

**UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**

**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**



---

**Impacto económico del Covid-19 en el PBI peruano  
usando el método del gasto**

---

Tesis que presenta los Bachilleres:

**Ysique Quesquén, Alan**

**Callirgos Gutiérrez, Liliana**

Para obtener el título profesional de

**LICENCIADO (A) EN MATEMÁTICAS**

Asesora:

**Dra. Gloria Maria Ortíz Basauri**

Lambayeque - Perú

Julio - 2022

# UNIVERSIDAD NACIONAL “PEDRO RUÍZ GALLO”

## FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

### ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “Impacto económico del Covid-19 en el PBI peruano usando el método del gasto”, presentada por los bachilleres en matemáticas, Alan Ysique Quesquén, Liliana Callirgos Gutiérrez, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado (a) en Matemáticas.



---

Dra. Lic. Mat. Juana Doris Blas Rebaza

Presidenta Jurado de Tesis



---

Dr. Lic. Mat. Rubén Esteban Burga Barboza

Secretario Jurado de Tesis



---

Dra. Lic. Mat. Diana Mercedes Castro Cárdenas

Vocal Jurado de Tesis

**UNIVERSIDAD NACIONAL “PEDRO RUÍZ GALLO”**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**

**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**

---

**Impacto económico del Covid-19 en el PBI peruano  
usando el método del gasto**

---



---

Bach. Mat. Liliana Callirgos Gutiérrez

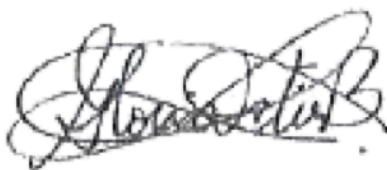
Autora



---

Bach. Mat. Alan Ysique Quesquén

Autor



---

Dra. Lic. Mat. Gloria María Ortiz Basauri

Asesora

# **Agradecimientos**

A nuestras familias por ser el motor fundamental para ser cada día mejores y motivarnos a superarnos académicamente.

A nuestra Asesora, por su apoyo incondicional.

# Resumen

La coyuntura política es un factor que influye sobre el crecimiento económico, sin embargo, en el presente trabajo prescindiremos de ello, pues a pesar que el momento político del Perú, principalmente durante el 2020, fue catastrófico, la pandemia Covid 19 fue la que realmente causó un impacto negativo sobre la economía del Perú y del mundo. En este sentido, se analizó, desde un punto de vista económico, como la pandemia influyó sobre el cálculo del Producto Bruto Interno (PBI) del Perú. Para ello, nos hemos enfocados en una de las tres formas de calcular el PBI, que es el método del Gasto. Dicho método consta de 4 componentes: Gasto del estado, consumo, inversión, y exportaciones netas. Para analizar el impacto de la pandemia sobre el PBI, y sus componentes, se realizó ajustes por medio de polinomios de interpolación y el ajuste de mínimos cuadrados, a cada uno de sus componentes, en base a los datos proporcionados por el Banco Central de Reserva del Perú (BCRP).

En base al análisis de los errores de ajuste (bondad del error) de los ajustes polinómicos en mínimos cuadrados de cada componente del gasto, se eligieron polinomios interpoladores de Lagrange y Newton en diferencias divididas para estas mismas componentes. Se realizó una comparación entre los ajustes polinomiales en mínimos cuadrados y los polinomios interpolantes, y se eligió a los mejores métodos para realizar la extrapolación para los dos trimestres del 2020, y para los años 2020, 2021 y 2022, dependiendo de la data considerada (trimestral o anual). También se consideró necesaria la selección, mediante la aproximación a

los nodos de Chebyshev, para evitar el efecto Runge.

Para las estimaciones anuales, se compararon las cifras obtenidas del PBI para el año 2020, 2021 y 2022, y se compararon con las cifras proyectadas por el BCRP (CEPLAN 2030).

Los resultados que se obtenidos usando los datos trimestrales, servirán para evaluar el efecto inmediato de la pandemia sobre los primeros trimestres del 2020, mientras que los obtenidos usando los datos anuales, servirán para medir el efecto que ha tenido la pandemia sobre los dos próximos años. A la vez que, se podrá determinar (mediante el ajuste por mínimos cuadrados múltiple) las componentes predictoras del PBI, las que más han sido afectadas y las que más aportaron para el cálculo del PBI durante el 2020, principalmente.

**Palabras clave:** Producto Bruto Interno, método del gasto, consumo, inversión, gasto de gobierno, exportaciones netas, interpolación, ajuste lineal.

# Abstract

The political situation is a factor that influences economic growth, however, in this paper we will do without it, because despite the fact that the political moment in Peru, mainly during 2020, was catastrophic, the Covid 19 pandemic was the one that really caused a negative impact on the economy of Peru and the world. In this sense, it was analyzed, from an economic point of view, how the pandemic influenced the calculation of the Gross Domestic Product (GDP) of Peru. To do this, we have focused on one of the three ways of calculating GDP, which is the Expenditure method. Said method consists of 4 components: state spending, consumption, investment, and net exports. To analyze the impact of the pandemic on the GDP, and its components, adjustments were made by means of interpolation polynomials and the adjustment of least squares, to each of its components, based on the data provided by the Central Reserve Bank. of Peru (BCRP).

Based on the analysis of the errors of fit (goodness of the error) of the polynomial adjustments in least squares of each component of the expense, interpolating polynomials of Lagrange and Newton in divided differences were chosen for these same components. A comparison was made between the polynomial adjustments in least squares and the interpolating polynomials, and the best methods were chosen to carry out the extrapolation for the two quarters of 2020, and for the years 2020, 2021 and 2022, depending on the data considered (quarterly or annually). Selection, by approximation to Chebyshev nodes, was also

considered necessary to avoid the Runge effect.

For the annual estimates, the figures obtained from the GDP for the years 2020, 2021 and 2022 were compared, and compared with the figures projected by the BCRP (CEPLAN 2030).

The results obtained using the quarterly data will be used to assess the immediate effect of the pandemic on the first quarters of 2020, while those obtained using the annual data will be used to measure the effect that the pandemic has had on the next two years. . At the same time, it will be possible to determine (through the multiple least squares adjustment) the predictive components of GDP, the ones that have been most affected and the ones that contributed the most to the calculation of GDP during 2020, mainly.

**Key words:** Gross Domestic Product, spending method, consumption, investment, government spending, net exports, interpolation, linear fit.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>X</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Producto Bruto Interno</b>	<b>7</b>
1.1 Producto Bruto Interno PBI . . . . .	7
1.2 Supuestos o características de la definición de PBI . . . . .	8
1.3 Limitaciones del PBI . . . . .	10
1.4 Métodos y fórmulas para calcular el PBI . . . . .	11
1.4.1 Ejemplo ilustrativo . . . . .	11
1.4.2 Comparación del cálculo del PBI por los tres métodos . . . . .	13
1.4.3 Fórmulas para el cálculo del PBI: Modelos Econométricos . . . . .	16
1.5 Interpolación Polinómica . . . . .	19
1.5.1 Interpolación de Lagrange . . . . .	20
1.5.2 Interpolación de Newton con Diferencias Divididas . . . . .	25
1.5.3 Efecto Runge . . . . .	30
1.5.4 Nodos de Chebyshev . . . . .	32
1.6 Ajuste de Datos: Mínimos Cuadrados . . . . .	35
1.6.1 Ajuste por mínimos cuadrados . . . . .	35

1.6.2	Ajuste multiple por Mínimos Cuadráticos . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Ajuste de las variables del método del gasto</b>	<b>50</b>
2.1	Modelación de las variables mediante Ajuste de Mínimos Cuadrados . . . . .	52
2.1.1	Ajuste para el Consumo: . . . . .	53
2.1.2	Ajuste para el Gasto . . . . .	55
2.1.3	Ajuste para la Inversión . . . . .	58
2.1.4	Ajuste de las Exportaciones Netas . . . . .	60
2.1.5	Ajuste multilíneal del PBI con nodos anuales . . . . .	63
2.2	Ajuste de las variables mediante interpolación . . . . .	66
2.2.1	Interpolación del Consumo . . . . .	67
2.2.2	Interpolación del Gasto . . . . .	71
2.2.3	Interpolación del Inversión . . . . .	75
2.2.4	Interpolación de las Exportaciones Netas . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>83</b>
3.1	Resultados de los ajustes usando nodos trimestrales . . . . .	83
3.2	Resultados de los ajustes usando nodos anuales . . . . .	90
	<b>Recomendaciones</b>	<b>100</b>
	<b>Referencias</b>	<b>103</b>
	<b>Anexos</b>	<b>104</b>

# Índice de figuras

Figura0.0.1 <i>PBI y demanda interna</i> . . . . .	4
Figura1.4.1 <i>Cadena Productiva</i> . . . . .	12
Figura1.4.2 <i>Cadena Productiva-Valores agregados</i> . . . . .	12
Figura1.5.1 <i>Datos experimentales supuestos para Interpolación y Ajustes</i> . . . . .	25
Figura1.5.2 <i>Nodos igualmente espaciados-fenómeno de Runge.</i> . . . .	32
Figura1.5.3 <i>Nodos de Chebyshev para <math>n = 3</math>, <math>k = 0, 1, 2, 3</math> en <math>[-1; 1]</math></i> . . . . .	34
Figura1.6.1 <i>Criterios para el mejor ajuste</i> . . . . .	38
Figura1.6.2 <i>Ajuste Lineal</i> . . . . .	40
Figura1.6.3 <i>Ajuste Cuadrático</i> . . . . .	41
Figura1.6.4 <i>Ajuste <math>Ae^{Mx}</math></i> . . . . .	43
Figura1.6.5 <i>Ajuste <math>\alpha x^\beta</math></i> . . . . .	44
Figura2.0.1 <i>Distribución de datos por componente del PBI por trimestre</i> . . . . .	51
Figura2.0.2 <i>Distribución de datos por componente del PBI por año</i> . . . . .	51
Figura2.1.1 <i>Ajuste del Consumo con nodos trimestrales PBI</i> . . . . .	53
Figura2.1.2 <i>Ajuste del Consumo con nodos trimestrales PBI, usando nodos de Chebyshev</i>	54
Figura2.1.3 <i>Ajuste del Consumo con nodos anuales</i> . . . . .	55
Figura2.1.4 <i>Ajuste del Gasto con nodos trimestrales PBI</i> . . . . .	56
Figura2.1.5 <i>Ajuste del Gasto con nodos trimestrales PBI</i> . . . . .	57
Figura2.1.6 <i>Ajuste del Gasto con nodos anuales</i> . . . . .	57

Figura2.1.7 <i>Ajuste de Inversión con nodos trimestrales PBI</i> . . . . .	58
Figura2.1.8 <i>Ajuste de Inversión con nodos trimestrales PBI, usando nodos de Chebyshev</i>	59
Figura2.1.9 <i>Ajuste de la Inversión con nodos anuales</i> . . . . .	60
Figura2.1.10 <i>Ajuste de las Exportaciones Netas con nodos trimestrales PBI</i> . . . . .	61
Figura2.1.11 <i>Ajuste de las Exportaciones Netas con nodos trimestrales PBI, usando nodos de Chebyshev</i> . . . . .	62
Figura2.1.12 <i>Ajuste de las Exportaciones Netas</i> . . . . .	62
Figura2.2.1 <i>Selección de nodos trimestrales de "Producto Interno Bruto trimestral por tipo de Gasto: 2007–2021" (Miles de millones de soles de 2007)</i> . . . . .	68
Figura3.1.1 <i>Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto (Con Polinomios de Lagrange usando nodos trimestrales)</i> . . . . .	84
Figura3.1.2 <i>Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto (Con Polinomios de Newton en DD usando nodos trimestrales)</i> . . . . .	87
Figura3.1.3 <i>Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto (Con ajuste de Mínimos cuadrados usando nodos trimestrales)</i> . . . . .	89
Figura3.2.1 <i>Proyecciones Macroeconómicas 2030</i> . . . . .	91
Figura3.2.2 <i>Escenarios de crecimiento del PBI al 2030 (Variación porcentual anual)</i> .	91
Figura3.2.3 <i>Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto (Con Polinomios de Lagrange usando nodos anuales)</i> . . . . .	92
Figura3.2.4 <i>Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto (Con Polinomios de Newton en DD usando nodos anuales)</i> . . . . .	93
Figura3.2.5 <i>Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto (Con Mínimos cuadrados usando nodos anuales)</i> . . . . .	94

Figura3.2.6Análisis estadístico del modelo del PBI y sus componentes por el método del Gasto . . . . .	95
Figura.0.7 <i>Proyecciones Macroeconómicas 2030</i> . . . . .	108
Figura.0.8 <i>Código MatLab para el Polinomio de Lagrange</i> . . . . .	109
Figura.0.9 <i>Código MatLab para el Polinomio de Newton en Diferencias Divididas</i> . .	110
Figura.0.10 <i>Código MatLab el ajuste con Mínimos Cuadrados</i> . . . . .	111

# Índice de tablas

Tabla1.4.1 <i>Tipo de gasto según agente económico</i> . . . . .	14
Tabla1.4.2 <i>Rentas según factor de producción</i> . . . . .	15

# Introducción

Un país en vías de desarrollo, está en la constante implementación de políticas públicas que le permitan un crecimiento económico sostenido y estable para los siguientes años. Estas medidas están dirigidas esencialmente a lograr el crecimiento del Producto Bruto Interno (PBI), es decir, medidas en mejora del fortalecimiento de las actividades económicas.

De acuerdo al Instituto Peruano de Economía (IPE), “el PBI es el valor de los bienes y servicios finales producidos durante un período de tiempo en un territorio, refiriéndose a bienes y servicios finales ya que sus precios incorporan el valor de los bienes intermedios”. Existiendo tres métodos para su cálculo: método de gasto, el método de la producción y el método del ingreso. El primero, contabiliza la compra agregada de los bienes y servicios de la economía. El segundo, suma el valor de mercado del producto en cada etapa de la producción de cada sector productivo, menos el valor de los insumos utilizados. Por último, el tercero consiste en cuantificar los ingresos recibidos por todos los agentes de la economía en razón de su participación en la producción (las remuneraciones, el consumo de capital fijo, los impuestos a la producción e importación y el excedente de explotación).

De acuerdo a **Mankiw (2014)**, el producto interior bruto (PIB) suele considerarse el mejor indicador de los resultados de la economía. El objetivo del PIB es resumir todos estos datos en una única cifra que representa el valor monetario de la actividad económica en un determinado período de tiempo.

La observación de las cifras del PBI para un período de tiempo determinado permite abordar, entender y explicar el crecimiento económico, la evolución de los precios, y el desenvolvimiento del ingreso y sus implicancias en los niveles de empleo.

La importancia del PBI está en el hecho de que al estar enmarcado dentro de un territorio, es entonces una cadena cíclica. Es decir, todo lo que un país produce en bienes y servicios finales, ha de ser consumido, en su mayoría, por los pobladores del país, representando con ello mayores ingresos y utilidades para las empresas, provocando mayor empleo, y con ello, mayores ingresos para las personas, implicando mayor cantidad de dinero en los bolsillos, y por tanto, mayor consumo.

Debido a la importancia del Producto Bruto Interior (PIB) o Producto Bruto Interno, existen diversos estudios enfocados a distintos países, entre los cuales citamos:

Ruso et al. (**Ruso (2020)**), basados en el método del gasto para calcular el PIB; que incluye en su cálculo cinco importantes variables macroeconómicas, se propusieron cuantificar la incidencia de cada una de estas variables en el crecimiento económico del Ecuador desde 1965 al 2018. Estimando y validando el modelo econométrico para el PIB, usando regresión lineal múltiple por mínimos cuadrados multivariable a las series de datos para el período comprendido entre 1965 y 2018 proporcionados por el Banco Central del Ecuador, 2020.

Cisneros, J., en esta investigación (**Cisneros (2014)**), realizó una revisión del concepto del Producto Interno Bruto (PIB), de los métodos existentes para su cálculo: producción, gasto e ingreso; centrando su análisis en el método del ingreso como medición del PIB.

Bruno Seminario, en esta publicación (**Seminario (2016)**), analiza los ciclos económicos que ha tenido el Perú desde el año 1700. Así mismo, realizó estimaciones del PBI peruano a lo largo de este tiempo, y analizó la influencia de cada sector económico: agricultura, manufactura, minería, etc., con respecto al PBI.

Dimas, J. en su investigación (**Dimas (2019)**) para obtener la licenciatura, estudió como la inversión en infraestructura pública como privada tuvieron un impacto positivo sobre el crecimiento económico del Perú durante el período 2000: I – 2015: IV.

Enrique M. Ochoa G., y Jorge E. Lladó M., funcionarios de la Gerencia de Estudios Económicos del BCRP, como parte de su investigación (**Ochoa (2002)**), elaboraron dos tipos de indicadores líderes para la actividad económica del Perú, para el período 1992- 2001; siendo uno de ellos para predecir la evolución de la trayectoria del ciclo de la economía peruana.

Es conocido que el Ministerio de Economía y Finanzas (MEF), en base a un cálculo proyectado del PBI, planifica el presupuesto público para el siguiente año. De aquí, la importancia de las estimaciones periódicas que se puedan realizar sobre el comportamiento del PBI.

Si el PBI no crece, implica que alguno de sus componentes está en desaceleración, por ejemplo, si hay menos inversión, disminuye el PBI, lo que se refleja en menor cantidad de empleos.

Es por ello que, en esta investigación, valiéndonos de algunas de las herramientas de los Métodos Numéricos, específicamente la Interpolación Numérica<sup>1</sup> y el Ajuste de Mínimos Cuadrados, uno de nuestros objetivos será estimar el PBI del Perú para los años 2020, 2021 y 2022<sup>2</sup>.

Es de conocimiento público que para el período 2020-2021, no solo el Perú sino todos los países, sufrieron una caída enorme de sus actividades económicas y en consecuencia, una caída de su PBI, principalmente el 2020, a consecuencia de la pandemia Covid-19.

Por ende, nuestro principal objetivo es analizar, mediante las curvas modeladas, el impacto que ha tenido el Covid-19 sobre cada una de las componentes del método del gasto (consumo

---

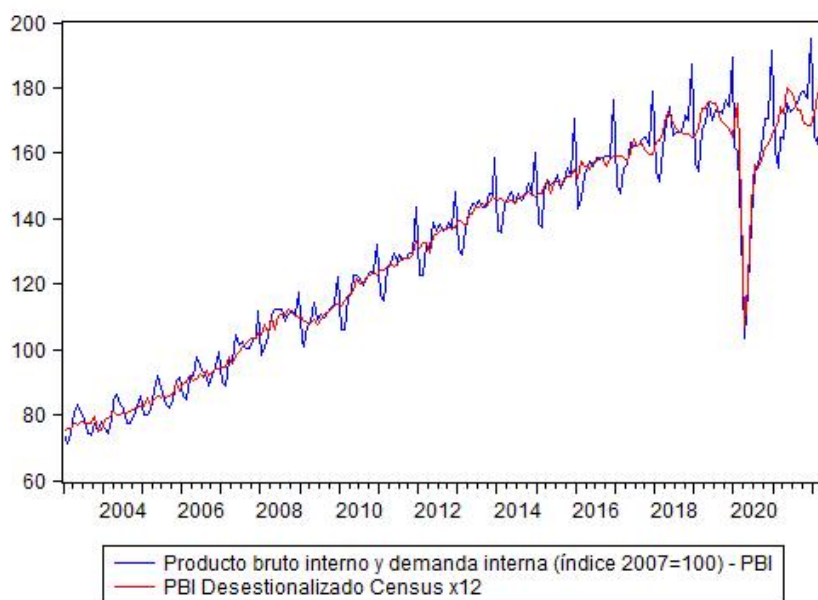
<sup>1</sup>Con nodos seleccionados convenientemente, de acuerdo a su cercanía los nodos de Chebyshev

<sup>2</sup>En base a la data proporcionada por Instituto Nacional de Estadística e Informática, del 2007 al 2019, con el fin de considerar los ciclos económicos que se han presentado en este período.

(C), inversión (I), gasto público (G), Exportaciones netas (X-M)), determinando las componentes que tuvieron mayor afectación durante el período 2020-2021. A la vez, que determinaremos que componentes fueron las más influyentes para el cálculo del PBI en dicho período. Porque a pesar de la coyuntura política que se presentó, estos problemas internos, no influyeron tanto como la Covid-19.

De acuerdo a los datos proporcionados por el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI (2020)), en el período 2010-2019 la economía peruana logro un crecimiento promedio anual de 4.5 %, y en los años 2015-2019 se expandió a un promedio anual de 3.2%. Sin embargo, en el 2020 la economía del Perú se contrae a causa de la recesión inducida por la pandemia (COVID-19), la que situó al país como uno de los más golpeados del mundo. La caída del PBI de los socios comerciales impacto severamente la demanda externa, y la demanda interna se desplomó por la reducción del gasto de los hogares y la interrupción de proyectos de inversión.

Figura 0.0.1: *PBI y demanda interna*



*Fuente:* Instituto Nacional de Estadística e Informática INEI

En la figura 0.0.1, se aprecia como la pandemia Covid-19 impacto gravemente en el 2020

sobre la demanda interna (PBI sin exportaciones netas). También se aprecia, que para el 2021, las cifras mejoraron, pero el daño estaba hecho, la Covid-19 dejó a su paso, una desaceleración en el crecimiento económico, más pobreza, que provocó la toma de decisiones apresuradas; como la de endeudar al Perú por más de 100 años.

¿Qué tanto daño causó?, teniendo en cuentas las expectativas de crecimiento del PBI. ¿Qué componente del PBI fue la más afectada?, son algunas de las preguntas que trataremos de enfocar en este estudio, y que trataremos de dar una explicación. Por ello que, dado el modelo económico del Perú, nos planteamos el problema siguiente:

¿El PBI peruano para el período 2020-2022 será afectado por la influencia de la Covid-19 en la inversión y exportaciones netas?

Con el fin de responder a esta pregunta, nuestro objetivo estará enfocado en analizar el impacto económico que tuvo la pandemia Covid-19 sobre el PBI, sobre cada una de las componentes del cálculo del PBI (usando método del gasto), estableciendo las componentes económicas determinantes para el PBI. Para ello, nos proponemos: En primer lugar, aplicar la Interpolación Polinómica y el Ajuste de Mínimos Cuadrados para tener un ajuste para el PBI y para las componentes del método del gasto, en variable continua, en base a los datos proporcionados por el BCR desde el 2007 al 2019. En segundo lugar, determinar las componentes del gasto que han sido influyentes para el cálculo del PBI, para ello, se analizarán los coeficientes del ajuste multilineal de Mínimos Cuadrados que se realice para los datos recolectados del PBI anual. En tercer lugar, calcular el PBI para el año 2021, compararlo con el proporcionado por el Ministerio de Economía y Finanzas (MEF), y estimar el PBI para el 2022. Finalmente, analizar el impacto que tuvo la pandemia Covid-19, sobre el PBI, comparando las

cifras que se obtengan por el ajuste, con los datos proporcionados por CEPLAN (2019) sobre las Proyecciones macroeconómicas al 2030.

A continuación, se describe la distribución de este trabajo.

En el capítulo I, se describen las herramientas macroeconómicas y matemáticas necesarias para este proyecto. Se detalla la definición de Producto Interno Bruto o Producto Bruto Interno (PBI), describiendo sus alcances y limitaciones. Se muestran las tres formas de como cuantificar el PBI, priorizando el método del gasto. En lo referente a la parte matemática, se describen las herramientas del Análisis Numérico que se emplearán para realizar las modelaciones, como son la Interpolación de Lagrange y Newton en Diferencias Divididas, y el Ajuste de Mínimos Cuadrados con dependencia única y múltiple.

En el capítulo II, se usa la data proporcionada por el Instituto Nacional de Estadística e Informática para realizar los ajustes de las variables involucradas: PBI, consumo, gasto, inversión y exportaciones netas.

En el capítulo III, se describen los resultados obtenidos a partir de los ajustes obtenidos en el capítulo II.

Finalmente, en las conclusiones se dan respuesta a los objetivos planteados, en función a los resultados descritos en el capítulo III. Terminado con algunas recomendaciones para futuras investigaciones referentes a nuestro trabajo.

# Capítulo 1

## Producto Bruto Interno

A nivel macroeconómico los economistas y conocedores de la realidad económica, conciben al Producto Bruto Interno (PBI) como el indicador más completo e importante de la economía por su capacidad de sintetizar, representar y explicar el comportamiento de la economía.

### 1.1. Producto Bruto Interno PBI

En sus investigaciones (Cisneros, 2014, p. 10), aclara que el término Producto Interior Bruto, con el calificativo interior, es más empleado en Europa; mientras que en Latinoamérica se suele hacer uso del término Producto Interno Bruto, predomina el uso del calificativo interno antes que interior. Así mismo, menciona que en el Perú, las instituciones encargadas de difundir estadísticas sobre la economía peruana, como son el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) y el Banco Central de Reserva (BCR), utilizan ampliamente el término Producto Bruto Interno (PBI) en lugar del término Producto Interno Bruto (PIB). Perú no solo es el único país en el mundo en usar el término PBI, también lo hace Argentina.

**Definición 1.1.1** *De acuerdo al INEI (2001), el Producto Bruto Interno (PBI) o Producto Interno Bruto (PIB) se define “como el valor total de los bienes y servicios generados*

*en el territorio económico durante un período de tiempo, que generalmente es un año, libre de duplicaciones” (p. 67). Es el Valor Bruto de Producción menos el valor de los bienes y servicios (consumo intermedio) que ingresa nuevamente al proceso productivo para ser transformado en otros bienes. Por tanto, el PIB excluye la producción de las empresas en el extranjero.*

## **1.2. Supuestos o características de la definición de PBI**

Los supuestos sobre la definición del PBI, han sido analizados por Cisneros, J., en (Cisneros, 2014, p. 10-12), de la cual se han extraído algunos fragmentos.

### **El registro de los valores se realiza a precios de mercado**

Los registros monetarios se realizan considerando los precios de mercado, a los cuales se negocian los bienes, siendo la unidad monetaria local, la que se utiliza para el registro oficial. Los precios de mercado pueden ser a precio corriente o a precio constante. En términos corrientes cuando se está considerando al PIB nominal, y en términos constantes cuando se está considerando el PIB real, es decir, elimina la distorsión de las variaciones en los precios (producto de la inflación como de la deflación), tomando los precios del año que se toma como base.

En esta investigación, se analizarán las mediciones del PIB real; es decir, a precio de mercado constantes.

### **Se registra el total de bienes y servicios producidos**

Esto quiere decir que el PIB comprende tanto los bienes tangibles (bienes físicos: alimentos, ropa, armas, otros), como los intangibles (servicios: servicios educativos, consultas médicas,

otros) legalmente producidos y comercializados en los mercados de una economía.

**Ejemplo 1.2.1** *Cuando se compra una camisa producida en el Perú, el monto monetario correspondiente se registra en el PIB.*

### **Registro solo de bienes y servicios legales**

Como se mencionó en el supuesto anterior, los bienes y servicios tienen que ser legalmente producidos y comercializados en los mercados de una economía. No incluye los producidos de manera ilícita.

**Ejemplo 1.2.2** *Los servicios de operaciones de abortos (salvo que en una economía sean aceptadas por sus normas jurídicas), la comercialización de productos falsificados, etc.*

### **Solo se registran los bienes y los servicios finales.**

Consiste en no considerar dos veces los productos intermedios<sup>1</sup> de la economía. Por tanto, el PIB se refiere solo a la producción final realizada, a precio de mercado (o al precio de año base si se desea medir el PBI real), es decir, solo el valor de los bienes finales, ello debido a que el valor de los bienes intermedios ya está incluido en los precios de los bienes finales.

**Ejemplo 1.2.3** *Cuando una empresa que reside en el Perú produce una silla de madera utiliza madera. La madera es el bien intermedio y la silla bien final. Sumar el valor de mercado de la madera al valor de mercado de la silla implicaría contabilizar dos veces lo mismo, lo que es incorrecto.*

---

<sup>1</sup>Los insumos que se utilizan para producir un bien  $x$ , se llaman bien intermedio y el bien  $x$  en mención se llama bien final.

**Se registra solo los bienes producidos durante el periodo de tiempo indicado.**

Para el cálculo del PIB, se considera los bienes y servicios finales producidos en el periodo de tiempo<sup>2</sup> considerado para el análisis. No comprende las transacciones de bienes producidos en el pasado.

**Ejemplo 1.2.4** *Si una empresa dentro del Perú produce y vende una silla nueva, su valor se incluye en el PIB; en cambio si alguien compró la silla y después de haberla usado la vende a otra persona, su valor no se incluye en el PIB peruano.*

**Se registra solo la producción realizada dentro del territorio nacional**

El PIB mide el valor de la producción llevada a cabo dentro del territorio de un país, tanto por propietarios de factores productivos residentes nacionales como extranjeros.

**Ejemplo 1.2.5** *Si una empresa es propiedad de residentes estadounidenses y produce bienes finales dentro del territorio de Perú, el valor de lo generado por aquella será parte del PIB peruano, no de la producción de Estados Unidos. Así mismo, si una empresa peruana estuviese en los Estados Unidos, el valor de lo generado por aquella será parte del PIB de los Estados Unidos.*

### 1.3. Limitaciones del PBI

- No mide la economía sumergida (actividad económica que escapa al control de Hacienda y al de la Agencia Tributaria. ).
- No mide las actividades sin contraprestación.

---

<sup>2</sup>El periodo de tiempo, por lo general es: trimestral, semestral o anual.

- No mide las externalidades negativas del crecimiento, por ejemplo, la contaminación atmosférica.
- No mide las diferencias en calidad que experimentan los bienes a lo largo de su vida.
- No es un buen indicador de la calidad de vida.
- No mide la distribución de la riqueza ( $\text{PBI per cápita} = \text{PBI} / \text{número de habitantes}$ ).

## 1.4. Métodos y fórmulas para calcular el PBI

Muchos institutos estadísticos nacionales calculan el PBI cada tres meses, y para cuantificarlo, de acuerdo a **Mankiw (2014)**, existen tres métodos: Producción (Flujo Circular), Gasto e Ingreso (renta).

Para comprender como se realiza este cálculo mediante los tres métodos, y que componentes se incluyen en cada método, se analiza el siguiente ejemplo.

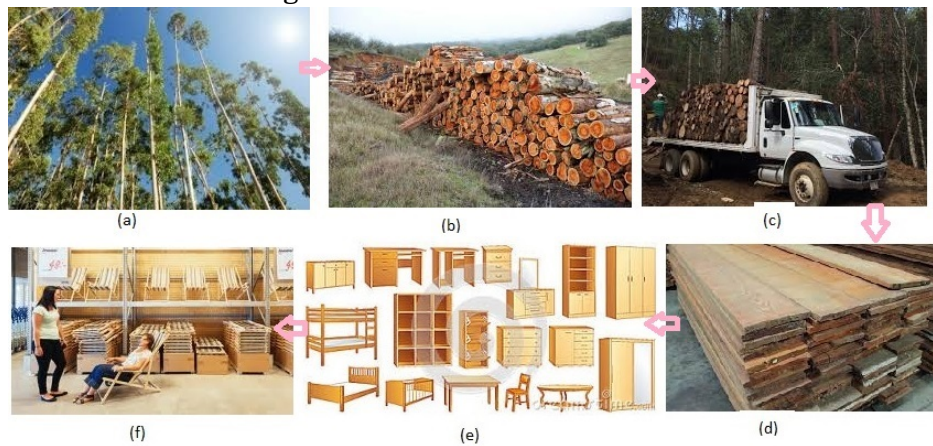
### 1.4.1. Ejemplo ilustrativo

Consideremos la siguiente cadena de producción (Figura 1.4.1), que inicia con la plantación de árboles y termina con la puesta en tienda de muebles hechos con la madera de los árboles.

En este proceso, los que compran los bienes finales, es decir, los muebles en tienda, pueden ser:

- Las familias: Lo que se conoce como **gastos de consumo**. Las familias compran muebles para su uso y comodidad.
- Las empresas: Lo que se conoce como **Inversión**. Las empresas compran muebles para su mejorar su producción.

Figura 1.4.1: Cadena Productiva



- El gobierno: Lo que se conoce como **gastos públicos**. Compran muebles para que los trabajadores realicen mejor sus actividades.

Estos agentes pueden estar en su país o en el extranjero. Por tanto, se tendrá un sector externo.

- Sector externo: cuando los agentes económicos se encuentran en el extranjero.

Supongamos valores de producción en cada transacción, como se indica en la Figura 1.4.2.

Esto es, antes de la siembra de árboles, se tiene un valor de producción de \$0. Después de la tala, estos tienen un valor de \$1000. Una vez transportados a donde se los transformará en muebles, tendrán un valor de \$1200. Ya transformados en muebles, toman el valor de \$3000. Finalmente, se venden en tienda al consumidor final en \$4000.

Figura 1.4.2: Cadena Productiva-Valores agregados



### 1.4.2. Comparación del cálculo del PBI por los tres métodos

En base a la cadena productiva de la Figura 1.4.1, se puede calcular el PBI, mediante los siguientes enfoques:

#### I) Por el Origen de la Producción / Método de Producción / Método del Valor

##### Añadido

Para cuantificar el PBI mediante este método, se tendrá que calcular los **valores agregados** en cada sector económico.

Para este enfoque identificamos los sectores económicos:

- Sector Primario: Los más resaltantes: la agricultura, ganadería, entre otros. En la cadena productiva de la Figura 1.4.1, corresponden como parte de este sector los casos (a) y (b).
- Sector Secundario: Normalmente es el sector industrial, incluye la manufactura de bienes y servicios. En la cadena productiva de la Figura 1.4.1, corresponden como parte de este sector los casos (d) y (e).
- Sector Terciario: Corresponde a todo el sector de servicios: transporte, comercio, educación, salud, turismo, etc.. En la cadena productiva de la Figura 1.4.1, corresponden como parte de este sector los casos (c) y (f).

Los valores agregados por cada sector económico, quedan determinados como: El sector primario, finaliza su etapa de producción generando un valor agregado ( $VA_{S_p}$ ) de \$1000 por mueble. El sector secundario, toma insumos por un valor de \$1200, y al finalizar la producción tienen un valor de \$3000. Así, el valor agregado del sector secundario ( $VA_{S_s}$ ) es de \$1800. El sector terciario, que en el ejemplo aparece como transporte y

como comercio (tienda) tiene un valor agregado ( $VA_{S_T}$ ) de \$200 en transporte, y también \$1000 en comercio. Por tanto, la suma de estos valores agregados nos dará la producción por mueble, es decir, el valor del PBI por mueble.

$$PBI = 1000 + 1800 + 200 + 1000 = 4000 \text{ dólares por mueble.}$$

$$(PBI = VA_{S_p} + VA_{S_s} + VA_{S_T})$$

## II) Por el Destino de la Producción / Método del Gasto / Enfoque de la Demanda

Está en función a los agentes económicos que utilizan el producto final. Pudiendo ser: las familias, las empresas, el Gobierno, y el sector externo.

Cuando los gastos lo realizan:	Tabla 1.4.1: Tipo de gasto según agente económico Se conoce como:
Familias	<b>Consumo:</b> gastos en consumo privado. No incluye el gasto en compra de vivienda ya que se considera como inversión. de las familias.
Empresas	<b>Inversión:</b> el gasto es una inversión para la empresa.
Gobierno	Incluye el gasto que realizan las familias por compra de viviendas. <b>Gasto Público:</b> el gobierno gasta en favor de su población.
Sector Externo	<b>Exportaciones netas:</b> Es el gasto que hacen los extranjeros por los productos locales menos el gasto que hacen los residentes por productos producidos en el exterior.

Bajo la premisa que todo lo que se produce es para ser consumido, se puede suponer que los \$4000 que se venden en la tienda, producto del mueble, es directamente retribuido por uno de agentes económicos. Por ejemplo, se puede pensar que es directamente para el consumo, o como parte de la inversión de una empresa, o gasto si la compra el estado para una de sus entidades, o para la exportación.

## III) Enfoque de las Remuneraciones a los Factores de Producción / Método del Ingreso / Método de la Renta

Este método se fundamenta en que todo lo que gastan los agentes económicos tiene que ser ingreso para “alguien”. Este “alguien” tiene que ser una empresa legalmente constituida. Luego, lo que los agentes económicos gastan representan un poder de ingreso para las empresas. Estos ingresos (rentas) son repartidos entre todos los dueños de los factores de producción<sup>3</sup>: Trabajo, tierras, capital, tecnología, e iniciativa empresarial.

Tabla 1.4.2: *Rentas según factor de producción*

Factor de Producción	Tipo de renta
Trabajo	<b>Salario:</b> Corresponde a la renta por realizar un trabajo.
Tierras (recursos naturales)	<b>Alquiler:</b> Corresponde a la renta por prestar sus tierras o propiedades.
Capital	<b>Intereses:</b> Corresponde a la renta por prestar tus ahorros.
Tecnología	<b>Ingresos de los propietarios:</b> Corresponde a la renta por aportar implementar de tecnología al proceso de producción. también incluye renta por desgaste de los equipos.
Iniciativa Empresarial	<b>Beneficio</b> Corresponde a la renta como creador de la empresa, una vez pagadas las otras rentas.

En ocasiones es frecuente agrupar a tipos de renta en 2 grupos. Los salarios conforman el grupo de **Remuneración de Asalariados (RA)**, y el alquiler, intereses, ingresos, y beneficios en el grupo denominado **Excedente Bruto de Exportación (EBE)**.

Para el ejemplo, los \$4000 que se obtendrían como ingreso por la venta del mueble, sería igual a la suma de las rentas proporcionales que recibirían los dueños de los factores de producción que intervienen en el proceso de obtención y venta del mueble.

**Observación 1.4.1** *El método del gasto contabiliza la compra de productos a su **precio de mercado**. Lo que se conoce como **PBI a precio de mercado** ( $PBI_{pm}$ ). Este por tanto, incluye los impuestos indirectos, es decir, el Impuesto General a las Ventas (IGV). Mientras que tanto el método del ingreso como el de la producción, no incluye el impuesto indirecto ni las subvenciones por parte del gobierno. Esto conlleva a un PBI incompleto, conocido como **PBI a coste de los***

<sup>3</sup>Los factores de producción son los recursos que posee una empresa para utilizarlos en su proceso de producción.

**factores** ( $PBI_{cf}$ ). Por tanto, se tiene:

$$PBI = PBI_{pm} = PBI_{cf} + \text{Impuestos Indirectos} - \text{Subvenciones}.$$

### 1.4.3. Fórmulas para el cálculo del PBI: Modelos Econométricos

En esta sección procederemos a mostrar las fórmulas macroeconómicas que permiten cuantificar el PBI de un país, considerando la totalidad de sus sectores productivos.

#### Por el Origen de la Producción o Método de la Producción

Por el método de la producción, el PBI se entiende como “la agregación de los aportes a la producción total de todos los agentes productores del sistema económico. Para hacer posible la medición, los agentes económicos se clasifican en diferentes categorías homogéneas o sectores económicos; que permiten establecer diferentes grados y niveles de desagregación” (INEI, 2001, p. 44).

El PBI de toda la economía, se obtiene por la sumatoria de los Valores Agregados Brutos Sectoriales, más los Derechos de Importación y los Impuestos a los Productos. Matemáticamente se expresa como:

$$PBI = \sum_{i=1}^n VAB + DM + I_p,$$

donde:  $VAB$  : Valor Agregado Bruto,

$DM$  : Derechos de Importación,

$I_p$  : Impuesto a los Productos,

$n$  : número de actividades económicas, e

$i$  : actividad i-ésima

**Método del Gasto o del Destino de la Producción**

Desde el punto de vista del Gasto o destino de la producción, el PBI “mide el valor de las diferentes utilizaciones finales de la producción en la economía, restándose el valor de las importaciones de los bienes y servicios (producción no generada en el territorio interior)” (INEI, 2001, p. 47).

A los economistas y a los responsables de la política económica no solo les interesa la producción total de bienes y servicios de la economía, sino también la asignación de esta producción a distintos fines. La contabilidad nacional divide el PIB en cuatro grandes categorías de gasto: El consumo (C), la inversión (I), las compras del Estado (G), y las exportaciones netas (XN). (Mankiw, 2014, p. 77-78)

Por tanto, mediante el enfoque del gasto, el PBI se expresa matemáticamente como:

$$PBI = C + I + G + (X - M),$$

donde:

$C$  = Gasto de consumo final de los hogares y las instituciones privadas sin fines de lucro que sirven a los hogares. Satisfacen necesidades individuales.

$G$  = Gasto de consumo del Gobierno, son gastos de consumo final de las entidades gubernamentales para la producción de servicios que satisfagan necesidades colectivas de la población. Corresponde a los gastos del Estado.

$I$  = Inversión, consiste en los bienes que se compran para utilizarlos en el futuro.

$X - M$  = Las exportaciones netas, tiene en cuenta el comercio con otros países. Las exportaciones netas son el valor de todos los bienes y servicios exportados a otros países (exportaciones X) menos el valor de todos los bienes y servicios vendidos por otros países (importaciones M).

### **Método del Ingreso**

Según el (INEI, 2001, p.48), el PBI a partir de este método, se calcula a partir de los ingresos recibidos por los agentes económicos como retribución por su participación en el proceso de producción. También es conocido como método del valor agregado pues constituye la suma de las rentas generadas por los factores de la producción. Se expresa matemáticamente mediante la ecuación:

$$PBI = R + CKF + I_{pm} + EE,$$

donde:

$R$  = Remuneraciones de los asalariados, comprende todos los pagos en efectivo o en especie, efectuados por los empleadores en contrapartida por el trabajo desarrollado por sus empleados durante un período de tiempo determinado; es decir se refiere a los sueldos y salarios en efectivo o en especie antes de cualquier deducción.

$CKF$  = Consumo de Capital Fijo, que representa el valor al costo corriente de reposición de los activos fijos reproducibles tales como maquinaria, instalaciones y equipos consumidos durante un período productivo como resultado de su desgaste normal, y se constituye por las reservas que hacen los productores por este concepto.

$I_{pm}$  = Impuestos a la producción e importación netos (libres de) subsidios, que considera el aporte que corresponde al estado en el valor agregado generado en el proceso de producción cuando se evalúa a precios de mercado.

$EE$  = Excedente de Explotación, que es la retribución al riesgo empresarial (ganancias y pérdidas empresariales), derivadas de la actividad productiva de la unidad económica. Comprende, tanto las utilidades de las empresas constituidas en sociedad como el ingreso de los trabajadores independientes o ingresos empresariales de las empresas no constituidas en sociedad.

## 1.5. Interpolación Polinómica

Con frecuencia se presentan situaciones en las que se requiere conocer y hacer cálculos en función de un limitado número de puntos tabulados que proceden con frecuencia de resultados experimentales. Estos cálculos se realizan a partir de construir el modelo matemático que describe el comportamiento de los datos experimentales. El modelo no es más que una aproximación a lo que realmente acontece. Existen diferentes técnicas para encontrar el modelo, en las que se encuentran la Interpolación Polinómica y el ajuste de datos (que se verá en la siguiente sección).

De acuerdo a Doig, E. y Chainskaia, L. (**Doig, 1999, p. 205**), **interpol** significa “pasar una curva por un conjunto dado de puntos”. Es decir, dado un conjunto de datos experimentales en la forma de puntos:

$$(x_i, y_i) \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Se debe encontrar una función interpolante  $F(x)$ , cuyo gráfico contenga a los puntos mencionados, esto es:

$$y_i = F(x_i), \forall i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Dado un conjunto de  $n + 1$  puntos  $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$ , que se supone formen parte de la

gráfica de una función  $f$ , definida en el intervalo  $[a; b]$ . Es decir,

$$y_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

con  $x_j$  distribuidos ordenadamente en el intervalo  $[a; b]$ , tal que:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_n = b.$$

A estos  $x_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , se les conoce como nodos o también como puntos de interpolación.

Existen varios tipos de Interpolación Polinómica. Para este proyecto emplearemos solo dos: La interpolación de Lagrange y la interpolación de Newton en diferencias divididas, debido a que, si bien es cierto se empleará una data de datos trimestrales, solo escogeremos unos puntos no equiespaciados para la interpolación.

### 1.5.1. Interpolación de Lagrange

El matemático francés Joseph Louis Lagrange halló una forma de construir un polinomio que sirva de aproximación a una función, y que no solo recoja la información de un punto sino de un conjunto de puntos. La construcción de dicho polinomio, se basa en la generalización de una forma alternativa de escribir la interpolación lineal que pasa por los puntos  $(x_0; y_0)$  y  $(x_1; y_1)$  del gráfico de una función  $f(x)$ . Es decir, a la interpolación lineal

$$y \sim y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

la expresó de una manera equivalente en la forma:

$$y \sim P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

A los cocientes de esta interpolación, se denotan por:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{y} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

De esta forma la interpolación lineal para  $f(x)$  está definida para el intervalo  $[a = x_0; b = x_1]$ , y queda expresado como:

$$f(x)|_{[x_0, x_1]} \sim P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x).$$

Esta forma de construir la interpolación lineal para  $f(x)$  usando dos puntos, se generalizó para construir el polinomio de interpolación de grado menor o igual a  $n$ , eligiendo todos los puntos  $(n + 1)$  puntos

$$(x_j, y_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n;$$

de modo tal que  $y_j = f(x_j)$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , y  $f(x)$  es una función definida en el intervalo  $[a; b]$ , con  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Así, queda construido el Polinomio de Interpolación de Lagrange de grado menor o igual a  $n$ , como:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)L_j(x).$$

Satisfaciendo que  $f(x_j) = P_n(x_j)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , debido a que los

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}; \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

quedan definidos como:

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i. \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Las funciones polinómicas  $L_j(x)$  son llamadas Lagrangianos y  $P_n(x)$  se conoce como el polinomio de interpolación de Lagrange.

**Teorema 1.5.1** Sean  $x_j \in [a; b]$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . El polinomio de Lagrange  $P_n(x)$  es el único polinomio de grado menor o igual a  $n$ , que satisface:

$$f(x_j) = P_n(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

**Prueba 1.5.1** En efecto, si  $Q_n(x)$  es otro polinomio distinto a  $P_n(x)$ , con las mismas características. Es decir,

$$f(x_j) = Q(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \text{ y además es de grado menor o igual a } n.$$

Entonces, haciendo  $h(x) = P_n(x) - Q(x)$ , se tiene que  $x_j$  es cero de  $h(x)$ , para todo  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Lo cual implica que  $h(x)$  es de grado  $n + 1$ . lo cual contradice la hipótesis.  $\square$

**Teorema 1.5.2 (Teorema del Error del Polinomio de Lagrange)** Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $(n + 1)$  puntos en el intervalo  $[a; b]$ . Si  $f \in C^{n+1}([a; b])$ , entonces,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Donde:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) L_j(x),$$

es el Polinomio de Lagrange y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j),$$

con  $\xi(x) \in ]a; b[$  para cada  $x \in [a; b]$ .

**Prueba 1.5.2** Si  $x = x_j, j = 0, 1, \dots, n$ , entonces  $R_n(x) = 0$ , lo cual es cierto ya que  $f(x_j) = P_n(x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Ahora, para  $x \neq x_j$ , definamos la función

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - C \prod_{j=0}^n (t - x_j),$$

donde

$$C = \frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{j=0}^n (x - x_j)}.$$

Para  $t = x$ , se tiene que

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - C \prod_{j=0}^n (x - x_j) = 0. \quad (1.5.1)$$

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - (f(x) - P_n(x)) = 0.$$

Lo mismo pasa con  $t = x_j, j = 0, 1, \dots, n$ . Por tanto,  $F(t)$  tiene al menos  $(n+2)$  ceros.

También se tiene que  $F(t)$  es de clase  $C^{(n+1)}([a; b])$ , así, derivando  $(n+1)$  veces resulta:

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - C(n+1)!.$$

Además, por el teorema de Rolle, existe  $t = \xi(x)$  tal que

$$F^{(n+1)}(\xi(x)) = 0.$$

De aquí, y la ecuación anterior, se tiene que

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}.$$

Por tanto, al reemplazar en la (1.5.1), y definición de resto, se obtiene lo que se requiere

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

□

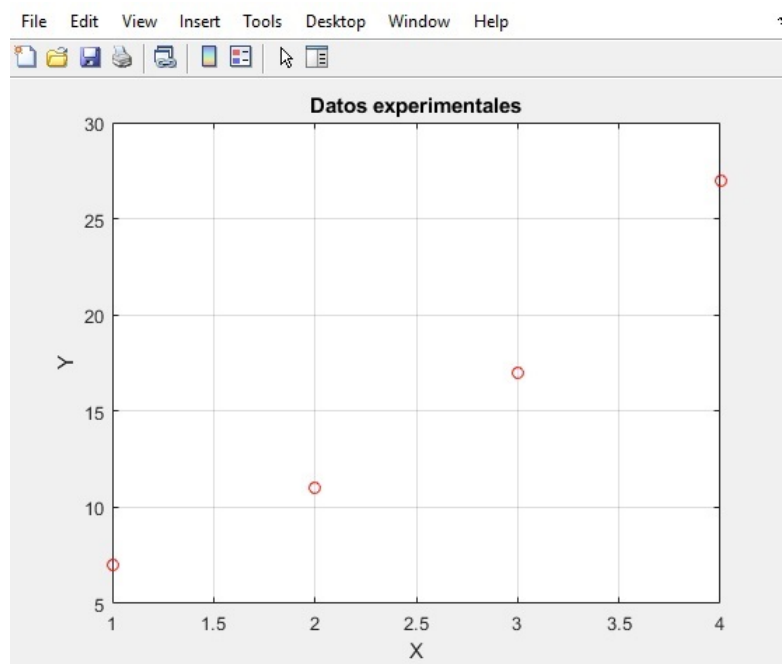
**Ejemplo 1.5.1** *Dado el conjunto de datos experimentales siguiente:*

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	4
$y_i$	7	11	17	27

*cuya distribución se muestra en la Figura 1.5.1: encontraremos, por ejemplo, el polinomio de Lagrange de grado dos para estimar el valor de  $y$  en  $x = 2.5$ .*

*Para la estimación, se considerarán los nodos más cercanos para  $j = 1, 2, 3$ . Los Lagrangianos se construyen del modo siguiente:*

$$L_1(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} = \frac{(x-3)(x-4)}{2},$$

Figura 1.5.1: *Datos experimentales supuestos para Interpolación y Ajustes*

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)} = -(x-2)(x-4),$$

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}.$$

Luego el polinomio es:

$$y|_{[2;4]} \sim P_2(x) = 11L_1(x) + 17L_2(x) + 27L_3(x),$$

y la aproximación es

$$y|_{2,5} \sim P_2(2,5) = 11 L_1(2,5) + 17 L_2(2,5) + 27 L_3(2,5) = 13,5.$$

### 1.5.2. Interpolación de Newton con Diferencias Divididas

Por lo general, es necesario tener más de un polinomio de interpolación, con el fin de lograr una mejor estimación de algún valor desconocido dentro de un dominio específico. Esto

constituye un inconveniente si se usa la interpolación de Lagrange, debido a que la construcción de los polinomios se tendría que hacer de manera independiente. Sin embargo, es posible encontrar más eficiente de encontrar polinomios de interpolación basado en un conjunto de nodos ampliado.

La construcción de este nuevo polinomio se basa representar de un modo equivalente a los polinomios de Lagrange. Por ejemplo, para los puntos  $\{x_0; x_1\}$ , el polinomio de Lagrange de grado 1:

$$P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$

se reescribirse como:

$$P_1(x) = f(x_0) + \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] (x - x_0).$$

El polinomio de Lagrange de grado 2:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}, \end{aligned}$$

se reescribirse como:

$$P_2(x) = f(x_0) + \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] (x - x_0) + \left[ \frac{\left[ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right] - \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right]}{x_2 - x_0} \right] (x - x_0)(x - x_1).$$

Se puede observar que van apareciendo términos que están representados como una división de diferencias, los cuales corresponden a los términos que están entre corchetes. A estos términos se les conoce como diferencias divididas.

**Definición 1.5.1 (Diferencias Divididas)** *Dados  $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}$ ,  $k$  puntos distintos. Se define la diferencia dividida de orden  $k$ , como la diferencia dividida de orden 1 de las diferencias divididas de orden  $(k-1)$ , como:*

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i},$$

siendo la diferencia de orden 1 para los puntos  $x_i, x_{i+1}$ , la siguiente:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Con estas notaciones, los polinomios previamente construidos en este apartado, adquieren la forma:

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0),$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Se puede notar que  $P_1(x)$  es parte de la suma en  $P_2(x)$ . Esto es importante y se va generalizando para los demás polinomios de grado mayor.

Por tanto, el polinomio de grado  $n$  para  $(n+1)$  puntos, estará dado por:

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j).$$

O en su forma abreviada:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Esta forma del polinomio de interpolación se conoce como Polinomio de Interpolación en

Diferencias Divididas.

**Teorema 1.5.3 (Teorema del Error del Polinomio de Newton en Diferencias Divididas)**

Sean  $x_i \neq x_j \in [a; b]$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, n$ . Si  $f \in C^n([a; b])$ , entonces, existe  $\xi \in ]a; b[$  tal que

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

**Prueba 1.5.3** Si  $k = 1$ , se tiene que por el Teorema del Valor Medio, existe  $\xi \in ]a; b[$  tal que

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi),$$

con lo cual

$$f[x_0, x_1] = \frac{f'(\xi)}{1!}.$$

Para el caso general, se define la función

$$L_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

donde  $P_n(x)$  sea el Polinomio de Newton en diferencias Divididas de grado  $n$ , construido en base a los puntos  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{(n-1)} < x_n \in [a; b]$ . En esta función, cuando  $x = x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , se anula. Lo cual implica que tiene  $(n + 1)$  ceros distintos sobre el intervalo  $[a; b]$ . Al aplicar el Teorema de Rolle, se afirma que

$$L'_n(x) = f'(x) - P'_n(x),$$

tiene  $n$  ceros en el intervalo  $]a; b[$ . Así mismo, al aplicar nuevamente el Teorema de Rolle,

$L''_n(x) = f''(x) - P''_n(x)$  tiene  $(n - 1)$  ceros en el intervalo  $]a; b[$ . Lo que permite concluir que

$L^{(n)}_n(x) = f^{(n)}(x) - P^{(n)}_n(x)$ , tenga 1 cero en el intervalo  $]a; b[$ . Es decir, existe  $\xi \in ]a; b[$  tal que

$$L_n^{(n)}(\xi) = 0,$$

$$L_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi),$$

$$0 = f^{(n)}(\xi) - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]n!,$$

obteniendo finalmente:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

□

Esto es importante, ya que permite estimar el error de la estimación, sin conocer la función de donde se supone provienen los puntos. Requiriendo para ello, solo un punto más  $x_{n+1}$ , y que luego de calcular la diferencia dividida  $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}]$ , se reemplazaría en la fórmula del Resto de Lagrange (1.5.2), esto es:

$$R_n(x) = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}] \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

**Ejemplo 1.5.2** *En función a los mismos datos experimentales del ejemplo anterior:*

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	4
$y_i$	7	11	17	27

encontraremos, el polinomio de Newton en Diferencias Divididas de grado dos para estimar el valor de  $y$  en  $x = 2,5$ .

Para la estimación, se considerarán los nodos mismos nodos que el polinomio de Lagrange:

$j = 1, 2, 3$ .

La tabla de las diferencias divididas queda dado por:

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	$x_0 = 1$	$f(x_0) = 7$			
			$f[x_0, x_1] = 4$		
1	$x_1 = 2$	$f(x_1) = 11$		$f[x_0, x_1, x_2] = 1$	
			$f[x_1, x_2] = 6$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0,33333$
2	$x_2 = 3$	$f(x_2) = 17$		$f[x_1, x_2, x_3] = 2$	
			$f[x_2, x_3] = 10$		
3	$x_3 = 4$	$f(x_3) = 27$			

Luego el polinomio es:

$$y|_{[2;4]} \sim P_2(x) = 11 + 6(x - 2) + 2(x - 2)(x - 3).$$

La aproximación es

$$y|_{2,5} \sim P_2(2,5) = 13,625.$$

**Observación 1.5.1** Note que según el Teorema 1.5.3, la cota del error está dado por la diferencia dividida de orden mayor, esto es:

$$R_2(2.5) \leq |0.3333333333333333(2.5 - 1)(2.5 - 2)(2.5 - 3)(2.5 - 4)| = 0.1875$$

### 1.5.3. Efecto Runge

Cuando al interpolar una función mediante un conjunto de nodos, se tiene un error de estimación. Queriendo reducir este error, uno puede pensar que, si se cuenta con muchos nodos,

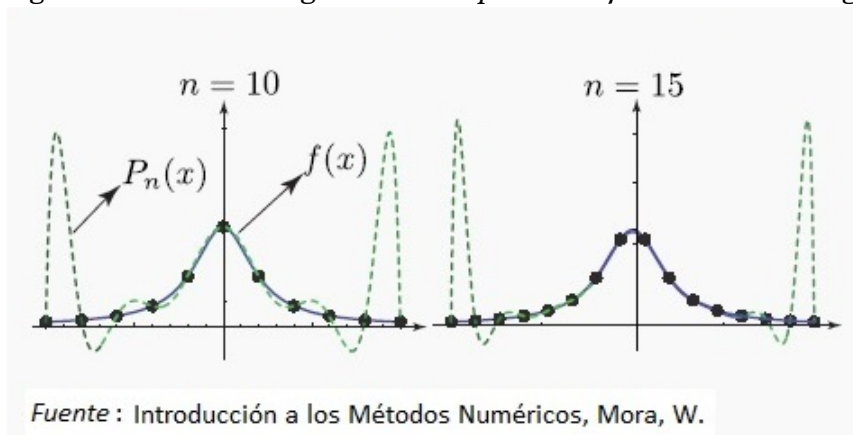
el error de estimación se reduce. Esto por lo general, no es cierto. Pues al tener más nodos, y por tanto, más puntos de la gráfica de la función, al polinomio interpolante se le estaría forzando a pasar por estos puntos ocasionando que tenga oscilaciones significativas y carentes de sentido, en especial si los nodos son equidistantes. Este comportamiento fue estudiado por Carl David Tomé Runge, 1856-1927, alemán, doctor en matemática (1880 en Berlín), concluyendo que dichas oscilaciones se presentan cuando se tiene un número considerable de nodos equidistantes. Estas se presentan en los extremos de la interpolación, debido a la falta de convergencia puntual de los polinomios interpoladores con respecto a la función considerada al aumentar el número de nodos. Runge, demostró que para un conjunto de  $n$  puntos  $(x_i, y_i)$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  pertenecientes al gráfico de una función  $f(x)$ , para  $x \in [-1; 1]$ , cuando  $n$  es considerable, el error absoluto es extremadamente considerable debido a las oscilaciones que el polinomio tiene que realizar para pasar por todos los nodos, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| \right) = +\infty.$$

A las oscilaciones se las conoce como **fenómeno de Runge o efecto Runge (Mora, 2013, p. 19)**.

En la Figura 1.5.2, se aprecia como el gráfico del polinomio interpolante, en los extremos del intervalo  $[-1; 1]$ , se aleja del gráfico de la función a interpolar  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ ; manteniendo su buena aproximación en la parte central, considerando los nodos igualmente espaciados. Es decir, por ejemplo en la figura se aprecian puntos para los nodos  $x_i = -1 + i \cdot h$ , con  $h = 2/n$ , para  $n = 10$  y  $n = 15$ .

Una manera de lograr que el efecto Runge no se presente es eligiendo adecuadamente los nodos, y la manera más eficiente de elegir estos nodos es mediante los ceros del Polinomio de Chebyshev ((Mora, 2013, p. 74-77), Nasini (s.f.)).

Figura 1.5.2: *Nodos igualmente espaciados-fenómeno de Runge.*

Se tienen otras dos formas más eficientes de reducir el efecto Runge, es decir, corregir los abruptos cambios locales. Una de ellas es recurriendo a la Interpolación mediante Trazadores o Splines, en especial los Splines Cúbicos<sup>4</sup>. La otra forma es mediante el Método de Ajuste por Mínimos Cuadráticos, la cual abordaremos en la sección siguiente.

#### 1.5.4. Nodos de Chebyshev

Como ya se había mencionado, cuando se dispone de una gran cantidad de nodos por donde la curva modelada debe pasar, usualmente se presenta el efecto Runge. Además, el proceso de obtener el polinomio de interpolación se vuelve, no difícil, pero sí complejo.

Chebyshev, determinó una manera adecuada de escoger convenientemente los nodos por los cuales el polinomio de interpolación ha de pasar. La elección debería ser de tal forma que error máximo disminuya al crecer el grado del polinómico. Los nodos en mención corresponden a las **raíces del polinomio de Chebyshev**.

Como el efecto Runge, no es producto de la función  $f(x)$  que satisfacen los puntos, sino de la selección de estos, para minimizar el error, basta analizar el último factor de la cota del error (1.5.2). Chebyshev demostró que los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  por los cuales ha de pasar el polinomio

<sup>4</sup>El lector interesado puede revisar los textos (Chapra S., 2006, p.525-536) y (Mora, 2013, p.42-47).

han de ser escogido de forma que:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \prod_{j=0}^n (x - x_j) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

donde  $T_{n+1}(x)$  es el polinomio de Chebyshev de grado  $(n+1)$ . Con lo cual el error de la aproximación, usando los nodos de Chebyshev, queda dado por:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}n!} \max_{-1 \leq \xi \leq 1} |f(\xi)|.$$

El polinomio de Chebyshev de grado  $n$ ,  $T_n(x)$ , está definida mediante la propiedad:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Así, por ejemplo para:

$$n = 0, \quad T_0(\cos(0\theta)) = \cos(0\theta) = 1,$$

$$n = 1, \quad T_1(\cos(1\theta)) = \cos(1\theta) = \cos(\theta),$$

$$n = 2, \quad T_2(\cos(2\theta)) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Haciendo  $x = \cos(\theta)$ , y  $T_0(x) = 1$ , se obtiene la fórmula de recurrencia:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Hay que notar que  $\cos(n\theta) \in \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Así,  $T_n(x)$  tiene  $n$  raíces reales.

Ahora bien, como se conoce, para construir un polinomio de interpolación de grado  $n$ , se requieren  $n + 1$  nodos. Entonces, se requiere resolver la ecuación:

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 0,$$

es decir,

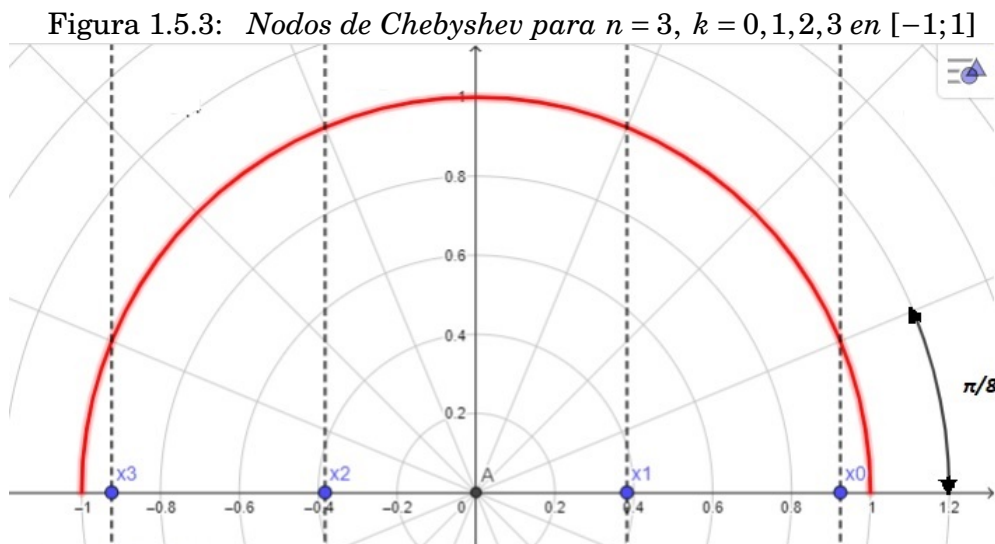
$$\cos((n + 1)\theta) = 0.$$

Los ceros o nodos de Chebyshev son de la forma:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k + 1}{n + 1} \frac{\pi}{2}\right),$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Note que los  $x_k \in [-1; 1]$ . Para encontrar los nodos de Chebyshev en un intervalo de la forma  $[a; b]$ , se utiliza la transformación:

$$z_k = \frac{b - a}{2} \times \cos\left(\frac{2k + 1}{n + 1} \times \frac{\pi}{2}\right) + \frac{b + a}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.5.2)$$



## 1.6. Ajuste de Datos: Mínimos Cuadrados

### 1.6.1. Ajuste por mínimos cuadráticos

Debido a que el fenómeno de Runge es un problema que sucede cuando se usa interpolación polinómica con polinomios de alto grado utilizando nodos equidistantes, este método resulta muy eficiente; encuentra una curva de ajuste sin importar la cantidad de nodos, minimizando el error.

Supongamos que tenemos  $x$  e  $y$ , dos variables que están relacionadas mediante una función  $f(x)$ ; es decir,  $y = f(x)$ . Si para los nodos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , se tienen los valores experimentales  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ , respectivamente, de manera que:

$$y_i = f(x_i) = \hat{y}_i + e_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Siendo los  $e_i$ , errores experimentales. Entonces, se tendrá una función  $F(x)$  que mejor aproxime a  $f(x)$ . Pudiendo ser escrita en la forma

$$F(x) = F(x, c_1, c_2, \dots, c_k) = \sum_{i=1}^k c_i \phi_i(x), \quad (1.6.1)$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_k$  son parámetros y  $\phi_i(x)$ , son funciones seleccionadas a priori, y que conforman el conjunto fundamental del espacio de funciones dependiente del tipo de ajuste que se quiera realizar<sup>5</sup>. Así se tiene que la función  $F$ , genera desviaciones para cada punto  $(x_i; y_i)$ . Estos están representados como:

$$e_i = y_i - F(x_i, c_1, c_2, \dots, c_k).$$

---

<sup>5</sup>Por ejemplo: para un ajuste lineal el conjunto fundamental es  $\{\phi_1(x) = 1; \phi_2(x) = x\}$ , para un ajuste cuadrático sería  $\{\phi_1(x) = 1; \phi_2(x) = x; \phi_3(x) = x^2\}$ , etc..

Se desea que estas desviaciones sean lo más pequeñas posibles. Un criterio para ajustar “mejor” una curva a travez de los datos, es minimizar la suma de los errores residuales de todos los datos disponibles. Sin embargo, de acuerdo a (**Chapra S., 2006, p. 468-469**), este criterio es inadecuado, por ejemplo para el ajuste lineal ya que cualquier línea no vertical que pase por el punto medio del segmento que une dos puntos, da como resultado error cero, sin ser un buen ajuste. Otro criterio podría ser sumando los valores absolutos de las discrepancias, pero esto también es incorrecto debido a que por ejemplo, si se tienen cuatro puntos distintos y si se conectan mediante dos segmentos entrecruzados, como se se muestra en la Figura 1.6.1 b), resulta que con cualquier recta que pase por la intersección de los segmentos y por la región encerrada por los segmentos, se tendrá el mismo error, con lo cual el ajuste no sería único. Una tercera estrategia para ajustar una mejor línea es el criterio **minimax**, que consiste en elegir una línea que minimice la máxima distancia a que un punto se encuentra de la línea. Como se ilustra en la Figura 1.6.1 c), tal estrategia es inadecuada el ajuste, ya que por lo general existen algunos puntos que se encuentran dispersos.

La estrategia que supera las deficiencias de los procedimientos mencionados consiste en minimizar la suma de los cuadrados de los residuos entre la  $y_i = f(x_i)$  medida y la  $\hat{y}_i = F(x_i, c_1, c_2, \dots, c_k)$ . calculada con el modelo lineal. A esto se denomina **bondad del error**.

Por tanto, se determinará los  $c_i$  de tal manera que minimice la suma de los cuadrados de estas desviaciones. Si representamos a esta función por  $E(c_1, c_2, \dots, c_k)$ , entonces, se buscaría lo siguiente:

$$\min_{\{c_1, c_2, \dots, c_k\}} \{E(c_1, c_2, \dots, c_k)\} = \min_{\{c_1, c_2, \dots, c_k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ y_i - F(x_i, c_1, c_2, \dots, c_k) \right]^2 \right\}. \quad (1.6.2)$$

Para ello, se aplica condición de primer orden respecto a cada  $c_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ . Esto es:

$$\frac{\partial \{E(c_1, c_2, \dots, c_k)\}}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

$$\frac{\partial}{\partial c_j} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ y_i - F(x_i, c_1, c_2, \dots, c_k) \right]^2 \right\} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Por regla de la cadena, se obtiene:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \left[ y_i - F(x_i, c_1, c_2, \dots, c_k) \right] \right\} \frac{\partial F(x_i, c_1, c_2, \dots, c_k)}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Reemplazando  $F$ , y  $x = x_i$ , de acuerdo a (1.6.1), se obtiene:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \left[ y_i - F(x_i, c_1, c_2, \dots, c_k) \right] \right\} \phi_j(x_i) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Esto último representa a un sistema lineal de  $k$  ecuaciones con  $k$  incógnitas. Que realizando un despeje adecuado, se obtienen las ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n F(x_i, c_1, c_2, \dots, c_k) \phi_j(x_i) = \sum_{i=1}^n y_i \phi_j(x_i), \quad (1.6.3)$$

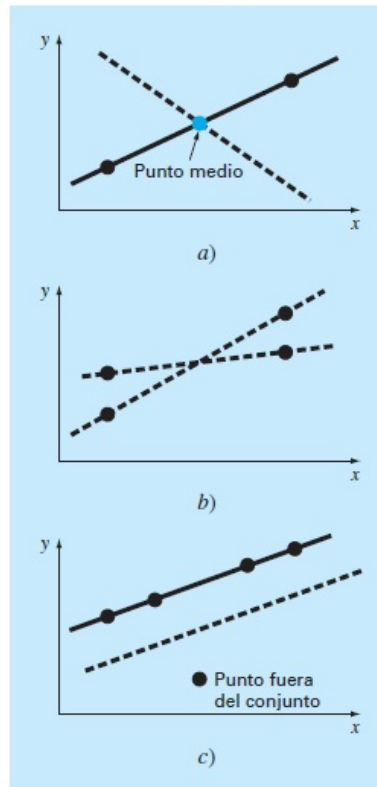
$$c_1 \sum_{i=1}^n \phi_1(x_i) \phi_j(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^n \phi_2(x_i) \phi_j(x_i) + \dots + c_k \sum_{i=1}^n \phi_k(x_i) \phi_j(x_i) = \sum_{i=1}^n y_i \phi_j(x_i), \quad \forall j = 1, 2, \dots, k,$$

denominadas Ecuaciones Normales del Método de Mínimos Cuadrados en los parámetros

$c_1, c_2, \dots, c_k$ .

**Figura 1.6.1: Criterios para el mejor ajuste**

Ejemplo de algunos criterios para "el mejor ajuste" que son inadecuados para la regresión:  
 a) minimizar la suma de los residuos, b) minimizar la suma de los valores absolutos de los residuos y c) minimizar el error máximo de cualquier punto individual.



Fuente: Métod Numéricos para Ingenieros, Chapra, S. y Canale, R., Figura 17.2

**Observación 1.6.1** La bondad del error, es similar para el caso de regresión lineal, pero tienen lecturas distintas. En el primer caso, el cuadrado del residuo (bondad) representa el cuadrado de la discrepancia entre el dato y una estimación de la medida de tendencia central: la media  $\bar{y}$ . En la ecuación (1.6.2), el cuadrado del residuo representa el cuadrado de la distancia vertical entre el dato y otra medida de tendencia central: la línea recta.

**Ejemplo 1.6.1 (Ajustes por Mínimos Cuadrados)** Consideremos el conjunto de datos experimentales del ejemplo 1.5.1

$i$	1	2	3	4
$x_i$	1	2	3	4
$y_i$	7	11	17	27

De acuerdo a la distribución de estos datos, mostrados en la Figura 1.5.1, se propone un ajuste de:

A) Ajuste Lineal.

Al ser lineal, el ajuste es de la forma

$$F(x, c_1, c_2) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x); \quad c_1, c_2 \text{ constantes},$$

donde  $\phi_1(x) = 1$ ,  $\phi_2(x) = x$ .

Las ecuaciones normales asociado es:

$$\begin{cases} 4c_1 + c_2 \sum_{j=1}^4 x_j &= \sum_{j=1}^4 y_j \\ c_1 \sum_{j=1}^4 x_j + c_2 \sum_{j=1}^4 x_j^2 &= \sum_{j=1}^4 x_j y_j, \end{cases}$$

siendo:

$$\sum_{j=1}^4 x_j = 10; \quad \sum_{j=1}^4 x_j^2 = 30; \quad ; \sum_{j=1}^4 y_j = 62; \quad \sum_{j=1}^4 x_j y_j = 188.$$

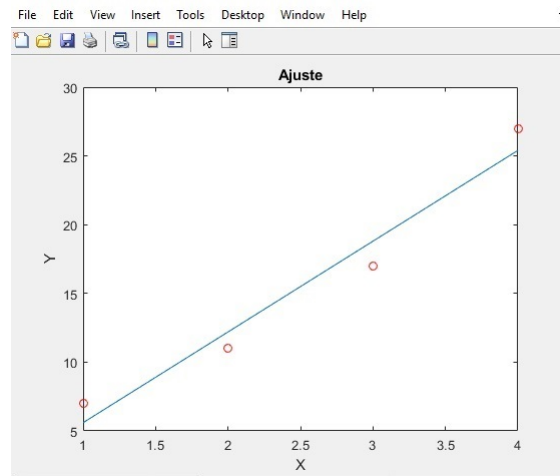
Al resolver el sistema, se obtiene  $c_1 = -1$  y  $c_2 = 6.6$ . Por tanto, el ajuste lineal es

$$y \sim F(x, c_1, c_2) = -1 + 6.6x.$$

Además, la bondad del error es

$$\text{Suma de Errores al Cuadrado: } sec = 9.2.$$

La gráfica del ajuste se puede apreciar en la Figura 1.6.2.

Figura 1.6.2: *Ajuste Lineal*B) *Ajuste Cuadráticos.*

*Al ser cuadrático, el ajuste es de la forma*

$$F(x, c_1, c_2, c_3) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x); \quad c_1, c_2, c_3 \text{ constantes,}$$

*donde  $\phi_1(x) = 1$ ,  $\phi_2(x) = x$ ,  $\phi_3(x) = x^2$ .*

*Las ecuaciones normales asociados son:*

$$\begin{cases} 8c_1 + c_2 \sum_{j=1}^4 x_j + c_3 \sum_{j=1}^4 x_j^2 &= \sum_{j=1}^4 y_j \\ c_1 \sum_{j=1}^4 x_j + c_2 \sum_{j=1}^4 x_j^2 + c_3 \sum_{j=1}^4 x_j^3 &= \sum_{j=1}^4 x_j y_j, \\ c_1 \sum_{j=1}^4 x_j^2 + c_2 \sum_{j=1}^4 x_j^3 + c_3 \sum_{j=1}^4 x_j^4 &= \sum_{j=1}^4 x_j^2 y_j \end{cases}$$

*Matricialmente se expresa como:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 188 \\ 636 \end{bmatrix}$$

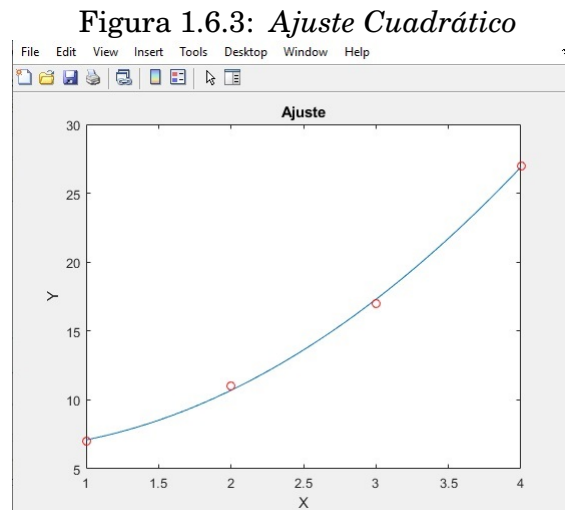
Al resolver el sistema, se obtiene  $c_1 = -1$  y  $c_2 = 6,6$ . Por tanto, la curva ajustada es

$$y \sim F(x, c_1, c_2, c_3) = 6,5 - 0,9x + 1,5x^2.$$

Además, la bondad del error es

$$\text{Suma de Errores al Cuadrado: } sec = 0,2.$$

La gráfica del ajuste se puede apreciar en la Figura 1.6.3.



C) Ajuste exponencial de la forma  $y = Ae^{Mx}$ .

En este caso, en vista que no se conoce al valor de  $M$ , se procede a **linealizar la curva ajustada**. Es decir, se aplicará Logaritmo Natural. Para ello, los datos experimentales

cambiarían por los siguientes:

$i$	1	2	3	4
$x_i$	1	2	3	4
$y_i$	7	11	17	27
$z_j$	1,94591	2,3979	2,83321	3,29584

El ajuste de la curva sería en la forma:

$$z \sim F(x, c_1, c_2) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x);$$

donde  $\phi_1(x) = 1$ ,  $\phi_2(x) = x$  y  $c_1 = \ln(A)$ , y  $c_2 = M$ . Matricialmente, el sistema de ecuaciones normales es:

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,47286 \\ 28,42469 \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema, se obtiene  $c_1 = 1,49694$  y  $c_2 = 0,44851$ . Por tanto, la curva ajustada es

$$y \sim F(x, c_1, c_2) = 4,46799e^{0,44851x}.$$

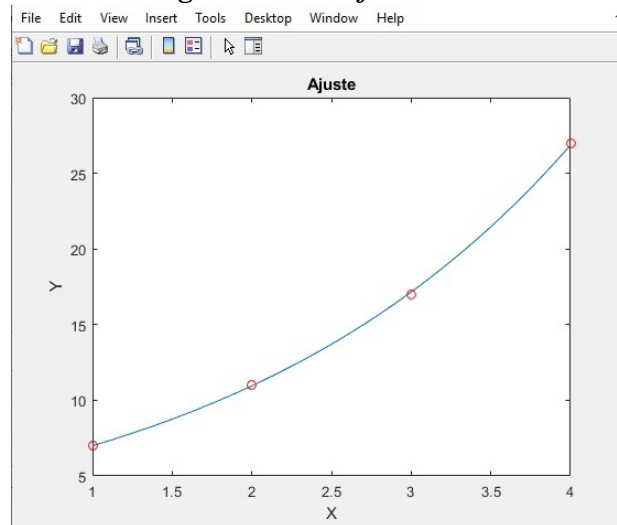
Además, la bondad del error es<sup>6</sup>

$$\text{Suma de Errores al Cuadrado: } sec = 0,0439878.$$

La gráfica del ajuste se puede apreciar en la Figura 1.6.4.

---

<sup>6</sup>Note que es mucho menor a la obtenida usando el polinomio de Newton en diferencias Divididas de grado dos.

Figura 1.6.4: Ajuste  $Ae^{Mx}$ 

D) Ajuste de la forma  $y = \alpha x^\beta$ .

Como el caso del ajuste exponencial, para este caso también se realizará una linealización logarítmica. Esto es, aplicando Logaritmo Natural, se tiene:

$$\ln(y) = \ln(\alpha) + \beta \ln(x).$$

Haciendo  $z = \ln(y)$  y  $w = \ln(x)$ , se tendría el ajuste lineal:

$$z = \ln(\alpha) + \beta x.$$

Requiriendo transformar los datos experimentales por:

$i$	1	2	3	4
$x_i$	1	2	3	4
$w_i$	0	0,69315	1,09861	1,38629
$y_i$	7	11	17	27
$z_j$	1,94591	2,3979	2,83321	3,29584

*El ajuste de la curva sería en la forma:*

$$z \sim F(w, c_1, c_2) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x);$$

*donde  $\phi_1(w) = 1$ ,  $\phi_2(w) = w$  y  $c_1 = \ln(\alpha)$ , y  $c_2 = \beta$ . Matricialmente, el sistema de ecuaciones normales es:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 3,17806 \\ 3,17806 & 3,60921 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,47286 \\ 9,34370 \end{bmatrix}$$

*Al resolver el sistema, se obtiene  $c_1 = 1,86865$  y  $c_2 = 0,94343$ . Por tanto, la curva ajustada es*

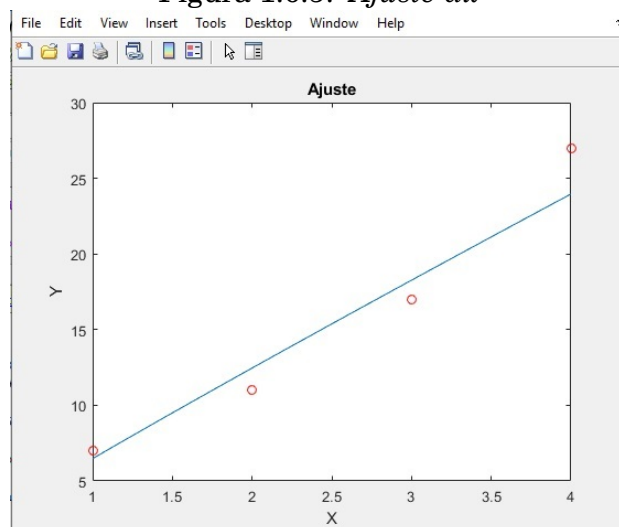
$$y \sim F(x, c_1, c_2) = 6,47952x^{0,943429}.$$

*Además, la bondad del error es*

$$\text{Suma de Errores al Cuadrado: } sec = 13.233.$$

*La gráfica del ajuste se puede apreciar en la Figura 1.6.5.*

**Figura 1.6.5: Ajuste  $\alpha x^\beta$**



*Por tanto, en función a las bondades obtenidas, el mejor ajuste de los cuatro analizados, para los datos experimentales es el ajuste exponencial.*

### 1.6.2. Ajuste multiple por Mínimos Cuadráticos

#### Ajuste lineal múltiple por Mínimos cuadrados

En la sección anterior se mostró un procedimiento para obtener la ecuación de una línea recta por medio del criterio de mínimos cuadrados. Esto es, se mostró una de las formas:

$$\hat{y} = \alpha + \beta x.$$

En esta sección se empieza con una generalización de este procedimiento, a una variable que este linealmente relacionada con más de una variable independiente. Para el caso de que la relación no sea lineal, mediante una linealización o sustitución, se puede realizar un ajuste lineal múltiple.

Si la dependencia lineal es con respecto a  $x_1, x_2, \dots, x_k$  variables independientes, el ajuste lineal múltiple asociado sería:

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k.$$

Supóngase que se cuenta con  $n$  nodos ( $n$  datos). Entonces se tendría un sistema de  $n$  ecuaciones con  $(k + 1)$  incógnitas:  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ . Esto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \alpha + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \dots + \beta_k x_{1k} \\ y_2 = \alpha + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \dots + \beta_k x_{2k} \\ \vdots \\ y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} \\ \vdots \\ y_n = \alpha + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \dots + \beta_k x_{nk} \end{array} \right.$$

Como normalmente se tienen más datos que variables, es decir,  $n > k + 1$ , se tendría un sistema incompatible (no se tendría solución). Este problema se resuelve, si se incluyen más incógnitas. Las incógnitas a incluir son  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , correspondientes a las distancias entre los  $y_i$  y su valor real. Con lo cual se obtiene un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones ya que  $n < n + k + 1$ ). El sistema resultante es:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \alpha + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \dots + \beta_k x_{1k} + \varepsilon_1 \\ y_2 = \alpha + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \dots + \beta_k x_{2k} + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \\ \vdots \\ y_n = \alpha + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \dots + \beta_k x_{nk} + \varepsilon_n \end{array} \right. .$$

Matricialmente, se expresa como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}}_X * \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}}_B + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}}_\varepsilon$$

Sean  $Y, X, B$  y  $\varepsilon$  las notaciones para las matrices del sistema.

El objetivo es resolver el sistema de tal modo que  $\varepsilon$  tenga valores muy pequeños, y por lo explicado en la sección 1.6.1, estará dado por:

$$\min_{\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}} \left\{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 \right\}.$$

Esto último, es equivalente a:

$$\min_{\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \right\},$$

con la notación matricial:

$$\min_{\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}} \left\{ \varepsilon^t * \varepsilon \right\},$$

siendo  $\varepsilon^t$  la transpuesta de  $\varepsilon$ .

Reemplazando  $\varepsilon = Y - X * B$ ,

$$\min_{\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}} \left\{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 \right\} = \min_{\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}} \left\{ (Y - X * B)^t * (Y - X * B) \right\}.$$

Sea  $f(B) = (Y - X * B)^t * (Y - X * B) \equiv (Y - X * B)^2$ . Para resolver el problema, aplicamos condición de primer orden y el análisis del Hessiano para determinar que sea el óptimo.

Aplicando condición de primer orden,

$$\nabla f = \frac{df}{dB} = -2 * X^t * (Y - X * B) = -2X^t * Y + 2X^t * X * B = 0$$

De aquí,

$$X^t * X * B = X^t * Y.$$

En este punto, se supone que las distintas entradas  $\{x_{ij}\}_{j=1}^k$  asociadas a cada  $y_i$ , son linealmente independientes. Entonces,  $X^t * X$  debe tener inversa. con lo cual,

$$B = (X^t * X)^{-1} * X^t * Y. \quad (1.6.4)$$

Ahora, para determinar que se trate un mínimo y un máximo, vemos que:

$$H(f) = 2X^t * X.$$

Al analizar  $X^t * X$ , esta es definida positiva, pues:

$$U^t * X^t * X * U = (X * U)^t * (X * U) = ||X * U||^2 > 0, \quad \forall U \text{ matriz no nula de orden } (k + 1).$$

Lo que implica que  $H(f)$  es definida positiva. Por tanto,

$B$  es mínimo relativo.

Ahora como  $B$  es único y  $H(f)$  es constante, se tiene que  $f$  es convexa. Lo que conlleva a que  $B$  sea mínimo global.

Por otro lado, con el  $B$  calculado, se calcula el vector de residuos  $\varepsilon$  y la bondad del error (suma de los cuadrados de los residuos)

$$\sum \varepsilon^2 = \varepsilon^t * \varepsilon,$$

al aproximar  $Y$  por  $\hat{Y} = X * B$ .

## Capítulo 2

# Ajuste de las variables del método del gasto

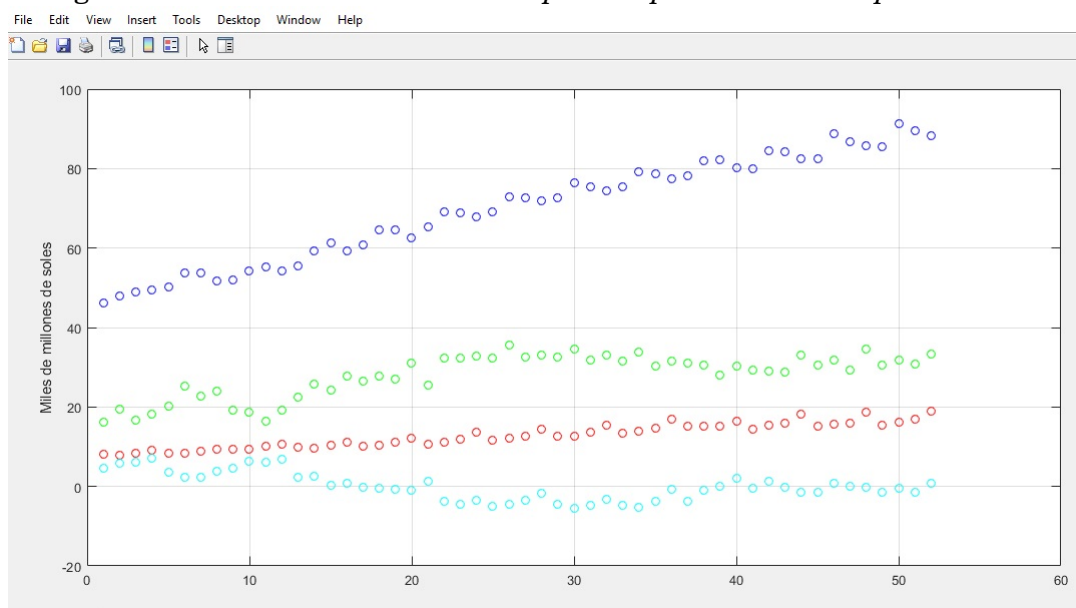
En este capítulo, usando la interpolación Polinómica de Lagrange y Newton en Diferencias Divididas, así como el método de Ajuste por Mínimos Cuadrados, se realizan los ajustes de las variables involucradas: PBI, consumo, gasto, inversión y exportaciones netas; de acuerdo a lo señalado en la sección 1.4.3. La interpolación, como ya mencionamos, no es para extrapolar, esperamos que con la selección adecuada de los nodos, nos permita poder realizar la extrapolación para al menos dos períodos siguientes.

Se ha considerado la data proporcionada por el **INEI (2007)**, en su sección de Información Económica sobre los Principales Indicadores Macroeconómicos; específicamente referente a las cuentas Nacionales Trimestrales de "Producto Bruto Interno Trimestral por Tipo de Gasto 2007–2021-III (Valores a precios constantes de 2007)" (**Anexo 3.2**). Asimismo, para efecto de realizar la comparación de la estimación se ha considerado los datos proporcionados por el Centro Nacional de Planeamiento Estratégico **CEPLAN (2019)**, como parte de sus Proyecciones macroeconómicas al 2030.

La razón por la que se eligieron las interpolaciones de Lagrange y la de Newton en Diferencias Divididas, es debido a su simplicidad y también porque se realizará una selección conveniente de los nodos para evitar el efecto Runge.

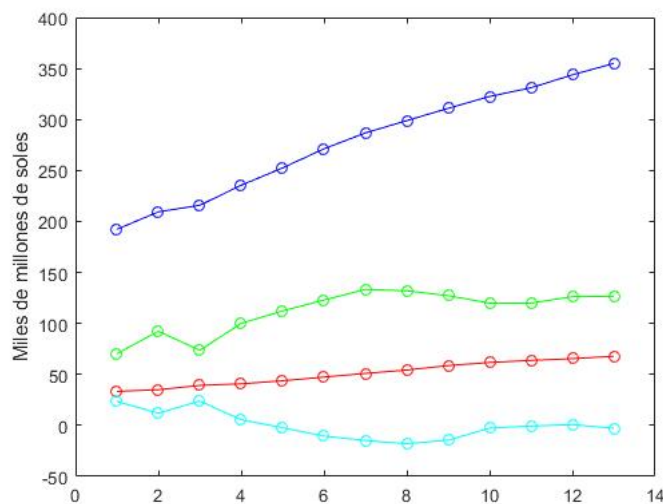
A continuación, se presentan las distribuciones de los datos proporcionados por el INEI, de las componentes del gasto del 2007 al 2019, por trimestre y por año.

Figura 2.0.1: *Distribución de datos por componente del PBI por trimestre*



Consumo(azul), Inversión(verde), Gasto(rojo), Exportaciones Netas(celeste)

Figura 2.0.2: *Distribución de datos por componente del PBI por año*



Consumo(azul), Inversión(verde), Gasto(rojo), Exportaciones Netas(celeste)

## **2.1. Modelación de las variables mediante Ajuste de Mínimos Cuadrados**

Para los ajustes se ha considerado todos los nodos, ya sea los 52 nodos trimestrales (del 2007 al 2019) o todos los 13 nodos anuales, mostrados en el anexo 1 3.2. Al observar la distribución de los datos correspondientes a los componentes del Método del gasto (Figura 2.0.1), se puede observar que, para todos los casos los ajustes deben ser polinómicos. Se evaluaron distintos casos, considerando siempre la mejor bondad del error (menor suma de errores al cuadrado). Al ejecutar con el programa, este muestra, en la mayoría de los casos que hemos evaluado, una advertencia, indicando que es posible que el polinomio no sea el correcto debido a que la matriz de ecuaciones normales es casi singular, tiene determinante casi cero, lo que trae como consecuencia, que el polinomio que muestra no sea el correcto, y por tanto, el cálculo del polinomio tiene cierto margen de error; evidenciándose esto con la bondad del ajuste (suma de errores al cuadrado).

Para los ajustes anuales, considerando que solo se tienen 13 nodos, se consideran todos estos para realizar el ajuste. Cabe indicar que previamente, se ha identificado la menor bondad, y también se ha tenido en cuenta de que la matriz de ecuaciones normales no sea singular o casi singular dado que esto provoca error. Cabe indicar que se buscará emplear una estrategia distinta, intentando abarcar la mayor cantidad de nodos, pero como veremos en los resultados, no fue favorable, con lo cual la mayor estrategia será, primero realizar un ajuste con mínimos cuadrados y luego selección de nodos, de acuerdo al grado, para un estudio posterior, se puede verificar esta afirmación.

### 2.1.1. Ajuste para el Consumo:

Con las pruebas realizadas, el mejor ajuste para el Consumo, se obtiene con un polinomio de grado 9 para los nodos trimestrales, y un polinomio de grado 8 para los nodos anuales.

#### Ajuste polinómico con nodos trimestrales

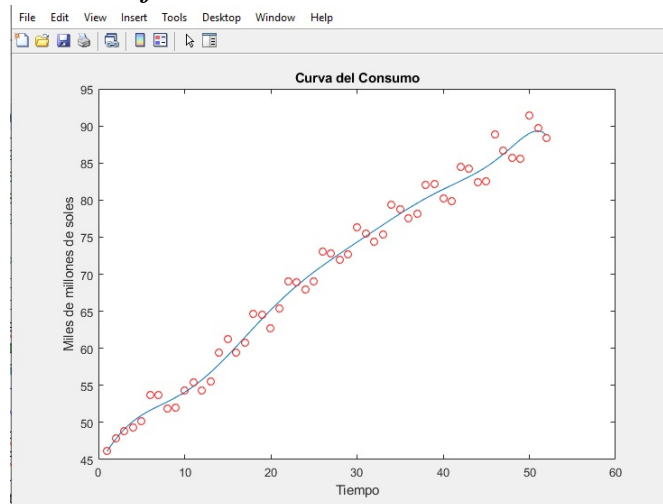
Se usaron todos los 52 nodos, encontrando que el mejor ajuste es mediante un polinomio de grado 9.

Curva ajustada (Figura 2.1.1):

$$+44.1976 + 1.99149x - 0.0661623x^2 - 0.0318967x^3 + 0.00552307x^4 - 0.000381553x^5 + 1,39548 \times 10^{-5}x^6 - 2.84962 \times 10^{-7}x^7 + 3.07514 \times 10^{-9}x^8 - 1.36837 \times 10^{-11}x^9$$

Suma de Errores al Cuadrado  $sec = 112.627$

Figura 2.1.1: *Ajuste del Consumo con nodos trimestrales PBI*



**Ajuste polinómico con nodos trimestrales, usando los nodos de Chebyshev**

En base a lo expuesto, trataremos de reducir la bondad, eligiendo entradas más próximas a los nodos de Chebyshev, eligiendo para ello 10 nodos:

[1.313947315 3.779333633 8.46877708 14.92324226 22.51092114 30.48907886  
38.07675774 44.53122292 49.22066637 51.68605269]

Así, los puntos seleccionados son:

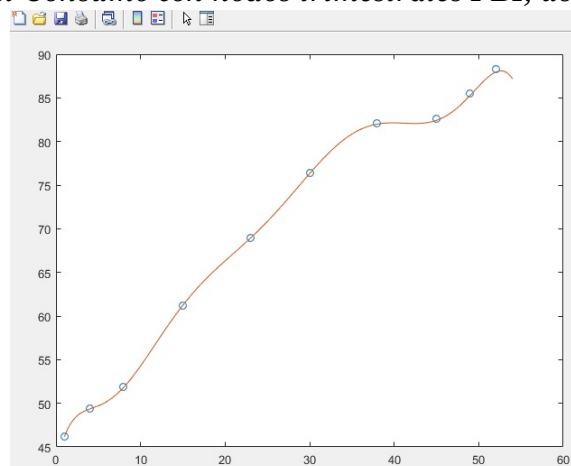
$x_i$	1	4	8	15	23	30	38	45	49	52
$y_i$	46.181	49.355	51.828	61.232	68.940	76.349	82.065	82.585	85.544	88.314

Curva ajustada (Figura 2.1.2):

$$42.5158 + 4.92061 * x - 1.46277 * x^2 + 0.224245 * x^3 - 0.0176577 * x^4 + 0.000791245 * x^5 - 2.09049 \times 10^{-5} * x^6 + 3.20587 \times 10^{-7} * x^7 - 2.62307 \times 10^{-9} * x^8 + 8.78837 \times 10^{-12} * x^9;$$

Suma de Errores al Cuadrado:  $sec = 3.46387 \times 10^{-7}$

Figura 2.1.2: Ajuste del Consumo con nodos trimestrales PBI, usando nodos de Chebyshev



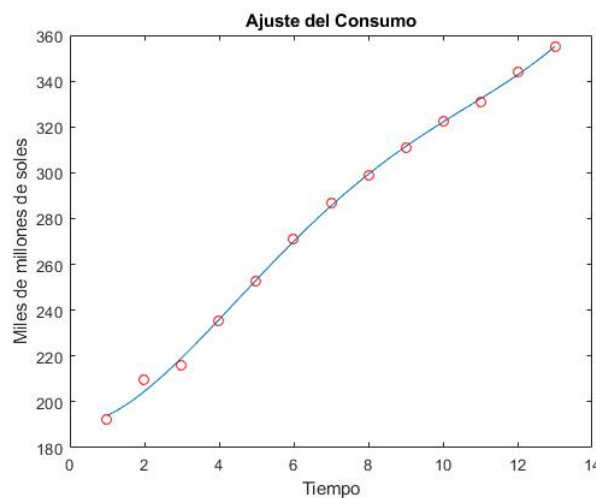
### Ajuste polinómico con nodos anuales

Se usaron todos los nodos para hacer un ajuste polinomial de grado 4. Curva ajustada (Figura 2.1.3):

$$+189.558 + 0.468882 * x + 4.40236 * x^2 - 0.466616 * x^3 + 0.0154286 * x^4$$

Suma de Errores al Cuadrado:  $sec = 44.0927$

Figura 2.1.3: *Ajuste del Consumo con nodos anuales*



### 2.1.2. Ajuste para el Gasto

Con las pruebas realizadas, el mejor ajuste para el Gasto, se obtiene con un polinomio de grado 12 para los nodos trimestrales, y un polinomio de grado 9 para los nodos anuales. Cabe señalar que, para el caso trimestral, se hará un segundo ajuste, en función a los 13 nodos escogidos, de acuerdo a los nodos de Chevishev; como se analizó en el caso de Lagrange.

### Ajuste polinómico con nodos trimestrales

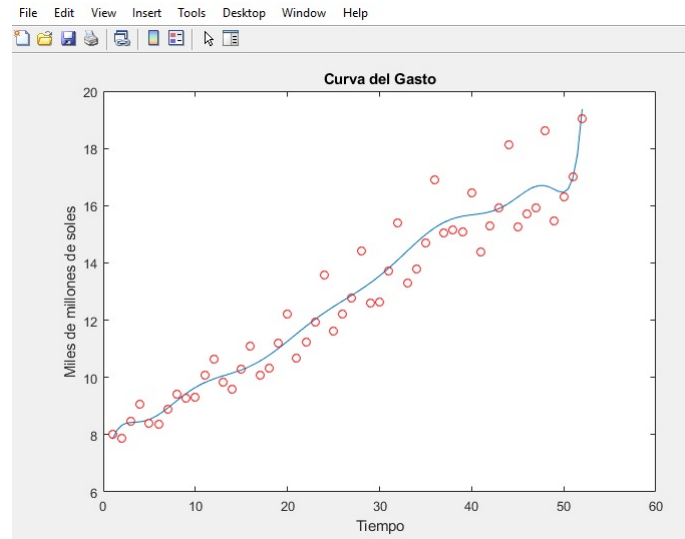
Curva ajustada:

$$+6.39918 + 2.20289x - 0.937464x^2 + 0.197693x^3 - 0.0218805x^4 + 0.00129686x^5 - 3.28144 \times 10^{-5}x^6 - 5.98201 \times 10^{-7}x^7 + 7.21141 \times 10^{-8}x^8 - 2.39984 \times 10^{-9}x^9 + 4.15098 \times 10^{-11}x^{10} - 3.77546 \times$$

$$10^{-13}x^{11} + 1.42997 \times 10^{-15}x^{12}$$

Suma de Errores al Cuadrado (Figura 2.1.4):  $sec = 32.1016$

Figura 2.1.4: *Ajuste del Gasto con nodos trimestrales PBI*



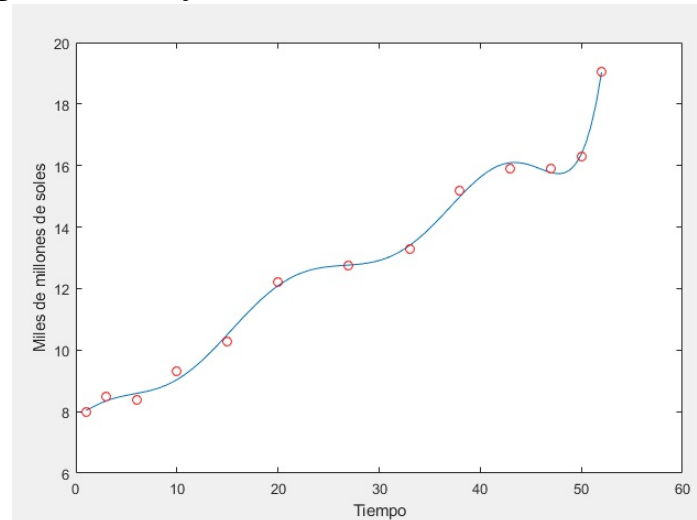
### Ajuste polinómico con nodos trimestrales, usando nodos de Chebyshev

Los nodos seleccionados, son los mismos que se seleccionaron para el polinomio de Lagrange de grado, pero el ajuste no es bueno (se incrementa la bondad a 841.272). Es por ello que, en base a estos puntos seleccionados buscamos otro ajuste polinomial, mediante un polinomio de grado 9.

Curva ajustada (Figura 2.1.5):

$$+7.86481 + 0.147623x + 0.0342498x^2 - 0.0152578x^3 + 0.00215355x^4 - 0.000139938x^5 + 4.80605 \times 10^{-6}x^6 - 8.99165 \times 10^{-8}x^7 + 8.61736 \times 10^{-10}x^8 - 3.28461 \times 10^{-12}x^9$$

Suma de Errores al Cuadrado:  $sec = 0.311668$ .

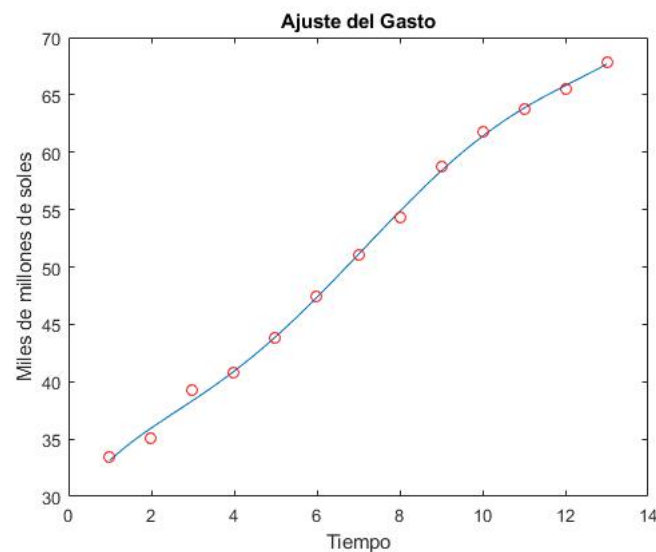
Figura 2.1.5: *Ajuste del Gasto con nodos trimestrales PBI*

### Ajuste polinómico con nodos anuales

Se usaron todos los nodos para hacer un ajuste polinomial de grado 5. Curva ajustada (Figura 2.1.6):

$$+28.9125 + 5.39684 * x - 1.42522 * x^2 + 0.289032 * x^3 - 0.023138 * x^4 + 0.000633805 * x^5$$

Suma de Errores al Cuadrado:  $sec = 2.43729$ .

Figura 2.1.6: *Ajuste del Gasto con nodos anuales*

### 2.1.3. Ajuste para la Inversión

Con las pruebas realizadas, el mejor ajuste para la Inversión, se obtiene con un polinomio de grado 10 para los nodos trimestrales, y también con un polinomio de grado 10 para los nodos anuales.

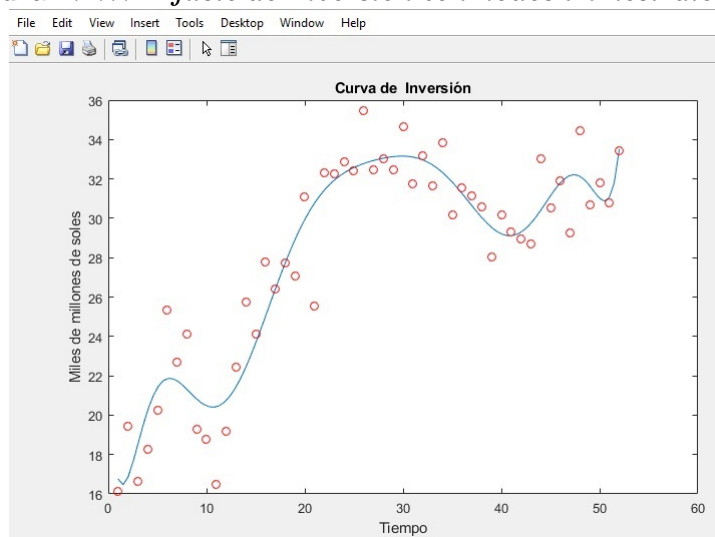
#### Ajuste polinómico con nodos trimestrales

Curva ajustada (Figura 2.1.7):

$$+21.0468 - 7.83445x + 4.411x^2 - 0.966382x^3 + 0.110006x^4 - 0.00731001x^5 + 0.000300159x^6 - 7.73102 \times 10^{-6}x^7 + 1.21699 \times 10^{-7}x^8 - 1.07029 \times 10^{-9}x^9 + 4.02886 \times 10^{-12}x^{10}$$

Suma de Errores al Cuadrado:  $sec = 159.315$ .

Figura 2.1.7: *Ajuste de Inversión con nodos trimestrales PBI*



#### Ajuste polinómico con nodos trimestrales, usando nodos de Chebyshev

Los nodos seleccionados son los mismos que se usaron para la construcción del polinomio de Lagrange de grado 10, para la inversión.

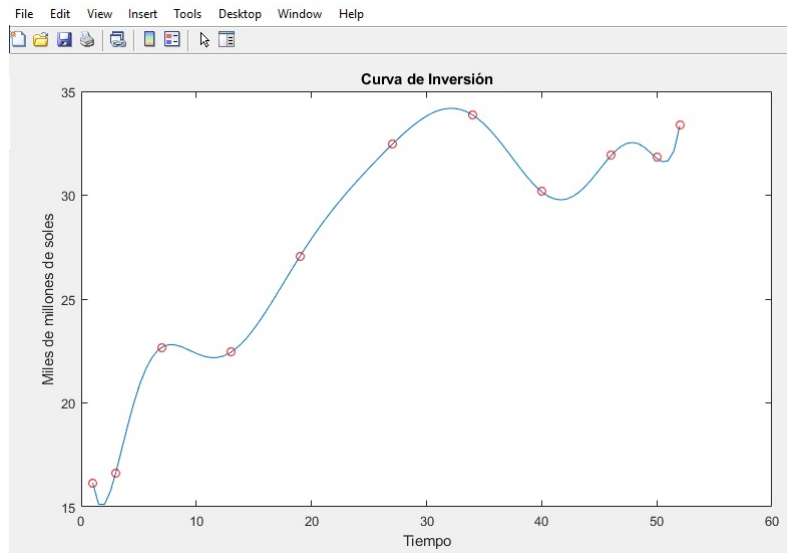
Curva ajustada (Figura 2.1.8):

$$+23.0382 - 11.3589x + 5.43368x^2 - 1.0699x^3 + 0.113628x^4 - 0.00723236x^5 + 0.000289279x^6 -$$

$$7.33232 \times 10^{-6}x^7 + 1.14262 \times 10^{-7}x^8 - 9.98028 \times 10^{-10}x^9 + 3.73743 \times 10^{-12}x^{10}$$

Suma de Errores al Cuadrado:  $sec = 0.0102234$

Figura 2.1.8: *Ajuste de Inversión con nodos trimestrales PBI, usando nodos de Chebyshev*



### Ajuste polinómico con nodos anuales

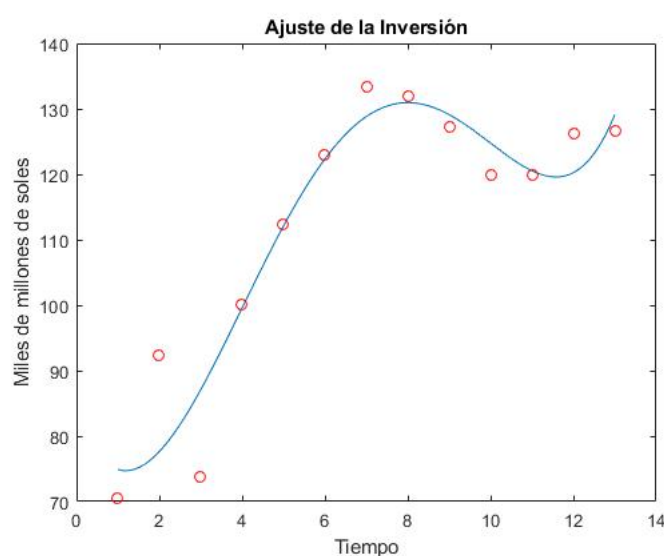
Se usaron todos los nodos para hacer un ajuste polinomial de grado 5.

Curva ajustada (Figura 2.1.9):

$$+83.095 - 15.2002 * x + 7.80045 * x^2 - 0,818077 * x^3 + 0.0160658 * x^4 + 0.000710483 * x^5$$

Suma de Errores al Cuadrado:  $sec = 506.908$

Figura 2.1.9: *Ajuste de la Inversión con nodos anuales*



### 2.1.4. Ajuste de las Exportaciones Netas

Con las pruebas realizadas, el mejor ajuste para las Exportaciones Netas, se obtiene con un polinomio de grado 11 para los nodos trimestrales, y un polinomio de grado 10 para los nodos anuales.

#### Ajuste polinómico con nodos trimestrales

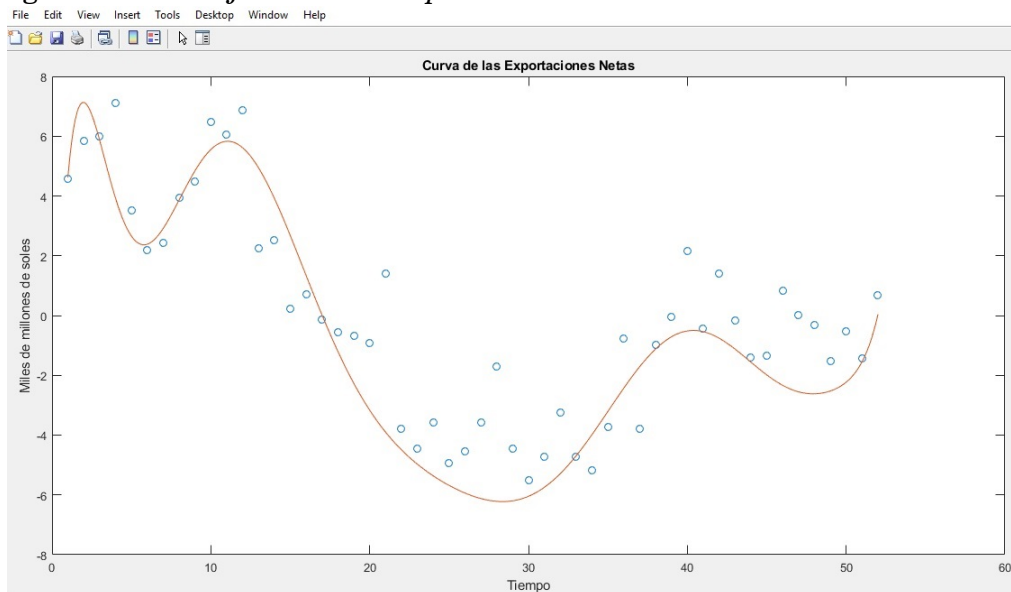
Curva ajustada:

$$-11.3239 + 24.5879x - 11.696x^2 + 2,60718x^3 - 0,324702x^4 + 0.0247609x^5 - 0.00121524x^6 + 3.9179 \times 10^{-5}x^7 - 8,25118 \times 10^{-7}x^8 + 1.09294 \times 10^{-8}x^9 - 8.26438 \times 10^{-11}x^{10} + 2.72086 \times 10^{-13}x^{11}$$

Suma de Errores al Cuadrado:  $sec = 80.0408$

Al ejecutar con el programa, este muestra una advertencia que es posible el polinomio no sea el correcto dado que la matriz de ecuaciones normales sea casi singular, es decir, el cálculo del polinomio tiene cierto margen de error. Y como notamos en la bondad del ajuste (suma de errores al cuadrado), este no es un buen ajuste. Es por ello que se realizará un segundo ajuste.

Figura 2.1.10: *Ajuste de las Exportaciones Netas con nodos trimestrales PBI*



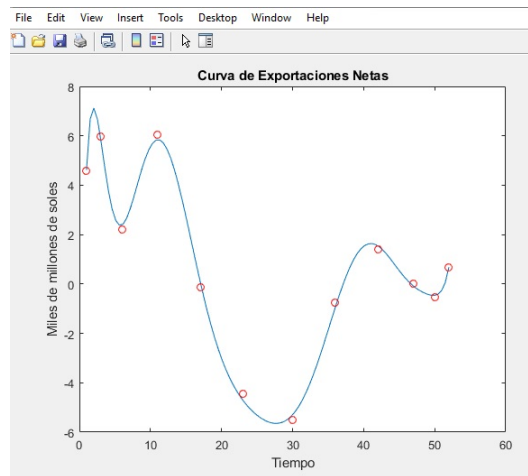
### Ajuste polinómico con nodos trimestrales, usando nodos de Chebyshev

Los nodos seleccionados son los mismos que se seleccionaron para la construcción del polinomio de Lagrange de grado 11, para las exportaciones netas. Curva ajustada ( Figura 2.1.11):

$$-7.63678 + 20.1196x - 9.77676x^2 + 2.15769x^3 - 0.262091x^4 + 0.0193878x^5 - 0.000922739x^6 + 2.89003 \times 10^{-5}x^7 - 5.92648 \times 10^{-7}x^8 + 7.6601 \times 10^{-9}x^9 - 5.66186 \times 10^{-11}x^{10} + 1.82454 \times 10^{-13}x^{11}$$

Suma de Errores al Cuadrado:  $sec = 0.334053$ .

Figura 2.1.11: *Ajuste de las Exportaciones Netas con nodos trimestrales PBI, usando nodos de Chebyshev*



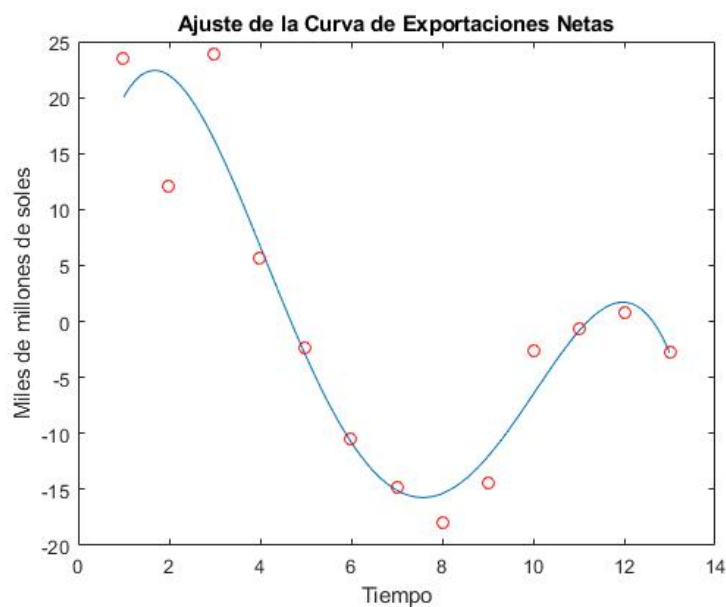
### Ajuste polinómico con nodos anuales

Se usaron todos los nodos para hacer un ajuste polinomial de grado 4. Curva ajustada (Figura 2.1.12):

$$+5.22315 + 23.1657 * x^1 - 9.39629 * x^2 + 1.0768 * x^3 - 0.038056 * x^4$$

Suma de Errores al Cuadrado:  $sec = 199.711$

Figura 2.1.12: *Ajuste de las Exportaciones Netas*



### 2.1.5. Ajuste multilineal del PBI con nodos anuales

A continuación se realizará un ajuste multilineal para el PBI, debido a que el comportamiento de los datos para periodos largos, suele verse como una tendencia lineal. Para ello, la matriz  $X$  estará conformada por todos los datos experimentales (anuales del 2007 al 2019), incluyendo las entradas de **unos** en la primera columna. La matriz  $Y$ , será la matriz columna, representada por todos los datos experimentales para el PBI (anuales del 2007 al 2019). Y la matriz  $B$  es la matriz de incógnitas, como se especificó en la ecuación (1.6.4).

$$X = 1.0 \times 10^2 *$$

0.01000000000	1.92316000000	0.3342400000	0.70436000000	0.23517000000
0.01000000000	2.09428000000	0.35043000000	0.92339000000	0.12060000000
0.01000000000	2.15863000000	0.39272000000	0.73683000000	0.23875000000
0.01000000000	2.35508000000	0.40804000000	1.00073000000	0.05696000000
0,01000000000	2.52468000000	0.43817000000	1.12291000000	-0.02320000000
0.01000000000	2.71240000000	0.47442000000	1.22952000000	-0.10435000000
0.01000000000	2.86789000000	0.51019000000	1.33408000000	-0.14781000000
0.01000000000	2.98901000000	0.54342000000	1.31998000000	-0.17933000000
0.01000000000	3.10912000000	0.58712000000	1.27278000000	-0.14396000000
0.01000000000	3.22549000000	0.61749000000	1.19929000000	-0.02646000000
0.01000000000	3.31078000000	0.63759000000	1.19967000000	-0.00589000000
0.01000000000	3.43760000000	0.65492000000	1.26197000000	-0.0082300000
0.01000000000	3.54913000000	0.67840000000	1.26654000000	-0.0280200000

Para  $Y$ :

$$Y = 1.0 \times 10^2 *$$

$$\begin{bmatrix} 3.1969300000000000 \\ 3.4887000000000000 \\ 3.5269300000000000 \\ 3.8208100000000000 \\ 4.0625600000000000 \\ 4.3119900000000000 \\ 4.5643500000000000 \\ 4.6730800000000000 \\ 4.8250600000000000 \\ 5.0158100000000000 \\ 5.1421500000000000 \\ 5.3462600000000000 \\ 5.4660500000000000 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en  $B = inv(X' * X) * X' * Y$ , se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -0,000000000046839 \\ 1,000000000001450 \\ 0,999999999966036 \\ 0,99999999997179 \\ 0,99999999999471 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el ajuste multilineal para el PBI es:

$$Y = -0,000000000046839 + 1,00000000000145 * C + 0,999999999966036 * G + \\ 0,99999999997179 * I + 0,99999999999471 * XM. \quad (2.1.1)$$

Con una bondad del ajuste bastante aceptable  $\xi = (Y - X * B)' * (Y - X * B)$ :

$$\xi = 3,879169233408212 \times 10^{-17}.$$

## 2.2. Ajuste de las variables mediante interpolación

La selección adecuada de los nodos (data del **Anexo 3.2**), se ha realizado eligiendo a aquellos que son más cercanos a los nodos de Chebyshev sobre los intervalos [1;52] y [1;13]. En [1;52], 1 representa al primer trimestre del año 2007, y 52 al cuarto trimestre del año 2019. Del mismo modo, 1 representa el término del año 2007, y 13 el término del año 2019, para [1;13], como se indica en los cuadros de la Figura 2.2.1. La razón por la cual se realizó esta distinción, es porque la interpolación sirve para estimar un valor desconocido dentro de su rango de entradas. Con una selección adecuada sobre los nodos, se buscará estimar valores para entradas que no son muy distantes del rango de la data, es decir, estaremos encontrando una o dos estimaciones trimestrales posteriores para las variables (de usar los datos por trimestre), o hasta para dos años posteriores (de usar los datos anuales).

Para los ajustes de las componentes, la estrategia cambió en relación a lo seguido para los ajustes usando la data trimestral. Está vez para los ajustes polinómicos de Lagrange y de Newton en DD, se optó por polinomios de grado mayor o igual al que dado por el ajuste por Mínimos Cuadrados Ordinarios, con el propósito de poder comparar los resultados. Vimos que por más que se trató de obtener un mejor ajuste usando los nodos de Chebyshev, los resultados

no fueron alentadores.

Por último, hacemos mención que los gastos han sido multiplicados, para una mejor visualización, por  $10^{-3}$  en comparación a los del **Anexo 3.2**. Por tanto, las salidas  $y_i$  de los gastos, están en **miles de millones de soles**.

### 2.2.1. Interpolación del Consumo

#### Con Interpolación de Lagrange: selección de nodos trimestrales

En base a lo expuesto, se construirá un Polinomio de Lagrange de grado 9, eligiendo entradas más próximas a los nodos de Chebyshev:

[1.313947315 3.779333633 8.46877708 14.92324226 22.51092114 30.48907886  
38.07675774 44.53122292 49.22066637 51.68605269]

Así, los puntos seleccionados son:

$x_i$	1	4	8	15	23	30	38	45	49	52
$y_i$	46.181	49.355	51.828	61.232	68.940	76.349	82.065	82.585	85.544	88.314

Por vez primera, escribiremos la forma con que se debe escribir las entradas de los puntos y código MatLab para el programa `mlagrange.m`. Entradas:

```
>> xi = [1 4 8 15 23 30 38 45 49 52];
```

```
>> fxi = [46.181 49.355 51.828 61.232 68.940 76.349 82.065 82.585 85.544 88.314];
```

```
>> ecuacion = mlagrange(xi, fxi)
```

Figura 2.2.1: Selección de nodos trimestrales de "Producto Interno Bruto trimestral por tipo de Gasto: 2007–2021" (Miles de millones de soles de 2007)

Nodos de Chebyshev	Nodos Polinomio P9	Producto Bruto Interno	Gasto de Consumo Final Privado	Gasto de Consumo de Gobierno	Formación Bruta de Capital	Exportaciones	Importaciones	Exportaciones netas
1.313947315	1	74.911	46.181	7.999	16.148	22.161	17.578	4.583
3.779333633	4	83.761	49.355	9.062	18.244	27.989	20.889	7.100
8.468777708	8	89.272	51.828	9.400	24.111	27.737	23.804	3.933
14.92324226	15	95.850	61.232	10.278	24.126	27.975	27.761	0.214
22.51092114	23	108.678	68.940	11.949	32.253	29.810	34.274	-4.464
30.48907886	30	118.115	76.349	12.625	34.656	27.673	33.188	-5.515
38.07675774	38	126.853	82.065	15.169	30.597	31.225	32.203	-0.978
44.53122292	45	127.030	82.585	15.245	30.552	34.426	35.778	-1.352
49.22066637	49	130.160	85.544	15.473	30.660	34.600	36.117	-1.517
51.68605269	52	141.455	88.314	19.050	33.405	39.102	38.416	0.686

Nodos de Chebyshev	Nodos Polinomio P10	Producto Bruto Interno	Gasto de Consumo Final Privado	Gasto de Consumo de Gobierno	Formación Bruta de Capital	Exportaciones	Importaciones	Exportaciones netas
1.259553232	1	74.911	46.181	7.999	16.148	22.161	17.578	4.583
3.304384118	3	79.962	48.878	8.475	16.624	26.507	20.522	5.985
7.228385854	7	87.670	53.698	8.876	22.675	28.054	25.633	2.421
12.71365915	13	90.023	55.491	9.839	22.445	25.284	23.036	2.248
19.3158198	19	102.090	64.519	11.203	27.048	29.586	30.266	-0.680
26.5	27	114.385	72.745	12.760	32.446	30.925	34.491	-3.566
33.6841802	34	121.797	79.326	13.793	33.861	27.584	32.767	-5.183
40.28634085	40	128.974	80.184	16.441	30.184	37.022	34.857	2.165
45.77161415	46	137.271	88.817	15.709	31.925	38.003	37.183	0.820
49.69561588	50	138.984	91.399	16.292	31.826	37.170	37.703	-0.533
51.74044677	52	141.455	88.314	19.050	33.405	39.102	38.416	0.686

Nodos de Chebyshev	Nodos Polinomio P11	Producto Bruto Interno	Gasto de Consumo Final Privado	Gasto de Consumo de Gobierno	Formación Bruta de Capital	Exportaciones	Importaciones	Exportaciones netas
1.218156035	1	74.911	46.181	7.999	16.148	22.161	17.578	4.583
2.941071921	3	79.962	48.878	8.475	16.624	26.507	20.522	5.985
6.269489823	7	87.670	53.698	8.876	22.675	28.054	25.633	2.421
10.97658356	11	87.944	55.360	10.067	16.459	26.579	20.521	6.058
16.74157247	17	97.016	60.697	10.078	26.390	26.666	26.815	-0.149
23.1715821	23	108.678	68.940	11.949	32.253	29.810	34.274	-4.464
29.8284179	30	118.115	76.349	12.625	34.656	27.673	33.188	-5.515
36.25842753	36	125.186	77.488	16.914	31.556	32.722	33.494	-0.772
42.02341644	42	130.140	84.479	15.307	28.947	36.200	34.793	1.407
46.73051018	47	131.875	86.685	15.913	29.264	37.628	37.615	0.013
50.05892808	50	138.984	91.399	16.292	31.826	37.170	37.703	-0.533
51.78184397	52	141.455	88.314	19.050	33.405	39.102	38.416	0.686

Nodos de Chebyshev	Nodos Polinomio P12	Producto Bruto Interno	Gasto de Consumo Final Privado	Gasto de Consumo de Gobierno	Formación Bruta de Capital	Exportaciones	Importaciones	Exportaciones netas
1.18592371	1	74.911	46.181	7.999	16.148	22.161	17.578	4.583
2.657085812	3	79.962	48.878	8.475	16.624	26.507	20.522	5.985
5.51391142	6	89.602	53.714	8.365	25.324	26.643	24.444	2.199
9.590372215	10	88.818	54.291	9.304	18.756	25.343	18.876	6.467
14.64955911	15	95.850	61.232	10.278	24.126	27.975	27.761	0.214
20.39745056	20	105.033	62.640	12.225	31.102	29.243	30.177	-0.934
26.5	27	114.385	72.745	12.760	32.446	30.925	34.491	-3.566
32.60254944	33	115.554	75.317	13.296	31.668	27.171	31.898	-4.727
38.35044089	38	126.853	82.065	15.169	30.597	31.225	32.203	-0.978
43.40962779	43	128.714	84.271	15.911	28.695	37.189	37.352	-0.163
47.48608858	47	131.875	86.685	15.913	29.264	37.628	37.615	0.013
50.34291419	50	138.984	91.399	16.292	31.826	37.170	37.703	-0.533
51.81407629	52	141.455	88.314	19.050	33.405	39.102	38.416	0.686

La aproximación que se obtiene, para la función de Consumo es:

$$\begin{aligned}
 & \frac{19135766633}{2176468981928841600000}x^9 - \frac{423036400197}{161219924587321600000}x^8 + \\
 & \frac{587497118101}{1832044597583200000}x^7 - \frac{523100593021211}{25016884849756800000}x^6 + \\
 & \frac{574156699234745509}{725489660642947200000}x^5 - \frac{1507377281080493281}{85351724781523200000}x^4 + \\
 & \frac{122034496813380434203}{544117245482210400000}x^3 - \frac{530686147456319025953}{362744830321473600000}x^2 + \\
 & \frac{4250278268590062707}{863678167432080000}x + \frac{7694751838783}{180987202000}.
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

### Con Interpolación de Lagrange: selección de nodos anuales

Se construirá un Polinomio de Lagrange de grado 8, eligiendo entradas más próximos a los nodos de Chebyshev:

$$[1.09 \quad 1.80 \quad 3.14 \quad 4.95 \quad 7.00 \quad 9.05 \quad 10.86 \quad 12.20 \quad 12.91]$$

Así, los puntos seleccionados son:

$x_i$	1	2	3	5	7	9	11	12	13
$y_i$	192.316	209.428	215.863	252.468	286.789	310.912	331.078	343.760	354.913

Empleando código MatLab mlagrange.m, para los puntos mencionados, se obtiene la aproximación:

$$-694907841428853443/8359806808306483200000 \quad * \quad x^8 \quad +$$

72767238083948503889/14629661914536345600000	*	$x^7$	—
1048691403194268846773/8359806808306483200000	*	$x^6$	+
7224897112859268370069/4179903404153241600000	*	$x^5$	—
117510614934493324533317/8359806808306483200000	*	$x^4$	+
70719545202813742816789/1044975851038310400000	*	$x^3$	—
169365823574897931172483/928867423145164800000	*	$x^2$	+
276281607747754804060781/1083678660336025600000	*	$x$	+
45371550729827628823/703687441776640000.			

(2.2.2)

### Con Diferencias Divididas: Selección de nodos trimestrales

Hallaremos un Polinomio de Newton en Diferencias Divididas de grado 9, en base a los siguientes puntos:

$x_i$	1	4	8	15	23	30	38	45	49	52
$y_i$	46.181	49.355	51.828	61.232	68.940	76.349	82.065	82.585	85.544	88.314

Al emplear el programa `pol_newtondd.m`, el ajuste polinomial es:

$$\begin{aligned}
 &= 46.181 + 1.058(x-1) - 0.062821(x-1)(x-4) + 0.0091962 * (x-1)(x-4)(x-8) - 0.00063632(x-1)(x-4)(x-8)(x-15) \\
 &+ 3.022 \times 10^{-5}(x-1)(x-4)(x-8)(x-15)(x-23) - 1.0794 \times 10^{-6}(x-1)(x-4)(x-8)(x-15)(x-23)(x-30) \\
 &+ 3.1461 \times 10^{-8}(x-1)(x-4)(x-8)(x-15)(x-23)(x-30)(x-38) - 7.5125 \times 10^{-10}(x-1)(x-4)(x-8)(x-15)(x-23)(x-30)(x-38)(x-45) \\
 &+ 8.7921 \times 10^{-12}(x-1)(x-4)(x-8)(x-15)(x-23)(x-30)(x-38)(x-45)(x-49)
 \end{aligned}$$

$$4)(x-8)(x-15)(x-23)(x-30)(x-38)(x-45)(x-49).$$

(2.2.3)

### Con Diferencias Divididas: Selección de nodos por año

Se construirá un polinomio de Newton en Diferencias Divididas, también de grado 8. Los nodos seleccionados son los mismos considerados para el Polinomio de Lagrange de grado 8.

Empleando código MatLab `pol_newtondd.m`, para los puntos mencionados, se obtiene:

$$\begin{aligned} &= 192.316 + 17.112 * (x-1) - 5.3385 * (x-1) * (x-2) + 2.3236 * (x-1) * (x-2) * (x-3) - 0.52864 * \\ &(x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-5) + 0.078284 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-5) * (x-7) - 0.0085035 * (x- \\ &1) * (x-2) * (x-3) * (x-5) * (x-7) * (x-9) + 0.00081771 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-5) * (x-7) * \\ &(x-9) * (x-11) - 8.3125e-05 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-5) * (x-7) * (x-9) * (x-11) * (x-12) \end{aligned}$$

(2.2.4)

## 2.2.2. Interpolación del Gasto

### Con Interpolación de Lagrange: selección de nodos trimestrales

Se construirá un Polinomio de Lagrange de grado 12, eligiendo entradas más próximos a los nodos de Chebyshev:

$$\begin{bmatrix} 1.18592371 & 2.657085812 & 5.51391142 & 9.590372215 & 14.64955911 & 20.39745056 \\ 26.5 & 32.60254944 & 38.35044089 & 43.40962779 & 47.48608858 & 50.34291419 \\ 51.81407629 \end{bmatrix}$$

Los puntos seleccionados son:

$x_i$	1	3	6	10	15	20	27	33	38	43
	47	50	52							
$y_i$	7.999	8.475	8.365	9.304	10.278	12.225	12.760	13.296	15.169	15.911
	15.913	16.292	19.050							

La aproximación que se obtiene para la función de Consumo, empleando código MatLab `mlagrange.m`, para los puntos mencionados es:

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{152012145361}{203638898204866156032000000}x^{12} + \\
 &\frac{5406305751727}{16969908183738846336000000}x^{11} - \frac{11600709005034353}{203638898204866156032000000}x^{10} + \\
 &\frac{48347068715167151}{8484954091869423168000000}x^9 - \frac{24129379528205618801}{67879632734955385344000000}x^8 + \\
 &\frac{82087242910359848813}{5656636061246282112000000}x^7 - \frac{7297823458899103995001}{18512627109533286912000000}x^6 \\
 &+ \frac{6017890659446134252099}{8484954091869423168000000}x^5 - \frac{420035059729454799663613}{50909724551216539008000000}x^4 + \\
 &\frac{36909319637482359391003}{62389368322569288000000}x^3 - \frac{7426877442547741285621}{3108041791893561600000}x^2 + \\
 &\frac{5510875377628464360043}{1178465846092975440000}x + \frac{50746327862431}{9765572208000}
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

**Con Polinomio de Lagrange: selección de nodos anuales**

Se construirá un Polinomio de Lagrange de grado 9, eligiendo entradas más próximos a los nodos de Chebyshev:

$$[1.07 \quad 1.65 \quad 2.76 \quad 4.28 \quad 6.06 \quad 7.94 \quad 9.72 \quad 11.24 \quad 12.35 \quad 12.93]$$

Así, los puntos seleccionados son:

$x_i$	1	2	3	4	6	8	10	11	12	13
$y_i$	33.424	35.043	39.272	40.804	47.442	54.342	61.749	63.759	65.492	67.840

Empleando código MatLab mlagrange.m, para los puntos mencionados, se obtiene:

$$= -20557/1425600000 * x^9 + 312923/332640000 * x^8 - 4352329/166320000 * x^7 + 134714161/332640000 * x^6 - 1812522517/475200000 * x^5 + 133359449/5940000 * x^4 - 363172669/4455000 * x^3 + 14394759641/83160000 * x^2 - 814184461/4331250 * x + 5817503/52500$$

(2.2.6)

**Con Diferencias Divididas: selección de nodos trimestrales**

Hallaremos un Polinomio de Newton en Diferencias Divididas de grado 12, en base a los siguientes puntos:

$x_i$	1	3	6	10	15	20	27	33	38	43
	47	50	52							
$y_i$	7.999	8.475	8.365	9.304	10.278	12.225	12.760	13.296	15.169	15.911
	15.913	16.292	19.050							

Al emplear el programa `pol_newtondd.m`, el ajuste polinomial es:

$$\begin{aligned}
 &= 7.999 + 0.238(x-1) - 0.054933(x-1)(x-3) + 0.010412(x-1)(x-3)(x-6) - 0.0010009(x-1)(x-3)(x-6)(x-10) \\
 &+ 6.9114e-05(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15) - 3.4933 \times 10^{-6}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20) \\
 &+ 1.4686 \times 10^{-7}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27) - 5.4109 \times 10^{-9}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27)(x-33) \\
 &+ 1.7122 \times 10^{-10}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27)(x-33)(x-38) - 4.611 \times 10^{-12}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27)(x-33)(x-38)(x-43) \\
 &+ 9.9864 \times 10^{-14}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27)(x-33)(x-38)(x-43)(x-47) - 7.4648 \times 10^{-16}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27)(x-33)(x-38)(x-43)(x-47)(x-50).
 \end{aligned}$$

(2.2.7)

**Con Diferencias Divididas: selección de nodos anuales**

Se construirá un polinomio de Newton en Diferencias Divididas, también de grado 9. Los nodos seleccionados son los mismos considerados para el Polinomio de Lagrange de grado 9.

Empleando código MatLab `pol_newtondd.m`, para los puntos mencionados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&= 33.424 + 1.619 * (x - 1) + 1.305 * (x - 1) * (x - 2) - 0.8845 * (x - 1) * (x - 2) * (x - 3) + 0.27411 * \\
&(x - 1) * (x - 2) * (x - 3) * (x - 4) - 0.053411 * (x - 1) * (x - 2) * (x - 3) * (x - 4) * (x - 6) + 0.0075538 * \\
&(x - 1) * (x - 2) * (x - 3) * (x - 4) * (x - 6) * (x - 8) - 0.00096658 * (x - 1) * (x - 2) * (x - 3) * (x - 4) * (x - \\
&6) * (x - 8) * (x - 10) + 0.00011879 * (x - 1) * (x - 2) * (x - 3) * (x - 4) * (x - 6) * (x - 8) * (x - 10) * (x - \\
&11) - 1.442e - 05 * (x - 1) * (x - 2) * (x - 3) * (x - 4) * (x - 6) * (x - 8) * (x - 10) * (x - 11) * (x - 12)
\end{aligned}$$

(2.2.8)

### 2.2.3. Interpolación del Inversión

#### Con Interpolación de Lagrange: selección de nodos trimestrales

Se construirá un Polinomio de Lagrange de grado 10, eligiendo entradas más próximos a los nodos de Chebyshev:

[1.259553232   3.304384118   7.228385854   12.71365915   19.3158198   26.5  
33.6841802   40.28634085   45.77161415   49.69561588   51.74044677]

Los puntos seleccionados son:

$x_i$	1	3	7	13	19	27	34	40
	46	50	52					
$y_i$	16.148	16.624	22.675	22.445	27.048	32.446	33.861	30.184
	31.925	31.826	33.405					

Empleando código MatLab `mlagrange.m`, para los puntos mencionados, se obtiene:

$$-\frac{3139411094718187}{846895920223168880064000000}x^{10}-\frac{66772140318671}{67454872180260364800000}x^9+ \quad (2.2.9)$$

$$\frac{67185988614656038187}{592827144156218216044800000}x^8-\frac{862347856325412049267}{118565428831243643208960000}x^7+$$

$$\frac{567116518665041606747639}{1976090480520727386816000000}x^6-\frac{8509294111723390438106231}{1185654288312436432089600000}x^5+$$

$$\frac{8358482453324338554154841}{74103393019527277005600000}x^4-\frac{33593461001023398113543}{31617447688331638189056}x^3+$$

$$\frac{2000151013334231047401527939}{370516965097636385028000000}x^2-\frac{14254297621084254196597}{1263355718418018225000}x+$$

$$\frac{1495691794381441}{65060588785500}$$

### Con Polinomio de Lagrange: selección de nodos anuales

Se construirá un Polinomio de Lagrange de grado 10, eligiendo entradas más próximos a los nodos de Chebyshev:

$$[1.06 \quad 1.54 \quad 2.47 \quad 3.76 \quad 5.31 \quad 7 \quad 8.69 \quad 10.24 \quad 11.53 \quad 12.46 \quad 12.94]$$

Así, los puntos seleccionados son:

$x_i$	1	2	3	4	5	7	9	10
	11	12	13					
$y_i$	70.436	92.339	73.683	100.073	112.291	133.408	127.278	119.929
	119.967	126.197	126.654					

Emplenado código MatLab mlagrange.m, para los puntos mencionados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 = & -3101317518786462673/78024863544193843200000 * x^{10} + \\
 & 41598341210325310991/14044475437954891776000 * x^9 - \\
 & 4496363719357869005621/46814918126516305920000 * x^8 + \\
 & 495035371798876434239/278660226943549440000 * x^7 - \\
 & 690206328938820204619591/33439227233225932800000 * x^6 + \\
 & 522843414939126148727267/3343922723322593280000 * x^5 - \\
 & 36306638931317008718480699/46814918126516305920000 * x^4 + \\
 & 86371173630927983864472601/35111188594887229440000 * x^3 - \\
 & 91733345372434714981390937/19506215886048460800000 * x^2 + \\
 & 167002831730956633484453/34832528367943680000 * x - \\
 & 129692118532116594023/70368744177664000
 \end{aligned}$$

(2.2.10)

**Con Diferencias Divididas: selección de nodos trimestrales**

Hallaremos un Polinomio de Newton en Diferencias Divididas de grado 10, en base a los siguientes puntos:

$x_i$	1	3	7	13	19	27	34	40
	46	50	52					
$y_i$	16.148	16.624	22.675	22.445	27.048	32.446	33.861	30.184
	31.925	31.826	33.405					

Al emplear el programa `pol_newtondd.m`, el ajuste polinomial es:

$$\begin{aligned}
 &= 16.148 + 0.238(x-1) + 0.21246(x-1)(x-3) - 0.030631(x-1)(x-3)(x-7) + 0.0024733(x-1)(x-3)(x-7)(x-13) \\
 &- 0.00012329(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19) + 4.5426 \times 10^{-6}(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19)(x-27) \\
 &- 1.371 \times 10^{-7}(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19)(x-27)(x-34) + 3.6383 \times 10^{-9}(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19)(x-27)(x-34)(x-40) \\
 &- 1.0021 \times 10^{-10}(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19)(x-27)(x-34)(x-40)(x-46) + 3.707 \times 10^{-12}(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19)(x-27)(x-34)(x-40)(x-46)(x-50).
 \end{aligned}$$

(2.2.11)

**Con Diferencias Divididas: Selección de nodos por año**

Se construirá un polinomio de Newton en Diferencias Divididas, también de grado 10. Los nodos seleccionados son los mismos considerados para el Polinomio de Lagrange de grado 10, para la inversión.

Emplenado código MatLab `pol_newtondd.m`, para los puntos mencionados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 &= 70.436 + 21.903 * (x-1) - 20.2795 * (x-1) * (x-2) + 14.2675 * (x-1) * (x-2) * (x-3) - 6.0343 * \\
 &(x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) + 1.3891 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) - 0.22128 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * (x-6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * (x-7) + 0.030929 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * \\
& (x-7) * (x-9) - 0.0038345 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * (x-7) * (x-9) * (x-10) + \\
& 0.00041804 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * (x-7) * (x-9) * (x-10) * (x-11) - 3.9748e - \\
& 05 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * (x-7) * (x-9) * (x-10) * (x-11) * (x-12).
\end{aligned}$$

(2.2.12)

## 2.2.4. Interpolación de las Exportaciones Netas

### Con Interpolación de Lagrange: Selección de nodos trimestrales

Se construirá un Polinomio de Lagrange de grado 11, eligiendo entradas más próximos a los nodos de Chebyshev:

$$\begin{bmatrix}
1.218156035 & 2.941071921 & 6.269489823 & 10.97658356 \\
16.74157247 & 23.1715821 & 29.8284179 & 36.25842753 \\
42.02341644 & 46.73051018 & 50.05892808 & 51.78184397
\end{bmatrix}$$

Así, los puntos seleccionados son:

$x_i$	1	3	6	11	17	23	30	36	42
	47	50	52						
$y_i$	4.583	5.985	2.199	6.058	-0.149	-4.464	-5.515	-0.772	1.407
	0.013	-0.533	0.686						

Empleando código MatLab `mlagrange.m`, para los puntos mencionados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2209425876166801}{7994619131353587532800000000}x^{11} - \frac{58863210565466003743}{696531191819181313795200000000}x^{10} + \\
&\frac{57608188673518456903}{5116849893988476134400000000}x^9 - \frac{497777812681125088117}{580805663388935846400000000}x^8 + \\
&\frac{15263049040189975980099181}{3714833023035633673574400000000}x^7 - \frac{598353459510979599538524601}{4643541278794542091968000000000}x^6 + \\
&\frac{13463713078636960679449867747}{5065681395048591373056000000000}x^5 - \frac{106091403699151810029617}{3007770698604672000000000}x^4 + \\
&\frac{40160094513554882559070713697}{14071337208468309369600000000}x^3 - \frac{51869454819604911002034586801}{40732818235039842912000000000}x^2 + \\
&\frac{7089543328134664989067613}{2742076057489218450000000}x - \frac{41048510322828997}{3710020529600000}
\end{aligned}$$

(2.2.13)

### Con Polinomio de Lagrange: Seleccionando nodos anuales

Se construirá un Polinomio de Lagrange de grado 10, eligiendo entradas más próximos a los nodos de Chebyshev:

$$[1.06 \quad 1.54 \quad 2.47 \quad 3.76 \quad 5.31 \quad 7 \quad 8.69 \quad 10.24 \quad 11.53 \quad 12.46 \quad 12.94]$$

Así, los puntos seleccionados son:

$x_i$	1	2	3	4	5	7	9	10
	11	12	13					
$y_i$	23.517	12.060	23.875	5.696	-10.435	-17.933	-14.396	-2.646
	-0.589	0.823	-2.802					

Empleando código MatLab mlagrange.m, para los puntos mencionados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 = & -254731 * x^{10}/21772800000 + 16917209/23950080000 * x^9 - 3710191/212889600 * x^8 + \\
 & 3912521/17820000 * x^7 - 5119367021/3801600000 * x^6 + \\
 & 12305107/11520000 * x^5 + 378552521747/9580032000 * x^4 - 3144308795107/11975040000 * x^3 + \\
 & 14824528684597/19958400000 * x^2 - 11482645417/11880000 * x + 2258069/4800
 \end{aligned}$$

(2.2.14)

### Con Diferencias Divididas: selección de nodos trimestrales

Hallaremos un Polinomio de Newton de grado 11, en base a los siguientes puntos:

$x_i$	1	3	7	11	17	23	30	36	42
	47	50	52						
$y_i$	4.583	5.985	2.421	6.058	-0.149	-4.464	-5.515	-0.772	1.407
	0.013	-0.533	0.686						

Al emplear el programa pol\_newtondd.m, el ajuste polinomial es:

$$= 4.583 + 0.701(x-1) - 0.26533(x-1)(x-3) + 0.049036(x-1)(x-3)(x-7) - 0.0049371(x-1)(x-$$

$$\begin{aligned}
& 3)(x-7)(x-11) + 0.00032384(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17) - 1.4675 \times 10^{-5}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23) \\
& + 5.2478 \times 10^{-7}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23)(x-30) - 1.5647 \times 10^{-8}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23)(x-30)(x-36) \\
& + 4.1726 \times 10^{-10}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23)(x-30)(x-36)(x-42) - 1.072 \times 10^{-11}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23)(x-30)(x-36)(x-42)(x-47) \\
& + 2.7636 \times 10^{-13}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23)(x-30)(x-36)(x-42)(x-47)(x-50)
\end{aligned}$$

(2.2.15)

### Con Diferencias Divididas: selección de nodos anuales

Se construirá un polinomio de Newton en Diferencias Divididas, también de grado 10. Los nodos seleccionados son los mismos considerados para el Polinomio de Lagrange de grado 10.

Empleando código MatLab `pol_newtondd.m`, para los puntos mencionados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& = 23.517 - 11.457 * (x-1) + 11.636 * (x-1) * (x-2) - 8.8777 * (x-1) * (x-2) * (x-3) + 3.5545 * \\
& (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) - 0.74457 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) + 0.10543 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * (x-7) \\
& - 0.012338 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * (x-7) * (x-9) + 0.0011099 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * (x-7) * (x-9) * (x-10) \\
& - 4.2415e-05 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * (x-7) * (x-9) * (x-10) * (x-11) - 1.17e-05 * (x-1) * (x-2) * (x-3) * (x-4) * (x-5) * (x-7) * (x-9) * (x-10) * (x-11) * (x-12)
\end{aligned}$$

(2.2.16)

## Capítulo 3

### Resultados

En este capítulo, se detallan los resultados de los ajustes de las curvas de Consumo, Gasto, Inversión, y Exportaciones Netas, para las estimaciones trimestrales y anuales, que se obtuvieron usando los polinomios de interpolación de Lagrange, Newton en Diferencias divididas y Ajuste de Mínimos Cuadrados lineal en una variable, y multivariable. En base a los resultados, se procede a seleccionar el método que más se ajusta las cifras reales o proyectadas, realizando una comparación entre estos tres métodos.

En las figuras que se mostrarán, los puntos indicados con círculos (*o*), representan las cifras reales reportadas por el INEI, para las componentes y también para el PBI.

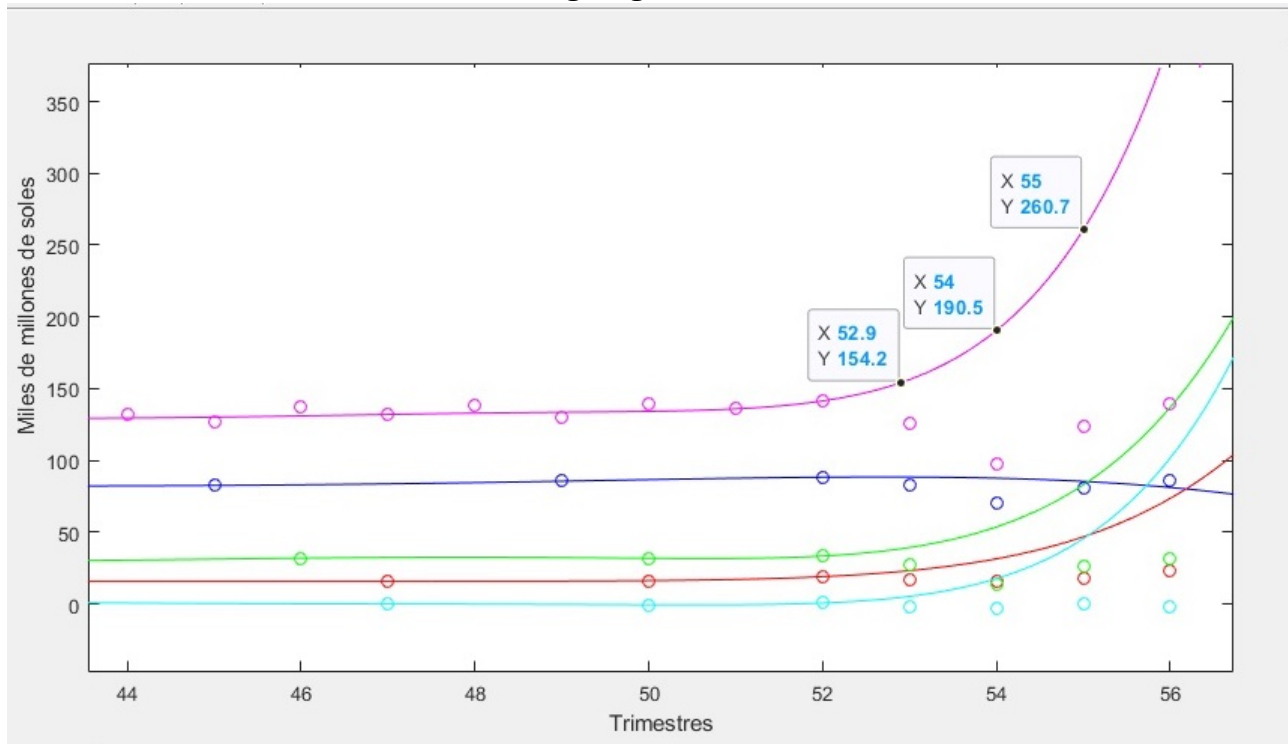
#### 3.1. Resultados de los ajustes usando nodos trimestrales

La Figura 3.1.1, muestra un posible escenario para la curva del PBI, de no haberse presentado la pandemia del Covid-19. Las curvas que se muestran son las gráficas de las interpolaciones realizadas con Polinomios de Lagrange.

Note como, de no haberse presentado la pandemia de la covid-19, los resultados que arrojan los polinomios de Lagrange son muy alentadores. Las cifras estarían coincidiendo con el período

de crecimiento, teniendo en cuenta los ciclos de crecimiento por trimestre, con un PBI de 154.2, y 190.5 mil millones de soles, para el primer y segundo trimestre del 2020, respectivamente.

Figura 3.1.1: *Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto* (Con Polinomios de Lagrange usando nodos trimestrales)



PBI(violeta), Consumo(azul), Inversión(verde), Gasto(rojo), Exportaciones Netas(celeste)

Las curvas encontradas con polinomios de Lagrange para el consumo, gasto, inversión y exportaciones netas, son respectivamente:

$$\begin{aligned}
 C_L^T(x) = & 19135766633/2176468981928841600000x^9 - \\
 & 423036400197/1612199245873216000000x^8 + 587497118101/18320445975832000000x^7 - \\
 & 523100593021211/250168848497568000000x^6 + \\
 & 574156699234745509/7254896606429472000000x^5 - \\
 & 1507377281080493281/853517247815232000000x^4 + \\
 & 122034496813380434203/5441172454822104000000x^3 - \\
 & 530686147456319025953/3627448303214736000000x^2 + \\
 & 4250278268590062707/8636781674320800000x + 7694751838783/180987202000,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_L^T(x) &= -152012145361/203638898204866156032000000x^{12} + \\
&5406305751727/16969908183738846336000000x^{11} - \\
&11600709005034353/203638898204866156032000000x^{10} + \\
&48347068715167151/8484954091869423168000000x^9 - \\
&24129379528205618801/67879632734955385344000000x^8 + \\
&82087242910359848813/5656636061246282112000000x^7 - \\
&7297823458899103995001/18512627109533286912000000x^6 + \\
&6017890659446134252099/8484954091869423168000000x^5 - \\
&420035059729454799663613/5090972455121653900800000x^4 + \\
&36909319637482359391003/62389368322569288000000x^3 - \\
&7426877442547741285621/3108041791893561600000x^2 + \\
&5510875377628464360043/1178465846092975440000x + 50746327862431/9765572208000, \\
I_L^T(x) &= -3139411094718187/846895920223168880064000000x^{10} - \\
&66772140318671/67454872180260364800000x^9 + \\
&67185988614656038187/592827144156218216044800000x^8 - \\
&862347856325412049267/118565428831243643208960000x^7 + \\
&567116518665041606747639/1976090480520727386816000000x^6 - \\
&8509294111723390438106231/1185654288312436432089600000x^5 + \\
&8358482453324338554154841/74103393019527277005600000x^4 - \\
&33593461001023398113543/31617447688331638189056x^3 + \\
&2000151013334231047401527939/370516965097636385028000000x^2 - \\
&14254297621084254196597/1263355718418018225000x + \\
&1495691794381441/65060588785500,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
XM_L^T(x) = & - 2209425876166801/7994619131353587532800000000x^{11} - \\
& 58863210565466003743/696531191819181313795200000000x^{10} + \\
& 57608188673518456903/5116849893988476134400000000x^9 - \\
& 497777812681125088117/580805663388935846400000000x^8 + \\
& 15263049040189975980099181/371483302303563367357440000000x^7 - \\
& 598353459510979599538524601/464354127879454209196800000000x^6 + \\
& 13463713078636960679449867747/506568139504859137305600000000x^5 - \\
& 106091403699151810029617/300777069860467200000000x^4 + \\
& 40160094513554882559070713697/14071337208468309369600000000x^3 - \\
& 51869454819604911002034586801/4073281823503984291200000000x^2 + \\
& 7089543328134664989067613/274207605748921845000000x - \\
& 41048510322828997/3710020529600000.
\end{aligned}$$

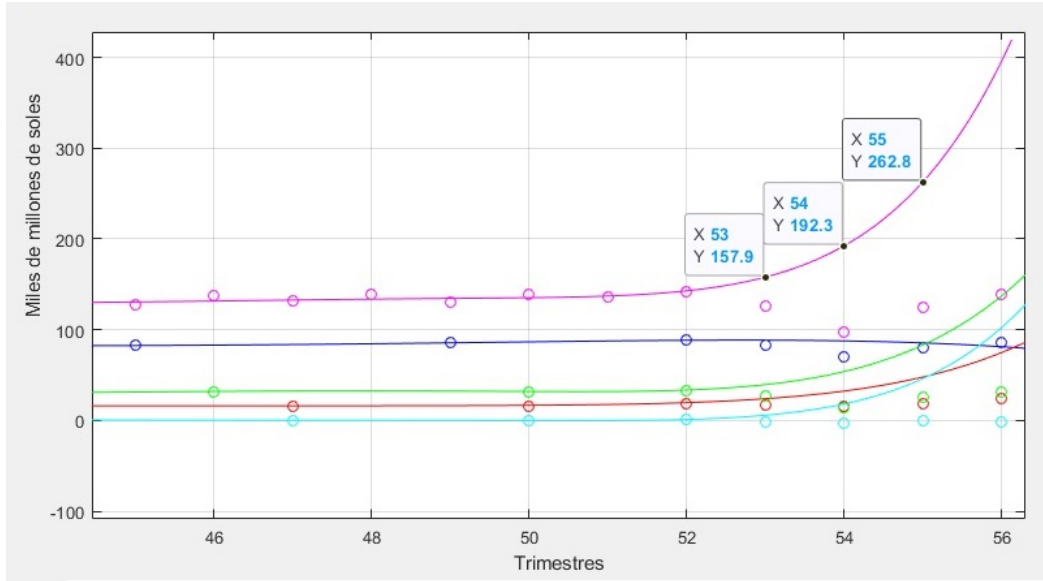
De este modo, usando las interpolaciones de Lagrange, obtenemos el ajuste para el PBI, para extrapolar su valor para los dos primeros trimestres del 2020, de no haberse presentado la pandemia, se estimará por la fórmula:

$$PBI_L^T(x) = C_L^T(x) + G_L^T(x) + I_L^T(x) + XM_L^T(x).$$

La Figura 3.1.2, muestra otro posible escenario para curva del PBI, de no haberse presentado la pandemia del Covid-19. Las curvas que se muestran son las gráficas de las interpolaciones realizadas con Polinomios de Newton con Diferencias Divididas.

Se puede observar similares resultados, a los que se obtuvieron con la interpolación de Lagrange, en un contexto de no pandemia. Con un PBI de 157.9, y 192.5 mil millones de soles, para el primer y segundo trimestre del 2020, respectivamente.

Figura 3.1.2: *Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto* (Con Polinomios de Newton en DD usando nodos trimestrales)



PBI(violeta), Consumo(azul), Inversión(verde), Gasto(rojo), Exportaciones Netas(celeste)

Las curvas encontradas con polinomios de Newton en Diferencias Divididas para el consumo, gasto, inversión y exportaciones netas, son respectivamente:

$$C_N^T(x) = 46.181 + 1.058(x-1) - 0.062821(x-1)(x-4) + 0.0091962 * (x-1)(x-4)(x-8) - 0.00063632(x-1)(x-4)(x-8)(x-15) + 3.022 \times 10^{-5}(x-1)(x-4)(x-8)(x-15)(x-23) - 1.0794 \times 10^{-6}(x-1)(x-4)(x-8)(x-15)(x-23)(x-30) + 3.1461 \times 10^{-8}(x-1)(x-4)(x-8)(x-15)(x-23)(x-30)(x-38) - 7.5125 \times 10^{-10}(x-1)(x-4)(x-8)(x-15)(x-23)(x-30)(x-38)(x-45) + 8.7921 \times 10^{-12}(x-1)(x-4)(x-8)(x-15)(x-23)(x-30)(x-38)(x-45)(x-49);$$

$$G_N^T(x) = 7.999 + 0.238(x-1) - 0.054933(x-1)(x-3) + 0.010412(x-1)(x-3)(x-6) - 0.0010009(x-1)(x-3)(x-6)(x-10) + 6.9114e-05(x-1)(x-3) * (x-6)(x-10) * (x-15) - 3.4933 \times 10^{-6}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20) + 1.4686 \times 10^{-7}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27) - 5.4109 \times 10^{-9}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27)(x-33) + 1.7122 \times 10^{-10}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27)(x-33)(x-38) - 4.611 \times 10^{-12}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27)(x-33)(x-38)(x-43) + 9.9864 \times 10^{-14}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27)(x-33)(x-38)(x-43)(x-47) - 7.4648 \times 10^{-16}(x-1)(x-3)(x-6)(x-10)(x-15)(x-20)(x-27)(x-33)(x-38)(x-43)(x-47)(x-51);$$

$$33)(x-38)(x-43)(x-47)(x-50);$$

$$\begin{aligned} I_N^T(x) = & 16.148 + 0.238(x-1) + 0.21246(x-1)(x-3) - 0.030631(x-1)(x-3)(x-7) + 0.0024733(x-1)(x-3)(x-7)(x-13) \\ & - 0.00012329(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19) + 4.5426 \times 10^{-6}(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19)(x-27) \\ & - 1.371 \times 10^{-7}(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19)(x-27)(x-34) + 3.6383 \times 10^{-9}(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19)(x-27)(x-34)(x-40) \\ & - 1.0021 \times 10^{-10}(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19)(x-27)(x-34)(x-40)(x-46) + 3.707 \times 10^{-12}(x-1)(x-3)(x-7)(x-13)(x-19)(x-27)(x-34)(x-40)(x-46)(x-50); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XM_N^T(x) = & 4.583 + 0.701(x-1) - 0.26533(x-1)(x-3) + 0.049036(x-1)(x-3)(x-7) - 0.0049371(x-1)(x-3)(x-7)(x-11) \\ & + 0.00032384(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17) - 1.4675 \times 10^{-5}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23) \\ & + 5.2478 \times 10^{-7}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23)(x-30) - 1.5647 \times 10^{-8}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23)(x-30)(x-36) \\ & + 4.1726 \times 10^{-10}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23)(x-30)(x-36)(x-42) - 1.072 \times 10^{-11}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23)(x-30)(x-36)(x-42)(x-47) \\ & + 2.7636 \times 10^{-13}(x-1)(x-3)(x-7)(x-11)(x-17)(x-23)(x-30)(x-36)(x-42)(x-47)(x-50). \end{aligned}$$

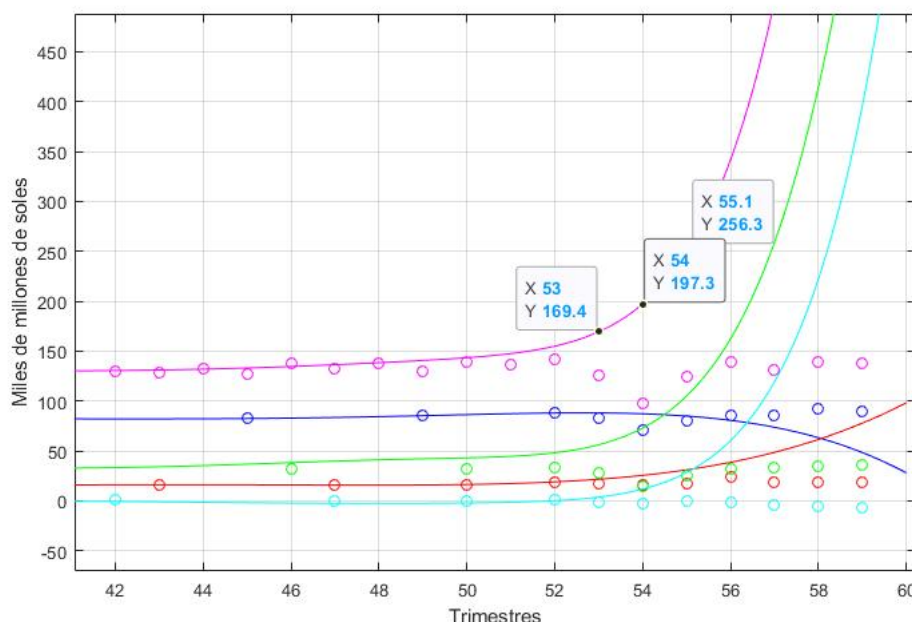
De este modo, usando las interpolaciones de Lagrange, obtenemos el ajuste para el PBI, para extrapolar su valor para los dos primeros trimestres del 2020, de no haberse presentado la pandemia, se estimará por la fórmula:

$$PBI_N^T(x) = C_N^T(x) + G_N^T(x) + I_N^T(x) + XM_N^T(x).$$

En la Figura 3.1.3, las curvas que se muestran son las gráficas de las ajustes para el PBI y componentes del gasto, realizados con Mínimos Cuadrados. Como ya se ha comentado, eligieron los ajustes que presentaron mejor bondad (menor suma de cuadrados de errores), evitando, en lo posible, que las matrices de ecuaciones normales: Inversión y Exportaciones Netas, sobre todo, sean no singulares, dado que esto representa la desventaja de este método. Por ello, se han elegido los nodos de Chebyshev, para las componentes del PBI por el método del gasto, empleando la data trimestral, empleadas en el cálculo de los polinomios de Lagrange.

Se puede observar que, en un contexto de no pandemia, las cifras del PBI hubieran sido de 154.2, y 192.5 mil millones de soles, para el primer y segundo trimestre del 2020, respectivamente. Los resultados fueron similares a lo que se obtuvo con Lagrange y Newton en Diferencias Divididas.

Figura 3.1.3: *Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto* (Con ajuste de Mínimos cuadrados usando nodos trimestrales)



PBI(violeta), Consumo(azul), Inversión(verde), Gasto(rojo), Exportaciones Netas(celeste)

Las curvas encontradas con Mínimos Cuadrados para el consumo, gasto, inversión y exportaciones netas, son respectivamente:

$$\begin{aligned}
C_A^T(x) &= 42.5158 + 4.92061 * x - 1.46277 * x^2 + 0.224245 * x^3 - 0.0176577 * x^4 + 0.000791245 * \\
&x^5 - 2.09049 \times 10^{-5} * x^6 + 3.20587 \times 10^{-7} * x^7 - 2.62307 \times 10^{-9} * x^8 + 8.78837 \times 10^{-12} * x^9; \\
G_A^T(x) &= +7.86481 + 0.147623x + 0.0342498x^2 - 0.0152578x^3 + 0.00215355x^4 - 0.000139938x^5 + \\
&4.80605 \times 10^{-6}x^6 - 8.99165 \times 10^{-8}x^7 + 8.61736 \times 10^{-10}x^8 - 3.28461 \times 10^{-12}x^9; \\
I_A^T(x) &= +23.0382 - 11.3589x + 5.43368x^2 - 1.0699x^3 + 0.113628x^4 - 0.00723236x^5 + \\
&0.000289279x^6 - 7.33232 \times 10^{-6}x^7 + 1.14262 \times 10^{-7}x^8 - 9.98028 \times 10^{-10}x^9 + 3.73743 \times 10^{-12}x^{10}; \\
XM_A^T(x) &= -7.63678 + 20.1196x - 9.77676x^2 + 2.15769x^3 - 0.262091x^4 + 0.0193878x^5 - \\
&0.000922739x^6 + 2.89003 \times 10^{-5}x^7 - 5.92648 \times 10^{-7}x^8 + 7.6601 \times 10^{-9}x^9 - 5.66186 \times 10^{-11}x^{10} + \\
&1.82454 \times 10^{-13}x^{11}.
\end{aligned}$$

De este modo, el ajuste obtenido con mínimos Cuadrados del PBI, para extrapolar su valor para los dos primeros trimestres del 2020, de no haberse presentado la pandemia se estimará por la fórmula:

$$PBI_A^T(x) = C_A^T(x) + G_A^T(x) + I_A^T(x) + XM_A^T(x).$$

### 3.2. Resultados de los ajustes usando nodos anuales

Para comentar sobre los resultados anuales, mostramos en las Figuras 3.2.1 y 3.2.2; las proyecciones de PBI al 2030 (proporcionados por CEPLAN), y las variaciones porcentuales de este (base, optimista y conservador), respectivamente.

Figura 3.2.1: *Proyecciones Macroeconómicas 2030*

PROYECCIONES MACROECONÓMICAS AL 2030

	2015	2016	2017	2018	2019f	2020p	2021p	2022p	2023p	2024p	2025p	2026p	2027p	2028p	2029p	2030p
<b>PRODUCTO BRUTO INTERNO</b>																
Producto Bruto Interno (Miles de millones de Soles)	609 999	656 450	698 245	740 269	775 707	824 692	874 216	929 419	989 054	1 054 108	1 121 970	1 194 517	1 275 001	1 360 809	1 453 406	1 552 217
Producto Bruto Interno (Variación porcentual real)	3,3	4,0	2,5	4,0	2,6	3,5	3,6	3,9	4,2	4,5	4,5	4,5	4,8	4,8	4,8	4,9
Demanda interna (Variación porcentual real)	2,9	1,1	1,4	4,3	2,9	3,5	3,5	3,8	3,8	4,1	4,2	4,3	4,7	4,7	4,8	4,8
Consumo privado (Variación porcentual real)	4,0	3,3	2,5	3,8	3,1	3,3	3,4	3,8	3,9	4,0	4,0	4,0	4,0	3,9	3,9	3,9
Consumo público (Variación porcentual real)	9,8	0,3	0,5	2,0	1,6	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
Inversión privada (Variación porcentual real)	-4,2	-5,4	0,2	4,4	4,4	3,5	4,5	5,5	5,4	5,2	5,3	5,4	5,4	5,7	6,0	6,1
Inversión pública (Variación porcentual real)	-9,5	-0,2	-2,3	8,4	0,5	5,0	5,0	5,3	5,3	5,3	5,3	5,4	5,5	6,0	6,0	6,0
Inversión privada (Porcentaje del PBI)	19,6	18,1	17,3	17,6	17,9	17,9	18,0	18,3	18,5	18,6	18,8	19,0	19,1	19,3	19,5	19,7
Inversión pública (Porcentaje del PBI)	5,0	4,8	4,5	4,8	4,7	4,8	4,8	4,9	4,9	5,0	5,0	5,1	5,1	5,2	5,2	5,3

Fuente: CEPLAN 2019

Figura 3.2.2: *Escenarios de crecimiento del PBI al 2030 (Variación porcentual anual)*

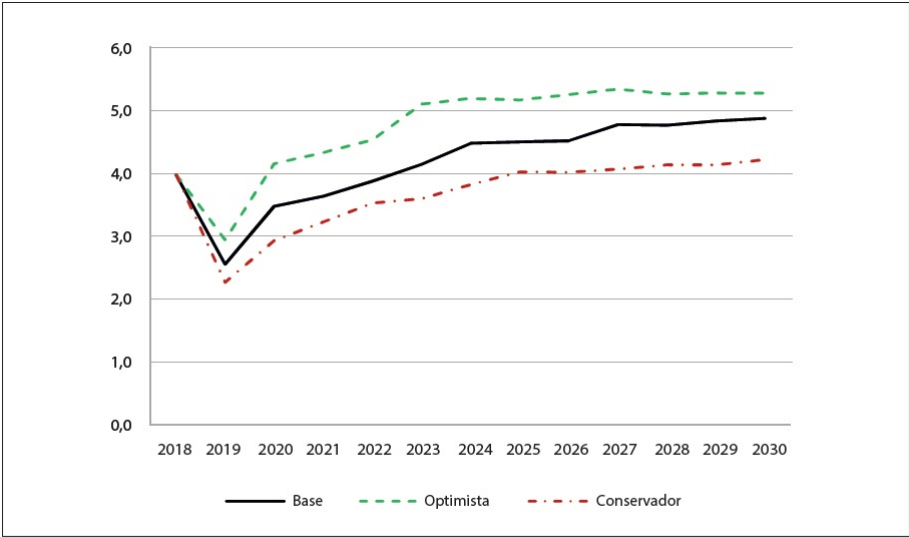


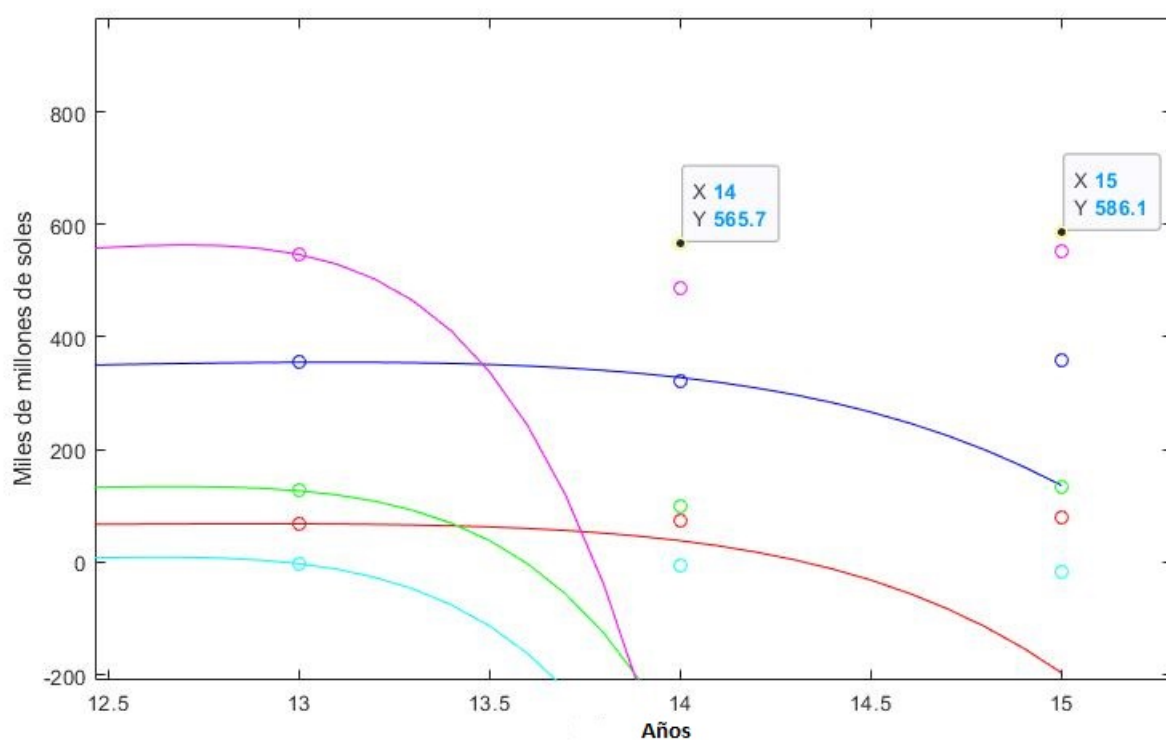
Figura 1. Escenarios de crecimiento del PBI al 2030 (Variación porcentual anual)

Nota. Elaboración CEPLAN.

La Figura 3.2.3, muestra un posible escenario para curva del PBI, de no haberse presentado la pandemia del Covid-19, en base a las interpolaciones encontradas usando polinomios de

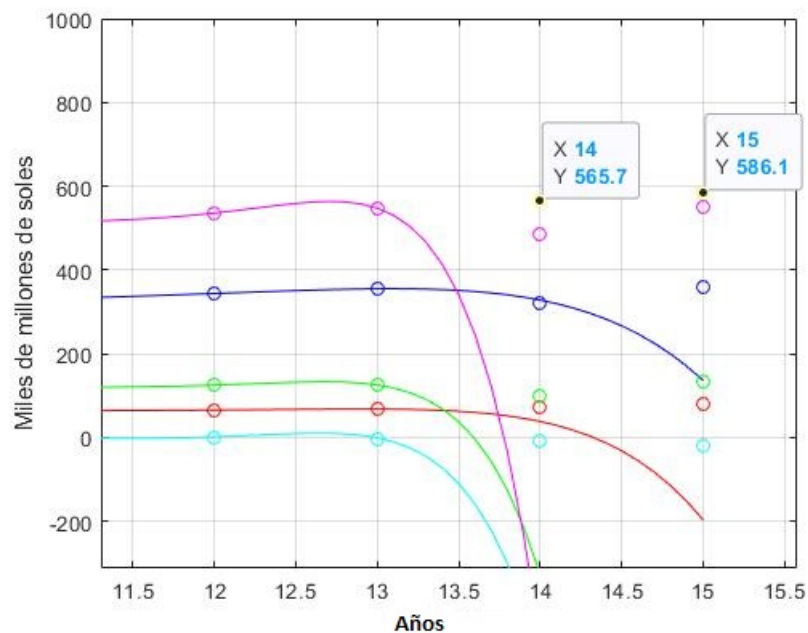
Lagrange. Los puntos de amarillo, representan las proyecciones del BCRP para el PBI para los años 2020 y 2021. Los cuales pueden obtenerse usando las variaciones porcentuales mostradas en la Figura 3.2.2 (CEPLAN, 2019, p. 15). Se puede apreciar que las estimaciones para el PBI para los años 2020 y 2021, no fueron acertadas, a consecuencia de las interpolaciones que se han obtenido para la Inversión y Exportaciones Netas, por ello, no es de utilidad. Resultados similares se obtuvieron usando los polinomios en Diferencias Divididas (Figura 3.2.4 ).

Figura 3.2.3: *Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto*  
(Con Polinomios de Lagrange usando nodos anuales)



PBI(violeta), Consumo(azul), Inversión(verde), Gasto(rojo), Exportaciones Netas(celeste)  
PBI "datos proyectados sin pandemia"(amarillo)

Figura 3.2.4: *Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto*  
(Con Polinomios de Newton en DD usando nodos anuales)



PBI(violeta), Consumo(azul), Inversión(verde), Gasto(rojo), Exportaciones Netas(celeste)  
PBI "datos proyectados sin pandemia"(amarillo)

Ahora analizamos los resultados obtenidos con los ajustes de Mínimos Cuadrados.

La figura 3.2.5, muestra las curvas de los ajustes de las componentes del gasto y la del PBI. Vemos que las proyecciones del BCRP para el PBI (puntos de amarillo) están muy próximos a estas curvas, para los años 2020 y 2021. Asimismo, los valores del PBI para los años 2020 y 2021, están dentro del rango de lo proyectado por el BCR (Figura 3.2.2 y Figura 3.2.1).

Por lo expuesto, para las extrapolaciones que requerimos, usaremos los ajustes que hemos obtenido mediante Mínimos Cuadrados para las curvas de consumo, gasto, inversión, y exportaciones netas; que en este orden son:

$$C_A^A = +189.558 + 0.468882x + 4.40236x^2 - 0.466616x^3 + 0.0154286x^4;$$

$$G_A^A = +28.9125 + 5.39684x - 1.42522x^2 + 0.289032 * x^3 - 0.023138x^4 + 0.000633805x^5;$$

$$I_A^A = +83.095 - 15.2002x + 7.80045x^2 - 0.818077x^3 + 0.0160658x^4 + 0.000710483x^5;$$

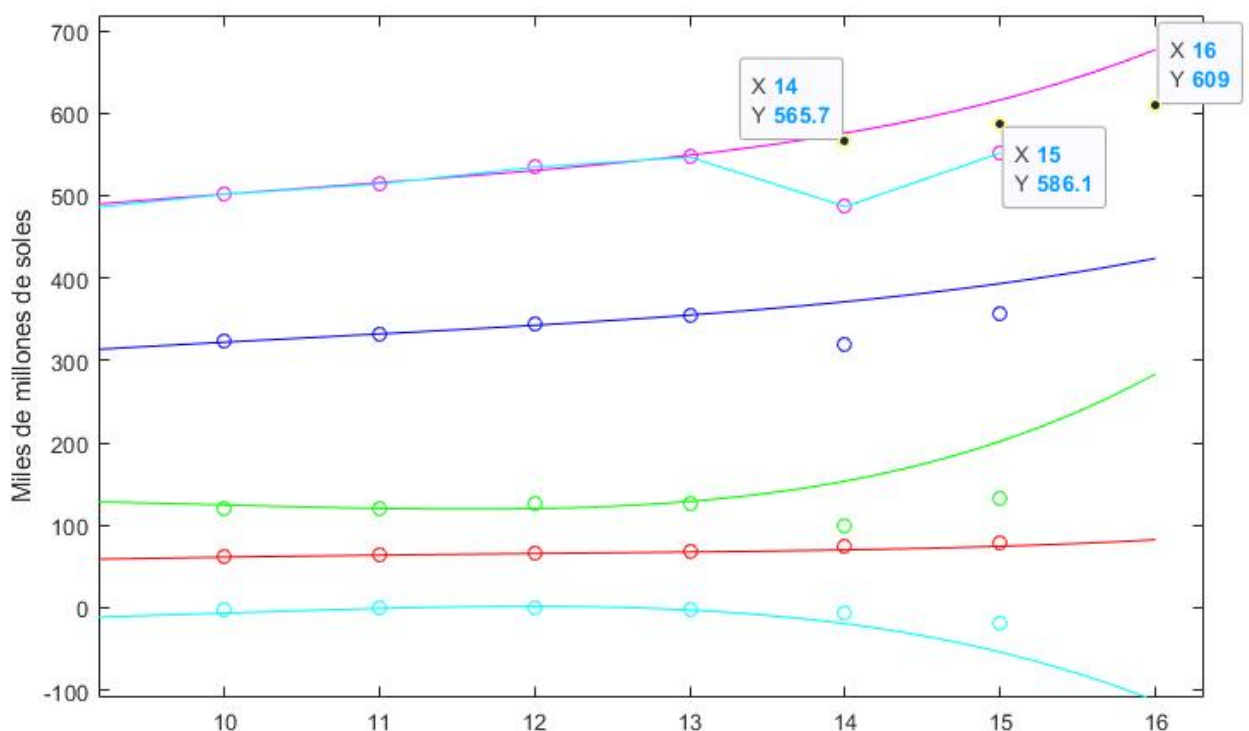
$$XM_A^A = +5.22315 + 23.1657x - 9.39629x^2 + 1.0768x^3 - 0.038056x^4.$$

De este modo, el ajuste obtenido con mínimos Cuadrados del PBI, para extrapolar su valor para los años 2020 y 2021, de no haberse presentado la pandemia, se estimará por la fórmula:

$$PBI_A^T(x) = C_A^T(x) + G_A^T(x) + I_A^T(x) + XM_A^T(x).$$

Nuestras estimaciones del PBI son de 565.7, 586.1, y 609 mil millones de soles para el 2020, 2021 y 2022, respectivamente. Algunas de estas proyecciones del CEPLAN, teniendo en cuenta el PBI de 546 605 millones de soles registrado en el 2019 son: 565.736, 586.103, y 608.961 millones de soles para el 2020, 2021, y 2022, respectivamente. Notamos que estos son próximos a los valores proporcionados el BCRP.

Figura 3.2.5: *Efecto de la pandemia sobre el PBI y las componentes del método del Gasto*  
(Con Mínimos cuadrados usando nodos anuales)



PBI(violeta), Consumo(azul), Inversión(verde), Gasto(rojo), Exportaciones Netas(celeste)  
PBI "datos proyectados sin pandemia "(amarillo)

Finalmente, usando el ajuste lineal múltiple determinado al final del capítulo anterior, y

mostrado en la ecuación (2.1.1):

$$Y = -0,000000000046839 + 1,00000000000145 * C + 0,999999999966036 * G + 0,99999999997179 * I + 0,99999999999471 * XM.$$

Haciendo un análisis estadístico, la regresión es perfecta porque el coeficiente de determinación es uno (es muy alto). Se podría decir que existe correlación entre la variable dependiente PBI(Y) con las variables independientes: consumo (C), Inversión (I), Gasto(G) e Inversiones Netas (XM). Asu vez, también existe correlación entre las variables indepedientes. Por tanto, dado el alto nivel del coeficiente de determinación, concluimos que el modelo es significativo, dada las altas correlaciones entre las variables nos indica una relación lineal muy buena (Figura 3.2.6).

Figura 3.2.6: Análisis estadístico del modelo del PBI y sus componentes por el método del Gasto

		Correlaciones				
		C	y	XM	I	G
C	Correlación de Pearson	1	,999**	-,701*	,838**	,992**
	N	13	13	12	13	13
y	Correlación de Pearson	,999**	1	-,710**	,846**	,992**
	N	13	13	12	13	13
XM	Correlación de Pearson	-,701*	-,710**	1	-,960**	-,635*
	N	12	12	12	12	12
I	Correlación de Pearson	,838**	,846**	-,960**	1	,783**
	N	13	13	12	13	13
G	Correlación de Pearson	,992**	,992**	-,635*	,783**	1
	N	13	13	12	13	13

# Conclusiones

Aunque es a finales de diciembre de 2019, que la Comisión Municipal de Salud de Wuhan (provincia de Hubei, China) notifica un conglomerado de casos de neumonía en la ciudad, es hasta el 11 de marzo de 2020, que la Organización Mundial de la Salud declaró la Pandemia por COVID-19, debido al elevado número de casos en 112 países fuera de China. Al Perú llegó el primer caso con los síntomas de la epidemia a fines de febrero, y a inicios de marzo se reportó como el primer caso de Covid 19. Las restricciones decretadas por los Gobiernos, en particular el Perú, repercutieron directamente sobre el campo económico, ocasionando que el PBI se vea afectado directamente sobre el primer trimestre del 2020. Es por ello que, como enunciamos en nuestros objetivos, nos propusimos analizar el impacto del Covid-19 sobre todo el 2020 y 2021 (para ello, usaremos las estimaciones halladas por medio de Mínimos Cuadrados, mostradas en la Figura 3.2.5), empezando con el impacto sobre los dos primeros trimestres del 2020 (en base a las estimaciones obtenidas por polinomios de Lagrange, Newton en Diferencias Divididas y Mínimos Cuadrados).

1. Al analizar lo mostrado en las Figuras 3.1.1, 3.1.2, y 3.1.3, se evidencia el impacto negativo que tuvo la pandemia de Covid-19, principalmente para el segundo trimestre del 2020. Usando las estimaciones más optimistas obtenidas; que se obtuvieron mediante los polinomios de Newton en Diferencias Divididas (Figura 3.1.2), las estimaciones fueron de 157.9 y 192.3 mil millones para el primer y segundo trimestre respectivamente,

en su lugar las cifras reales fueron de 125.10 y de 97.790 mil millones de soles, respectivamente.

2. Usando los mismos polinomios de interpolación de Newton en Diferencias Divididas, se concluye que las componentes que más impacto sufrieron al término del segundo trimestre del 2020, fueron Consumo, Inversión y Exportaciones Netas. Nuestra aproximación para el Consumo al término del segundo trimestre fue 87.73 mil millones de soles, mientras que la cifra real fue de 70.382 mil millones. Para el caso de la inversión, nuestra estimación fue de 53.93 mil millones de soles, mientras que la cifra real fue de 14.136 mil millones de soles. En cuanto a las exportaciones netas, éstas también fueron directamente afectadas, como fue nuestra hipótesis. Nuestra aproximación fue de 18.25 mil millones de soles, como suma al PBI. En contraste el con los 2.645 mil millones de soles registrados por el BCR, como resta al PBI.
3. Usando los mismos polinomios de interpolación de Newton en Diferencias Divididas, nuestras aproximaciones indican que para el caso del Gasto, esta fue de 32.44 mil millones de soles, mientras que las cifras reales fueron de 15.917 mil millones de soles. Aunque, la cifra que obtuvimos es casi el doble de la cifra real, creemos que la cifra real del gasto fue mayor. Además, en este año, el gobierno se enmarcó en una deuda de 100 años.
4. Para el 2020, nuestra estimación es de 575.9 mil millones de soles, relativamente cerca a los 564.7 mil millones, cifra que se obtiene de las proyecciones del BCRP( **CEPLAN (2019)**). Teniendo en cuenta que el PBI registrado por el BCR para el 2020 fue de 486.7 mil millones de soles, se obtiene una diferencia de 89.2 mil millones de soles. Esto estaría representando lo que el Perú dejó de percibir PBI, y representa el impacto negativo de la

pandemia en el PBI del Perú sobre el 2020.

5. Para el 2021, nuestra estimación es de 616.2 mil millones de soles, también relativamente cerca (dentro del margen optimista) a los 586.1 mil millones, cifra que se obtiene de las proyecciones del BCRP( **CEPLAN (2019)**). Teniendo en cuenta que el PBI registrado por el BCR para el 2021 fue de 551.7 mil millones de soles, se obtiene una diferencia de 34.4 mil millones de soles. Esto estaría representando lo que el Perú dejó de percibir PBI, y representa el impacto negativo de la pandemia en el PBI del Perú sobre el 2021. La cifra fue mayor, es decir, el impacto fue menor, en vista de las flexibilizaciones que decretaba el gobierno, en mejora de las actividades económicas.
6. Nuestras estimaciones para el PBI del Perú para el 2022, será de 677.2 mil millones de soles. Cabe indicar esta estimación estará afectada por la situación política interna y la situación externa producto de la guerra entre Rusia y Ucrania.
7. En cuanto, a la determinación de las variables que más aportan al PBI, esto se concluye a partir de la ecuación del PBI multilíneal  $Y = -0,000000000046839 + 1,00000000000145 * C + 0,999999999966036 * G + 0,99999999997179 * I + 0,99999999999471 * XM$ . Para ello, recogemos la información de los coeficientes de las componentes de la ecuación obtenida. Como se aprecia el coeficiente del Consumo es mayor que las otras. Por tanto, es la que mayor influencia tiene sobre el cálculo del PBI, y dado que fue una de las que mayor afectación causó la pandemia del Covid-19, la cifra del PBI, se vio notoriamente disminuido.
8. Por tanto, el Covid 19, sí influyó notoriamente sobre el cálculo del PBI del Perú. Afectando, no solo a las inversiones y exportaciones netas como fue nuestra hipótesis, sino que afectó al consumo, que como lo mostramos es la que mayor aporta al cálculo del

PBI. Esto debe ser un indicador, para que el gobierno implemente medidas en mejora de estas componentes.

# Recomendaciones

En cuanto a una investigación posterior que se realice, podrían usarse los nodos de chebyshev, con distintos grados; empleando los datos anuales, especialmente, ya que fue la que sirvió para realizar estimaciones de extrapolación anual del PBI. Ello permitirá encontrar un mejor ajuste con Mínimos Cuadrados.

En cuanto a la validez de los modelos, en especial al modelo obtenido para el PBI, usando la técnica de Mínimos Cuadrados Multilineal, se sugiere su validación mediante algunos software econométricos, en especial sí se pretende analizar la correlación entre las variables independientes involucradas.

En cuanto a las sugerencias que se podrían recomendar al gobierno, a parte de mantener la estabilidad política, crear políticas económicas en favor de las inversiones, y políticas para lograr que el Perú deje de ser, principalmente, un exportador de materias primas. Pues si vemos las cifras referente a las exportaciones netas, están en negativo en los últimos años.

# Referencias bibliográficas

- CEPLAN. (2019). *Proyecciones macroeconómicas al 2030*. Centro Nacional de Planeamiento Estratégico. Descargado de [https://www.ceplan.gob.pe/documentos\\_/proyecciones-macroeconomicas-al-2030-actualizacion-a-noviembre-2019/](https://www.ceplan.gob.pe/documentos_/proyecciones-macroeconomicas-al-2030-actualizacion-a-noviembre-2019/)
- Chapra S., R., Canale. (2006). *MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS* (5.<sup>a</sup> ed.). The McGraw-Hill Companies. Descargado de <http://artemisa.unicauca.edu.co/~cardila/Chapra.pdf>
- Cisneros, J. (2014). Revisión del Método del Ingreso del PIB y Planteamiento de una propuesta para expresar los principales Indicadores Macroeconómicos. *Documento de Trabajo*(10). Descargado de [https://economia.unmsm.edu.pe/data/doc\\_trab/10-2014-OBG.pdf](https://economia.unmsm.edu.pe/data/doc_trab/10-2014-OBG.pdf)
- Dimas, J. (2019). Inversión pública y privada en infraestructura y su impacto en el crecimiento económico peruano en el periodo 200:I - 2015:IV. *Repositorio UNP*. Descargado de <https://repositorio.unp.edu.pe/bitstream/handle/UNP/1477/ECO-VEG-ZEV-2019.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Doig, L., E. Chainskaia. (1999). *Elementos de Análisis Numérico: algoritmos y aplicaciones*. Fondo Editorial PUCP. Descargado de <https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/1>

- INEI. (2001). *Resumen Metodológico para la Medición del Producto Bruto Interno por Departamentos*. Descargado Julio 2001, de [https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones\\_digitales/Est/Lib0508/Libro.pdf](https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones_digitales/Est/Lib0508/Libro.pdf)
- INEI. (2007). *PRINCIPALES INDICADORES MACROECONÓMICOS*. Descargado Enero 2022, de <https://www.inei.gob.pe/estadisticas/indice-tematico/economia/>
- INEI. (2020). *Panorama de la Economía Peruana 1950-2019*. Descargado Abril 2020, de [https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones\\_digitales/Est/Lib1726/Libro.pdf](https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones_digitales/Est/Lib1726/Libro.pdf)
- Mankiw, N. G. (2014). *Macroeconomía* (8.<sup>a</sup> ed.). Barcelona: Antoni Bosch editor, S.A. Descargado de [https://www.academia.edu/24377337/Macroeconomia\\_Gregory\\_Mankiw\\_8va\\_Edicion\\_1\\_](https://www.academia.edu/24377337/Macroeconomia_Gregory_Mankiw_8va_Edicion_1_)
- Mora, W. (2013). *Introducción a los Métodos Numéricos*. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. Descargado de <https://perhuaman.files.wordpress.com/2014/06/metodos-numericos-wmora.pdf>
- Nasini, E. (s.f.). Minimizar el error de interpolación considerando las raíces del polinomio de Chebyshev .
- Ochoa, J., E. y Lladó. (2002). Modelos de indicadores líderes de actividad económica para el Perú. *Revista de Estudios Económicos*(10). Descargado de <https://bit.ly/3rz0gXS>
- Ruso, C. E. . V. D., J. (2020). Evaluación del impacto de diversos factores macroeconómicos en el crecimiento económico del Ecuador, 1965-2018. *INNOVA Research Journal*, 5(3),196-208. Descargado de <https://doi.org/10.33890/innova.v5.n3.2020.1410>

Seminario, B. (2016). *El Desarrollo de la Economía Peruana en la Era Moderna*. Universidad del Pacífico. Descargado de [www.up.edu.pe/fondoeditorial](http://www.up.edu.pe/fondoeditorial)

## **Anexos**

## **Anexo I: Producto Bruto interno**

**trimestral por tipo de gasto: 2007–2021**

PRODUCTO BRUTO INTERNO TRIMESTRAL POR TIPO DE GASTO: 2007–2021									
(Millones de soles de 2007)									
Año / Trimestre		NODOS POR TRIMESTRE	Producto Bruto Interno	Gasto de Consumo Final Privado	Gasto de Consumo de Gobierno	Formación Bruta de Capital	Exportaciones	Importaciones	Exportaciones Netas
<b>2007</b>			<b>319,693</b>	<b>192,316</b>	<b>33,424</b>	<b>70,436</b>	<b>100,774</b>	<b>77,257</b>	<b>23,517</b>
Trimestre	I	1	74,911	46,181	7,999	16,148	22,161	17,578	4,583
	II	2	81,059	47,902	7,888	19,420	24,117	18,268	5,849
	III	3	79,962	48,878	8,475	16,624	26,507	20,522	5,985
	IV	4	83,761	49,355	9,062	18,244	27,989	20,889	7,100
<b>2008</b>			<b>348,870</b>	<b>209,428</b>	<b>35,043</b>	<b>92,339</b>	<b>108,616</b>	<b>96,556</b>	<b>12,060</b>
Trimestre	I	5	82,326	50,188	8,402	20,229	26,182	22,675	3,507
	II	6	89,602	53,714	8,365	25,324	26,643	24,444	2,199
	III	7	87,670	53,698	8,876	22,675	28,054	25,633	2,421
	IV	8	89,272	51,828	9,400	24,111	27,737	23,804	3,933
<b>2009</b>			<b>352,693</b>	<b>215,863</b>	<b>39,272</b>	<b>73,683</b>	<b>105,040</b>	<b>81,165</b>	<b>23,875</b>
Trimestre	I	9	84,996	51,947	9,278	19,276	23,961	19,466	4,495
	II	10	88,818	54,291	9,304	18,756	25,343	18,876	6,467
	III	11	87,944	55,360	10,067	16,459	26,579	20,521	6,058
	IV	12	90,935	54,265	10,623	19,192	29,157	22,302	6,855
<b>2010</b>			<b>382,081</b>	<b>235,508</b>	<b>40,804</b>	<b>100,073</b>	<b>108,435</b>	<b>102,739</b>	<b>5,696</b>
Trimestre	I	13	90,023	55,491	9,839	22,445	25,284	23,036	2,248
	II	14	97,227	59,398	9,584	25,726	26,132	23,613	2,519
	III	15	95,850	61,232	10,278	24,126	27,975	27,761	214
	IV	16	98,981	59,387	11,103	27,776	29,044	28,329	715
<b>2011</b>			<b>406,256</b>	<b>252,468</b>	<b>43,817</b>	<b>112,291</b>	<b>114,387</b>	<b>116,707</b>	<b>-2,320</b>
Trimestre	I	17	97,016	60,697	10,078	26,390	26,666	26,815	-149
	II	18	102,117	64,612	10,311	27,751	28,892	29,449	-557
	III	19	102,090	64,519	11,203	27,048	29,586	30,266	-680
	IV	20	105,033	62,640	12,225	31,102	29,243	30,177	-934
<b>2012</b>			<b>431,199</b>	<b>271,240</b>	<b>47,442</b>	<b>122,952</b>	<b>117,940</b>	<b>128,375</b>	<b>-10,435</b>
Trimestre	I	21	102,967	65,350	10,672	25,547	31,303	29,905	1,398
	II	22	108,787	69,054	11,231	32,296	27,581	31,375	-3,794
	III	23	108,678	68,940	11,949	32,253	29,810	34,274	-4,464
	IV	24	110,767	67,896	13,590	32,856	29,246	32,821	-3,575
<b>2013</b>			<b>456,435</b>	<b>286,789</b>	<b>51,019</b>	<b>133,408</b>	<b>117,274</b>	<b>132,055</b>	<b>-14,781</b>
Trimestre	I	25	108,133	69,018	11,626	32,436	27,024	31,971	-4,947
	II	26	116,158	73,020	12,212	35,480	28,470	33,024	-4,554
	III	27	114,385	72,745	12,760	32,446	30,925	34,491	-3,566
	IV	28	117,759	72,006	14,421	33,045	30,856	32,569	-1,713

PRODUCTO BRUTO INTERNO TRIMESTRAL POR TIPO DE GASTO: 2007-2021									
(Millones de soles de 2007)									
2014			467,308	298,901	54,342	131,998	112,814	130,747	-17,933
Trimestre	I	29	113,291	72,677	12,609	32,447	27,273	31,715	-4,442
	II	30	118,115	76,349	12,625	34,656	27,673	33,188	-5,515
	III	31	116,258	75,532	13,707	31,741	28,536	33,258	-4,722
	IV	32	119,644	74,343	15,401	33,154	29,332	32,586	-3,254
2015			482,506	310,912	58,712	127,278	117,622	132,018	-14,396
Trimestre	I	33	115,554	75,317	13,296	31,668	27,171	31,898	-4,727
	II	34	121,797	79,326	13,793	33,861	27,584	32,767	-5,183
	III	35	119,969	78,781	14,709	30,193	30,145	33,859	-3,714
	IV	36	125,186	77,488	16,914	31,556	32,722	33,494	-772
2016			501,581	322,549	61,749	119,929	131,443	134,089	-2,646
Trimestre	I	37	120,581	78,193	15,045	31,126	28,211	31,994	-3,783
	II	38	126,853	82,065	15,169	30,597	31,225	32,203	-978
	III	39	125,173	82,107	15,094	28,022	34,985	35,035	-50
	IV	40	128,974	80,184	16,441	30,184	37,022	34,857	2,165
2017			514,215	331,078	63,759	119,967	143,019	143,608	-589
Trimestre	I	41	123,171	79,910	14,399	29,304	32,664	33,106	-442
	II	42	130,140	84,479	15,307	28,947	36,200	34,793	1,407
	III	43	128,714	84,271	15,911	28,695	37,189	37,352	-163
	IV	44	132,190	82,418	18,142	33,021	36,966	38,357	-1,391
2018			534,626	343,760	65,492	126,197	147,829	148,652	-823
Trimestre	I	45	127,030	82,585	15,245	30,552	34,426	35,778	-1,352
	II	46	137,271	88,817	15,709	31,925	38,003	37,183	820
	III	47	131,875	86,685	15,913	29,264	37,628	37,615	13
	IV	48	138,450	85,673	18,625	34,456	37,772	38,076	-304
2019			546,605	354,913	67,840	126,654	148,314	151,116	-2,802
Trimestre	I	49	130,160	85,544	15,473	30,660	34,600	36,117	-1,517
	II	50	138,984	91,399	16,292	31,826	37,170	37,703	-533
	III	51	136,006	89,656	17,025	30,763	37,442	38,880	-1,438
	IV	52	141,455	88,314	19,050	33,405	39,102	38,416	686
2020			486,737	320,116	74,004	99,106	121,282	127,771	-6,489
Trimestre	I	53	125,710	83,183	16,695	27,328	32,940	34,436	-1,496
	II	54	97,790	70,382	15,917	14,136	23,106	25,751	-2,645
	III	55	124,116	80,561	17,820	25,848	30,753	30,866	-113
	IV	56	139,121	85,990	23,572	31,794	34,483	36,718	-2,235
2021									0
Trimestre	I	57	131,309	84,923	17,885	32,981	32,503	36,983	-4,480
	II	58	138,794	91,998	18,216	34,297	34,541	40,258	-5,717
	III	59	138,204	90,037	18,988	35,893	33,567	40,281	-6,714

Fuente: Instituto Nacional de Estadística e Informática

Con información disponible al 15-11-2021- Actualizado con las cuentas nacionales anuales.

Figura .0.7: *Proyecciones Macroeconómicas 2030*

PROYECCIONES MACROECONÓMICAS AL 2030

	2015	2016	2017	2018	2019f	2020p	2021p	2022p	2023p	2024p	2025p	2026p	2027p	2028p	2029p	2030p
<b>PRODUCTO BRUTO INTERNO</b>																
Producto Bruto Interno (Miles de millones de Soles)	609 999	656 450	698 245	740 269	775 707	824 692	874 216	929 419	989 054	1054 108	1 121 970	1 194 517	1 275 001	1 360 809	1 453 406	1 552 217
Producto Bruto Interno (Variación porcentual real)	3,3	4,0	2,5	4,0	2,6	3,5	3,6	3,9	4,2	4,5	4,5	4,5	4,8	4,8	4,8	4,9
Demanda interna (Variación porcentual real)	2,9	1,1	1,4	4,3	2,9	3,5	3,5	3,8	3,8	4,1	4,2	4,3	4,7	4,7	4,8	4,8
Consumo privado (Variación porcentual real)	4,0	3,3	2,5	3,8	3,1	3,3	3,4	3,8	3,9	4,0	4,0	4,0	4,0	3,9	3,9	3,9
Consumo público (Variación porcentual real)	9,8	0,3	0,5	2,0	1,6	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
Inversión privada (Variación porcentual real)	-4,2	-5,4	0,2	4,4	4,4	3,5	4,5	5,5	5,4	5,2	5,3	5,4	5,4	5,7	6,0	6,1
Inversión pública (Variación porcentual real)	-9,5	-0,2	-2,3	8,4	0,5	5,0	5,0	5,3	5,3	5,3	5,3	5,4	5,5	6,0	6,0	6,0
Inversión privada (Porcentaje del PBI)	19,6	18,1	17,3	17,6	17,9	17,9	18,0	18,3	18,5	18,6	18,8	19,0	19,1	19,3	19,5	19,7
Inversión pública (Porcentaje del PBI)	5,0	4,8	4,5	4,8	4,7	4,8	4,8	4,9	4,9	5,0	5,0	5,1	5,1	5,2	5,2	5,3

Fuente: CEPLAN 2019

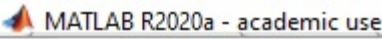
Figura .0.8: Código MatLab para el Polinomio de Lagrange

```

%Código MatLab para el Polinomio de Lagrange
function ecuacion=mlagrange(xi,fxi)
n=length(xi);
%on=52
syms x;
for i=1:n
    Li=1;
    for j=1:n
        if j~=i
            Li=Li.*((x-xi(j))/(xi(i)-xi(j)));
        end
    end
    L(i)=Li;
end
ecuacion=0;
for i=1:n
    ecuacion=L(i)*fxi(i)+ecuacion;
end
ecuacion=simplify(expand(ecuacion));
%syms x;x=2007:0.01:2019;
plot(xi,fxi,'ob')%hold on,plot(ecuacion,[2007,2019],'r'),grid
title('Curva del Polinomio de Lagrange P11(x ) para la EXPORTACIONES NETAS XM(x)')
xlabel('X');
ylabel('Exportaciones netas (miles de millones de soles)')
%double(subs(ecuacion,2.3))%calcula un valor a dos decimales
clc

```

Figura .0.9: Código MatLab para el Polinomio de Newton en Diferencias Divididas



```

1      %inicio del código
2      %Código MatLab para Interpolación de Newton en DD
3      function [yi,p,b]=pol_newtondd(x,y,xi)
4      -      n=length(x);
5      -      b=zeros(n);
6      -      b(:,1)=y(:);
7      -      for j=2:n
8      -      -      for i=1:n-j+1
9      -      -      -      b(i,j)=(b(i+1,j-1)-b(i,j-1))/(x(i+j-1)-x(i));
10     -      -      end
11     -      end
12     -      xt=b(1,1);
13     -      yi=b(1,1);
14     -      for j=1:n-1
15     -      -      xt=xt.*(xi-x(j));
16     -      -      yi=yi+b(1,j+1)*xt;
17     -      end
18     -      p=num2str(b(1,1));
19     -      xx=x*-1;
20     -      for j=2:n
21     -      -      signo="";
22     -      -      if b(1,j)>=0
23     -      -      -      signo="+";
24     -      -      end
25     -      -      xt="";
26     -      -      for i=1:j-1
27     -      -      -      signo2="";
28     -      -      -      if xx(i)>=0
29     -      -      -      -      signo2="+";
30     -      -      -      end
31     -      -      -      xt=strcat(xt,'*(x',signo2,num2str(xx(i)),')');
32     -      -      end
33     -      p=strcat(p,signo,num2str(b(1,j)),xt);
34     -      end

```

Figura .0.10: *Código MatLab el ajuste con Mínimos Cuadrados*

```

% Método de Mínimos Cuadrados: Varios Ajustes
% Descripción: El Programa de Mínimos Cuadrados realiza diferentes ajustes y
%             proporciona la Suma de Errores al Cuadrado para medir la Bondad
%             del Ajuste
% Ingreso de datos: Se debe digitar los valores de X e Y que corresponden a
%             los pares (xi, yi) de la muestra.
%
% Aparecerá una ventana con las opciones para los posibles ajustes:
%             A*exp(B*X)', 'A*B^X', 'A*X^B', 'A+B*Ln(X)', 'Polinomio'
%
% Resultados: Al elegir uno de los ajustes, el programa verificará si es posible su
%             aplicación. En el caso del polinomio, preguntará el grado del
%             polinomio.
%
%             Luego proporcionará la matriz de coeficientes de las Ecuaciones
%             Normales, en seguida se debe pulsar cualquier tecla
%             para obtener la gráfica y nuevamente se pulsará otra tecla
%             para que finalice el programa.
%clc;
clear;
%Digita aquí los datos de las parejas X y Y
x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13];
y=[23.517 12.060 23.875 5.696 -2.320 -10.435 -14.781 -17.933 -14.396 -2.646 -0.589 0.823 -2.802];
n=length(y);
opcion=0;sg=1;ajuste=1;xn=x;yn=y; %Condiciones iniciales

while opcion==0

    k=menu('Escoja analisis regresion','A*exp(B*X)', 'A*B^X', 'A*X^B', 'A+B*Ln(X)', 'Polinomio');
    if k==1
        opcion=1;
        m=1;
        if any(y<=0)
            ajuste=0;
        else
            yn=log(y);
        end
    elseif k==2
        opcion=1;
        m=1;
        if any(y<=0)
            ajuste=0;
        else
            yn=log(y);
        end
    elseif k==3
        opcion=1;
        m=1;
        if any(y<=0)|any(x<=0)
            ajuste=0;
        else
            yn=log(y);
            xn=log(x);
        end
    elseif k==4
        opcion=1;

```

```

m=1;
if any(x<=0)
    ajuste=0;
else
    xn=log(x);
end
elseif k==5
    opcion=1;
    m=input(' Grado del polinomio = ');
    if m>n
        ajuste=0;
    end
end
end

if ajuste==0
    fprintf('\n No se puede realizar el ajuste \n');
else
    for i=1:m+1
        for j=1:m+1
            sx(i,j)=sum(xn.^(i+j-2));
        end
        sy(i)=sum(yn.*xn.^(i-1));
    end
    % Presentacion de resultados
    fprintf('\n Matriz de sumatorias \n');
    disp([sx sy]);
    c=inv(sx)*sy';
    xx=linspace(min(x),max(x));
    fprintf(' Curva ajustada: ');
    if k==1
        fprintf(' Y = %g * exp(%g * X) \n',exp(c(1)),c(2));
        yy=exp(c(1))*exp(c(2)*xx);
        ya=exp(c(1))*exp(c(2)*x);
    elseif k==2
        fprintf(' Y = %g * %g ^ X \n',exp(c(1)),exp(c(2)));
        yy=exp(c(1))*exp(c(2)).^xx;
        ya=exp(c(1))*exp(c(2)).^x;
    elseif k==3
        fprintf(' Y = %g * X ^ %g \n',exp(c(1)),c(2));
        yy=exp(c(1))*xx.^c(2);
        ya=exp(c(1))*x.^c(2);
    elseif k==4
        fprintf(' Y = %g + %g * LnX \n',c(1),c(2));
        yy=c(1)+c(2)*log(xx);
        ya=c(1)+c(2)*log(x);
    elseif k==5
        for w=1:m+1
            if c(w)<0
                sg='-';
            else
                sg='+';
            end
            fprintf('%s %g X^%g ',sg,abs(c(w)),w-1);
        end
        cn=flipud(c);

```

```

    ya=polyval(cn,x);
    yy=polyval(cn,xx);
end
%Cálculo Suma de Errores al Cuadrado
sec=sum((y-ya).^2);
fprintf('\n Suma de Errores al Cuadrado: sec = %g \n',sec);
%ffprintf('\n ');
fprintf('\n Presione cualquier tecla para ver la gráfica del ajuste \n');
pause
plot(xx,yy,x,y,'or');title('Ajuste de ...')
xlabel('...');
ylabel('...')
pause
close all
end

```



## ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL N° 007-2023-D/FACFyM

Siendo las 05:00 pm del día 01 de febrero del 2023, se reunieron vía plataforma virtual, <https://meet.google.com/vqq-fzwh-har> los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada:

"Impacto Económico del Covid-19 en el PBI Peruano Usando el Método del Gasto"

Designados por Resolución N° 353-2022-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 7 de abril de 2022, Resolución N° 778-2022-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 12 de setiembre de 2022 y Resolución N° 953-2022-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 21 de noviembre de 2022

Con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

<b>Dra. Lic. Mat. Juana Doris Blas Rebaza</b>	Presidente
<b>Dr. Lic. Mat. Rubén Esteban Burga Barboza</b>	Secretario
<b>Dra. Lic. Mat. Diana Mercedes Castro Cárdenas</b>	Vocal

La tesis fue asesorada por la Dra. Lic. Mat. Gloria María Ortiz Basauri nombrado por Resolución N° 353-2022-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 07 de abril de 2022.

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N° 042-2023-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 10 de enero de 2023.

La Tesis fue presentada y sustentada por los Bachilleres: Ysique Quesquén Alan y Callirgos Gutiérrez Lilliana y tuvo una duración de 30 minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de (17) (diecisiete) en la escala vigesimal, mención Bueno.

Por lo que quedan aptos para obtener el Título Profesional de **Licenciado en Matemáticas** de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

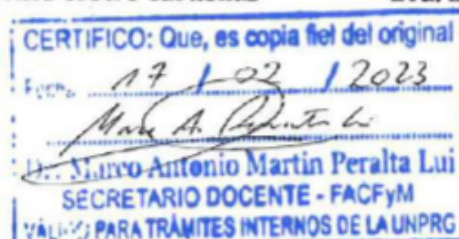
Siendo las 06:00 pm se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

**Dra. Lic. Mat. Juana Doris Blas Rebaza**  
Presidente

**Dr. Lic. Mat. Rubén Esteban Burga Barboza**  
Secretario

**Dra. Lic. Mat. Diana Mercedes Castro Cárdenas**  
Vocal

**Dra. Lic. Mat. Gloria María Ortiz Basauri**  
Asesor



## Impacto económico

### INFORME DE ORIGINALIDAD

14%	14%	3%	7%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

### FUENTES PRIMARIAS


1	<a href="http://economia.unmsm.edu.pe">economia.unmsm.edu.pe</a> Fuente de Internet	2%
2	<a href="http://pt.scribd.com">pt.scribd.com</a> Fuente de Internet	1%
3	<a href="http://www.inei.gob.pe">www.inei.gob.pe</a> Fuente de Internet	1%
4	<a href="http://qdoc.tips">qdoc.tips</a> Fuente de Internet	1%
5	<a href="http://es.slideshare.net">es.slideshare.net</a> Fuente de Internet	1%
6	<a href="http://vsip.info">vsip.info</a> Fuente de Internet	1%
7	<a href="http://revistas.uide.edu.ec">revistas.uide.edu.ec</a> Fuente de Internet	1%
8	<a href="http://documentop.com">documentop.com</a> Fuente de Internet	<1%
9	<a href="http://hdl.handle.net">hdl.handle.net</a> Fuente de Internet	<1%



GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071  
Docente asesor

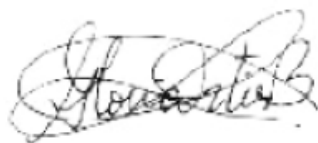
10	<a href="http://www.scribd.com">www.scribd.com</a> Fuente de Internet	<1 %
11	<a href="http://www.coursehero.com">www.coursehero.com</a> Fuente de Internet	<1 %
12	<a href="http://repositorio.unprg.edu.pe">repositorio.unprg.edu.pe</a> Fuente de Internet	<1 %
13	<a href="http://repositorio.udl.edu.pe">repositorio.udl.edu.pe</a> Fuente de Internet	<1 %
14	<a href="http://datospdf.com">datospdf.com</a> Fuente de Internet	<1 %
15	<a href="http://www.slideshare.net">www.slideshare.net</a> Fuente de Internet	<1 %
16	Submitted to Universidad Cesar Vallejo Trabajo del estudiante	<1 %
17	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo Trabajo del estudiante	<1 %
18	Submitted to Universidad Cientifica del Sur Trabajo del estudiante	<1 %
19	Submitted to Universidad San Ignacio de Loyola Trabajo del estudiante	<1 %
20	<a href="http://idoc.pub">idoc.pub</a> Fuente de Internet	<1 %



GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071  
Docente asesor

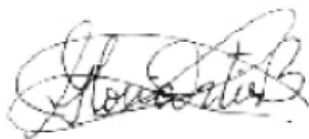
21	<a href="http://pcm.dis.ulpgc.es">pcm.dis.ulpgc.es</a> Fuente de Internet	<1 %
22	Submitted to Universidad Católica de Santa María Trabajo del estudiante	<1 %
23	<a href="http://repositorioacademico.upc.edu.pe">repositorioacademico.upc.edu.pe</a> Fuente de Internet	<1 %
24	<a href="http://dokumen.pub">dokumen.pub</a> Fuente de Internet	<1 %
25	<a href="http://www.yumpu.com">www.yumpu.com</a> Fuente de Internet	<1 %
26	<a href="http://baixardoc.com">baixardoc.com</a> Fuente de Internet	<1 %
27	<a href="http://repositorio.unp.edu.pe">repositorio.unp.edu.pe</a> Fuente de Internet	<1 %
28	Enkeleda Lulaj, Ismat Zarin, Shawkat Rahman. "A Novel Approach to Improving E-Government Performance from Budget Challenges in Complex Financial Systems", Complexity, 2022 Publicación	<1 %
29	<a href="http://www.unalmed.edu.co">www.unalmed.edu.co</a> Fuente de Internet	<1 %
30	Submitted to Universidad Wiener Trabajo del estudiante	<1 %



GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071  
Docente asesor

31	<a href="http://vbook.pub">vbook.pub</a> Fuente de Internet	<1 %
32	<a href="http://www.math.uiowa.edu">www.math.uiowa.edu</a> Fuente de Internet	<1 %
33	<a href="http://aainfo.ccu.uniovi.es">aainfo.ccu.uniovi.es</a> Fuente de Internet	<1 %
34	<a href="http://www.mat.uniroma3.it">www.mat.uniroma3.it</a> Fuente de Internet	<1 %
35	<a href="http://diposit.ub.edu">diposit.ub.edu</a> Fuente de Internet	<1 %
36	<a href="http://otrosyfinanzas.lamula.pe">otrosyfinanzas.lamula.pe</a> Fuente de Internet	<1 %
37	<a href="http://fr.scribd.com">fr.scribd.com</a> Fuente de Internet	<1 %
38	<a href="http://prezi.com">prezi.com</a> Fuente de Internet	<1 %
39	<a href="http://jo-2012.org">jo-2012.org</a> Fuente de Internet	<1 %
40	<a href="http://repositorio.unh.edu.pe">repositorio.unh.edu.pe</a> Fuente de Internet	<1 %
41	<a href="http://v1.overleaf.com">v1.overleaf.com</a> Fuente de Internet	<1 %
42	"Proceedings of the 6th Brazilian Technology Symposium (BTSym'20)", Springer Science and	<1 %



GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071  
Docente asesor

## Business Media LLC, 2021

Publicación

43	es.scribd.com Fuente de Internet	<1 %
44	repositorio.unjfsc.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
45	dspace.unitru.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
46	repositorio.unac.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
47	www.bcrp.gob.pe Fuente de Internet	<1 %
48	www.cemla.org Fuente de Internet	<1 %
49	Submitted to Manchester Metropolitan University Trabajo del estudiante	<1 %
50	Yamarú del Valle Chirinos Araque, Dolores Guadalupe Álvarez Orozco, Judeira Batista de Abreú, Dorkys Coromoto Rojas Nieves. "Impacto del Covid-19 desde la perspectiva socioeconómica en el contexto global", Alianza de Investigadores Internacionales SAS, 2020 Publicación	<1 %



GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071

Docente asesor



## Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Alán Ysique, Liliana Callings  
Título del ejercicio: Impacto económico  
Título de la entrega: Impacto económico  
Nombre del archivo: Informe\_parcial\_Al\_n\_y\_Liliana.pdf  
Tamaño del archivo: 2.99M  
Total páginas: 77  
Total de palabras: 20,029  
Total de caracteres: 97,537  
Fecha de entrega: 10-ago.-2022 12:31p. m. (UTC-0500)  
Identificador de la entrega: 1881068722



Derechos de autor 2022 Turnitin. Todos los derechos reservados.

GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071

Docente asesor

## CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI, identificada con Documento de Identidad N°16748071, usuario revisor del documento titulado: " Impacto económico del Covid-19 en el PBI peruano usando el método del gasto", cuyos autores son: Mg. Mat. Ysique Quesquén, Alan y Bach. Mat. Callirgos Gutiérrez, Liliana; declaro que la evaluación realizada por el Programa Informático, ha arrojado un porcentaje de similitud de **14 %**, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 13 de diciembre de 2022.



---

GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071  
Docente asesor