi}_p$ es una biyección entre $T_p M$ y \mathbb{R}^m .

1. $\overline{\varphi}_p$ es *inyectiva*: Sean $[\lambda]$ y $[\beta]$ elementos de $T_p M$ tal que:

$$\overline{\varphi}_p([\lambda]) = \overline{\varphi}_p([\beta]),$$

entonces por la definición de $\overline{\varphi}_p$ se tiene que:

$$(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0),$$

pero esto implica que $\lambda \sim \beta$, por lo tanto $[\lambda] = [\beta]$.

2. $\overline{\varphi}_p$ es *sobreyectiva*: Dado $v \in \mathbb{R}^m$ un vector arbitrario, sea $\xi : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \varphi(U)$ tal que:

$$\xi(t) = \varphi(p) + tv.$$

A partir de aquí se define el camino $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$ como $\alpha = \varphi^{-1} \circ \xi$, es decir, $\alpha(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$. Puesto que ξ es diferenciable se concluye que $\alpha = \varphi^{-1} \circ \xi$ también lo es, además $\alpha(0) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + 0) = p$ y por tanto $\alpha \in C_p M$. Como $\overline{\varphi}_p([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0) = v$ se concluye que $\overline{\varphi}_p$ es sobreyectiva.

□

Proposición 1.4. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Entonces para cada $p \in M$ el espacio tangente $T_p M$ admite estructura de espacio vectorial real m -dimensional.

Demostración. Sea $(U, \varphi) \in \mathbf{A}$ un sistema arbitrario tal que $p \in U$. De acuerdo a la Proposición 1.3, la aplicación $\overline{\varphi}_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\overline{\varphi}_p([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$ es una biyección. Usando esta función se definen en $T_p M$ las operaciones:

$$\begin{aligned} \text{Suma} & : [\alpha] + [\beta] = (\overline{\varphi}_p)^{-1}(\overline{\varphi}_p([\alpha]) + \overline{\varphi}_p([\beta])) \\ \text{Multiplicación} & : c[\alpha] = (\overline{\varphi}_p)^{-1}(c\overline{\varphi}_p([\alpha])). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Se comprueba que las operaciones definidas mediante estas igualdades hacen efectivamente de $T_p M$ un espacio vectorial.

En primer lugar, se observa que, por la misma forma como han sido definidas, estas operaciones son cerradas.

1. **La suma es asociativa:** Sean $[\alpha], [\beta]$ y $[\lambda]$ elementos de $T_p M$. Entonces:

$$\begin{aligned} ([\alpha] + [\beta]) + [\lambda] &= (\overline{\varphi}_p)^{-1}(\overline{\varphi}_p([\alpha]) + \overline{\varphi}_p([\beta])) + [\lambda] \\ &= (\overline{\varphi}_p)^{-1}\{\overline{\varphi}_p((\overline{\varphi}_p)^{-1}(\overline{\varphi}_p([\alpha]) + \overline{\varphi}_p([\beta]))) + \overline{\varphi}_p([\lambda])\} \\ &= (\overline{\varphi}_p)^{-1}\{\overline{\varphi}_p([\alpha]) + \overline{\varphi}_p([\beta]) + \overline{\varphi}_p([\lambda])\} \\ &= (\overline{\varphi}_p)^{-1}\{\overline{\varphi}_p([\alpha]) + \overline{\varphi}_p((\overline{\varphi}_p)^{-1}(\overline{\varphi}_p([\beta]) + \overline{\varphi}_p([\lambda])))\} \\ &= [\alpha] + (\overline{\varphi}_p)^{-1}(\overline{\varphi}_p([\beta]) + \overline{\varphi}_p([\lambda])) \\ &= [\alpha] + ([\beta] + [\lambda]) \end{aligned}$$

2. **La suma es conmutativa:**

$$\begin{aligned} [\alpha] + [\beta] &= (\overline{\varphi}_p)^{-1}(\overline{\varphi}_p([\alpha]) + \overline{\varphi}_p([\beta])) \\ &= (\overline{\varphi}_p)^{-1}(\overline{\varphi}_p([\beta]) + \overline{\varphi}_p([\alpha])) \\ &= [\beta] + [\alpha] \end{aligned}$$

3. **La existencia del elemento neutro:** Con el propósito de hallar el candidato a elemento neutro se procede de la siguiente manera: se debe hallar un elemento $[\theta] \in T_p M$ tal que $[\alpha] + [\theta] = [\alpha]$ para todo $[\alpha] \in T_p M$. Pero si se cumple la igualdad anterior entonces por la definición de suma de clases en $T_p M$ se tiene que $[\alpha] = [\alpha] + [\theta] = (\overline{\varphi}_p)^{-1}(\overline{\varphi}_p([\alpha]) + \overline{\varphi}_p([\theta]))$, de donde $\overline{\varphi}_p([\alpha]) = \overline{\varphi}_p([\alpha]) + \overline{\varphi}_p([\theta])$ y por lo tanto $\overline{\varphi}_p([\theta]) = 0$, donde el 0 del lado derecho es el vector nulo del \mathbb{R}^m , es decir, $0 = (0, \dots, 0)$.

Por tanto, se obtiene $[\theta] = (\overline{\varphi}_p)^{-1}(0)$.

4. **Existencia del elemento inverso aditivo:** Se Hace un procedimiento similar al anterior. Dado un $[\alpha] \in T_p M$ se debe hallar un candidato $[a_0]$ tal que $[\alpha] + [a_0] = [\theta]$, donde $[\theta] = (\overline{\varphi}_p)^{-1}(0)$ es el elemento neutro aditivo hallado en el ítem anterior. Pero si $[\alpha] + [a_0] = [\theta]$ entonces $(\overline{\varphi}_p)^{-1}(\overline{\varphi}_p([\alpha]) + \overline{\varphi}_p([a_0])) = (\overline{\varphi}_p)^{-1}(0)$ de donde $\overline{\varphi}_p([\alpha]) + \overline{\varphi}_p([a_0]) = 0$.

Esto implica que:

$$[a_0] = (\overline{\varphi}_p)^{-1}(-\overline{\varphi}_p([\alpha]))$$

Intuitivamente, $[a_0]$ es la clase que consiste de todos los caminos cuya representación local, mediante φ , tiene como vector velocidad a $-(\varphi \circ \alpha)'(0)$.

5. **Distributividad de la multiplicación respecto a la suma:** Sean $k \in \mathbb{R}$ y los elementos $[\alpha]$ y $[\beta]$ de $T_p M$. Entonces:

$$\begin{aligned}
c([\alpha] + [\beta]) &= c((\overline{\varphi_p})^{-1}(\overline{\varphi_p}([\alpha]) + \overline{\varphi_p}([\beta]))) \\
&= (\overline{\varphi_p})^{-1}(c\overline{\varphi_p}((\overline{\varphi_p})^{-1}(\overline{\varphi_p}([\alpha]) + \overline{\varphi_p}([\beta]))) \\
&= (\overline{\varphi_p})^{-1}(c\overline{\varphi_p}([\alpha]) + c\overline{\varphi_p}([\beta])) \\
&= (\overline{\varphi_p})^{-1}(\overline{\varphi_p}((\overline{\varphi_p})^{-1}(c\overline{\varphi_p}([\alpha]))) + \overline{\varphi_p}((\overline{\varphi_p})^{-1}(c\overline{\varphi_p}([\beta]))) \\
&= (\overline{\varphi_p})^{-1}(c\overline{\varphi_p}([\alpha])) + (\overline{\varphi_p})^{-1}(c\overline{\varphi_p}([\beta])) \\
&= c[\alpha] + c[\beta]
\end{aligned}$$

De manera análoga se comprueba que las operaciones definidas en (1.1) cumplen con el resto de axiomas para espacio vectorial.

Por tanto, la aplicación $\overline{\varphi_p}$ induce una estructura de espacio vectorial en $T_p M$. \square

Observación 1.4. La estructura de espacio vectorial inducida en $T_p M$, por las operaciones definidas por medio de las igualdades (1.1), es independiente del sistema de coordenadas, es decir:

$$\begin{aligned}
(\overline{\varphi_p})^{-1}(\overline{\varphi_p}([\alpha]) + \overline{\varphi_p}([\beta])) &= (\overline{\psi_p})^{-1}(\overline{\psi_p}([\alpha]) + \overline{\psi_p}([\beta])) \\
(\overline{\varphi_p})^{-1}(c\overline{\varphi_p}([\alpha])) &= (\overline{\psi_p})^{-1}(c\overline{\psi_p}([\alpha])).
\end{aligned}$$

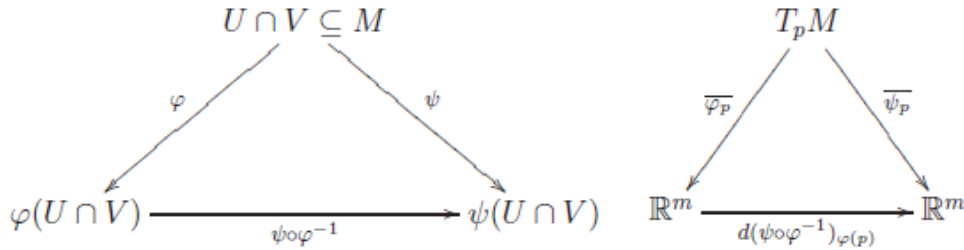


Figura 1.4: La estructura dada a $T_p M$ no depende de (U, φ)

En efecto, sea (V, ψ) otro sistema de coordenadas de M , con $p \in M$, además $\psi \circ \varphi^{-1}$ el respectivo cambio de coordenadas, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\overline{\psi_p}([\alpha]) &= (\psi \circ \alpha)'(0) \\
&= ((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha))'(0) \\
&= d(\psi \circ \varphi^{-1})_{(\varphi \circ \alpha)(0)}((\varphi \circ \alpha)'(0))
\end{aligned}$$

es decir:

$$\overline{\psi_p}([\alpha]) = d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ \overline{\varphi_p}([\alpha]).$$

Luego:

$$\begin{aligned}
(\overline{\psi_p})^{-1}(\overline{\psi_p}([\alpha]) + \overline{\psi_p}([\beta])) &= (\overline{\psi_p})^{-1}(d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ \overline{\varphi_p}([\alpha]) + d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ \overline{\varphi_p}([\beta])) \\
&= (\overline{\psi_p})^{-1}(d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\overline{\varphi_p}([\alpha]) + \overline{\varphi_p}([\beta]))) \\
&= (\overline{\psi_p})^{-1} \circ d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ \overline{\varphi_p}((\overline{\varphi_p})^{-1}(\overline{\varphi_p}([\alpha]) + \overline{\varphi_p}([\beta]))) \\
&= (\overline{\psi_p})^{-1} \circ (\overline{\psi_p})((\overline{\varphi_p})^{-1}(\overline{\varphi_p}([\alpha]) + \overline{\varphi_p}([\beta]))) \\
&= (\overline{\varphi_p})^{-1}(\overline{\varphi_p}([\alpha]) + \overline{\varphi_p}([\beta]))
\end{aligned}$$

De manera análoga se tiene que:

$$(\overline{\varphi_p})^{-1}(c\overline{\varphi_p}([\alpha])) = (\overline{\psi_p})^{-1}(c\overline{\psi_p}([\alpha])),$$

para todo $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, cualquier par de sistemas de coordenadas en M inducen la misma estructura de espacio vectorial en T_pM .

Proposición 1.5. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Para cada sistema $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, con $p \in U$, y con la estructura de espacio vectorial dada por las operaciones (1.1), la función $\overline{\varphi_p} : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^m$, donde $\overline{\varphi_p}([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. En efecto, para todo $[\alpha]$ y $[\beta]$ en T_pM se tiene que:

$$[\alpha] + [\beta] = (\overline{\varphi_p})^{-1}(\overline{\varphi_p}([\alpha]) + \overline{\varphi_p}([\beta])),$$

de donde se tiene:

$$\overline{\varphi_p}([\alpha] + [\beta]) = \overline{\varphi_p}([\alpha]) + \overline{\varphi_p}([\beta]).$$

Análogamente, se demuestra que $\overline{\varphi_p}(c[\alpha]) = c\overline{\varphi_p}([\alpha])$. Además como $\overline{\varphi_p}$ es biyectiva se concluye que $\overline{\varphi_p}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. \square

Corolario 1.1. *El espacio vectorial T_pM es de dimensión finita dada por $m = \dim(M)$.*

Proposición 1.6. *Sea la variedad diferenciable M . Para dos puntos distintos $p, q \in M$, los respectivos espacios tangentes T_pM y T_qM son disjuntos.*

Demostración. Supongamos que T_pM y T_qM tienen al menos un elemento (vector tangente) común. Sea v este vector común, entonces si $v \in T_pM$ significa que existe alguna curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $v = [\alpha]$. Pero también $v \in T_qM$, luego existe alguna curva diferenciable $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ tal que $\beta(0) = q$ y $v = [\beta]$. Puesto que, $p \neq q$, entonces $\beta(0) = q \neq p$, lo cual significa que β no pasa por el punto p en el instante $t = 0$ y por tanto $\beta \notin C_p(M)$. A su vez esto significa que $[\beta] \notin C_pM / \sim = T_pM$, es decir que $v \notin T_pM$ lo cual evidentemente es una contradicción con nuestra suposición inicial. \square

Dados un sistema de coordenadas $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en M y un punto $p \in U$, indicamos por $B = \{\frac{\partial}{\partial_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial_m}(p)\}$ la base de T_pM asociada a (U, φ) que es llevada por el isomorfismo $\overline{\varphi} : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sobre la base canónica $\{e_1, \dots, e_m\}$. Observe que B no es otra cosa que el conjunto $\{(\overline{\varphi_p})^{-1}(e_1), \dots, (\overline{\varphi_p})^{-1}(e_m)\}$.

Definición 1.11. Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable en el punto $P \in M$. Se llama *diferencial de f* en el punto $p \in M$ a la función $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ definida por:

$$df_p(v) = [f \circ \alpha],$$

donde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ es una curva en $C_p(M)$ tal que $v = [\alpha]$.

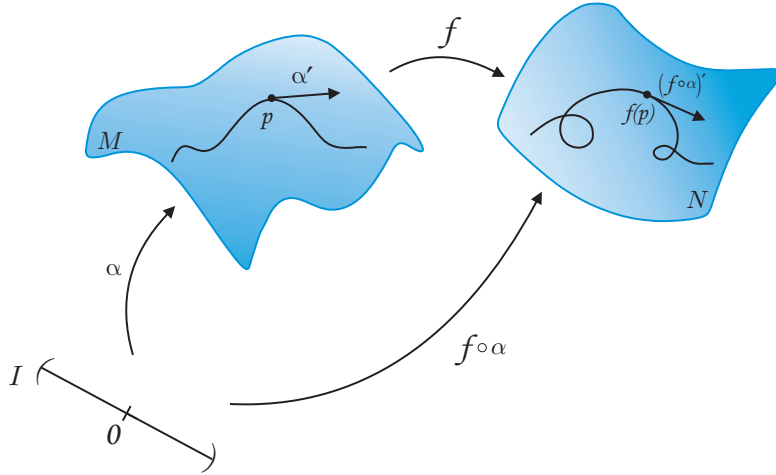


Figura 1.5: Diferencial de una aplicación diferenciable

Proposición 1.7. *La definición de diferencial no depende de los sistemas de coordenadas elegidos en M y N respectivamente.*

Demostración. Sea $\beta \in [\alpha] \in T_p M$, entonces $\alpha \sim \beta$, donde \sim es la relación de equivalencia definida en $C_p(M)$ (ver definición 1.9), luego existe un sistema de coordenadas $\varphi : U \subseteq \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con $p \in U$, tal que

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0).$$

Sea $\psi : V \subseteq N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, un sistema de coordenadas en N , con $f(p) \in V$ y $f(U) \subset V$, entonces

$$\begin{aligned} (\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) &= \frac{d}{dt}(\psi \circ (f \circ \alpha)) \big|_{t=0} = \frac{d}{dt}((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha)) \big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_p((\varphi \circ \alpha)'(0)) \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_p((\varphi \circ \beta)'(0)) \\ &= (\psi \circ (f \circ \beta))'(0), \end{aligned}$$

Luego $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$. Esto muestra que el vector $[f \circ \alpha]$ asociado a $[\alpha]$ no depende del representante α , por lo tanto se obtiene lo deseado. \square

Proposición 1.8. La diferencial $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$, dada en la definición 1.11, es una transformación lineal.

Demostración. Sean $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ sistemas de coordenadas de M en p y de N en $f(p)$ respectivamente, considere los isomorfismos respectivos $\bar{\varphi}_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $\bar{\psi}_{f(p)} : T_{f(p)} N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, inducidos por dichos sistemas (Proposición 1.5). Si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = f_{\varphi\psi}$ es la expresión local de f y $d(f_{\varphi\psi})_{\varphi(p)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la diferencial de esta expresión local, entonces:

$$\begin{aligned} (df_{\varphi\psi})_{\varphi(p)}(\bar{\varphi}_p([\alpha])) &= d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}((\varphi \circ \alpha)'(0)) \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)(t) \big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ f \circ \alpha)(t) \big|_{t=0} \\ &= (\psi \circ (f \circ \alpha))'(0). \end{aligned}$$

Es decir

$$(df_{\varphi\psi})_{\varphi(p)}(\bar{\varphi}_p([\alpha])) = \psi([f \circ \alpha]) = \psi(df_p([\alpha]))$$

y por tanto

$$df_p([\alpha]) = (\bar{\psi})^{-1}((df_{\varphi\psi})_{\varphi(p)}(\bar{\varphi}_p([\alpha]))) .$$

Lo que es lo mismo

$$df_p = (\bar{\psi})^{-1}(df_{\varphi\psi})_{\varphi(p)}\bar{\varphi}_p.$$

Como podemos observar la diferencial df_p es la composición de transformaciones lineales, por lo tanto esta también es lineal. \square

1.4. Inmersiones y Submersiones

En esta sección abordaremos los teoremas de las Formas Locales de las Inmersiones y de las Submersiones en variedades, los cuales nos dicen la forma que tienen cierto tipo de aplicaciones en variedades.

Definición 1.12. Una función diferenciable $f : M \longrightarrow N$ es una inmersión en un punto $p \in M$ si la diferencial $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ es inyectiva. Es decir, si el rango de f en p coincide con la dimensión de M .

Definición 1.13. Una función diferenciable $f : M \longrightarrow N$ es una inmersión si y sólo si para cada $p \in M$ existen sistemas de coordenadas (U, φ) en M con $p \in U$ y (V, ψ) en N con $f(U) \subset V$, tales que $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva.

Proposición 1.9. (Forma Local de las Inmersiones para Variedades.)

Sean M^m y N^n variedades de clase C^r , $r \geq 1$. Sea $f : M^m \longrightarrow N^n$ de clase C^k ($k \geq 1$) y suponga que es una inmersión en el punto $p \in M$. Entonces existe un sistema de coordenadas $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de M en p , y un sistema de coordenadas $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, de N en $f(p)$, tal que $f(U) \subseteq V$ y la expresión local $\xi = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ es la aplicación inclusión, esto es, $\xi(x) = (x, 0)$ para todo $x \in \varphi(U)$.

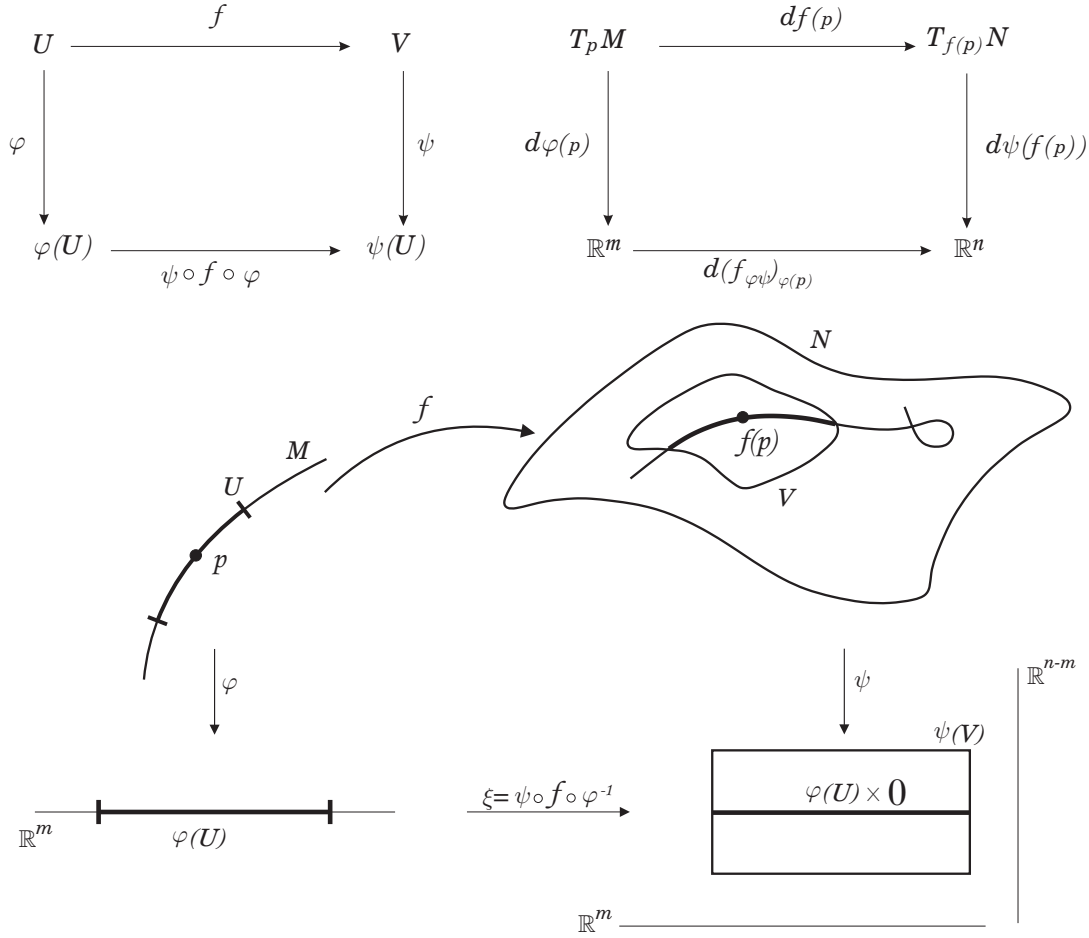


Figura 1.6: Forma local de una inmersión

Demostración. Puesto que $f : M \rightarrow N$ es una inmersión en p entonces, por definición se tiene que $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es inyectiva. Consideremos los sistemas de coordenadas $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^m$ y $\phi_1 : V_1 \rightarrow \phi_1(V_1) \subseteq \mathbb{R}^n$, de M en p y de N en $f(p)$, respectivamente, tales que $f(U_1) \subseteq V_1$. Como $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es inyectiva entonces la expresión local $f_{\varphi_1 \phi_1} = \phi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \rightarrow \phi_1(f(U_1))$, tiene diferencial inyectiva en $q = \varphi(p)$. Luego por la forma local de las inmersiones en espacios euclidianos, existen abiertos $U_2 \subseteq \varphi_1(U_1)$, $W \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ y $Z \subseteq \phi_1(f(U_1)) \subseteq \mathbb{R}^n$ (con $q \in U_2$, $0 \in W$ y $f_{\varphi_1 \phi_1}(p) \in Z$) y un difeomorfismo $\xi_0 : Z \rightarrow U_2 \times W \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, de clase C^k , tal que $\xi_0 \circ f_{\varphi_1 \phi_1}(x) = (x, 0)$ para todo $x \in U_2$.

Sea $U = \varphi_1^{-1}(U_2) \subseteq U_1$ y $V = \phi_1^{-1}(Z) \subseteq f(U_1)$. Considere los sistemas de coordenadas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\varphi = \varphi_1|_U$, $\phi = \phi_1|_V$ y el difeomorfismo $\psi = \xi_0 \circ \phi : V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, entonces se tiene que la expresión local $\xi = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U_2 \times W$ cumple con la condición $\xi(x) = (x, 0)$. En efecto:

$$\xi(x) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (\xi_0 \circ \phi) \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = \xi_0 \circ f_{\varphi_1 \phi_1}(x) = (x, 0).$$

□

Definición 1.14. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable de clase C^k , $k \geq 1$. Diremos que f es una submersión en el punto $p \in M$ si la diferencial $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es sobreyectiva, para todo punto $p \in M$.

Proposición 1.10. (Forma Local de las Submersiones para Variedades.)

Sean M^{m+n} y N^m variedades de clase C^r , $r \geq 1$. Sea $f : M \rightarrow N$ de clase C^k ($k \geq 1$) y suponga que es una submersión en el punto $p \in M$. Entonces existe un sistema de coordenadas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de M en p , y un sistema de coordenadas $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, de N en $f(p)$, tal que $\varphi(U) = W \times Z$, $f(U) \subseteq V$ y la expresión local $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es de la forma, $f_{\varphi\psi}(w, z) = w$.

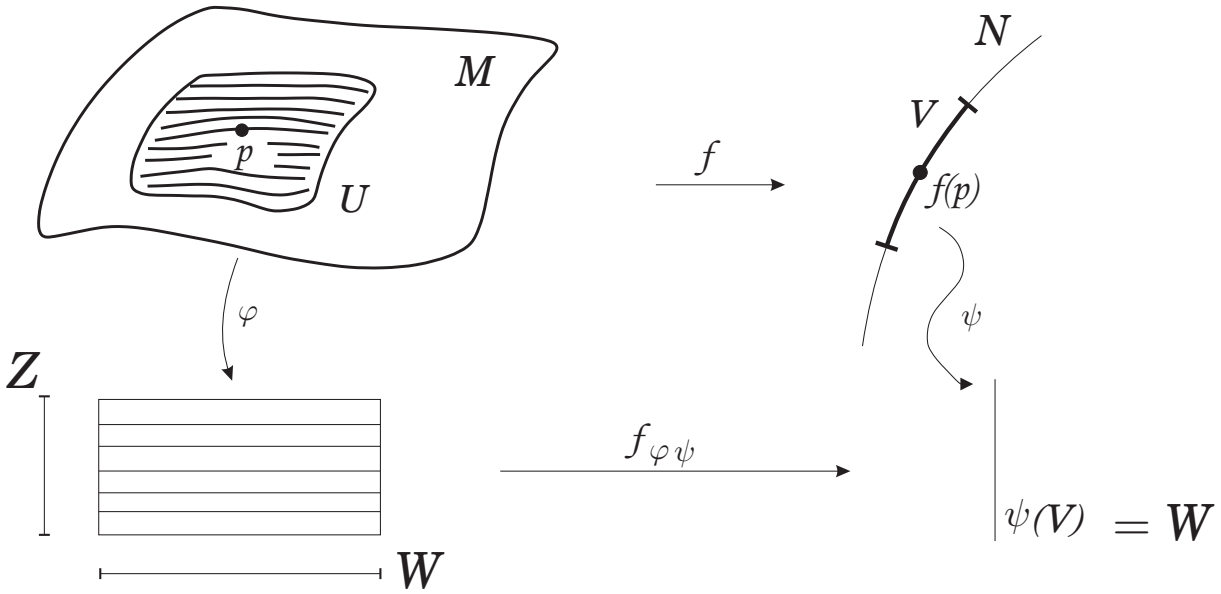


Figura 1.7: Forma local de una submersión

Demostración. Sean (U, φ') , (V, ψ) los sistemas de coordenadas de M y N respectivamente, con $p \in U$ y $f(U) \subset V$. Como la diferencial $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es sobreyectiva entonces la diferencial de la expresión local $f_{\varphi'\psi} = \psi \circ f \circ (\varphi')^{-1} : \varphi'(U) \rightarrow \psi(V)$, es decir $d(f_{\varphi'\psi})_{\varphi'(p)} : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es sobreyectiva. Sea $\varphi'(p) = z_0$. De acuerdo a la Forma Local de las Submersiones en Espacios Euclidianos, existe un difeomorfismo $h : W \times Z \rightarrow R$ de clase C^k , tal que $f_{\varphi'\psi} \circ h(x, w) = x$ para todo $(x, w) \in W \times Z$, donde $W \ni f_{\varphi'\psi}$ es un abierto de \mathbb{R}^m , $Z \ni w$ es abierto de \mathbb{R}^n y $R \ni z_0$ es abierto de \mathbb{R}^{m+n} (donde $R \subset \varphi'(U)$). Esta $f_{\varphi'\psi} \circ h : W \times Z \rightarrow R$ tiene la forma de la primera proyección, basta tomar $\varphi = h^{-1} \circ \varphi'$. En efecto:

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, w) &= \psi \circ f \circ (h^{-1} \circ \varphi')^{-1}(x, w) \\ &= \psi \circ f \circ ((\varphi')^{-1} \circ h)(x, w) \\ &= (\psi \circ f \circ (\varphi')^{-1}) \circ h(x, w) \\ &= x. \end{aligned}$$

Por tanto: $f_{\varphi\psi}(x, w) = x$. □

1.5. Aplicaciones de Recubrimiento

La noción de recubrimiento es una de las más fructuosas de la topología. En esta sección nos restringiremos a los recubrimientos de superficies, mencionando sin embargo que se usan con provecho en espacios topológicos más generales. La teoría desarrollada aquí nos permitirá mostrar que un buen número de superficies son (globalmente) imágenes por difeomorfismos locales de superficies patrón como el plano y la esfera.

Definición 1.15. Una aplicación $f : S_1 \longrightarrow S_2$ entre dos superficies se llama *recubrimiento* (de S_2) si:

1. f es continua y $f(S_1) = S_2$.
2. Para cada punto $q \in S_2$ admite una vecindad abierta U con la siguiente propiedad:

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i,$$

donde los U_i son conjuntos abiertos disjuntos dos a dos, tales que para cada i , la restricción $f|_{U_i}$ es un difeomorfismo de U_i en U .

Un abierto U así se llama una *vecindad distinguida* de q o simplemente *abierto distinguido* (ver Figura 1.8).

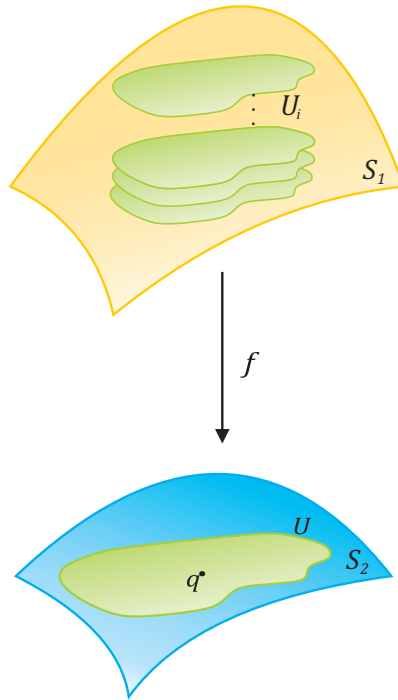


Figura 1.8: Vecindad distinguida de q .

Ejemplo 1.7. Sea la aplicación $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, dada por $\exp(t) = e^{2\pi it}$ es una aplicación de recubrimiento.

Ejemplo 1.8. Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un plano de \mathbb{R}^3 . Fijando un punto $q_0 \in P$ y dos vectores ortogonales $e_1, e_2 \in P$, con origen en q_0 , todo punto $q \in P$ cuyas coordenadas $(u, v) = q$ dadas por

$$q - q_0 = ue_1 + ve_2.$$

Sea ahora $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ un cilindro circular recto cuyo eje es el eje Oz , y sea $f : P \rightarrow S$ la aplicación definida por

$$f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

(el significado geométrico de esta aplicación es el de enrollar el plano entorno del cilindro S una infinidad de veces; ver Figura 1.9).

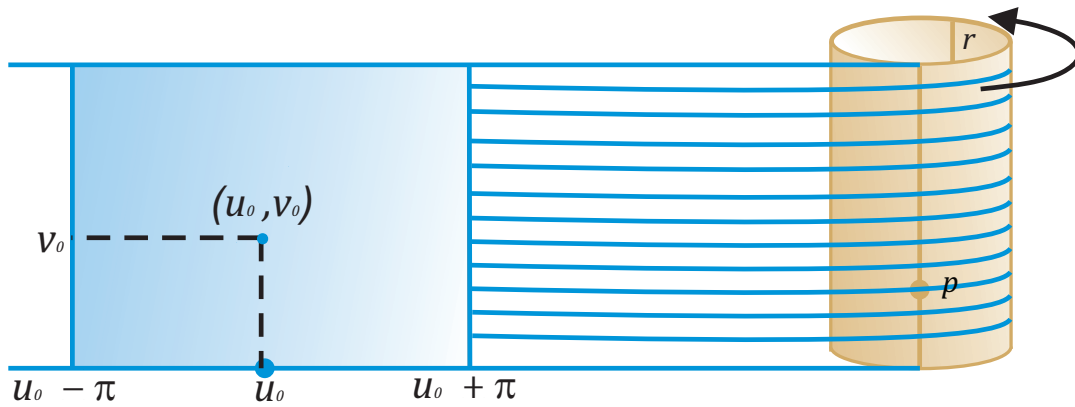


Figura 1.9: Enrollamiento del plano entorno del cilindro.

Afirmación: $f : P \rightarrow S$ es una aplicación de recubrimiento.

En efecto:

Observemos que cuando $(u_0, v_0) \in P$, la aplicación f restringida a la banda

$$R = \{(u, v) \in P : u_0 - \pi < u < u_0 + \pi\}$$

cubre S completamente. En realidad, f restringida al interior de R es una parametrización de S , cuya vecindad coordenada cubre S menos una generatriz. Luego f es continua continua (incluso diferenciable) y $f(P) = S$, verificando así la primera condición.

Para verificar la segunda condición, tome $p \in S$ y $U = S - r$, donde r es la generatriz opuesta a la generatriz que pasa por p . Vamos a probar que U es una vecindad distinguida de p .

Sea $(u_0, v_0) \in P$ tal que $f(u_0, v_0) = p$ y escoja como V_n la banda dada por

$$V_n = \{(u, v) \in P : u_0 + (2n - 1)\pi < u < u_0 + (2n + 1)\pi\},$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Además si $n \neq m$, se tiene que

$$V_n \cap V_m = \emptyset \quad \text{y} \quad \bigcup_n V_n = f^{-1}(U).$$

Además de eso, por la observación inicial, f restringida a cualquier V_n es un difeomorfismo sobre U . Luego U es una vecindad distinguida de p . Esto verifica la segunda condición, por lo tanto el plano P es un espacio de recubrimiento del cilindro S .

Ejemplo 1.9. Sea H la hélice

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos t, y = \sin t, z = bt, t \in \mathbb{R}\}$$

y sea

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

la circunferencia unitaria. Sea $f : H \rightarrow \mathbb{S}^1$ defina por

$$f(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Afirmación: f es una aplicación de recubrimiento (ver Figura 1.10).

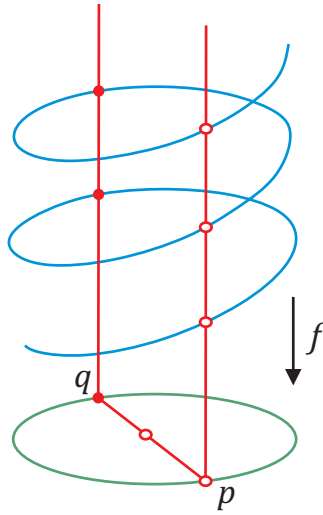


Figura 1.10: Recubrimiento de la hélice al \mathbb{S}^1 .

f así definida es una proyección por tanto es continua y además $f(H) = \mathbb{S}^1$. Esto verifica la primera condición. Para verificar la segunda condición, tome $p \in \mathbb{S}^1$. Demostraremos que $U = \mathbb{S}^1 - \{q\}$, es una vecindad distinguida de p , donde $q \in \mathbb{S}^1$ es el punto simétrico de p .

En efecto: Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(\cos t_0, \sin t_0, bt_0) = p.$$

Vamos a tomar como V_n el arco de la hélice que corresponde al intervalo abierto

$$(t_0 + (2n - 1)\pi, t_0 + (2n + 1)\pi) \subset \mathbb{R}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Entonces, tenemos que

$$f^{-1}(U) = \bigcup_n V_n,$$

donde los V_n son disjuntos dos a dos, además f restringida a cualquiera de los V_n es un difeomorfismo sobre U . Por lo tanto, esto verifica la segunda condición. Luego $f : H \rightarrow \mathbb{S}^1$ es una aplicación de recubrimiento.

Teorema 1.1. Sea $f : M \longrightarrow N$ y $f' : M' \longrightarrow N'$ dos aplicaciones de recubrimiento, entonces:

$$f \times f' : M \times M' \longrightarrow N \times N'$$

es una aplicación de recubrimiento.

Demostración. Dados $p \in N$ y $p' \in N'$, sean U y U' vecindades abiertas de p y p' respectivamente. Sean $\{U_i\}$ y $\{U'_j\}$ conjuntos abiertos disjuntos dos a dos de $f^{-1}(U)$ y $(f')^{-1}(U')$, respectivamente. Entonces la imagen inversa mediante $f \times f'$ del conjunto abierto $U \times U'$ es la unión de todos los conjuntos $U_i \times U'_j$. Estos conjuntos son abiertos disjuntos de $M \times M'$, y cada uno de ellos aplica homeomórficamente sobre $U \times U'$ por $f \times f'$. \square

Ejemplo 1.10. La aplicación $\exp \times \exp : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, dada por $\exp \times \exp(t, s) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi is})$ es un recubrimiento.

Observación 1.5. De la definición resulta que cualquier recubrimiento es un difeomorfismo local sobreyectivo, pero el recíproco no siempre es cierto pues un ejemplo de esto es la restricción de ϕ al cuadrado $] - 2\pi, 2\pi[\times] - 2\pi, 2\pi[$: en la Figura 1.11, la pre-imagen del abierto U señalado es la reunión de nueve abiertos disjuntos, pero sólo uno de ellos es enviado sobreyectivamente en U por ϕ .

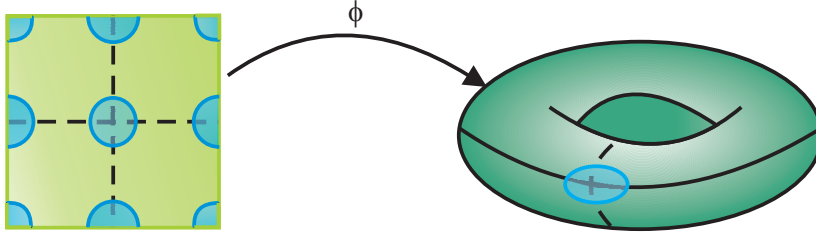


Figura 1.11:

Hay sin embargo un caso en que podemos garantizar que un difeomorfismo local es un recubrimiento.

Teorema 1.2. Si S_1 es compacto y $f : S_1 \longrightarrow S_2$ un difeomorfismo local entonces f es un recubrimiento.

Demostración. Como f es un difeomorfismo local $f(S_1) \subset S_2$ es abierto en S_2 . Además, por la continuidad de f , $f(S_1)$ es compacto, entonces cerrado en S_2 . Como $f(S_1) \subset S_2$ es abierto y cerrado en un conjunto conexo S_2 tenemos $f(S_1) = S_2$. Por tanto la primera condición de la definición 1.15 está verificada.

Para verificar la segunda condición, tome $q \in S_2$. Entonces $f^{-1}(S_2) \subset S_1$ es finito, de lo contrario, $f^{-1}(S_2)$ tendría un punto de acumulación $p \in S_1$ y esto contradice el hecho de que $f : S_1 \longrightarrow S_2$ es difeomorfismo local. Entonces, podemos escribir $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$.

Sea V_i una vecindad de p_i , $i = 1, \dots, k$, tal que cada $f|_{V_i}$ sea un difeomorfismo. Como

$f^{-1}(q)$ es finito, es posible escoger los V_i suficientemente pequeños de forma que sean disjuntos dos a dos. Como f es un difeomorfismo local, la imagen por f de un conjunto cerrado en S_1 es un conjunto cerrado en S_2 .

Por tanto, existe una vecindad U de q tal que

$$U \subset \bigcap_{i=1}^k (f(V_i))$$

y que $f^{-1}(U) \subset U_i V_i$ (ver Figura 1.12).

Haciendo $W_i = f^{-1}(U) \cap V_i$ tenemos que

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^k W_i$$

y que los W_i son disjuntos dos a dos. Además, $f|_{V_i}$ es un difeomorfismo sobre U . Entonces U es una vecindad distinguida de q . Esto verifica la segunda condición. Por tanto f es una aplicación de recubrimiento.

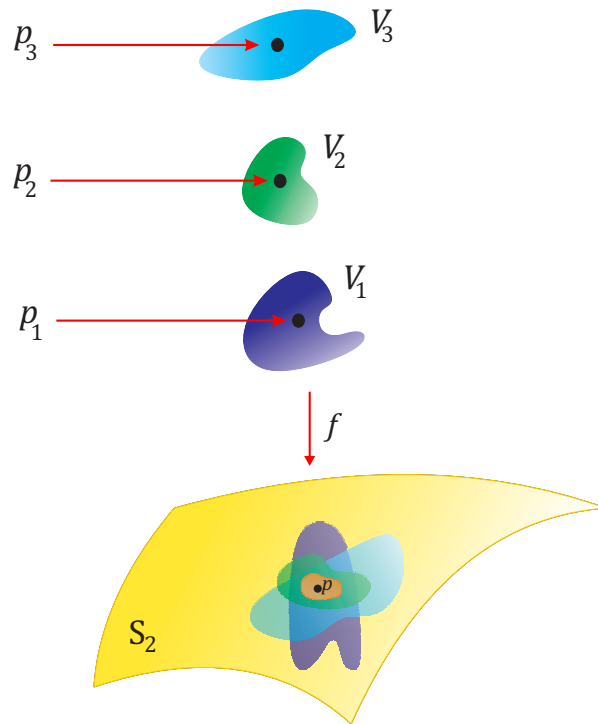


Figura 1.12:

□

1.6. Acción de Grupo sobre una Variedad Diferenciable

En esta sección se estudiará una manera de construir variedades diferenciables a partir de otras. Esto es lo que se detallará a continuación.

Definición 1.16. Sea M una variedad diferenciable con atlas $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ y G un grupo. Una función $A : G \times M \rightarrow M$ se llama acción de clase C^k de G sobre M si cumple con las siguientes propiedades:

- a) Para cada $g \in G$, la función $A_g : M \rightarrow M$ definida por $A_g(x) = A(g, x)$ es un difeomorfismo de clase C^k .
- b) Si e es el elemento identidad de G , el respectivo difeomorfismo $A_e : M \rightarrow M$ es la función identidad.
- c) Para todo $h, g \in G$ se tiene $A_{g \cdot h} = A_g \circ A_h$.

En este caso, se dice que G actúa en M por medio de A .

Observación 1.6. Sea $A : G \times M \rightarrow M$ una acción. Se define la siguiente relación \sim en M , según la cual para todo $p, q \in M$, $p \sim q$ si, y sólo si, existe algún $g \in G$ tal que $q = A_g(p)$. En el respectivo conjunto cociente $M/G = \{G_p : p \in M\}$, los elementos son dados por las clases de equivalencias (también llamadas *órbitas*)

$$G_p = \{q \in M : q \sim p\} = \{A_g(p) : g \in G\}.$$

Lema 1.2. La relación \sim es una relación de equivalencia sobre M .

Demostración.

i) Reflexiva:

Se considera el elemento identidad $e \in G$. De acuerdo a la definición 1.16, se tiene que $A_e : M \rightarrow M$ es el difeomorfismo identidad, por tanto para todo $p \in M$ se tiene que $p = A_e(p)$ y por lo tanto $p \sim p$.

ii) Simétrica:

Sean $p, q \in M$ tales que $p \sim q$. Entonces existe un elemento $g \in G$ tal que $q = A_g(p)$. Se observa que como $g \in G$ entonces $g^{-1} \in G$. Además se tiene que

$$A_g \circ A_{g^{-1}} = A_{g \cdot g^{-1}} = A_e = \text{identidad en } M$$

y por lo tanto $(A_g)^{-1} = A_{g^{-1}}$.

Luego como $q = A_g(p)$ entonces $p = (A_g)^{-1}(q) = A_{g^{-1}}(q)$, lo cual demuestra que $q \sim p$ y por tanto \sim es simétrica.

iii) Transitiva:

Sean los elemento $p, q, r \in M$ tales que $p \sim q$ y $q \sim r$. Entonces existen elementos $g, h \in G$ tales que $q = A_g(p)$ y $r = A_h(q)$. Luego $r = A_h(q) = A_g(A_h(p)) = A_{h \cdot g}(p)$. Como G es un grupo entonces se tiene que $h \cdot g \in G$. Por tanto $p \sim r$.

□

Como la variedad diferenciable M es en particular un espacio topológico, el conjunto cociente M/G es también un espacio topológico cuya topología es la co-inducida por la proyección canónica $\pi : M \longrightarrow M/G$, (esto es, $U \subset M/G$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subset M$ es abierto) que para cada $p \in M$ le asigna la clase $\pi(p) \equiv G_p$. Esto convierte inmediatamente a la proyección π en una aplicación continua. Con el propósito de darle a M/G un atlas de clase C^k , se considerará acciones propiamente discontinuas.

Definición 1.17. Sea M una variedad diferenciable y G un grupo. Una acción $A : G \times M \longrightarrow M$ es una *acción propiamente discontinua* si para cada punto $x \in X$ existe algún abierto U_x tal que $U_x \cap A_g(U_x) \neq \emptyset$, para todo $g \neq e$.

Proposición 1.11. Sea M una variedad diferenciable y $A : G \times M \longrightarrow M$ una acción propiamente discontinua. Entonces M/G posee una estructura diferenciable tal que la proyección $\pi : M \longrightarrow M/G$ es un difeomorfismo local.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in L}$ la estructura diferenciable de la variedad M . Se debe construir una colección de aplicaciones que constituyan el atlas requerido para que M/G sea una variedad diferenciable y al mismo tiempo la proyección $\pi : M \longrightarrow M/G$ sea un difeomorfismo local.

Sea $p \in M$ un punto arbitrario. Como la acción A es propiamente discontinua se tiene que existe una vecindad $V_p \subseteq M$ tal que $V_p \cap A_g(V_p) = \emptyset$ para todo $g \neq e$. Al mismo tiempo se puede elegir un sistema de coordenadas (U_p, φ_p) de tal forma que $U_p \subseteq V_p$. Simplemente, si (U, φ) es un sistema de coordenadas de M en p , bastará elegir $U_p = U \cap V_p$ y $\varphi_p = \varphi|_{U_p}$. De acuerdo al Apéndice A-Proposición A.2., la restricción $\pi_p = \pi|_{U_p} : M \longrightarrow M/G$ es un homeomorfismo entre U_p y $\pi_p(U_p)$. Por tanto la composición $\psi_p = \varphi_p \circ \pi_p : \pi_p(U_p) \longrightarrow \varphi_p(U_p)$ es también un homeomorfismo.

Haciendo variar el punto $p \in M$, se forma la colección

$$\mathcal{B} = \{(\pi(U_\alpha), \psi_\alpha) : \psi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \pi_\alpha^{-1} \text{ y } (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}\}$$

donde cada U_α tiene la propiedad de estar contenida en una vecindad V_α tal que $V_\alpha \cap A_g(V_\alpha) = \emptyset$ para todo $g \neq e$. Se usará de aquí en adelante la notación $\pi_\alpha = \pi|_{U_\alpha}$.

Se mostrará que la colección \mathcal{B} es una estructura diferenciable.

En primer lugar, se observa que $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M$, entonces $\bigcup_{\alpha} \pi(U_\alpha) = M/G$. En segundo

lugar, se considera los sistemas de coordenadas $(\pi(U_\alpha), \psi_\alpha)$ y $(\pi(U_\beta), \psi_\beta)$ tales que $\pi(U_\alpha) \cap \pi(U_\beta) \neq \emptyset$ y donde $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \pi_\alpha^{-1} : \pi(U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$ y $\psi_\beta = \varphi_\beta \circ \pi_\beta^{-1} : \pi(U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\beta)$. El conjunto $\pi(U_\alpha) \cap \pi(U_\beta)$ será denotado por $W_{\alpha\beta}$.

Sea $x_0 \in \psi_\alpha(W_{\alpha\beta})$ y $\bar{x} = \psi_\alpha^{-1}(x_0) \in W_{\alpha\beta}$. Considere la vecindad $W_\alpha \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha)$ tal que $x_0 \in W_\alpha$ y $\psi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \subseteq W_{\alpha\beta}$. Entonces en W_α se tiene que $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta \circ (\pi_\beta^{-1} \circ \pi_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Por lo tanto, para mostrar que $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ es diferenciable será suficiente verificar que $\pi_\beta^{-1} \circ \pi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \longrightarrow \pi_\beta^{-1}(\psi_\alpha^{-1}(W_\alpha))$ es diferenciable en $p_0 = \pi_\alpha^{-1}(\bar{x})$.

Sea $q_0 = \pi_\beta^{-1} \circ \pi_\alpha(p_0)$ entonces p_0 y q_0 están relacionados (pues ellos originan la misma clase $\bar{x} \in \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$) por medio de algún difeomorfismo $A_g : M \longrightarrow M$, es decir, $q_0 = A_g(p_0)$.

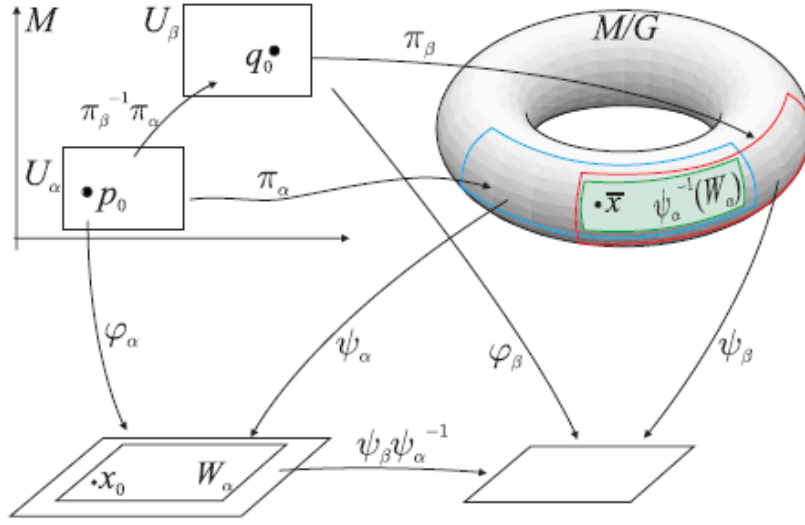


Figura 1.13: Estructura Diferenciable del Espacio Cociente

Entonces se cumple que $A_g|_{\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)} = \pi_\beta^{-1} \circ \pi_\alpha|_{\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)}$. En efecto, sea $p \in \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$, entonces $\pi_\alpha(p) \in \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ luego $\pi_\beta^{-1}(\pi_\alpha(p)) \in \pi_\beta^{-1}(\psi_\alpha^{-1}(W_\alpha))$. Sea $q = \pi_\beta^{-1}(\pi_\alpha(p))$ entonces q es el único punto tal que $\pi_\beta(q) = \pi_\alpha(p)$. Pero $A_g(p) \in \pi_\beta^{-1}(\psi_\alpha^{-1}(W_\alpha))$ y $\pi_\beta(A_g(p)) = \pi_\alpha(p)$, luego $A_g(p) = \pi_\beta^{-1}(\pi_\alpha(p))$ de donde se tiene que $A_g = \pi_\beta^{-1} \circ \pi_\alpha$. Siendo A_g diferenciable se concluye que $\pi_\beta^{-1} \circ \pi_\alpha$ es diferenciable. De manera análoga se muestra que $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ es diferenciable, lo que concluye la prueba de que \mathcal{B} es una estructura diferenciable para M/G .

Ahora se mostrará que $\pi : M \rightarrow M/G$ es difeomorfismo; sea $p \in M$ y sean las vecindades U_α de p y $\pi(U_\alpha)$ de $\pi(p)$, los cuales a su vez son dominios de los sistemas de coordenadas $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ y $(\pi(U_\alpha), \psi_\alpha) \in \mathcal{B}$. Entonces la expresión local de π en términos de estos sistemas es tal que $\psi_\alpha \circ \pi \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha$. Esto muestra que $\pi : U_\alpha \rightarrow \pi(U_\alpha)$ es un difeomorfismo, y por lo tanto π , es un difeomorfismo local. \square

Capítulo 2

Foliaciones

En este capítulo, se introducirá la noción de *foliación* de una variedad y se verán ejemplos ilustrando este concepto.

2.1. Definición y Ejemplos

Una *Foliación* de dimensión n de una variedad diferenciable M^m , se puede ver como una descomposición de M , en subvariedades inmersas conexas, disjuntas, de una misma dimensión llamadas *hojas de la foliación*, las cuales se comportan localmente como subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ con segunda coordenada constante.

Ejemplo 2.1. El ejemplo más simple de una foliación es la *foliación horizontal* de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ donde las hojas son los n -planos de la forma $\mathbb{R}^n \times \{c\}$, donde $c \in \mathbb{R}^{m-n}$. Los difeomorfismos locales $h : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ que preservan las hojas de esta foliación son aquellos que para cada $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ con $U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\}) \neq \emptyset$, satisfacen $h(U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\})) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{c'\})$, $c' \in \mathbb{R}^{m-n}$. Estos difeomorfismos tienen la siguiente expresión:

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}. \quad (*)$$

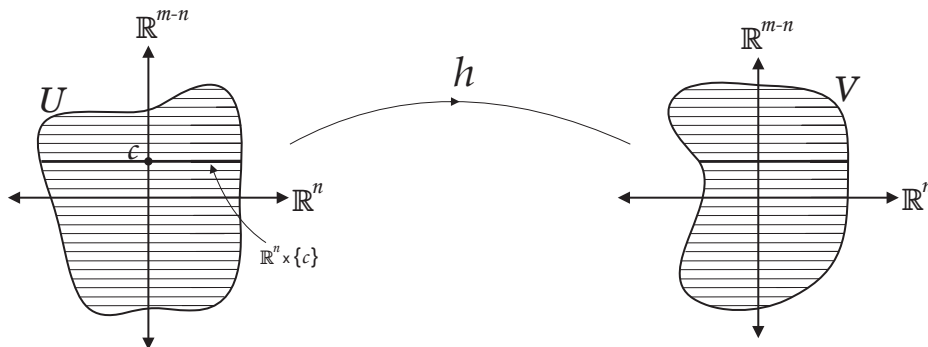


Figura 2.1: Foliación Horizontal del Plano

Definición 2.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Una *foliación* sobre M de clase C^r y dimensión n ($0 < n < m$) es un atlas $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de clase C^r en M satisfaciendo las siguientes propiedades:

- i) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$
- ii) Si $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}$ entonces $\varphi_i(U_i) = \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^{m-n}$, donde \mathbb{D}^n y \mathbb{D}^{m-n} son discos abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^{m-n} respectivamente.
- iii) Si $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces la aplicación cambio de coordenadas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_{ij}) \rightarrow \varphi_j(U_{ij})$ es un difeomorfismo de clase C^r de la forma (*), es decir:

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$

Si M admite un atlas \mathcal{F} satisfaciendo las condiciones de la definición anterior, se dice que el par (M, \mathcal{F}) es una variedad foliada.

Definición 2.2. Los conjuntos de la forma $\varphi_i^{-1}(\mathbb{D}^n \times \{c\}) = P_i$, para algún $c \in \mathbb{D}^{m-n}$ son llamados *placas* de la foliación \mathcal{F} en U_i . Además de esto si α y β son placas de U_i entonces $\alpha \cap \beta = \emptyset$ o $\alpha = \beta$.

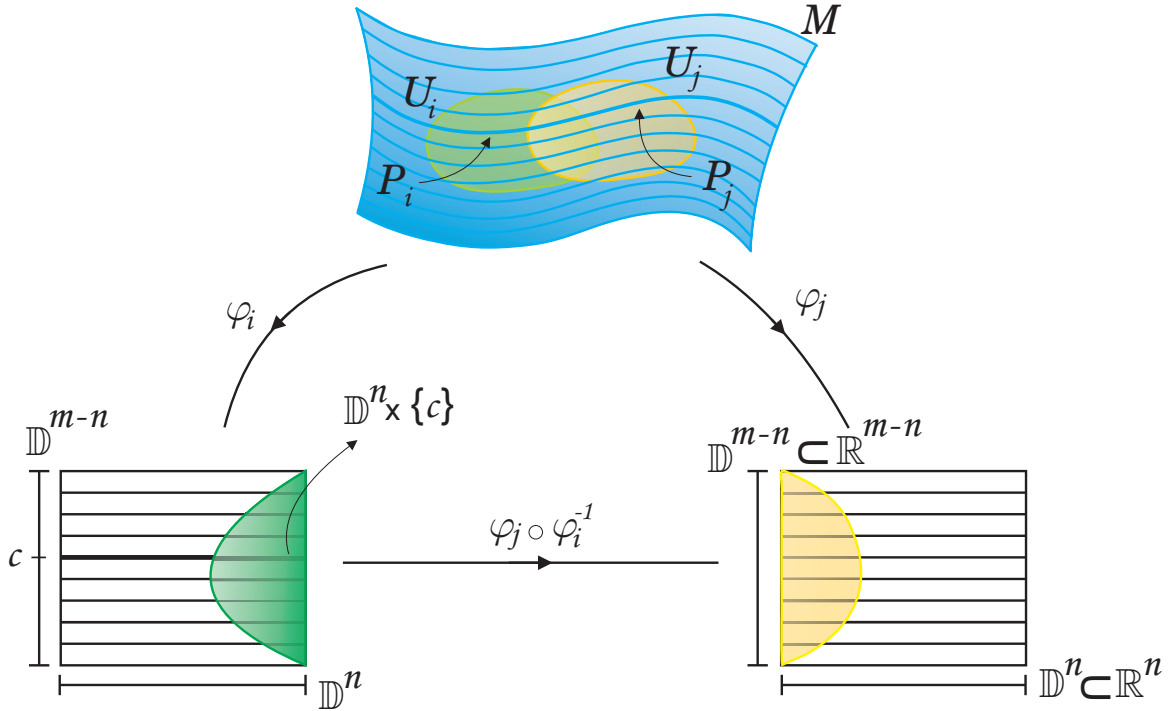


Figura 2.2: Variedad Foliada M .

Definición 2.3. Un *camino de placas* de \mathcal{F} es una sucesión finita $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de \mathcal{F} tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in 1, \dots, k-1$.

Puesto que M está cubierta por las placas de \mathcal{F} , se puede definir en M la siguiente relación de equivalencia: “ p está relacionado con q si y sólo si existe un camino de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ con $p \in \alpha_1$ y $q \in \alpha_k$ ”. Las clases de equivalencia de esta relación en M son llamadas *hojas de la foliación* \mathcal{F} .

A continuación, se presentan una serie de ejemplos de foliaciones que servirán más adelante para justificar algunas afirmaciones hechas a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

Observación 2.1.

- 1) Las hojas son variedades diferenciables de dimensión n inmersas en la variedad M .
- 2) Para cada punto de M pasa una única hoja.
- 3) Las hojas son subvariedades conexas.

Ahora, se verá algunos ejemplos de foliaciones que servirán más adelante para justificar algunas afirmaciones hechas a lo largo del desarrollo del trabajo.

Ejemplo 2.2. Foliationes definidas por submersiones.

Sea $f : M \rightarrow N$ una submersión de clase C^r , $r \geq 1$. Las componentes conexas de $f^{-1}(c)$, $c \in N$ definen una foliación de codimensión 1 en M . La estructura de foliación se debe al Teorema de la Forma Local de las Submersiones.

En efecto: Sea $p = (x, y) \in M$ y $q = f(p) \in N$ entonces por el Teorema Local de las Submersiones existen cartas locales (U, φ) en M , (V, ψ) en N tal que $p \in U$, $q \in V$, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ y $\psi(V) = V_2 \supset U_2$, tal que $\pi_2 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$ coincide con la segunda proyección, es decir:

$$\pi_2 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v) = v, \quad \forall (u, v) \in U_1 \times U_2.$$

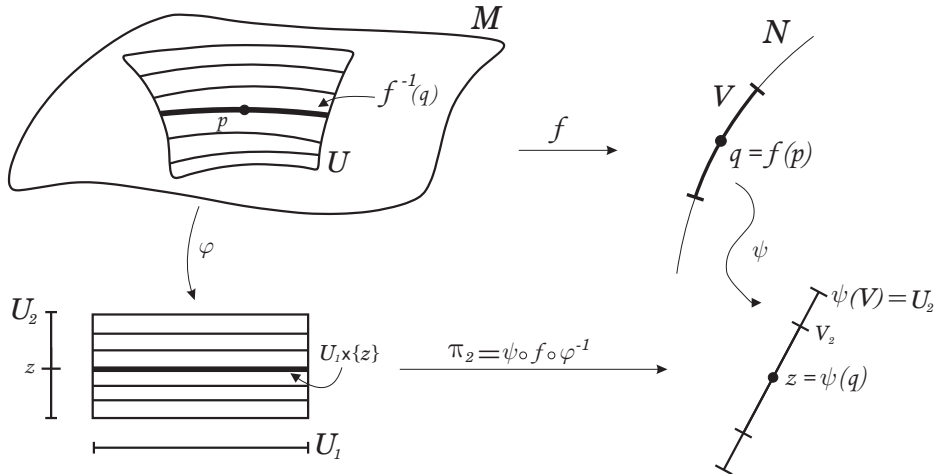


Figura 2.3: Foliation definida por la Submersion f .

Por ser f una submersión, se tiene que $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de M de clase C^r y codimensión n . Esta subvariedad (no necesariamente conexa) está localmente dispuesta del mismo modo que la hoja horizontal $\pi_2^{-1}(z) = U_1 \times \{z\}$, $z \in U_2$, entonces $f^{-1}(q) \cap U = \varphi^{-1}(U_1 \times \{z\})$; siendo las componentes conexas de $f^{-1}(q) \cap U$ las hojas de la foliación inducida por f . Se obtiene así una foliación de codimensión n , cuyas hojas son las componentes de $f^{-1}(q) \cap U$, $q \in N$. A esta foliación se le llama *foliación definida por la submersión f* .

Un ejemplo más específico de una foliación definida por una submersión es el siguiente: Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(r^2) \cdot e^{x_3}$ donde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ y $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ tal que $\alpha(1) = 0$; $\alpha(0) = 1$ y si $t > 0$ entonces $\alpha'(t) < 0$.

- Se demostrará que f es una submersión:
La matriz asociada a la diferencial de f es:

$$Jf(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1\alpha'(r^2)e^{x_3} & 2x_2\alpha'(r^2)e^{x_3} & \alpha(r^2)e^{x_3} \end{pmatrix}_{1 \times 3}.$$

Esta matriz tiene rango 1 en todos los puntos $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ y por tanto f es una submersión en todo punto del \mathbb{R}^3 .

Entonces para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(c)$ es una subvariedad de \mathbb{R}^3 de dimensión 2 de clase C^∞ .

Sea \mathcal{F} la foliación de \mathbb{R}^3 cuyas hojas son las componentes conexas de las subvariedades $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Las hojas de \mathcal{F} en el interior del cilindro sólido $C = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ son todas homeomorfas a \mathbb{R}^2 y se puede parametrizar por:

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{D}^2 \rightarrow \left(x_1, x_2, \log \left(\frac{c}{\alpha(r^2)} \right) \right); c > 0.$$

- En efecto:
Sea $f^{-1}(c) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = c\}$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= c \\ \alpha(r^2)e^{x_3} &= c \\ e^{x_3} &= \frac{c}{\alpha(r^2)} \\ x_3 &= \log \left(\frac{c}{\alpha(r^2)} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, $f^{-1}(c)$ es de la forma $f^{-1}(c) = \left\{ \left(x_1, x_2, \log \left(\frac{c}{\alpha(r^2)} \right) \right) \right\}$, donde $f^{-1}(c)$ puede estar constituida por una o varias componentes conexas.

El borde de C ;

$$\partial C = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

es también una hoja.

Fuera de C todas las hojas son homeomorfas a cilindros.

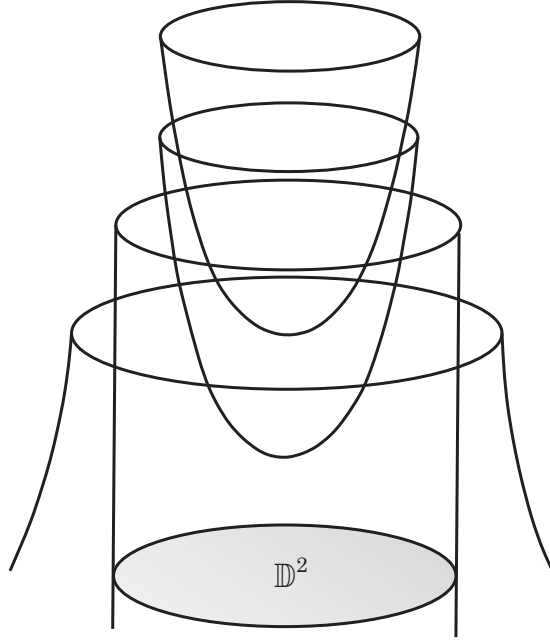


Figura 2.4:

Ejemplo 2.3. Fibraciones.

Las fibras sobre x para todo $x \in B$ de un espacio fibrado (E, π, B, F) definen una foliación en E , cuyas hojas son difeomorfas a las componentes conexas de F . El espacio fibrado (E, π, B, F) consiste de las variedades diferenciables E , B , F y de una submersión $\pi : E \rightarrow B$ tal que, para todo $b \in B$, existen una vecindad abierta U_b de b y un difeomorfismo $\varphi_b : \pi^{-1}(U_b) \rightarrow U_b \times F$ de manera que el diagrama siguiente sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_b) & \xrightarrow{\varphi_b} & U_b \times F \\ & \searrow \pi \quad \swarrow P_1 & \\ & U_b & \end{array}$$

donde P_1 es la proyección del primer factor. Las fibras del espacio fibrado son las subvariedades $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$.

Un ejemplo de un espacio fibrado es el siguiente:

El Fibrado Tangente

Sea M una variedad diferenciable m -dimensional y de clase C^k en la que se ha considerado una estructura diferenciable $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in L\}$. Se llama *Fibrado Tangente de M* al conjunto:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

De acuerdo a la Proposición 1.6, para dos puntos distintos p y q en M los respectivos espacios tangentes $T_p M$ y $T_q M$ son disjuntos, esto implica que la unión que aparece en

la definición de TM es disjunta. Por esta razón, el fibrado tangente de una variedad es también expresado como el conjunto:

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}.$$

Sea $\pi : TM \longrightarrow M$ la aplicación definida por $\pi(p, v) = p$ (esta es llamada la proyección canónica). Se observa que para $p \in M$ se tiene que $\pi(T_p M) = p$, lo que equivale a decir que:

$$\pi^{-1}(p) = \{(p, v) : v \in T_p M\} \equiv T_p M.$$

El conjunto TM puede ser expresado como una colección de fibras, en donde cada $T_p M$ es una fibra. De ahí el nombre de fibrado.

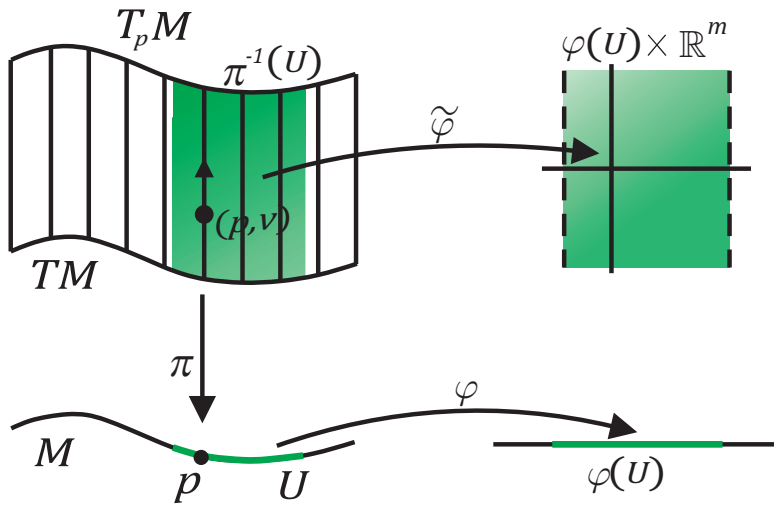


Figura 2.5: En TM cada espacio $T_p M$ es una "fibra"

Considere el sistema de coordenadas (U, φ) en M , y considere la función $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m$ definida como

$$\tilde{\varphi}(p, v) = (p, \bar{\varphi}_p(v)),$$

donde $\bar{\varphi}_p$ es el isomorfismo entre $T_p M$ y \mathbb{R}^m , asociado a (U, φ) (Proposición 1.5). Luego $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^m)$ es un espacio fibrado, de manera que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_p) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & U_p \times \mathbb{R}^m \\ \pi \searrow & & \swarrow P_1 \\ & U_p & \end{array}$$

Capítulo 3

La Foliación de Reeb para la Esfera \mathbb{S}^3

En este capítulo, se construirá una foliación de la esfera \mathbb{S}^3 , para esto se descompondrá \mathbb{S}^3 como unión de dos toros sólidos; luego se construirá una foliación en cada uno de los toros sólidos, en la que la superficie límite se produce como una hoja y los une para obtener así la foliación de \mathbb{S}^3 .

3.1. Descomposición Tórica de la Esfera \mathbb{S}^3

$$\mathbb{S}^3 \cong \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$$

Sean:

$$B_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2} \right\} \text{ y } B_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3 : x_3^2 + x_4^2 \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Se tiene que:

$$B_1 \cup B_2 = \mathbb{S}^3$$

y

$$B_1 \cap B_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3 : x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2} = x_3^2 + x_4^2 \right\} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

Sea la aplicación:

$$h : B_1 \longrightarrow \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$$

definida por:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, \frac{x_3}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}, \frac{x_4}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right).$$

Se demostrará que “ h ” es un homeomorfismo.

- h así definida es una función continua.

- h es biyectiva:
Sea la aplicación:

$$g : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow B_1$$

definida por:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1, \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_3\sqrt{2-x_1^2-x_2^2}, \frac{\sqrt{2}}{2}x_4\sqrt{2-x_1^2-x_2^2} \right).$$

Se demostrará que $g = h^{-1}$.

★ Sea $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. entonces:

$$\begin{aligned} h \circ g(x_1, x_2, x_3, x_4) &= h \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1, \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_3\sqrt{2-x_1^2-x_2^2}, \frac{\sqrt{2}}{2}x_4\sqrt{2-x_1^2-x_2^2} \right) = \\ &= \left(\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 \right), \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \right), \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x_3\sqrt{2-x_1^2-x_2^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2}}, \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x_4\sqrt{2-x_1^2-x_2^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2}} \right) \\ &= \left(x_1, x_2, \frac{x_3\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2}}, \frac{x_4\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2}} \right) = (x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned}$$

Luego, $h \circ g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

★ Sea $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in B_1$. entonces:

$$\begin{aligned} g \circ h(x_1, x_2, x_3, x_4) &= g \left(\sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, \frac{x_3}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}, \frac{x_4}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}x_1), \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}x_2), \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x_3}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right) \sqrt{2-(\sqrt{2}x_1)^2-(\sqrt{2}x_2)^2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x_4}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right) \sqrt{2-(\sqrt{2}x_1)^2-(\sqrt{2}x_2)^2} \right) \\ &= \left(x_1, x_2, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x_3}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right) \sqrt{2-2x_1^2-2x_2^2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x_4}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right) \sqrt{2-2x_1^2-2x_2^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(x_1, x_2, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x_3}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right) \sqrt{2} \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x_4}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right) \sqrt{2} \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \right)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

$$\text{Luego, } g \circ h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Por tanto $g = h^{-1}$, luego h es biyectiva.

- $g = h^{-1}$ así definida en el item anterior es continua.

Por lo tanto, h es un homeomorfismo.

Ahora, sea la aplicación:

$$k : B_2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$$

definida por:

$$k(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_3^2-x_4^2}} \frac{x_2}{\sqrt{1-x_3^2-x_4^2}}, \sqrt{2}x_3, \sqrt{2}x_4, \right).$$

Análogamente al caso anterior se tiene que k es un homeomorfismo.

Luego, se tiene que B_1 y B_2 son homeomorfos a $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ respectivamente, por lo tanto $\mathbb{S}^3 \cong \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ es la descomposición de \mathbb{S}^3 como la unión de dos toros sólidos.

3.2. Foliación de Reeb en $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$

Sea la submersión $f : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ definida como:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= e^{x_3 - e^{\frac{1}{1-r^2}}} & ; si \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 \\ f(x_1, x_2, x_3) &= 0 & ; si \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 \end{aligned}$$

Sea \mathcal{F} la foliación de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ cuyas hojas son las componentes conexas de las subvariedades $f^{-1}(c)$; $c \in \mathbb{R}$. Las hojas de \mathcal{F} en el interior del cilindro

$$\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

se pueden parametrizar por

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{D}^2 \longrightarrow \left(x_1, x_2, e^{\frac{1}{1-r^2}} + b \right); b \in \mathbb{R}.$$

Luego $f^{-1}(c) = \left\{ \left(x_1, x_2, e^{\frac{1}{1-r^2}} + b \right) \right\}$ con $b = \ln_e c$. Es decir, la foliación definida por f en el interior de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ tiene por hojas a las gráficas de las funciones:

$$x_3 = e^{\frac{1}{1-r^2}} + b \quad ; \quad b \in \mathbb{R}$$

y se extiende a una foliación C^∞ de \mathbb{R}^3 cuyas hojas en el exterior de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ son los cilindros $x_1^2 + x_2^2 = r^2$; $r > 1$; de tal forma que $\partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R})$ es una hoja cilíndrica de esta foliación.

En $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ se identifica los puntos del borde (de las tapas superior e inferior) de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, 0) \sim (y_1, y_2, 1) \text{ si y sólo si } (x_1, x_2) = (y_1, y_2).$$

Luego la variedad cociente $\mathbb{D}^2 \times [0, 1] / \sim$ es difeomorfa a $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.

- En efecto:

Sea el difeomorfismo $f_\alpha : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ definido como $f_\alpha(z) = z \cdot e^{2\pi i \alpha}$; este difeomorfismo es una rotación del ángulo $2\pi\alpha$.

Considere en la variedad $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ la foliación vertical de dimensión 1, de la forma:

$$\mathcal{H} = \{\{x\} \times [0, 1] / x \in \mathbb{D}^2\}.$$

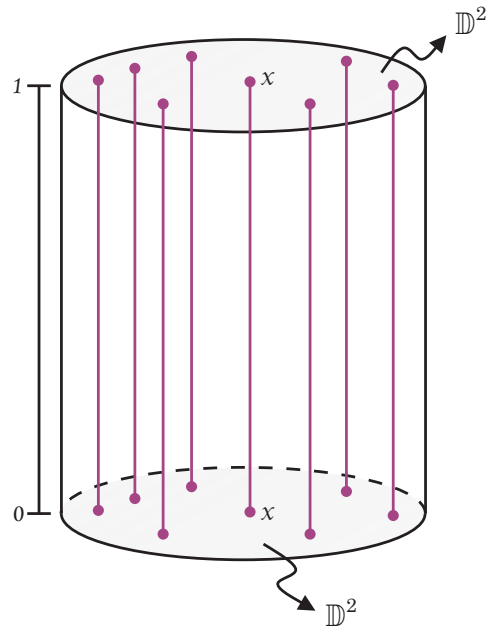


Figura 3.1: Foliación vertical de $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$

En $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ se considera la relación de equivalencia \sim definida por $(x, 0) \sim (f^{-1}(x), 1)$. Luego, se define la acción

$$\begin{aligned} \phi^n : \mathbb{Z} \times (\mathbb{D}^2 \times [0, 1]) &\longrightarrow \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \\ (n, (x, t)) &\longrightarrow (f_\alpha^{-n}(x), t + n) \quad ; \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Sea $M = \mathbb{D}^2 \times [0, 1] / \phi$ el espacio cociente; es decir A es abierto en M si $\pi^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$, donde:

$$\pi : \mathbb{D}^2 \times [0, 1] \longrightarrow M$$

es la proyección canónica. Esta proyección es un difeomorfismo.

★ En efecto: Se demostrará que ϕ es propiamente discontinua.

Sea $x \in V_i = \{\{x_i\} \times [0, 1] : x_i \in \mathbb{D}^2\}$; para algún $i \in I$, con V_i abierto, además sea $\phi(V_i) = \{\{x_j\} \times [0, 1] : x_j \in \mathbb{D}^2\}$, con $i \neq j$.

Como cada una de las hojas de la foliación \mathcal{H} son disjuntas para cualquier $x_i \in \mathbb{D}^2$, se tiene que

$$V_i \cap \phi(V_i) = \emptyset.$$

Luego ϕ es una acción propiamente discontinua.

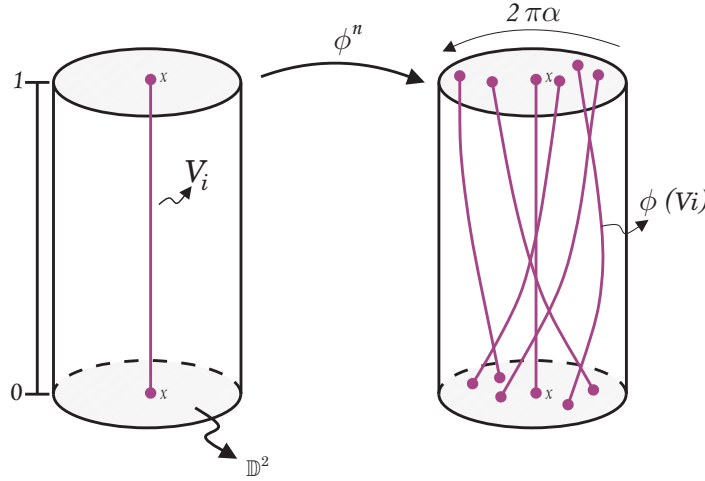


Figura 3.2:

Por tanto la proyección π sobre el espacio cociente $M = \mathbb{D}^2 \times [0, 1] / \phi$ es un difeomorfismo. (ver Proposición 1.11)

Luego, $M = \mathbb{D}^2 \times [0, 1] / \sim$ es difeomorfo a $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.

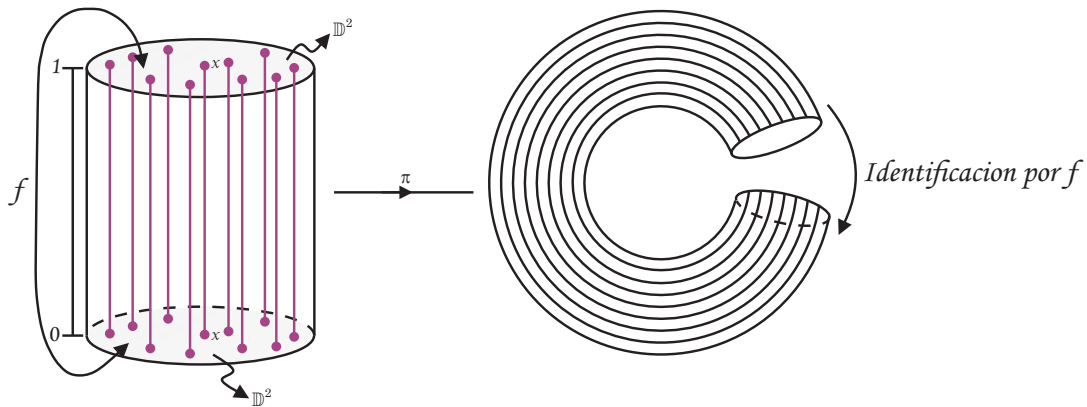


Figura 3.3: Foliación vertical de $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$

Como la foliación definida en $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ es invariante por traslaciones a lo largo del eje x_3 , ella induce una foliación \mathcal{F} de clase C^∞ de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ mediante la aplicación $\pi : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.

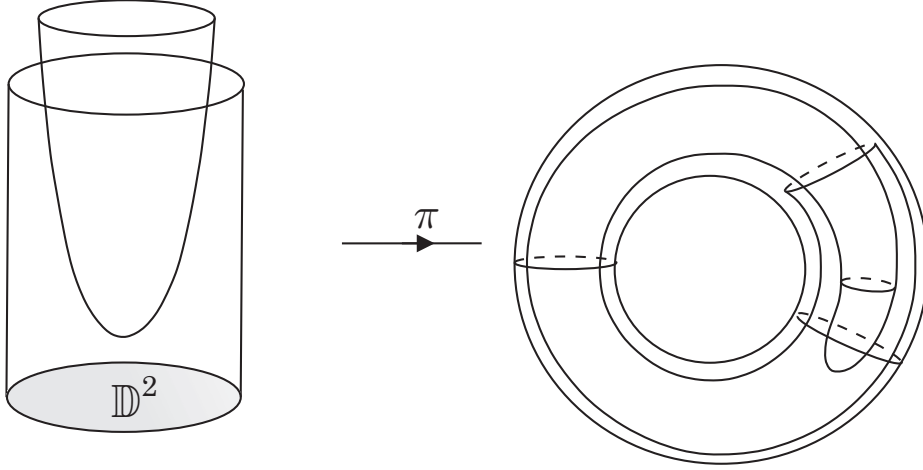


Figura 3.4: Hoja de la Foliación en $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$

Observe que podemos considerar $\partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)$ como una (única) hoja compacta de esta foliación, y que las restantes hojas del interior de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ son todas homeomorfas a \mathbb{R}^2 y se acumulan sólo en el borde de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Se denomina a \mathcal{F} *foliación de Reeb de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$* .

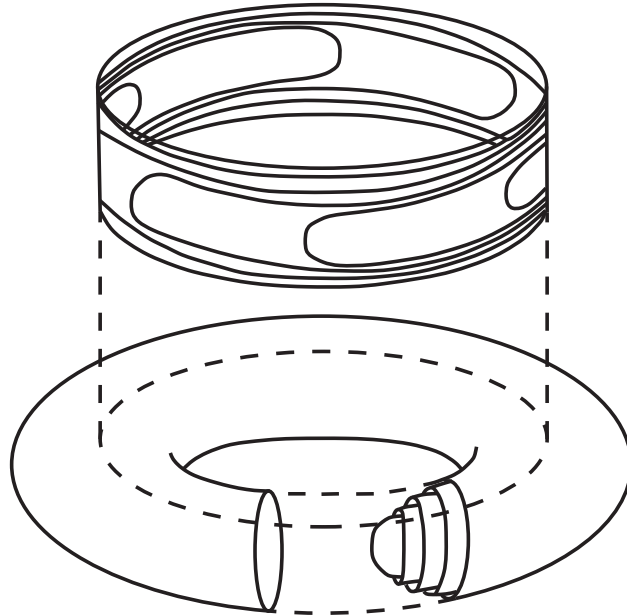


Figura 3.5: Foliación de Reeb en $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ y un corte transversal de ésta.

3.3. Foliación de Reeb para la Esfera \mathbb{S}^3

Se pensará \mathbb{S}^3 como una unión de dos toros sólidos $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ y $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ unidos a lo largo de su frontera a través de la aplicación identidad que lleva meridianos en paralelos y viceversa. Considere la esfera \mathbb{S}^3 como:

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Además, se define los toros sólidos de la siguiente manera:

$$T_1 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 / |z_1|^2 \leq \frac{1}{2} \right\}; \quad T_2 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 / |z_2|^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

donde

$$\mathbb{S}^3 = T_1 \cup T_2; \quad T_1 \cap T_2 = \left\{ (z_1, z_2) : |z_1|^2 = \frac{1}{2} = |z_2|^2 \right\}.$$

Es decir la unión de ambos toros es todo \mathbb{S}^3 y que la intersección de los mismos es el 2-toro que es borde de ambos y que, dentro de dicho 2-toro borde, los meridianos de ∂T_1 se identifican con los paralelos de ∂T_2 y viceversa, mediante el homeomorfismo:

$$g : \partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \longrightarrow \partial(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)$$

definida como

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, x_1, x_2)$$

es un homeomorfismo que lleva meridianos en paralelos y viceversa.

Luego usando la foliación construida en el ítem anterior, se obtiene la *foliación de Reeb* en \mathbb{S}^3 uniendo una foliación de Reeb de T_1 con una de T_2 donde $\partial T_1 = \partial T_2$ es una hoja.

De esta forma se obtiene una foliación de \mathbb{S}^3 de codimensión 1 y de clase C^∞ que posee una hoja compacta que es homeomorfa a un 2-toro y tal que las restantes hojas son todas homeomorfas a \mathbb{R}^2 y se acumulan en la hoja compacta de la foliación.

Conclusiones

Al finalizar este trabajo se ha llegado a mostrar ciertas propiedades sobre la “*Teoría de Foliaciones*” en particular “*La Foliación de Reeb para la Esfera \mathbb{S}^3* ” y se llegó a las siguientes conclusiones:

- Las hojas de una foliación son todas disjuntas y además por cada punto de la variedad M pasa una única hoja.
- Las componentes conexas de una submersión y las fibras de un espacio fibrado definen una foliación sobre una variedad respectivamente.
- La foliación de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ posee una única hoja compacta ($\partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)$) y las demás hojas se acumulan en el interior de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ y son todas homeomorfas a \mathbb{R}^2 .
- La foliación de Reeb para la esfera \mathbb{S}^3 es la unión de la foliación de dos toros sólidos.
- La foliación de Reeb para la esfera \mathbb{S}^3 posee una hoja compacta homeomorfa a un 2-toro y que todas las demás hojas son homeomorfas a \mathbb{R}^2 .

Sugerencias

- Aquellos interesados en el estudio de las foliaciones se les sugiere hacer un estudio sobre *la foliación de Reeb no orientable* de dimensión tres.

Apéndice A

Algunos resultados de acción de grupo sobre un espacio topológico

Proposición A.1. *Sea X un espacio topológico y G un grupo. La proyección canónica $\pi : X \longrightarrow X/G$ es una aplicación abierta.*

Demostración. En primer lugar se observa que para cada conjunto $B \subseteq X$,

$$\pi^{-1}(\pi(B)) = \bigcup_{g \in G} A_g(B).$$

En efecto, si $x \in \pi^{-1}(\pi(B))$ entonces $\pi(x) \in \pi(B)$, lo cual implica que existe algún $y \in B$ tal que $\pi(x) = \pi(y)$. Pero esta igualdad implica que $x \sim y$ y, por tanto, existe algún $g \in G$ tal que $x = A_g(y) \in A_g(B) \subseteq \bigcup_{g \in G} A_g(B)$, es decir, $x \in \bigcup_{g \in G} A_g(B)$. Recíprocamente, si $x \in \bigcup_{g \in G} A_g(B)$ entonces $x \in A_g(B)$, para algún $g \in G$, lo cual asegura la existencia de algún $q \in B$ tal que $x = A_g(q)$ y, por tanto, $x \sim q$. Esta equivalencia entre x y q implica que $\pi(x) = \pi(q)$, luego $x \in \pi^{-1}(\pi(q)) \subset \pi^{-1}(\pi(B))$.

En segundo lugar se mostrará que $\pi : X \longrightarrow X/G$ es una aplicación abierta. Para ello, sea $U \subseteq X$, se tiene que

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} A_g(U),$$

y como $A_g : X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo, para cada $g \in G$, entonces $A_g(U)$ es abierto en X , para todo $g \in G$, luego $\bigcup_{g \in G} A_g(U)$ es también un conjunto abierto en X . □

Definición A.1. Sea X un espacio topológico y G un grupo. Una acción $A : G \times X \longrightarrow X$ es propiamente discontinua si para cada punto $x \in X$ existe algún abierto U_x tal que $U_x \cap A_g(U_x) = \emptyset$, para todo $g \neq e$.

Proposición A.2. *Sea X un espacio topológico y G un grupo. Si $A : G \times X \longrightarrow X$ es una acción propiamente discontinua entonces la función cociente $\pi : X \longrightarrow X/G$ es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto arbitrario. Como la acción A es propiamente discontinua, existe un conjunto abierto $U_x \subseteq X$, tal que $x \in U_x$ y $U_x \cap A_g(U_x) = \emptyset$, para todo

elemento $g \in G$, con $g \neq e$. Se mostrará que la restricción $\pi|_{U_x} : U_x \longrightarrow \pi(U_x)$ es un homeomorfismo.

En efecto, de la Proposición A.1. sabemos que $\pi : X \longrightarrow X/G$ es una función abierta, por tanto, $\pi(U_x)$ es un conjunto abierto en X/G . Además, como $\pi : X \longrightarrow X/G$ es continua, se tiene que $\pi|_{U_x} : U_x \longrightarrow \pi(U_x)$ es continua.

$\pi|_{U_x} : U_x \longrightarrow \pi(U_x)$ es inyectiva (por tanto biyectiva). En efecto, sean $a, b \in U_x$ tal que $\pi(a) = \pi(b)$. Esto implica que $a \sim b$, luego existe algún $g \in G$ tal que $b = A_g(a)$. Como $a \in U_x$ se tiene que $A_g(a) \in A_g(U_x)$, lo cual a su vez implica que $b \in A_g(U_x)$, es decir, $b \in U_x \cap A_g(U_x)$. Siendo A propiamente discontinua resulta de esto que $g = e$ (elemento identidad en G), y como además A_e es el homeomorfismo identidad, resulta $b = A_g(a) = A_e(a) = a$, por tanto $a = b$.

$(\pi|_{U_x})^{-1} : \pi(U_x) \longrightarrow U_x$ es continua. En efecto, se observa que dado un abierto V en el subespacio U_x de X , se tiene que $((\pi|_{U_x})^{-1})^{-1}(V) = \pi|_{U_x}(V)$ es abierto en el subespacio $\pi|_{U_x}(U_x)$ de X/G pues, tal como se vió Proposición A.1. la proyección canónica $\pi : X \longrightarrow X/G$ es una función abierta.

□

Bibliografía

- [1] Camacho, C.-Neto, L. *Teoría Geométrica das Folheações*, IMPA CNPq, 1979.
- [2] Camacho, C.-Neto, L. *Introdução à Teoría das Folheações*, IMPA CNPq, 1977.
- [3] Lima, E. *Variedades Diferenciáveis*, IMPA, 1997.
- [4] Munkres, J. *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, 1966.
- [5] Crespo, G. *El Teorema Del Centro*, Tesis PUCP, 2009.
- [6] Plaza, S. *Topología Algebraica*, Universidad de Santiago de Chile, 2010.



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO

Ciudad Universitaria - Lambayeque



ACTA DE SUSTENTACIÓN N° 013-2019-D/FACFyM

(Sustentación Autorizada por Resolución N° 326-2019-D/FACFyM)

En la ciudad de Lambayeque, siendo las 12:30 pm del día 22 de marzo del 2019 se reunieron en La Videoteca del Laboratorio de Física FACFyM los miembros del Jurado designados mediante Resolución N° 246-2017-D/FACFyM, los docentes:

Dra. Olinda Luzmila Vigo Vargas	Presidente
Lic. Mat. Miriam María Estrada Huancas	Secretario
Lic. Mat. Miguel Angel Baca Ferreyros	Vocal

Para recibir la tesis titulada:

“LA FOLIACIÓN DE REEB PARA LA
ESFERA S³”

desarrollada por el Bachilleres en Matemáticas, **Llontop Cornejo Luis Gustavo.**

Después de escuchar la exposición y las respuestas a las preguntas formuladas por los miembros del Jurado, se acordó APROBAR el trabajo por UNANIMIDAD con el calificativo de MUY BUENO.

En consecuencia, el Bachiller en referencia queda apto para recibir el Título Profesional de **Licenciado en Matemáticas**, de acuerdo a la Ley Universitaria, el Estatuto y Reglamento de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Lambayeque.

Observaciones:

Para constancia del hecho firman.

Dra. Olinda Luzmila Vigo Vargas
Presidente

Lic. Mat. Miriam María Estrada Huancas
Secretario

Lic. Mat. Miguel Angel Baca Ferreyros
Vocal



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSTANCIA DE APROBACIÓN DE ORIGINALIDAD DE TESIS

(Aprobado por Resolución N°659-2020-R de fecha 08 de setiembre 2020)

Yo, **Dra. Gloria María Ortiz Basauri**, asesora de la tesis del Bach. **Llontop Cornejo Arturo Gustavo** titulada: **"La Foleación de Reeb para la Esfera S^3 "**, luego de la revisión exhaustiva del documento, he constatado que la misma tiene un Índice de similitud de **19 %** verificable en el reporte de similitud del Programa Turnitin.

La suscrita analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas no constituyen plagio, como, por ejemplo, los textos matemáticos y los preliminares que en toda tesis van. A mi leal saber y entender la tesis cumple con todas las normas para el uso de citas y referencias establecidas por la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Lambayeque, 01 de junio de 2022

Dra. Gloria María Ortiz Basauri
DNI: 16748071
Asesora

Tesis Gustavo Llontop

INFORME DE ORIGINALIDAD

19%

INDICE DE SIMILITUD

18%

FUENTES DE INTERNET

3%

PUBLICACIONES

7%

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

fermat.usach.cl

Fuente de Internet

4%

2

tesis.pucp.edu.pe

Fuente de Internet

2%

3

hdl.handle.net

Fuente de Internet

2%

4

Submitted to Pontificia Universidad Catolica
del Peru

Trabajo del estudiante

2%

5

docplayer.es

Fuente de Internet

1%

6

app.uff.br

Fuente de Internet

1%

7

cybertesis.unmsm.edu.pe

Fuente de Internet

1%

8

Submitted to Universidad Nacional de San
Cristóbal de Huamanga

Trabajo del estudiante

1%

9	www.ehu.eus Fuente de Internet	1 %
10	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo Trabajo del estudiante	<1 %
11	www.locus.ufv.br Fuente de Internet	<1 %
12	ebin.pub Fuente de Internet	<1 %
13	www.buenastareas.com Fuente de Internet	<1 %
14	Klaus-Dieter Schewe, Bernhard Thalheim. "Design and Development of Web Information Systems", Springer Science and Business Media LLC, 2019 Publicación	<1 %
15	epdf.pub Fuente de Internet	<1 %
16	repositorio.unican.es Fuente de Internet	<1 %
17	Ghulam Farid, Josip Pecarić, Kamsing Nonlaopon. "Inequalities for fractional Riemann–Liouville integrals of certain class of convex functions", Advances in Continuous and Discrete Models, 2022 Publicación	<1 %

18

www.math.uzh.ch

Fuente de Internet

<1 %

19

Submitted to Universidad Católica de Santa María

Trabajo del estudiante

<1 %

20

documentop.com

Fuente de Internet

<1 %

21

Submitted to University of Leeds

Trabajo del estudiante

<1 %

22

uvadoc.uva.es

Fuente de Internet

<1 %

23

Masanari Kida. "Cyclic Polynomials Arising from Kummer Theory of Norm Algebraic Tori", Lecture Notes in Computer Science, 2006

Publicación

<1 %

24

support.sas.com

Fuente de Internet

<1 %

25

idoc.pub

Fuente de Internet

<1 %

26

Reza Akhtar, Paul Larson. "Small-sum pairs in abelian groups", Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 2010

Publicación

<1 %

27

ma.usb.ve

Fuente de Internet

<1 %



Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por **Turnitin**. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Gustavo Llontop
Título del ejercicio: Tesis Gustavo Llontop
Título de la entrega: Tesis Gustavo Llontop
Nombre del archivo: Informe_Final.pdf
Tamaño del archivo: 2.44M
Total páginas: 49
Total de palabras: 11,922
Total de caracteres: 49,458
Fecha de entrega: 28-may.-2022 06:11p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega... 1846083914



UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



La Foliación de Reeb para la Esfera S^3

Tesis para optar el Título de
Licenciado en Matemáticas

Presentada por:

Bach. Mat. Luis Gustavo LLontop Cornejo

Asesor:

Dra. Gloria María Ortiz Basauri

LAMBAYEQUE - PERU
2017