UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Modelo matricial y distribución de los genotipos en la descendencia "

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Presentado por:

Bach. Mat. Poclin Soto Juan Manuel

Bach. Mat. Rivas Salazar Mario Alejandro

Asesor:

Mag. Dolores Sánchez García

LAMBAYEQUE - PERÚ

2015

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

" Modelo matricial y distribución de los genotipos en la descendencia "

TESIS

Para optar el título profesional de Licenciado en Matemáticas

Presentado por:

Bach. Mat. **Poclin Soto Juan Manuel**

Bach. Mat. **Rivas Salazar Mario Alejandro**

Asesor:

Mag. Dolores Sánchez García

LAMBAYEQUE – PERÚ

2015

UNIVERSIDAD NACIONAL" PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes,por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"Modelo matricial y distribución de los genotipos en la descendencia"**,presentada por los Bachilleres en Matemáticas,Poclin Soto Juan Manuel y Rivas Salazar Mario Alejandro, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Dr. Cárpena Velásquez Enrique Wilfredo
Presidente Jurado de Tesis

Mg. Malca Villalobos Amado
Secretario Jurado de Tesis

Lic.Mat. Coronado Juarez William Wilmer
Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: Agosto - 2015

UNIVERSIDAD NACIONAL" PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

" Modelo matricial y distribución de los genotipos en la descendencia "

Bach. Mat. Poclin Soto Juan Manuel
Autor

Bach. Mat. Rivas Salazar Mario Alejandro
Autor

Mag. Dolores Garcia Sanchez
Asesor

Lambayeque – Perú
Agosto - 2015

Agradecimiento

A Dios nuestro supremo creador;
por cuidarnos y guiar nuestros pasos.
Por derramar sobre nuestras familias y seres
queridos por su infinito amor y sus bendiciones.

A mis queridos padres: Manuel y María, por su amor Abnegación, constancia y corrección, las cuales me han convertido en una persona con principios y espíritu de lucha A mis hermanas: Almarosa, Llerme, Luisa y milagros por su apoyo, consejos y momentos felices y tristes que hemos pasado juntos,pues sin mi familia no hubiese sido posible concretar mis sueños

Definitivamente este trabajo no se habría podido realizar sin la colaboración de muchas personas que me brindaron su ayuda; siempre resultaría difícil agradecer a todos aquellos que de una u otra manera me han acompañado en este largo camino de conocimientos, para lograr el desarrollo de este trabajo, porque nunca alcanzaría el tiempo, el papel o la memoria para mencionar odar con justicia todos los créditos y méritos a quienes se lo merecen. Por tanto, quiero agradecerles a todos ellos cuanto han hecho por mí, para que este trabajo saliera adelante de la mejor manera posible.

Al Licenciado Dolores Sánchez García un gran amigo y profesor que conocimos en las aulas universitarias de la UNPRG, Gracias por su excelente asesoramiento académico sin el cual en presente trabajo no hubiera sido posible

Dedicatoria

La presente tesis se la dedico a Dios quien
Me ha dado la fortaleza y la vida, a mis
padres,Manuel Y María ,por su amor,
trabajo y sacrificio en todos estos
Años, gracias a ustedes he logrado llegar hasta
Aquí y convertirme en lo que soy, a mis hermanas
Almarosa, Llerme, Luisa y Milagros que las quiero
mucho.

Juan Manuel

A mis padres, Elmer y Dammar, por creer en mí,
por ser el pilar fundamental en todo lo que soy,
por su incondicional apoyo, por la motivación
constante que me ha permitido ser una persona
de bien, pero más que nada por su amor.
A mis hermanos Eder y Luis por ser siempre
solidarios conmigo para que todos mis proyectos
salgan Adelante.

Mario Alejandro

Resumen

Esta tesis fue realizada con el fin de crear un modelo matricial que nos permita conocer la distribución de genotipos en la descendencia. En primer lugar se inició trabajando con valores iniciales que nos da la genética, en este caso de la primera generación, ya que esto es posible saberlo directamente haciendo los cruces de machos y hembras. El primer cruce de padres nos da valores reales de la distribución de genotipos en la primera generación, esto permitirá crear ecuaciones con valores iniciales denotando a cada tipo de combinación de genotipo con una variable. Con esta ecuación se puede ver que siempre una generación está ligada a la generación precedente esto nos deja ver que cada ecuación de cada generación siempre va a estar ligada a la primera generación, de esta manera se pudo crear un algoritmo matemático en función de los valores iniciales de la primera generación junto con las variables dadas a cada tipo de genotipo. Usamos la definición de matriz diagonalizable para generalizar este algoritmo con esto será posible saber la distribución de genotipos para cualquier generación, dejando esta generalización en forma de ecuaciones o como un modelo matricial.

Abstract

This thesis was made in order to create a matrix model that allows us to know the distribution of genotypes in the offspring. First it started working with initial values that gives genetics, in this case of the first generation, as this is possible to know directly by the crosses of males and females. The first crossing of parents gives us real values of the distribution of genotypes in the first generation, this will create equations with initial values denoting each type genotype combination with a variable. With this equation it can be seen that whenever a generation is linked to the preceding generation that lets us see that each equation of each generation will always be linked to the first generation, so you could create a mathematical algorithm based on the values initials of the first generation with the given variables each type genotype. We use the definition of diagonalizable matrix to generalize this algorithm it is possible to know the distribution of genotypes for any generation, leaving this generalization as equations or as a matrix model.

Introducción

La genética es el estudio de los factores hereditarios o genes. De su transmisión resulta que los hijos se parecen a sus padres más que a otros seres vivientes. Ese parecido se refiere no sólo a los rasgos de la organización general propios de la clase y especie a la que pertenezca el grupo de progenitores y descendientes, sino a características peculiares de tipo racial o de una variedad determinada; en la especie humana, por ejemplo, se heredan el color del pelo, de los ojos, los grupos sanguíneos, etc. Desde siempre el hombre se interesó por descubrir el mecanismo hereditario, pero su complejidad es tal que solamente a fines del siglo pasado se pudo conocer el modo de transmisión de los genes, gracias a los estudios del agustino Gregorio Mendel que, en 1856 comenzó una investigación en el huerto de su convento que le llevo al conocimiento de las leyes de la herencia biológica. Realizó sus experimentos en razas de guisantes comunes, raza que seleccionó y cultivó reiteradamente. Se ha podido comprobar estudiando escritos de autores anteriores que los hombres tuvieron ya desde la antigüedad algunas ideas sobre la herencia biológica. En el presente trabajo se determina un modelo matricial que nos ayude a determinar la distribución de los genotipos en la descendencia, como se sabe aún ahora es imposible determinar al cien por ciento cual es la distribución de los genotipos en las próximas generaciónes, es por eso que con este modelo se tratará de acercar más a una solución real. Se ha creído conveniente, dividir este trabajo en tres capítulos: En el primer capítulo, se trata las nociones básicas sobre matrices,elementos matemáticos necesarios para el desarrollo del presente trabajo. En el segundo capítulo, se hableará de la genética y de cada una de los tipos de herencia, como son la HERENCIA

AUTOSOMICA Y LA HERENCIA LIGADA A X. II El en tercer capítulo se trata de encontrar en primer lugar un algoritmo que nos permita crear un modelo matricial de manera general, el cual ayudará a poder determinar la distribución de los genotipos en la descendencia.

Índice general

Capítulo 1

Matrices

1.1 Definición y Notación:

Una matriz es una tabla rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas del modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mn}$$

Abreviadamente se puede expresar $A = (a_{ij})$. Cada elemento de la matriz lleva dos subíndices. El primero de ellos "i", indica la fila en la que se encuentra el elemento, y el segundo, "j", la columna.

Así el elemento a23 está en la fila 2 y columna 3. Las matrices siempre se representarán con letras mayúsculas.

En general, si una matriz A tiene m filas y n columnas, diremos que su tamaño o dimensión es $m \times n$ (se lee "m por n"), siempre en primer lugar el número de filas y en *segundo lugar el de columnas.*[1]

Ejemplo 1.1. Son ejemplos de matrices los siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 3 & 12 & 11 \\ 8 & 23 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2 Tipos de Matrices

1. **Matrices Iguales**

   Se dice que dos matrices $A = [a_{ij}]_{mxn}$ y $B = [b_{ij}]_{mxn}$ son iguales si y solo si son idénticas; *es decir, si y solo si son del mismo orden y sus respectivos elementos son* iguales:

   $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y para cada j.

   Ejemplo 1.2. Sean:

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$

   Averiguar si son iguales o no.

   Solución. A y B tienen el mismo orden (2×2). Veamos si tiene los mismos elementos:

   $$a_{11} = b_{11} = 3$$
   $$a_{12} = b_{12} = -10$$
   $$a_{21} = b_{21} = 8$$
   $$a_{22} = b_{22} = 4$$

   Luego,$A = B$.

Ejemplo 1.3. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Averiguar si son iguales o no.

Solución. A y B tienen el mismo orden (2×2). Veamos si tiene los mismos elementos:

$$a_{11} = 3 \neq b_{11} = -1$$
$$a_{12} = b_{12} = 0$$
$$a_{21} = b_{21} = 0$$
$$a_{22} = b_{22} = 0$$

Luego,$a_{11} \neq b_{11}$, entonces $A = B$.

2. <u>**Matriz Cuadrada**</u> Se dice que una matriz A es cuadrada cuando el número de filas es igual al número de columnas. A_{mxn} es cuadrada si y sólo si $m = n$, en este *caso se dice que A es de orden* $(n \times n)$ *y se representa por* A_n.

Ejemplo 1.4.
La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es cuadrada, mientras que $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ no lo es.

En una matriz cuadrada A de orden $(n \times n)$, los elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$, forman la diagonal principal de la matriz.

Ejemplo 1.5.

Obsérvese que en la matriz

$$A = [a_{ij}]_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

los elementos de la diagonal principal, conforme está indicado, son:

$a_{11} = 1, a_{22} = 4, a_{33} = -7$.

3. **Matriz Nula**

   Una matriz en la cual todos sus elementos son ceros, se denomina matriz nula y se denota por φ .

   Ejemplo 1.6.

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. **Matriz Diagonal**

   Una matriz cuadrada en la cual los elementos fuera de la diagonal principal son ceros, es llamada matriz diagonal.

   Ejemplo 1.7.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. **Matriz Escalar**

   Es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

   Ejemplo 1.8.

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

6. **Matriz Identidad**

   Es una matriz escalar en la que $k = 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, etc.$$

Se acostumbra denotar a la matriz identidad de orden $n \times n$ por I_n.

7. **Matriz Fila**

   Se llama matriz fila a una matriz de orden $1 \times n$ (1 fila y n columnas) de la forma:

   $A = [a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n}]$

   Ejemplo 1.9.

   $$A = [5 \;\; 6 \;\; 3 \;\; 1]$$

8. **Matriz Columna**

   Se llama matriz columna a una matriz de orden $n \times 1$, (n filas y 1 columna), de la forma:

   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$$

9. **Vector**

   Una $n - upla$ ordenada de números: $\overline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ se llama vector de n componentes. Tanto una matriz fila como una matriz columna representan un vector (fila o columna). Por convención, a una matriz columna le llamaremos simplemente vector.

10. **Transpuesta**

    Dada una matriz A, se llama transpuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por A^t ó A^T. Si es $A = (a_{ij})_{mxn}$, su transpuesta es $A^t = (a_{ji})_{nxm}$

    Ejemplo 1.10.

    $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ entonces su transpuesta es $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

11. **Matriz Triangular Superior**

Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por debajo de la diagonal principal nulos.

Ejemplo 1.11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

12. **Matriz Triangular Inferior**

Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima de la diagonal principal nulos.

Ejemplo 1.12.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1.3 Operaciones y Propiedades

1. **Suma de matrices**

Sean las matrices: $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, ambas del mismo orden $m \times n$. La matriz suma de A y B es:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

la cual también es de orden $m \times n$.

Observación 1.1. En otras palabras, para sumar matrices, lo que se hace es sumar los elementos que están situados en la misma fila y en la misma columna.[2]

Ejemplo 1.13. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 4 \\ -1 & 8 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 0 & -2 \end{bmatrix} \; y \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 3 & -4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+(-2) & 6+(-8) & 0+3 & 4+(-4) \\ -1+4 & 8+3 & 3+5 & 5+3 \\ 5+3 & 7+(-1) & 0+4 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 11 & 8 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedad 1.1.

a) A + B = B + A

b) (A + B) + C = A + (B + C)

c) k (A + B) = k A + k B (k : escalar)

d) (k+ l) A = k A + l A (k , l : escalares)

e) (k l) A = k (l A) (k , l : escalares)

f) 1A = A

g) -A = (-1) A

h) La diferencia de A y B, del mismo orden, es definida por: A - B = A + (-B)

Ejemplo 1.14. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 8 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \; y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Hallar A-B

Solución.- Se puede efectuar la diferencia, ya que las matrices son del mismo orden (3×3).

Luego: A-B = A+(-B)=A= $\begin{bmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 1 & -12 & -10 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. **Multiplicación de una Matriz por un Escalar**

   Sea $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times n$ y k un número real. Entonces: $kA = [ka_{ij}]$ para todo i, j.

   Nota 1.1. Observar que cada elemento de la matriz se multiplica por el escalar k.

   Ejemplo 1.15. Sea

   $\begin{bmatrix} -3 & -8 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} yk = 2$ hallar kA

   entonces $kA = 2A = \begin{bmatrix} -6 & -16 & 8 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

3. **Producto de un Vector Fila por un Vector Columna**

   Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \; y \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

   Entonces $AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ es el producto de A por B.

   Al número $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ se le conoce como producto escalar de A y B.

   Nota 1.2. . Observar que ambas matrices tienen la misma cantidad de elementos (*la matriz* A *tiene* n *elementos columna y la matriz* B *tiene* n *elementos fila*)

Ejemplo 1.16. Hallar AB, si :

$A = [2 \ \ -5 \ \ 7]_{1\times 3}$ (una fila y 3 columnas) y

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

(tres filas y una columna)

solución

$$AB = [2 \ \ -5 \ \ 7] \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = [(2)(2) + (-5)(7) + (7)(3)] = [-10]$$

4. <u>**Producto de dos Matrices**</u>

   El producto de una matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$ y una matriz $B = [b_{ik}]$ de $n \times p$, es otra matriz $C = [c_{ik}]$de orden $m \times p$, donde c_{ik} es el producto escalar de la $i-$ésima fila de A por la $k-$ésima columna de B. Gráficamente podemos observar lo siguiente:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{Fila i de la matriz A} \Rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c|cc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ik} & \cdots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{array}\right] = C = [C_{ik}]$$

$$\Uparrow$$

Columna k
de la matriz B

$$\text{Donde: } C_{ik} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{ik} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Ejemplo 1.17. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular $A \times B$.

Solución

Calculando los elementos C_{ik} del producto se tienen:

C_{11} : (primera fila de A por primera columna de B)

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [26]$$

C_{12}: (primera fila de A por segunda columna de B)

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0]$$

C_{21} : (segunda fila de A por primera columna de B)

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [134]$$

C_{22} (segunda fila de A por segunda columna de B)

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [-2]$$

Luego

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 134 & -2 \end{bmatrix}$$

5. **Propiedades**

   a) A(BC)=(AB)C

   b) (A+B)C=AC+BC

   c) A(B+C)=AB+AC

   d) En general, no se cumple que $AB = BA$. (No conmutan).

1.4 Determinantes

Definición 1.1. El determinante viene a ser una función que aplicada a una matriz cuadrada da un único valor numérico.[1]

Sea $M_{n\times n}$ *el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden* n, *entonces la definición* queda de la siguiente manera:

$$||: M_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}(o\ \ \mathbb{C})$$

$$A \longrightarrow |\, A \,|$$

Notación:

Sea A una matriz cuadrada, entonces el determinante de la matriz A se representa por $|\, A \,|$ o $det(A)$ o $det\ A$.

1. <u>**Determinante de una matriz cuadrada de orden 2**</u>

   Sea A una matriz cuadrada de orden 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

   Su determinante se define mediante la fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 1.18.

Sea la matriz cuadrada de orden 2 $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$,hallar det A

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = (5)(3) - (8)(10) = 15 - 80 = -65$$

2. <u>**Determinante de una matriz cuadrada de orden 3**</u> Sea A una matriz cuadrada de orden 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

   Su determinante se define mediante la fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ejemplo 1.19. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{,hallar det A}$$

Solución

$$\mid A \mid = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(2)(3) + (2)(1)(2) + (3)(3)(1) - (2)(2)(3) - (1)(1)(1) - (3)(3)(2) = -12$$

3. **Cálculo del determinante de orden n, por los adjuntos**

   Cuando el orden de los determinantes es superior a 3 la regla de Sarrus no es fácilmente aplicable y entonces utilizamos el método de los adjuntos, que reduce el orden en una unidad cada vez que le utilizamos.

   Para ello vamos a definir dos nuevos conceptos:

4. **Menor complementario**

   Dada una matriz A_n se llama menor complementario de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz, que resulta de suprimir la fila i y la columna j en la matriz A_n: se llama m_{ij}.

5. **Adjunto de un elemento** Al producto de $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario m_{ij} de a_{ij} se llama adjunto de un elemento a_{ij} y se escribe A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

A partir de estas definiciones obtenemos otra forma de calcular un determinante: el valor de un determinante de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos.

$$\begin{aligned} \mid A \mid \quad \sum_{ioj}^{n} a_{ij} \times A_{ij} \quad &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.20.

Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ Elegimos la primera fila ya que tiene dos elementos nulos y eso va a simplificar el cálculo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 0A_{12} + 2A_{13} + 0A_{14} =$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 0m_{12} + 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 0m_{14} =$$

Cuando llegamos a un determinante de orden tres, podemos aplicar Sarrus:
$1[(-16) + (-3) - [(-4) + 6]] + 2[(-2) + 1 + (-6) - [3 + 1 + 4]] = -51$

Propiedades

a) Para toda matriz $A_{n\times n}$ se tiene $detA = det(A^t)$.

b) El determinante de una matriz $A_{n\times n}$ cambia de signo si dos filas o dos columnas se intercambian.

c) Si la matriz Bnxn se obtiene de la matriz $A_{n\times n}$ trasladando una de sus filas o columnas k lugares, entonces, $\mid B \mid = (-1)^k \mid A \mid$.

d) Si una matriz $A_{n\times n}$ se tiene que una fila o columna es múltiplo de otra fila o columna, entonces el determinante de dicha matriz vale CERO.

e) Si en una matriz $A_{n\times n}$ todos los elementos de una matriz fila o columna son CEROS entonces su determinante es CERO.

f) Si una matriz $A_{n\times n}$ todos los elementos de una fila o columna son múltiplos por un escalar K, entonces el valor del determinante también queda multiplicado por K.

g) Si a una fila o una columna de una matriz $A_{n\times n}$ se le suma el múltiplo de otra fila o columna, se tendrá que el valor del determinante $A_{n\times n}$ no varía.

h) Si los elementos de una fila o columna cualquiera consta de dos términos, el determinante puede expresarse como la suma de otros dos determinantes.

i) El determinante de la matriz identidad es igual a la unidad.

j) Sea $D = [d_{ij}]$ una matriz diagonal de orden $n \times n$, entonces
$\mid D \mid = d_{11} \cdot d_{22} \cdot \cdot d_{33} \cdot \cdots d_{nn}$

k) El determinante de una matriz triangular superior o triangular inferior es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

l) En forma general el determinante de una suma de matrices es diferente de la suma de los determinantes de cada matriz, es decir:
$det(A + B) det(A) + det(B)$

m) El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, es decir:
$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

1.5 Valores y Vectores Propios

Definición 1.2. Dada una matriz cuadrada diremos que un número $\lambda \in \mathbb{R}$ o C es un valor propio (o autovalor) de si existe un vector no nulo, $v \neq 0$, tal que $Av = \lambda \cdot v\cdot$
$A \cdot v$ *se llama vector propio (o auto vector) asociado al valor propio , es un valor propio* si y sólo si es raíz de la ecuación característica $det(A - \lambda I) = 0$

Ejemplo 1.21. Halle los autovalores y auto vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) La construcción del polinomio característico se lleva a cabo resaltando de la diagonal principal y buscando el determinante de la matriz resultante

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda)$$

b) Los autovalores propios se hallan con la condición

$$p(\lambda) = 0$$

es decir

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 2] = 0$$

$$1 - \lambda = 0 \quad \vee \quad (1-\lambda)^2 = 2$$

$$\lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{2}$$

Luego: $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$ y $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$

Por lo tanto $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$ son valores propios reales debido a que A es una matriz simétrica.

c) Los vectores propios se hallan resolviendo los sistemas homogéneos

i) Si

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ x+z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0; \quad x + z = 0 \Rightarrow x = -z$$

sea $z = -\alpha$

$$v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

luego el auto vector v_1 es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

ii) $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}x + y \\ x - \sqrt{2}y + z \\ y - \sqrt{2}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\sqrt{2}x + y = 0; \quad x - \sqrt{2}y + z = 0; y - \sqrt{2} = 0$$

$y = \sqrt{2}x; x - \sqrt{2}y + z = 0; y = \sqrt{2}z$

sea $y = \alpha \Rightarrow x = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$

y

$$z = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ \alpha \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego el auto vector v_2 es $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

iii) $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}x + y \\ x + \sqrt{2}y + z \\ y + \sqrt{2}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt{2}x + y = 0; \quad x + \sqrt{2}y + z = 0; y + \sqrt{2}z = 0$$

$y = \sqrt{2}x; x - \sqrt{2}y + z = 0; y = \sqrt{2}z$

sea $y = \alpha \Rightarrow x = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$

y

$$z = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ \alpha \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego el auto vector v_3 es $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ Entonces los autovectores de la matriz

$$\{v_1; v_2; v_3\}$$

Ejemplo 1.22. Halle los autovalores y auto vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Hallamos el polinomio característico

$$p(\lambda) = det(A - \lambda)$$

$$p(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

b) Los autovalores propios se hallan con la condición

$$p(\lambda) = 0$$

es decir

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

ahora $1-\lambda = 0;\quad 2-\lambda = 0;\quad -1-\lambda = 0$

$\lambda = 1;\quad \lambda = 2;\quad ;\lambda = -1$

Por lo tanto $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$ son valores propios reales

c) Los vectores propios se hallan resolviendo los sistemas homogéneos

i) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Reemplazando en la matriz}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2y \\ y \\ -2x-2y-2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$-2x - 2y - 2z = 0 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow x = -z$

sea $z = \alpha \Rightarrow x = -\alpha$

$$v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego el auto vector v_1 es $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii) $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Reemplazando en la matriz}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x+2y \\ 0 \\ -2x-2y-3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x + 2y = 0 \Rightarrow 2y = x$$

$-2x-2y-3z=0 \Rightarrow 2x+2y+3z=0 \Rightarrow 4y+2y+3z=0 \Rightarrow 6y+3z=0$

$3z=-6y \Rightarrow z=-2y$

$y=t \Rightarrow x=2t$

$y=t \Rightarrow z=-2t$

$$v_2=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2t \\ t \\ -2t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

luego el auto vector v_2 es $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

iii) $\lambda_3=-1$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Reemplazando en la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+2y \\ 3y \\ -2x-2y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x+2y=0 \quad 2y=-2x \Rightarrow x=-y$$

$3y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=0$

$$v_3=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}=z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3=\alpha\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego el auto vector v_3 es $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Entonces los autovectores de la matriz

$$\{v_1; v_2; v_3\}$$

1. **Diagonalización de matrices**

Se dice que una matriz cuadrada A es diagonizable, si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal; se dice que la matriz P diagonaliza a la matriz A. Si existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal, entonces A es diagonizable, y se dice que P diagonaliza ortogonalmente a A.

Ejemplo 1.23. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Es diagonizable ya que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene la propiedad de que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.1.

Una matriz A de orden nxn es diagonizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes.

En tal caso la matriz diagonal D semejante a A esta dado por:

$$D\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

Si P es una matriz cuyas son vectores propios linealmente independiente de A entonces $D = P^{-1}AP$

Demostración.

Prmero se supone que A tienen vectores propios linealmente independientes $v_1, v2, v_3, \cdots, v_n$ que corresponden a los valores propios (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

Sea

$$v_1 = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, v_n = \begin{bmatrix} P_{1n} \\ P_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{nn} \end{bmatrix}, y \quad sea$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces P es invertible ya que sus columnas son linealmente independientes.

Ahora también

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{nn} \end{bmatrix}$$

Y se ve que la columna i de AP es $A = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{ni} \end{bmatrix} = Avi = \lambda_i v_i$ así AP es la matriz cuya columna i es $\lambda_i v_i$ y

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n P_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix}$$

pero

$$PD = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
\lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n P_{1n} \\
\lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n P_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n P_{nn}
\end{bmatrix}
$$

2. **Solución de Ecuaciones Lineales por métodos clásicos**

   1. **Sistema de Ecuaciones Lineales** Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

   $$
   \begin{aligned}
   a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
   a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
   \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\
   a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
   \end{aligned}
   $$

   En este caso tenemos n ecuaciones y n incógnitas. Los números reales a_{ij} se denominan coeficientes y los x_i se denominan incógnitas (o números a determinar) y b_j se denominan términos independientes. Resolver el sistema *consiste en calcular las incógnitas para que se cumplan todas las ecuaciones* del sistema simultáneamente. Diremos que dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.[3]

   2. **Expresión matricial de un sistema** Cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial del modo:

   $$
   \begin{pmatrix}
   a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots & a_{1n} \\
   a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots & a_{2n} \\
   \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
   a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\cdots & a_{mn}
   \end{pmatrix}
   \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
   =
   \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
   $$

La matriz A se llama matriz de coeficientes. La matriz X= $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ se llama matriz de incógnitas y

La matriz B= $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ se llama matriz de términos independientes

La matriz formada por A y B conjuntamente, es decir:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Se llama matriz ampliada del sistema y se representa por $(A \mid B)$ o por A^*.

Ejemplo 1.24.

El sistema

$$\begin{aligned} x + y - z \quad &= 5 \\ x + y \quad &= 7 \\ 2x + 2y - z \quad &= 12 \end{aligned}$$

escrito matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Y la matriz ampliada es:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 12 \end{array}\right)$$

3. **Tipos de Sistemas**

   En general, buscaremos las soluciones de los sistemas en los números reales. Dependiendo del posible número de tales soluciones reales que tenga un sistema, estos de pueden clasificar en:

$$\begin{cases} \text{INCOMPATIBLES : No tiene solución (S.I.)} \\ \text{COMPATIBLES : Tiene solución} \begin{cases} \text{DETERMINADOS : Solución Unica (S.C.D)} \\ \text{INDETERMINADOS : Infinitas soluciones (S.C.I)} \end{cases} \end{cases}$$

4. **Solución de un sistema de ecuaciones**

   Es un conjunto de valores de las incógnitas que verifican simultáneamente a todas y cada una de las ecuaciones del sistema. De acuerdo con su solución, un sistema puede ser: Consistente, si admite solución; o Inconsistente, si no admite solución. Un sistema Consistente puede ser: Determinado, si la solu*ción es única o Indeterminado, si la solución no es única*, es decir, *existe una* infinidad de soluciones.

   1) **Método de Gauss**

      Dado un Sistema de Ecuaciones Lineal $Ax = b$ con $A \in M_{n\times n}$ inversible, el principio que rige el método de Gauss para la resolución del sistema se puede resumir en "la determinación de una matriz inversible M tal que la matriz MA sea triangular superior". Este es el proceso llamado de eliminación. Una vez analizado este proceso se resolverá el sistema triangular equivalente $MAx = Mb$ mediante el método de sustitución retrógrada.

      En la práctica no se calcula M; sino directamente los productos
      MA y Mb.

      El método de Gauss se realiza en tres bloques:

      i) Proceso de eliminación sucesiva de incógnitas, que equivale a la determinación de una matriz M tal que MA sea triangular superior.

ii) Cálculo del vector Mb; que se suele realizar simultáneamente al bloque 1.

iii) Resolución de sistema triangular $MAx = Mb$ por sustitución retrógrada.

2) <u>**Gauss normal**</u>

El proceso de eliminación se realiza en $(n-1)$ etapas: en cada etapa $k-$ésima se obtienen ceros en la columna k por debajo de la diagonal principal. Así, partiendo de $A_1 = A$, en la etapa k-ésima se construye A_{k+1} a partir de $A_k = (a_{ij}^k)$.

Para poder realizar cada etapa $k-$ésima se exigirá (y esta es la característica esencial de Gauss normal) que:

$$a_{kk}^k \neq 0, \ \forall \ k = 1, \cdots, n$$

Etapa $k-$ésima Se hacen ceros en la columna k por debajo de la diagonal principal restando a las filas $i = k+1, \cdots, n$, la fila k multiplicada por $\frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}$. *Matricialmente, esto corresponde a hacer* $A_{k+1} = E_k A_k$ *con:*

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\frac{a_{k+1,k}^k}{a_{kk}^k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -\frac{a_{n,k}^k}{a_{kk}^k} & 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (det(E_k) = 1)$$

Una vez realizadas las $(n-1)$ etapas se tiene:

$A_n = \underbrace{E_{n-1} \cdots E_2 E_1}_{M} A = MA = U$

Donde es una matriz triangular superior, y simultáneamente:

$E_{n-1} \cdots E_2 E_1 b = Mb$

Capítulo 2

Genética

2.1 Genética

La genética es el campo de la biología que busca comprender la herencia biológica que se transmite de generación en generación. El estudio de la genética permite comprender qué es lo que exactamente ocurre en el ciclo celular, (replicar nuestras células) y reproducción, (meiosis) de los seres vivos y cómo puede ser que, por ejemplo, entre seres humanos se transmiten características biológicas genotipo (contenido del genoma específico de un individuo en forma de ADN), características físicas fenotipo, de apariencia y hasta de personalidad. El principal objeto de estudio de la genética son los genes, formados por segmentos de ADN (doble hebra) y ARN (hebra simple), tras la transcripción de ARN mensajero, ARN ribosómico y ARN de transferencia, los cuales se sintetizan a partir de ADN. El ADN controla la estructura y el funcionamiento de cada célula, con la capacidad de crear copias exactas de sí mismo, tras un proceso llamado replicación, en el cual el ADN se replica. En 1865 un monje científico checo-alemán llamado Gregory Mendel observó que los organismos heredan caracteres de manera diferenciada. Estas unidades básicas de la herencia son actualmente denominadas genes. Fue William Bateson quien, en 1905, utilizó el término "Genetics"por primera vez. En 1941 Edward Lawrie Tatum y George Wells Beadle demuestran que los genes [ARN-mensajero] codifican proteínas; luego en 1953 James D. Watson y Francis Crick determinan que la estructura del ADN es una doble hélice en direcciones anti paralelas, polimerizadas en dirección 5' a 3', para el año 1977 Fred Sanger, Walter Gilbert, y Allan Maxam secuencian ADN completo del genoma del bacteriófago y en 1990 se funda el Proyecto Genoma Humano. Aunque la genética juega un papel muy significativo en la apariencia y el comportamiento de los organismos, es la combinación de la genética replicación, transcripción, procesamiento *(maduración del ARN) con las experiencias del organismo la que determina el resultado* final. Los genes corresponden a regiones del ADN o ARN, dos moléculas compuestas de una cadena de cuatro tipos diferentes de bases nitrogenadas (adenina, timina, citosina y guanina en ADN), en las cuales tras la transcripción (síntesis de ARN) se cambia la timina por uracilo ?la secuencia de estos nucleótidos es la información genética que *heredan los organismos. El ADN existe naturalmente en forma bicatenaria, es decir,* en dos cadenas en que los nucleótidos de una cadena complementan los de la otra. La secuencia de nucleótidos de un gen es traducida por las células para producir una cadena de aminoácidos, creando proteínas ? el orden de los aminoácidos en una proteína corresponde con el orden de los nucleótidos del gen. Esto recibe el nombre de código *genético. Los aminoácidos de una proteína determinan cómo se pliega en una forma* tridimensional y responsable del funcionamiento de la proteína. Las proteínas ejecutan casi todas las funciones que las células necesitan para vivir. El genoma es la totalidad de la información genética que posee un organismo en particular. Por lo general, al hablar de genoma en los seres eucarióticos nos referimos solo al ADN contenido en el núcleo, or*ganizado en cromosomas. Pero no debemos olvidar que también la mitocondria contiene* genes llamado genoma mitocondrial.

2.1.1 Subdivisiones de la genética

La genética se subdivide en varias ramas, como:

1. **Clásica:** Se basa en las leyes de Mendel para predecir la herencia de ciertos caracteres o enfermedades. La genética clásica también analiza como el fenómeno de

la recombinación o el ligamento altera los resultados esperados según las leyes de Mendel.

2. **Citogenética:** El eje central de esta disciplina es el estudio del cromosoma y su dinámica, así como el estudio del ciclo celular y su repercusión en la herencia. Está muy vinculada a la biología de la reproducción y a la biología celular.

3. **Genética del desarrollo:** Estudia como los genes son regulados para formar un organismo completo a partir de una célula inicial.

4. **Cuantitativa:** Analiza el impacto de múltiples genes sobre el fenotipo, muy especialmente cuando estos tienen efectos de pequeña escala.

5. **Molecular:** Estudia el ADN, su composición y la manera en que se duplica. Así mismo, estudia la función de los genes desde el punto de vista molecular: Como transmiten su información hasta legar a sintetizar proteínas.

6. **Evolutiva y de poblaciones:** Se preocupa del comportamiento de los genes en una población y de cómo esto determina la evolución de los organismos.

7. **Muta génesis:** Estudia el origen y las repercusiones de las mutaciones en los diferentes niveles del material genético.

2.1.2 Importancia de la genética

El conocimiento en genética ha permitido la mejora extensa en productividad de plantas usadas para el alimento como por ejemplo el arroz, trigo, y el maíz. El conocimiento genético también ha sido un componente dominante de la revolución en salud y asistencia médica en este siglo. La genética tiene también una gran importancia en la bioingeniería, ya que ha permitido modificar el material genético de distintos organismos. Los avances en este campo han permitido también la alteración de diversos segmentos del ADN, resultando en la creación de nuevos genes y rasgos genéticos y logrando también evitar malformaciones genéticas. En el área de la salud ha permitido el tratamiento y prevención de la reaparición del síndrome de Down. La bioingeniería ofrece la esperanza de crear antibióticos más eficaces, además de descubrir una hormona del crecimiento para combatir el enanismo. Sin duda, la genética juega un papel muy importante en la evolución de la especie y la erradicación de enfermedades genéticas.

2.2 Genotipo

Se denomina genotipo a toda la información de características genéticas que tenemos los seres humanos y además también lo tienen organismos particulares: animales, vegetales. Esta información genética se encuentra en forma de ADN, que es el ácido desoxirribonucleico, que es precisamente el ácido que contiene los datos e instrucciones genéticas que intervienen en el desarrollo de un ser y en su funcionamiento.
A toda esa totalidad o conjunto de informaciones genéticas se lo denomina con el término genoma. El término comenzó a utilizarlo un profesor alemán de botánica, Hans Winkler a principios del siglo XX y se forma mediante la conjunción de las palabras gene y cromosoma (es un acrónimo de las mismas, es decir, se forma mediante una parte de una palabra, y la parte de otra, para formar así una sola).
El genoma específico de una especie, como el genoma humano, entre individuos de la misma especie puede sufrir variaciones en sus genes, y éstas pueden ser determinadas mediante el proceso de genotipado, que es una técnica de estudio en laboratorio que extrae y analiza la información genética de un determinado organismo para identificar su genoma y poder así diferenciarlo del resto.
Y aquí vamos a poner un ejemplo. Un estudio común y conocido de este tipo se realizan cuando un hombre quiere conocer si su paternidad sobre un niño o niña (aunque también puede realizarse cuando el supuesto hijo o hija es adulto) es o no, efectivamente, de su misma sangre. Como es información genética pero a la vez hereditaria, mediante este tipo de estudios en laboratorio puede conocerse de manera certera y despejarse este tipo

de dudas acerca de lazos paternales.

Al genotipo debemos diferenciarlo de un término similar, el fenotipo. Decimos similar porque sólo una letra diferencia las palabras, pero su concepto es bien diferente uno de otro. Mientras el genotipo incluye todos los genes o características internas del organismo, el fenotipo es el conjunto de rasgos o características externas del mismo, que en *general también están relacionadas de manera estrecha con las condiciones ambientales* en las cuales vive.

El primero en identificar esta existencia genotipo-fenotipo fue el científico Gregory Mendel, a lo cual llamo "naturaleza dual"de todo individuo. Muchas veces, el genotipo, que incluye como dijimos al ADN suele comparárselo con un código que poseemos todos los *seres humanos y que por esta razón leyendo dicho código es posible establecer diferentes* genéticas con el resto del individuo, puesto que entre seres humanos, no hay dos códigos iguales.

2.3 Herencia Autosómica

2.3.1 Herencia autosómica recesiva

La herencia autosómica recesiva se da cuando el alelo alterado es recesivo sobre el normal por lo que con una sola copia del alelo alterado no se expresa la enfermedad. Al ser autosómico, el gen se encuentra en uno de los 22 pares de cromosomas no sexuales, o autosomas, pudiendo afectar con igual probabilidad a hijos e hijas. El alelo alterado tiene que heredarse tanto del padre como de la madre para que se dé la enfermedad. Normalmente no se da en todas las generaciones de una familia. Cada persona afectada tiene normalmente ambos progenitores sanos pero portadores del alelo mutado. Los hijos de una pareja en la que ambos son portadores tienen una probabilidad del 50 %

de ser portadores de una copia del alelo alterado (no expresaran la enfermedad pero podrían transmitirla a sus descendientes), 25 % de probabilidad de tener dos copias del alelo alterado y desarrollar la enfermedad autosómica recesiva y 25 % de probabilidad de heredar dos copias del alelo normal y no desarrollar la enfermedad ni ser portador.

2.3.2 Herencia autosómica dominante

El patrón de herencia autosómica dominante se da cuando el alelo alterado es dominante sobre el normal y basta una sola copia para que se exprese la enfermedad. Al ser autosómico, el gen se encuentra en uno de los 22 pares de cromosomas no sexuales, o autosomas, pudiendo afectar con igual probabilidad a hijos e hijas. El alelo alterado se puede haber heredado tanto del padre como de la madre. Normalmente se da en todas las generaciones de una familia. Cada persona afectada tiene normalmente un progenitor afectado y una probabilidad del 50 % con cada hijo de que este herede el alelo mutado y desarrolle la enfermedad autosómica dominante.

2.4 Herencia ligada a X

La herencia ligada al cromosoma X quiere decir que el gen que causa el rasgo o el trastorno se localiza en el cromosoma X. Cabe recordar que un cromosoma X y un cromosoma Y. Los genes del cromosoma X pueden ser recesivos o dominantes, y su expresión en las mujeres y en los hombres no es la misma debido a que los genes del cromosoma Y no van apareados exactamente con los genes del X. Los genes recesivos ligados al cromosoma X se expresan en las mujeres únicamente si existen dos copias del gen (una en cada cromosoma X). Sin embargo, en los varones sólo debe haber una copia de un gen recesivo ligado al cromosoma X para que el rasgo o el trastorno se exprese. Por ejemplo, una mujer puede ser portadora de un gen recesivo en uno de sus cromosomas X sin saberlo y transmitírselo a su hijo, que expresará el rasgo o el trastorno. Entre los ejemplos de trastornos recesivos ligados al cromosoma X se destacan los casos del daltonismo y la hemofilia, enfermedades provocadas por un gen recesivo situado precisamente en el segmento diferencial del cromosoma X. Recalcamos que, debido a su ubicación, para que una mujer padezca la enfermedad debe ser homocigota recesiva (*tener el gen recesivo en ambos cromosomas* X), *mientras que en los hombres basta con* que el gen recesivo se encuentre en el único cromosoma X que tienen.

Capítulo 3

Aplicación de Matrices a la Genética

Sabiendo las nociones de matrices y los tipos de herencia que existen en la genética se tratará de hallar un algoritmo que nos permita crear el modelo matricial para saber la distribución de los genotipos para cualquier generación. Se aplicará los conocimientos de matrices en ejemplos de genética, en primer lugar se hará un ejercicio de herencia autosómica.

3.1 Aplicación de Matrices en Herencia Autosómica

Un agricultor tiene una población de plantas que consiste en cierta distribución de los tres genotipos posibles AA, Aa, aa. El agricultor quiere emprender un programa de cultivo en el que cada planta en la población sea fertilizada con una planta de genotipo AA y después sea reemplazada por un miembro de su descendencia. Se quiere deducir una expresión para la distribución de los tres genotipos posibles en la población después de cualquier número de generaciones.

Solución

Este cuadro podemos verificar en qué proporción puede llegar los genotipos de los padres a partir de los diferentes cruces de padres.

	AA - AA	AA - Aa	AA - aa	Aa - Aa	Aa - aa	aa - aa
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

⇑
PRIMERA
GENERACIÓN

Como nos piden que sea fertilizada con una planta de genotipo AA*, solo trabajaremos* con padres de este tipo de genotipo.

Iniciaremos suponiendo que para cada cruce de padres pueden darnos la proporción de genotipos que llegaran a la descendencia, en este caso a la primera generación podemos ver que:

$AA - AA : a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$

$AA - Aa : a_0 = \frac{1}{2}, b_0 = \frac{1}{2}, c_0 = 0$ vemos que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$

$AA - aa : a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$

Lo que quiere decir que al tomar la generación precedente se puede hallar la siguiente generación. Se utilizará siempre los valores iniciales del primer cuadro para las siguientes *ecuaciones ya que cada descendencia siempre tendrá como base los valores iniciales.*

Denotaremos a los tipos de genotipos posibles de la siguiente manera:

a_n = fracción de plantas de genotipo AA para la n -ésima generación

b_n = fracción de plantas de genotipo Aa para la n-ésima generación

c_n = fracción de plantas de genotipo aa para la n-ésima generación

Formaremos una primera ecuación para la primera generación el cual está dado los valores iniciales de la distribución de genotipos en la descendencia donde las fracciones son los porcentajes de distribución y donde a_0, b_0 y c_0 son las fracciones de plantas para cada tipo de genotipo

Para $n = 1$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \cdot a_0 + \tfrac{1}{2} \cdot b_0 + 0 \cdot c_0 \\
b_1 &= 0 \cdot a_0 + \tfrac{1}{2} \cdot b_0 + 1 \cdot c_0 \\
c_1 &= 0 \cdot a_0 + 0 \cdot b_0 + 0 \cdot c_0
\end{aligned}
$$

Para n = 2 en función de la descendencia precedente (n=1) podemos escribir las ecuaciones en función de los valores iniciales, de tal manera tendríamos:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 1 \cdot a_1 + \tfrac{1}{2} \cdot b_1 + 0 \cdot c_1 = 1(a_0 + \tfrac{1}{2}.b_0) + \tfrac{1}{2}.(\tfrac{1}{2}.b_0 + c_0) = 1.a_0 + \tfrac{3}{4}.b_0 + \tfrac{1}{2}.c_0 \\
b_2 &= 0 \cdot a_1 + \tfrac{1}{2} \cdot b_1 + 1 \cdot c_1 = 0(a_0 + \tfrac{1}{2}.b_0) + \tfrac{1}{2}.(\tfrac{1}{2}.b_0 + c_0) = 0.a_0 + \tfrac{1}{4}.b_0 + \tfrac{1}{2}.c_0 \\
c_2 &= 0 \cdot a_1 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot c_1
\end{aligned}
$$

Para la segunda generación vemos que queda de la siguiente manera:

	AA - AA	AA - Aa	AA - aa
AA	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
Aa	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
aa	0	0	0

Esta es la distribución de genotipos para la segunda generación. De igual manera Para n=3 se puede escribir ecuaciones en función de los valores iniciales ya que de esta manera ayudaran a entender de manera mas fácil la distribución de genotipos.

$$
\begin{aligned}
a_3 &= 1.a_2 + \tfrac{1}{2}.b_2 + 0.c_2 = a_0 + \tfrac{3}{4}.b_0 + \tfrac{1}{2}.c_0 + \tfrac{1}{8}.b_0 + \tfrac{1}{4}.c_0 = 1.a_0 + 7/8.b_0 + \tfrac{3}{4}c_0 \\
b_3 &= 0.a_2 + \tfrac{1}{2}.b_2 + 1.c_2 = 0(a_0 + \tfrac{1}{2}.b_0) + \tfrac{1}{2}.(\tfrac{1}{4}.b_0 + \tfrac{1}{2}c_0) = 0.a_0 + \tfrac{1}{8}.b_0 + \tfrac{1}{4}.c_0 \\
c_3 &= 0.a_2 + 0.b_2 + 0.c_2
\end{aligned}
$$

Donde obtenemos el siguiente cuadro

	AA -AA	AA -Aa	AA - aa
AA	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$
Aa	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
aa	0	0	0

Generalizando la ecuación se verifica que siempre se inicia trabajando con los valores iniciales del primer cuadro, además de trabajar con la generación precedente, de esta manera tendríamos que:

$$\begin{aligned} a_n &= 1a_{n-1} + \tfrac{1}{2}b_{n-1} + 0.c_{n-1} \\ b_n &= 0a_{n-1} + \tfrac{1}{2}b_{n-1} + 1.c_{n-1} \quad \cdots (\text{II}) \\ c_n &= 0a_{n-1} + 0b_{n-1} + 0.c_{n-1} \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que:

1. La primera de las tres ecuaciones establece que la descendencia de genotipos AA-AA será 100 % de genotipo AA de acuerdo con este programa de cultivo y si las plantas son de genotipo AA-Aa obtendremos la mitad de genotipo AA.

2. La segunda ecuación establece que la descendencia de plantas de genotipos AA -aa serán de genotipo Aa y que si las plantas de genotipo AA - Aa serán la *mitad de genotipo* Aa.

3. En la tercera ecuación no hay posibilidad de obtener descendencia de plantas de genotipos aa.

La ecuación (II) se puede escribir en notación matricial:

$$X^{(n)} = MX^{(n-1)} \quad \cdots (1) \quad para \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Dónde:

$$X^n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \quad X^{n-1} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la ecuación (1) para n=1

$$X^1 = MX^{(0)}$$

Nuevamente en la ecuación (1) para n = 2

$$X^2 = MX^{(1)} = M \cdot M \cdot X^{(0)} = M^2 X^{(0)}$$

De esto se puede deducir que:

$$X^n = M^{(n)} X^{(0)} \cdots (III)$$

Para encontrar una expresión explicita para $M^{(n)}$, entonces se puede usar (III) para obtener una expresión explicita de $X^{(n)}$. Para encontrar una expresión explicita para $M^{(n)}$, primero diagonalizamos, M. Es decir, se encuentra una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $M = PDP^{-1}$ entonces $M^{(n)} = PD^{(n)}P^{-1}$

Por lo tanto obtendremos:

$$X^n = M^{(n)}X^{(0)}$$

Donde quedaría:

$$X^n = PD^{(n)}P^{-1}X^{(0)} \quad para \quad n = 1, 2, \cdots$$

La diagonalizacion de M la llevamos a cabo encontrando sus eigenvalores y sus eigenvectores correspondientes. Estos son los siguientes:

Eigenvalores:

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2} \quad \lambda_3 = 0$$

Eigenvectores correspondientes:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así podemos verificar que:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la matriz invertible

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la matriz diagonal:

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde resulta:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por ser una matriz diagonalizable tenemos:

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X^n = PD^{(n)}P^{-1}X^{(0)}$$

Reemplazando los valores tenemos:

$$X^n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$X^n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^n} & 1-\frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Lo cual nos da nuestro modelo matricial final:

$$X^n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - (\frac{1}{2})^n b_0 - (\frac{1}{2})^{n-1} c_0 \\ (\frac{1}{2})^n b_0 + (\frac{1}{2})^{n-1} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + b_0 + c_0 - (\tfrac{1}{2})^n b_0 - (\tfrac{1}{2})^{n-1} c_0 \\ b_n &= (\tfrac{1}{2})^n b_0 + (\tfrac{1}{2})^{n-1} c_0 \\ c_n &= 0 \end{aligned}$$

Estas son las formulas explicitas para el programa de cultivo el cual nos permitirá obtener las fracciones de los 3 genotipos en la $n-$esima generación de plantas en términos de las fracciones de los genotipos iniciales.

Ejemplo 3.1. Con este programa de cultivo se desea saber la distribución de genotipos en la décima generación:

Para n=10 tendríamos:

$$a_{10} = a_0 + b_0 + c_0 - (\tfrac{1}{1024})b_0 - (\tfrac{1}{512}) = a_0 + (\tfrac{1023}{1024})b_0 + (\tfrac{511}{512})c_0$$

$$b_{10} = (\tfrac{1}{1024})b_0 + (\tfrac{1}{512})c_0 \cdots\cdots (IV)$$

$$c_{10} = 0$$

Esto nos permitirá ver la distribución de los genotipos en la décima generación:

	AA - AA	AA - Aa	AA - aa
AA	1	$\frac{1023}{1024}$	$\frac{511}{512}$
Aa	0	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{512}$
aa	0	0	0

Del cuadro anterior se puede concluir que:

1. En la décima generación se mantendrá al 100 % el genotipo AA en la descendencia con padres AA - AA

2. En caso de padres de genotipo AA - Aa el 99 % de descendientes mantendrá el genotipo AA y solo el 1 % tiene el genotipo Aa.

3. De igual manera se puede verificar la distribución de genotipos en la descendencia para padres de genotipo AA - aa.

En un caso más específico en el cual se conoce el valor numérico de la población igual a 10000 plantas de los cuales supongamos que 5000 son de genotipo AA, 3000 son de genotipo Aa y 2000 son de genotipo aa.

$$a_0 = 5000 \quad b_0 = 3000 \quad c_0 = 2000$$

Con estos valores podemos calcular la fracción de distribución de genotipos en la décima generación: Del sistema de ecuaciones (IV) se cumple que:

Donde:

$$
\begin{aligned}
a_{10} &= a_0 + (\tfrac{1023}{1024})b_0 + (\tfrac{511}{512})c_0 = 5000 + (\tfrac{1023}{1024})3000 + (\tfrac{511}{512})2000 \\
b_{10} &= (\tfrac{1}{1024})3000 + (\tfrac{1}{512})2000 \\
c_{10} &= 0 \\
a_{10} &= 5000 + 2997 + 1996 \\
b_{10} &= 0 + 3 + 4 \\
c_{10} &= 0 + 0 + 0
\end{aligned}
$$

n=10	AA - AA	AA - Aa	AA - aa
AA	5000	2997	1996
Aa	0	3	4
aa	0	0	0

3.2 Aplicación de Matrices en Herencia Ligada a X

Suponer que un zootecnista tiene una población grande de animales que consiste en cierta distribución de cinco genotipos posibles: MACHO (A, a) y HEMBRA (AA,Aa,aa).El zootecnista quiere emprender dos programas de reproducción : En el primer programa de reproducción desea ver cuál es la distribución de los genotipos para descendientes machos en la futuras generaciones teniendo en cuenta que solo se quiere aparear un progenitor macho con gen dominante “A” con una hembra que al menos posea un gen domínate.

(AA, Aa) En el segundo programa de reproducción desea ver cual es la distribución de los genotipos para las descendientes hembras teniendo en cuenta que solo se quiere aparear un progenitor hembra que siempre se apareada con un macho de recesivo “a”

Damos solución al primer programa

Genotipos de los progenitores

		(A-AA)	(A-Aa)	(A-aa)	(a-AA)	(a-Aa)	(a-aa)
macho	A	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
	a	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
hembra	AA	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
	Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
	aa	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1

Del cuadro observamos que para el primer programa tomaremos la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad X^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, \cdots$$

a_n= Fracción de la población de machos con genotipo A en la n-ésima generación.

b_n= Fracción de la población de machos con genotipo a en la n-ésima generación.

Utilizaremos el mismo algoritmo probado para la fertilización autosómica en la n-ésima generación

$$X^{(n)} = MX^{(n-1)} \quad para \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad X^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad X^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Como se conoce la distribución inicial $X^{(0)}$ la distribución de los genotipos en la n-ésima generación está dada por

$$X^{(n)} = MX^{(0)} \quad para \quad n = 1, 2, \cdots (1)$$

Primero diagonalizamos M. Es decir, se encuentra una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $M = PDP^{-1}$ entonces $M(n) = PD^{(n)}P^{-1}$ Los valores propios de la matriz M son:

$$\lambda = 1 \quad ; \lambda = \frac{1}{2}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D = PMP^{-1}$ por lo tanto $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ entonces $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$

Remplazando en (1)

$$X^{(n)} = MX^{(0)} = PD^{(n)}P^{-1}X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 - (\frac{1}{2})^n b_0 \\ (\frac{1}{2})^n b_0 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + b_0 - (\tfrac{1}{2})^n b_0 \quad \cdots\cdots (\mathrm{V}) \\ b_n &= (\tfrac{1}{2})^n b_0 \end{aligned}$$

Estas son las formulas explicitas para el programa de reproducción el cual veremos la distribución de los genotipos para descendientes machos en la futuras generaciones teniendo en cuenta que solo se quiere aparear un progenitor macho con gen dominante "A" con una hembra que al menos posee un gen dominante (AA, Aa)

Ejemplo 3.2. *Con este programa de reproducción quisiéramos saber la distribución de genotipos de Machos apareados con una hembra de genotipos AA, Aa en la décima generación:*

Para n = 10 tendríamos

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + b_0 - (\tfrac{1}{2})^{10} b_0 &&= a_0 + \tfrac{1023}{1024} b_0 \\ b_n &= (\tfrac{1}{2})^{10} b_0 &&= \tfrac{1}{1024} b_0 \end{aligned}$$

$n = 10$		(A-AA)	(A-Aa)
MACHOS	A	1	$\frac{1023}{1024}$
	a	0	$\frac{1}{1024}$

Del cuadro anterior se puede concluir que:

1. En la décima generación los machos mantendrán al 100 % el genotipo AA en la descendencia con padres A-AA

2. En caso de padres de genotipo A-Aa el 99 % de descendientes machos mantendrán el genotipo A y solo el 1 % tiene el genotipo a.

En un caso más específico en el cual se conoce el valor numérico de la población igual a 5000 machos de los cuales supongamos que 3000 son de genotipo A, 2000 son de genotipo a.

$$a_0 = 3000 \ \ y \ \ b_0 = 2000$$

Del sistema de ecuaciones (V) se cumple que:

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_0 + b_0 - (\tfrac{1}{2})^{10} b_0 &&= a_0 + \tfrac{1023}{1024} b_0 \\ b_{10} &= (\tfrac{1}{2})^{10} b_0 &&= \tfrac{1}{1024} b_0 \end{aligned}$$

$$a_{10} = 3000 + (\tfrac{1023}{1024} 2000) \qquad a_{10} = 3000 + 1998$$

Por lo tanto

$$b_{10} = 0 + (\tfrac{1}{1024}) 2000 \qquad b_{10} = 0 + 2$$

n = 10		(A-AA)	(A-Aa)
MACHOS	A	3000	1998
	a	0	2

Damos solución al segundo programa

Genotipos de los progenitores

		(A-AA)	(A-Aa)	(A-aa)	(a-AA)	(a-Aa)	(a-aa)
macho	A	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
	a	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
hembra	AA	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
	Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
	aa	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1

Del cuadro observamos que para el segundo programa tomaremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad X^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

a_n= Fracción de la población de hembras con genotipo AA en la n-ésima generación.

b_n= Fracción de la población de hembras con genotipo Aa en la n-ésima generación.

$$X^{(n)} = MX^{(n-1)} \ \ para \ \ n = 1, 2, \cdots$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad X^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \qquad X^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Como se conoce la distribución inicial $X^{(0)}$ la distribución de los genotipos en la n-ésima generación está dada por

$$X^{(n)} = M^{(n)}X^{(0)} \ \ para \ \ n = 1, 2, \cdots (1)$$

Primero diagonalizamos M. Es decir, se encuentra una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $M = PDP^{-1}$ entonces $M(n) = PD^{(n)}P^{-1}$ Los valores propios de la matriz M son:

$$\lambda = 0 \quad ; \lambda = \frac{1}{2} \quad ; \lambda = 1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$D = PMP^{-1}$ por lo tanto $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remplazando en (1)

$X^{(n)} = M^{(n)}X^{(0)} = PD^{(n)}P^{-1}X^{(0)} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2(\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 1 - (\frac{1}{2})^n & 1 - (\frac{1}{2})^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(\frac{1}{2})^n a_0 + (\frac{1}{2})^n b_0 \\ a_0 + b_0 + c_0 - 2(\frac{1}{2})^n a_0 - (\frac{1}{2})^n b_0 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= 2(\tfrac{1}{2})^n a_0 + (\tfrac{1}{2})^n b_0 \\ c_n &= a_0 + b_0 + c_0 - 2(\tfrac{1}{2})^n a_0 - (\tfrac{1}{2})^n b_0 \end{aligned}$$

Estas son las formulas explicitas para el programa de reproducción el cual veremos la distribución de los genotipos para descendientes hembras en la futuras generaciones teniendo en cuenta que solo se quiere aparear un progenitor hembra que siempre se apareada con un macho de recesivo a.

Ejemplo 3.3. Con este programa de reproducción quisiéramos saber la distribución de genotipos de Machos apareados con una hembra de genotipos AA,Aa en la quinta generación:

Para n = 5 tendríamos

$$\begin{aligned} a_5 &= 0 \\ b_n &= 2(\tfrac{1}{2})^5 a_0 + (\tfrac{1}{2})^5 b_0 \\ c_n &= a_0 + b_0 + c_0 - 2(\tfrac{1}{2})^5 a_0 - (\tfrac{1}{2})^5 b_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= 0 \\ b_5 &= 2(\tfrac{1}{2})^5 a_0 + (\tfrac{1}{2})^5 b_0 &&= (\tfrac{1}{2})a_0 + (\tfrac{1}{32})b_0 \\ c_5 &= a_0 + b_0 + c_0 - 2(\tfrac{1}{2})^5 a_0 - (\tfrac{1}{2})^5 b_0 &&= (\tfrac{15}{16})a_0 + (\tfrac{31}{32})b_0 + c_0 \end{aligned}$$

		(a-AA)	(a-Aa)	(a-aa)
HEMBRAS	AA	0	0	0
	Aa	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	0
	aa	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	1

Del cuadro anterior se puede concluir que:

1. En la quinta generación la probabilidad de obtener descendientes con genotipo AA es cero.
2. Para el caso de que dos padres sean de genotipo a-aa el cien por ciento de descendientes hembras saldrían con genotipo aa
3. De igual manera se puede verificar para cada uno de los descendientes y padres

En un caso más específico en el cual se conoce el valor numérico de la población igual a 8000 hembras de los cuales supongamos que 4000 son de genotipo AA, 3000 son de genotipo Aa y 1000 de genotipo aa

$$a_0 = 3000 \quad b_0 = 2000 \quad c_0 = 1000$$

Del sistema de ecuaciones (V) se cumple que:
Se tiene

$$\begin{aligned} a_5 &= 0 \\ b_5 &= 2(\tfrac{1}{2})^5 a_0 + (\tfrac{1}{2})^5 b_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= 0 \\ b_5 &= (\tfrac{1}{16})4000 + (\tfrac{1}{32})3000 = 250 + 94 + 0 \\ c_5 &= (\tfrac{15}{16})4000 + (\tfrac{31}{32})3000 + 1000 = 3750 + 2906 + 100 \end{aligned}$$

n= 5		(a-AA)	(a-Aa)	(a-aa)
HEMBRAS	AA	0	0	0
	Aa	250	94	0
	aa	3750	2906	1000

Conclusiones

1. Se ha podido crear un modelo matemático que nos permita determinar la distribución de los genotipos en la descendencia.

2. Hemos podido relacionar la matemática aplicada con la genética.

Bibliografía

[1] **Valderrama Bonnet, M. J.** Modelos matemáticos en las ciencias Experimentales. Ediciones Pirámide, 2000

[2] **Andrés Ramos**, Modelos Matemáticos. Ediciones Icai, 2010

[3] **Machin David**, Introducción a la Bioma temática, Editorial Acribia. 2012

[4] **Perez Beato, M.** Biomatematica, Ediciones LAEF. 2008

Linkografía:

1. http://www.genagen.es/area-pacientes/informacion-genetica-y-enfermedades-hereditarias/conceptos-genetica/tipos-de-herencia-genetica/herencia-autosomica-recesiva/
2. http://www.genagen.es/area-pacientes/informacion-genetica-y-enfermedades-hereditarias/conceptos-genetica/tipos-de-herencia-genetica/herencia-autosomica-dominante/
3. http://www.genagen.es/area-pacientes/informacion-genetica-y-enfermedades-hereditarias/conceptos-genetica/tipos-de-herencia-genetica/herencia-ligada-al-cromosoma-x-dominante/

4. http://www.genagen.es/area-pacientes/informacion-genetica-y-enfermedades-hereditarias/conceptos-genetica/tipos-de-herencia-genetica/herencia-ligada-al-cromosoma-x-recesiva/