UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"La Formulación Variacional para el Problema de Dirichlet en los Espacios de Sóbolev"

TESIS

PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO
PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presentado por:

Bach. Mat. Huamán Malca Wilmer Amado
Bach. Mat. López Bonilla Guillermo Alonso

Asesor:

Msc. Tejada Romero Iris Margarita

LAMBAYEQUE - PERÚ
2016

UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"La Formulación Variacional para el Problema de Dirichlet en los Espacios de Sóbolev"

TESIS

"PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS".

Presentado por:

Bach. Mat. Huamán Malca Wilmer Amado

Bach. Mat. López Bonilla Guillermo Alonso

Asesor:

Msc. Tejada Romero Iris Margarita

LAMBAYEQUE – PERÚ

2016

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"La Formulación Variacional para el Problema de Dirichlet en los Espacios de Sóbolev"**, presentada por los bachilleres en matemáticas, Huamán Malca Wilmer Amado, López Bonilla Guillermo Alonso, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas .

Dr. Cárpena Velásquez Enrique Wilfredo
Presidente Jurado de Tesis

Mg. Valdivia Velásquez Segundo Leonardo
Secretario Jurado de Tesis

Mg. Díaz Delgado Darwin
Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: Marzo - 2016

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"La Formulación Variacional para el Problema de Dirichlet en los Espacios de Sóbolev"

Bach. Mat. Huamán Malca Wilmer Amado

Autor

Bach. Mat. López Bonilla Guillermo Alonso

Autor

Msc. Tejada Romero Iris Margarita

Asesor

Lambayeque – Perú

Marzo - 2016

Agradecimiento

Especialmente a la Dra. Iris Tejada Romero por el apoyo incondicional en mi trabajo, que representa el fruto de la formación de mi carrera Profesional.

Guillermo Alonso.

A mis profesores y muy en especial a la Dra. Iris Tejada por su paciencia en transmitirnos todos sus conocimientos en base a sus experiencias académicas

Wilmer Amado.

Dedicatoria

A Dios por haberme regalado a don Amado y a doña Jesús mis padres por sus buenos ejemplos, y a la sra. Angelica mi esposa por su paciencia y apoyo

Wilmer Amado.

A mis padres Guillermo y Manuela que con su firme convicción invirtieron para desarrollarme en la especialidad

Guillermo Alonso.

Resumen

En este trabajo se presenta una descripción del método variacional, el cual se utiliza para el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales parciales: existencia, unicidad y regularidad de la solución.
Teniendo en cuenta que el método variacional transforma un problema clásico de ecuaciones diferenciales parciales a un problema débil, se establece la existencia y unicidad de la solución débil a través del teorema Lax-Milgram para después hacer la formulación variacional para el problema de Dirichlet en los espacios de Sóbolev demostrando que si a una solución débil de una ecuación diferencial parcial se le suma la regularidad, se logra recuperar la solución clásica.

Abstract

This paper presents a description of the variational method, which is used for the qualitative study of partial differential equations: Existence, uniqueness and regularity of the solution

counting that the variational method transforms a classic problem of partial differential equations to a weak problem , existence and uniqueness of the weak solution are established through the theorem Lax - Milgram and then make the variational formulation for the Dirichlet problem in Sobolev spaces showing that if a weak solution of a partial differential equation is added regularity, is able to recover the classical solution .

Introducción

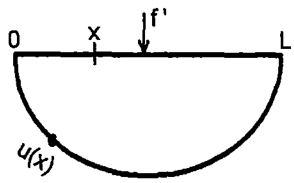
Las ecuaciones diferenciales Parciales han jugado un rol importante para el modelo de fenómenos naturales como precipitaciones pluviales, entrada de oxígeno a los pulmones, caudal de un río, etc. El estudio del comportamiento de sus soluciones es un problema de importancia para la física matemática, lo que ha ocasionado su presencia y desarrollo en textos científicos desde hace varios años, abordando problemas físicos, de fluídos y cuyas aplicaciones se extienden a diversas ramas de la ciencia como la medicina, física, biología.

La teoría clásica de EDP tiene como objetivo encontrar soluciones analítica o fuertes que es una función muy regular que la satisface punto a punto en todo el dominio, en las cuales se utilizan varios métodos, como separación de variables, series de potencia, transformada de Laplace.

Pero existen grandes incovenientes que representan al momento de las aplicaciones como son que exigen demasiada regularidad de las funciones que intervienen en EDP, alejándose del modelo al hacer simplificaciones que tienen una influencia no despreciable en los resultados y no tienen sentido en la EDP diferenciar una función discontinua, ver [3], como por ejemplo el modelo matemático de la cuerda elástica de longitud L, sujeta en los extremos y sobre lo que actúan una determinada fuerza que presentamos por medio de la función $f = f(x)$, está dada por

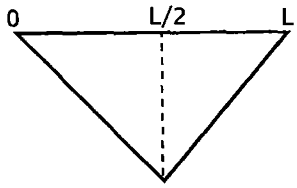
$$\begin{cases} -(ku')' + \lambda u = f, & \text{en } \ \Omega = (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0, & \text{sobre } \ \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

donde $k = k(x) > 0$ depende de las propiedades físicas de la cuerda y $\lambda = \lambda(x) > 0$



Supongamos ahora que la fuerza que actúa sobre la cuerda está localizada en un único punto $x = L/2$.

Despreciando la fuerza que ejerce el medio elástico, entonces es evidente que la cuerda adopta la forma dada en el siguiente gráfico.



Pero esa función dada en este gráfico no es diferencial en $x = L/2$.

Por tanto tal función no puede ser solución de la ecuación $-(ku')' + \lambda u = f$ en $(0, L)$, al menos en sentido clásico, es decir en el sentido que u debe ser dos veces diferenciable en cada punto del intervalo abierto $(0, L)$. Con este ejemplo es importante comprender y entender el concepto de una ecuación diferencial.

Esta dificultad motivó a desarrollar nuevos métodos como la fórmula variacional que consiste en reformular el problema $(*)$ de modo que se exija a la función incógnita un orden menor de derivabilidad y en vez del cumplimiento punto a punto, un cumplimiento en promedio de la ecuación diferencial.

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo principal encontrar una solución de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera homogéneo y no homogéneo, aplicando la formulación variacional para el problema de Dirichlet en los espacios de Sóbolev.

El trabajo se divide en dos capítulos, en el capítulo 1 se hace estudio de Introducción a los espacios funcionales, el espacio de distribuciones, espacios de Sóbolev, espacios de Hilbert y el Teorema de la traza. Y en el segundo capítulo que es la formulación del problema.

Notación y Abreviaturas

EDP: Ecuación en Derivadas Parciales

EDO: Ecuación Diferencial Ordinaria

$\mathbb{R}$: Cuerpo de los números reales

$\mathbb{R}^n$: n-tupla de números reales

Ω: Conjunto abierto

$\partial\Omega$: Frontera del abierto Ω

sop Ω: Soporte de la función Ω

Δ: Operador laplaciano

∇: Operador gradiente

$L^p(\Omega)$: Espacio de funciones $p - integrables$

$L^1_{loc}(\Omega)$: Espacio de funciones localmente integrables

$C^\infty(\Omega)$: Espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre Ω

$C_0^\infty(\Omega)$: Espacio de funciones infinitamente continua

$D(\Omega)$: Espacio de funciones continuas sobre Ω

$H^m(\Omega)$: Espacio de Sóbolev $W^{m,2}(\Omega)$

H_0^1: Espacio de funciones en $H^1(\Omega)$ con traza nula

$||u||$: Norma de u en espacios de Sóbolev

Índice general

Capítulo 1:

Preliminares

1.1 Separación de Variables

El método de separación de una variable para la solución de una ecuación diferencial parcial consiste en proponer una solución del tipo:

$$u(x,y) = X(x).Y(y)$$

Donde $X(x)$ es una función de x y $Y(y)$ es una función exclusivamente de y, así que cualquier ecuación diferencial que se pueda representar de esta manera podría ser resuelta con el método de separación de variables.

Pasos del método de separación de variables:

1) Se supone una función solución de la ecuación diferencial parcial $u(x,y) = X(x)Y(y)$, o bien $u = XY$.

2) Sustituir $u(x,y)$ y sus derivadas parciales en la ecuación diferencial parcial.

3) Separar en cada lado de la ecuación diferencial parcial a las funciones univariables con sus respectivas derivadas.

4) Se igualan ambos lados de la ecuación diferencial parcial con una constante, llamada constante de separación.

5) Resolver las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que se tienen.

6) Multiplicar las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias del paso anterior, para así obtener la solución completa de la ecuación diferencial parcial.

Limitaciones del método de separación de variables:

1) La ecuación diferencial parcial tiene que ser lineal.

2) La solución de la ecuación diferencial parcial debe ser una función de dos variables independientes.

Resuelva la ecuación de Laplace, sujeta a las condiciones:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \ldots(1)$$

Con condiciones de frontera

$$u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = g(x) \quad para \;\; 0 \leq x \leq a \qquad \ldots(2)$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(0,y) = 0 \quad para \;\; 0 \leq y \leq b \qquad \ldots(3)$$

Solución.

Se tiene :

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \qquad \ldots(4)$$

Derivando 2 veces con respecto a x

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = X'(x)Y(y) \qquad \ldots(5)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = X''(x)Y(y) \qquad \ldots(6)$$

Derivando 2 veces con respecto a y

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = X(x)Y'(y) \qquad \ldots(7)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = X(x)Y''(y) \qquad \ldots(8)$$

reemplazando (8) y (6) en (1)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \qquad \ldots(9)$$

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \qquad \ldots(10)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \qquad \ldots(11)$$

de la ecuación (11) se deduce :

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

$$\longrightarrow Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$X''(x) = -\lambda X(x)$$

$$\longrightarrow X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (13)$$

Se considera las condiciones de frontera

$$u(0, y) = X(0)Y(y) = 0$$

$$u(a, y) = X(a)Y(y) = 0$$

como $Y(y) \neq 0 \quad \Longrightarrow X(0) = 0 \ \ X(a) = 0 \qquad \ldots(14)$

de la ecuación (13) se tiene

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Caso I: $\lambda < 0$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

La ecuación característica es $m^2 - \lambda = 0 \Longrightarrow m^2 = \lambda \Longrightarrow m = \pm\lambda$

$$\Rightarrow X(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$$

como las condiciones de frontera se tiene que cumplir

$$\begin{aligned} X(0) &= c_1e^{-\sqrt{\lambda}(0)} + c_2e^{\sqrt{\lambda}(0)} &= 0 \\ X(a) &= c_1e^{-\sqrt{\lambda}(a)} + c_2e^{\sqrt{\lambda}(a)} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ se tiene

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1e^{-\sqrt{\lambda}(a)} + c_2e^{\sqrt{\lambda}(a)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\therefore \quad X(x) = 0$$

caso II: $\lambda = 0$

$$X''(x) = 0$$

La ecuación característica $m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$

$$X(x) = c_1x + c_2$$

Las condiciones de frontera nos dan

$$\begin{aligned} X(0) &= c_1(0) + c_2 &= 0 \\ X(a) &= c_1(a) + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

$$\therefore \quad X(x) = 0$$

caso III: $\lambda > 0$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} m^2 + \lambda &= 0 \\ m^2 &= \text{-}\lambda \\ m &= \pm\sqrt{\lambda}i \end{aligned}$$

$\Rightarrow X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}x)$

se tiene las condiciones de frontera

$X(0) = c_1(1) + c_2(0) = 0 \longrightarrow c_1 = 0$

$X(a) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}a) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}a) = 0$ el determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ cos(\sqrt{\lambda}a) & sen(\sqrt{\lambda}a) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad sen(\sqrt{\lambda}a) &= 0 \\ \sqrt{\lambda}a &= n\pi \\ \sqrt{\lambda} &= \frac{n\pi}{a} \quad ,\forall\, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad X(x) = c_2 sen(\tfrac{n\pi x}{a})$$

Ahora se tiene $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} m^2 - \lambda &= 0 \\ m^2 &= \lambda \\ m &= \pm\sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow Y(y) = c_3 cosh(\sqrt{\lambda}y) + c_4 senh(\sqrt{\lambda}y)$

$$Y(y) = c_3 cosh(\tfrac{k\pi y}{a}) + c_4 senh(\tfrac{k\pi y}{a})$$

donde

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \Big(c_3 cosh(\tfrac{n\pi y}{a}) + c_4 senh(\tfrac{n\pi y}{a})\Big) c_2 sen(\tfrac{n\pi x}{a}) \\ u(x,y) &= \Big(c_2 c_3 cosh(\tfrac{n\pi y}{a}) + c_2 c_4 senh(\tfrac{n\pi y}{a})\Big) sen(\tfrac{n\pi x}{a}) \\ u_n(x,y) &= \Big(a_n cosh(\tfrac{n\pi y}{a}) + b_n senh(\tfrac{n\pi y}{a})\Big) sen(\tfrac{n\pi x}{a}) \end{aligned}$$

La solución general es:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cosh(\tfrac{n\pi y}{a}) + b_n senh(\tfrac{n\pi y}{a}) \right) sen(\tfrac{n\pi x}{a}) \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(\tfrac{n\pi x}{a}) = f(x)$$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) sen(\tfrac{n\pi x}{a}) dx$$

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cosh(\tfrac{n\pi b}{a}) + b_n senh(\tfrac{n\pi b}{a}) \right) sen(\tfrac{n\pi x}{a}) = g(x)$$

donde

$$b_n = \frac{1}{senh(\frac{n\pi b}{a})} \left[\frac{2}{a} \int_0^a g(x) sen(\tfrac{n\pi x}{a}) dx - a_n cosh(\tfrac{n\pi x}{a}) \right]$$

Ejemplo 1.1. Resolver la siguiente ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0; \quad 0 < x < 0\cdot 5 \;, \quad 0 < y < 0 \cdot 5$$

Con las condiciones de frontera:

$$u(0,y) = 0, \quad u(0\cdot 5, y) = 200y, \quad 0 \leq y \leq \tfrac{\pi}{2}$$
$$u(x,0) = 0, \quad u(x, 0\cdot 5) = 200x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Solución.

De la ecuación general 1.1 la solución de este ejercicio se resolverá por partes donde:

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$$

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cosh(\tfrac{n\pi y}{a}) + b_n senh(\tfrac{n\pi y}{a}) \right) sen(\tfrac{n\pi x}{a})$$

Donde:

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) sen(\tfrac{n\pi x}{a}) dx$$

$$a_n = \frac{2}{0\cdot 5} \int_0^{0\cdot 5} (0) sen(\tfrac{n\pi x}{a}) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{senh(\frac{n\pi b}{a})}\left[\frac{2}{a}\int_0^a g(x)sen(\tfrac{n\pi x}{a})dx - A_n cosh(\tfrac{n\pi}{a})\right]$$

$$b_n = \frac{1}{senh(n\pi)}\left[\frac{2}{0\cdot 5}\int_0^{0\cdot 5}(200x)sen(\tfrac{n\pi x}{0\cdot 5})dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{senh(n\pi)}\left[4 * 200\left(\frac{-x}{2n\pi}cos(2n\pi x) + \frac{1}{4n^2\pi^2}sen(2n\pi x)\right)_0^{0\cdot 5}\right]$$

$$b_n = \frac{-200(-1)^k}{n\pi senh(n\pi)}$$

$$\Longrightarrow u_1(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{-200(-1)^n}{n\pi senh(n\pi)}senh(n\pi y)\cdot sen(2n\pi x)$$

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cosh(\tfrac{k\pi x}{a}) + B_n senh(\tfrac{k\pi x}{a})\right)sen(\tfrac{k\pi y}{a})$$

Donde:

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(y)sen(\tfrac{k\pi y}{a})dy$$

$$a_n = \frac{2}{0\cdot 5}\int_0^{0\cdot 5}(0)sen(\tfrac{n\pi y}{0\cdot 5})dy = 0$$

$$b_n = \frac{1}{senh(\frac{k\pi b}{a})}\left[\frac{2}{a}\int_0^a g(y)sen(\tfrac{k\pi y}{a})dy - A_n cosh(\tfrac{k\pi}{a})\right]$$

$$b_n = \frac{1}{senh(n\pi)}\left[\frac{2}{0\cdot 5}\int_0^{0\cdot 5}(200y)sen(\tfrac{n\pi y}{0\cdot 5})dy\right]$$

$$b_n = \frac{1}{senh(n\pi)}\left[4 * 200\left(\frac{-y}{2n\pi}cos(2n\pi y) + \frac{1}{4n^2\pi^2}sen(2n\pi y)\right)_0^{0\cdot 5}\right]$$

$$b_n = \frac{-200(-1)^k}{n\pi senh(n\pi)}$$

$$\Longrightarrow u_2(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{-200(-1)^n}{n\pi senh(n\pi)}senh(n\pi x)\cdot sen(2n\pi y)$$

$$\therefore u(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{-200(-1)^n}{n\pi senh(n\pi)}senh(n\pi y)\cdot sen(2n\pi x) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{-200(-1)^n}{n\pi senh(n\pi)}senh(n\pi x)\cdot sen(2n\pi y)$$

1.2 Transformada de Laplace

Mencionaremos algunas definiciones básicas de la transformada de Laplace.

Definición 1.1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se dice que la función $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ tiene crecimiento exponencial de orden α en infinito si existe una constante $M > 0$ de modo que

$$|e^{-\alpha t}f(t)| \leq M \qquad \textit{para todo } t \geq 0$$

Definición 1.2. Dada $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$, se define formalmente la transformada de Laplace de f como la función de variable compleja

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

donde la integral anterior se entiende en el sentido de Riemann impropio, es decir,

$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a f(t)e^{-zt}\,dt$$

Teorema 1.1. *Sea F una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ y de forma que existen constantes $M, R, \alpha > 0$ tales que*

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}, \quad |z| \geq R$$

Entonces la función

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} Res\left[e^{tz}F(z), z_j\right] = \sum_{K=1}^{n} Res_{z=z_k}\left[e^{tz}F(z)\right], \quad t \geq 0$$

es la transformada inversa de F, es decir, $\mathcal{L}^{-1}(F) = f(t)$.

Ahora, al resolver ecuaciones diferenciales usando la transformada de Laplace, lo que se obtiene es la transformada de nuestra , así se vuelve indispensable saber recuperar una función a partir de su transformada.

Esto se logra mediante la transformada Inversa de Laplace.

Esta se define por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} F(z)e^{zt}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{zt}\,dz$$

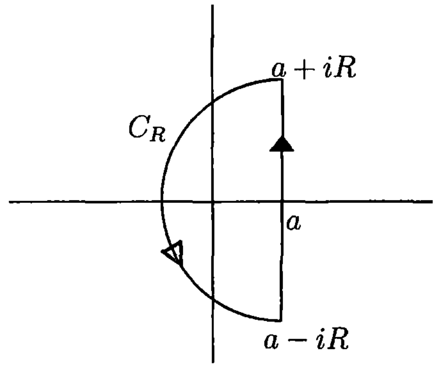
Donde F se define como en la definición [1.2], L_R es el segmento de recta vertical $z = a + it$,$-R \leq t \leq R$ tal que todos lo polos de F estén a su izquierda.

Ahora, bajo a ciertas condiciones muy generales, se demuestra usando el Teorema de Residuo, que si $|F(z)| \leq M_R$ (para z en el semicírculo C_R de la figura de abajo), donde M_R tiende a cero cuando R tiende a ∞, entonces:

$$f(t) = \sum_{K=1}^{n} Res_{z=z_k}\left[e^{zt}F(z)\right] \tag{1.2}$$

donde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son los polos de F.

El camino de integración usual para aplicar el teorema del Residuo es el siguiente:



Para una función de dos variables $u(x,t)$ definimos su transformada de Laplace como antes, considerando x como una constante es decir,

$$u(x,z) = \mathcal{L}\left\{u(x,t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-zt}u(x,t)\, dt$$

y su transformada inversa es :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^{zt}u(x,z)\, dz$$

donde C es el camino de arriba que consta de L_R seguido de C_R. Las propiedades de esta transformada que estaremos usando son :

$$\mathcal{L}\left\{u_x\right\} = \int_0^{\infty} u_x(x,t)e^{-zt}\, dt = \frac{\partial U}{\partial x}(x,z) \tag{1.3}$$

$$\mathcal{L}\left\{u_{xx}\right\} = \int_0^{\infty} u_{xx}(x,t)e^{-zt}\, dt = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,z) \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}\{u_t\} = \int_0^\infty u_t(x,t)e^{-zt}\,dt = zU(x,z) - u(x,0) \tag{1.5}$$

$$\mathcal{L}\{u_{tt}\} = \int_0^\infty u_{tt}(x,t)e^{-zt}\,dt = z^2U(x,z) - zu(x,0) - u_t(x,0) \tag{1.6}$$

donde $U(x,z) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$.

Estas propiedades se obtienen de la definición de la transformada para funciones de una variable y usando integración por partes.

Ejemplo 1.2. Resolver la siguiente ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0; \quad 0 < x < 0\cdot 5\ , \quad 0 < y < 0\cdot 5$$

Con las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0, \quad u(0\cdot 5, y) = 200y, \quad 0 \le y \le \tfrac{\pi}{2} \\ u(x,0) &= 0, \quad u(x, 0\cdot 5) = 200x, \quad 0 \le x \le \pi \end{aligned}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\Big\} &= -\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\Big\} \\ z^2u(x,z) - zu(x,0) - u_y(x,0) &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,z) \\ z^2u(x,z) - \cancelto{0}{zu(x,0)} - \cancelto{0}{u_y(x,0)} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,z) \\ z^2u(x,z) &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,z) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,z) + z^2u(x,z) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria tenemos:

$$u_1(x,z) = c_1 cos(zx) + c_2 sen(zx)$$

se tiene las condiciones de frontera

$u(0, s) = c_1 cos(0) + c_2 sen(0) = c_1(1) + c_2(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$ y

$u(0 \cdot 5, z) = \mathcal{L}\Big\{u(0 \cdot 5, y)\Big\} = \mathcal{L}\Big\{200y\Big\} = \frac{200}{z^2}$ donde

$$c_2 = \frac{200}{z^2 2senh(0 \cdot 5zn)}$$

$$u_1(x, z) = \frac{200}{z^2 2senh(0 \cdot 5zn)} sen(zx)$$

$$u_1(x, y) = \mathcal{L}^{-1}\Big\{u_1(x, z)\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{200}{z^2 2senh(0 \cdot 5zn)} sen(zx)\Big\}$$

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-200(-1)^n}{n\pi senh(n\pi)} senh(n\pi y) \cdot sen(2n\pi x)$$

El mismo procedimiento se hace para $u_2(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)\Big\} = -\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)\Big\}$$

$$z^2 u(z, y) - zu(0, y) - u_x(0, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x y^2}(z, y)$$

$$z^2 u(z, y) - \cancelto{0}{zu(0, y)} - \cancelto{0}{u_y(0, y)} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z, y)$$

$$z^2 u(z, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z, y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z, y) + z^2 u(z, y) = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria tenemos:

$$u_2(z, y) = c_3 cos(zy) + c_4 sen(zy)$$

se tiene las condiciones de frontera

$u(z,0) = c_3 cos(0) + c_4 sen(0) = c_3(1) + c_4(0) = 0 \Longrightarrow c_3 = 0$ y

$u(z, 0 \cdot 5) = \mathcal{L}\Big\{u(x, 0 \cdot 5)\Big\} = \mathcal{L}\Big\{200x\Big\} = \dfrac{200}{z^2}$ donde

$$c_4 = \frac{200}{z^2 2senh(0 \cdot 5zn)}$$

$$u_2(z,y) = \frac{200}{z^2 2senh(0 \cdot 5zn)} sen(zy)$$

$$u_2(x,y) = \mathcal{L}^{-1}\Big\{u_2(z,y)\Big\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{200}{z^2 2senh(0 \cdot 5zn)} sen(zy)\Big\}$$

$$u_2(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-200(-1)^n}{n\pi senh(n\pi)} senh(n\pi x) \cdot sen(2n\pi y)$$

$$\therefore u(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-200(-1)^n}{n\pi senh(n\pi)} senh(n\pi y) \cdot sen(2n\pi x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-200(-1)^n}{n\pi senh(n\pi)} senh(n\pi x) \cdot sen(2n\pi y)$$

Capítulo 2:

Teoría Matemática del Método Variacional

2.1 Introducción a los espacios Funcionales

Es necesario definir la integral de Lebesgue, puesto que en el presente trabajo la medida del conjunto sobre el cual se integra es más amplio que el que se usa para la integral Riemann (puede ser $\mathbb{R}^n$, espacios topológicos, variedades, etc).
La **integral de Lebesgue** es una construcción matemática que extiende el concepto de integración convencional de Riemann a una clase mucho más amplia de funciones, así como extiende los posibles dominios en los cuales estas integrales pueden definirse.

2.1.1 Un toque a la teoría de integración de Lebesgue

En esta sección revisaremos algunos conceptos básicos de la teoría de integración de Lebesgue. Entendemos por un dominio Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ medible Lebesgue con interior no vacío (generalmente abierto o cerrado). Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible-

Lebesgue e integrable, cuya integral se denota por

$$\int_{\Omega} f(x)dx$$

donde dx denota la medida de Lebesgue. Hagamos algunas notaciones y definiciones: Una función medible, se dice que es totalmente acotada sii existe una constante $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, sobre Ω.

Definamos el espacio de funciones

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \text{integrable según Lebesgue}\ \}$$

Ejemplo 2.1. Sea la función $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$, se puede observar fácilmente que f no es integrable según Riemann, pero según Lebesgue se tiene que

$$\int_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} d\mu = \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$$

para $1 \leq p < \infty$, y $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ se define

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)^p| dx\right)^{1/p} \tag{2.1}$$

Para $p = \infty$, escribimos

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)| \tag{2.2}$$

Observar que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ es solamente una semi-norma, pues muchas funciones no nulas, tendrán por ejemplo, $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Entonces se puede identificar funciones usando la siguiente relación: en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ por $f \sim g$ sii el conjunto $\{x \in \Omega / f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula. Así se define el espacio de Lebesgue

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}(\Omega)/\sim$$

el espacio de funciones L^p en el cual $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ es una norma, con identificación se dirá que todas las funciones que pertenecen a la misma clase de equivalencia se representan por una sola y diremos que $f = g$, y de ello se tiene que $\displaystyle\int_{\Omega} f(x)dx = \int_{\Omega} g(x)dx$ y en general $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^p(\Omega)}$.

Ejemplo 2.2. $n = 1,\ \Omega = [-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1,\ \ x > 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0, 1 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Como f, g y h difieren solamente en un conjunto de medida nula, entonces son la misma función en un espacio de Lebesgue.

De esta manera, se puede pensar que $L^p(\Omega)$ es un conjunto de clases de equivalencia de funciones respecto a la identificación vista anteriormente. Pero en la práctica no se pensará que los elementos de L^p son clases de equivalencia de funciones, más sí como funciones definidas.

Las desigualdades que mencionaremos a continuación (junto con desigualdad de poincare que mencionamos mas adelante) son de suma importancia, las usaremos en la demostración de la hipótesis del teorema de Lax Milgram.

1. Desigualdad de Hölder: para $1 \leq p, q < \infty$, tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, si $f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega)$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y además

   $$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

   Generalización: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$, entonces

   $$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega).$$

   De ello se sigue para Ω acotado;

   $$\|f\|_1 \leq \cdots \|f\|_p \leq \|f\|_q \cdots \leq \|f\|_\infty, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty$$

   de donde se tiene la siguiente cadena de inclusiones continuas

   $$L^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset L^q(\Omega) \subset \cdots \subset L^p(\Omega) \subset \cdots \subset L^1(\Omega), \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty \tag{2.3}$$

2. Desigualdad de Cauchy-Schawrz: es un caso particular de la desigualdad de Hölder, cuando $p = 2 = q$, si $f, g \in L^2(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y además

   $$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Si denotamos en $L^2(\Omega)$ el producto interno como

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa como

$$|\langle f,g\rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Ahora necesitamos introducir un nuevo termino DISTRIBUCIÓN. Entendemos por distribución o función generalizada como un objeto matemático que generaliza la noción de función y la de medida.

Además la noción de distribución sirve para extender el concepto de derivada a todas las funciones localmente integrables y a entes aún más generales.

2.1.2 Derivada Generalizada

Consideremos ahora la derivada de una distribución, si un funcional la definimos $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$, definida mediante la función $f(x)$ (en el sentido corriente) por

$$F[\varphi(x)] = \langle f(x), \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

parece natural definir su derivada por

$$\frac{dF[\varphi(x)]}{dx} = F'[\varphi(x)] = \langle f'(x), \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

Si la función $f(x)$ es diferenciable su primera derivada $f'(x)$ es continua, haciendo uso de la integración por partes en $F[\varphi(x)]$ con $u = \varphi(x)$ $dv = f'(x)dx$

$$\begin{aligned} F'[\varphi(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -F[\varphi'(x)] \end{aligned}$$

ya que si $\varphi(x)$ es una función de prueba, tiene soporte compacto y se desvanece fuera de un intervalo finito, es decir $\varphi(\pm\infty) = 0$, por lo cual el primer término de la ecuación se anula, obteniendo una expresión en la que no figura la derivada de $f(x)$, y escribimos

$$\langle f'(x), \varphi(x)\rangle = -\langle f(x), \varphi'(x)\rangle$$

Esta nueva funcional es lineal y continua sobre K, ya que si $\varphi(x)$ es función de prueba, su derivada $\varphi'(x)$ también lo es.

Lo anterior sugiere la siguiente definición.

Derivada Generalizada

Llamaremos derivada $\dfrac{dF}{dx}$ de la función generalizada $F[\varphi(x)]$ a la funcional definida mediante $\dfrac{dF}{dx} = F'[\varphi(x)] = -F[\varphi'(x)]$.

2.2 El Espacio de Distribuciones.

En primer lugar introducimos algunas notaciones para derivadas parciales y multiíndices: Dado un vector x con componentes $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Un multiíndice es un vector, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_0^+$; la longitud de α se define por

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Para $\varphi \in C^\infty$, denotamos por

$$D^\alpha\varphi, \quad D_x^\alpha\varphi, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi, \quad \varphi^\alpha, \quad \text{ó} \quad \partial_x^\alpha\varphi$$

a la derivada parcial usual

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

A continuación mencionaremos definiciones y notaciones puntuales como Soporte de una función, el espacio de distribuciones y distribución.

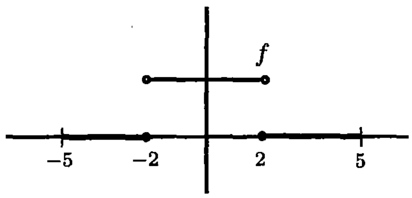
Soporte de una función

Sea $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, el *soporte* de una función es la clausura del conjunto de puntos donde φ no se anula, y se denota por $sop(\varphi)$, es decir:

$$sop(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; / \varphi(x) \neq 0\}}$$

Si este conjunto es compacto y está en el interior de Ω, entonces se dice que la función tiene "soporte compacto", con respecto a Ω. Cuando Ω se dice acotado se dice que φ se anula en una vecindad de $\partial\Omega = \Gamma$.

Ejemplo 2.3.



Los $x \in \mathbb{R}$ tal que $f \neq 0$ es $(-2, 2)$.
Soporte de $\varphi = \overline{(-2, 2)} = [-2, 2]$.

Definición 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un dominio con $\Gamma = \partial\Omega$. Se denota el conjunto de funciones $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en $D(\Omega)$ o $C_0^\infty(\Omega)$, es decir:

$$D(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ / \varphi \ \text{ es diferenciable y de soporte compacto en } \Omega\}$$

Definición 2.2. Una distribución o función generalizada es un funcional T definida sobre el espacio $D(\Omega)$, que es continua en el siguiente sentido. Para cada subconjunto compacto $K \in \Omega$ le corresponde $c > 0$ y k entero positivo tal que:

$$|T(\phi)| \leq c \sup_{|j| \leq k, \ x \in K} |D^j \phi(x)|, \quad \forall \phi \in D(\Omega)$$

Definición 2.3. El espacio de distribuciones sobre Ω se define como el dual $D'(\Omega)$ de $D(\Omega)$, es decir

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{R} \ / \ T \text{ es lineal y continua } \}$$

Notación: Usaremos la notación de dualidad $\langle T, \varphi \rangle$ para $\varphi \in D(\Omega)$

Definición 2.4. Una distribución sobre Ω es cualquier aplicación $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

a) T es lineal.

b) T es (secuencialmente) continua, es decir, tal que si $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, entonces $T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.

Al conjunto de todas las distribuciones sobre Ω se le denota $D'(\Omega)$.

Ejemplo 2.4. La función generalizada Delta de Dirac, se define como $\langle \delta x_0, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$, esta función también se le llama función impulso unitario y se puede observar que $\delta x_0 \in D'(\Omega)$.

Una función localmente integrable es una función que es integrable en cualquier conjunto acotado contenido en su dominio de definición y cuya adherencia está contenida también en dicho dominio. La importancia del concepto reside en el hecho de que se ignora el comportamiento de la función en el infinito, y se atiende sólo a su comportamiento local. Este concepto nos servirá para poder definir Derivada Generalizada y Derivada Distribucional Ahora las definiremos:

Funciones localmente integrables

Definición 2.5. Dado un dominio Ω, el conjunto de funciones localmente integrables se define por

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \quad f \in L^1(K), \quad \forall \text{ compacto } K \subset int\Omega\}$$

$$fL^1_{loc}(\Omega) = \{\in L^1(K), \quad \forall \text{ compacto } K \subset \Omega \ (int\Omega, \quad \text{si } \Omega \text{ es arbitrario })\}$$

Recordar que

$$L^1(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \ / \ \int_K |f| < \infty\}$$

Así, se puede decir una funcional lineal $T_f : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi \to \langle Tf, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi d\Omega = \int_{Sop\varphi} f\varphi d\Omega$$

Así, se puede decir que $L^1_{loc} \subset D'(\Omega)$

Notación: Sugeridos por la anterior representación, usaremos también la siguiente notación para cada $T \in D'(\Omega)$, por

$$\langle T, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \int_\Omega T\varphi d\Omega.$$

Usando este espacio podemos presentar el nuevo concepto de derivada.

Definición 2.6. (Derivada generalizada).

Dada una función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, decimos que f tiene **derivada débil o generalizada,** $D^\alpha f$, sii existe una función $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in D(\Omega) \tag{2.4}$$

Si tal g existe, se define $D^\alpha f := g$ en el sentido generalizado.

Definición 2.7. (Derivada Distribucional).

Si $T \in D'(\Omega)$ la derivada de T se define por la siguiente expresión:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall\varphi \in D(\Omega)$$

A continuación el teorema de Green clásico o teorema de la divergencia que nos sirve para poder integrar sobre Ω. Este teorema nos servirá para poder "quitarle" una derivada al lapaciano de u y así llevar el problema clásico a un problema variacional.

Fórmula de Green para funciones de $H^1_0(\Omega)$.

$\forall u, v \in H^1_0(\Omega)$, se tiene:

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}vdx \ , \quad \forall\ i = \overline{1, n}$$

Fórmula de Green clásica a las funciones $D(\Omega)$:

$$\int_\Omega u_{x_i}\ vdx = -\int_\Omega u\ v_{x_i}dx + \int_{\partial\Omega} U_n\ V_n\ \gamma^i ds$$

donde $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \cdots, \gamma^n)$ vector normal.

1. $U = u(x_1, x_2, \cdots, x_3)$

2. $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$
$\Delta u_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} = (u_i)_{x_i x_i}$
$\Delta u_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} (u_i)_{x_j x_j}$
Para $i = 1$

$$\Delta u_1 = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{3} (u_1)_{x_j x_j}$$

3. $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$

4. $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$
Demostraremos que:

$$\int_\Omega \Delta u v dx = - \int_\Omega \nabla u \nabla v, \quad \forall v \in C_0^\infty$$

En efecto:

Hacemos $u = u_{x_i}$

Reemplazando en Teorema de Green clásica o Teorema de divergencia:

$$\int_\Omega u_{x_i} v dx = \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u_{x_i} v \ \gamma^i ds$$

5.

$$\begin{aligned} \nabla u \nabla v &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} (u_i)_{x_i} (v_i)_{x_i} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \nabla u \gamma &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\gamma^1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\gamma^2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\gamma^3 \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\gamma^i = \sum_{i=1}^{3} u_{x_i}\gamma^i \end{aligned}$$

Tomando $\sum_{i=1}^{3}$ tenemos.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{3}\int_\Omega u_{x_ix_i}v\ dx &= -\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega u_{x_i}v_{x_i}\ dx + \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial\Omega} u_{x_i}v\ \gamma^i ds\\
\int_\Omega\sum_{i=3}^{3} u_{x_ix_i}v\ dx &= -\int_\Omega\sum_{i=1}^{3} u_{x_i}v_{x_i}\ dx + \int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3} u_{x_i}v\ \gamma^i ds\\
\int_\Omega \Delta uv\ dx &= -\int_\Omega \nabla u\nabla v\ dx + \int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3} u_{x_i}\ \gamma^i v ds\\
\int_\Omega \Delta uv\ dx &= -\int_\Omega \nabla u\nabla v\ dx + \int_{\partial\Omega} \Delta u\gamma v ds\\
\Rightarrow \int_\Omega \Delta uv\ dx &= -\int_\Omega \nabla u\nabla v\ dx.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.5. Hallar $D^1 f$, si $f(x) = 1 - |x|$, $\Omega = (-1,1)$

Solución. En efecto: para $\forall\varphi \in D(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\langle D^1 f, \varphi\rangle &= -\langle f, D^1\varphi\rangle\\
&= -\int_{-1}^{1}(1-|x|)\varphi'(x)dx\\
&= -\int_{-1}^{1}\varphi'(x)dx + \int_{-1}^{1}|x|\varphi'(x)dx\\
&= -\varphi(x)|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}|x|\varphi'(x)dx\\
&= \int_{-1}^{1}|x|\varphi'(x)dx\\
&= \int_{-1}^{0}|x|\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1}|x|\varphi'(x)dx\\
&= -\int_{-1}^{0}x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1}x\varphi'(x)dx\\
&= -\left[x\varphi|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\varphi(x)dx\right] + \left[x\ \varphi|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\varphi(x)dx\right]\\
&= \int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0\\ -1, & 0 < x < 1\end{cases}$$

Por tanto se concluye que en el sentido distribucional

$$\langle D^1 f, \varphi\rangle = \langle g(x), \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

de donde se puede observar que

$$\frac{df}{dx} = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Ahora veamos conceptos básicos sobre Los espacios de Sóbolev, denotados por $W^{m,p}(\Omega)$ son otro ejemplo de espacios de Hilbert, que se utilizan muy a menudo en el marco de las ecuaciones en derivadas parciales definidas sobre un cierto dominio Ω. Los espacios de Sóbolev generalizan los espacios L^p.

Además en los espacios de Sóbolev generales $W^{m,p}(\Omega)$ se usan ciertas notaciones particulares para cierto tipo de espacios:

- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$
- $H_0^m(\Omega) = \{f \in H^m(\Omega) / \ f|_{\partial\Omega} = 0\}$

2.3 Espacios de Sóbolev

Sea el operador $D_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \cdots, n$. Sea $\alpha \in \mathbb{Z}_0^n$ cualquier $n-$upla de enteros no negativos, sea $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n}$ y $D^\alpha = \prod_{i=1}^n D_i^{\alpha_i}$

Definición 2.8. Sea $1 \leq p < \infty$ y $m \in \mathbb{Z}_0^+$ un entero no negativo, se define

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ , \ \text{ para } |\alpha| \leq m, \}$$

dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha u| & \text{si } \ p = \infty \end{cases}$$

Aquí siempre tratamos a las derivadas en sentido de las distribuciones.

Si $p = 2$, se denota por $H^m(\Omega) = W^{m,2}$ al espacio de Sóbolev que se define por

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)/D^\alpha \in L^2, \quad \text{para } |\alpha| \leq m\}$$

el cual es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha, D^\alpha v); \quad u,v \in H^m(\Omega)$$

donde (u,v) es el producto interno ordinario en L^2, también se denota por $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$.

Sea $D(\Omega)$ el espacio de funciones C^∞ con soporte compacto contenido en Ω. El cerrado de $D(\Omega)$ en la topología de $H^m = W^{m,2}$ será denotado por $W_0^{m,2}$ ó H_0^m cuando $p = 2$ el cual también es un espacio de Hilbert.

Para $m = 1$ y $p = 2$, definimos al espacio $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$

$H^1(\Omega) =$ La clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.

Ellos son ambos espacios de Hilbert con el producto escalar

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}(D_iu, D_iv) = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{n} D_iu \; D_iv \; dx$$

y norma

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|D_iu\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

En $H_0^1(\Omega)$ se define el producto escalar $(\cdot,\cdot)$ por

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

Tenemos la desigualdad de Poincaré.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2} &\leq k\left\{\sum_{i=1}^{n} |D_iu|^2\right\}^{1/2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^2} &\leq k\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)\} \end{aligned}$$

donde k es una constante.

Teorema 2.1. *El espacio $W_p^k(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{v_j\}$, respecto a la norma $\|.\|_{k,p,\Omega}$. Teniendo en cuenta que justo esta norma es una combinación de normas de $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ de derivadas generalizadas, se cumple que para cada $|\alpha| \leq k$, la sucesión $\{D^\alpha v_j\}$ es de nuevo una sucesión de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Se dice que existe $v^\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $\|D^\alpha v_j - v^\alpha\|_{L^p} \longrightarrow 0$, cuando $j \longrightarrow \infty$. En particular $v_j \longrightarrow v^{0,\cdots,0} := v$ en $L^p(\Omega)$. Solo falta verificar que $D^\alpha v$ existe y es igual a v^α.

Para ello, observe que si $w_j \longrightarrow w$ en L^p, entonces para todo $\varphi \in D(\Omega)$, se cumple

$$\int_\Omega w_j(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \int_\Omega w(x)\varphi(x)dx$$

Esto se sigue de la desigualdad de Hölder

$$\|w_j\varphi - w\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \|w_j - w\|_{L^p(\Omega)}\ \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } j \longrightarrow \infty$$

Para mostrar que $D^\alpha = v^\alpha$, debemos verificar la identidad en el sentido distribucional

$$\int_\Omega v^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi^{(\alpha)}dx, \quad \forall\varphi \in D(\Omega)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega v^\alpha\varphi dx &= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega (D^\alpha v_j)\varphi dx \\ &= \lim_{j\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_j\varphi^\alpha dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi^\alpha dx\end{aligned}$$

□

2.3.1 Desigualdades en los Espacios de Sóbolev

En los espacios de Sóbolev existen relaciones de inclusión que se usan muy a menudo, cuando las inclusiones de un espacio en otro son continuas.

Proposición 2.1. *Sea Ω cualquier dominio, $k, m \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $k \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$W_p^m(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$$

inclusión continua y compacta.

Observemos que

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p_{L^p} \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p_{L^p} \right)^{1/p} = \|u\|_{m,p,\Omega}$$

por tanto, tomando la inclusión:

$$\begin{aligned} i : W^{m,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{k,p}(\Omega) \\ u &\longmapsto i(u) = u \end{aligned}$$

la desigualdad anterior significa que :

$$\|i(u)\|_{k,p,\Omega} \leq \|u\|_{k,p,\Omega} \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega)$$

La siguiente proposición nos muestra que si $p > q$, $W^{m,q} \subset W^{k,p}$, esto es claro de entender pues en el primer espacio los elementos que la conforman deben de ser mas veces integrables. A continuación la proposición formal con algunos resultados a partir de esta proposición.

Proposición 2.2. *Sea Ω dominio acotado, $k \in \mathbb{Z}_0^+$, $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces*

$$W^{m,q}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega).$$

observe que para $k = 0$ se tiene la siguiente cadena

$$L^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset L^q(\Omega) \subset \cdots \subset L^p(\Omega) \subset \cdots \subset L^2(\Omega) \subset \cdots \subset L^1(\Omega), \quad 2 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Recordar que:

$$\begin{aligned} (L^{50}(\Omega))' &= L^{49/50}(\Omega) \\ (L^2(\Omega))' &= L^2(\Omega) \end{aligned}$$

donde

$$(L^p(\Omega))' = \{T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R} : T \text{ lineal continua } \},$$

con la notación de dualidad $\langle T, f \rangle = \int_\Omega Tf$ la continuidad significa que se cumple para algún $c > 0$

$$|\langle T, f \rangle| = \left| \int_\Omega Tf \right| \leq c\|f\|_{L^p} \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Si $T \in L^p$, y además $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} = 1$, entonces, la desigualdad de Hölder garantiza:

$$|\langle T, f\rangle| \leq c\|f\|_{L^p} \quad \text{con } c = \|T\|_{L^r}$$

Por otro lado se tiene:

$$\|T\|_{(L^p)'} = \sup_{\|f\|_{L^p}=1} |\langle T, f\rangle|$$

Por tanto

$$\|T\|_{L^r(\Omega)} = \sup_{\|f\|_{L^p}=1} |\langle T, f\rangle|$$

Definición 2.9. Definimos los espacios $W_p^k(\Omega)$ por

$$W_p^k(\Omega) = \text{ la clausura de } D(\Omega) \text{ en } W_p^k(\Omega)$$

Es natural que estos espacios se pueden caracterizar por

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in W_p^k(\Omega) \ / \ u = 0 \text{ sobre } \Gamma = \partial\Omega\}$$

Como $W_p^k(\Omega)$ es espacio de Banach, entonces se cumple que $W_p^k(\Omega)$ es un espacio de Banach.

En particular para $p = 2$ se denota por

$$H_0^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$$

2.3.2 Dualidad en los Espacios de Sóbolev

Sabemos que si V es un espacio de Banach, V' es el espacio dual de V, y la norma en V' se define por:

$$\|T\|_{V'} = \sup_{\|x\|_V} |Tx| = \sup_{\|x\|\leq 1} |Tx| = \sup_{x\in V, x\neq 0} \frac{|Tx|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \langle T, x\rangle$$

Ejemplo 2.6. Para $1 \leq p < \infty$

$$(L^p(\Omega))' = \{T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}, \text{ lineal y continua }\}$$

$$\begin{aligned} T : L^p(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle T, v\rangle = \int_\Omega Tv \end{aligned}$$

Si $f \in L^q(\Omega)$, con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$
por desigualdad de Hölder se cumple

$$|\langle f, v\rangle| \leq \|f\|_{L^q} \, \|v\|_{L^p}, \quad \forall v \in L^p(\Omega).$$

Entonces se cumple que $f \in (L^p(\Omega))'$.

Por otro lado si:

$$T \in (L^p(\Omega))',$$

entonces $\exists c > 0$ tal que:

$$|\langle T, v\rangle| \leq c\|v\|_{L^p(\Omega)} \ , \quad \forall v \in L^p(\Omega)$$

Usando el Teorema de Riesz se tiene en [Brezis pag. 61] que existe $f_T \in L^q(\Omega)$ tal que

$$\langle T, v\rangle = \int_\Omega f_T v$$

y de ello se tiene que

$$L^q(\Omega) = (L^p(\Omega))', \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Definición 2.10. Sea $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $q \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se define el espacio Dual de $W^{k,q}$ por

$$W_q^{-k}(\Omega) = (W_p^k(\Omega))'$$

su norma

$$\|v\|_{-k,q,\Omega} = \sup_{u \in W^{k,p}(\Omega)} = \sup_{u \in W^{k,p}(\Omega)} \frac{|\langle v, u\rangle|}{\|u\|_{k,p,\Omega}}$$

en particular si $p = 2$ tenemos $H^{-k}(\Omega) = (H^k(\Omega))'$

Observación 2.1. Sean V, W dos espacios de Banach tal que $V \subset W$; veamos la relación de V' y W'.

Sea $T \in W'$ se cumple

$$|\langle T, w\rangle| \leq c\|w\|_W, \quad \forall w \in W$$

En particular

$$|\langle T,v\rangle| \leq c\|v\|_W, \quad \forall v \in W. \tag{2.5}$$

entonces $T \in V'$ con la norma de W. Por lo tanto

$$W' \subset V' \text{ con la norma de } W.$$

Si $V \subset W$ es una inyección continua ($\|v\|_W \leq M\|v\|_V$) para algún M, entonces si $T \in V'$, de (1.7) se tendría

$$\langle T,v\rangle| \leq c\|v\|_W \leq cM\|v\|_V, \quad \forall v \in V;$$

Por lo tanto $W' \subset V'$ si $V \subset W$ (inclusión continua).
De las inclusiones de Sóbolev sabemos que

$$D(\Omega) \subset \cdots H^k(\Omega) \subset H^{k-1}(\Omega) \subset \cdots H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

de ello se cumple

$$L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \cdots \subset H^{-k+1}(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega) \subset \cdots \subset D'(\Omega)$$

obteniendo la siguiente cadena de inclusiones continuas para k entero positivo
$D(\Omega) \subset \cdots \subset H^k(\Omega) \subset H^{k-1}(\Omega) \subset \cdots \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \cdots \subset H^{-k+1}(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega) \subset \cdots \subset D'(\Omega)$

El espacio de Hilbert es una generalización del concepto de espacio euclídeo. Esta generalización permite que nociones y técnicas algebraicas y geométricas aplicables a espacios de dimensión dos y tres se extiendan a espacios de dimensión arbitraria, incluyendo a espacios de dimensión infinita. Ejemplos de tales nociones y técnicas son la de ángulo entre vectores, ortogonalidad de vectores, el teorema de Pitágoras, proyección ortogonal, distancia entre vectores y convergencia de una sucesión. El nombre dado a estos espacios es en honor al matemático David Hilbert quien los utilizó en su estudio de las ecuaciones integrales.
Más formalmente, se define como un espacio de producto interior que es completo con respecto a la norma vectorial definida por el producto interior. Ahora definiremos producto interno para luego poder definir formalmente Espacio de Hilbert.

2.4 Espacios de Hilbert

Espacio con Producto Interno

Sea H un espacio vectorial, $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{H}$ es un producto interno si:

i) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in H.$

ii) $\langle x, x \rangle = 0, \quad \text{si} \quad x = 0.$

iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \ \forall x, y \in H, \ \alpha$ escalar.

iv) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$

v) $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle.$

Ejemplo 2.7. $\mathbb{R}^n, \ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Demostraremos que $\langle x, y \rangle$ es un producto interno

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\langle x, x \rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
\text{Como } x_i^2 &\geq 0 \\
\langle x, x \rangle &\geq 0.
\end{aligned}
$$

ii) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= 0\\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= 0\\
\iff x_i^2 &= 0 \text{ para cada } i.\\
\iff |x_i| &= 0 \text{ para cada } i.\\
\iff x_i &= 0 \text{ para cada } i.\\
\iff x &= 0.
\end{aligned}$$

iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha\langle x, y\rangle.$

iv) $\overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{n} y_i, x_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i}\,\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y\rangle.$

v) $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle.$

$$\begin{aligned}
\langle x + z, y\rangle &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + z_i)y_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i + z_i y_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i y_i\\
&= \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle
\end{aligned}$$

Luego : $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio con producto interno.

Ejemplo 2.8. $l^2 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ es un espacio con producto interno, con

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \overline{y}_n$$

Demostraremos que $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \overline{y}_n$ es un producto interno.

i) $\langle x, x\rangle \geq 0$

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n.\overline{x}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \\
\text{Como } |x_n|^2 &\geq 0 \\
\langle x, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \geq 0 \\
\langle x, x\rangle &\geq 0
\end{aligned}$$

ii) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n.\overline{x}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 0 \\
\iff |x_n|^2 &= 0 \text{ para cada } n. \\
\iff x_n &= 0 \text{ para cada } n. \\
\iff x &= 0 \text{ para cada } n.
\end{aligned}$$

iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha x, y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n)\overline{y}_n \\
&= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n)\overline{y}_n \\
&= \alpha\langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
\langle y, x\rangle &= \overline{\sum_{n=1}^{\infty} y_n.\overline{x}_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y}_n.x_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n.\overline{y}_n \\
&= \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

v) $\langle x+z,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle x+z,y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n+z_n)\overline{y}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n.\overline{y}_n + z_n.\overline{y}_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}x_n.\overline{y}_n + \sum_{n=1}^{\infty}z_n.\overline{y}_n \\
&= \langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle.
\end{aligned}$$

Propiedades

Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio con producto interno

i) $\langle z,x+y\rangle = \langle z,x\rangle + \langle z,y\rangle$.

ii) $\langle x,\alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle$.

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle, \quad \forall x,y \in H.$$

Observación 2.2. Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio con producto interno.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \quad \forall x \in H$$

define una norma sobre H.

La norma proviene de un producto interno.

i) $\|x\| \geq 0$

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sqrt{\langle x,x\rangle} \\
\text{se sabe que } \langle x,x\rangle &\geq 0 \\
\Longrightarrow \sqrt{\langle x,x\rangle} &\geq 0 \\
\Longrightarrow \|x\| &\geq 0
\end{aligned}$$

ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

$$\begin{aligned}\|x\| &= 0\\ \sqrt{\langle x,x\rangle} &= 0\\ \iff \langle x,x\rangle &= 0\\ \iff x &= 0\end{aligned}$$

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= \sqrt{\langle \alpha x,\alpha x\rangle}\\ \|\alpha x\| &= \sqrt{\alpha.\overline{\alpha}\langle x,x\rangle}\\ \|\alpha x\| &= \sqrt{|\alpha|^2\langle x,x\rangle}\\ \|\alpha x\| &= |\alpha|\sqrt{\langle x,x\rangle}\\ \|\alpha x\| &= |\alpha|\|x\|\end{aligned}$$

iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle\\ &= \|x\|^2 + 2Re(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} + \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2\\ \|x+y\|^2 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2\\ \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Si la norma proviene de un producto interno entonces:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

La norma $\|\cdot\|$ proviene de un producto interno si cumple la ley del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

- $$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2\end{aligned}$$

- $$\|x-y\|^2 = \langle x-y,x-y\rangle=\|x\|^2-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\|y\|^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Espacio de Hilbert

Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno.
El espacio H es de Hilbert con $\|\cdot\|$ si

i) H es de Banach con $\|\cdot\|$.

ii) $\|\cdot\|$ provenga del producto interno.

2.4.1 Algunos Espacios de Hilbert

1. $\mathbb{R}^n$ con $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

   En efecto:

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \qquad \text{es un espacio de Banach}$$

El producto interno en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
\langle x, x\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \\
\langle x, x\rangle &= \|x\|^2 \\
\|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle}
\end{aligned}$$

   Luego: $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ proviene de un producto interno.

2. $l^2 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ con $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$

   En efecto:

   l^2 es un espacio con producto interno

   $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i;\ x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}; y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2.$

   $(l^2, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$

El producto interno en l^2

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \\
\langle x, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \\
\langle x, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^2 \\
\langle x, x\rangle &= \|x\|^2 \\
\|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ proviene de un producto interno.

Luego:

l^2 es Hilbert con $\|\cdot\|$.

2.4.2 Funciones Lineales

Sea V un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y norma $\|\cdot\|_V$.

Definición 2.11. (Funcional Lineal).

Una funcional lineal en V es una función:

$$\begin{aligned}
L : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto L(u)
\end{aligned}$$

tal que $L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Una funcional lineal es acotada (contínua) si existe $C \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|L(v)| \leq C\|v\|_V \quad \forall v \in V \tag{2.6}$$

Ejemplo 2.9. $V = L_2([a,b])$

$$\begin{aligned} l : L_2([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto l(g) = \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

Veamos:

(*i*) Linealidad:
$$l(\alpha g + \beta f) = \int_a^b [\alpha g(x) + \beta f(x)]dx = \alpha \int_a^b g(x)dx + \beta \int_a^b f(x)dx = \alpha l(g) + \beta l(f)$$
Es acotada, puesto que por la desigualdad de Cauchy-Schawrz

$$\begin{aligned} |l(g)| &= \left| \int_0^1 g(x)dx \right| \leq \int_0^1 |g(x)|dx \leq \|1\| \; \|g\| \\ |l(g)| &\leq c\|g\| \end{aligned}$$

El método variacional es especialmente útil en el estudio de la existencia de soluciones débiles de problemas de contorno no lineales para E.D.O. ó E.D.P., pues permite el uso de herramientas muy potentes del Análisis Funcional.
Se debe de aprender aplicar tal método a problemas de relacionados con E.D.O., donde las dificultades técnicas son más fácilmente superables, para pasar después al caso de E.D.P. Se necesita conocer los espacios de Sóbolev para entender adecuadamente el desarrollo que hacemos seguidamente, asi como tener unas nociones minimas de Cálculo diferencial e integral.

2.5 Método Variacional

1. transformar el problema clásico a un problema débil.

2. Se establece la existencia y unicidad de la solución débil usando el Teorema de Lax-Milgram.

3. Recuperación de la solución clásica, se demuestra que si una solución débil se le suma la regularidad se logra recuperar la solución clásica.

Las formas bilineales son un caso particular de funciones multilineales que tienen diversas aplicaciones. A continuación la definición formal:

Definición 2.12. Sea H un espacio de Hilbert. Se dice que la forma bilineal

$$\begin{aligned} a : H \times H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto a(u,v) \end{aligned}$$

es continua si existe una constante $C > 0$ tal que

$$a(u,v) \leq C\|u\|_H\|v\|_H, \quad \forall u,v \in H,$$

y es $H-$elíptica si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_H^2, \quad \forall u \in H.$$

En caso de existir, C y α son llamadas constantes de continuidad y elipticidad, respectivamente.

En este trabajo hacemos uso del teorema de Lax-Milgram por ser quien garantice la existencia y unicidad de la forma débil de diversas ecuaciones elípticas en derivadas parciales de segundo orden. Su enunciado dice que:

Definición 2.13. Sea $a : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coersiva, entonces existe un único operador $A \in \mathcal{L}(H)$ que verifica

$$(Au,v) = a(u,v) \quad \forall u,v \in H. \tag{2.7}$$

Teorema 2.2. *Sea H un espacio de Hilbert y a una forma bilineal, continua y coersiva. Entonces para cada $f \in H^1$ (f lineal y continua) existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle f,v\rangle \ , \quad \forall v \in H \tag{2.8}$$

además, si a es simétrica, entonces u es caracterizado por la propiedad

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle f,u\rangle = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v\rangle\right\}$$

Demostración.

Sea $f \in H^1$ y sea $v \in H$ el punto asociado de H asociado a f osea $f(v) =< f, v >$, $\forall v \in H$.

Entonces se tiene que de la ecuación (2.8) es equivalente

$$A\widehat{v} = v_f \tag{2.9}$$

Donde A es el operador definido por (2.7), además de la definición (1.12) se tiene que

$$||Av|| \geq \alpha||v||, \quad \forall v \in H.$$

De la ecuación (2.9) se tiene que posee a lo más una solución.

Para demostrar la unicidad veamos el rango de A R(A), que es ala vez cerrado y denso en H.

- Demostrar que R(A) es denso.

  Esto es equivalente a probar que $R(A)^{\perp} = \{0\}$

  Si $v \in R(A)^{\perp}$, entonces $0 = (Av, v) \geq \alpha||v||^2$, de donde $v = 0$.

- Demostrar que R(A) es cerrado.

  Supongamos que $u_n \in H$, para cada $n \geq 1$ y que $Au_n \longrightarrow v$ en H y veamos que en tal caso $v \in R(A)$. Tenemos que:

  $$\alpha||u_n - u_m||^2 \leq (Au_n - Au_m, u_n - u_m) \leq ||Au_n - Au_m||||u_n - u_m||,$$

  de donde $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy y necesariamente existe $u \in H$, tal que $u_n \longrightarrow u$.

  Pero entonces $v = Au$ y en consecuencia $v \in R(A)$. Como queríamos demostrar.

■

Capítulo 3:

Formulación Variacional para el Problema de Dirichlet en los Espacios de Sóbolev

3.1 Problema de Dirichlet Homogéneo Asociado a la Ecuación de Poisson

Dado $f \in L^2(\Omega)$. Hallar u definida en Ω y solución de

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Supongamos que u es suficientemente regular de modo que la ecuación anterior tenga sentido, por ejemplo $u \in H^2(\Omega)$, entendiendo las derivadas en sentido de distribuciones, para esto tomemos una función $v \in H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)/v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$.
Multiplicando la primera ecuación por una función $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando en Ω.

$$\int_\Omega -\Delta uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx \tag{3.2}$$

Utilizando la fórmula de Green

$$\int_\Omega -\Delta uv \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds$$

y sabiendo que $v/\partial\Omega = 0$, tenemos

$$\int_\Omega -\Delta uv \, dx \;=\; \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \tag{3.3}$$

de modo que la ecuación anterior nos queda

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \;=\; \int_\Omega fv \, dx \ , \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.4}$$

esta ecuación tiene sentido aunque u no esté en $H^2(\Omega)$, basta con que $u \in H^1(\Omega)$. Por otro lado, al ser $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ y por las propiedades de $\partial\Omega$ tenemos que $u \in H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto el problema (3.4) recibe el nombre de formulación variacional o débil, como:

$$\begin{cases} \text{Dada } f \in L^2(\Omega), \text{ hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx \ , \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.5}$$

Teorema 3.1. *El problema anterior tiene solución única.*

Para esto utilizaremos el teorema de Lax-Milgran.

$$\text{Sea} \quad a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$a(u,v) \;=\; \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

y

$$L : H_0^1(\Omega) \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$$

definido por:

$$L(v) = \int_\Omega fv \, dx$$

Probemos que $a(u,v)$ así definido cumple que:

I. Es bilineal

II. Continua y

III. H-Elíptica.

I. **Bilineal**:

En efecto: Sea $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(\lambda u + \mu v, w) &= \int_\Omega \nabla(\lambda u + \mu v)\nabla w \; dx = \int_\Omega (\lambda \nabla u + \mu \nabla v)\nabla w \; dx \\ &= \lambda \int_\Omega \nabla u \nabla w \; dx + \mu \int_\Omega \nabla v \nabla w \; dx \\ &= \lambda a(u, w) + \mu a(v, w) \end{aligned}$$

El otro caso se demuestra en forma análoga. Por lo tanto $a(u, v)$ es bilineal.

II. **Continuidad:**

Probaremos que: $|a(u, v)| \leq C\|u\|_{H^1} \; \|v\|_{H^1}, \quad C \geq 0$

La continuidad se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz, en efecto:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx \right| \leq \int_\Omega |\nabla u| \; |\nabla v| \; dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \; dx \right)^{1/2} \\ &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \; \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|_{H_0^1} \; \|v\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

La constante de continuidad es $C = 1$.

III. **H_0^1-Elíptica:**

Probaremos que:

$$a(u, u) \;\; \geq \;\; \alpha \|u\|_{H_0^1}^2$$

La H_0^1-elipticidad se obtiene por la equivalencia de norma en $H_0^1(\Omega)$, por ser Ω acotado, ya que en este caso se verifica la desigualdad de Poincaré, en efecto

$$a(u, u) = \int_\Omega \nabla u \nabla u \; dx = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2$$

Pero $||u||^2_{H_0^1}| \geq 1||u||_{H_0}$

$\Longrightarrow$ $a(u,u) \geq \alpha||u||^2_{H_0^1}$ la constante de H_0^1-elipticidad es $\alpha = 1$.

Finalmente $L : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $L(v) = \int_\Omega f\ v\ dx = \langle f, v\rangle$ es lineal y continua.

(i) L **es lineal:**

En efecto: $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} L(\lambda u + \mu v) &= \int_\Omega f(\lambda u + \mu v)\ dx \\ &= \lambda \int_\Omega fu\ dx + \mu \int_\Omega fv\ dx \\ &= \lambda L(u) + \mu L(v). \end{aligned}$$

Luego L es lineal.

(ii) L **es continua:**

Para $f \in L^2(\Omega)$, probaremos que $|L(v)| \leq C||v||_{H_0^1}$

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left|\int_\Omega f\ v\ dx\right| \leq \int_\Omega |f|\ |v|\ dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{1/2} \\ &= ||f||_{L^2}\ ||v||_{L^2} \\ &\leq C_1\ ||f||_{L^2}.||\nabla v||_{L^2} \quad \text{desigualdad de Poincaré} \\ &= C\ ||\nabla v||_{L^2} = C\ ||v||_{H_0^1}\ , \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Luego L es continuo.

Por tanto de (i) y (ii), L es lineal y continuo.

Observación 3.1. Por lo tanto, como las hipótesis del teorema de Lax-Milgram se verifican, se tiene que el problema variacional tiene única solución $u \in H_0^1$.

Ahora demostramos que una solución del problema fuerte es solución del problema débil (3.5).

Recíprocamente, si $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución del problema débil, entonces podemos recuperar las ecuaciones de la formulación fuerte en el sentido de las distribuciones y el teorema de traza.

En efecto, como $D(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que la ecuación de la formulación débil es cierta $\forall\varphi \in D(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u\ \nabla\varphi\ dx = \int_\Omega f\ \varphi\ dx, \quad \forall\varphi \in D(\Omega) \tag{3.6}$$

que interpretándolo la integral como producto de dualidad entre $D(\Omega)$ y $D'(\Omega)$, equivale a

$$\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} \quad \forall\varphi \in D(\Omega) \tag{3.7}$$

y por definición de derivada en sentido de distribuciones,tenemos

$$\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \langle -\Delta u, \varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in D(\Omega) \tag{3.8}$$

Reemplazando (3.8) en (3.7), tenemos que:

$$\langle -\Delta u, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} \quad \forall\varphi \in D(\Omega)$$

$$\Longrightarrow \langle -\Delta u, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} - \langle f, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = 0$$

por propiedad de producto interno tenemos

$$\Longrightarrow \langle -\Delta u - f, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = 0, \quad \forall\varphi \in D(\Omega).$$

$$\begin{aligned} \text{donde: } \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi dx &= 0, \ \forall\varphi \text{ en } \ D(\Omega) \\ \Longrightarrow -\Delta u - f &= 0, \ \forall\varphi \text{ en } \ D(\Omega) \\ \Longrightarrow -\Delta u &= f, \ \forall\varphi \text{ en } \ D(\Omega) \end{aligned}$$

en particular, como $f \in L^2(\Omega)$ se tiene

$$-\Delta u = f, \quad \text{en} \quad L^2(\Omega)$$

y por las propiedades de las funciones de $L^2(\Omega)$

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega \tag{3.9}$$

Para recuperar las condiciones de contorno se necesita cierta regularidad en la solución débil.

En efecto, si suponemos que $u \in H^2(\Omega)$, tiene sentido integrar por partes en la solución débil (3.6)

$\Delta u \in L^2(\Omega)$; además, como $u \in H^2(\Omega)$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$; $1 \leq i \leq 3$ y por lo tanto se puede definir las trazas de estas funciones $\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\partial\Omega}$, $1 \leq i \leq 3$ pertenecen a $L^2(\partial\Omega)$.

La función $\left.\gamma^i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\partial\Omega}$ es una función de $L^2(\Omega)$ por ser producto de una función de $L(\partial\Omega)$ y otra de $L^2(\Omega)$ y podemos definir la derivada normal.

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} = \nabla u.\gamma = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}\gamma_i \quad \text{en } L^2(\Omega) \tag{3.10}$$

En (3.6), aplicamos el teorema de Green.

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta uv\ dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ ds &= \int_\Omega f\ dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_\Omega -\Delta uv\ dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ ds &= \int_\Omega f\ dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Pero por (3.9) se tenemos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega fvdx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ ds &= \int_\Omega fvdx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ \Rightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ ds &= 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Expresandolo en sentido de distribuciones:

$$\begin{aligned} \langle \nabla un, v \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= 0 \\ \Longrightarrow \langle u\ n, \nabla v \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= 0 \\ \Longrightarrow \int_{\partial\Omega} u\ n\nabla v ds &= 0 \\ \Longrightarrow u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

3.2 Problema de Dirichlet No Homogéneo Asociado a la ecuación de Poisson

Dado $f \in L^2(\Omega)$, hallar u definida en Ω y solución de:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{en } \Omega \\ u = g \ , \quad \text{en } \partial\Omega = \Gamma \end{cases} \tag{3.11}$$

Supongamos que $u \in H^2(\Omega)$ es suficientemente regular de modo que la ecuación anterior tenga sentido.

Para esto tomemos una función *test* $v \in H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)/v = 0 \ \text{ en } \partial\Omega\}$

Ahora multipliquemos la ecuación anterior por una función *test* v e integremos sobre Ω, $v = 0$ en $\partial\Omega$.

$$\int_\Omega -\Delta uvdx = \int_\Omega fvdx \ , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.12}$$

Utilizando la fórmula de Green:

$$\int_\Omega -\Delta uvdx = \int_\Omega \nabla u \nabla vdx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} vds$$

y sabiendo que $v|_{\partial\Omega} = 0$, tenemos

$$\int_\Omega -\Delta uvdx = \int_\Omega \nabla u \nabla vdx \ , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.13}$$

Luego reemplazamos (3.13) en (3.12):

$$\int_\Omega \nabla u \nabla vdx = \int_\Omega fvdx \ , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.14}$$

Vemos que esta ecuación tiene sentido aunque u no esté en $H^2(\Omega)$, basta con que $u \in H_0^1(\Omega)$.

Por tanto (3.15) es el problema variacional o problema débil de (3.14), como:

$$\begin{cases} \text{Dado } f \in L^2(\Omega), \text{ hallar } u \in H^1(\Omega) \ \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla vdx = \int_\Omega fvdx \ , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.15}$$

Vemos que aparentemente el problema (3.15) cumple las condiciones del teorema de Lax-Milgram, es decir que $a(u, v)$ es bilineal, continua y H-elíptica, lo que permitiría asegurar la existencia y unicidad de la solución del problema débil, sin embargo no es cierto, porque no cumple la condición de que ambas funciones u y v pertenescan al mismo espacio.

Entonces, para resolver este inconveniente y que luego cumpla el teorema de Lax-Milgram, tomamos una función cualquiera u_0 que sea igual a la condición de contorno de u, pero en todo el dominio y en la frontera.

Luego definimos una nueva función w como diferencia de u y u_0, de modo que sustituyéndola en el problema débil lograríamos un problema débil de Dirichlet Homogéneo el cual cumpla con las condiciones del Teorema de Lax-Milgram, es decir:

$$
\begin{aligned}
&1.\ u_0 = g \quad \text{en } \Omega \text{ y en } \partial\Omega = \Gamma \\
&2.\ w = u - u_0 = \begin{cases} u - g, & \text{en}\Omega \\ g - g = 0, & \text{en}\Gamma \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad u = w + u_0
\end{aligned}
$$

Ahora si u es solución de la ecuación (3.15), entonces w lo es de la siguiente: Reemplazando u en la formulación débil (3.15).

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(w + u_0)\nabla v dx &= \int_\Omega f.v dx \\
\int_\Omega (\nabla w + \nabla u_0)\nabla v dx &= \int_\Omega f v dx \\
\int_\Omega \nabla w \nabla v dx + \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx &= \int_\Omega f v dx
\end{aligned}
$$

De esta manera hemos trasladado el problema al caso homogéneo, de modo que el problema variacional es:

$$
\begin{aligned}
&\text{Dado } f \in L^2(\Omega), \qquad \text{hallar } w \in H_0^1(\Omega) \ \text{ tal que} \\
&\int_\Omega \nabla w \nabla v \ dx = \int_\Omega f v dx - \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx\ , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

donde $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ con $u_0|_\Gamma = g$

Luego, (3.16) podemos expresarlo de manera compacta como:

$$\left.\begin{array}{ll} a(w,v) = & \displaystyle\int_\Omega \nabla w \nabla v dx \\ L(v) = & \displaystyle\int_\Omega fv\ dx - \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx \end{array}\right\} a(w,v) = L(v)$$

donde,

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{definido por:} \qquad a(w,v) = \int_\Omega \nabla w \nabla v dx$$

y

$$L : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{definido por:} \quad L(v) = \int_\Omega f v dx - \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx$$

Teorema 3.2. *El problema anterior tiene solución única, si cumple las condiciones del teorema de Lax-Milgran*

Demostración. Como $a(w,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla w \nabla v dx$, probaremos que $a(w,v)$ así definido cumple que:

i) Es bilineal

ii) Continua y

iii) H-Elíptica (Coersiva).

i) $a(w,v)$ **es Bilineal**:

En efecto: Sea $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$, tenemos:

$$\begin{aligned} a(w, \lambda u + \mu v) &= \int_\Omega \nabla w \nabla(\lambda u + \mu v) dx \\ &= \int_\Omega \nabla w (\lambda \nabla u + \mu \nabla v) dx \\ &= \int_\Omega \lambda \nabla w \nabla u dx + \int_\Omega \mu \nabla w \nabla v dx \\ &= \lambda \int_\Omega \nabla w \nabla u dx + \mu \int_\Omega \nabla w \nabla v dx \\ \Rightarrow \ a(w, \lambda u + \mu v) &= \lambda a(w,u) + \mu a(w,v). \end{aligned}$$

Luego para la linealidad de la otra componente se demuestra en forma análoga.

Por tanto $a(w,v)$ es bilineal.

ii) $a(w,v)$ **es Continua:**

Probaremos que: $|a(w,v)| \leq C\|u\|_{H_0^1}\ \|v\|_{H_0^1}, \quad C \geq 0$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
|a(w,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla w \nabla v dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla w \nabla v| dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla w||\nabla v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{1/2}, \quad \text{por desigualdad de Cauchy-Schwartz} \\
&= \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)}\right) + \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&= \|w\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \\
\Rightarrow\ |a(w,v)| &\leq \|w\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}.
\end{aligned}
$$

Luego $a(w,v)$ es continua con $C = 1$.

iii) $a(w,v)$ **es H-Elíptica:**

Se obtiene de la definición de norma en $H_0^1(\Omega)$

Probaremos que:

$$
a(w,w) \ \geq\ \alpha\|w\|_{H_0^1}^2
$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
a(w,w) &= \int_\Omega (\nabla w \nabla w) dx = \int_\Omega (\nabla w)^2 dx \\
&= \|\nabla w\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

Luego sabemos que:

$$
\|w\|_{H_0^1}^2 = \|w\|_{L^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2}^2 \tag{3.17}
$$

Pero por la desigualdad de Poincaret: $\exists c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^2} &\leq c\|\nabla w\|_{L^2} \\ \|w\|_{L^2} &\leq c^2\|\nabla w\|_{L^2} \end{aligned}$$

De (3.17) se sigue:

$$\begin{aligned} \|w\|^2_{H^1_0} &\leq c^2\|\nabla w\|^2_{L^2} + \|\nabla w\|^2_{L^2} \\ &\leq (c^2+1)\|\nabla w\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces}\ :\ \frac{1}{c^2+1}\|w\|^2_{H^1_0} &\leq \|\nabla w\|^2_{L^2} = a(w,w) \\ \Longrightarrow a(w,w) &\geq \alpha\|w\|^2_{H^1_0} \end{aligned}$$

Luego $a(w,w)$ es H-elíptica con $\alpha = \dfrac{1}{c^2+1}$ la constante de coersividad.

Finalmente, veamos que:

$$L(v) = \int_\Omega fvdx - \int_\Omega \nabla u_0\ \nabla vdx.$$

sea lineal y continua.

(i) $L(v)$ **es lineal:**

En efecto, sea $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$ y $u, v \in H^1_0(\Omega)$ se sigue

$$\begin{aligned} L(\alpha u + \mu v) &= \int_\Omega f(\alpha u + \mu v)dx - \int_\Omega \nabla u_0\ \nabla(\alpha u + \mu v)dx \\ &= \alpha\int_\Omega fudx + \mu\int_\Omega fvdx - \left(\alpha\int_\Omega \nabla u_0 \nabla udx + \mu\int_\Omega \nabla u_0 \nabla vdx\right) \\ &= \alpha\left[\int_\Omega fudx - \int_\Omega \nabla u_0 \nabla vdx\right] + \mu\left[\int_\Omega fvdx - \int_\Omega \nabla u_0 \nabla vdx\right] \\ &= \alpha L(u) + \mu L(v) \end{aligned}$$

Luego $L(v)$ es lineal.

(ii) $L(v)$ **es continua:**

Para $f \in L^2(\Omega)$ fijo se tiene:

$$L(v) = \underbrace{\int_\Omega fvdx}_{l(v)} - \underbrace{\int_\Omega \nabla u_0\ \nabla vdx}_{k(v)}.$$

Demostraremos que $l(v)$ y $k(v)$ son continuas.

Para $l(v)$:

$$
\begin{aligned}
|l(v)| &= \left|\int_\Omega fv dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |fv| dx \\
&\leq \int_\Omega |f|\ |v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{1/2}, \quad \text{por desigualdad de Cauchy-Schwartz} \\
&= \|f\|_{L^2(\Omega)}\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}\ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{por desigualdad de Poincaret} \\
&= \|f\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \\
&= C\|v\|_{H_0^1}, \quad \text{tomando } C = \|f\|_{H_0^1} \\
\Rightarrow\ |l(v)| &\leq C\|V\|_{H_0^1}
\end{aligned}
$$

Para $k(v)$:

$$
\begin{aligned}
|k(v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u_0 \nabla v| dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u_0|\ |\nabla v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2}, \quad \text{por desigualdad de Cauchy-Schwartz} \\
&= \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}\ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{por desigualdad de Poincaret} \\
&= \|u_0\|_{H_0^1} \|\nabla v\|_{H_0^1}, \quad \text{tomando } k_1 = \|u_0\|_{H_0^1} \\
&= k_1 \|v\|_{H_0^1} \\
\Rightarrow\ |k(v)| &\leq k_1 \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}
$$

Luego $l(v)$ y $k(v)$ son continuas, entonces $L(v) = l(v) - k(v)$ es continua.

Por tanto, como las hipótesis del teorema de Lax-Milgram se verifican, se tiene que el problema variacional (3.16) tiene solución única $w \in H_0^1$, entonces $u = w + u_0$ es solución del problema (3.16).

Pero como la elección de u_0 no es única, tenemos que demostrar la unicidad de u.

Sean u_1, u_2 dos soluciones del problema (3.16), entonces se verifica.

1) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_1 \ \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

2) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_2 \ \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Restando 1) y 2), obtenemos:

$$\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Luego tomando $v = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$, resulta:

$C\|u_1 - u_2\| \leq \|u_1 - u_2\| = \displaystyle\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2).\nabla(u_1 - u_2)dx = 0.$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{H_0^1}^2 &= 0 \quad \text{en } H^1(\Omega), \quad \text{luego} \\ u_1 &= u_2 \quad \text{en } H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Ahora recuperaremos las ecuaciones de la formulación fuerte en el sentido de las distribuciones y el teorema de la traza.

En efecto como $D(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que la ecuación de la formulación débil también es cierta $\forall \varphi \in D(\Omega)$.

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi dx = \int_\Omega f.\varphi dx - \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \tag{3.18}$$

que interpretando la integral sobre Ω como producto interno dual entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$, equivale a:

$$\begin{aligned} \langle \nabla w, \nabla \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle - \langle \nabla u_0, \nabla \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \\ \langle \nabla w, \nabla \varphi \rangle + \langle \nabla u_0, \nabla \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \\ \langle \nabla w + \nabla u_0, \nabla \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \\ \langle \nabla (w + u_0), \nabla \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \\ \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} &= \langle f, \varphi \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Y aplicando la derivada en sentido de las distribuciones tenemos:

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \langle -\Delta u, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} \tag{3.20}$$

Reemplazando (3.20) en (3.19) tenemos

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta u, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= \langle f, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \\
\langle -\Delta u, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} - \langle f, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \\
\Rightarrow \langle -\Delta u - f, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \\
\Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi dx &= 0 \\
\Rightarrow -\Delta u = f \quad &\text{en } L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

y por propiedades de las funciones $L^2(\Omega)$, se tiene:

$$-\Delta u = f \quad \text{en c.t.p. de } \Omega.$$

Para recuperar las condiciones de contorno se necesita cierta regularidad en la solución débil.

En efecto, si suponemos que $u \in H^2(\Omega)$, tiene sentido integrar por partes en la formulación débil (3.16) y $\Delta u \in L^2(\Omega)$, además como $u \in H^2(\Omega)$ entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$; $i = 1, 2$ y por lo tanto se puede definir las trazas de estas funciones $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\partial\Omega}$, $i = 1, 2$ pertenecen a $L^2(\partial\Omega)$.

La función $\left.\gamma^i \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\partial\Omega}$ es función de $L^2(\Omega)$ por ser producto de una función de $L(\partial\Omega)$ y otra de $L^2(\Omega)$ y podemos definir la derivada normal.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \nabla u.\gamma = \left.\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\gamma^i\right|_{\partial\Omega}, \quad \text{en } L^2(\Omega) \tag{3.21}$$

Luego, en (3.18), aplicamos el teorema de Green.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -\Delta w\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n}\varphi ds &= \int_\Omega f\varphi dx - \left(\int_\Omega -\Delta u_0\varphi dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial n}\varphi ds\right) \\
\int_\Omega -\Delta w\varphi dx + \int_\Omega -\Delta u_0\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n}\varphi ds + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial n}\varphi ds &= \int_\Omega f\varphi dx \\
\int_\Omega -(\Delta w + \Delta u_0)\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial u_0}{\partial n}\right)\varphi ds &= \int_\Omega f\varphi dx \\
\int_\Omega -\Delta u\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\varphi ds &= \int_\Omega f\varphi dx \\
\int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\varphi ds &= 0 \\
\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\varphi ds &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \nabla u\, n &= 0 \quad \text{en } \Gamma = \partial\Omega \\
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= 0 \quad \text{en } \Gamma = \partial\Omega \\
\Rightarrow u &= u_0, \quad \text{en } \Gamma = \partial\Omega \\
\text{como, } u_0 &= g, \quad \text{en } \partial\Omega = \Gamma \\
\Rightarrow u &= g, \quad \text{en } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Conclusiones

1. La formulación variacional es una herramienta muy útil que nos va a permitir estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales en un ambiente muy general, y así superar la problemática presentada por los métodos clásicos.

2. La formulación variacional para problemas de Dirichlet en los espacios de Sóbolev es de fácil adaptabilidad a diversas situaciones expuestas de manera parcial en el presente trabajo.

3. En los problemas de ecuaciones diferenciales parciales y en particular el problema de Dirichlet la formulación variacional es la técnica más dominante para su análisis y solución.

4. En la formulación destaca en la recuperación de la solución clásica, basada en demostrar que toda solución fuerte o clásica es una solución débil.

Bibliografía

[1] **A.J.Davies**, The Finite Element Method, An Introducction With Differential Equactions.Second Editión. Oxford University Pressunited States, 2011.

[2] **Barbu, V.**, Partial diferential equations and boundary value problems. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[3] **Brézis H.**, "*Análisis Funcional*", Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[4] **Ciarlet P. G.**, "*The Finite Element Method for Elliptic Problems*", North-Holland, Amster-dam, 1978.

[5] **Evans L.**, "*Partial Differential Equations*", American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.

[6] **Godlewki E. and Raviar P.**, "*Hyperbolic Systems of Conservation Laws*", Mathematiques and Applications, France, 1991.

[7] **P. Krysl.**, Thermal And Stress Analysis Withthe Finite Element Method.Pressure Cooker Press.San Diego, 2010.

[8] **Rudin W.**, "*Análisis Funcional*", Editorial reverte, SA 1979.

[9] **Smoller J.**, "*Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*", Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] **Yosida K.**, "*Fuctional Analisis*", Springer-Velarg, New York, 1965.

[11] **Zimmer R.**, "*Essential Results of Functional Analisis*", Chicago. Lectures in Mathematics Series, 1990.