



UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**"Métrica conforme con Factor Escalar y Geodésicas
en las Superficies no Isométricas a R^2 "**



UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
CENTRAL DE BIBLIOTECA PROCESOS TÉCNICOS
Nº DE INGRESO:
COD. DE CLASIFICACIÓN:

TESIS

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

PRESENTADO POR:

Bach. Lozada Neyra Karina Elizabeth
Bach. Zeta Bustamante Pedro Miguel

ASESOR:

Dra. Ortíz Basauri Gloria María

LAMBAYEQUE - PERÚ

2015

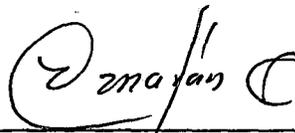
TESIS PROFESIONAL SUSTENTADA POR:

Bach. Lozada Neyra Karina Elizabeth
Bach. Zeta Bustamante Pedro Miguel

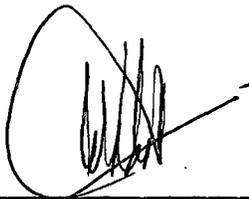
**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO
PROFESIONAL DE:**

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

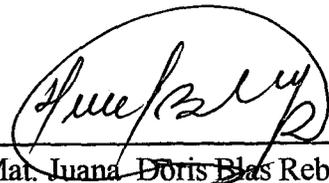
**ACEPTADA POR LA ESCUELA PROFESIONAL DE
MATEMÁTICA**



M.Sc. Leandro Agapito Aznarán Castillo
Presidente



Mg. Wilfredo Agustín Robles
Secretario



Lic. Mat. Juana Doris Blas Rebaza
Vocal



Mg. Gloria María Ortiz Basauri
Asesora

LAMBAYEQUE – PERÚ

2015

AGRADECIMIENTO

A mis padres por su abnegado
e incondicional apoyo a lo largo de mi vida
y por inculcarme a lo largo de esta, el amor al estudio.

Karina.

A mis padres,
quienes en cada momento de mi vida
supieron comprenderme y brindarme
su apoyo y amor incondicional.

Pedro.

A nuestra asesora, Mg. Gloria María Ortiz Basauri
quien siempre se mostró dispuesta
a brindarnos la orientación
y ayuda que necesitamos.

DEDICATORIA

A Dios nuestro Señor, quien nos guía y protege en todo momento de nuestra vida, porque ha estado con nosotros en cada paso que damos, cuidándonos y dándonos sabiduría y fortaleza para continuar adelante.

A nuestros padres, por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años. Gracias a ellos, hemos logrado llegar hasta aquí y convertirnos en lo que somos: profesionales útiles a la sociedad.



RESUMEN

En el presente trabajo se considera una extensión de métrica y consecuentemente se determinan las geodésicas de superficies no isométricas a \mathbb{R}^2 usando una métrica conforme con factor escalar. El plano Poincaré, la esfera estereográfica y el toro flat son estas superficies. Para lograr este objetivo, se considera la métrica a partir del producto interno con un factor escalar determinado por los vectores tangentes a la superficie y se usan las Ecuaciones de Clairaut para encontrar las geodésicas.

ABSTRACT

In this paper it is considered an extension of metric and consequently the geodesics are defined to surfaces no isometrics in \mathbb{R}^2 by using a conformal metric with a scaling factor.

The Poincare plane, the stereographic sphere and the Toro flat are these surfaces. This can be achieved if we consider the metric from the inner product with a scaling factor that is determined by the tangent vectors to the surface, and the Clairaut equations are used to find the geodesics.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se determinarán las geodésicas en superficies no isométricas a \mathbb{R}^2 , específicamente en el plano de Poincaré, en la esfera estereográfica y en el toro flat, tomando en cuenta la métrica conforme a la métrica euclidea con factor escalar.

El trabajo ha sido dividido en dos capítulos. En el capítulo I se introducen las nociones básicas que permitirán comprender sin dificultad el trabajo. Nociones como superficie parametrizada, en la cual se detalla al plano de Poincaré, la esfera estereográfica y el toro flat.

En el capítulo II se utiliza el producto punto modificado para el estudio de la curvatura Gaussiana de la esfera Estereográfica, del Plano de Poincaré y del Toro flat. Calculando en cada caso sus parámetros E, F y G ; los cuales sirven para analizar la curvatura Gaussiana, la que puede tomar valores positivo, negativo o nulo. Así mismo, se estudia a las geodésicas de las tres superficies anteriores no isométricas en \mathbb{R}^3 , las cuales están representadas por la mínima distancia entre dos puntos. Entonces, en cualquier situación donde un plano es ν -Clairaut, las líneas verticales son geodésicas también.

Se espera que la presente tesis sirva como punto de partida para estudiantes que desean realizar investigaciones dentro del análisis de las superficies no isométricas en \mathbb{R}^3 .

Índice General

RESUMEN.....	I
ABSTRACT.....	II
INTRODUCCION.....	II
Capítulo 1.....	1
Preliminares.....	1
1.1. Superficie Parametrizada Regular	1
1.2. Plano tangente, vector normal.....	5
1.3. Primera forma cuadrática.....	7
1.4. Curvatura Gaussiana:	8
1.5. Isometría:	9
1.6. Plano de Poincaré:.....	9
1.7. Esfera estereográfica:.....	10
1.8. Toro flat:.....	11
Capítulo 2.....	12
Superficies no isométricas a \mathbb{R}^2	12
2.1. Introducción.....	12
2.2. Definición.....	13
2.3. Observación	13
2.4. Definición.....	13
2.5. Curvatura Gaussiana del Plano de Poincaré P	14
2.6. Curvatura Gaussiana de la esfera estereográfica (S_N^2)	14
2.7. Curvatura Gaussiana del Toro Flat ($Tflat$).....	16
2.8. Las ecuaciones geodésicas	18
2.9. Geodésicas	22
2.10. Geodésicas del plano de Poincaré P	25
2.11. Geodésicas del toro flat	26
2.12. Geodésicas de la esfera estereográfica	29
CONCLUSIONES	33
BIBLIOGRAFÍA	34

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Superficie Parametrizada Regular

1.1.1. Introducción

Considere las propiedades geométricas locales de superficies en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 . Asuma que se tiene un sistema de coordenadas cartesianas x, y, z en \mathbb{R}^3 y considere una función $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, de dos variables u, v que varían en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $(u, v) \in U$, $X(u, v)$ determina un punto de \mathbb{R}^3 . Se denota por S un subconjunto de \mathbb{R}^3 formado por los puntos $X(u, v)$. A fin de poder utilizar las técnicas de cálculo diferencial al estudio de superficies, se exige la diferenciabilidad de la función X . Asimismo, se restringe el estudio de superficies que en cada punto admiten un plano tangente.

1.1.2. Definición:

Una superficie parametrizada regular o simplemente una superficie es una aplicación $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^2 , tal que

- a) X es diferenciable de clase C^∞ ;
- b) Para todo $q = (u, v) \in U$ la diferencial de X en q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, es inyectiva.

Las variables u, v son los parámetros de la superficie. El subconjunto S de \mathbb{R}^3 obtenido por la imagen de la aplicación X , es denominado trazo de X .

1.1.3. Observación:

a) La aplicación $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ es diferenciable de clase C^∞ cuando las funciones x, y, z tienen derivadas parciales de todas las órdenes continuas.

b) La condición b) de la definición anterior garantiza la existencia del plano tangente en cada punto de la superficie. Vea algunas formas equivalentes de expresar esta condición. Sean e_1, e_2 la base canónica de R^2 y e_1, e_2, e_3 la base canónica de R^3 . Para cada $q = (u_0, v_0)$ se sabe que la matriz asociada a dX_q en las bases canónicas es la matriz jacobiana.

$$J(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix}$$

Se denotará a los vectores siguientes:

$$dX_q(e_1, \cdot) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

$$dX(e_2, \cdot) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

por $X_u(u_0, v_0)$ y $X_v(u_0, v_0)$ respectivamente, se llega a probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

b.1) dX es inyectiva;

b.2) La matriz $J(u_0, v_0)$ tiene rango 2;

b.3) Los vectores por $X_u(u_0, v_0)$ y $X_v(u_0, v_0)$ son linealmente independientes;

b.4) $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$.

1.1.4. Definición:

Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, es una superficie parametrizada, entonces se fija $(u_0, v_0) \in U$, las curvas

$$u \rightarrow X(u, v_0)$$

$$v \rightarrow X(u_0, v)$$

son llamadas curvas parametrizadas de X en (u_0, v_0) . Los vectores $X_u(u_0, v_0)$ y $X_v(u_0, v_0)$ son los vectores tangentes a las curvas coordenadas.

1.1.5. Superficie (regular)

Un subconjunto M de R^3 se llama superficie (regular), si para cada punto $p \in M$, existe una parametrización (local) $\varphi: U \rightarrow u$ con $p \in u$.

Se tiene que un abierto A de una superficie M es también una superficie.

Se ilustra algunas de las ideas de algunas superficies. Éstas en la geometría elemental de tres dimensiones son la esfera, el cilindro circular, el cono circular, el elipsoide, el hiperboloide de una o dos hojas y los paraboloides. Puesto que todas las esferas son homeomorfas, hablaremos de la esfera en general; pues comparamos en realidad una clase de superficies todas homeomorfas con una esfera dada y usamos como representante un miembro particular de esta clase.

Se adopta un convenio similar para otras superficies.

Otras superficies son el toro, el doble toro, el toro general n -múltiple, del cual son casos particulares estas dos superficies. El toro está representado en la figura 2.

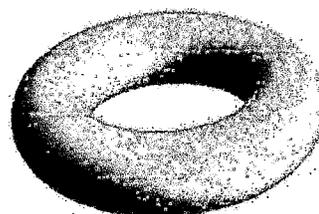


Fig. 2

El cilindro y el toro se pueden construir uniendo los dos lados opuestos de un rectángulo, proceso conocido por identificación. Sea ABCD un rectángulo y únanse AB con CD, de tal manera que A coincida con D y B con C, como se ve en la figura 3.

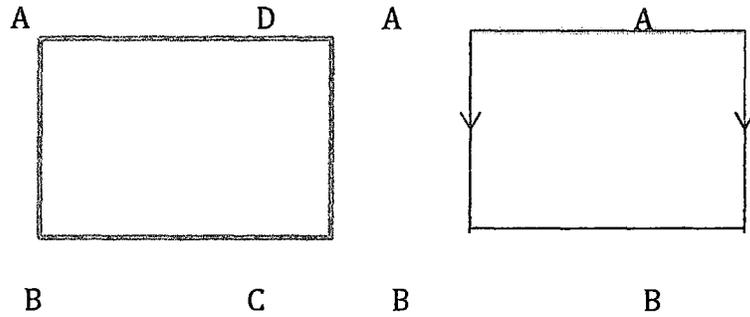


Fig. 3

La superficie resultante será un cilindro limitado.

Está representado por un rectángulo con dos lados opuestos confundidos. Las flechas en estos lados indican que han sido unidos directamente, como se muestra en la figura 4.



Fig. 4

La construcción partiendo del rectángulo para producir el toro se indica en la figura 5.

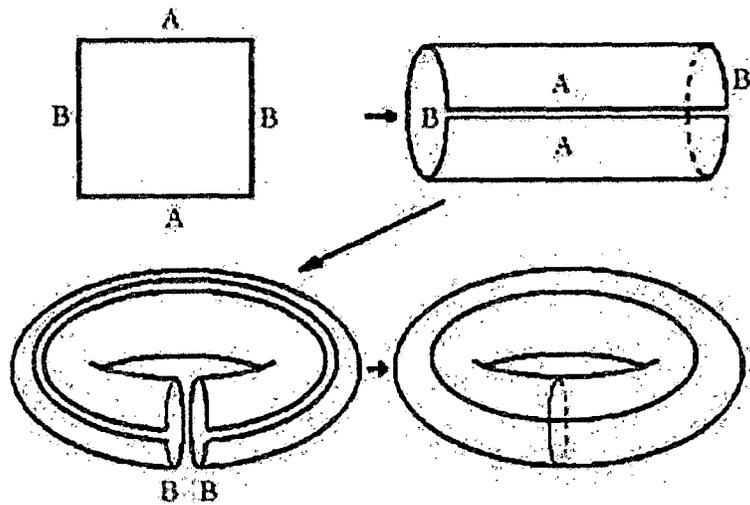


Fig. 5

Partiendo del mismo rectángulo podemos obtener otras superficies usando un tipo diferente de identificación.

Se recomienda construir un modelo de la banda de Möbius torciendo un extremo de una tira rectangular de papel en 180° y pegándolo al otro extremo. En la figura 6 se ve la superficie resultante.

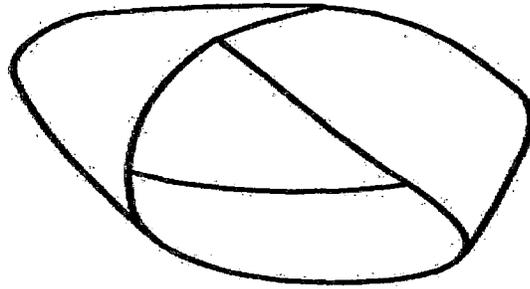


Fig. 6

Topológicamente la banda de Möbius es una superficie diferente del cilindro lo que significa que las dos superficies no son homeomorfas. Esto se puede ver si se construyen modelos de papel de las dos superficies por el procedimiento que acababan de describir y cortando después cada uno a lo largo de la línea. Un corte completo divide el cilindro en dos partes, pero en el caso de la banda de Möbius queda un solo trozo de papel. Este trozo tiene dos semivuelatas en él y es en efecto homeomorfo con el cilindro; pero esta propiedad no se puede demostrar por un procedimiento físico.

1.2. Plano tangente, vector normal

Sea $X(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ una superficie parametrizada regular, se considera u y v como funciones diferenciables de un parámetro t , $t \in I \subset \mathbb{R}$, se obtiene una curva diferenciable $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ cuyo trazo está contenido en una superficie descrita por X . Se dice que α es una curva de la superficie.

1.2.1. Vector tangente:

Si $X(u, v)$ es una superficie parametrizada regular, decimos que un vector w de \mathbb{R}^3 es un vector tangente a X en $q = (u_0, v_0)$ si $w = \alpha'(t_0)$ donde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ es una curva de la superficie, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

Los vectores $X_u(u_0, v_0)$ y $X_v(u_0, v_0)$ son vectores tangentes a X en (u_0, v_0) , ya que son tangentes a las curvas coordenadas de X .

1.2.2. Plano tangente:

El plano tangente a X en (u_0, v_0) es el conjunto de todos los vectores tangentes a X en (u_0, v_0) , que se denota con $T_q X$, donde $q = (u_0, v_0)$

1.2.3. Observación:

Se nota que los conceptos de vector tangente y plano tangente son definidos en un punto (u_0, v_0) del dominio de X y no en el punto $p = X(u_0, v_0)$ ya que la superficie X puede tener una auto intersección.

En la siguiente proposición se verá que el plano tangente $T_q X$ es el plano de R^3 generado por $X_u(q)$ y $X_v(q)$.

1.2.4. Proposición:

Sea $X(u, v)$ una superficie parametrizada regular y $q = (u_0, v_0)$ entonces $T_q X$ es el conjunto de vectores obtenidos de la combinación lineal de $X_u(u_0, v_0)$ y $X_v(u_0, v_0)$.

Demostración

Sea $w \in T_q X$, entonces $w = \alpha'(t_0)$, donde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ y $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Por tanto:

$$\begin{aligned} w = \alpha'(t_0) &= \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))) \Big|_{t=t_0} \\ &= X_u(u_0, v_0)u'(t_0) + X_v(u_0, v_0)v'(t_0). \end{aligned}$$

esto es, w es una combinación lineal de los vectores X_u y X_v en (u_0, v_0) .

Recíprocamente, suponga que

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

entonces existe una curva $\alpha(t)$ de la superficie, tal que

$$(\alpha'(0), \alpha'(0)) = (u_0, v_0) \text{ y } \alpha'(0) = w$$

En efecto, basta considerar $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$,

donde $u(t) = u_0 + at$ y $v(t) = v_0 + bt$.

1.3. Primera forma cuadrática

Esta primera forma cuadrática está relacionada con el comportamiento de curvas en una superficie, ángulo entre vectores tangentes y el área de regiones de superficies.

1.3.1. Definición:

Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular, $\forall q \in U$ la aplicación

$$I_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$$

es denominada primera forma cuadrática de X en q

Considerar una superficie dada por $X(u, v)$ y un punto $q = (u_0, v_0)$.

Entonces un vector $w \in T_q X$ es de la forma

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Por tanto

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle (u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle (u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle (u_0, v_0)$$

Usando la notación

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle (u_0, v_0)$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle (u_0, v_0)$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle (u_0, v_0)$$

se tiene

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2abF(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0)$$

Variando (u, v) se tiene funciones $E(u, v)$, $F(u, v)$ y $G(u, v)$ diferenciables, que son denominados coeficientes de la primera forma cuadrática. Las funciones E, F y G satisfacen las siguientes propiedades:

- a) $E(u, v) > 0$ y $G(u, v) > 0$ para todo (u, v) , pues los vectores X_u y X_v no son nulos;
- b) $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$. En efecto como

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2$$

se tiene que $EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u + X_v|^2 > 0$

1.4. Curvatura Gaussiana:

La curvatura gaussiana de una superficie es un número real $K(P_0)$ que mide la curvatura intrínseca en cada punto regular P_0 de una superficie. Esta curvatura puede calcularse a partir de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de la superficie:

$$K(P_0) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$$

En general, varía de un punto a otro de la superficie y está relacionada con las curvaturas principales de cada punto, mediante la relación $K = k_1 k_2$.

Un caso interesante de superficie es la esfera, que tiene la misma curvatura en todos sus puntos. Calculando la curvatura de Gauss de una esfera (2-esfera) de radio r , a partir de la fórmula anterior se llega fácilmente a determinar que es igual a

$$K(s^2) = 1/r^2 > 0, \text{ para todo punto.}$$

Si bien observamos que hay superficies que tienen curvatura constante, la curvatura gaussiana debe verse como una relación $K: S \rightarrow K(S)$ donde $K \in C^1(S, \mathbb{R})$ (una función diferenciable sobre S) que asigna a cada superficie su función de curvatura gaussiana.

1.5. Isometría:

El teorema siguiente permite determinar cuándo dos superficies no son localmente isométricas (y por tanto cuando no son globalmente isométricas).

Según el teorema Egregium de Gauss, si dos superficies tienen curvaturas gaussianas diferentes ellas no pueden ser isométricas. Por ejemplo, basta citar a la esfera S^2 con el plano $z = 0$. Ellas no pueden ser isométricas, pues de serlo existiría una isometría entre estas dos superficies y por lo tanto sus curvaturas gaussianas serían iguales, pero se sabe que esto es falso pues la esfera (unitaria) tiene $K = 1$ y el plano $K = 0$.

1.5.1 Teorema Egregium de Gauss: La curvatura Gaussiana K de una superficie es invariante bajo isometrías locales.

Demostración:

Sea $f: S_1 \rightarrow S_2$ una isometría local y $p \in S_1$ un punto arbitrario. Sean $K(p)$ la curvatura Gaussiana de S_1 en p y $\bar{K}(f(p))$ la curvatura Gaussiana de S_2 en $f(p)$. Se demostrará que $K(p) = \bar{K}(f(p))$.

Como f es isometría local existe una vecindad $V \subset S_1$ de p y $W \subset S_2$ de $f(p)$ tal que $f: V \rightarrow W$ es una isometría. Sea $x: U \rightarrow S_1$ una parametrización tal que $x(U) \subset V$. Puesto que $f: V \rightarrow W$ es isometría local entonces la aplicación $y = f \circ x: U \rightarrow f(x(U))$ es una parametrización y además $g_{ij}^x(a) = g_{ij}^y(a)$.

Esto quiere decir

$$E(u, v) = x_u \cdot x_u = y_u \cdot y_u = \bar{E}(u, v)$$

$$F(u, v) = x_u \cdot x_v = y_u \cdot y_v = \bar{F}(u, v)$$

$$G(u, v) = x_v \cdot x_v = y_v \cdot y_v = \bar{G}(u, v)$$

Esto implica que $K(p) = \bar{K}(f(p))$.

1.6. Plano de Poincaré:

Se define P en el semiplano superior $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ en el cual la superficie $x(u, v) = (u, v)$ y con la métrica con factor escalar v^2

$$w_1 \circ w_2 = \frac{w_1 \cdot w_2}{v^2},$$

donde $w_1, w_2 \in T_p(P)$ y $p = (u, v)$

1.7. Esfera estereográfica:

Sea S_N^2 denota la esfera unitaria menos el polo Norte $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ y definamos un mapa $St : S_N^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (donde \mathbb{R}^2 es el plano xy) tomando un punto en \mathbb{R}^2 el cual es la intersección de \mathbb{R}^2 y la línea en \mathbb{R}^3 determinado por un punto en la esfera y el polo Norte N.

Existe otra manera de demostrar que S^n es una variedad diferenciable y esta consiste en considerar como atlas a aquel formado por dos sistemas de coordenadas: uno de ellos dado por la proyección estereográfica de la esfera menos el polo norte y el otro dado por la proyección estereográfica de la esfera menos el polo sur.

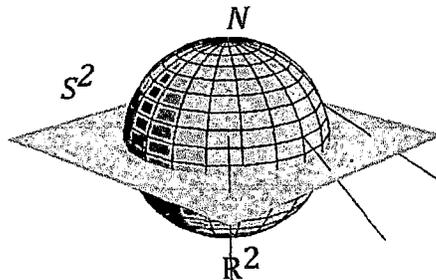


Figura 1.14: Proyección estereográfica

A detalle considere la esfera unitaria $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ con la topología inducida por la del \mathbb{R}^{n+1} .

Si $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ y $s = (0, \dots, 0, -1) \in S^n$ son los polos norte y sur, respectivamente, de S^n , defina las aplicaciones

$$\varphi: S^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi: S^n - \{s\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

por medio de las reglas

$$\varphi(x) = \frac{x'}{1 - x_{n+1}}, \quad \psi(x) = \frac{x'}{1 + x_{n+1}}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ y $x' = (x_1, \dots, x_n)$.

Sabemos que estas aplicaciones son homeomorfismos. Esto sugiere considerar la colección

$$A = \{(S^n - \{N\}, \varphi), (S^n - \{S\}, \psi)\}$$

Sea $U = S^n - \{N\}$ y $V = S^n - \{S\}$. Es evidente que $S^n = U \cup V$. Mientras tanto, en cuanto al cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ se tiene que $\varphi(U \cap V) = \mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\psi(U \cap V) = \mathbb{R}^n - \{0\}$, por lo tanto $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Además, para todo $y \in \varphi(U \cap V) = \mathbb{R}^n - \{0\}$ se tiene que

$$\psi \circ \varphi^{-1}(y) = \psi(\varphi^{-1}(y)) = \psi\left(\frac{(2y, |y|^2 - 1)}{|y|^2 + 1}\right) = \frac{\frac{2y}{|y|^2 + 1}}{1 + \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}}$$

De donde resulta

$$\psi \circ \varphi^{-1}(y) = \frac{y}{|y|^2}$$

Y análogamente se tiene

$$\varphi \circ \psi^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2}$$

para todo $z \in \psi(U \cap V) = \mathbb{R}^n - \{0\}$. De donde se concluye que el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo de clase C^∞ .

En conclusión, la colección $A = \{(S^n - \{N\}, \varphi), (S^n - \{S\}, \psi)\}$ es un atlas n -dimensional y de clase C^∞ para la esfera S^n y recibe el nombre de Atlas Estereográfico.

1.8. Toro flat:

Se tiene T_{flat} definido por el plano con rango \mathbb{R}^4

$$x(u, v) = (\cos u, \sen u, \cos v, \sen v), \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

y con la métrica

$$w_1 \circ w_2 = \frac{w_1 \cdot w_2}{v}, \text{ donde } w_1, w_2 \in T_p(P) \text{ y } p = (u, v)$$

Capítulo 2

Superficies no isométricas a \mathbb{R}^2

2.1. Introducción

Lo usual es estudiar superficies en el espacio tridimensional con estructuras de producto interno asociadas a cualquier espacio Euclidiano por ejemplo el producto punto. Sin embargo, en este trabajo se analizara superficies con estructura de producto interno diferente al usual. Se sabe que cualquier matriz A simétrica no singular $n \times n$ define un producto interno en \mathbb{R}^n tomando la multiplicación de matrices, esto es:

$$\langle x, y \rangle = x' Ay$$

para $x, y \in \mathbb{R}^n$, donde x' denota la transpuesta de la matriz columna. El producto punto, es el producto interno donde A es la matriz identidad. En particular considere $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ dos vectores en \mathbb{R}^2 , así se define el producto punto como

$$x \cdot y = (x_1 x_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Ahora, considere la matriz $\begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}$ para $a > 0$, se define un nuevo producto interno

$$x \circ y = (x_1 x_2) \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{a}$$

$$= \frac{x \cdot y}{a}$$

donde " \cdot " es el producto punto usual y " \circ " es el producto punto modificado.

2.2. Definición

Considere a como una función en M , esto es: $a = f(p)^2$ para $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ y $p \in M$. Sean $v, w \in T_p(M)$ dos vectores tangentes, se tiene el producto interno con factor escalar f

$$v \circ w = \frac{v \cdot w}{f(p)^2}$$

Se define la métrica conforme con factor escalar f para el anterior producto interno

2.3. Observación

Ahora, si estas superficies no usan la métrica Euclidiana, ¿entonces dónde están? Mientras deberían estar situadas en \mathbb{R}^3 como conjuntos, sus diferentes métricas muestran que no cumplen con la geometría de \mathbb{R}^3 . Entonces, como superficies con una métrica, no se encuentran dentro de \mathbb{R}^3 . Pero si no se puede usar la estructura de \mathbb{R}^3 , por ejemplo, la normal unitaria - ¿cómo se puede entender la geometría de esta superficie? Como es común en matemáticas, se puede ir más allá de una situación usual, usando teoremas previos como definiciones. Dado que no se puede usar la normal unitaria U para definir la curvatura Gaussiana K , en su lugar se define K de la siguiente manera.

2.4. Definición

Para una superficie con métrica ortogonal (i.e $F = 0$), la curvatura Gaussiana K está definida por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right)$$

En efecto, debido a que esta fórmula fue un teorema de las superficies en \mathbb{R}^3 , esta definición concuerda con nuestra definición original en el caso que M tiene una métrica inducida para la métrica Euclidiana de \mathbb{R}^3 .

2.5. Curvatura Gaussiana del Plano de Poincaré P .

Se define el plano de Poincaré P en el semiplano superior $P = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0 \}$ en el cual la superficie $x(u, v) = (u, v)$ y con la métrica conforme, con factor escalar $\frac{1}{v^2}$.

$$w_1 \circ w_2 = \frac{w_1 \cdot w_2}{v^2}, \text{ donde } w_1, w_2 \in T_p(P) \text{ y } p = (u, v)$$

Esta definición de métrica significa que el producto punto usual es proporcional al tamaño de p . Calculando E, F y G (en p). Se obtiene

$$x_u = (1, 0) \quad x_v = (0, 1)$$

$$E = x_u \cdot x_u = \frac{1}{v^2}, \quad F = x_u \cdot x_v = 0, \quad G = x_v \cdot x_v = \frac{1}{v^2}$$

Se observa que $G_u = 0$ y $E_u = \frac{-2}{v^3}$. Luego

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{1/v^4}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{-2/v^3}{\sqrt{1/v^4}} \right) \right)$$

$$K = -\frac{v^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{-2}{v} \right) \right)$$

$$K = -\frac{v^2 \cdot 2}{2 v^2}$$

$$K = -1$$

el plano de Poincaré P tiene curvatura constante igual a -1 en cada punto; es decir tiene una "curvatura negativa" análoga a la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 .

2.6. Curvatura Gaussiana de la esfera estereográfica (S_N^2)

Sea S_N^2 denota la esfera unitaria menos el polo Norte $S^2 - \{ (0, 0, 1) \}$ y definamos la proyección estereográfica

$St : S_N^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (donde \mathbb{R}^2 es el plano xy) tomando un punto en \mathbb{R}^2 el cual es la intersección de \mathbb{R}^2 y la línea en \mathbb{R}^3 determinado por un punto en la esfera y el polo Norte N . Formalizando, dado un punto $p = (\cos u \cos v, \text{senu} \cos v, \text{senv})$ en S_N^2 la línea de intersección p y N está dada por:

$$\alpha(t) = (0,0,1) + t(\cos u \cos v, \text{senu} \cos v, \text{senv} - 1)$$

La línea α interseca \mathbb{R}^2 cuando la tercera coordenada es cero. Esto ocurre cuando $1 + t(\text{senv} - 1) = 0$ o $t = 1/(1 - \text{senv})$, entonces

$$St * (\cos u \cos v, \text{senu} \cos v, \text{senv}) = \left(\frac{\cos u \cos v}{1 - \text{senv}}, \frac{\text{senu} \cos v}{1 - \text{senv}}, 0 \right)$$

Se puede definir una nueva métrica en S_N^2 , como sigue:

$$w_1 \circ w_2 = St * (w_1) \cdot St * (w_2)$$

donde “ \cdot ” denota la métrica inducida de la esfera en \mathbb{R}^3 .

Por ejemplo, estableciendo un valor particular para u y diferenciando, se tiene:

$$St * (x_u) = \frac{d}{du} \left(\frac{\cos u \cos v}{1 - \text{senv}}, \frac{\text{senu} \cos v}{1 - \text{senv}}, 0 \right)$$

$$\left(\frac{-\text{senu} \cos v}{1 - \text{senv}}, \frac{\cos u \cos v}{1 - \text{senv}}, 0 \right)$$

Análogamente diferenciando respecto a v se tiene:

$$St * (x_v) = \left(\frac{\cos u}{1 - \text{senv}}, \frac{\text{senu}}{1 - \text{senv}}, 0 \right)$$

Calculando los coeficientes E, F y G

- $E = St * (x_u) \cdot St * (x_u)$

$$E = \left(\frac{-\text{senu} \cos v}{1 - \text{senv}}, \frac{\cos u \cos v}{1 - \text{senv}}, 0 \right) \cdot \left(\frac{-\text{senu} \cos v}{1 - \text{senv}}, \frac{\cos u \cos v}{1 - \text{senv}}, 0 \right)$$

$$E = \frac{\text{COS}^2 v}{(1 - \text{senv})^2}$$

Derivando E con respecto v :

$$E_v = \frac{-2\cos v \cdot \operatorname{senv}(1 - \operatorname{senv})^2 + 2\cos^2 v \cdot \operatorname{cosv}(1 - \operatorname{senv})}{(1 - \operatorname{senv})^4}$$

$$E_v = \frac{-2\cos v \cdot \operatorname{senv}(1 - \operatorname{senv}) + 2\cos^3 v}{(1 - \operatorname{senv})^3}$$

$$E_v = \frac{2\cos v(-\operatorname{senv} + \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v)}{(1 - \operatorname{senv})^3}$$

$$E_v = \frac{2\cos v(1 - \operatorname{senv})}{(1 - \operatorname{senv})^3}$$

$$E_v = \frac{2\cos v}{(1 - \operatorname{senv})^2}$$

- $F = x_u \cdot x_v$

$$F = \left(\frac{-\operatorname{senu}\cos v}{1 - \operatorname{senv}}, \frac{\cos u \cos v}{1 - \operatorname{senv}}, 0 \right) \left(\frac{\cos u}{1 - \operatorname{senv}}, \frac{\operatorname{senu}}{1 - \operatorname{senv}}, 0 \right)$$

$$F = 0$$

- $G = x_v \cdot x_v$

$$G = \left(\frac{\cos u}{1 - \operatorname{senv}}, \frac{\operatorname{senu}}{1 - \operatorname{senv}}, 0 \right)$$

$$G = \frac{1}{(1 - \operatorname{senv})^2}$$

Derivando G con respecto a u :

$$G_u = 0$$

Calcular K

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right)$$

$$K = -\frac{(1 - \operatorname{senv})^2}{2\cos v} \left(\frac{\partial}{\partial v} (2) \right)$$

$$K = 0$$

2.7. Curvatura Gaussiana del Toro Flat (T_{flat})

Se tiene T_{flat} definido por el plano con rango \mathbb{R}^4

$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$, $0 \leq u < 2\pi$, $0 \leq v < 2\pi$
 y con una métrica inducida de \mathbb{R}^4 .

Calcular las componentes x_u y x_v

- $x_u = (-\sin u, \cos u, 0, 0)$
- $x_v = (0, 0, -\sin v, \cos v)$

Calcular E, F y G

- $E = x_u \cdot x_u$
 $E = (-\sin u, \cos u, 0, 0)(-\sin u, \cos u, 0, 0)$
 $E = \sin^2 u + \cos^2 u + 0 + 0$

$$E = 1$$

Derivando E con respecto v :

$$E_v = 0$$

- $F = x_u \cdot x_v$
 $F = (-\sin u, \cos u, 0, 0)(0, 0, -\sin v, \cos v)$
 $F = 0 + 0 + 0 + 0$
 $F = 0$

- $G = x_v \cdot x_v$
 $G = (0, 0, -\sin v, \cos v)(0, 0, -\sin v, \cos v)$
 $G = \sin^2 v + \cos^2 v$
 $G = 1$

Derivando G con respecto u :

$$G_u = 0$$

Calcular la curvatura gaussiana

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right)$$

Reemplazando los valores de E, F y G; se tiene

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{1}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{0}{1} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{0}{1} \right) \right)$$

$$K = 0$$



Se obtiene $E=1$, $F=0$ y $G=1$. Dado que $K=0$

2.8. Las ecuaciones geodésicas

2.9.1. Definición de geodésica

Una curva α en M es una geodésica si $\alpha''_{tan} = 0$.

Para calcular las geodésicas considere superficies locales ortogonales $x(u, v)$. (i. e. $F = x_u \cdot x_v = 0$). Sea α una geodésica en la superficie local x . Entonces $\alpha = x(u(t), v(t))$ y $\alpha' = x_u u' + x_v v'$ con

$$\alpha'' = x_{uu} u'^2 + x_{uv} v' u' + x_u u'' + x_{vv} v'^2 + x_v v''$$

Usando fórmulas para x_{uu} , x_{uv} y x_{vv} se obtiene

$$\alpha'' = x_u \left[u'' + \frac{E_u}{2E} u'^2 + \frac{E_v}{E} u' v' - \frac{G_u}{2E} v'^2 \right] + x_v \left[v'' + \frac{E_v}{2G} u'^2 + \frac{G_u}{G} u' v' - \frac{G_v}{2G} v'^2 \right] + U [lu'^2 + 2mu'v' + nv'^2]$$

donde los primeros términos dan la parte tangencial de α'' . Para que α sea una geodésica es necesario y suficiente que las siguientes ecuaciones geodésicas sean satisfechas.

$$u'' + \frac{E_u}{2E} u'^2 + \frac{E_v}{E} u' v' - \frac{G_u}{2E} v'^2 = 0$$

$$v'' + \frac{E_v}{2G} u'^2 + \frac{G_u}{G} u' v' - \frac{G_v}{2G} v'^2 = 0$$

2.9.2. Teorema

Sea $p = x(u_0, v_0)$ un punto en una superficie $M : x(u, v)$ y $v \in T_p M$. Entonces existe una única geodésica $\alpha : (-r, r) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Demostración:

Se obtiene una geodésica $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ con la propiedad que

$\alpha'(0) = u'(0)x_u(u_0, v_0) + v'(0)x_v(u_0, v_0) = v$, como v es fijo, esto da valores prescritos para $u'(0)$ y $v'(0)$. Junto con los valores iniciales $u(0) = u_0$ y $v(0) = v_0$ y por el teorema de la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales, esto es suficiente información para determinar una solución única (en algunos intervalos sobre 0) para las ecuaciones geodésicas.

2.9.3. Geodésicas de la Esfera unitaria S^2

Considere la parametrización

$$x(u, v) = (\cos u \cdot \cos v, \sin u \cdot \cos v, \sin v)$$

De donde:

- $x_u = (-\sin u \cdot \cos v, \cos u \cdot \cos v, 0)$
- $x_v = (-\cos u \cdot \sin v, -\sin u \cdot \sin v, \cos v)$

Calcular E, F y G

- $E = x_u \cdot x_u$

$$E = (-\sin u \cdot \cos v, \cos u \cdot \cos v, 0) \cdot (-\sin u \cdot \cos v, \cos u \cdot \cos v, 0)$$

$$E = \sin^2 u \cdot \cos^2 v + \cos^2 u \cdot \cos^2 v + 0$$

$$E = \cos^2 v$$

- $F = x_u \cdot x_v$

$$F = (-\sin u \cdot \cos v, \cos u \cdot \cos v, 0) \cdot (-\cos u \cdot \sin v, -\sin u \cdot \sin v, \cos v)$$

$$F = 0$$

- $G = x_v \cdot x_v$

$$G$$

$$= (-\cos u \cdot \sin v, -\sin u \cdot \sin v, \cos v) \cdot (-\cos u \cdot \sin v, -\sin u \cdot \sin v, \cos v)$$

$$G = \cos^2 u \cdot \sin^2 v + \sin^2 u \cdot \sin^2 v + \cos^2 v$$

$$G = 1$$

Luego las ecuaciones geodésicas son:

$$u'' - 2 \operatorname{tg} v u' v' = 0 \quad , \quad v'' + \operatorname{sen} v \cos v u'^2 = 0$$

Éste es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

Sin perder generalidad supóngase que $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ es una geodésica de velocidad unitaria. Además de tener las ecuaciones geodésicas, se tiene $\alpha' = u' x_u + v' x_v$, llevando la relación de la velocidad unitaria $1 = E u'^2 + G v'^2$.

En la esfera unitaria esto es simplemente $1 = \cos^2 v u'^2 + v'^2$.

Para resolver la primera ecuación geodésica procede como sigue:

$$\int \frac{u''}{u'} = \int 2 \tan v v'$$

$$\ln u' = -2 \ln \cos v + c$$

$$u' = \frac{C}{\cos^2 v}$$

Se reemplaza u' en la relación de la esfera unitaria por $\frac{C}{\cos^2 v}$ para obtener:

$$1 = \frac{C^2}{\cos^4 v} \cos^2 v + v'^2$$

$$v'^2 = 1 - \frac{C^2}{\cos^2 v}$$

$$v' = \frac{\sqrt{\cos^2 v - C^2}}{\cos^2 v}$$

Dividiendo u' por v^2 se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d_u}{d_v} = \frac{C}{\cos v \sqrt{\cos^2 v - c^2}}$$

Para poder integrar (hacemos las sustituciones $w = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{tg} v$ y $w = \operatorname{sen} \theta$ en los pasos 4 y 5 abajo respectivamente)

$$u = \int \frac{C}{\cos v \sqrt{\cos^2 v - c^2}} dv$$

$$u = \int \frac{C \sec^2 v}{\sqrt{1 - c^2 \sec^2 v}}$$

$$u = \int \frac{C \sec^2 v}{\sqrt{1 - c^2 - c^2 \operatorname{tg}^2 v}}$$

$$u = \int \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}}$$

$$u = \int d\theta$$

$$u = \operatorname{arcsen}\left(\frac{c \operatorname{tg} v}{\sqrt{1 - c^2}}\right) + d$$

Por lo tanto se tiene: $\operatorname{sen}(u - d) = \lambda \operatorname{tg} v$

donde $\lambda = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$. Se expande $\operatorname{sen}(u - d) = \operatorname{sen} u \cos d - \operatorname{sen} d \cos u$

encontrando un común denominador $\cos v$ para obtener:

$$\frac{\operatorname{sen} u \cos v}{\cos v} \cos d - \operatorname{sen} d \frac{\cos u \cos v}{\cos v} - \lambda \frac{\operatorname{sen} v}{\cos v} = 0$$

Si se hace las sustituciones $x = \cos u \cos v$, $y = \operatorname{sen} u \cos v$, $z = \operatorname{sen} v$ y solo se considera el numerador, se obtiene:

$$y \cos d - x \sin d - \lambda z = 0$$

Por lo tanto, las ecuaciones geodésicas implican que α está en un plano $ax + by + cz = 0$ a través del origen.

Esto significa, que α está contenida en la intersección de un plano a través del origen con la esfera y ésta es una circunferencia mayor.

2.9. Geodésicas

Para entender la naturaleza de las superficies no isométricas a \mathbb{R}^2 en términos de sus geodésicas se debe tener en cuenta cuándo una curva α es una geodésica.

Para que α sea una geodésica es necesario y suficiente que las siguientes ecuaciones geodésicas sean satisfechas.

$$\begin{aligned} u'' + \frac{E_u}{2E} u'^2 + \frac{E_v}{E} u'v' - \frac{G_u}{2E} v'^2 &= 0 \\ v'' - \frac{E_v}{2G} u'^2 + \frac{G_u}{G} u'v' + \frac{G_v}{2G} v'^2 &= 0 \end{aligned}$$

2.10.1. Definición de curvatura geodésica (k_g)

Se llama curvatura geodésica de α en $S \in I$ al número real:

$$k_g(s) = \left\| \frac{D}{ds} \left(\frac{d\alpha}{ds} \right) \right\|$$

Ahora se expresarán las geodésicas en función de la curvatura geodésica, para una curva rapidez unitaria α , entonces se tiene

$$a'' = k_g T \times U + (a'' \cdot U) U$$

Se nota que aún no tenemos a U , se debe reducir el último término y buscar la manera que tenga algún sentido. El vector tangente $T \times U$ se usa para obtener una base ortonormal para $\mathbb{R}^3\{T, T \times U, U\}$ donde T y $T \times U$ provienen de una base ortonormal para el plano tangente en cada punto de la superficie. A pesar de no tener una normal unitaria para trabajar con superficies que no están en \mathbb{R}^3 , se debe buscar un vector tangente apropiado en el plano tangente el cual

será perpendicular a T . La manera de hacerlo es como sigue. Dada la parametrización $x(u, v)$, se define una transformación lineal J en cada plano tangente dado por:

$$J\left(\frac{x_u}{\sqrt{E}}\right) = \frac{x_v}{\sqrt{G}} \quad , \quad J\left(\frac{x_v}{\sqrt{G}}\right) = -\frac{x_u}{\sqrt{E}}$$

Note que J queda bien definida, simplemente definiendo J sobre la base.

2.10.2. Curvatura geodésica de la curva velocidad

Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva en una superficie M en \mathbb{R}^3 (esto es con la métrica inducida de \mathbb{R}^3). Por conveniencia se toma α una curva de rapidez unitaria. Asumimos que la parametrización es ortogonal, esto es $F=0$.

Se demostrará que $J(T) = TxU$ para superficies en \mathbb{R}^3 .

Demostración

Se sabe que $J(T) = J\left(c_1 \frac{x_u}{\sqrt{E}} + c_2 \frac{x_v}{\sqrt{G}}\right)$

$$J(T) = c_1 J\left(\frac{x_u}{\sqrt{E}}\right) + c_2 J\left(\frac{x_v}{\sqrt{G}}\right)$$

$$J(T) = c_1 \left(\frac{x_v}{\sqrt{G}}\right) - c_2 \left(\frac{x_u}{\sqrt{E}}\right) \quad (I)$$

Asimismo tenemos:

$$TxU = \left(c_1 \frac{x_u}{\sqrt{E}} + c_2 \frac{x_v}{\sqrt{G}}\right) xU$$

$$TxU = c_1 \frac{x_u xU}{\sqrt{E}} + c_2 \frac{x_v xU}{\sqrt{G}}$$

$$TxU = c_1 \left(\frac{x_v}{\sqrt{G}}\right) - c_2 \left(\frac{x_u}{\sqrt{E}}\right) \quad (II)$$

de (I) y (II) se concluye que $J(T) = TxU$.

Como $J(T) = TxU$, se puede considerar la ecuación:

$$a'' = k_g J(T)$$

Como la definición de curvatura geodésica para la curva de rapidez unitaria $\alpha(t)$. Ahora,

$$\begin{aligned} J(T) &= J(u'x_u + v'x_v) \\ &= u' J(x_u) + v' J(x_v) \end{aligned}$$

$$= u' \sqrt{\frac{E}{G}} x_v - v' \sqrt{\frac{G}{E}} x_u$$

$$a'' = -k_g v' \sqrt{\frac{G}{E}} x_u + k_g u' \sqrt{\frac{E}{G}} x_v$$

Si se iguala el coeficiente x_u de ésta expresión por a'' y una se usa para definir las ecuaciones geodésicas, se tiene:

$$-k_g v' \sqrt{\frac{G}{E}} = u'' + \frac{E_u}{2E} u'^2 + \frac{E_v}{E} u'v' - \frac{G_u}{2E} v'^2$$

$$k_g$$

$$= \frac{-u''}{v'} \sqrt{\frac{E}{G}} - \frac{E_u}{2\sqrt{EG}} \frac{u'^2}{v'} - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u' + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} v'$$

Se puede escribir todo esto de una manera mucho más significativa. Se denota a θ como el ángulo entre a' y x_u . Ya que a es una curva de rapidez unitaria, se tiene:

$$a' = u' x_u + v' x_v$$

2.10.3. Definición

Si $a(t)$ es una curva de rapidez unitaria en una superficie $M : x(u, v)$ y θ el ángulo entre a' y x_u . Entonces la curvatura geodésica de a esta dada por

$$k_g = \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2\sqrt{EG}} [G_u v' - E_v u']$$

Aun no se ha especificado un rango para la parametrización $x(u, v)$. Esto es suficiente para indicar que k_g cumple para superficies isométricas y no isométricas a \mathbb{R}^2

A continuación se encontrará las geodésicas de algunas superficies no isométricas a \mathbb{R}^2 .

2.10. Geodésicas del plano de Poincaré P

La parametrización $x(u, v) = (u, v)$ con métrica conforme

$$w_1 \circ w_2 = \frac{w_1 \cdot w_2}{v^2}, \text{ donde } w_1, w_2 \in T_p(P) \text{ y } p = (u, v)$$

Es v -Clairaut, entonces para $a = x(u(t), v(t))$ las ecuaciones geodésicas

$$u'' - \frac{2}{v} u' v' = 0, \quad v'' - \frac{1}{v} u'^2 + \frac{1}{v} v'^2 = 0$$

Dado que la parametrización es v -Clairaut, el procedimiento para calcular las geodésicas está dado por las primeras ecuaciones geodésicas

$$\frac{u''}{u'} = \frac{2}{v} v'$$

$$\ln(u') = 2 \ln(v) + c$$

$$u' = cv^2$$

Se reemplaza este resultado en la relación de velocidad unitaria

$$1 = u'^2(1/v^2) + v'^2(1/v^2) \quad \text{entonces} \quad \text{tenemos} \quad v' = v \sqrt{1 - c^2 v^2}$$

dividiendo v' entre u' e integrando se tiene

$$\int du = \int \frac{cv}{\sqrt{1 - c^2 v^2}} dv$$

$$u - d = \frac{1}{c} \int \operatorname{sen} w \, dw, \quad \text{donde } v = \frac{1}{c} \operatorname{sen} w$$

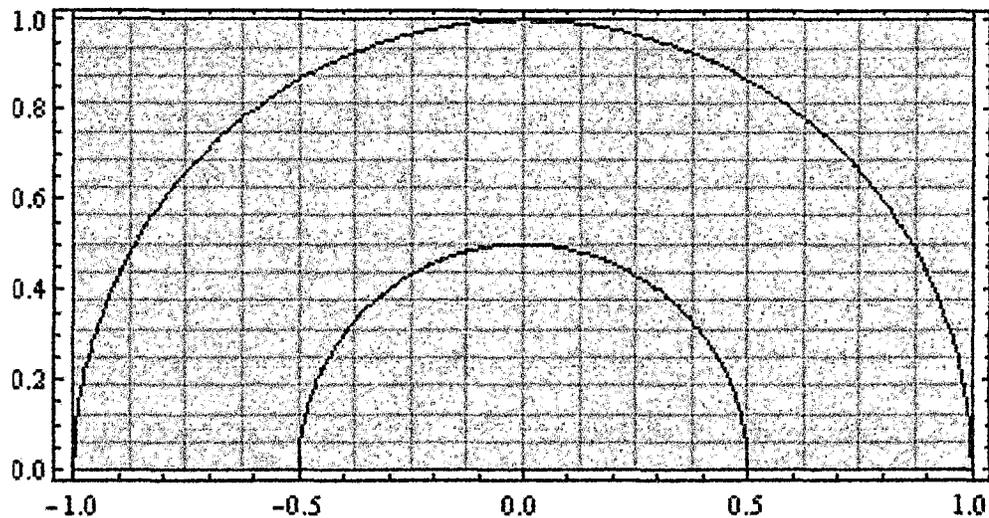
$$= -\frac{1}{c} \operatorname{cos} w$$

$$= -\frac{1}{c} \sqrt{1 - c^2 v^2}$$

$$c^2(u - d)^2 = 1 - c^2 v^2$$

$$(u - d)^2 + v^2 = \frac{1}{c^2}$$

Esta es la ecuación de la circunferencia situada en el eje- u . También, debido a que el plano (vector) es v -Clairaut, las líneas verticales (esto es curvas paramétricas- v) son geodésicas también. Entonces, el plano de Poincaré P tiene como geodésicas a los círculos centrados en el eje- u y las líneas verticales. Estas son las "líneas rectas de P"



2.11. Geodésicas del toro flat

La parametrización $x(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v)$ con métrica conforme

$$w_1 \circ w_2 = \frac{w_1 \cdot w_2}{v}, \text{ donde } w_1, w_2 \in T_p(P) \text{ y } p = (u, v)$$

1°) Calcular las componentes x_u y x_v

- $x_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0, 0)$
- $x_v = (0, 0, -\operatorname{sen} v, \cos v)$

2°) Calcular E y G

- $E = x_u \circ x_u$

$$E = \frac{x_u \cdot x_u}{v}$$

$$E = \frac{(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0, 0)(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0, 0)}{v}$$

$$E = \frac{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u + 0 + 0}{v}$$

$$E = \frac{1}{v}$$

Derivando E con respecto a u :

$$E_u = 0$$

Derivando E con respecto v :

$$E_v = \frac{-1}{v^2}$$

- $G = x_v \circ x_v$

$$E = \frac{x_v \cdot x_v}{v}$$

$$G = \frac{(0, 0, -\operatorname{sen}v, \operatorname{cos}v)(0, 0, -\operatorname{sen}v, \operatorname{cos}v)}{v}$$

$$G = \frac{\operatorname{sen}^2v + \operatorname{cos}^2v}{v}$$

$$G = \frac{1}{v}$$

Derivando G con respecto u :

$$G_u = 0$$

Derivando G con respecto v :

$$G_v = \frac{-1}{v^2}$$

La parametrización es v -Clairaut, entonces para $\alpha = x(u(t), v(t))$ las ecuaciones geodésicas

$$u'' + \frac{E_v}{E} u' v' = 0$$

$$u'' - \frac{1}{v} u' v' = 0$$

$$\frac{u''}{u'} = \frac{1}{v} v'$$

$$\ln(u') = \ln(v) + c$$

$$u' = cv$$

$$v'' - \frac{E_v}{2G} u'^2 + \frac{G_v}{2G} v'^2 = 0$$

$$v'' + \frac{1}{2v} u'^2 - \frac{1}{2v} v'^2 = 0$$

Se reemplaza este resultado en la relación de velocidad unitaria

$$1 = E u'^2 + G v'^2$$

$$1 = \frac{1}{v} u'^2 + \frac{1}{v} v'^2$$

$$v = u'^2 + v'^2$$

$$v' = \sqrt{v - c^2 v^2}$$

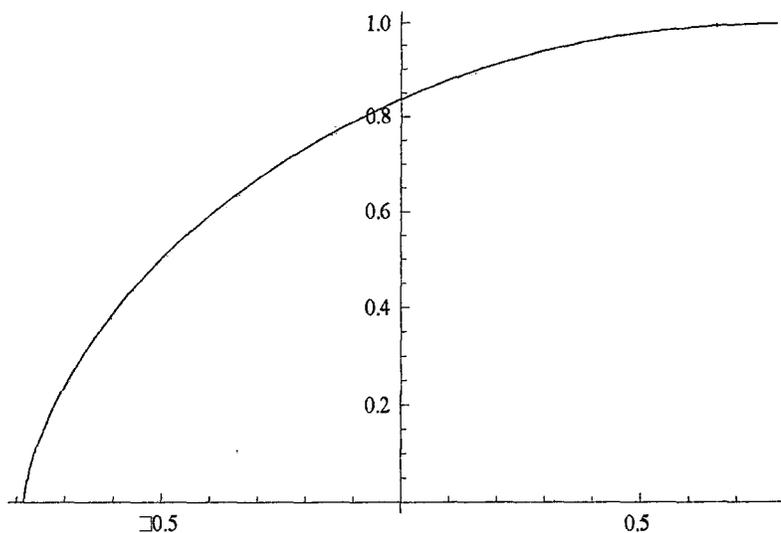
Ahora dividiendo u' entre v' e integrando se tiene

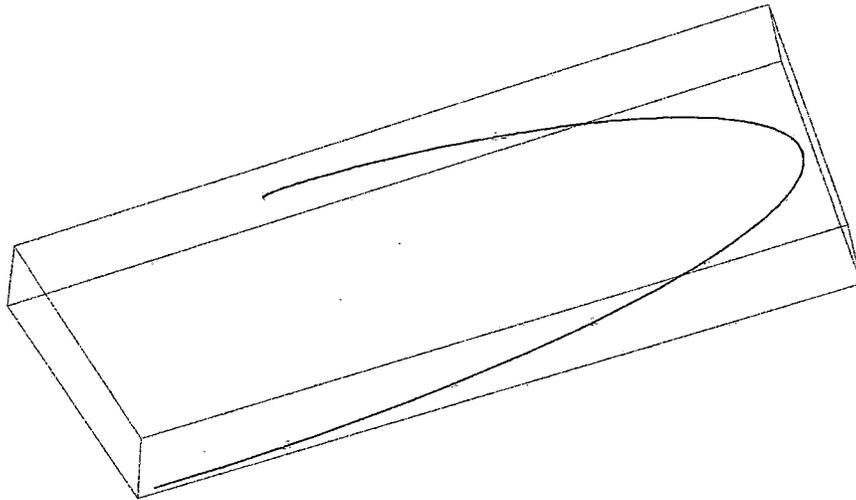
$$\frac{u'}{v'} = \frac{cv}{v'}$$

$$\frac{u'}{v'} = \frac{cv}{\sqrt{v - c^2 v^2}}$$

$$\int du = \int \frac{cv}{\sqrt{v - c^2 v^2}} dv$$

$$u = \frac{\arcsen(2c^2 v - 1) - 2|c|\sqrt{v - c^2 v^2}}{2c|c|} + d$$





2.12. Geodésicas de la esfera estereográfica

La parametrización

$$St * (\cos u \cos v, \operatorname{senu} \cos v, \operatorname{senv}) = \left(\frac{\cos u \cos v}{1 - \operatorname{senv}}, \frac{\operatorname{senu} \cos v}{1 - \operatorname{senv}}, 0 \right)$$

y con métrica conforme $w_1 \circ w_2 = St * (w_1) \cdot St * (w_2)$

1º) Calcular las componentes $St * (x_u)$ y $St * (x_v)$

- $E = St * (x_u) \cdot St * (x_u)$

$$E = \frac{\cos^2 v}{(1 - \operatorname{senv})^2}$$

$$E_v = \frac{2 \cos v}{(1 - \operatorname{senv})^2}$$

$$E_u = 0$$

- $G = St * (x_v) \cdot St * (x_v)$

$$G = \frac{1}{(1 - \operatorname{senv})^2}$$

$$G_u = 0$$

$$G_v = \frac{2\cos v}{(1 - \operatorname{sen} v)^3}$$

La parametrización es v -clairaut

Tenemos las ecuaciones geodésicas

$$u'' + \frac{E_v}{E} u' v' = 0$$

$$u'' - \frac{2}{\cos v} u' v' = 0$$

$$\frac{u''}{u'} = \frac{-2}{\cos v} v'$$

$$\ln(u') = -2\ln(\tan v + \sec v) + c$$

$$\ln(u') = \ln c - \ln(\tan v + \sec v)^2$$

$$u' = \frac{c}{(\tan v + \sec v)^2}$$

$$u' = \frac{c \cdot \cos^2 v}{(1 + \operatorname{sen} v)^2}$$

$$v'' + \frac{E_v}{2G} u'^2 - \frac{G_v}{2G} v'^2 = 0$$

$$v'' + \cos v u'^2 - \frac{\cos v}{1 - \operatorname{sen} v} v'^2 = 0$$

$$v'' = \frac{\cos v}{1 - \operatorname{sen} v} v'^2 - \cos v u'^2$$

Se reemplaza este resultado en la relación de velocidad unitaria

$$1 = E u'^2 + G v'^2$$

$$1 = \frac{\cos^2 v}{(1 - \operatorname{senv})^2} u'^2 + \frac{1}{(1 - \operatorname{senv})^2} v'^2$$

$$(1 - \operatorname{senv})^2 = \cos^2 v u'^2 + v'^2$$

$$v' = \sqrt{(1 - \operatorname{senv})^2 - \cos^2 v u'^2}$$

$$v' = \sqrt{(1 - \operatorname{senv})^2 - \cos^2 v \cdot \frac{c^2}{(\tan v + \operatorname{secv})^4}}$$

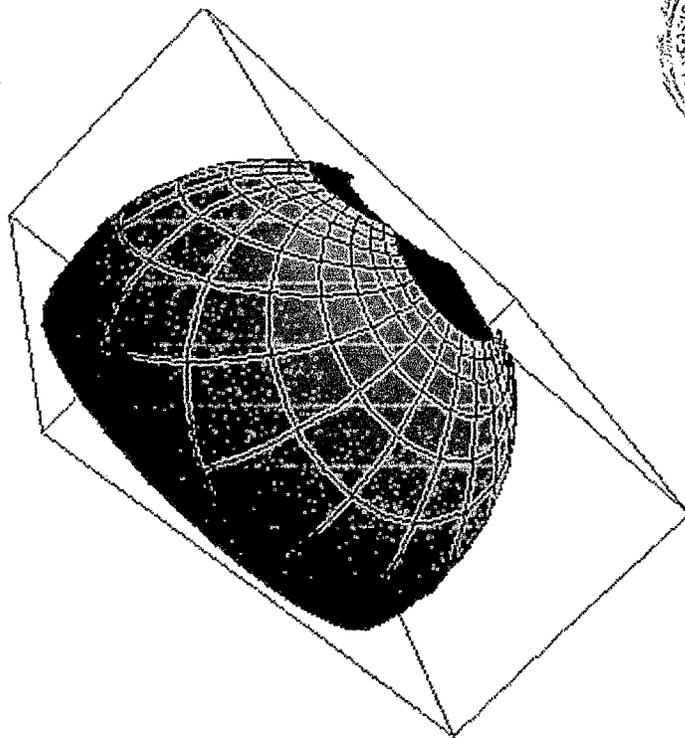
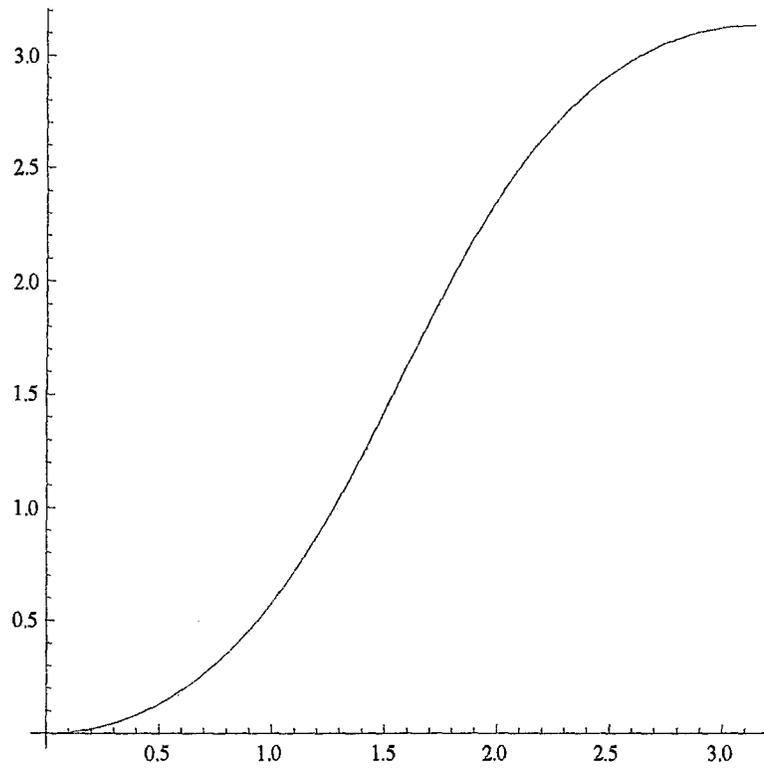
$$v' = \frac{\cos^2 v}{(1 + \operatorname{senv})^2} \sqrt{1 + 2\operatorname{senv} + \operatorname{sen}^2 v - c^2 \cdot \cos^2 v}$$

Ahora dividiendo u' entre v' e integrando se tiene

$$\frac{u'}{v'} = \frac{c}{\sqrt{1 + 2\operatorname{senv} + \operatorname{sen}^2 v - c^2 \cdot \cos^2 v}}$$

$$\int du = \int \frac{c}{\sqrt{1 + 2\operatorname{senv} + \operatorname{sen}^2 v - c^2 \cdot \cos^2 v}} dv$$

$$u = 2 \cdot \tan^{-1} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{senv}}}{\sqrt{\operatorname{cosv} + 1}}$$



CONCLUSIONES

- ✓ Las geodésicas del plano de Poincaré son :

$$(u - d)^2 + v^2 = \frac{1}{c^2}$$

- ✓ Las geodésicas de la esfera estereográfica son:

$$u = 2 \cdot \tan^{-1} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{sen} v}}{\sqrt{\operatorname{cos} v + 1}}$$

- ✓ Las geodésicas del toro flat son:

$$u = \frac{\operatorname{arcsen}(2c^2v - 1) - 2|c|\sqrt{v - c^2v^2}}{2c|c|} + d$$

BIBLIOGRAFÍA

1. TENENBLAT, Keti. "Introducción a la geometría diferencial"
Volumen I. Editorial Universidad de Brasilia. Brasilia-Río de Janeiro, 1987
2. OPREA, Jhon. "Differential Geometry and its applications".
Editorial Prentice – Hall do Brasil , 1997
3. TENENBLAT, Keti. "Introducción a la geometría diferencial"
Volumen II. Editorial Universidad de Brasilia. Brasilia-Río de Janeiro, 1987.
4. BRICKELL, F and CLARK R.S. "Differentiable Manifolds". Editor
Profesor E.T. Davies, Department of mathematics, University of
Calgary, Alberta.