UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Caracterización de espacios de Kolmogórov según espacios de aproximación"

TESIS

Para optar el título profesional de LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presentado por:

Bach. Mat. Deyvis Iván Leonardo Rodríguez

Bach. Mat. Neisser Arturo Soto Fernández

Asesora:

Dra. Gloria María Ortiz Basauri

LAMBAYEQUE – PERÚ

2022

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"Caracterización de espacios de Kolmogórov según espacios de aproximación."**, presentada por los bachilleres en matemáticas, Deyvis Iván Leonardo Rodríguez, Neisser Arturo Soto Fernández, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Mg. Oscar Antonio Santamaría Santisteban

Presidente Jurado de Tesis

Mg. Gustavo Adolfo Polidoro Fabricio Ulloa Ubillús

Secretario Jurado de Tesis

Raúl Rojas B.

Lic. Victor Raúl Rojas Burga

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: 17 de junio de 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL “PEDRO RUIZ GALLO”

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“Caracterización de espacios de Kolmogórov según espacios de aproximación

Bach. Mat. Leonardo Rodríguez Deyvis Iván

Autor

Bach. Mat. Soto Fernández Neisser Arturo

Autor

Dra. Gloria María Ortiz Basauri

Asesora

Lambayeque – Perú

Junio - 2022

Agradecimiento

A toda mi familia por ser mi pilar fundamental y haberme apoyado de forma incondicional, pese a las adversidades e inconvenientes que se presentaron.

De manera especial a mi querida asesora Gloria Maria Ortiz Basauri, por haberme guiado, no solo en la elaboración de este trabajo de tesis, sino a lo largo de mi carrera universitaria y haberme brindado el apoyo para desarrollarme profesionalmente.

Leonardo

En primer lugar, agradecer a mis padres que han logrado su objetivo de verme profesional a través de una buena enseñanza vista desde casa.

Agradezco a nuestra asesora que ha sido de guía para culminar con éxito nuestro proyecto de tesis, es por ello que, gracias a usted, hoy se puede ver realizado una de mis metas, ya que siempre estuvo impulsándome en los momentos más difíciles de mi carrera. Gracias por haber fomentado en mí el deseo de superación y el anhelo de triunfo en la vida, agradecemos así su apoyo, su comprensión y sus consejos en los momentos difíciles.

A todos, esperamos no defraudarlos y contar siempre con su valioso apoyo sincero e incondicional.

Neisser

Dedicatoria

A mi esposa Julia y mis tres hijos Evan, Samir y Lara Catalina, porque fueron mi mayor fuente de inspiración para persistir y superar desafíos académicos y de la vida.

A mi padre Juan Leonardo Belicoso, por su apoyo incondicional en todos los momentos difíciles de mi trayectoria académica.

A mis hermanitas Juanita y Danielita, que desde cielo estoy seguro siempre me cuidan y guian.

Leonardo

A Dios:

Por permitirme llegar hasta este punto y por darnos salud para lograr nuestros objetivos, además de su infinita bondad y amor.

A mi esposa:

Por haberme acompañado en todo este recorrido y me ha apoyado hasta los últimos momentos de mi proyecto universitario, quien ha confiado en mí, en el logro de cada una de mis metas y me acompaña hacerlas realidad.

A mis padres Juan Pablo Soto Vera y Rosa Himelda Fernández Neira:

Porque creyeron en mí y pudieron sacarme adelante, dándome ejemplos dignos de superación y entrega, porque en gran parte gracias a ustedes, hoy se puede ver alcanzada nuestra meta, ya que siempre estuvieron impulsándonos en los momentos más difíciles de mi carrera, y porque el orgullo que sienten por mí fue lo que me hizo ir hasta el final. Va por ustedes, por lo que valen, porque admiro su fortaleza y por lo que han hecho de mi.

A nuestra asesora Gloria Ortiz:

Por guiarnos siempre, corregirnos en nuestros errores y enseñarnos a nunca darnos por vencido.

Neisser

Resumen

En topología, dos puntos distintos son topológicamente distinguibles si existe un conjunto abierto donde se puede encontrar exactamente a uno de estos puntos. Un espacio topológico (X, τ) es Kolmogórov cuando todo par de puntos distintos son topológicamente distinguibles. En este trabajo de investigación, uno de los objetivos principales es caracterizar los espacios de Kolmogórov usando espacios de aproximación. Primero, se presenta detalladamente algunas de las diversas estructuras que se pueden utilizar para describir los espacios de aproximación, tales como, distancias, sistemas de localización, calibres y cuadros. Se presentan también sus propiedades de cada una de estas estructuras y se demuestra que cada una de las estructuras induce a las otras. En el último capítulo, se dan caracterizaciones de los espacios de Kolmogórov usando los espacios de aproximación asociadas a las estructuras inducidas por su topología, tales como distancias, calibres, sistemas de localización y cuadros.

Abstract

In topology, two distinct points are topologically distinguishable, if there exists an open set where exactly one of these points can be found. A topological space (X, τ) is Kolmogorov when every pair of distinct points are topologically distinguishable. This research work paper, in one of the main objectives is to characterize the Kolmogórov spaces using approximation spaces. First, some of the various structures that can be used to describe approach spaces, such as distances, localization systems, gauges, and frames, are presented in detail. The properties of each of these structures are also presented and it is shown that each of the structures induces the other structures. In the last chapter characterizations of the Kolmogórov spaces are given using the approximation spaces associated with the structures induced by their topology, such as distances, gauges, localization systems and frames.

Introducción

Los espacios de aproximación fueron introducidos por el matemático Robert Lowen en 1989, cuyo propósito inicial era generalizar espacios métricos, basado en distancias entre puntos a conjuntos, en lugar de distancias punto a punto. En el presente trabajo de investigación se establecen condiciones necesarias y suficientes para determinar si un espacio topológico es de Kolmogórov a través de su espacio de aproximación asociado. Para ello se exhibirán cuatro caracterizaciones usando estructuras sobre conjuntos tales como, distancias, calibres, sistemas de localización y cuadros.
Para mejor comprensión el trabajo fue dividido en tres capítulos:
En el primer capítulo, se desarrolló los preliminares básicos indispensables de topología, espacios de Kolmogórov y se presenta a detalle cuatro estructuras sobre conjuntos que serán indispensables en este trabajo, tales como, distancias, calibres, sistemas de localización y cuadros.
En el segundo capítulo, se busca, partiendo de una estructura, encontrar las otras tres estructuras asociadas, para luego exhibir la topología inducida por una distancia y sus propiedades.
El tercer capítulo, se darán cuatro caracterizaciones de los espacios de Kolmogórov. Para la primera caracterización se usa distancias y sistema de localización. La segunda caracterización está hecha sólo usando la noción de cuadros. Para la tercera caracterización se usa sólo sistemas de localización.
Finalmente en la cuarta caracterización se usa la noción de contracción, para la cual se usarán resultados del capitulo dos sobre distancias y calibres.

Índice general

Índice de figuras

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO
Ciudad Universitaria - Lambayeque

ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL Nº 020-2022-D/FACFyM

Siendo las 4 pm del día 17 de junio del 2022, se reunieron vía plataforma virtual, https://meet.google.com/mjk-frsm-war?authuser=0 los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada:

"CARACTERIZACIÓN DE ESPACIOS DE KOLMOGÓROV SEGÚN ESPACIOS DE APROXIMACIÓN"

Designados por Resolución N°289-2021-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 19 de abril de 2021

Con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

Mg. Oscar Antonio Santamaría Santisteban	Presidente
Mg. Gustavo Adolfo Polidoro Fabricio Ulloa Ubillús	Secretario
Lic. Mat. Víctor Raúl Rojas Burga	Vocal

La tesis fue asesorada por la **Dra. Gloria María Ortiz Basauri** nombrada por Resolución N 289-2021-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 19 de abril de 2021.

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N °509-2022-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 9 de junio de 2022

La Tesis fue presentada y sustentada por los Bachilleres: Soto Fernández Neisser Arturo y Leonardo Rodriguez Deyvis Ivan y tuvo una duración de 45 minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de (16) (dieciséis) en la escala vigesimal, mención (Bueno).

Por lo que quedan aptos para obtener el Título Profesional de **Licenciado en Matemáticas** de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Siendo las 5:18 pm se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

Mg. Oscar Antonio Santamaría Santisteban
Presidente

Mg. Gustavo Adolfo Polidoro Fabricio Ulloa Ubillús
Secretario

Lic. Mat. Víctor Raúl Rojas Burga
Vocal

Dra. Gloria María Ortiz Basauri
Asesora

Capítulo 1:

Preliminares

1.1 Nociones generales de topología

1.1.1 Espacios topológicos

En esta subsección se introduce nociones básicas de topología, tales como, espacios topológicos, conjuntos cerrados y funciones continuas.

Definición 1.1 ([11]). *Sea X un conjunto no vacío. Una topología sobre X es una colección τ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:*

(t_1) $\emptyset, X \in \tau$.

(t_2) *Si* $A_1, A_2 \in \tau$, *entonces* $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

(t_3) *Dada una familia arbitraria* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$, $A_\lambda \in \tau,\ \forall \lambda \in L$, *entonces* $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.

Los elementos de τ_X serán llamados conjuntos *abiertos* y el par (X, τ) espacio topológico.

Ejemplo1.1.

a) Sea X un conjunto no vacío y $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$ entonces (X, τ_{ind}) es un espacio topológico. La colección τ_{ind} es llamada topología indiscreta sobre X.

b) Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Entonces la colección $\tau_{\mathbb{N}} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{U_k = \{1, 2, ..., k\} : k \in \mathbb{N}\}$ es una topología sobre $\mathbb{N}$. En efecto, por definición de $\tau_{\mathbb{N}}$, se tiene que $\emptyset, \mathbb{N} \in \tau_{\mathbb{N}}$. Sean $U_{k_1}, U_{k_2} \in \tau_{\mathbb{N}}$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Como $U_{k_1} \cap U_{k_2} = U_k \in \mathbb{N}$ donde $k = \text{mín}\{k_1, k_2\}$ entonces, $U_{k_1} \cap U_{k_2} \in \tau_{\mathbb{N}}$. Sea la colección $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L} \subset \tau_{\mathbb{N}}$, donde L es un conjunto arbitrario de índices. Si $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda = \mathbb{N} \in \tau_{\mathbb{N}}$, claramente $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau_{\mathbb{N}}$. Ahora, si $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda \neq \mathbb{N}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \notin \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$. Sea $m_0 = \text{mín}\{l \in \mathbb{N} : l \notin \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda\}$. Entonces $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda = \emptyset \in \tau_{\mathbb{N}}$ si $m_0 = 1$ y $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda = U_{m_0 - 1} \in \tau_{\mathbb{N}}$, si $m_0 \geq 2$. Esto, concluye que $\tau_{\mathbb{N}}$ es una topología sobre $\mathbb{N}$.

Definición 1.2 ([11]). *Sea (X, τ) un espacio topológico. La clausura, adherencia o cerradura de un subconjunto $A \subset X$ es el conjunto:*

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall U \in \tau \text{ con } x \in U, \; U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado, si es igual a su clausura, o sea, $A = \overline{A}$.

Definición 1.3 ([11]). *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacio topológicos. Una función $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es continua si para todo $A \in \tau_Y$, el conjunto $f^{-1}(A) \in \tau_X$. Una función continua f es llamada homeomorfismo, si es biyectiva y f^{-1} es continua.*

Proposición 1.1. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una función. Son equivalentes:*

1. *f es una función continua.*

2. *La imagen inversa bajo f de cada cerrado de Y es un cerrado de X.*

3. *$f(\overline{A}) \subset \overline{(f(A))}$ para cada $A \subset X$.*

Demostración. (Ver [11], pág. 104). □

Observación 1.1.

- *La composición de funciones continuas es una función continua. Las restricciones de funciones continuas son continuas.*

- *Sean τ y τ' dos topologías distintas sobre un conjunto X. Entonces la función identidad id : $(X,\tau) \to (X,\tau')$ es continua si y solo si τ es igual o mas fina que τ', o sea, id es continua si y solo si $\tau' \subseteq \tau$.*
- *Una función continua $f : X \to Y$ sigue siendo continua si se refina la topología en X o se engrosa la de Y.*

Las demostraciones de las afirmaciones dadas en la observación 1.1 están demostradas en [11], página 108.

1.1.2 Operador clausura topológica

El concepto de operador clausura ha sido uno de los conceptos mas explorados en matemáticas debido a las múltiples conexiones que ha permitido establecer entre diversos campos de esta ciencia. En esta subsección se construirá una topología inducida de forma natural por un operador clausura.

Definición 1.4 ([9]). *Una aplicación*

$$cl : 2^X \to 2^X$$

es llamada operador clausura topológica en X si satisface las siguientes propiedades:

(c_1) $cl(\emptyset) = \emptyset$

(c_2) $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$

(c_3) $\mathrm{cl}(cl(A)) = cl(A)$

(c_4) $cl(A \cup B) = cl(A) \cup \mathrm{cl}(B)$.

para cualesquiera $A, B \in 2^X$

Si el operador clausura cl no cumple la propiedad (c_3) , cl es llamado operador clausura pre-topológico. Un conjunto $A \in 2^X$ es llamado conjunto fijo del operador clausura cl si $cl(A) = A$.

Proposición 1.2 ([9]). *Sea X un conjunto no vacío y $cl : 2^X \to 2^X$ un operador clausura. Entonces*

$$\tau_{cl} := \{U \in 2^X : cl(X \backslash U) = X \backslash U\}$$

es una topología en X, es decir, los conjuntos fijos del operador cl son los conjuntos cerrados de la topología τ_{cl}.

Demostración. (t_1) Primero note que, para $A = X$ en la propiedad (c_2) de la definición 1.4 se tiene que $X \subseteq cl(X)$, y como $cl(X)$ es un subconjunto de X se tiene que $cl(X) = X$. Así,

$$cl(X\backslash\emptyset) = cl(X) = X = X\backslash\emptyset.$$

Por lo tanto $\emptyset \in \tau_{cl}$. Por otro lado, notemos también que $X \in \tau_{cl}$, pues,

$$cl(X\backslash X) = cl(\emptyset) = \emptyset = X\backslash X.$$

(t_2) Sean $A_1, A_2 \in \tau_{cl}$, usando la propiedad (c_4) de la definición 1.4 se tiene que

$$\begin{aligned} cl\big(X\backslash(A_1 \cap A_2)\big) &= cl\big((X\backslash A_1) \cup (X\backslash A_2)\big) \\ &= cl(X\backslash A_1) \cup cl(X\backslash A_2) \\ &= (X\backslash A_1) \cup (X\backslash A_2) \\ &= X\backslash(A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto $A_1 \cap A_2 \in \tau_{cl}$.

(t_3) Sean $\{A_\lambda\}_\lambda \subset \tau_{cl}$. Primero note que $X\backslash \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \subseteq cl\big(X\backslash \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\big)$. Para la otra inclusión, primero se demostrará que si $A \subseteq B$ entonces $cl(A) \subset cl(B)$. En efecto, de la propiedad (c_4) se tiene que

$$cl(B) = cl(A \cup (B\backslash A)) = cl(A) \cup cl(B\backslash A)) \supseteq cl(A).$$

Ahora, como $\bigcap_{\lambda\in L} X\backslash A_\lambda \subset X\backslash A_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, entonces

$$cl\Big(\bigcap_{\lambda\in L} X\backslash A_\lambda)\Big) \subset cl(X\backslash A_\lambda) = X\backslash A_\lambda,$$

esto implica que $cl\Big(\bigcap_{\lambda\in L} X\backslash A_\lambda\Big) \subseteq \bigcap_{\lambda\in L} X\backslash A_\lambda$. Por consiguiente, $\bigcap_{\lambda\in L} X\backslash A_\lambda = cl(\bigcap_{\lambda\in L} X\backslash A_\lambda)$, luego

$$\begin{aligned} cl\big(X\backslash \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\big) &= cl\big(\bigcap_{\lambda\in L}(X\backslash A_\lambda)\big) \\ &= \bigcap_{\lambda\in L}(X\backslash A_\lambda) \\ &= X\backslash \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \in \tau_{cl}$.

$\square$

1.2 Espacios de Kolmogórov

En topología se dice que dos puntos distintos, son distinguibles desde el punto de vista topológico si existe un conjunto abierto donde se puede encontrar exactamente a uno de estos puntos. Los espacios topológicos donde todos los puntos son distinguibles reciben el nombre de espacios de Kolmogórov, en honor a memoria a Andrei Nikolaevich Kolmogórov, creador de la teoría axiomática de probabilidades.

Definición 1.5 ([13]). *Un espacio topológico (X, τ_X) es un espacio de Kolmogórov o un espacio T_0 si para cada par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$ existe un subconjunto $U \in \tau_X$ tal que: Si $x \in U$, entonces $y \notin U$ o si $y \in U$, entonces $x \notin U$.*

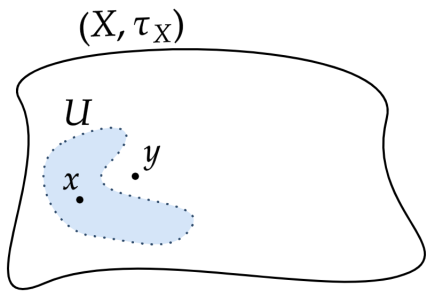


Figura 1.1: Espacio topológico de Kolmogórov

Ejemplo1.2.

- El espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{U_k = \{1, 2, ..., k\} : k \in \mathbb{N}\})$ es un espacio de Kolmogórov, pues, dados $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Entonces se tiene que $n < m$ o $m < n$. Suponga que $n < m$ y tome $U_n \in \tau_{\mathbb{N}}$. Luego, se tiene que: $n \in U_n$ y $m \notin U_n$. Análogamente, si $m < n$ para $U_m \in \tau_{\mathbb{N}}$ se tiene que: $m \in U_m$ y $n \notin U_m$.

- Sea (X, d) un espacio métrico y τ_d la topología inducida por la métrica d. Entonces (X, τ_d) es un espacio de Kolmogórov. En efecto, dado $x, y \in X$ tal que $x \neq y$, entonces $d(x, y) > 0$. Tomando $U = B(x, \epsilon)$ donde $\epsilon = d(x, y)/2$, se tiene que $x \in U$ y $y \notin U$, por lo tanto (X, τ_d) es un espacio de Kolmogórov.

- Sea X un conjunto y $\tau = 2^X$ entonces (X, τ) es un espacio de Kolmogórov. En efecto, sea $x, y \in X$ dos puntos distintos, tomando $U = \{x\}$, claramente $x \in U$ pero $y \notin U$, esto implica que $(X, 2^X)$ es un espacio de Kolmogórov.

- Sea X un conjunto con más de un elemento y $\tau = \{\emptyset, X\}$ la topología trivial. Entonces (X, τ) no es un espacio de Kolmogórov, pues dado $x, y \in X$ con $x \neq y$, el único abierto al cual x pertenece es el conjunto X al cual el punto y también pertenece.

- Sean $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ y $\tau = \{(\mathbb{R} \backslash A) \times \{0, 1\} : A \text{ es finito }\} \cup \{\emptyset, X\}$. El espacio topológico (X, τ) no es un espacio de Kolmogórov, pues toda vecindad V del punto $(0, 0)$ es de la forma $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R} \backslash A\} \cup \{(x, 1) : x \in \mathbb{R} \backslash A\}$ donde A es un conjunto finito, luego $(x, 0) \in V$ si y solamente si $(x, 1) \in V$. Por lo tanto, $(0, 0) \in V$ si y solamente si $(0, 1) \in V$, o sea, no existe un abierto V para el punto $(0, 0)$ de tal manera que $(0, 1) \notin V$ y viceversa. Esto implica que (X, τ) no es un espacio de Kolmogórov.

- Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual τ_1 la cual es generada por intervalos abiertos y la topología trivial $\tau_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Entonces $X = \mathbb{R}^2$ con la topología producto $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ no es un espacio de Kolmogórov. En efecto, sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y tome $x = (a, b)$ y $y = (a, c)$. Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto tal que $x \in U$ entonces $U = I \times \mathbb{R}$ donde $I \in \tau_1$ y $a \in I$, por lo tanto $y \in U$.

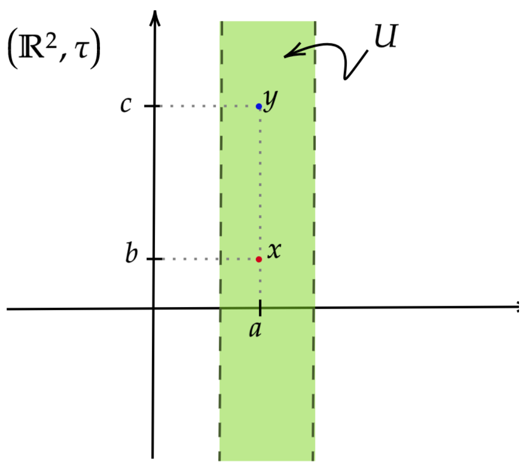


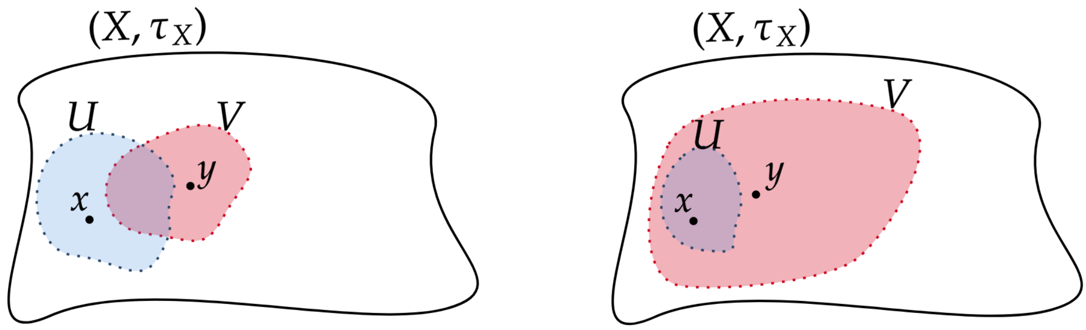
Figura 1.2: El punto y pertenece a todo abierto U tal que $x \in U$.

Proposición 1.3. *Un espacio topológico (X, τ) es un espacio de Kolmogórov si y solamente si para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \notin \overline{\{y\}}$ o $y \notin \overline{\{x\}}$.*

Demostración. Suponga que (X, τ) es un espacio de Kolmogórov. Entonces, dados $x, y \in X$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o existe $V \in \tau$ tal que $y \in U$ y $x \notin U$. El hecho de que exista un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$ implica que $y \notin \overline{\{x\}}$. Análogamente, el hecho de que $y \in V$ y $x \notin V$ implica que $x \notin \overline{\{y\}}$.

Ahora, suponga que para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \notin \overline{\{y\}}$ o $y \notin \overline{\{x\}}$. Suponga por contradicción que (X, τ) no es un espacio de Kolmogórov, entonces para todo par de abiertos $U, V \subset X$ con $x \in U$ y $y \in V$ se tiene que $y \in U$ y $x \in V$. El hecho de que $y \in U$ para todo abierto U con $x \in U$ implica que $x \in \overline{\{y\}}$, análogamente, si $x \in V$ para todo abierto V con $y \in V$ implica que $y \in \overline{\{x\}}$. Esto contradice la hipótesis, por lo tanto, (X, τ) es un espacio de Kolmogórov. □

Observación 1.2. *Note que un espacio topológico (X, τ) es de Kolmogórov si y solamente si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$, $x \neq y$ existen $U, V \in \tau$ con $x \in U$ y $y \in V$ tal que $x \notin V$ o $y \notin U$.*



(a) Existen abiertos U de x y V de y tal que y no pertenece a U y x no pertenece a V.

(b) Existen abiertos U de x y V de y tal que x pertenece a V pero y no pertenece a U.

Proposición 1.4. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacio topológicos y $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ un homeomorfismo. Entonces (X, τ_X) es un espacio de Kolmogórov si y solamente si (Y, τ_Y) es un espacio de Kolmogórov.*

Demostración. En efecto, suponga primero que (X, τ_X) es un espacio de Kolmogórov. Sean $y_1, y_2 \in Y$ tome $x_1 = f^{-1}(y_1)$ y $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Como $x_1, x_2 \in X$ y (X, τ_X) es un espacio de Kolmogórov, entonces existe $U_1, U_2 \in \tau_X$ con $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$ tal que $x_1 \notin U_2$ o $x_2 \notin U_1$. Como f^{-1} es continua, se tiene que $V_1 = f(U_1)$ y $V_2 = f(U_2)$ son conjuntos abiertos, donde $y_1 \in V_1$ y $y_2 \in V_2$ tal que $y_1 \notin V_2$ o $y_2 \notin V_1$. Como y_1, y_2 fueron tomados arbitrariamente, se concluye que (Y, τ_Y) es un espacio de Kolmogórov.

Para demostrar la reciproca, es suficiente intercambiar papeles de f por f^{-1} y de X por Y. $\square$

1.3 Estructuras sobre un conjunto

En topología, los tres conceptos básicos de métrica, topologías y uniformidades han sido tratados hasta ahora como entidades separadas por medio de diferentes métodos y terminología. En esta sección se definen otras estructuras básicas que determinan lo que se denominará mas adelante un espacio de aproximación. Una de las grandes ventajas de estos espacios es que pueden describirse mediante estructuras conceptualmente muy diferentes, pero que están estrechamente relacionadas en cierto sentido, como se verá en el capítulo 2.

1.3.1 Distancias

La primera y probablemente más atractiva estructura a considerar es la de una distancia entre puntos y conjuntos. En un espacio métrico (X, d) se define una distancia entre pares de puntos y se puede extender a una distancia entre puntos y conjuntos usando la siguiente fórmula

$$\rho_d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a) \quad \forall x \in X, \forall A \in 2^X.$$

Ahora se introducirá el concepto de distancia sobre un conjunto, el cual generaliza la noción de distancia de un punto hacia un subconjunto de un conjunto en espacios métricos.

Definición 1.6 ([9]). *Sea X un conjunto no vacío. Una distancia sobre X es una función $\rho\colon X \times 2^X \to [0, +\infty]$ que satisface las siguientes condiciones:*

(p_1) $\rho(x, \{x\}) = 0$*, para todo* $x \in X$*.*

(p_2) $\rho(x, \emptyset) = +\infty$*, para todo* $x \in X$*.*

(p_3) $\rho(x, A \cup B) = \min\{\rho(x, A), \rho(x, B)\}$*, para todo* $x \in X$ *y para todo* $A, B \in 2^X$*.*

(p_4) *$\rho(x, A) \leq \rho(x, A^{[\epsilon]}) + \epsilon$, donde $A^{[\epsilon]} = \{z \in X : \rho(z, A) \leq \epsilon\}$, para todo $x \in X$ y para todo $A \in 2^X$.*

Ejemplo1.3. Toda métrica sobre un conjunto induce una distancia sobre dicho conjunto. En efecto, sea X un conjunto no vacío y d una métrica sobre X. La siguiente función distancia: $\rho_d \colon X \times 2^X \to [0, +\infty]$, dada por:

$$\rho_d(x, A) = \begin{cases} \infty & \text{si } A = \emptyset, \\ \text{ínf}\{d(x, y) : y \in A\} & \text{si } A \neq \emptyset, \end{cases}$$

es una distancia. En efecto, sea $x \in X$, entonces $\rho_d(x, \{x\}) = \text{ínf}\{d(x, x)\} = 0$. Por definición, $\rho_d(x, \emptyset) = \infty$. Sean $A, B \in 2^X$. Para cada $x \in X$ y usando el hecho de que $\{d(x, z) : z \in A \cup B\} = \{d(x, z) : z \in A\} \cup \{d(x, z) : z \in B\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho_d(x, A \cup B) &= \text{ínf}\{d(x, z) : z \in A \cup B\} \\ &= \text{ínf}\Big(\{d(x, z) : z \in A\} \cup \{d(x, z) : z \in B\}\Big) \\ &= \text{mín}\{\text{ínf}\{d(x, z) : z \in A\}, \text{ínf}\{d(x, z) : z \in B\}\} \\ &= \text{mín}\{\rho_d(x, A), \rho_d(x, B)\}. \end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad (p_4) de ρ_d se necesita demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación: Para todo $v, w \in X$ y cualquier $M \in 2^X$ se cumple $\rho_d(v, M) - \rho_d(w, M) \leq d(v, w)$. En efecto, dado un $\epsilon > 0$, existe $u \in M$ tal que $d(w, u) < \rho_d(w, M) + \epsilon$.

$$\begin{aligned} \rho_d(v, M) &\leq d(v, u) \\ &\leq d(v, w) + d(w, u) \\ &< d(v, w) + \rho_d(w, M) + \epsilon. \end{aligned}$$

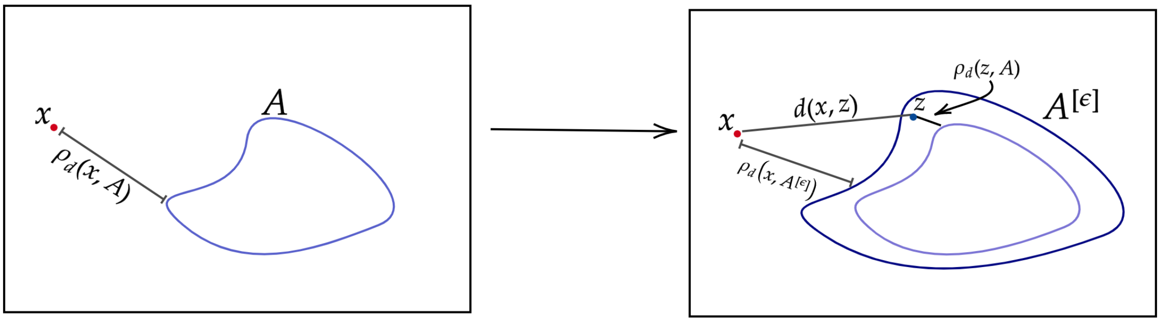
Como, $\epsilon > 0$ es arbitrario se concluye que $\rho_d(v, M) \leq d(v, w) + \rho_d(w, M)$ y en consecuencia $\rho_d(v, M) - \rho_d(w, M) \leq d(v, w)$. Esto concluye la demostración de la afirmación.

Sea $x \in X$, $A \in 2^X$ y $A^{[\epsilon]} = \{x \in X : \rho_d(x, A) \leq \epsilon\}$. Entonces

- Si $x \in A^{[\epsilon]}$, entonces se tiene que:

$$\rho_d(x, A) \leq \epsilon = 0 + \epsilon = \rho_d(x, A^{[\epsilon]}) + \epsilon.$$

- Si $x \notin A^{[\epsilon]}$ caso en el cual se tiene que: $\rho_d(x,A) > \epsilon$. Además, para cada $z \in A^{[\epsilon]}$ se tiene que: $\rho_d(z,A) \leq \epsilon$. Luego, $\rho_d(z,A) \leq \epsilon < \rho_d(x,A)$ y por lo tanto, $\rho_d(x,A) - \epsilon \leq \rho_d(x,A) - \rho_d(z,A) < d(x,z)$. Siendo esto válido para todo $z \in A^{[\epsilon]}$, en consecuencia se tiene que: $\rho_d(x,A) \leq \rho_d(x,A^{[\epsilon]}) + \epsilon$. Mostrando de esta manera que ρ_d es una distancia sobre X.



Proposición 1.5 ([9]). *Sea X un conjunto no vacío y $\rho\colon X \times 2^X \to [0,+\infty]$ una distancia sobre X. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $x \in A$, entonces $\rho(x,A) = 0$, para todo $A \in 2^X$.*
2. *Si $A \subset B$, entonces $\rho(x,B) \leq \rho(x,A)$, para todo $A, B \in 2^X$, y todo $x \in X$.*
3. *Si $\{A_i\}_{i=1}^n \subset 2^X$ con $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$, entonces $\rho(x, \bigcup_{i=1}^n A_i) = \min\{\rho(x,A_i) : i = 1, ..., n\}$.*
4. *$\rho(x,A) \leq \rho(x,B) + \sup\{\rho(b,A) : b \in B\}$, para todo $A, B \in 2^X$.*

Demostración. 1. Si $x \in A$, entonces:

$$\begin{aligned}\rho(x,A) &= \rho(x,\{x\} \cup A\backslash\{x\}) \\ &= \min\{\rho(x,\{x\}), \rho(x, A\backslash\{x\})\} \\ &= \min\{0, \rho(x, A\backslash\{x\})\} = 0.\end{aligned}$$

2. Si $A \subset B$, entonces:

$$\begin{aligned}\rho(x,B) &= \rho(x, A \cup (B\backslash A)) \\ &= \min\{\rho(x,A), \rho(x, B\backslash A)\} \\ &\leq \rho(x,A).\end{aligned}$$

3. Demostrando por inducción. Para $n = 2$ el ítem es válido por definición de ρ. Suponga que sea válido para $n \geq 2$. Ahora, para $n + 1$ se tiene que dada la colección finita $\{A_i\}_{i=1}^{n+1} \subset 2^X$ de subconjuntos de X,

$$\begin{aligned}\rho(x, \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) &= \rho(x, \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}) \\ &= \min\{\rho(x, \bigcup_{i=1}^{n} A_i), \rho(x, A_{n+1})\} \\ &= \min\{\min\{\rho(x, A_i) : i \in \{1, 2, ..., n\}, \rho(x, A_{n+1})\} \\ &= \min\{\rho(x, A_i) : i \in \{1, 2, ..., n + 1\}.\end{aligned}$$

4. Sean $x \in X$ y $A, B \in 2^X$. Tomando $\epsilon = \sup\{d(b, A) : b \in B\}$, como $A^{[\epsilon]} = \{x \in X : \rho(x, A) \leq \epsilon\}$, por la elección de ϵ es claro que $B \subset A^{[\epsilon]}$. Luego por el ítem (2) se tiene que $\rho(x, A^{[\epsilon]}) \leq \rho(x, B)$. Entonces

$$\begin{aligned}\rho(x, A) &\leq \rho(x, A^{[\epsilon]}) + \epsilon \\ &\leq \rho(x, B) + \sup\{d(b, A) : b \in B\}.\end{aligned}$$

□

1.3.2 Sistemas de localización

En esta subsección se estudiará la noción de *Sistemas de localización*, la cual es una estructura que está estrechamente relacionada con el concepto de un sistema de vecindad en un espacio topológico, como se verá mas adelante.

Retículos

Dado un conjunto no vacío X y una relación binaria $\leq$, se usará la notación $x \leq y$ con $x, y \in X$ para indicar que $(x, y) \in \leq$.

Definición 1.7 ([12]). *Sea X un conjunto no vacío. Una relación binaria $\leq \subset X \times X$ es de orden parcial si cumple las siguientes condiciones:*

- *$x \leq x$, para todo $x \in X$ (reflexiva);*

- *Si $x \leq y$ y $y \leq x$ con $x, y \in X$, entonces $x = y$ (anti-simétrica);*
- *Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$ (transitiva).*

Ejemplo1.4. Sea X un conjunto no vacío y $[0,\infty]^X := \{f : X \to [0,\infty],$ es una función $\}$. La relación binaria $\leq := \{(\varphi,\psi) \in [0,\infty]^X : \varphi(z) \leq \psi(z)$ para todo $z \in X\}$ es una relación de orden parcial en $[0,\infty]^X$. En este caso, $\varphi \leq \psi$ si y solo si $\varphi(z) \leq \psi(z)$ para todo $z \in X$.

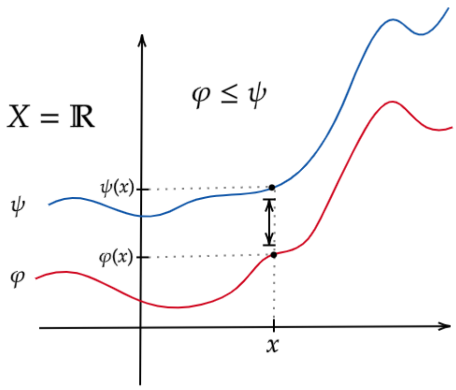


Figura 1.4: Representación para $\varphi \leq \psi$.

Para cada constante $a \in [0,\infty]$ tiene asociada una función constante $\mathbb{I}_a \in [0,\infty]^X$ dada por $\mathbb{I}_a(x) = a$, para todo $x \in X$. En este trabajo, se identificará la constante a con la función constante $\mathbb{I}_a$ asociada a a.

Definición 1.8 ([12])**.** *Sea X un conjunto no vacío, $\leq$ una relación binaria en X, $A \subset X$ un subconjunto y $m, M \in X$ puntos. Se dice que m (M, respectivamente) es cota inferior (superior, respectivamente) de A si $m \leq a$ ($a \leq M$, respectivamente) para todo $a \in A$. Se dice que m es el ínfimo (supremo, respectivamente) de A si m (M, respectivamente) es una cota inferior (superior, respectivamente) de A tal que $m^* \leq m$ ($M \leq M^*$, respectivamente) para toda cota inferior (superior, respectivamente) m^* de A.*

En caso de que el ínfimo y el supremo de A existan, serán denotados por $\bigwedge A$ y $\bigvee A$, respectivamente. En particular, cuando $M = \{a,b\}$, $a, b \in X$, considere $a \bigwedge b = \bigwedge\{a,b\} = \bigwedge M$ y $a \bigvee b = \bigvee\{a,b\} = \bigvee M$.

Observe del ejemplo 1.4 que todo subconjunto $A \subset [0,\infty]^X$ donde X es un conjunto no vacío arbitrario, posee una cota inferior (superior respectivamente) dada por $f_i(x) = 0$ ($f_s(x) = \infty$, respectivamente) para todo $x \in X$.

Definición 1.9 ([12]). *Un retículo* $\mathfrak{R} := (\mathfrak{R}, \leq, \bigvee, \bigwedge)$ *está formado por un conjunto no vacío* $\mathfrak{R}$ *asociado a una relación de orden parcial* $\leq$ *de modo que todo subconjunto finito de* $\mathfrak{R}$ *posee un supremo e ínfimo.*

Ejemplo1.5. Dado $[0,\infty]^X$, $X \neq \emptyset$, es un retículo. En efecto, dado un subconjunto finito $R \subset [0,\infty]^X$, defina $\bigvee R, \bigwedge R : X \to [0,+\infty]$, como

$$\bigvee R(x) = \text{máx}\{f(x) : f \in R\} \text{ y } \bigwedge R(x) = \text{mín}\{f(x) : f \in R\}$$

para todo $x \in X$ y además, se tiene que $\bigvee R, \bigwedge R \in [0,+\infty]^X$. Por ejemplo, en la figura 1.5 se representa $\bigvee R$ y $\bigwedge R$ para $R = \{f_1, f_2, f_3\}$.

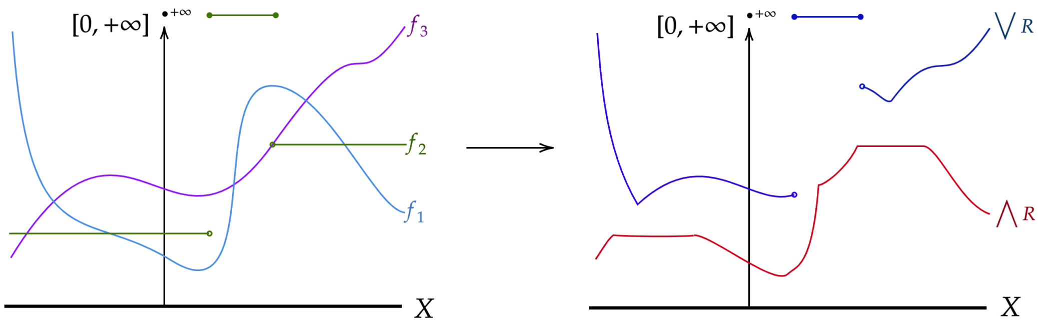


Figura 1.5: Representación de $\bigvee R$ y $\bigwedge R$ para $R = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Definición 1.10 ([12]). *Un retículo* $\mathfrak{R}$ *es completo si todo subconjunto de* $\mathfrak{R}$ *posee ínfimo y supremo.*

Ejemplo1.6. El retículo $[0,\infty]^X = ([0,\infty]^X, \leq, \bigvee, \bigwedge)$ es completo. En efecto, dado un subconjunto $R \subset [0,\infty]^X$. Defina $\bigwedge R : X \to [0,\infty]$ ($\bigvee R : X \to [0,\infty]$, respectivamente) dado por $\bigwedge R(x) = \text{ínf}\{f(x) : f \in R\}$ ($\bigvee R(x) = \sup\{f(x) : f \in R\}$, respectivamente) para todo $x \in X$. Note que para todo $f \in R$ se tiene que $0 \leq f(x) \leq +\infty$ para todo $x \in X$, por lo tanto $\bigwedge R$ y $\bigvee R$ están bien definidos y pertenecen a $[0,\infty]^X$. Sigue fácilmente que $\bigwedge R$ y $\bigvee R$ son el ínfimo y supremo de R respectivamente.

Definición 1.11 ([12]). *Dado un retículo completo* $\mathfrak{R}$. *Se dice que* $\mathfrak{R}$ *es completamente distributivo si cumple la siguiente identidad*

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} f_{i,j}) = \bigvee_{\varphi\in K}(\bigwedge_{i\in I} f_{i,\varphi(i)})$$

donde para cada $i \in I$ *y* $j \in J_i$, $f_{i,j} \in \mathfrak{R}$ *; y* $K = \{\varphi/\varphi : I \to \bigcup_{i\in I} J_i, \varphi(i) \in J_i\}$.

Ejemplo1.7. El retículo completo $[0,\infty]^X = ([0,\infty]^X, \le, \bigvee, \bigwedge)$ es completamente distributivo. En efecto, sea I un conjunto de índices y $\{J_i\}_{i\in I}$ una familia de índices, $K = \{\varphi/\varphi : I \to \bigcup_{i\in I} J_i, \varphi(i) \in J_i\}$ y una familia $\{f_{i,j}\}_{i\in I, j\in J_i} \subset \mathfrak{R}$. Antes de seguir con la demostración de que $[0,\infty]^X$ es completamente distributivo se necesita demostrar la siguiente afirmación:

Observación 1.3. $\inf_{i\in I}\sup_{j\in J_i} f_{i,j}(x) = \sup_{\varphi\in K}\inf_{i\in I} f_{i,\varphi(i)}(x)$.

Demostración. Tomando $\alpha = \inf_{i\in I}\sup_{j\in J_i} f_{i,j}(x)$ y $\beta = \sup_{\varphi\in K}\inf_{i\in I} f_{i,\varphi(i)}(x)$. Por definición de α se tiene que $\alpha \le \sup_{j\in J_i} f_{i,j}(x)$ para todo $i \in I$. Dado $\epsilon > 0$, por definición de supremo, para cada $i \in I$ existe $j_i \in J_i$ tal que $\sup_{j\in J_i} f_{i,j}(x) \le f_{i,j_i}(x) + \epsilon$. Por lo tanto

$$\alpha \le f_{i,j_i}(x) + \epsilon, \text{ para todo } i \in I. \tag{1.1}$$

Tomando $\varphi_0 : I \to \bigcup_{i\in I} J_i, \varphi(i) \in J_i$ definida por $\varphi_0(i) = j_i$. Note que $\varphi_0 \in K$, la relación 1.1 implica

$$\alpha \le \inf_{i\in I}(f_{i,j_i}(x) + \epsilon) = \inf_{i\in I} f_{i,j_i}(x) + \epsilon = \inf_{i\in I} f_{i,\varphi(i)}(x) + \epsilon. \tag{1.2}$$

Por definición de β se tiene que $\beta \ge \inf_{i\in I} f_{i,\varphi(i)}(x)$ para todo $\varphi \in K$. Esto, junto con la desigualdad (1.2), implican que

$$\alpha \le \inf_{i\in I} f_{i,\varphi(i)}(x) + \epsilon \le \beta + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ puede ser tomado arbitrariamente pequeño, se obtiene que $\alpha \le \beta$.

Para demostrar la desigualdad $\beta \le \alpha$, note que, dado $\epsilon > 0$, por definición de ínfimo existe $i_0 \in I$ tal que $\sup_{j\in J_{i_0}} f_{i_0,j}(x) < \alpha + \epsilon/2$. Además, como $\beta = \sup_{\varphi\in K}\inf_{i\in I} f_{i,\varphi(i)}(x)$ existe $\varphi_0 \in K$ tal que $\beta < \inf_{i\in I} f_{i,\varphi_0(i)}(x) + \epsilon/2$. En particular, como $\varphi_0(i_0) \in J_{i_0}$ se tiene

$$\beta < \inf_{i\in I} f_{i,\varphi_0(i)}(x) + \epsilon/2 \le f_{i_0,\varphi_0(i_0)}(x) + \epsilon/2 \le \sup_{j\in J_{i_0}} f_{i_0,j}(x) + \epsilon/2 < \alpha + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ puede ser tomado arbitrariamente pequeño, se obtiene que $\beta \le \alpha$. Esto concluye la demostración de la afirmación. $\square$

Para concluir con la demostración de la distributividad completa $[0,\infty]^X$, note que la Afirmación 1.3 implica que

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} f_{i,j})(x) &= \inf_{i\in I}\sup_{j\in J_i} f_{i,j}(x) \\ &= \sup_{\varphi\in K}\inf_{i\in I} f_{i,\varphi(i)}(x) \\ &= \bigvee_{\varphi\in K}(\bigwedge_{i\in I} f_{i,\varphi(i)}(i). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el retículo completo $([0,\infty]^X,\ \leq, \bigvee, \bigwedge)$ es completamente distributivo.

Definición 1.12 ([12]). *Sea $\mathfrak{R}$ un retículo. Un conjunto $R \subset \mathfrak{R}$ es un ideal en $\mathfrak{R}$ si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Si $f \in R$, $g \in \mathfrak{R}$ y $g \leq f$, entonces $g \in R$.*

2. *Si $R^{'} \subset R$ es un subconjunto finito, entonces $\bigvee R^{'} \in R$*

Ejemplo1.8. Sea $X = \mathbb{Z}$ y $\mathfrak{R} := ([0,\infty]^{\mathbb{Z}},\ \leq, \bigvee, \bigwedge)$ el retículo definido en el ejemplo 1.5 para $X = \mathbb{Z}$. Considere $R = \{f \in [0,\infty]^{\mathbb{Z}} : f(n) \leq 1 \text{ si } n \leq 0.\}$, entonces R es un ideal de $\mathfrak{R} = [0,\infty]^{\mathbb{Z}}$. En efecto:

(1) Sea $f \in R$ y $g : \mathbb{Z} \to [0,\infty]$ tal que $g \leq f$, entonces $g(n) \leq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En particular, para $n \leq 0$ se tiene que

$$g(n) \leq f(n) \leq 1,$$

por lo tanto $g \in R$.

(2) Sea $R^{'} \subset R$ un subconjunto finito. Como R' esta contenido en R se tiene que $g(n) \leq 1$ para todo $n \leq 0$. Entonces si $n \leq 0$, se tiene que

$$\bigvee R^{'}(n) = \max_{g \in R'} g(n) \leq \max_{g \in R'} 1 = 1,$$

esto implica que $\bigvee R^{'} \in R$.

De (1) y (2) se concluye que R es un ideal del retículo $\mathfrak{R} = [0,\infty]^{\mathbb{Z}}$.

Definición 1.13 ([12]). *Sea $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R},\ \leq, \bigvee, \bigwedge)$ un retículo y un conjunto $M \subset \mathfrak{R}$. M es un ideal base en $\mathfrak{R}$ si, para cada $f, g \in M$, existe $\xi \in M$ de modo que $f \bigvee g \leq \xi$.*

Definición 1.14 ([2]). *Dado el retículo $[0,\infty]^X = ([0,\infty]^X,\ \leq, \bigvee, \bigwedge)$, $\mathcal{S} \subset [0,\infty]^X$ y $f \in [0,\infty]^X$. Se dice que:*

1. *f es dominada por $\mathcal{S}$, o que $\mathcal{S}$ domina f, si para cada $\epsilon > 0$, para cada $\delta < \infty$ existe $f_{\epsilon,\delta} \in \mathcal{S}$ tal que $f \bigwedge \delta \leq f_{\epsilon,\delta} + \epsilon$. Se dice también que la familia $\{f_{\epsilon,\delta}\}_{\epsilon,\delta}$ domina f;*

2. *$\mathcal{S}$ es saturado si toda función dominada por $\mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{S}$.*

Ejemplo1.9.

- Sea $\beta > 0$, $\mathcal{S}_1 = \{g \in [0,\infty]^X : g(x) \geq \beta \ \ \forall x \in X\}$ y $f \in [0,\infty]^X$ tal que $f(x) \leq \beta$ para todo $x \in X$. Entonces f es dominada por $\mathcal{S}_1$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ entonces para cada $\delta < \infty$ tomando $f_{\epsilon,\delta} \in \mathcal{S}_1$ como la función constante igual $f_{\epsilon,\delta}(x) = \beta$ para todo $x \in X$, entonces

$$f(x) \wedge \delta \leq f(x) \leq \beta = f_{\epsilon,\delta}(x) < f_{\epsilon,\delta}(x) + \epsilon.$$

Por lo tanto $\mathcal{S}_1$ domina a f. Sin embargo note que $\mathcal{S}_1$ no es un conjunto saturado, pues, a pesar de que f es dominada por $\mathcal{S}_1$, se tiene que $f \notin \mathcal{S}_1$.

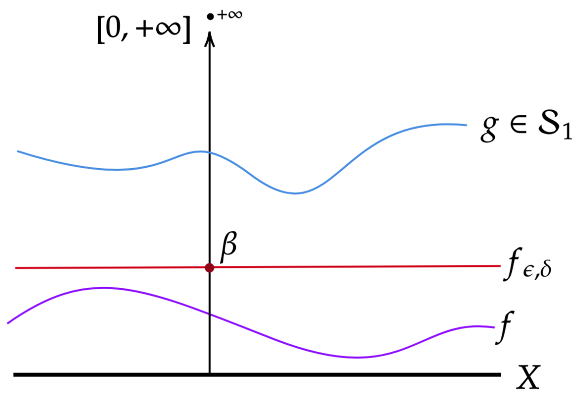


Figura 1.6: f es dominada por el conjunto $\mathcal{S}_1$.

- Sea $\alpha > 0$, $\mathcal{S}_2 = \{g \in [0,\infty]^X : g(x) \leq \alpha \ \ \forall x \in X\}$, entonces $\mathcal{S}_2$ es un conjunto saturado. De hecho, si $f \in [0,\infty]^X$ es dominada por f entonces para cada $\epsilon > 0$ y $0 < \delta < \infty$ existe $f_{\epsilon,\delta} \in \mathcal{S}_2$ tal que $f \wedge \delta \leq f_{\epsilon,\delta} + \epsilon$. Como $f_{\epsilon,\delta} \in \mathcal{S}_2$ entonces $f_{\epsilon,\delta} \leq \alpha$, entonces

$$f \wedge \delta \leq \alpha + \epsilon, \tag{1.3}$$

Como $\epsilon > 0$ puede ser tomado arbitrariamente en 1.3 entonces

$$f \wedge \delta \leq \alpha. \tag{1.4}$$

Finalmente, como $\delta < \infty$ en 1.4 es tomado arbitrariamente, se puede tomar $\delta > \alpha$, entonces $f \wedge \delta = f$. De esto y por 1.4 se tiene que $f \leq \alpha$, por lo tanto, $f \in \mathcal{S}_2$, o sea, toda función dominada por $\mathcal{S}_2$ pertenece a $\mathcal{S}_2$, lo que implica $\mathcal{S}_2$ es un conjunto saturado.

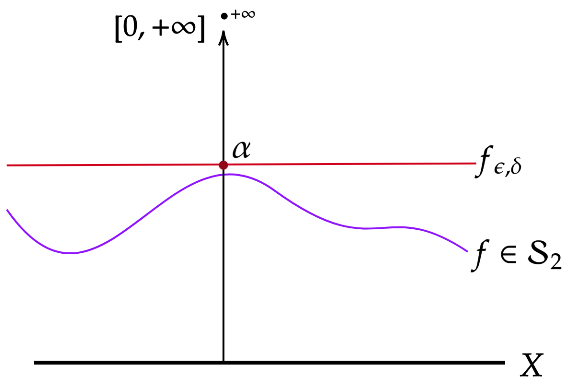


Figura 1.7: Conjunto saturado $\mathcal{S}_2$.

Sistemas de localización

Definición 1.15 ([9]). *Sea X un conjunto no vacío. Una familia de ideales $\{\mathcal{S}_x\}_{x\in X}$ en $[0,\infty]^X$ es un sistema de localización en X si para cada $x \in X$ si satisface las siguientes condiciones:*

(s_1) $f(x) = 0$ *para todo* $f \in \mathcal{S}_x$.

(s_2) $\mathcal{S}_x$ *es saturado.*

(s_3) *Para cada* $f \in \mathcal{S}_x$, $\epsilon > 0$ *y* $\delta < \infty$ *existe* $(f_w)_{w\in X} \in \prod_{w\in X} \mathcal{S}_w$ *tal que* $f(y) \bigwedge \delta \leq f_x(z) + f_z(y) + \epsilon$, *para todo* $y, z \in X$.

Dado un conjunto no vacío X, un sistema de localización $\{\mathcal{S}_x\}_{x\in X}$ se denotará por $\mathcal{S}$. Para cada $x \in X$, si $f \in \mathcal{S}_x$, se dice que f es una distancia local en x.

Ejemplo1.10. Sea $X = \mathbb{R}$, para cada $x \in \mathbb{R}$, defina

$$\mathcal{S}_x = \{f \in [0,\infty]^{\mathbb{R}} : \forall A \subset \mathbb{R}, \inf_{a\in A} f(a) \leq \inf_{a\in A} |x-a|\}.$$

Entonces $\mathcal{S} = \left\{\mathcal{S}_x : x \in \mathbb{R}\right\}$ es un sistema de localización en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces:

(s_1) Si $f \in \mathcal{S}_x$, tomando $A = \{x\}$ entonces $f(x) \leq |x - x| = 0$.

(s_2) Sea $f \in [0,\infty]^{\mathbb{R}}$ una función dominada por S_x. Entonces para cada $\epsilon > 0$, $\delta < \infty$ existe $f_{\epsilon,\delta} \in \mathcal{S}_x$ tal que

$$f \bigwedge \delta \leq f_{\epsilon,\delta} + \epsilon.$$

Para cada $A \subset \mathbb{R}$ tome $\delta > f(a_0)$ para algún $a_0 \in A$, entonces $\inf_{a \in A}(f(a) \bigwedge \delta) = \inf_{a \in A} f(a)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \inf_{a \in A} f(a) &= \inf_{a \in A}(f(a) \bigwedge \delta) \\ &\leq \inf_{a \in A} f_{\epsilon,\delta}(a) + \epsilon \\ &\leq \inf_{a \in A} |x - a| + \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ puede ser tomado arbitrariamente pequeño, concluimos que $\inf_{a \in A} f(a) \leq \inf_{a \in A} |x-a|$, lo que implica que $f \in \mathcal{S}_x$, o sea, $\mathcal{S}_x$ es saturado.

(s_3) Dado $f \in \mathcal{S}_x$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$. Para cada $w \in \mathbb{R}$, defina $f_w : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, donde

$$f_w(a) = |w - a|.$$

Dado cualquier $y, z \in \mathbb{R}$, tomando $A = \{y\}$, note que

$$f(y) = \inf_{a \in A} f(a) \leq \inf_{a \in A} |x - a| = |x - y|.$$

Por lo tanto

$$f(y) \bigwedge \delta \leq f(y) \leq |x - y| \leq |x - z| + |z - y| = f_x(z) + f_z(y) \leq f_x(z) + f_z(y) + \epsilon.$$

□

Definición 1.16 ([9]). *Sea X un conjunto no vacío. Una familia de ideales base $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ en $[0, \infty]^X$ es un sistema de localización base en X si para cada $x \in X$ se satisface las siguientes condiciones:*

1. *$f(x) = 0$, para todo $f \in \mathcal{B}_x$.*

2. *Para cada $f \in \mathcal{B}_x$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$ existe $(f_w)_{w \in X} \in \prod_{w \in X} \mathcal{S}_w$ tal que $f(y) \bigwedge \delta \leq f_x(z) + f_z(y) + \epsilon$, para todo $y, z \in X$.*

Observe que todo sistema de localización también es un sistema de localización base. Para cada $\mathcal{B} \subset [0, \infty]^X$, se define el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} S(\mathcal{B}) &= \{f \in [0, \infty]^X : \mathcal{B} \text{ domina } f\} \\ &= \{f \in [0, \infty]^X : \text{Para cada } \epsilon > 0, \text{ para cada } \delta < \infty \text{ existe } f_{\epsilon,\delta} \in \mathcal{B} \text{ tal que } f \wedge \delta \leq f_{\epsilon,\delta} + \epsilon\} \end{aligned}$$

Se dice que $S(\mathcal{B})$ es la saturación de $\mathcal{B}$.

Definición 1.17 ([9]). *Una familia de ideales base $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ en $[0, \infty]^X$ es una base para un sistema de localización $\{S_x\}_{x \in X}$ en X si $S(\mathcal{B}_x) = S_x$ para cada $x \in X$. Se dice también que $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ genera $\{S_x\}_{x \in X}$ o que $\{S_x\}_{x \in X}$ es generada por $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$.*

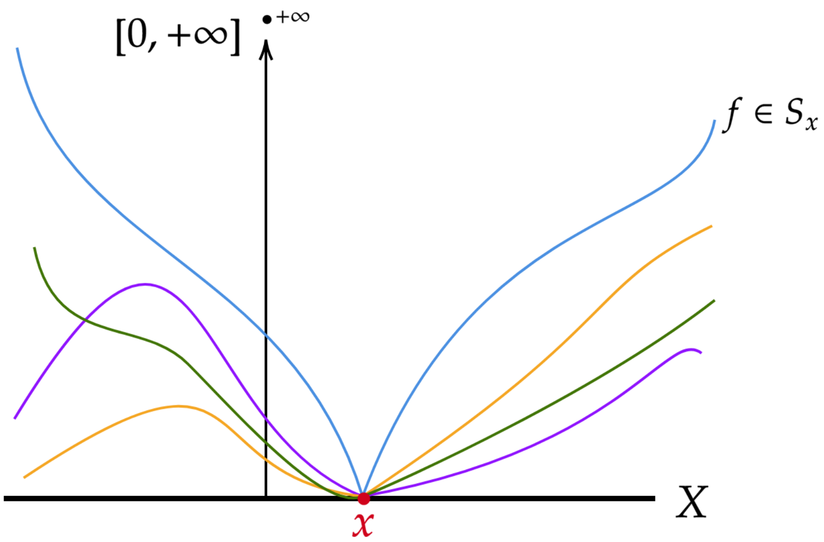


Figura 1.8: Elementos del ideal $\mathcal{S}_x$.

1.3.3 Calibre

En esta subsección se define una estructura que se puede comparar con la de definir un espacio uniforme a través de una familia de p-métricas, llamado *Calibre*. Pero antes se necesita introducir la noción de pseudo-casi-métrica.

Definición 1.18 ([9])**.** *Una aplicación*

$$d : X \times X \to [0, \infty]$$

es llamada de una métrica en X si satisface las siguientes propiedades:

(d_1) $d(x, x) = 0$

(d_2) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

(d_3) $d(x, y) = d(y, x)$

(d_4) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

(d_5) $d(x, y) < \infty$

para cualesquier $x, y, z \in X$.

El par (X, d), donde d es una métrica en X, es llamado espacio métrico. La propiedad (d_2) es llamada desigualdad triangular, la (d_3) simetría, la propiedad (d_4) separación (de puntos) y la (d_5) finitud.

Observación 1.4.

- *Si d solo cumple $(d_1), (d_2), (d_3)$ y (d_4), d es llamada de una métrica extendida, o una ∞-métrica.*

- *Si d cumple solamente con $(d_1), (d_2), (d_3)$ y (d_5), d es llamada de una pseudo métrica, o una p-métrica.*

- *Si d cumple únicamente con$(d_1), (d_2), (d_4)$ y (d_5), d es llamada de una casi-métrica, o una q-métrica.*

- *Si d satisface las propiedades (d_1) y (d_2) entonces d es llamada de una ∞-pseudo-casi-métrica, o una ∞pq-métrica. El par (X, d), donde d es una ∞pq-métrica en X, se llama de un espacio pseudo-casi-métrico extendido, o un espacio ∞pq-métrico.*

Se denotará por $pqM^\infty(X)$ al conjunto de todas las ∞pq-métricas en X, o sea,

$$pqM^\infty(X) := \{d : X \times X \to [0, \infty] : d \text{ es una } \infty pq - \text{métrica en} X\}.$$

Ejemplo1.11. Sea ρ una distancia en un conjunto X. Considere $d_\rho : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$ definida como

$$d_\rho(x, y) = \rho(x, \{y\}),$$

entonces $d_\rho \in pqM^\infty(X)$. En efecto, por (p_1) de la definición 1.6 se tiene que

$$d_\rho(x, x) = \rho(x, \{x\}) = 0.$$

Por otro lado, si $x, y, z \in X$ tomando $A = \{z\}$ y $B = \{y\}$ en el ítem (4) de la proposición 1.5, se tiene que

$$\begin{aligned} d_\rho(x, z) &= \rho(x, \{z\}) \\ &\leq \rho(x, \{y\}) + \sup\{\rho(b, \{z\}) : b \in \{y\}\} \\ &= \rho(x, \{y\}) + \rho(y, \{z\}) \\ &= d_\rho(x, y) + d_\rho(y, z). \end{aligned}$$

El conjunto $pqM^{\infty}(X)$ con la relación de orden usual para funciones es un retículo, pues dado cualquier conjunto finito $L \subset pqM^{\infty}(X)$ entonces $\bigvee L : X \times X \to [0, \infty]$ y $\bigwedge L : X \times X \to [0, \infty]$ están dadas por

$$\begin{aligned} \bigvee L(x, y) &= \sup\{d(x, y) : d \in L\} \\ \bigwedge L(x, y) &= \text{ínf}\{d(x, y) : d \in L\}. \end{aligned}$$

Dado un conjunto X no vacío, $x, y \in X$ y $d \in pqM^{\infty}(X)$, defina las funciones $d(x, \cdot), d(\cdot, y) : X \to [0, \infty]$ como $d(x, \cdot)(z) = d(x, z)$, $d(\cdot, y)(z) = d(z, y)$ para todo $z \in X$ respectivamente. Por definición de $[0, \infty]^X$, es claro que las funciones $d(x, \cdot), d(\cdot, y)$ pertenecen al retículo $[0, \infty]^X$.

Definición 1.19 ([9]). *Sean $\mathfrak{C} \subset pqM^{\infty}(X)$ y $d \in pqM^{\infty}(X)$. Se dice que d es dominada por $\mathfrak{C}$, o que $\mathfrak{C}$ domina d, si para cada $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$ existe $d_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}$ tal que $d(x, a) \wedge \delta \leq d_{x,\epsilon,\delta}(x, a) + \epsilon$, para todo $a \in X$. En este caso, se dice que la familia $\{d_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}\}_{\delta>0,\epsilon>0}$ domina d.*

Ejemplo1.12. Sea X un conjunto no vacío y $d_0 \in pqM^{\infty}(X)$. Sea $\mathfrak{C} \subset pqM^{\infty}(X)$ tal que exista $d_1 \in \mathfrak{C}$ tal que $d_0(x, y) \leq d_1(x, y)$ para todo $x, y \leq X$, entonces d_0 es dominada por el conjunto $\mathfrak{C}$. En efecto, sea $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$. Como $d_1 \in \mathfrak{C}$, tomando $d_{x,\epsilon,\delta} = d_1$ se tiene que:

$$d_0(x, a) \wedge \delta \leq d_0(x, a) \leq d_1(x, a) = d_{x,\epsilon,\delta}(x, a) < d_{x,\epsilon,\delta}(x, a) + \epsilon,$$

para todo $a \in X$. Esto implica que todo d_0 es dominada por $\mathfrak{C}$.

Definición 1.20 ([9]). *Un conjunto $\mathfrak{C} \subset pqM^{\infty}(X)$ es saturado si toda pq-métrica dominada por $\mathfrak{C}$ pertenece a $\mathfrak{C}$.*

Ejemplo1.13. Para cualquier conjunto $X \neq \emptyset$ se tiene que $pqM^{\infty}(X)$ es saturado. En efecto, sea $d \in pqM^{\infty}(X)$, $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$, tomando $d_{x,\epsilon,\delta} = d$ se tiene que:

$$d(x, a) \wedge \delta \leq d(x, a) < d(x, a) + \epsilon,$$

para todo $a \in X$. Por lo tanto, d es dominado por el conjunto $pqM^{\infty}(X)$ para todo $d \in pqM^{\infty}(X)$, o sea, el conjunto $pqM^{\infty}(X)$ es saturado.

Definición 1.21 ([9]). *Sea $\mathfrak{C} \subset pqM^{\infty}(X)$. El conjunto $\mathfrak{C}$ es un calibre en X si satisface las siguientes condiciones:*

- $\mathfrak{C}$ *es un ideal en* $pqM^{\infty}(X)$*;*
- $\mathfrak{C}$ *es saturado.*

Ejemplo1.14. Sea X un conjunto no vacío, $d_0 \in pqM^{\infty}(X)$ y $\mathfrak{C}_0 := \{d \in pqM^{\infty}(X) : d(x,y) \leq d_0(x,y)\ \forall x, y \in X\}$. El conjunto $\mathfrak{C} := \{d \in pqM^{\infty}(X) : d$ es dominada por $\mathfrak{C}_{\mathfrak{o}}\}$ es un calibre. En efecto, por el ejemplo 1.12 se tiene que todo elemento $d \in \mathfrak{C}_0$ es dominada por $\mathfrak{C}_0$, por lo tanto, $\mathfrak{C}_0 \subset \mathfrak{C}$. Si $d \in pqM^{\infty}(X)$ es dominada por $\mathfrak{C}$, entonces , dado $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$ existe $d_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}$ tal que $d(x,a) \wedge \delta \leq d_{x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon$, para todo $a \in X$. Como $d_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}$ entonces $d_{x,\epsilon,\delta}$ es dominada por $\mathfrak{C}_0$. Por definición de $\mathfrak{C}_0$ se tiene que $d_{x,\epsilon,\delta} \leq d_0$, por lo tanto,

$$d(x,a) \wedge \delta \leq d_{x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon \leq d_0(x,a) + \epsilon,$$

para todo $a \in X$. Esto implica que d es dominada por $\mathfrak{C}_0$, por lo tanto, $d \in \mathfrak{C}$, y como $d \in pqM^{\infty}(X)$ fue tomado arbitrario, se tiene que $\mathfrak{C}$ es saturado.

Para demostrar que $\mathfrak{C}$ es un ideal, primero se verificará que si $d' \in \mathfrak{C}$ y $d \in pqM^{\infty}(X)$ tal que $d \leq d'$ entonces $d \in \mathfrak{C}$. En efecto, como d' es dominada por $\mathfrak{C}_0$ entonces, para cada $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$ existe $d'_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}_0$ tal que $d'(x,a) \wedge \delta \leq d'_{x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon$, para todo $a \in X$. Como $d \leq d'$, se tiene que

$$d(x,y) \wedge \delta \leq d'(x,y) \wedge \delta \leq d'_{x,\epsilon,\delta}(x,y) + \epsilon.$$

Esto implica que d es dominada por $\mathfrak{C}_0$ y por lo tanto, $d \in \mathfrak{C}$. Resta demostrar que si $R \subset \mathfrak{C}$ es un conjunto finito entonces $\bigvee R \in \mathfrak{C}$. En efecto, como R es finito, existe $d_1, \ldots, d_l \in \mathfrak{C}$ tal que $R = \{d_1, \ldots, d_l\}$. Como $d_1, \ldots, d_l$ son dominadas por $\mathfrak{C}_0$, entonces para cada $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$ existe $d_{i,x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}_0$ tal que $d_i(x,a) \wedge \delta \leq d_{i,x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon$, para todo $a \in X$. Como $d_{i,x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}_0$, por definición de $\mathfrak{C}_0$ se tiene que $d_{i,x,\epsilon,\delta} \leq d_0$ para todo $i = 1, \ldots, l$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\bigvee R(x,a) \wedge \delta &= \Big(d_1(x,a) \vee \ldots \vee d_l(x,a)\Big) \wedge \delta \\
&= (d_1(x,a) \wedge \delta) \vee \ldots \vee (d_l(x,a) \wedge \delta) \\
&\leq (d_{1,x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon) \vee \ldots \vee (d_{l,x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon) \\
&\leq (d_0(x,a) + \epsilon) \vee \ldots \vee (d_0(x,a) + \epsilon) \\
&\leq d_0(x,a) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto implica que $\bigvee R$ es dominada por $\mathfrak{C}_0$, por lo tanto $\bigvee R \in \mathfrak{C}$. Esto completa la demostración que $\mathfrak{C}$ es un calibre en $pqM^{\infty}(X)$

Ahora, se pasa a definir subconjuntos de $pqM^{\infty}(X)$ con características cercanas a la de un calibre.

Definición 1.22 ([9])**.** *Sea $\mathfrak{D} \subset pqM^{\infty}(X)$. El conjunto $\mathfrak{D}$ es un calibre base en X si es un ideal base en $pqM^{\infty}(X)$.*

Observe que todo calibre es un calibre base. Además, para cada $\mathfrak{D} \subset pqM^{\infty}(X)$, se define el siguiente conjunto:

$$
\begin{aligned}
S(\mathfrak{D}) &= \{d \in pqM^{\infty}(X) : d \text{ es dominada por } \mathfrak{D}\} \\
&= \{d \in pqM^{\infty}(X) : \forall x \in X, \epsilon > 0, \delta < \infty,\ \exists d_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{D} \text{ tal que } d(x,.) \wedge \delta \leq d_{x,\epsilon,\delta}(x,.) + \epsilon\}
\end{aligned}
$$

el cual se llamará la saturación de $\mathfrak{D}$. Observe que $\mathfrak{D} \subset S(\mathfrak{D})$ y si $\mathfrak{C}$ es un calibre en X, entonces $S(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C}$.

Ejemplo1.15. Sea X un conjunto no vacío, $d_0 \in pqM^{\infty}(X)$ y $\mathfrak{C}_0$ como en el ejemplo 1.14. Por el ejemplo 1.14 se sabe que $\mathfrak{C} := \{d \in pqM^{\infty}(X) : d \text{ es dominada por } \mathfrak{C}_0\}$ es un calibre en $pqM^{\infty}(X)$. Ahora se demostrará que $\mathfrak{C}$ es un calibre base en $pqM^{\infty}(X)$. En efecto, sean $d, d' \in \mathfrak{C}$, entonces para cada $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$ existe $d_{x,\epsilon,\delta}, d'_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}_0$ tal que $d(x,a) \wedge \delta \leq d_{x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon$ y $d'(x,a) \wedge \delta \leq d'_{x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon$, para todo $a \in X$. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
d(x,y) \vee d'(x,y) &\leq (d_{x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon) \vee (d'_{x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon) \\
&\leq (d_{x,\epsilon,\delta}(x,a) \vee d'_{x,\epsilon,\delta}(x,a)) + \epsilon \\
&\leq (d_0(x,a) \vee d_0(x,a)) + \epsilon \\
&\leq d_0(x,a) + \epsilon.
\end{aligned}
$$

Como $d_0 \in \mathfrak{C}$, y $d, d' \in \mathfrak{C}$ fueron tomados arbitrariamente, se tiene que $\mathfrak{C}$ es un ideal base. Esto completa la demostración de que $\mathfrak{C}$ es un calibre base en $pqM^{\infty}(X)$.

Definición 1.23 ([9])**.** *Sea $\mathfrak{C} \subset pqM^{\infty}(X)$ un calibre y $\mathfrak{D} \subset pqM^{\infty}(X)$. $\mathfrak{D}$ es una base para $\mathfrak{C}$ en X si $S(\mathfrak{D}) = \mathfrak{C}$. En este caso, se dice que $\mathfrak{D}$ genera $\mathfrak{C}$ o que $\mathfrak{C}$ es generado por $\mathfrak{D}$.*

En el siguiente ejemplo, se dejará en evidencia que es posible que un calibre sea generado por diferentes calibres base.

Ejemplo1.16. Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la métrica usual $d_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty]$, donde $d_{\mathbb{R}}(a,b) = |a-b|$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $\mathfrak{D} = \{d_{\mathbb{R}}\}$ y $\mathfrak{C}$ el calibre generado por $\mathfrak{D}$, o sea, $\mathfrak{C} = S(\mathfrak{D})$. Entonces para todo conjunto de números reales $A \subset [0,1]$ tal que $\sup A = 1$

$$\mathfrak{D}_A := \{ad_{\mathbb{R}} \mid a \in A\}$$

es un calibre base tal que $S(\mathfrak{D}_A) = \mathfrak{C}$.

Demostración. Es claro que $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}_A$ son ideales bases. Ahora para probar que $S(\mathfrak{D}) = S(\mathfrak{D}_A)$ primero se probará que $S(\mathfrak{D}_A) \subset S(\mathfrak{D})$. Considere $d \in S(\mathfrak{D}_A)$. Entonces para todo $x \in X$, para todo $\epsilon > 0$ y para todo $\omega < \infty$, existe $a \in A$ tal que

$$d(x,\cdot) \wedge \omega \leq a d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon$$

Por lo tanto, para todo $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \forall \omega < \infty$

$$\begin{aligned} d(x,\cdot) \wedge \omega &\leq a d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon \\ &\leq \big(\sup A . d_{\mathbb{R}}(x,\cdot)\big) + \epsilon \\ &= d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon \end{aligned}$$

Esto significa que d es dominado por $\mathfrak{D}$, en consecuencia $d \in S(\mathfrak{D})$.

Para probar la otra inclusión, considere $d_{\mathbb{R}}$ y sea $x \in X, \epsilon > 0$ y $\omega < \infty$. Entonces se tiene que

$$d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) \wedge \omega \leq d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon = \sup A . d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon,$$

como $\sup A = 1$, se puede tomar $a \in A$, tal que

$$a \geq \frac{\omega - \epsilon}{\omega}.$$

Finalmente, se verificará que $d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) \wedge \omega \leq a d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon$. En efecto:

- Si $\omega \leq d_{\mathbb{R}}(x,\cdot)$ entonces $d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) \wedge \omega = \omega$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} a d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon &\geq a.\omega + \epsilon \\ &\geq \frac{\omega - \epsilon}{\omega} . \omega + \epsilon \\ &= \omega \\ &= d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) \wedge \omega . \end{aligned}$$

- Si $\omega \geq d_{\mathbb{R}}(x,\cdot)$ entonces $d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) \wedge \omega = d_{\mathbb{R}}(x,\cdot)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} a d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon &\geq \frac{\omega - \epsilon}{\omega} . d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon \\ &= d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) - \frac{\epsilon}{\omega} . d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon \\ &= d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) + \epsilon(1 - \frac{d_{\mathbb{R}}(x,\cdot)}{\omega}) \\ &\geq d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) \\ &= d_{\mathbb{R}}(x,\cdot) \wedge \omega . \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $d_{\mathbb{R}} \in S(\mathfrak{D}_A)$. □

La siguiente proposición muestra que los calibres base y las bases para calibres son conceptos equivalentes.

Lema 1.1. *Sea X un conjunto no vacío.*

1. *Si $\mathfrak{D}$ es un calibre base en X, entonces $S(\mathfrak{D})$ es un calibre de X generado por $\mathfrak{D}$.*

2. *Si $\mathfrak{D}$ es una base del calibre $\mathfrak{C}$ en X, entonces $\mathfrak{D}$ es un calibre base de X.*

Demostración. (Ver [9], pág 19). □

1.3.4 Cuadros

Definición 1.24 ([9])**.** *Sea $\mathcal{Q} \subseteq [0,\infty]^X$. Se dice que $\mathcal{Q}$ es un cuadro en X si las siguientes propiedades son satisfechas:*

($\mathcal{Q}_1$) $\vee Q \in \mathcal{Q}$

($\mathcal{Q}_2$) $f \wedge g \in \mathcal{Q}$

($\mathcal{Q}_3$) $f + c \in \mathcal{Q}$*, para todo* $c \in [0,\infty]$

($\mathcal{Q}_4$) $f - c \in \mathcal{Q}$*, para todo* $c \in [0, \operatorname{ínf}_{x\in X} f(x)]$

para cualquier $Q \subseteq \mathcal{Q}$ y $f, g \in [0,\infty]^X$.

Los elementos de un cuadro $\mathcal{Q}$ son llamados de aplicaciones regulares.

Ejemplo1.17. Sea X un conjunto no vacío, entonces $\mathcal{Q} = \{f \in [0,\infty]^X : f \text{ es una función constante }\}$ es un cuadro en X, puesto que, supremo, ínfimo, suma y diferencia de funciones constante, continúa siendo una función constante.

Ejemplo1.18. Tome una función $g_0 \in [0,\infty]^X$ entonces el conjunto de las traslaciones de g_0 es un cuadro en X, o sea, el conjunto

$$\mathcal{Q} = \{f \in [0,\infty]^X : f = g_0 + c' \text{para alguna constante } c' \in \mathbb{R}\}$$

es un cuadro sobre X, puesto que, supremo, ínfimo, suma y diferencia de traslaciones, continúa siendo una traslación.

Proposición 1.6 ([9]). *Sea $\mathcal{Q} \subset [0, \infty]^X$ un cuadro en X. Entonces:*

(i) $\mathcal{Q}$ contiene a todas las aplicaciones constantes;

(ii) $(f - \alpha) \vee 0 \in \mathcal{Q}$ para cualquier $f \in \mathcal{Q}$ y $\alpha \in [0, \operatorname{ínf}_{x \in X} f(x)]$.

Demostración. (i) Sea $c \in [0, \infty]$ y $\mathbb{I}_c$ la función constante asociada a c. Tomando $Q = \emptyset$ en $\mathcal{Q}_1$ de la definición 1.24 se tiene que $\mathbb{I}_0 \in \mathcal{Q}$, luego tomando $f = \mathbb{I}_0$ en $\mathcal{Q}_3$ se tiene que $\mathbb{I}_c \in \mathcal{Q}$.

(ii) Sea $\alpha \in [0, \operatorname{ínf}_{x \in X} f(x)]$, entonces por el ítem (i) se tiene que $\mathbb{I}_\alpha \in \mathcal{Q}$, luego por $\mathcal{Q}_1$ se tiene que $f \vee \alpha \in \mathcal{Q}$. Note que $\alpha \in [0, \operatorname{ínf}_{x \in X} (f \vee \alpha)(x)]$, por lo tanto

$$(f \vee \alpha) - \alpha \in \mathcal{Q}. \tag{1.5}$$

Ahora, note que $(f - \alpha) \vee 0 = (f \vee \alpha) - \alpha$. En efecto, sea $x \in X$ entonces

$$\begin{aligned} f(x) \vee \alpha - \alpha &= \begin{cases} f(x) - \alpha, & \text{si } f(x) \geq \alpha \\ 0, & \text{si } f(x) \leq \alpha \end{cases} \\ &= (f(x) - \alpha) \vee 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Finalmente, de 1.5 y 1.6 se concluye que $(f - \alpha) \vee 0 \in \mathcal{Q}$. □

Capítulo 2:

Espacios de Aproximación

En topología, una rama de las matemáticas, los espacios de aproximación son una generalización de los espacios métricos, basados en distancias punto a conjunto, en lugar de distancias punto a punto. Fueron presentados por Robert Lowen en 1989, en una serie de artículos sobre teoría del enfoque entre 1988 y 1995. En este capítulo, se formaliza el concepto de espacio de aproximación. También se definirá una estructura similar a un operador límite, se dará algunos ejemplos de aproximaciones en el conjunto $[0, \infty]^X$.

2.1 Espacios de aproximación

Definición 2.1 ([9]). *Sea ρ una distancia sobre X. El par (X, ρ) es llamado espacio de aproximación.*

Ejemplo2.1. Sea $\mathbb{P} := [0, \infty]$, la aplicación

$$\rho_{\mathbb{P}} : [0, \infty] \times 2^{[0,\infty]} \to [0, \infty]$$
$$(x, A) \mapsto \begin{cases} (x - \sup A) \vee 0, & A \neq \emptyset \\ \infty, & A = \emptyset \end{cases}$$

es una distancia en $\mathbb{P}$ y por lo tanto $([0, \infty], \rho_{\mathbb{P}})$ es un espacio de aproximación. En efecto:

(p_1) Sea $x \in [0, \infty]$, entonces $\rho_{\mathbb{P}}(x, \{x\}) = (x - \sup\{x\}) \vee 0 = 0$.

(p_2) Para cualquier $x \in X$ por definición se tiene que $\rho_{\mathbb{P}}(x, \emptyset) = \infty$.

(p_3) Sea $x \in X$ y $A, B \in 2^X$, sin pérdida de generalidad, suponga que A y B son conjuntos no vacíos y que $\sup A \cup B = \sup A$, entonces $\sup B \leq \sup A$ y $(x - \sup A) \leq (x - \sup B)$, o sea,

$$\rho_{\mathbb{P}}(x, A) = (x - \sup A) \vee 0 \leq (x - \sup B) \vee 0 = \rho_{\mathbb{P}}(x, B).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{P}}(x, A \cup B) &= (x - \sup(A \cup B)) \vee 0 \\ &= (x - \sup A) \vee 0 \\ &= \rho_{\mathbb{P}}(x, A) = \text{mín}\{\rho_{\mathbb{P}}(x, A), \rho_{\mathbb{P}}(x, B)\}. \end{aligned}$$

(p_4) Sea $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Note que en este caso $\sup A^{[\epsilon]} = \sup A + \epsilon$, entonces

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{P}}(x, A^{[\epsilon]}) &= (x - \sup A^{[\epsilon]}) \vee 0 \\ &= (x - \sup A - \epsilon) \vee 0 \\ &\geq (x - \sup A) \vee 0 \ - \ \epsilon \\ &\geq \rho_{\mathbb{P}}(x, A) - \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $([0, \infty], \rho_{\mathbb{P}})$ es un espacio de aproximación.

2.2 Estructuras asociadas

En este capítulo, se verá que las estructuras sobre un conjunto definidas en el capítulo 1, a pesar de que son conceptualmente muy diferentes, son equivalentes.

Una estructura derivada de otra se denominará estructura asociada. Las transiciones que se realizarán se muestran en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \text{Distancia} & \Longleftrightarrow & \text{Calibre} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \text{Cuadro} & & \text{Sistema de Localización} \end{array}$$

2.2.1 Distancias y Calibres

En esta sección se demostrará que las distancias y calibres son estructuras asociadas. Es decir, una estructura induce la otra y viceversa.

Teorema 2.1 ([9]). *Sea ρ una distancia en un conjunto X. Entonces la colección:*

$$\mathfrak{C}_\rho = \{d \in pqM^\infty(X) : \textit{ para todo } A \in 2^X, \textit{ para todo } x \in X \textit{ se tiene que } \inf_{a\in A} d(x,a) \leq \rho(x,A)\}$$

es un calibre en X.

Demostración. Para probar que $\mathfrak{C}_\rho$ es un calibre debemos probar primero que $\mathfrak{C}_\rho$ es un ideal de $pqM^\infty(X)$ y es saturado. En efecto:

1. Sea $d \in \mathfrak{C}_\rho$ y $d' \in pqM^\infty(X)$ tal que $d' \leq d$, entonces

$$\inf_{a\in A} d'(x,a) \leq \inf_{a\in A} d(x,a) \leq \rho(x,A),$$

por lo tanto, $d' \in \mathfrak{C}_\rho$.

2. Sea $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}_\rho$ un subconjunto finito, $x \in X$ y $A \in 2^X$, entonces $\sup_{d\in\mathfrak{D}} d \in \mathfrak{C}_\rho$, donde $(\sup_{d\in\mathfrak{D}} d)(x,a) := \sup_{d\in\mathfrak{D}} d(x,a)$. En efecto, por distributividad completa, se tiene que:

$$\begin{aligned}\inf\{(\sup_{d\in\mathfrak{D}} d)(x,a) : a \in A\} &= \inf\{\sup_{d\in\mathfrak{D}} d(x,a) : a \in A\} \\ &= \sup\{\inf_{a\in A} \varphi(a)(x,a) : \varphi \in \mathfrak{D}^A\}.\end{aligned}$$

Sea $\varphi \in \mathfrak{D}^A$ fijado arbitrariamente, se tiene que $A = \bigcup_{d\in\mathfrak{D}} \varphi^{-1}(d)$ y además:

$$\begin{aligned}\inf\{\varphi(a)(x,a) : a \in A\} &= \inf\{\inf_{a\in\varphi^{-1}(d)} d(x,a) : d \in \mathfrak{D}\} \\ &\leq \inf\{\rho(x,\varphi^{-1}(d)) : d \in \mathfrak{D}\} \\ &= \min\{\rho(x,\varphi^{-1}(d)) : d \in \mathfrak{D}\}, \text{ ya que } \mathfrak{D} \text{ es finito .} \\ &= \rho(x, \bigcup_{d\in\mathfrak{D}} \varphi^{-1}(d)), \text{ por la proposición 1.5, Item 3.} \\ &= \rho(x,A).\end{aligned}$$

Siendo $\varphi \in \mathfrak{D}^A$ arbitrario se obtiene que $\sup\{\inf_{a\in A} \varphi(a)(x,a) : \varphi \in \mathfrak{D}^A\} \leq \rho(x,A)$. Es decir,

$$\inf_{a\in A}\{(\sup_{d\in\mathfrak{D}}\{d\})(x,a)\} \leq \rho(x,A)$$

Como consecuencia, se tiene que $\sup_{d\in\mathfrak{D}}\{d\} \in \mathfrak{C}_\rho$, para todo subconjunto finito $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}_\rho$.

3. Sea $d \in pqM^\infty(X)$ dominada por $\mathfrak{C}_\rho$ y $A \in 2^X$ un subconjunto no vacío y $x \in X$ un punto fijado arbitrariamente. Entonces, para cada $a \in A$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$ existe $d_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}_\rho$ tal que $d(x,a) \wedge \delta \leq d_{x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon$ lo cual implica que:

$$\inf\{d(x,a) \wedge \delta\} \leq \inf\{d_{x,\epsilon,\delta}(x,a)\} + \epsilon \leq \rho(x,A) + \epsilon$$

Siendo $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$ arbitrarios se obtiene que $\inf\{d(x,a)\} \leq \rho(x,A)$, en consecuencia $d \in \mathfrak{C}_\rho$.

Los tres ítems anteriores demuestran que $\mathfrak{C}_\rho$ es un calibre en X.

□

Ahora se demostrará que toda distancia sobre un conjunto induce una ∞pq métrica sobre dicho conjunto.

Proposición 2.1 ([9]). *Si $\rho\colon X \times 2^X \longrightarrow [0,\infty]$ es una distancia sobre X y $\mathfrak{C}$ el calibre asociado a ρ, entonces para cada $\delta < \infty$ y $B \subset X$ la función $d_{\delta,B}\colon X \times X \longrightarrow [0,\infty]$, dada por*

$$d_B^\delta(x,y) = (\rho(x,B) \wedge \delta - \rho(y,B) \wedge \delta) \vee 0$$

es una ∞pq-métrica que pertenece al calibre asociado a ρ.

Demostración. Es claro que d_B^δ es una ∞pq-métrica. Por el Teorema 2.1, para demostrar $d_B^\delta \in \mathfrak{C}_\rho$, se tiene que verificar que $\inf_{a\in A} d_B^\delta(x,a) \leq \rho(x,A)$ para todo $x \in X$ y $A \in 2^X$. En efecto, de la propiedad (p_4) de la definición 1.6, se tiene que

$$\begin{aligned}
\inf_{a\in A} d_B^\delta(x,a) &= \inf_{a\in \mathbb{A}} (\rho(x,B) \wedge \delta - \rho(a,B) \wedge \delta) \vee 0 \\
&\leq \left(\rho(x,B) \wedge \delta - \sup_{a\in A} \rho(a,B) \wedge \delta\right) \vee 0 \\
&\leq \left(\left(\rho(x,A) + \sup_{a\in A} \rho(a,B)\right) \wedge \delta - \sup_{a\in A} \rho(a,B) \wedge \delta\right) \vee 0 \\
&\leq \left(\rho(x,A) + \sup_{a\in A} \rho(a,B) \wedge \delta - \sup_{a\in A} \rho(a,B) \wedge \delta\right) \vee 0 \\
&= \rho(x,A).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, d_B^δ es un elemento del calibre asociado a ρ. □

Proposición 2.2 ([9])**.** *Si $\rho\colon X\times 2^X \longrightarrow [0,\infty]$ es una distancia sobre X y $\mathfrak{C}\subset pqM^\infty(X)$ el calibre asociado a ρ, entonces $\rho(x,A)=\sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\inf_{a\in A}\{d(x,a)\}\}$, para todo $x\in X$ y para todo $A\in 2^X$.*

Demostración. Sea $x\in X$ y $A\in 2^X$. Por el Teorema 2.1 se tiene que $\sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\inf_{a\in A}\{d(x,a)\}\}\leq\rho(x,A)$. Por la proposición 2.1 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\inf_{a\in A}\{d(x,a)\}\} &\geqslant \sup_{\delta<\infty}\{\sup_{B\subset X}\{\inf_{a\in A}\{d_B^\delta(x,a)\}\}\}\\
&\geqslant \sup_{\delta<\infty}\{\inf_{a\in X}\{d_A^\delta(x,a)\}\}\\
&= \sup_{\delta<\infty}\{\inf_{a\in X}\{d_A^\delta(x,a)\}\}\\
&= \sup_{\delta<\infty}\{\inf_{a\in X}\{(\rho(x,A)\wedge\delta-\rho(a,A)\wedge\delta)\vee 0\}\\
&= \sup_{\delta<\infty}\{\inf_{a\in X}\{(\rho(x,A)\wedge\delta)\}\\
&= \rho(x,A).
\end{aligned}$$

□

Dado que todo calibre es un calibre base, se tiene el siguiente teorema que dice que todo calibre base induce una distancia.

Teorema 2.2 ([9])**.** *Sea $\mathfrak{D}\subset pqM^\infty(X)$ un subconjunto. Si $\mathfrak{D}$ es un calibre base en X, entonces la función $\rho_{\mathfrak{D}}\colon X\times 2^X\longrightarrow[0,\infty]$, dada por:*

$$\rho_{\mathfrak{D}}(x,A)=\begin{cases} +\infty & \text{si } A=\emptyset.\\ \sup_{d\in\mathfrak{D}}\{\inf_{a\in A}\{d(x,a)\}\} & \text{si } A\neq\emptyset.\end{cases}$$

es una distancia en X.

Demostración. 1. Dado $x\in X$ un punto fijado arbitrariamente, para cada $d\in\mathfrak{D}$ se tiene que $d(x,x)=0$. Luego, $\rho(x,\{x\})=\sup_{d\in\mathfrak{D}}\{0\}=0$.
2. Por definición de $\rho_{\mathfrak{D}}$, para cada $x\in X$ se tiene que $\rho_{\mathfrak{D}}(x,\emptyset)=+\infty$.
3. Sean $A,B\in 2^X$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathfrak{D}}(x,A\cup B) &= \sup_{d\in\mathfrak{D}}\{\inf_{a\in A\cup B}\{d(x,a)\}\}\\
&= \sup_{d\in\mathfrak{D}}\{\inf(\{d(x,a):a\in A\}\cup\{d(x,b):b\in B\})\}\\
&= \min\{\sup_{d\in\mathfrak{D}}\{\inf(\{d(x,a)\ a\in A\})\},\sup_{d\in\mathfrak{D}}\{\inf(\{d(x,b):b\in B\})\}\}\\
&= \min\{\rho_{\mathfrak{D}}(x,A),\rho_{\mathfrak{D}}(x,B)\}
\end{aligned}$$

4. Sea $x \in X$, $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Para cada $d \in \mathfrak{D}$ y para cada $b \in A^{[\epsilon]}$ se tiene que: Dado $\delta > 0$ existe $a_{d,\delta} \in A$ tal que

$$d(b, a_{d,\delta}) \leq \inf_{a \in A}\{d(b,a)\} + \delta \leq \rho_{\mathfrak{D}}(b, A) + \delta \leq \epsilon + \delta$$

Luego, $\inf_{a\in A}\{d(x,a)\} \leq d(x, a_{d,\delta}) \leq d(x,b) + d(b, a_{d,\delta}) \leq d(x,b) + \epsilon + \delta$. De esto y siendo b arbitrario se obtiene que $\inf_{a\in A}\{d(x,a)\} \leq \inf_{b \in A^{[\epsilon]}}\{d(x,b)\} + \epsilon + \delta$. En consecuencia $\rho_{\mathfrak{D}}(b, A) \leq \rho_{\mathfrak{D}}(b, A^{[\epsilon]}) + \epsilon$. $\square$

Observación 2.1. *Sea $\mathfrak{C} \subset pqM^{\infty}(X)$ un calibre en X. Puesto que todo calibre también es un calibre base, entonces por el Teorema 2.2 se tiene que la función $\rho_{\mathfrak{C}} \colon X \times 2^X \longrightarrow [0, \infty]$, definida por:*

$$\rho_{\mathfrak{C}}(x, A) = \begin{cases} +\infty & si\ A = \emptyset. \\ \sup_{d \in \mathfrak{C}}\{\inf_{a \in A}\{d(x,a)\}\} & si\ A \neq \emptyset. \end{cases}$$

es una distancia en X. Además, si $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}$ es un calibre base de X tal que $S(\mathfrak{D}) = \mathfrak{C}$, es claro que $\rho_{\mathfrak{C}} = \rho_{\mathfrak{D}}$. En efecto, si $A = \emptyset$ se tiene que

$$\rho_{\mathfrak{C}}(x, A) = +\infty = \rho_{\mathfrak{D}}(x, A).$$

Ahora, sea $A \neq \emptyset$. Dado $\epsilon > 0$ existe $d \in \mathfrak{C}$ tal que $\rho_{\mathfrak{C}}(x, A) \leq \inf_{a \in A}\{d(x,a)\} + \epsilon/2$. Como $\mathfrak{C} = S(\mathfrak{D})$, dado $\delta < \infty$ existe $d' \in \mathfrak{D}$ tal que $d(x,a) \wedge \delta \leq d'(x,a) + \epsilon/2$ para todo $a \in X$. Tomando $\delta = \inf_{a \in A}\{d(x,a)\}$ tenemos que $d(x,a) \wedge \delta = \inf_{a\in A}\{d(x,a)\}$. Por lo tanto

$$d'(x,a) + \epsilon/2 \geq d(x,a) \wedge \delta = \inf_{a \in A}\{d(x,a)\} \geq \rho_{\mathfrak{C}}(x, A) - \epsilon/2, \quad \forall a \in X. \tag{2.1}$$

Luego, de (2.1) se tiene que

$$\rho_{\mathfrak{D}}(x, A) = \sup_{d \in \mathfrak{D}}\{\inf_{a \in A}\{d(x,a)\}\} \geq \inf_{a \in A}\{d'(x,a)\} \geq \rho_{\mathfrak{C}}(x, A) - \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue tomado arbitrariamente, se tiene que $\rho_{\mathfrak{D}}(x, A) \geq \rho_{\mathfrak{C}}(x, A)$. Además, como $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}$ se tiene que $\rho_{\mathfrak{D}}(x, A) \leq \rho_{\mathfrak{C}}(x, A)$, por lo tanto $\rho_{\mathfrak{D}}(x, A) = \rho_{\mathfrak{C}}(x, A)$ para todo $x \in X$ y $A \subset X$, o sea, $\rho_{\mathfrak{D}} = \rho_{\mathfrak{C}}$.

2.2.2 Calibres y sistemas de localización

En esta subsección se mostrará que los calibres y los sistemas de localización son estructuras *asociados*. Es decir, una estructura induce la otra y viceversa.

Teorema 2.3 ([9])**.** *Si $\mathfrak{D}$ es un calibre base en X y $\mathcal{B}_x = \{d(x,.) : d \in \mathfrak{D}\}$. Entonces $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ es un sistema de localización base en X.*

Demostración. Dado que $\mathfrak{D}$ es un calibre base, entonces $\mathfrak{D}$ es un ideal en $pqM^{\infty}(X)$ y en consecuencia para cada $x \in X$ se tiene que $\mathcal{B}_x$ es un ideal en $[0,\infty]^X$. Además, se tiene que:
1) Dado $f \in \mathcal{B}_x$, existe $d \in \mathfrak{D}$ tal que $f = d(x,.)$. Luego, $f(x) = d(x,x) = 0$, ya que d es un ∞pq-métrica sobre X, es decir, $d \in pqM^{\infty}(X)$.
2) Dado $f \in \mathcal{B}_x$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$, considere la siguientes sucesión $(f_k = d(k,.))_{k\in X} \in \prod\limits_{k\in X} \mathcal{B}_k$, donde $d \in \mathfrak{D}$ y $f = d(x,.)$. Luego, para cada $y, z \in X$ se tiene que:

$$f(y) \wedge \delta \leq f(y) = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = f_x(z) + f_z(y) \leq f_x(z) + f_z(y) + \epsilon.$$

En conclusión, $\mathcal{B}$ es un sistema de localización base en X. □

Corolario 2.1 ([9])**.** *Sea $\mathfrak{D}$ un calibre base en X y $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ como en el Teorema 2.3. Si $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_x\}_{x\in X}$ es el sistema de localización generado por $\mathcal{B}$ y $\mathfrak{C}$ es el calibre generado por $\mathfrak{D}$, entonces*

$$\mathfrak{C} = \{d \in pqM^{\infty}(X) : \textit{ Para cada } x \in X \textit{ se tiene que } d(x,.) \in \mathcal{S}_x\}.$$

Demostración. En primer lugar, observe que $\mathfrak{C} = S(\mathfrak{D})$ y $\mathcal{S}_x = S(\mathcal{B}_x)$, para todo $x \in X$. Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} d \in \mathfrak{C} &\Longleftrightarrow \forall x \in X, \forall \epsilon > 0,\ \forall \delta \in [0,\infty),\ \text{existe } d_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{D} \text{ tal que } d(x,.) \wedge \delta \leq d_{x,\epsilon,\delta}(x,.) + \epsilon. \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in X,\ \forall \epsilon > 0, \forall \delta \in [0,\infty),\ \text{existe } f = d_{x,\epsilon,\delta}(x,.) \in \mathcal{B}_x \text{ tal que } d(x,.) \wedge \delta \leq f + \epsilon. \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in X,\ \text{se tiene que } d(x,.) \in \mathcal{S}_x. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4 ([9])**.** *Dado X un conjunto no vacío. Si $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_x\}_{x\in X}$ es un sistema de localización en X, entonces $\mathfrak{C} = \{d \in pqM^{\infty}(X) : \forall x \in X$ se tiene que $d(x,\cdot) \in \mathcal{S}_x\}$ es un calibre en X.*

Demostración. Primero note que $\mathfrak{C}$ es un ideal en $pqM^{\infty}(X)$. De hecho, dado que $\mathcal{S}$ es un sistema de localización en X, entonces para cada $x \in X$, se tiene que $\mathcal{S}_x$ es un ideal en $[0,\infty]^X$. Por lo tanto, $\mathfrak{C}$ es un ideal en $pqM^{\infty}(X)$.

Para finalizar, se debe verificar que $\mathfrak{C}$ es saturado. En efecto, sea $d \in pqM^{\infty}(X)$ dominada por $\mathfrak{C}$. Entonces, para cada $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$ existe $d_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}$ tal que $d(x,a) \wedge \delta \leq d_{x,\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon$, para todo $a \in X$. Esto implica que $f_x = d(x, \cdot)$ es dominada por $\mathcal{S}_x$ ($f_{x,\epsilon,\delta} = d_{x,\epsilon,\delta}(x, \cdot) \in \mathcal{S}_x$). Como $\mathcal{S}$ es un sistema de localización, entonces $\mathcal{S}_x$ es saturado. Por lo tanto, $d(x, \cdot) = f_x \in \mathcal{S}_x$. Siendo, $x \in X$ arbitrario se concluye que $d \in \mathfrak{C}$ $\square$

Proposición 2.3 ([9]). *Sea $\mathcal{S}$ un sistema de localización en X. Entonces, para cualquier $\delta < \infty$ y $B \subseteq X$, la aplicación*

$$\begin{gathered} d_B^\delta : X \times X \to [0, \infty] \\ (x, y) \mapsto \Big(\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \text{ínf}_{b \in B} f(b) \wedge \delta - \sup_{g \in \mathcal{S}_y} \text{ínf}_{b \in B} g(b) \wedge \delta\Big) \vee 0 \end{gathered}$$

es una pq-métrica en el calibre asociado a $\mathcal{S}$.

Demostración. Primero verifiquemos que d_B^δ es una pq-métrica. En efecto,

- Es claro que $d_B^\delta(x, y) < \infty$ para todo $x, y \in X$, pues $\text{ínf}_{b \in B} f(b) \wedge \delta \leq \delta$ para todo $f \in \mathcal{S}_x$, entonces $\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \text{ínf}_{b \in B} f(b) \wedge \delta \leq \delta$. Por lo tanto, para todo $x, y \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_B^\delta(x, y) &= \left(\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \operatorname*{ínf}_{b \in B} f(b) \wedge \delta - \sup_{g \in \mathcal{S}_y} \operatorname*{ínf}_{b \in B} g(b) \wedge \delta\right) \vee 0 \\ &\leq \left(\delta - \sup_{g \in \mathcal{S}_y} \operatorname*{ínf}_{b \in B} g(b) \wedge \delta\right) \vee 0 \\ &\leq \delta \vee 0 \\ &= \delta < \infty. \end{aligned}$$

- Sea $x \in X$, entonces

$$d_B^\delta(x, x) = \left(\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \operatorname*{ínf}_{b \in B} f(b) \wedge \delta - \sup_{g \in \mathcal{S}_x} \operatorname*{ínf}_{b \in B} g(b) \wedge \delta\right) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0.$$

- Sean $x, y, z \in X$, entonces

$$\begin{aligned} d_B^\delta(x, z) &= \Big(\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \operatorname*{ínf}_{b \in B} f(b) \wedge \delta - \sup_{g \in \mathcal{S}_z} \operatorname*{ínf}_{b \in B} g(b) \wedge \delta\Big) \vee 0 \\ &= \Big(\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \operatorname*{ínf}_{b \in B} f(b) \wedge \delta - \sup_{g \in \mathcal{S}_y} \operatorname*{ínf}_{b \in B} g'(b) \wedge \delta + \sup_{g \in \mathcal{S}_y} \operatorname*{ínf}_{b \in B} g'(b) \wedge \delta \\ &\qquad - \sup_{g \in \mathcal{S}_z} \operatorname*{ínf}_{b \in B} g(b) \wedge \delta\Big) \vee 0 \\ &\leq \Big(\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \operatorname*{ínf}_{b \in B} f(b) \wedge \delta - \sup_{g \in \mathcal{S}_y} \operatorname*{ínf}_{b \in B} g'(b) \wedge \delta\Big) \vee 0 + \\ &\qquad \Big(\sup_{g \in \mathcal{S}_y} \operatorname*{ínf}_{b \in B} g'(b) \wedge \delta - \sup_{g \in \mathcal{S}_z} \operatorname*{ínf}_{b \in B} g(b) \wedge \delta\Big) \vee 0 \\ &= d_B^\delta(x, y) + d_B^\delta(y, z). \end{aligned}$$

Ahora se debe demostrar que la pq- métrica d_B^δ pertenece al calibre asociado a $\mathcal{S}$. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$, escoja $f_0 \in \mathcal{S}_x$ de modo que

$$\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \inf_{b \in B} f(b) \wedge \delta \leq \inf_{b \in B} f_0(b) \wedge \delta + \epsilon$$

luego tome una familia $\{g_w\}_{w \in X} \in \prod_{w \in X} \mathcal{S}_w$ de modo que, para cualquier $w, b \in X$ se tenga que

$$f_0(b) \wedge \delta \leq g_x(w) + g_w(b) + \epsilon$$

Consecuentemente, para cualquier $y \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}
d_B^\delta(x,y) &= \left(\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \inf_{b \in B} f(b) \wedge \delta - \sup_{g \in \mathcal{S}_y} \inf_{b \in B} g(b) \wedge \delta \right) \vee 0 \\
&\leq \left(\inf_{b \in B} f_0(b) \wedge \delta + \epsilon - \inf_{b \in B} g_y(b) \wedge \delta \right) \vee 0 \\
&\leq \left(\inf_{b \in B} (g_x(y) + g_y(b) + \epsilon) \wedge \delta + \epsilon - \inf_{b \in B} g_y(b) \wedge \delta \right) \vee 0 \\
&\leq \left(\inf_{b \in B} (g_x(y) + g_y(b) \wedge \delta + \epsilon) + \epsilon - \inf_{b \in B} g_y(b) \wedge \delta \right) \vee 0 \\
&\leq \left(g_x(y) + 2\epsilon + \inf_{b \in B} g_y(b) \wedge \delta - \inf_{b \in B} g_y(b) \wedge \delta \right) \vee 0 \\
&= g_x(y) + 2\epsilon
\end{aligned}$$

y como $\mathcal{S}_x$ es saturado, para cualquier $x \in X$ se tiene que $d_B^\delta(x, \cdot) \in \mathcal{S}_x$. Por lo tanto, d_B^δ pertenece al calibre asociado a $\mathcal{S}$. $\square$

Proposición 2.4 ([9]). *Si $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_x\}_{x \in X}$ es un sistema de localización en X y $\mathfrak{C}$ el calibre asociado a $\mathcal{S}$, entonces para cada $x \in X$ y $A \subset X$ se tiene que:*

$$\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \{ \inf_{a \in A} f(a) \} = \sup_{d \in \mathfrak{C}} \{ \inf_{a \in A} d(x,a) \}.$$

Demostración. La desigualdad $\sup_{f \in \mathcal{S}_x} \{ \inf_{a \in A} f(a) \} \geq \sup_{d \in \mathfrak{C}} \{ \inf_{a \in A} d(x,a) \}$ resulta directamente de la definición de $\mathfrak{C}$. Para la otra desigualdad, note que por la proposición 2.3 se tiene

$$\begin{aligned}
\sup_{d\in\mathfrak{C}} \operatorname{ínf}_{a\in A} d(x,a) &\geq \sup_{\delta<\infty} \sup_{B\subseteq X} \operatorname{ínf}_{a\in A} d_B^{\delta}(x,a) \\
&= \sup_{\delta<\infty} \sup_{B\subseteq X} \operatorname{ínf}_{a\in A} \left(\sup_{f\in\mathcal{S}_x} \operatorname{ínf}_{b\in B} f(b)\wedge\delta - \sup_{g\in\mathcal{S}_y} \operatorname{ínf}_{b\in B} g(b)\wedge\delta \right) \vee 0 \\
&\geq \sup_{\delta<\infty} \operatorname{ínf}_{a\in A} \left(\sup_{f\in\mathcal{S}_x} \operatorname{ínf}_{b\in A} f(b)\wedge\delta - \sup_{g\in\mathcal{S}_y} \operatorname{ínf}_{b\in A} g(b)\wedge\delta \right) \vee 0 \\
&= \sup_{\delta<\infty} \operatorname{ínf}_{a\in A} \sup_{f\in\mathcal{S}_x} \operatorname{ínf}_{b\in A} f(b)\wedge\delta \\
&\geq \sup_{f\in\mathcal{S}_x} \operatorname{ínf}_{b\in A} f(b). \\
&= \sup_{f\in\mathcal{S}_x} \operatorname{ínf}_{b\in A} f(a).
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Teorema 2.5 ([9]). *Sea $\mathcal{S}$ un sistema de localización en X y $\mathfrak{C}$ el calibre asociado a $\mathcal{S}$. Entonces, para cualquier $x\in X, \mathcal{S}_x = S(\mathcal{B}_x)$, donde $\mathcal{B}_x = \{d(x,\cdot) \mid d\in\mathfrak{C}\}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{C}$ el calibre asociado a $\mathcal{S}$ dado por el Teorema 2.4. Por definición de $\mathfrak{C}$ se tiene que $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{S}_x$ por lo tanto $S(\mathcal{B}_x) \subseteq \mathcal{S}_x$ para todo $x\in X$. Para demostrar la inclusión contraria, suponga por absurdo que para algún $x\in X$ exista $g\in\mathcal{S}\backslash S(\mathcal{B}_x)$. Entonces g no es dominada por $\mathcal{B}_x$, por eso existen $\epsilon>0$ y $\delta<\infty$ tales que, para cualquier $d\in\mathfrak{C}$.

$$g\wedge\delta \nleq d(x,\cdot)+\epsilon.$$

Para cada $d\in\mathfrak{C}$, defina $A(d)=\{y\in X \mid g(y)\wedge\delta > d(x,y)+\epsilon\}$. Es claro que, para cualquier $d,d_*\in\mathfrak{C}, A(d)\cap A(d_*) = A(d\vee d_*) \neq \emptyset$. Por la proposición 2.4, tenemos que

$$\sup_{d_*\in\mathfrak{C}} \operatorname{ínf}_{y\in A(d)} d_*(x,y)\wedge\delta = \sup_{f\in\mathcal{S}_x} \operatorname{ínf}_{y\in A(d)} f(y)\wedge\delta \ \text{ para todo } d\in\mathfrak{C},$$

por lo tanto:

$$\sup_{d\in\mathfrak{C}} \sup_{d_*\in\mathfrak{C}} \operatorname{ínf}_{y\in A(d)} d_*(x,y)\wedge\delta = \sup_{d\in\mathfrak{C}} \sup_{f\in\mathcal{S}_x} \operatorname{ínf}_{y\in A(d)} f(y)\wedge\delta \ \text{ para todo } d\in\mathfrak{C}. \tag{2.2}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}
\sup_{d\in\mathfrak{C}}\sup_{d_*\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in A(d)} d_*(x,y)\wedge\delta &\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}}\sup_{d_*\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in A(d\vee d_*)} (d\vee d_*)(x,y)\wedge\delta\\
&= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in A(d)} d(x,y)\wedge\delta\\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in A(d)} (g(y)\wedge\delta-\epsilon)\wedge\delta\\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in A(d)} g(y)\wedge\delta-\epsilon\\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}}\sup_{f\in\mathcal{S}_x}\inf_{y\in A(d)} f(y)\wedge\delta-\epsilon. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Note que (2.3) contradice a (2.2), puesto que (2.3) implica que

$$\sup_{d\in\mathfrak{C}}\sup_{d_*\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in A(d)} d_*(x,y)\wedge\delta < \sup_{d\in\mathfrak{C}}\sup_{f\in\mathcal{S}_x}\inf_{y\in A(d)} f(y)\wedge\delta.$$

□

2.2.3 Distancias y sistemas de localización

Ahora, se pasa a verificar la equivalencia de las estructuras de distancias y sistemas de localización en un conjunto.

Teorema 2.6 ([9])**.** *Sea $\mathcal{S}=\{\mathcal{S}_x\}_{x\in X}$ un sistema de localización en X. Entonces la función $\rho_{\mathcal{S}}\colon X\times 2^X\longrightarrow[0,\infty]$, definida por:*

$$\rho_{\mathcal{S}}(x,A)=\begin{cases} +\infty & si\ A=\emptyset.\\ \sup\limits_{f\in\mathcal{S}_x}\{\inf\limits_{a\in A}\{f(a)\}\} & si\ A\neq\emptyset.\end{cases}$$

es una distancia en X.

Demostración. Sea $\mathfrak{C}$ el calibre asociado a $\mathcal{S}$ entonces por el Teorema 2.2 la función $\rho_{\mathfrak{C}}$ definida en la observación 2.1 es una distancia en X. Luego, por la proposición 2.4 se tiene que $\rho_{\mathcal{S}}=\rho_{\mathfrak{C}}$, en consecuencia, la función $\rho_{\mathcal{S}}$ es una distancia en X. □

Teorema 2.7 ([9])**.** *Sea ρ una distancia en X y para cada $x\in X$ defina*

$$\mathcal{S}_x=\Big\{f\in[0,\infty]^X : \forall A\in 2^X,\ \inf_{a\in A} f(a)\leq\rho(x,A)\Big\}.$$

Entonces $\mathcal{S}=\{\mathcal{S}_x\}_{x\in M}$ es un sistema de localización en X.

Demostración. Por hipótesis ρ es una distancia en X, luego por el Teorema 2.1, la colección

$$\mathfrak{C}_\rho = \{d \in pqM^\infty(X) : \text{ para todo } A \in 2^X, \text{ para todo } x \in X \text{ se tiene que } \inf_{a\in A}\{d(x,a)\} \leq \rho(x,A)\}.$$

es un calibre en X. De esto último, por el Teorema 2.3 se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \Big\{\mathcal{B}_x := \{d(x,.) : d \in \mathfrak{C}_\rho\}\Big\}_{x\in X}\\ &= \Big\{\mathcal{B}_x := \{d(x,.) : d \in pqM^\infty(X), \forall A \in 2^X, \forall x \in X \text{ se tiene que } \inf_{a\in A}\{d(x,a)\} \leq \rho(x,A)\}\Big\}_{x\in X}\end{aligned}$$

es un sistema de localización base en X asociado a $\mathfrak{C}$. Para cada $x \in X$ defina

$$\mathfrak{C}_x = \{d(x,.) \in [0,\infty]^X : \forall A \in 2^X, \inf_{a\in A} d(x,a) \leq \rho(x,A), d \in \mathfrak{C}\}.$$

Es claro que $\mathcal{S}_x \subset \mathfrak{C}_x$, para todo $x \in X$. En efecto, sea $f \in \mathcal{S}_x$ entonces f es dominada por $\mathcal{B}_x$ puesto que $\mathcal{S}_x = S(\mathcal{B}_x)$. Luego para todo $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$, existe $d_{\epsilon,\delta}(x,.) \in \mathcal{B}_x$ tal que

$$f(y) \wedge \delta \leq d_{\epsilon,\delta}(x,y) + \epsilon.$$

Luego, dado $A \in 2^X$ se tiene que

$$\inf_{a\in A} f(a) \wedge \delta \leq \inf_{a\in A} d_{\epsilon,\delta}(x,a) + \epsilon \leq \rho(x,A) + \epsilon,$$

Como $\delta, \epsilon > 0$ fueron tomados arbitrariamente y $\inf_{a\in A} f(a) \wedge \delta \leq \rho(x,A) + \epsilon$, se obtiene que

$$\inf_{a\in A} f(a) \leq \rho(x,A).$$

por lo tanto $f \in \mathfrak{C}_x$ y como $f \in \mathcal{S}_x$ fue tomado arbitrariamente, se tiene que $\mathcal{S}_x \subset \mathfrak{C}_x$.
Para probar que $\mathcal{S}_x = \mathfrak{C}_x$, suponga por contradicción que existe un punto $x_0 \in X$ tal que $\mathfrak{C}_{x_0} \backslash \mathcal{S}_{x_0} \neq \emptyset$. Entonces, existe $f_0 \in \mathfrak{C}_{x_0} \backslash \mathcal{S}_{x_0}$. Como $\mathcal{S}_{x_0}$ es saturado, entonces f_0 no es dominada por $\mathcal{B}_{x_0}$. Luego, existe $\epsilon > 0$, $\delta < \infty$ tal que para cada $d \in \mathfrak{C}_{x_0}$ se tendrá que: $f_0 \wedge \delta \nleq d(x_0,\cdot) + \epsilon$. Para cada $d \in \mathfrak{C}_{x_0}$ defina el siguiente conjunto:

$$\mathcal{S}_{d,x_0,\delta,\epsilon} = \{y \in X : f_0(y) \wedge \delta > d(x_0,y) + \epsilon\}.$$

Note que $\mathcal{S}_{d_1,x_0,\delta,\epsilon} \cap \mathcal{S}_{d_2,x_0,\delta,\epsilon} = \mathcal{S}_{d_1 \vee d_2,x_0,\delta,\epsilon}$.

Además, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\rho(x,\mathcal{S}_{d,x_0,\delta,\epsilon})\wedge\delta\} &= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\sup_{\nu\in\mathfrak{C}}\{\inf_{y\in\mathcal{S}_{d,x_0,\delta,\epsilon}}\{\nu(x,y)\wedge\delta\}\}\} \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\sup_{\nu\in\mathfrak{C}}\{\inf_{y\in\mathcal{S}_{d\vee\nu,x_0,\delta,\epsilon}}\{(d\vee\nu)(x,y)\wedge\delta\}\}\} \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\inf_{y\in\mathcal{S}_{d,x_0,\delta,\epsilon}}\{d(x,y)\wedge\delta\}\} \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\inf_{y\in\mathcal{S}_{d,x_0,\delta,\epsilon}}\{(f_0(y)\wedge\delta-\epsilon)\wedge\delta\}\} \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\inf_{y\in\mathcal{S}_{d,x_0,\delta,\epsilon}}\{f_0(y)\wedge\delta-\epsilon\}\} \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\sup_{f\in\mathcal{S}_x}\{\inf_{y\in\mathcal{S}_{d,x_0,\delta,\epsilon}}\{f(y)\wedge\delta-\epsilon\}\}\} \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}}\{\rho(x,\mathcal{S}_{d,x_0,\delta,\epsilon})\wedge\delta\}-\epsilon,
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo, por lo tanto, $\mathcal{S}_{x_0}=\mathfrak{C}_{x_0}$. Finalmente, como $x_0\in X$ fue tomado arbitrariamente, se obtiene que $\mathcal{S}_x=\mathfrak{C}_x$, para todo $x\in X$. □

2.2.4 Cuadros y distancias

Para lo siguiente, se necesita un cierto tipo de aplicación característica para cada $A\subseteq X$, como se define a continuación.

Definición 2.2 ([9]). *Dado un subconjunto $A\subseteq X$ defina la aplicación $\theta_A:X\to[0,\infty]$ como*

$$\theta_A(x)=\begin{cases}0, & x\in A\\ \infty, & x\notin A.\end{cases}$$

La aplicación θ_A es llamada indicador de A. Denote por $Ind(X)$ el conjunto de indicadores de subconjuntos de X.

Teorema 2.8 ([9]). *Sea $\mathcal{Q}$ un cuadro en X. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{Q}}:X\times 2^X &\longrightarrow [0,\infty]\\
(x,A) &\longmapsto \sup\{f(x):f\in\mathcal{Q}\ \text{y}\ f\leq\theta_A\}
\end{aligned}$$

es una distancia sobre X.

Demostración. Se debe probar las propiedades de la definición 1.6. En efecto:

(p_1) Sea $x \in X$, tomando $A = \{x\}$, entonces como $x \in A$ y por definición de θ_A se tiene que $\theta_A(x) = 0$, por lo tanto, si $f \in \mathcal{Q}$ es tal que $f \leq \theta_{\{x\}}$ entonces $f(x) = 0$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{Q}}(x, \{x\}) &= \sup\{f(x) : f \in \mathcal{Q} \text{ y } f \leq \theta_{\{x\}}\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(p_2) Si $A = \emptyset$, por definición de θ_A se tiene que $\theta_A(x) = \infty$ y por lo tanto, $\rho_{\mathcal{Q}}(x, \emptyset) = \infty$.

(p_3) Sean $A, B \subset X$, note que $\theta_{A\cup B}(x) = \text{mín}\{\theta_A(x), \theta_B(x)\}$. De esto y las propiedades de $\mathcal{Q}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{Q}}(x, A \cup B) &= \sup\Big\{f(x) : f \in \mathcal{Q} \text{ y } f \leq \theta_{A\cup B}\Big\} \\ &= \sup\Big\{f(x) : f \in \mathcal{Q} \text{ y } f(z) \leq \text{mín}\{\theta_A(z), \theta_B(z)\} \text{ para todo } z \in X\Big\} \\ &= \sup\Big\{f(x) : f \in \mathcal{Q},\ \ f \leq \text{mín}\{\theta_A, \theta_B\}\Big\} \\ &= \sup\Big\{f(x) : f \in \mathcal{Q},\ \ f \leq \theta_A \text{ y } f \leq \theta_B\Big\} \\ &= \text{mín}\Big\{\sup\{f(x) : f \in \mathcal{Q},\ \ f \leq \theta_A\}, \sup\{f(x) : f \in \mathcal{Q},\ \ f \leq \theta_B\}\Big\} \\ &= \text{mín}\{\rho_{\mathcal{Q}}(x, A), \rho_{\mathcal{Q}}(x, B)\}. \end{aligned}$$

(p_4) Dado $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$. Por definición de $A^{[\epsilon]}$, para todo $x \in X$ se tiene que

$$\sup\{f(x) : f \in \mathcal{Q} \text{ y } f \leq \theta_A\} \leq \sup\{f(x) : f \in \mathcal{Q} \text{ y } f \leq \theta_{A^{[\epsilon]}} + \epsilon\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{Q}}(x, A) &= \sup\{f(x) : f \in \mathcal{Q} \text{ y } f \leq \theta_A\} \\ &\leq \sup\{f(x) : f \in \mathcal{Q} \text{ y } f \leq \theta_{A^{[\epsilon]}} + \epsilon\} \\ &= \sup\{f(x) : f \in \mathcal{Q} \text{ y } f \leq \theta_{A^{[\epsilon]}}\} + \epsilon \\ &= \rho_{\mathcal{Q}}(x, A^{[\epsilon]}) + \epsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.9 ([9]). *Sea (X, ρ) un espacio de aproximación y $\mathfrak{C}$ el calibre en X asociado a ρ. Entonces*

$$\mathcal{Q} = \{f \in [0, \infty]^X :\ f(x) = \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in X}(f(y) + d(x, y))\}$$

es un cuadro en X.

Demostración. Para probar que $\mathcal{Q}$ es un cuadro, se debe verificar que los ítems $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ y $\mathcal{Q}_4$ de la definición 1.24 sean satisfechas. En efecto:

$(\mathcal{Q}_1)$ Sea $R \subset \mathcal{Q}$, se tiene que probar que $\bigvee R \in \mathcal{Q}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\bigvee R(x) &= \sup_{f\in R} f(x) \\
&= \sup_{f\in R}\left(\sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in X}(f(y)+d(x,y))\right) \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\left(\sup_{f\in R}\inf_{y\in X}(f(y)+d(x,y))\right) \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in X}(\sup_{f\in R} f(y)+d(x,y))) \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in X}(\bigvee R(y)+d(x,y))
\end{aligned}$$

por lo tanto $\bigvee R \in \mathcal{Q}$.

$(\mathcal{Q}_2)$ Sean $f, g \in \mathcal{Q}$, note que $(f\wedge g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$, procediendo como en $\mathcal{Q}_1$ se tiene que

$$(f\wedge g)(x) = \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in X}((f\wedge g)(y)+d(x,y)).$$

$(\mathcal{Q}_3)$ Sea $f \in \mathcal{Q}$. Si $\alpha \in [0,\infty]$ entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in X}((f+\alpha)(y)+d(x,y)) &= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in X}(f(y)+\alpha+d(x,y)) \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in X}(f(y)+d(x,y))+\alpha \\
&= f(x)+\alpha \\
&= (f+\alpha)(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f+\alpha \in \mathcal{Q}$.

$(\mathcal{Q}_4)$ Sea $f \in \mathcal{Q}$. Si $\alpha \in [0, \text{ínf}_{x\in X} f(x)]$, entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in X}((f-\alpha)(y)+d(x,y)) &= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in X}(f(y)-\alpha+d(x,y)) \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{y\in X}(f(y)+d(x,y))-\alpha \\
&= f(x)-\alpha \\
&= (f-\alpha)(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f-\alpha \in \mathcal{Q}$.

$\square$

2.2.5 Tablas de transición

1. Distancia ρ:

Calibre	$\mathfrak{C}_\rho = \left\{ d \in pqM^\infty(X) : \forall A \in 2^X, \forall x \in X, \inf\limits_{a \in A}\{d(x,a)\} \leq \rho(x,A) \right\}$
Sistema de localización	$\mathcal{S}_\rho = \left\{ \mathcal{S}_x := \{ f \in [0,\infty]^X : \forall A \in 2^X, \inf\limits_{a \in A} f(a) \leq \rho(x,A) \} : x \in X \right\}$
Cuadro	$\mathcal{Q} = \left\{ f \in [0,\infty]^X : \; f(x) = \sup_{d \in \mathfrak{C}_\rho} \inf_{y \in X}(f(y) + d(x,y)) \right\}$

2. Calibre $\mathfrak{C}$:

Distancia	$\rho_{\mathfrak{C}}(x,A) = \begin{cases} +\infty & \text{si } A = \emptyset. \\ \sup\limits_{d \in \mathfrak{C}}\{ \inf\limits_{a \in A}\{d(x,a)\}\} & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$
Sistema de localización	$\mathcal{S} = \left\{ \mathcal{S}_x = S(\mathcal{B}_x) : \mathcal{B}_x = \{ d(x,\cdot) \mid d \in \mathfrak{C} \} \; \forall \; x \in X \right\}$
Cuadro	$\mathcal{Q} = \left\{ f \in [0,\infty]^X : \; f(x) = \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in X}(f(y) + d(x,y)) \right\}$

3. Sistema de localización $\mathcal{S}$:

Distancia	$\rho_{\mathcal{S}}(x,A) = \begin{cases} +\infty & \text{si } A = \emptyset. \\ \sup\limits_{f \in \mathcal{S}_x}\{ \inf\limits_{a \in A}\{f(a)\}\} & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$
Calibre	$\mathfrak{C} = \left\{ d \in pqM^\infty(X) : \forall x \in X \text{ se tiene que } d(x,\cdot) \in \mathcal{S}_x \right\}$
Cuadro	$\mathcal{Q} = \left\{ f \in [0,\infty]^X : \; f(x) = \sup_{g \in \mathcal{S}_x} \inf_{y \in X}(f(y) + g(y)) \right\}$

4. Cuadro $\mathcal{Q}$:

Distancia	$\rho_{\mathcal{Q}}(x,A) = \sup \left\{ f(x) : f \in \mathcal{Q} \text{ y } f \leq \theta_A \right\}$
Calibre	$\mathfrak{C} = \left\{ d \in pqM^\infty(X) : \forall A \in 2^X, \forall x \in X, \inf\limits_{a \in A}\{d(x,a)\} \leq \rho_{\mathcal{Q}}(x,A) \right\}$
Sistema de localización	$\mathcal{S} = \left\{ \mathcal{S}_x := \{ f \in [0,\infty]^X : \forall A \in 2^X, \inf\limits_{a \in A} f(a) \leq \rho_{\mathcal{Q}}(x,A) \} : x \in X \right\}$

2.3 Topologías inducidas por distancias

Al igual que en espacios métricos, una métrica d sobre un conjunto no vacío X induce una topología τ_d (ver [11]), en el sentido de que se puede definir de forma explicita los elementos de una topología τ_d usando únicamente la métrica de X. Este nuevo espacio topológico (X, τ_d) es comúnmente conocido como espacio métrico inducido por d. Al igual que en espacios métricos, en lo que sigue, se exhibirá cómo una distancia ρ sobre un conjunto X también induce una topología τ_ρ en X usando un operador clausura inducido por la distancia ρ y, a este nuevo espacio topológico (X, τ_ρ) se le llamará espacio topológico inducido por la distancia ρ.

Definición 2.3 ([9]). *Sea (X, ρ) un espacio de aproximación. Defina la aplicación cl_ρ como*

$$\begin{aligned} cl_\rho : 2^X &\longrightarrow 2^X \\ A &\longmapsto \{x \in X : \rho(x, A) = 0\}. \end{aligned}$$

Proposición 2.5 ([9]). *La aplicación cl_ρ es un operador clausura topológico.*

Demostración. Se debe verificar la propiedades de la definición 1.4. En efecto,

(c_1) Como $\rho(x, \emptyset) = \infty$ para todo $x \in X$, entonces $cl_\rho(\emptyset) = \emptyset$.

(c_2) Sea $A \subset X$. Si $x \in A$ se tiene que $\rho(x, A) = 0$, por lo tanto, $A \subseteq \{x \in X : \rho(x, A) = 0\}$, o sea $A \subseteq cl_\rho(A)$.

(c_3) Sea $A \subseteq X$, por (c_2) es claro que $cl_\rho(A) \subseteq cl_\rho(cl_\rho(A))$. Ahora, para demostrar la otra inclusión, tome $x \in cl_\rho(cl_\rho(A))$, entonces $\rho(x, cl_\rho(A)) = 0$. Luego, como $cl_\rho(A) \subset A^{[\epsilon]}$ para todo $\epsilon > 0$, se tiene

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, A^{[\epsilon]}) + \epsilon \leq \rho(x, cl_\rho(A)) + \epsilon = \epsilon.$$

Por lo tanto $\rho(x, A) \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ y como ϵ fue tomado arbitrariamente, tenemos que $\rho(x, A) = 0$, o sea, $x \in cl_\rho(A)$. Esto concluye la demostración de que $cl_\rho(A) = cl_\rho(cl_\rho(A))$.

(c_4) Sean $A, B \subset X$. Sea $x \in cl_\rho(A \cup B)$ entonces $\rho(x, A \cup B) = 0$. Por la propiedad (p_3) de la definición 1.6 se tiene que

$$0 = \rho(x, A \cup B) = \text{mín}\{\rho(x, A), \rho(x, B)\}$$

Por lo tanto, $\rho(x, A) = 0$ o $\rho(x, B) = 0$, o sea, $x \in cl_\rho(A)$ o $x \in cl_\rho(B)$, por consiguiente se tiene que $x \in cl_\rho(A) \cup cl_\rho(B)$. Por lo tanto $cl_\rho(A \cup B) \subseteq cl_\rho(A) \cup cl_\rho(B)$.

Ahora, sea $x \in cl_\rho(A) \cup cl_\rho(B)$ entonces $\rho(x, A) = 0$ o $\rho(x, B) = 0$, por lo tanto

$$\rho(x, A \cup B) = \text{mín}\{\rho(x, A), \rho(x, B)\} = 0,$$

o sea, $x \in cl_\rho(A \cup B)$. Por lo tanto, $cl_\rho(A \cup B) = cl_\rho(A) \cup cl_\rho(B)$.

$\square$

Proposición 2.6. *Sea (X, ρ) un espacio de aproximación. Los conjuntos fijos del operador cl_ρ constituyen los conjuntos cerrados de una topología τ_ρ en X.*

Demostración. Como la aplicación cl_ρ es un operador clausura topológico, la demostración es consecuencia inmediata de la proposición 1.2. $\square$

2.4 Espacios de aproximación topológicos

En esta sección, se mostrará que los espacios topológicos pueden verse como casos especiales de espacios de aproximación. De hecho, la relación entre estos espacios es muy rica desde un punto de vista algebraico y se puede demostrar que la categoría de espacios topológicos puede sumergirse en la categoría de espacios de aproximación y esta inmersión tiene varias características deseables.

2.4.1 Topología inducida por una ∞pq-métrica

Sea (X, d) un espacio pseudo-casi-métrico extendido. Dado $x \in X$ y $r > 0$ defina la bola abierta centrada en x de radio $r > 0$ respecto de la ∞pq-métrica d sobre X como

$$B_d(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Denote por τ_d al conjunto de todos los conjuntos abiertos respecto a la ∞pq-métrica d, o sea:

$$\tau_d = \{A \subseteq X : \ \forall a \in A \ \exists r > 0 \ \ B_d(a, r) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}.$$

Proposición 2.7 ([9]). *Sea (X, d) un espacio pseudo-casi-métrico extendido. Entonces la colección τ_d es una topología sobre X.*

Demostración. Por definición de τ_d tenemos que $\emptyset \in \tau_d$. Es claro que $X \in \tau_d$ una vez que $B_d(a,r) \subseteq X$ para todo $a \in X$ y $r > 0$. Sea $A_1, A_2 \in \tau_d$, entonces, si $a \in A_1 \cap A_2$ existen $r_1, r_2 > 0$ tal que $B_d(a, r_1) \subseteq A_1$ y $B_d(a, r_2) \subseteq A_2$, tomando $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$ se tiene que $B_d(a,r) \subseteq A_1 \cap A_2$. Por lo tanto

$$A_1 \cap A_2 \in \tau_d.$$

Finalmente, dada una familia arbitraria $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ con $A_\lambda \in \tau_d$ para todo $\lambda \in L$. Sea $x \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ entonces existe $\lambda_0 \in L$ tal que $x \in A_{\lambda_0}$. Como $A_{\lambda_0} \in \tau_d$, existe $r > 0$ tal que $B_d(x,r) \subset A_{\lambda_0}$, así $B_d(x,r) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Entonces

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau_d.$$

Por lo tanto τ_d es una topología en X. □

La topología τ_d es llamada *topología inducida (o generada)* por la ∞pq-métrica d, en el espacio pseudo-casi-métrico extendido (X, d).

2.4.2 Aproximaciones topológicas

Sea (X, τ) un espacio topológico. En lo que sigue se demostrará que toda topología τ induce una distancia ρ_τ em X.

Proposición 2.8 ([9]). *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \rho_\tau : X \times 2^X &\longrightarrow [0, \infty] \\ (x, A) &\longmapsto \begin{cases} 0, & si\ x \in \overline{A} \\ \infty, & si\ x \notin \overline{A} \end{cases} \end{aligned}$$

es una distancia en X.

Demostración. En efecto, que ρ_τ cumple (p_1) y (p_2) de la definición de distancia es inmediato. Para probar (p_3) note que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ para cualquier $A, B \in 2^X$, esto implica que

$$\rho_\tau(x, A \cup B) = \text{mín}\{\rho_\tau(x, A), \rho_\tau(x, B)\}.$$

Finalmente, para probar (p_4) note $\rho_\tau(x, A) = \rho_\tau(x, \overline{A})$. Dado $\epsilon \in (0, \infty)$, por definición de ρ_τ se tiene que $\rho_\tau(x, A) \leq \epsilon$ si y solo si $\rho_\tau(x, A) = 0$, o sea, $\rho_\tau(x, A) \leq \epsilon$ si y solo si $x \in \overline{A}$. Esto implica que

$$A^{[\epsilon]} = \overline{A}. \tag{2.4}$$

Por lo tanto

$$\rho(x, A) = \rho(x, \overline{A}) = \rho(x, A^{[\epsilon]}) \leq \rho(x, A^{[\epsilon]}) + \epsilon.$$

Ahora, si $\epsilon = \infty$ es claro que $A^{[\epsilon]} = X$, luego

$$\rho(x, A) = \rho(x, \overline{A}) = \rho(x, A^{[\epsilon]}) \leq \infty = \rho(x, A^{[\epsilon]}) + \epsilon.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Observación 2.2. *Note que si (X, τ) es un espacio topológico y ρ_τ la distancia inducida por la topología τ, entonces la topología τ_{ρ_τ} inducida por ρ_τ como en la proposición 2.6 coincide con τ. En efecto:*

$$\begin{aligned}
A \in \tau_{\rho_\tau} \quad &\Leftrightarrow \quad cl_{\rho_\tau}(X \backslash A) = X \backslash A \\
&\Leftrightarrow \quad \{x \in X : \rho_\tau(x, X \backslash A) = 0\} = X \backslash A \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{X \backslash A}^{\tau} = X \backslash A \\
&\Leftrightarrow \quad A \in \tau.
\end{aligned}$$

Definición 2.4 ([9]). *Sea (X, τ) un espacio topológico y ρ_τ la distancia inducida por τ. El par (X, ρ_τ) es llamado espacio de aproximación topológico y la distancia ρ_τ es llamada distancia topológica.*

Proposición 2.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico y ρ_τ la distancia inducida por τ. Entonces (X, τ) es un espacio $\mathbb{T}_0$ si y solo si para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$ satisface $\rho_\tau(x, \{y\}) = \infty$ o $\rho_\tau(y, \{x\}) = \infty$.*

Demostración. En efecto, si $a, b \in X$, $a \neq b$ entonces $\rho_\tau(a, \{b\}) = \infty$ si y solo si $a \notin \overline{\{b\}}^{\tau}$. Por lo tanto, el resultado es consecuencia de la proposición 1.3. $\square$

Sea (X, τ) un espacio topológico. Para cada $x \in X$, denote por $\mathcal{V}_\tau(x)$ al conjunto de vecindades del punto x, o sea:

$$\mathcal{V}_\tau(x) := \{V \in 2^X : \text{ existe } A \in \tau \text{ de tal manera que } A \subseteq V \text{ y } x \in A.\}.$$

Definición 2.5 ([4]). *Sea (X,τ) un espacio topológico, una función $f : X \to [0,\infty]$ es semicontinua superiormente en un punto $x \in X$ si para todo $c > f(x)$, se tiene que $x \in int(\{y \in X : f(y) < c\})$.*

Proposición 2.10 ([9]). *Sea (X,τ) un espacio topológico y ρ_τ la distancia inducida por τ y $\mathcal{S}^\tau := \{\mathcal{S}_x^\tau\}_{x\in X}$ el sistema de localización asociado a ρ_τ como en el Teorema 2.7. Entonces, para cada $x \in X$,*

$$\mathcal{S}_x^\tau = \left\{ f \in [0,\infty]^X \mid f(x) = 0, f \text{ semi-continua superiormente en } x \right\}.$$

Además, una base para $\mathcal{S}^\tau$ es dada por $\{\mathcal{B}_x^\tau\}_{x\in X}$, donde, para cada $x \in X$,

$$\mathcal{B}_x^\tau = \{\theta_V \mid V \in \mathcal{V}_\tau(x)\}.$$

Demostración. Dado $x \in X$, por el Teorema 2.7 y de la definición de ρ_τ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_x^\tau &= \{f \in [0,\infty]^X \mid \forall A \in 2^X, \inf_{a\in A} f(a) \le \rho_\tau(x,A)\} \\
&= \left\{ f \in [0,\infty]^X \mid \forall A \in 2^X : x \in \overline{A}^\tau \Rightarrow \inf_{a\in A} f(a) = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Ahora, dado $f \in \mathcal{S}_x^\tau$, como $x \in \overline{\{x\}}^\tau$, se tiene que $f(x) = 0$. Fijando $c > 0$, note que $x \notin \overline{\{f \ge c\}}^\tau$, puesto que si $x \in \overline{\{f \ge c\}}^\tau$, entonces

$$c \le \inf_{a\in\{f\ge c\}} f(a) = 0,$$

lo que es un absurdo. Por lo tanto, para cualquier $c > 0$, $x \in int_\tau(\{y \in X : f(y) < c\})$ (donde int_τ denota el interior del conjunto en la topología τ), lo que implica que f es una función semi-continua superiormente en el punto x. La recíproca resulta del hecho de que si f es semi-continua superiormente en x y $f(x) = 0$, entonces, para cualquier $c > 0$, $\{y \in X : f(y) < c\}$ es una vecindad de x.

Para probar que $\{\mathcal{B}_x^\tau\}_{x\in X}$ es una base para $\mathcal{S}^\tau$, se debe verificar que $S(\mathcal{B}_x^\tau) = \mathcal{S}_x^\tau$ para todo $x \in X$. En efecto, dado $x \in X$, si $f \in S(\mathcal{B}_x^\tau)$ entonces para cada $\epsilon > 0$ y $\delta < \infty$ existe una vecindad $V_{\epsilon,\delta} \in \mathcal{V}_\tau(x)$ tal que

$$f \wedge \delta \le \theta_{V_{\epsilon,\delta}} + \epsilon,$$

por lo tanto, si $A \subset X$ es tal que $x \in \overline{A}^\tau$ entonces existe $y \in A$ tal que $y \in V_{\epsilon,\delta}$, entonces

$$\begin{aligned}
f(y) \wedge \delta &\le \theta_{V_{\epsilon,\delta}}(y) + \epsilon \\
&= 0 + \epsilon \\
&= \epsilon. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Tomando $\delta > f(y)$, se tiene que $f(y) \wedge \delta = f(y)$, esto y 2.5 implican que $f(y) \leq \epsilon$. Como ϵ puede ser tomado muy cerca de cero se tiene que $f(y) = 0$, entonces

$$\inf_{a \in A} f(a) = 0,$$

lo que implica que $f \in \mathcal{S}_x^\tau$, por lo tanto $S(\mathcal{B}_x^\tau) \subset \mathcal{S}_x^\tau$. Para demostrar que $\mathcal{S}_x^\tau \subset S(\mathcal{B}_x^\tau)$ es suficiente hacer el procedimiento inverso al que se hizo para probar la primera inclusión. □

Proposición 2.11 ([9]). *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathfrak{C}_\tau$ el calibre asociado a ρ_τ como en el Teorema 2.1. Entonces*

$$\mathfrak{C}_\tau = \{d \in \mathrm{pqM}^\infty(X) \mid \tau_d \subseteq \tau\}$$

donde τ_d es la topología inducida por d.

Demostración. Sea $d \in \mathrm{pqM}^\infty(X)$ y τ_d la topología inducida por d. Es claro que $x \in \overline{A}^{\tau_d}$ si y solo si $\inf_{a \in A} d(x, a) = 0$. Del Teorema 2.1 y de la definición de ρ_τ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\tau &= \left\{ d \in pqM^\infty(X) : \forall A \in 2^X, \forall x \in X \text{ se tiene que } \inf_{a \in A}\{d(x,a)\} \leq \rho(x, A) \right\} \\ &= \left\{ d \in \mathrm{pqM}^\infty(X) \mid \forall A \subseteq X : x \in \overline{A}^\tau \Rightarrow \inf_{a \in A} d(x,a) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Suponga que $d \in \mathfrak{C}_\tau$ y que $A \subseteq X$. Si $x \in \overline{A}^\tau$ entonces $\inf_{a \in A} d(x, a) = 0$ y por eso $x \in \overline{A}^{\tau_d}$. Por lo tanto $\overline{A}^\tau \subseteq \overline{A}^{\tau_d}$ para cualquier $A \subseteq X$. De esta forma, si A es un subconjunto cerrado en τ_d entonces $\overline{A}^\tau \subseteq \overline{A}^{\tau_d} = A$, lo que implica que $\overline{A}^\tau = A$, o sea, A también es un subconjunto cerrado en τ. Por lo tanto, todo conjunto cerrado en τ_d también es cerrado en τ, entonces eso también vale para los conjuntos abiertos, esto implica $\tau_d \subseteq \tau$. La recíproca es análoga, basta observar que si $\tau_d \subseteq \tau$ entonces $\overline{A}^\tau \subseteq \overline{A}^{\tau_d}$ para todo $A \subset X$. □

Lema 2.1 ([9]). *Sea (X, τ) un espacio topológico y ρ_τ la distancia en X asociado a la topología τ. Sea $\mathcal{Q}_\tau$ el cuadro asociado a ρ_τ como en la proposición 2.9, entonces*

$$\mathcal{Q}_\tau = \{f \in [0, \infty]^X : f(x) = \sup_{V \in \mathcal{V}_\tau(x)} \inf_{y \in V} f(y)\}.$$

Demostración. En efecto, el Teorema 2.9 se sabe que $f \in \mathcal{Q}_\tau$ si y solo si $f(x) = \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in X}(f(y) + d(x, y))$ donde $\mathfrak{C}$ es el calibre asociado a ρ_τ. Por el Teorema 2.5 se tiene que $\mathcal{B}_x^\tau = \{d(x, \cdot) \mid d \in \mathfrak{C}\}$ es una base para el sistema de localización $\mathcal{S}^\tau$, entonces

$$\begin{aligned} \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in X} (f(x) + d(x,y)) &= \sup_{g \in \mathcal{B}_x^\tau} \inf_{y \in X} (f(y) + g(y)) \\ &= \sup_{V \in \mathcal{V}_\tau(x)} \inf_{y \in X} (f(y) + \theta_V(y)) \\ &= \sup_{V \in \mathcal{V}_\tau(x)} \inf_{y \in V} f(y) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad viene fácilmente de la definición de $\mathcal{B}_x^\tau$, la segunda igualdad viene de la proposición 2.10 y las dos últimas igualdades resultan de la definición de la aplicación θ_V. Esto completa la demostración del lema. $\square$

Ejemplo2.2. Tome X un conjunto no vacío. Considerando X con la topología discreta $\tau = 2^X$, dado $x \in X$ un conjunto $V \in \mathcal{V}_{2^X}(x)$ si y solo si $x \in V$. Entonces toda función $f \in [0,\infty]^X$ pertenece al cuadro $\mathcal{Q}_{2^X}$. En efecto, dado $V \in \mathcal{V}_{2^X}(x)$, como $x \in V$ entonces $\inf_{y\in V} f(y) \leq f(x)$, por lo tanto

$$\sup_{V\in\mathcal{V}_{2^X}(x)} \inf_{y\in V} f(y) \leq \sup_{V\in\mathcal{V}_{2^X}(x)} f(x) = f(x). \tag{2.6}$$

Para demostrar la otra desigualdad note que $\{x\} \in \mathcal{V}_{2^X}(x)$ tome $\mathcal{V}_0(x) := \{\{x\}\}$. Como $\mathcal{V}_0(x) \subset \mathcal{V}_{2^X}(x)$ y usando la propiedad de que si $A \subset B$ entonces $\sup A \leq \sup B$, se tiene que

$$\sup_{V\in\mathcal{V}_{2^X}(x)} \inf_{y\in V} f(y) \geq \sup_{V\in\mathcal{V}_0(x)} \inf_{y\in V} f(y) = \inf_{y\in\{x\}} f(y) = f(x). \tag{2.7}$$

Por (2.6) y (2.7) se tiene que $f(x) = \sup_{V\in\mathcal{V}_{2^X}(x)} \inf_{y\in V} f(y)$. Aplicando el Lema 2.1 se tiene que $f \in \mathcal{Q}_{2^X}$ para toda función $f \in [0,\infty]^X$.

Proposición 2.12 ([9]). *Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces el cuadro $\mathcal{Q}_\tau$ asociado a ρ_τ es dado por*

$$\mathcal{Q}_\tau = \left\{ f \in [0,\infty]^X \mid f \textit{ es semi-continua inferiormente } \right\}$$

Demostración. Por el Lema 2.1 se sabe que el cuadro asociado a ρ_τ está dado por

$$\mathcal{Q} = \{ f \in [0,\infty]^X : f(x) = \sup_{V\in\mathcal{V}_\tau(x)} \inf_{y\in V} f(y) \}.$$

Por definición de semi continuidad inferior, f es semi-continua inferiormente en x si y solo si $f(x) = \sup_{V\in\mathcal{V}_\tau(x)} \inf_{y\in V} f(y)$. Como $x \in X$ puede ser tomado arbitrariamente, entonces $f \in \mathcal{Q}_\tau$ si y solo si f es semi-continua inferiormente, o sea, $f \in \mathcal{Q}$ si y solo si $f \in \mathcal{Q}_\tau$. $\square$

2.4.3 Contracciones

En esta sección se introducirá el concepto de contracciones, que son las aplicaciones compatibles con la estructura de los espacios de aproximación, en el mismo sentido que las aplicaciones continuas son compatibles con la estructura de los espacios topológicos.

Definición 2.6 ([9])**.** *Sean (X,ρ) y (X^*,ρ^*) espacios de aproximación. Se dice que una aplicación $\phi : X \longrightarrow X^*$ es una contracción si $\rho^*(\phi(x),\phi(A)) \leq \rho(x,A)$ para cualquier $x \in X$ y $A \in 2^X$.*

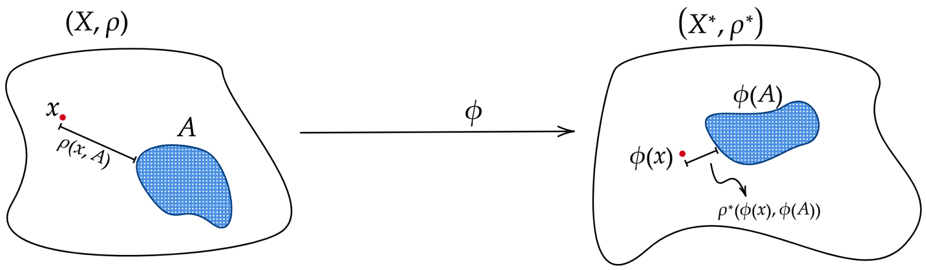


Figura 2.1: Representación de una contracción $\phi : X \to X^*$.

Teorema 2.10 ([9])**.** *Sean (X,ρ) y (X^*,ρ^*) espacios de aproximación y $\phi : X \longrightarrow X^*$ una aplicación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *ϕ es una contracción;*

(ii) *$\phi(A^{[\epsilon]}) \subset \phi(A)^{[\epsilon]}$ para cualquier $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponga que ϕ es una contracción. Sea $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$, si $y \in \phi(A^{[\epsilon]})$ entonces existe $x \in A^{[\epsilon]}$ tal que $y = \phi(x)$, luego

$$\begin{aligned} \rho^*(y,\phi(A)) &= \rho^*(\phi(x),\phi(A)) \\ &\leq \rho(x,A) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $y \in \phi(A^{[\epsilon]})$ se tiene que $y \in \phi(A)^{[\epsilon]}$, esto es,

$$\phi(A^{[\epsilon]}) \subseteq \phi(A)^{[\epsilon]}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Suponga que (ii) es válido. Para cualquier $x \in X$ y $A \in 2^X$ se tiene que si $x \in A^{[\rho(x,A)]}$ entonces $\phi(x) \in \phi(A)^{[\rho(x,A)]}$, o sea,

$$\rho^*(\phi(x),\phi(A)) \leq \rho(x,A).$$

$\square$

Considere el espacio de aproximación $\mathbb{P} := [0, \infty]$, con la distancia $\rho_{\mathbb{P}}$ definido en el ejemplo 2.1, o sea,

$$\rho_{\mathbb{P}} : [0, \infty] \times 2^{[0,\infty]} \to [0, \infty]$$
$$(x, A) \mapsto \begin{cases} (x - \sup A) \vee 0, & A \neq \emptyset \\ \infty, & A = \emptyset. \end{cases}$$

Proposición 2.13 ([9]). *Sea (X, ρ) un espacio de aproximación. Entonces, para cualquier $A \in 2^X$, el operador distancia*

$$\begin{aligned} \rho_A : (X, \rho) &\longrightarrow \mathbb{P} \\ x &\longmapsto \rho_{\mathbb{P}}(x, A) \end{aligned}$$

es una contracción.

Demostración. Sea $x \in X$ y $B \in 2^X$. Si $B = \emptyset$, entonces

$$\rho_{\mathbb{P}}(\rho_A(x), \rho_A(B)) = \rho_{\mathbb{P}}(\rho_A(x), \emptyset) = \infty = \rho(x, B).$$

Si $B \neq \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{P}}(\rho_A(x), \rho_A(B)) &= \Big(\rho_A(x) - \sup \rho_A(B)\Big) \vee 0 \\ &= \Big(\rho_{\mathbb{P}}(x, A) - \sup_{b \in B} \rho_{\mathbb{P}}(b, A)\Big) \vee 0 \\ &\leq \rho(x, B). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.14 ([9]). *Sea (X, ρ) un espacio de aproximación, $\mathcal{Q}$ el cuadro asociado a ρ y $f \in [0, \infty]^X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $f \in \mathcal{Q}$;

(ii) $f : (X, \rho) \to \mathbb{P}$ *es una contracción.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponga primero que $f \in \mathcal{Q}$. Tomando $\alpha = \sup f(A)$, por la proposición 1.6 se tiene que $f - \alpha \in \mathcal{Q}$, y por lo tanto

$$(f - \alpha) \vee 0 \in \mathcal{Q}.$$

Note que si $x \in A$ entonces $f(x) - \alpha \leq 0$, por lo tanto $\big((f-\alpha) \vee 0\big)(x) = 0 = \theta_A(x)$. Además, si $x \notin A$ se tiene que $\big((f-\alpha) \vee 0\big)(x) \leq \infty = \theta_A(x)$, luego

$$(f-\alpha) \vee 0 \leq \theta_A.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{P}}(f(x), f(A)) &= (f(x) - \sup f(A)) \vee 0 \\ &\leq \sup\{g(x) : g \in \mathcal{Q} \text{ y } g \leq \theta_A\} \\ &= \rho(x, A). \end{aligned}$$

Por lo tanto f es una contracción.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Ahora suponga que f es una contracción. Suponga por contradicción que $f \notin \mathcal{Q}$ entonces existe $x \in X$ tal que

$$f(x) \neq \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in X} (f(y) + d(x,y))$$

Sin pérdida de generalidad, suponga que $f(x) > \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in X} (f(y) + d(x,y))$, entonces para todo $d \in \mathfrak{C}$ se tiene que

$$f(x) > \inf_{y \in X} (f(y) + d(x,y)).$$

Luego existe $y \in X$ tal que

$$f(x) > f(y) + d(x,y).$$

Tomando $A = \{y\}$ y $d = d_\rho$ como en el ejemplo 1.11, se tiene

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{P}}(f(x), f(A)) &= (f(x) - \sup f(A)) \vee 0 \\ &= (f(x) - f(y)) \vee 0 \\ &> d_\rho(x,y) \\ &= \rho(x, \{y\}) \\ &= \rho(x, A). \end{aligned}$$

Luego, para $A = \{y\}$ se tiene que $\rho_{\mathbb{P}}(f(x), f(A)) > \rho(x, A)$, esto contradice el hecho de que f es una contracción. Por lo tanto $f \in \mathcal{Q}$. $\square$

Corolario 2.2 ([9]). *Sea (X, ρ) un espacio de aproximación, $\mathcal{Q}$ el cuadro asociado a ρ. Entonces para cada $A \in 2^X$, se tiene que $\rho_A \in \mathcal{Q}$.*

Demostración. Por la proposición 2.13 se tiene que ρ_A es una contracción, luego, la proposición 2.14 implica que $\rho_A \in \mathcal{Q}$. $\square$

Proposición 2.15 ([9]). *Sean (X, τ), (X^*, τ^*) espacios topológicos y $\phi : X \to X^*$ una aplicación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) $\phi : (X, \tau) \to (X^*, \tau^*)$ *es continua.*

(ii) $\phi : (X, \rho_\tau) \to (X^*, \rho^*_\tau)$ *es una contracción.*

Demostración. Sea $A \in 2^X$, por la proposición 1.1 se tiene que ϕ es continua si y solo si $\phi\left(\overline{A}^{\tau}\right) \subseteq \overline{\phi(A)}^{\tau^*}$. Por (2.4) se tiene que $\phi\left(\overline{A}^{\tau}\right) = \phi(A^{[\epsilon]})$ y $\overline{\phi(A)}^{\tau^*} = (\phi(A))^{[\epsilon]}$. Por lo tanto ϕ es continua si y solo si $\phi(A^{[\epsilon]}) \subseteq (\phi(A))^{[\epsilon]}$. Luego, la demostración es consecuencia directa del Teorema 2.10. $\square$

Lema 2.2 ([12]). *Sean $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ y (Z, ρ_Z) espacios de aproximación y $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y), g : (Y, \rho_Y) \to (Z, \rho_Z)$ contracciones. entonces la aplicación $(g \circ f) : (X, \rho_X) \to (Z, \rho_Z)$ también es una contracción.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $A \subseteq X$. Entonces $\rho_Y(f(x), f(A)) \leq \rho_X(x, A)$. Como $f(x) \in Y$ y $f(A) \subseteq Y$ se tiene que $\rho_Z(g(f(x)), g(f(A))) \leq \rho_Y(f(x), f(A))$. Por lo tanto

$$\rho_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(A)) = \rho_Z(g(f(x)), g(f(A))) \leq \rho_Y(f(x), f(A)) \leq \rho_X(x, A)$$

$\square$

Lema 2.3 ([12]). *Sea (X, ρ) un espacio de aproximación y τ_ρ la topología inducida por ρ. Entonces la aplicación $i : \left(X, \rho_{\tau_\rho}\right) \to (X, \rho)$ es una contracción. Además, si τ es una topología en un conjunto Y y si $f : (Y, \rho_\tau) \to (\mathrm{X}, \rho)$ es una contracción, entonces $f : (\mathrm{Y}, \rho_\tau) \to \left(X, \rho_{\tau_\rho}\right)$ también es una contracción.*

$$\begin{tikzcd}
 & (X, \rho_{\tau_\rho}) \arrow[dd, "i"] \\
(Y, \rho_\tau) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & (X, \rho)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $x \in X$ y $A \subseteq X$. Si $\rho(x, A) = 0$, se tiene que $\rho(i(x), i(A)) = \rho(x, A) = 0 \leq \rho_{\tau_\rho}(x, A)$. Si $\rho(x, A) > 0$ entonces $x \notin cl_\rho(A) = \overline{A}^{\tau_\rho}$, en otras palabras $\rho_{\tau_\rho}(x, A) = \infty$, es por eso que $\rho(i(x), i(A)) = \rho(x, A) \leq \infty = \rho_{\tau_\rho}(x, A)$. Por lo tanto $i : \left(X, \rho_{\tau_\rho}\right) \to (X, \rho)$ es una contracción. Ahora se demostrará la segunda afirmación de la proposición. En efecto, sean $y \in Y$ y $B \subseteq Y$. Si $y \notin \overline{B}^{\tau}$ entonces $\rho_\tau(y, B) = \infty$ consecuentemente $\rho_{\tau_p}(f(y), f(B)) \leq \infty = \rho_\tau(y, B)$. Si $y \in \overline{B}^{\tau}$ entonces $\rho_\tau(y, B) = 0$ y por hipótesis se tiene que $f : (Y, \rho_\tau) \to (X, \rho)$ es una contracción,entonces $\rho(f(y), f(B)) \leq \rho_\tau(y, B) = 0$, luego $\rho(f(y), f(B)) = 0$. De $\rho(f(y), f(B)) = 0$, sigue que $f(y) \in cl_\rho(f(B)) = \overline{f(B)}^{\tau_\rho}$ y entonces $\rho_{\tau_\rho}(f(y), f(B)) = 0$. De este modo, $\rho_{\tau_p}(f(y), f(B)) = 0 \leq \rho_\tau(y, B)$. Por lo tanto $f : (Y, \rho_\tau) \to \left(X, \rho_{\tau_\rho}\right)$ es una contracción. $\square$

Proposición 2.16 ([9]). *Sea (X, ρ) un espacio de aproximación, $\mathcal{Q}$ el cuadro asociado a ρ. Entonces, para cualquier $f \in \mathcal{Q}$,*

$$f : (X, \tau_\rho) \longrightarrow ([0, \infty], \tau_{\mathbb{P}})$$

es una aplicación continua.

Demostración. Considere la aplicación identidad $i : \left(X, \rho_{\tau_\rho}\right) \to (X, \rho)$, por el Lema 2.3 se tiene que i es una contracción. Además como $f \in \mathcal{Q}$, por la proposición 2.14 se tiene que $f(X, \rho) \to \mathbb{P}$ es una contracción. Entonces $f = (f \circ i) : \left(X, \rho_{\tau_\rho}\right) \to ([0, \infty], \rho_{\mathbb{P}})$ también es una contracción de acuerdo con el Lema 2.2. De la segunda afirmación del Lema 2.3 se tiene que $f : \left(X, \rho_{\tau_\rho}\right) \to \left([0, \infty], \rho_{\tau_p}\right)$ también es una contracción, luego por la proposición 2.15 sigue que $f : (X, \tau_\rho) \to ([0, \infty], \tau_{\mathbb{P}})$ es continua. $\square$

Capítulo 3:

Caracterizaciones de espacios de Kolmogórov

3.1 Primera caracterización

Proposición 3.1 ([9]). *Sea (X, ρ) un espacio de aproximación. Si $\mathcal{V}_{\tau_\rho}(x)$ es el conjunto de vecindades de $x \in X$ en (X, τ_ρ), entonces*

$$\mathcal{V}_{\tau_\rho}(x) = \left\{V \in 2^X \mid \exists \epsilon > 0, \exists f \in \mathcal{B}_x : \{y \in X : f(y) < \epsilon\} \subseteq V\right\}.$$

donde $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ es una base para el sistema de localización en (X, ρ).

Demostración. Un subconjunto $V \in 2^X$ es una vecindad de x si y solo si existe un abierto $U \subset V$ tal que $x \in V$. Por lo tanto, $V \in \mathcal{V}_{\tau_\rho}(x)$ si y solo si $x \notin cl_\rho(X \backslash V)$. Note que

$$\begin{aligned}
x \notin cl_\rho(X \backslash V) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 : \rho(x, X \backslash V) > \epsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 : \sup_{f \in \mathcal{B}_x} \inf_{y \in X \backslash V} f(y) > \epsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0, \exists f \in \mathcal{B}_x : \inf_{y \in X \backslash V} f(y) > \epsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0, \exists f \in \mathcal{B}_x : \{y \in X : f(y) < \epsilon\} \subseteq V
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.

$\square$

Teorema 3.1 ([12, 10]). *Sea (X, ρ) un espacio de aproximación y $\{\mathcal{S}_x\}_{x \in X}$ el sistema de localización asociado a la distancia ρ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) *es un espacio de Kolmogórov;*

(ii) *Para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{S}_x$ tal que $f(y) > 0$ o existe $g \in \mathcal{S}_y$ tal que $g(x) > 0$.*

Demostración. Sea (X, τ_ρ) es un espacio de Kolmogórov. Suponga por absurdo que existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ de tal manera que para cualquier $f \in \mathcal{S}_x$ y $g \in \mathcal{S}_y$ se tiene que $f(y) = 0$ y $g(x) = 0$. Luego dada una vecindad V_x de x, por la proposición 3.1 se tiene que $\{w \in X : f(w) < \epsilon\} \subseteq V_x$ para algún $\epsilon > 0$. Luego, como $f(y) = 0$ se tiene que $y \in V_x$. Por lo tanto y pertenece a cualquier vecindad de x y por simetría se tiene que x pertenece a cualquier vecindad de y; esto contradice el hecho de que (X, τ_ρ) es un espacio de Kolmogórov. Esto demuestra la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$.

Ahora, suponga que *(ii)* se cumple y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por hipótesis existe $f \in \mathcal{S}_x$ tal que $f(y) > 0$ o existe $g \in \mathcal{S}_y$ tal que $g(y) > 0$. Sin pérdida de generalidad, suponga que existe $f \in \mathcal{S}_x$ tal que $f(y) > 0$ (en el caso de que esto no se cumpla, tome g y y en lugar de f y x). Defina $\epsilon = f(y)$. Entonces, por la proposición 3.1, se tiene que el conjunto

$$V_x := \{w \in X : f(w) < \epsilon\}$$

es una vecindad de x tal que $y \notin V_x$. Como $x, y \in X$ son puntos distintos tomados arbitrariamente, se concluye que (X, τ_ρ) es un espacio de Kolmogórov.

□

3.2 Segunda caracterización

Teorema 3.2 ([12, 10]). *Sea (X, τ_ρ) el espacio topológico inducido por una distancia ρ y $\mathcal{Q}$ el cuadro asociado a ρ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) *es un espacio de Kolmogórov.*

(ii) *Para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $\varphi \in \mathcal{Q}$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.*

Demostración. Suponga que (i) es satisfecha y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Sea $\{\mathcal{S}_z\}_{z \in X}$ el sistema de localización asociado a ρ. De acuerdo con el Teorema 3.1, existe $f \in \mathcal{S}_x$ tal que $f(y) > 0$ o existe $g \in \mathcal{S}_y$ tal que que $f(x) > 0$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que existe $f \in \mathcal{S}_x$ de modo que $f(y) > 0$, en el caso de que esto no se cumpla, tomamos g y y en lugar de f y x. Defina $\varphi = \rho_{\{y\}}$. Por el corolario 2.2 se tiene que $\varphi \in \mathcal{Q}$. Como $f \in \mathcal{S}_x$, tomando $A = \{y\}$ en el Teorema 2.7, se tiene que $f(y) = \inf_{w \in \{y\}} f(w) \leq \rho(x, \{y\}) = \rho_{\{y\}}(x) = \varphi(x)$. Como $f(y) > 0$ entonces $\varphi(x) > 0$. Por otro lado, $\varphi(y) = \rho_{\{y\}}(y) = \rho(y, \{y\}) = 0$. Por lo tanto $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Recíprocamente, suponga que (ii) vale y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Note que $\varphi(x) > c > \varphi(y)$ o $\varphi(y) > c > \varphi(x)$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\varphi(x) > c > \varphi(y)$ (si esto no se cumple, intercambie papeles entre y y x). Por la proposición 2.16 se tiene que la aplicación $\varphi : (X, \tau_\rho) \to ([0, \infty], \tau_{\mathrm{P}})$ es continua, y por lo tanto $U = \{x \in X : \varphi(x) > c\}$ (imagen inversa del conjunto $]c, \infty] \in \tau_{\mathbb{P}}$) es una vecindad de x tal que $y \notin U$, lo que implica que (X, τ_ρ) es un espacio de Kolmogórov. $\square$

Ejemplo3.1. Tome $n \geq 1$ y $X = \mathbb{R}^n$ con la topología usual τ. Se probará que (X, τ) es un espacio de Kolmogórov usando la segunda caracterización. Primero sean ρ_τ la distancia generada por la topología τ (usando el operador clausura topológico) y $\mathcal{Q}_\tau$ el cuadro asociado a ρ_τ. Ahora, tome $x, y \in X$ dos puntos arbitrarios diferentes, considere $\varphi = \rho_{\tau\{y\}}$, o sea, $\varphi : X \to [0, \infty]$, definido como

$$\varphi(z) = \rho_\tau(z, \{y\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = y \\ +\infty & \text{si } z \neq y. \end{cases}$$

Por el corolario 2.2 se tiene que $\varphi \in \mathcal{Q}_\tau$. Note que como $\varphi(x) = \infty$ y $\varphi(y) = 0$, entonces $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, por lo tanto, $(\mathbb{R}^n, \tau)$ es un espacio de Kolmogórov.

3.3 Tercera caracterización

Teorema 3.3 ([12, 10]). *Sea (X, τ_ρ) el espacio topológico inducido por una distancia ρ y $\{\mathcal{S}_z\}_{z \in X}$ el sistema de localización asociado a ρ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) *es un espacio de Kolmogórov.*

(ii) *Para cualquier* $x, y \in X$ *con* $x \neq y$*, se tiene que* $\mathcal{S}_x \neq \mathcal{S}_y$.

Demostración. Suponga que (i) es verdadero y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por el Teorema 3.1 se tiene que existe $f \in \mathcal{S}_x$ tal que $f(y) > 0$ o existe $g \in \mathcal{S}_y$ tal que $f(x) > 0$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que existe $f \in \mathcal{S}_x$ tal que $f(y) > 0$ (en caso de que esto no se cumpla tome g y y en lugar de f y x). Como $f(y) > 0$, por la propiedad (s_1) se tiene que $f \notin \mathcal{S}_y$. Esto implica que $\mathcal{S}_x \neq \mathcal{S}_y$ una vez que $f \in S_x$ y $f \notin \mathcal{S}_y$.

Recíprocamente, suponga que vale (ii) y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por hipótesis, existe $f \in \mathcal{S}_x$ tal que $f \notin \mathcal{S}_y$ o existe $g \in \mathcal{S}_y$ tal que $g \notin \mathcal{S}_x$. Esto junto con el Teorema 2.7 implican que existe $A \subseteq X$ tal que $\text{ínf}_{w \in A} f(w) > \rho(y, A) = \rho_A(y)$ o existe $B \subseteq X$ tal que $\text{ínf}_{w \in B} f(w) > \rho(x, B) = \rho_B(x)$. Como $f \in \mathcal{S}_x$ y $g \in \mathcal{S}_y$, nuevamente por el Teorema 2.7 se tiene que

$$\underset{w \in A}{\text{ínf}} f(w) \leq \rho(x, A) = \rho_A(x) \text{ y } \underset{w \in B}{\text{ínf}} f(w) \leq \rho(y, B) = \rho_B(Y).$$

Entonces $\rho_A(x) > \rho_A(y)$ o $\rho_B(y) > \rho_B(x)$. Sea $\mathcal{Q}$ el cuadro asociado a la distancia ρ, por el corolario 2.2 se tiene que $\rho_A \in \mathcal{Q}$ o $\rho_B \in \mathcal{Q}$. Por lo tanto, $\rho_A(x) \neq \rho_A(y)$ o $\rho_B(y) \neq \rho_B(x)$, entonces el Teorema 3.2 implica que (X, τ_ρ) es un espacio de Kolmogórov. □

3.4 Cuarta caracterización

Ahora se caracterizará los espacios de Kolmogórov en función de contracciones. No olvide que contracciones está definido en función de distancias. Primero, sea $\mathbb{D} = \{0, 1\}$ y $\rho_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times 2^{\mathbb{D}} \to [0, \infty]$ la distancia relativa a $\mathbb{D}$ definida por $\rho_{\mathbb{D}}(x, \emptyset) = \infty$ y $\rho_{\mathbb{D}}(x, A) = 0$ si $A \neq \emptyset$ $\big(x \in \mathbb{D}, A \in 2^{\mathbb{D}}\big)$

Teorema 3.4 ([12, 10])**.** *Sea* (X, τ_ρ) *el espacio topológico inducido por una distancia* ρ*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) *es un espacio de Kolmogórov.*

(ii) *Toda contracción* $f : (\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}}) \to (X, \rho)$ *es constante.*

Demostración. Suponga que (i) se cumple y suponga por absurdo que existe una contracción $f : (\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}}) \to (X, \rho)$ no constante. Entonces existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ de modo que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Como f es una contracción, en particular, se tiene que

$$\rho(x, \{y\}) \leq \rho_{\mathbb{D}}(0, \{1\}) = 0 \text{ y } \rho(y, \{x\}) \leq \rho_{\mathbb{D}}(y, \{x\}) = 0,$$

o sea,

$$\rho(x, \{y\}) = 0 = \rho(y, \{x\}).$$

Por consiguiente, se tiene que $x \in \overline{\{y\}}^{\tau_\rho}$ y $y \in \overline{\{x\}}^{\tau_\rho}$, pero esto contradice a (i). Por lo tanto, se concluye que $f : (\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}}) \to (X, \rho)$ es constante.

Ahora se demostrará la contra positiva de la implicación $(ii) \Rightarrow (i)$. Suponga que (X, τ_ρ) no sea un espacio de Kolmogórov. Entonces existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ de modo que $x \in \overline{\{y\}}^{\tau_\rho}$ y que $y \in \overline{\{x\}}^{\tau_\rho}$, lo que implica que

$$\rho(x, \{y\}) = 0 = \rho(y, \{x\}). \tag{3.1}$$

Defina la aplicación $f : (\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}}) \to (X, \rho)$ colocando $f(0) = x$ y $f(1) = y$, por 3.1 se tiene que $\rho(f(a), f(A)) = 0 \leq \rho_{\mathbb{D}}(a, A)$ para todo $a \in \mathbb{D}$ y $a \subset \mathbb{D}$. Por lo tanto f es una contracción, y como $f(0) = x \neq y = f(1)$ se tiene que f es una contracción que no es constante. □

Ejemplo3.2. Sean (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z) espacios topológicos tal que $\tau_Z = \{\emptyset, Z\}$. Sea $X = Y \times Z$ con la topología producto $\tau = \tau_Y \times \tau_Z$, entonces (X, τ) no es un espacio de Kolmogórov. Para probar esto, se usará el Teorema 3.4, o sea, encontrando una contracción $f : (\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}}) \to (X, \rho_\tau)$ que no sea constante. Para eso tome $a \in Y$ y $b, c \in Z$, $b \neq c$ y considere $f : (\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}}) \to (X, \rho_\tau)$, como $f(0) = (a, b)$ y $f(1) = (a, c)$, note que f es una contracción. En efecto, primero note que $(a, b) \in \overline{\{(a, c)\}}^{\tau}$ y que $(a, c) \in \overline{\{(a, b)\}}^{\tau}$, entonces

$$\rho_\tau(f(x), f(A)) = \quad 0 \quad = \rho_{\mathbb{D}}(x, A), \text{para todo } A \subset \mathbb{D}, A \neq \emptyset.$$

Por consiguiente, f es una contracción, sin embargo f no es constante, pues $f(0) \neq f(1)$. Por lo tanto (X, τ) no es un espacio de Kolmogórov.

Conclusiones

- Un espacio topológico (X, τ) es de Kolmogórov si y solo si para todo par de puntos distintos existe una función que pertenece al ideal correspondiente a uno de estos puntos tal que la imagen del otro punto por medio de esta función es positiva.

- Un espacio topológico (X, τ) es de Kolmogórov si y solo si todo par de puntos diferentes tienen imágenes diferentes por medio de alguna función del cuadro asociado a (X, τ).

- Un espacio topológico (X, τ) es de Kolmogórov si y solo si en el sistema de localización asociado a (X, τ) para todo par de puntos diferentes los ideales correspondientes a estos puntos también son distintos.

- Un espacio topológico (X, τ) es de Kolmogórov si y solo si toda contracción $f : (\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}}) \to (X, \rho)$ es constante.

Recomendaciones

- Realizar una caracterización de los espacios de Kolmogórov usando otras estructuras básicas como torres, envolturas y filtros .
- Realizar caracterizaciones de los espacios topológicos $\mathbb{T}_1,\ \mathbb{T}_2,\ \mathbb{T}_{5/2}\ \mathbb{T}_3,\ \mathbb{T}_{7/2}$ y $\mathbb{T}_4$ usando sistemas de localización, operadores limites, calibres, cuadros y distancias.

Bibliografía

[1] Bartosynski, Tomek and Judah Haim. *Set theory: on the structure of the real line*, A K Peters Wellesley, Massachusetts, 1995.

[2] Birkhoff, Garrett. *Lattice theory.* Vol. 25. American Mathematical Soc., 1940.

[3] Birkhoff, Garrett. *Lattice theory.* Colloquium Publications; Volume 25, 1948.

[4] Bourbaki, Nicolas. *General Topology: Chapters 1–4. Vol. 18.* General Topology: Chapters 1–4. Vol. 18.

[5] Clark, Pete. *Alternative characterizations of topological spaces, preprint.*

[6] Grätzer, George. *Lattice theory: foundation*, foundation. Springer Science Business Media, 2011.

[7] Jech, Thomas. *Set Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[8] Kuratowski, Kazimierz . *Topology Volumen I*, Academic Press, New York and London, 1966.

[9] Lowen, Robert. *Approach spaces: the missing link in the topology-uniformity-metric triad*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 1997.

[10] Lowen, R. and Sioen, M. *A note on separation in AP*, Applied general topology, v. 4, n. 2, p. 475-486, 2003.

[11] Munkres, James. *Topology*, Prentice Hall; 2nd edition, 2000.

[12] Nascimento, Izael. *Axiomas de separação em espaços de aproximação*, 2013.

[13] Steen, L. and Seebach, J. *Counterexamples in topology*. Vol. 18. New York: Springer, 1978.

ANEXO 01

CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD
(RESOLUCIÓN N° 626-2021-CU DEL 30 DE DICIEMBRE 2021)

Yo, GLORIA MARÌA ORTIZ BASAURI, usuario revisor del documento titulado: "Caracterización de los Espacios de Kolgomórov según espacios de aproximación", cuyos autores son: Bach. Soto Fernández, Neisser Arturo y Bach. Leonardo Rodríguez, Deyvis Iván, Identificado con Documento de Identidad 16748071; declaro que la evaluación realizada por el Programa Informático, ha arrojado un porcentaje de similitud de 12 %, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 08 de junio de 2022.

GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071
Docente asesor

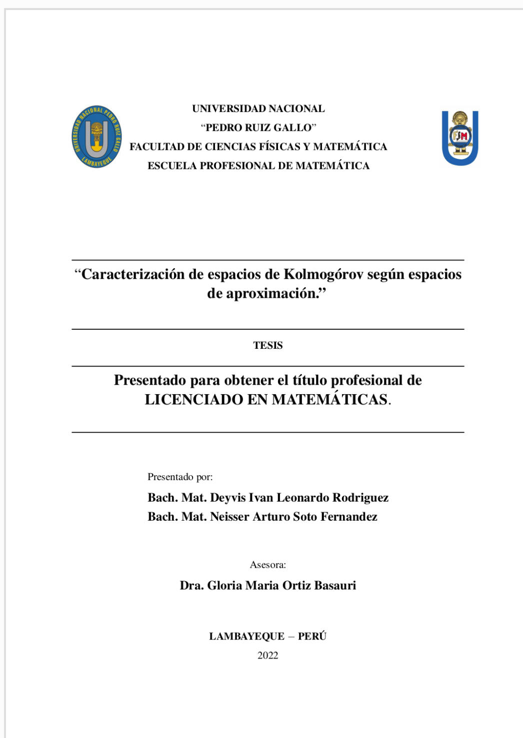
Se adjunta:
*Resumen de Reporte automatizado de similitudes
*Recibo Digital

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Neiser Deyvis Soto Leonardo
Título del ejercicio:	Caracterización de Espacios de Kolmogorov
Título de la entrega:	Caracterización de los Espacios de Kolgomorov según espaci...
Nombre del archivo:	Tesis_Neiser_Deyvis_10_abril.pdf
Tamaño del archivo:	1.17M
Total páginas:	74
Total de palabras:	19,025
Total de caracteres:	73,388
Fecha de entrega:	24-abr.-2022 07:28p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre...	1819074229



UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Caracterización de espacios de Kolmogórov según espacios de aproximación."

TESIS

Presentado para obtener el título profesional de LICENCIADO EN MATEMÁTICAS.

Presentado por:
Bach. Mat. Deyvis Ivan Leonardo Rodriguez
Bach. Mat. Neisser Arturo Soto Fernandez

Asesora:
Dra. Gloria Maria Ortiz Basauri

LAMBAYEQUE – PERÚ
2022

Caracterización de los Espacios de Kolgomorov según espacios de aproximación

INFORME DE ORIGINALIDAD

12%	11%	3%	3%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	hdl.handle.net Fuente de Internet	6%
2	www.fcfm.buap.mx Fuente de Internet	1%
3	www.dspace.uce.edu.ec Fuente de Internet	<1%
4	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo Trabajo del estudiante	<1%
5	carnavalesdmivida.blogspot.com Fuente de Internet	<1%
6	epdf.tips Fuente de Internet	<1%
7	docplayer.com.br Fuente de Internet	<1%
8	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA Trabajo del estudiante	<1%