UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CAUCHY-PEANO PARA DETERMINAR LA EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO DE DEMANDA DE OXÍGENO EN AGUAS SUPERFICIALES

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL
DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Presentada por:

Bach. Mat. JOHN DENIS EDQUÉN FERNÁNDEZ
Bach. Mat. EMERSON OMAR FERNÁNDEZ AGURTO

Asesor:

Mag. Mat. DOLORES SÁNCHEZ GARCÍA

LAMBAYEQUE - PERÚ
2016

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CAUCHY-PEANO PARA DETERMINAR LA EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO DE DEMANDA DE OXÍGENO EN AGUAS SUPERFICIALES.

TESIS PRESENTADA POR

BACH.MAT. JOHN DENIS EDQUÉN FERNÁNDEZ

BACH.MAT. EMERSON OMAR FERNÁNDEZ AGURTO

PARA OBTENER EL TITULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMATICA

ASESOR: MAG. MAT. DOLORES SÁNCHEZ GARCÍA

LAMBAYEQUE-PERÚ

2016

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada "Aplicación del teorema de Cauchy - Peano para determinar la existencia de la solución del modelo matemático de demanda de oxígeno en aguas superficiales." Presentada por el Bachiller Mat. John Denis Edquén Fernández y por el Bachiller Mat. Emerson Omar Fernández Agurto, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Lic. Mat. Henry Quiliche
Presidente del Jurado

Lic. Mat. Marco Peralta Lui
Secretario del Jurado

Lic. Mat. Miguel Baca Ferreyros
Vocal del Jurado

Fecha de defensa: ______________________

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

Título de la Tesis: Aplicación del teorema de Cauchy-Peano para determinar la existencia de la solución del modelo matemático de demanda de oxígeno en aguas superficiales.

Escuela Profesional: Matemática.

Autores:

Bach Mat. John Denis Edquén Fernández.

Bach Mat. Emerson Omar Fernández Agurto

Asesor:

Mag. Mat. Dolores Sánchez García

____

Bach.Mat. John Denis Edquén Fernández

Autor

____

Bach. Mat. Emerson Omar Fernández Agurto

Autor

____

Mag. Mat. Dolores Sánchez García

Asesor

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de tesis en primer lugar a Dios, quien me bendice, guarda y protege todos los días de mi existir.

A mis padres por su amor y comprensión; porque desde niño sembraron en mí la semilla de la responsabilidad y del trabajo esforzado.

A mi esposa Evelyn Yuridia, porque gracias a su paciencia y comprensión hemos logrado alcanzar un triunfo más, porque los dos somos uno y mis logros también son suyos.

A mis queridos hijos Luciano Joaquín y Thiago Mathías, con quienes comparto hoy mis logros, pero anhelo el día en el que ustedes compartan sus logros conmigo.

A mis maestros quienes nunca desistieron de enseñarme, aun sin importar que muchas veces no ponía atención en clase, a ellos que continuaron depositando su esperanza en mi persona.

DENIS

Esta tesis se la dedico:

A Dios por darme la fe, la salud y las fuerzas necesarias para seguir adelante y no desmayar ante los problemas que se fueron presentando en su desarrollo.

A mis padres maravillosos que siempre estuvieron en los momentos más difíciles y con su amor, consejos y comprensión demostraron que nunca perdieron la esperanza que se podía lograr este sueño anhelado.

A mis lindos pequeñitos Mathias y Luana quienes con su tierna mirada llenan mi espíritu de amor y hacen fácil mi caminar.

OMAR

AGRADECIMIENTOS

Nos gustaría que estas líneas sirvieran para expresar nuestro más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo. En especial al Mg Mat. Dolores Sánchez García, asesor de esta investigación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de la misma.

Especial reconocimiento merece la Dra. Gloria María Ortiz Basauri por el interés mostrado en nuestro trabajo y por las importantes sugerencias recibidas pero sobre todo por la motivación y por la confianza que deposito en nosotros.

También nos gustaría agradecer a nuestros queridos profesores de la escuela profesional de Matemática de la UNPRG porque todos han aportado con un granito de arena a nuestra formación profesional.

Para todos ellos: Muchas gracias y que Dios los bendiga.

Introducción

Actualmente la contaminación hídrica es uno de los problemas ambientales más grandes a nivel mundial, ya que la escasez de agua dulce y la creciente contaminación de esta, están haciendo que su uso sea cada vez más dificultoso. Perú no es ajeno a esta problemática y los casos de contaminación en los cuerpos naturales de agua en nuestro territorio, son cada vez más significativos y frecuentes.

En la actualidad está surgiendo en el país una importante corriente de conservación ambiental, es por eso que las universidades están enfocando esfuerzos en la creación de proyectos que permitan obtener niveles razonables de calidad de agua; lo cual ha dado origen al desarrollo y aplicación de una amplia gama de modelos especialmente matemáticos, con el fin de diseñar, dimensionar, aplicar y cumplir planes alternativos para el control y manejo de la calidad de agua.

INDICE GENERAL

Resumen..........8

1. Base Teórica: Términos y Conceptos Básicos
   1.1. Elementos Básicos de Biología..........9
   1.2. Elementos Básicos Matemáticos..........14

2. TEOREMA DE CAUCHY - PEANO
   2.1. Problema de Cauchy..........22
   2.2. Teoremas (Stone - Weierstrass y Arzela - Ascoli)..........25
   2.3. Teorema Cauchy-Peano..........27
   2.4. Teorema de la Unicidad..........30

3. EL MODELO MATEMÁTICO DE DEMANDA DE OXÍGENO EN AGUAS SUPERFICIALES(RÍOS)
   3.1. Procesos que hacen variar la cantidad de oxígeno en el agua..........34
   3.2. Modelación del Sistema DBO – OD..........37
   3.3. Existencia y unicidad de la solución del sistema DBO–OD..........40
   3.4. Solución del sistema DBO–OD..........41

Conclusiones..........43

Sugerencias..........44

Bibliografía..........45

RESUMEN

En este trabajo de tesis se muestra cómo deducir el modelo matemático basado en el sistema OD - DBO (oxígeno disuelto – demanda biológica de oxígeno) de calidad de aguas superficiales, donde se toma a la calidad de agua en un río como un caso particular de estudio. También se presenta como garantizar la existencia de la solución analítica del modelo en mención, aplicando el teorema de Cauchy – Peano.

En el capítulo 1, se presentan las definiciones biológicas y químicas que se utilizarán en el planteamiento del modelo a la vez se presentan las definiciones básicas matemáticas, que constituyen el soporte teórico para los teoremas que se desarrollarán en el capítulo 2.

En el capítulo 2, se mencionan y demuestran los teoremas necesarios que se aplicarán para garantizar la existencia y unicidad de solución del modelo en desarrollo.

En el capítulo 3 se plantea las ecuaciones del modelo, analiza y garantiza la existencia y unicidad de solución del modelo matemático OD - DBO de calidad de aguas superficiales utilizando el teorema de Cauchy – Peano.

"APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CAUCHY - PEANO PARA DETERMINAR LA EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO DE DEMANDA DE OXÍGENO EN AGUAS SUPERFICIALES"

CAPITULO 1: BASE TEORICA:

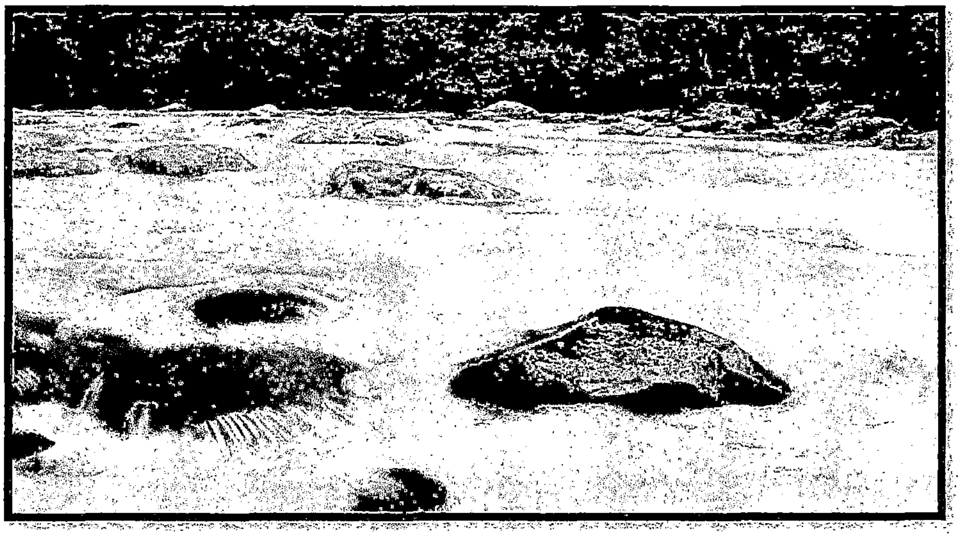
1.1. ELEMENTOS BÁSICOS DE BIOLOGÍA

En esta sección, se definen los conceptos biológicos que se usarán a lo largo de esta tesis.

Desoxigenación: Es un proceso mediante el cual se elimina parte del oxígeno contenido en un cuerpo de agua debido a la vegetación presenté, la actividad microbiológica o a la alta temperatura del agua.

Reaireación: Es la transferencia de oxígeno del aire al agua. Las superficies de agua necesitan de oxígeno para completar su ciclo biológico. Este proceso ocurre de forma natural durante el transcurrir de las corrientes, en zona de rápidos y quebradas la reaireación se produce a mayor velocidad.

La fotosíntesis de las plantas acuáticas también contribuye a la recuperación del oxígeno en los ríos.



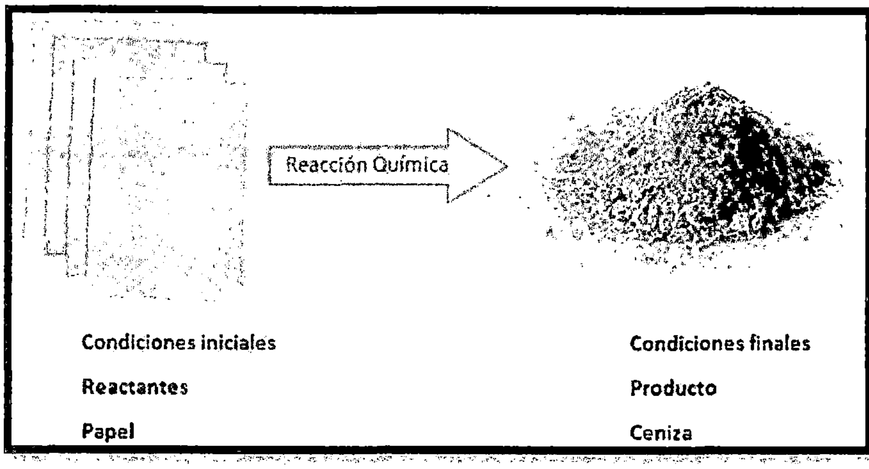
Demanda Biológica de Oxígeno (DBO): El DBO es el parámetro que mide la cantidad de oxígeno que usan los microorganismos (principalmente bacterias y protozoarios) en la degradación (oxidación) de la materia orgánica mediante procesos biológicos aeróbicos.

Si hay una gran cantidad de desechos orgánicos en la masa de agua, implica que habrá una cantidad importante de bacterias presentes trabajando para descomponer la materia orgánica. En este caso la demanda de oxígeno será alta, así que el nivel de DBO será alto. Conforme el desecho es consumido o dispersado en el agua, los niveles del DBO empiezan a bajar.

Oxígeno Disuelto (OD): Es la cantidad de oxígeno que está disuelto en el agua y que es esencial para los ríos y lagos saludables. El nivel de oxígeno disuelto puede ser un indicador de que tanto está contaminada el agua y cuánto soporte puede dar esta agua a la vida vegetal y animal. Generalmente un nivel más alto de oxígeno disuelto indica agua de mejor calidad. Si los niveles de oxígeno disuelto son demasiado bajos, algunos peces y otros organismos no pueden sobrevivir.

Reacción química: Es el proceso mediante el cual unas sustancias (reactivos), por efecto de factores energéticos (bacterias) se transforman en otras nuevas sustancias llamados productos.

$$\underbrace{MO + \text{Bacterias} + O_2}_{\text{Reactantes}} \rightarrow \underbrace{CO_2 + H_2O + \text{Nuevo Microoganismo}}_{\text{Producto}}$$



Constante cinética de reacción

Representa la proporcionalidad entre la velocidad de reacción y las variables que la afectan, fundamentalmente la concentración.

Calidad de agua

La calidad del agua no es una característica absoluta, sino que es más un atributo definido socialmente en función del uso que se le piense dar al líquido; cada uso requiere un determinado estándar de calidad. Por esta razón, para evaluar la calidad del agua es necesario considerar el contexto del uso probable que tendrá.

Las estimaciones de disponibilidad del agua no reflejan por completo el problema de las necesidades de este recurso, ya que en la mayor parte del mundo la calidad del agua está lejos de ser la adecuada. De acuerdo con la Organización Mundial de la Salud (OMS), 1 100 millones de personas no tienen acceso a una fuente de agua potable mejorada, particularmente en áreas rurales donde no existe posibilidad de que el agua tenga un tratamiento previo que mejore su calidad y posibilite su uso general.

La calidad del agua está afectada por diversos factores como los usos del suelo, la producción industrial y agrícola, el tratamiento que se le da antes de ser vertida nuevamente a los cuerpos de agua, y la cantidad misma en ríos y lagos, ya que de ésta depende su capacidad de purificación

Constante de Desoxigenación: Indica la velocidad con que se consume el oxígeno disuelto en el tramo de estudio, como consecuencia de la descomposición de la materia orgánica que contiene y se calcula con el objeto de conocer la cantidad de oxígeno que perderá el cuerpo.

Constante de Reaireación: Este coeficiente nos proporciona la tasa de reaireación del agua mediante el intercambio con la atmósfera. Depende de la temperatura, velocidad de la corriente, profundidad y tipo de lecho. Su determinación tiene como objetivo conocer la cantidad de oxígeno disponible que tendrá el cuerpo en un tramo determinado, para oxidar la materia orgánica.

1.2. ELEMENTOS BÁSICOS MATEMATICOS

Iniciaremos recordando las siguientes definiciones y notaciones:

Al producto de n copias del espacio vectorial $\mathbb{R}$, lo denotaremos por $\mathbb{R}^n$, es decir:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots\ldots \times \mathbb{R}}_{n-veces}$$

Diremos que $\boldsymbol{x}$ es un elemento de $\mathbb{R}^n$, lo cual denotaremos por $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, si y solamente si $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, .., \boldsymbol{x_n}); \boldsymbol{x_i} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{i} = 1, .., n$

ESPACIOS MÉTRICOS

Para definir proximidad entre puntos de una imagen digital, usaremos el concepto de **distancia**, la cual pasamos a definir.

Definición 1: Sean X un conjunto cualquiera no vacío y $\boldsymbol{d}$ una función real $\boldsymbol{d}: X \times X \to \mathbb{R}$, que cumple las siguientes propiedades:

1. $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in X$
2. $d(x,y) = 0$, si y solamente si $x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x, y, z \in X$

A la función $\boldsymbol{d}$ se le llama **métrica,** y al par (X, d) se le llama **espacio métrico.**

Ejemplo: Sea $X = \mathbb{R}^n$ para $x = (x_1, x_2, .., x_n), y = (y_1, y_2, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$, definamos $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, por $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$, luego $(\mathbb{R}^n, d)$ es un espacio métrico.

<u>**Demostración:**</u> sean $x = (x_1, x_2, .., x_n), y = (y_1, y_2, .., y_n), z = (z_1, z_2, .., z_n) \in \mathbb{R}^n$

1. Como $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, .., n \to x_i - y_i \in \mathbb{R}$

$$\to |x_i - y_i|^2 \geq 0, i = 1,2, \ldots, n$$

$$\to \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \geq 0$$

$$\to d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}\geq 0$$

$$\to d(x,y)\geq 0$$

2. $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}=0\to \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2=0$

$$\to |x_i-y_i|^2=0, i=1,2,\dots,n$$

$$\to |x_i-y_i|=0, i=1,2,..,n$$

$$\to x_i-y_i=0, i=1,2,..,n$$

$$\to x_i=y_i, i=1,2,..,n$$
$$\to x=y$$

3. $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|^2}=d(y,x)\to d(x,y)=d(y,x)$

4. Usaremos, la llamada desigualdad de Hölder: sean $p>1, q>1: {}^1/_p+{}^1/_q=1$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\leq (\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q)^{1/q}$$

Como: $|x_i-z_i|\leq |x_i-y_i|+|y_i-z_i|, i=1,2,..,n$

$$\to (|x_i-z_i|)^2\leq (|x_i-y_i|+|y_i-z_i|)^2, i=1,2,..,n$$

$$\to \sum_{i=1}^{n}(|x_i-z_i|)^2\leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|+|y_i-z_i|)^2$$

$$\to (\sum_{i=1}^{n}(|x_i-z_i|)^2)^{1/2}\leq \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|+|y_i-z_i|)^2\right)^{1/2} \dots.(*_1)$$

De otro lado, aplicando la desigualdad de Hölder, en las siguientes desigualdades:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|[|x_i - y_i| + |y_i - z_i|]$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2})(\sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)^2)^{1/2} \dots (*_2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|[|x_i - y_i| + |y_i - z_i|]$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2\right)^{1/2})(\sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)^2)^{1/2} \dots (*_3)$$

Ahora como podemos escribir:

$$(|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)^2 = |x_i - y_i|[|x_i - y_i| + |y_i - z_i|] + |y_i - z_i|[|x_i - y_i| + |y_i - z_i|]$$

De donde en la desigualdad anterior, sumando sobre $i = 1,2,..,n$ y usando las ecuaciones $(*_2)$ y $(*_3)$, se obtiene:

$$(\textstyle\sum_{i=1}^{n}(|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)^2)^{1/2} \leq (\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2)^{1/2} + (\sum_{i=1}^{n}|y_i - z_i|^2)^{1/2} \qquad (*_4)$$

Usando la ecuación $(*_4)$, en la ecuación $(*_1)$:

$$(\sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i|)^2)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2\right)^{1/2}$$

De donde: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Por lo tanto d es una métrica y $(\mathbb{R}^n, d)$ es un espacio métrico.

Para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, se define

$$\|\boldsymbol{x}\|_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\boldsymbol{x_1}^2 + \boldsymbol{x_2}^2 \dots + \boldsymbol{x}_n^2}$$

Llamada **norma euclidiana** en $\mathbb{R}^n$. Por comodidad escribiremos simplemente $\|.\|$ en vez de $\|.\|_n$

Dado $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, r > 0, r \in \mathbb{R}$, definimos:

Definición 2 (CONJUNTO ABIERTO): Diremos que un subconjunto $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **Abierto,** si para todo un $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}\ \exists\ r > 0: B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) \subset \boldsymbol{D}$.

Ejemplo: Todo bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

Demostración: sea $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, mostremos que la bola abierta $B(\boldsymbol{x}_0, r)$ es un conjunto abierto, elijamos $0 < R = r - \|x - \boldsymbol{x}_0\| < r$

Ahora verifiquemos que $B(x, R) \subset B(\boldsymbol{x}_0, r)$

Sea $y \in\ B(x, R) \to \|y - x\| < R$

De otro lado:

$$\|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < R + \|x - x_0\|$$

$$\|y - x_0\| < R + \|x - x_0\| = r - \|x - \boldsymbol{x}_0\| + \|x - \boldsymbol{x}_0\|$$

Luego

$$\|y - x_0\| < r \to y \in\ B(x, r)$$

Entonces $B(x, R) \subset B(\boldsymbol{x}_0, r)$

Por lo tanto $B(\boldsymbol{x}_0, r)$ es un conjunto abierto.

Como consecuencia del hecho anterior se tiene que todo intervalo abierto $(a; b)$ en $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.

Definición 3 (CONJUNTO CERRADO): Diremos que un subconjunto $\boldsymbol{F} \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **Cerrado,** si su complemento: $\boldsymbol{F}^c = \mathbb{R}^n - \boldsymbol{F}$ es un conjunto abierto.

Ejemplo: Todo bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado.

__Demostración:__ sea $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, mostremos que la bola cerrada $B[\boldsymbol{x}_0, r]$ es un conjunto abierto, es decir que su complemento $\mathbb{R}^n - B[\boldsymbol{x}_0, r]$ es un conjunto abierto.

Sea $x \in \mathbb{R}^n - B[\boldsymbol{x}_0, r]$, mostraremos que existe $R > 0$ tal que la bola

$B(x, R) \subset \mathbb{R}^n - B[\boldsymbol{x}_0, r]$

Puesto que $x \notin B[\boldsymbol{x}_0, r] \to \|x - \boldsymbol{x}_0\| > r$, elijamos $R = \|x - \boldsymbol{x}_0\| - r > 0$

Mostremos que para este R se cumple que: $B(x, R) \subset \mathbb{R}^n - B[\boldsymbol{x}_0, r]$

Sea $y \in B(x, R) \to \|y - x\| < R$

De otro lado:

$$\|x - x_0\| = \|x - y + y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|y - x_0\| < R + \|y - x_0\|$$

$$\|x - x_0\| < R + \|y - x_0\| = \|x - \boldsymbol{x}_0\| - r + \|y - \boldsymbol{x}_0\|$$

Entonces

$$-r + \|y - \boldsymbol{x}_0\| > 0 \to \|y - \boldsymbol{x}_0\| > r \to y \notin B[\boldsymbol{x}_0, r]$$

Es decir

$$y \in \mathbb{R}^n - B[\boldsymbol{x}_0, r] \to B(x, R) \subset \mathbb{R}^n - B[\boldsymbol{x}_0, r]$$

Luego $\mathbb{R}^n - B[\boldsymbol{x}_0, r]$ es un conjunto abierto, por lo tanto $B[\boldsymbol{x}_0, r]$ es un conjunto cerrado.

Como consecuencia del hecho anterior se tiene que todo intervalo cerrado $[a; b]$ en $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado.

Definición 4 (CONJUNTO COMPACTO): Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio métrico y $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$, diremos que $\boldsymbol{A}$ es **compacto** si y solamente si toda sucesión convergente en $\boldsymbol{A}$ posee una subsucesion convergente.

Definición 5 (CONJUNTO ACOTADO): Diremos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **acotado**, si existe una constante $\gamma > 0$ tal que: $\|x\|_n \leq \gamma; \forall\, x \in \boldsymbol{A}$

En espacios métricos de dimensión finita la definición de compacidad es equivalente a: $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$ Es compacto si y solamente si $\boldsymbol{A}$ es un conjunto cerrado y acotado.

Definición 6 (CONTINUIDAD): Sea $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^n$, diremos que una función $f\colon \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{dom(f)}$, si:

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$, tal que para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{dom(f)}$ se cumple:

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|_n < \delta \to \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})\|_m < \varepsilon$$

Ejemplo: La función identidad $I_d\colon \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $I_d(x) = x$ es una función continua, basta elegir $\delta = \varepsilon > 0$, ya que:

$$|I_d(x) - I_d(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon = \delta$$

Definición 7 (CONVERGENCIA UNIFORME): Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio métrico y sea una función $f\colon \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ .Diremos que una sucesión de funciones $\boldsymbol{f_n}\colon \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$, **converge uniformemente** hacia $\boldsymbol{f}$ si y solamente si:

Dado $\varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon) > 0\ tal\ que\ \ si\ n \geq N(\varepsilon) \to |\boldsymbol{f_n}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < \varepsilon,\ \forall\, \boldsymbol{x}$

Ejemplo: Sea $\boldsymbol{f_n}\colon [0;1[\to \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{f_n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^n}$ **converge uniformemente** hacia la función idénticamente nula $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, puesto que $\mathbf{lim}_{n\to+\infty} \boldsymbol{x^n} = \boldsymbol{0}$ en $[0;1[$

Nota: denotaremos por $\boldsymbol{C(K)}$) al conjunto de las funciones continuas definidas sobre el conjunto compacto $\boldsymbol{K} \subset \mathbb{R}^n$, es decir:

$$\boldsymbol{C(K)} = \{f\colon \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f\ \ es\ continua\}$$

Sobre $\boldsymbol{C(K)}$ se define la métrica:

$$d_\infty(f,g) = Sup_{x\in K}|f(x) - g(x)| = Max_{x\in K}\ |f(x) - g(x)|$$

Definición 8 (UNIFORMEMENTE EQUICONTINUA): Diremos que una familia de funciones continuas $\mathcal{F} = \{f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$ es **uniformemente equicontinua**; Si $\forall \mathcal{E} > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que:

$$d(x_1, x_2) < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \mathcal{E}, \forall x_1, x_2 \in E, \forall\, f \in \mathcal{F}$$

Definición 9 (UNIFORMEMENTE ACOTADA): Diremos que una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$ es **uniformemente acotada** en $\boldsymbol{E}$ si existe una constante $M > 0$ tal que: $|f(x)| \leq M; \forall\, x \in E, \forall\, f \in \mathcal{F}$

La siguiente propiedad presenta el ejemplo estándar de familia equicontinua. Constituye el criterio más útil para localizar dichas familias.

Propiedad: Sea $(f_i)_{i\in J}, f_i: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una familia de funciones diferenciables , $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto y convexo. Si la familia de las derivadas $(Df_i)_{i\in J}$ esta uniformemente acotada en E. Entonces la familia $(f_i)_{i\in J}$ es equicontinua en E.

Usemos la propiedad anterior para mostrar un ejemplos de una familia de funciones equicontinua.

Ejemplo: Sea $E = [0; 1]; J = \mathbb{N};\ f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$, de donde $f_n'(x) = \cos(nx)$
Y como, se sabe que: $|\cos(nx)| \leq 1;\ \forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}$, por propiedad anterior se tiene que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia equicontinua.

Definición 10 (ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA (EDO)):
Es una ecuación que adopta la forma siguiente:
$E\left(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0, x \in I \subset \mathbb{R} \dots\dots\dots (1.3.1)$

Donde $y^{(n)} = \frac{dy^n}{dx^n}$

En la ecuación (1.3.1) se observa que la mayor derivada es la n-esima derivada, por esta razón se le llama **ecuación diferencial de orden $\boldsymbol{n}$.**

Al **exponente** de la mayor derivada en la ecuación (1.3.1) se le llama **grado** de la **EDO.**

Ejemplo: $x'(t) = f(x,t),\ (x,t)\ en\, E \subset \mathbb{R}^2$ es una EDO de primer orden y de primer grado.

Definición 11 (Solución de Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)): Diremos que una función $\varphi: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una solución de la EDO dada en la ecuación $(1.3.1)$ si y solamente si φ satisface la ecuación $(1.3.1)$; es decir:

$$E\left(x, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)}\right) = 0, x \in I$$

Ejemplo: La función $\varphi(x) = e^{Kt}$ es solución de la EDO $x'(t) = Ke^{Kt}$; puesto que $\varphi'(t) = Ke^{Kt}$

CAPITULO 2: TEOREMA DE CAUCHY – PEANO

PROBLEMA DE CAUCHY: Dada una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el llamado Problema de Cauchy consiste en hallar una función $x(t)$ que verifique:

$$\begin{Bmatrix} x'(t) = f(x,t), \ (x,t) \ en \ \mathbb{R}^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

En lo que sigue determinaremos condiciones sobre $f(x,t)$ para que el problema de Cauchy dado por la ecuación (1.2) tiene una única solución.

El siguiente resultado sirve para demostrar que una función continua definida en un compacto en $\mathbb{R}^n$ puede ser aproximada por polinomios.

TEOREMA 1: Para una función continua f definida sobre el intervalo$[0,1]$ la sucesión de polinomios

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Converge uniformemente hacia la función f

Demostración; denótese por $r_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ de donde se tiene que

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k(x) f\left(k/n\right)$$

Luego:

$$B_n(\mathbf{1})(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$$

$$B_n(\boldsymbol{x})(x) = \sum_{k=0}^{n} (k/n)\, r_k(x) = \sum_{k=}^{n} \left(k/n\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} = x$$

$$B_n(x^2)(x) = \sum_{k=0}^{n} ({}^{k}/_{n})^2 \, r_k(x) = \frac{x}{n} \sum_{k=}^{n} k \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{n-1}{n} x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} + \frac{x}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j}$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x$$

Con lo cual se muestra que el teorema se cumple si $f = \mathbf{1}, f = x; f = x^2$

A continuación se muestra que el teorema es válido para una función continua f arbitraria.

Por ser el intervalo $[0,1]$ es un compacto en $\mathbb{R}$ entonces es uniformemente continua en $[0,1]$, luego dado $\varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$:

$|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sean $x \in [0,1] y\, n \in \mathbb{N}$ cualesquiera y considérese los conjuntos

$$I_1 = \left\{k: 0 \le k \le n; \left|x - {}^{k}/_{n}\right| \le \delta\right\}, I_2 = \left\{k: 0 \le k \le n; \left|x - {}^{k}/_{n}\right| > \delta\right\}$$

Entonces, usando el hecho que $\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = 1$ se tiene

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (f(x) - f({}^{k}/_{n}) r_k(x))\right|$$

$$\le \sum_{k \in I_1} \left|f(x) - f\left({}^{k}/_{n}\right)\right| r_k(x)$$

$$+ \sum_{k \in I_2} \left|f(x) - f\left({}^{k}/_{n}\right)\right| r_k(x) \le \varepsilon + \sum_{k \in I_2} \left|f(x) - f\left({}^{k}/_{n}\right)\right| r_k(x)$$

Sea M una cota superior de la función f en $[0;1]$

De la definición de I_2 se tiene que $k \in I_2 \leftrightarrow 1 < \frac{1}{\delta^2}(x - {}^{k}/_{n})^2$

Usando estos hechos se tiene que

$$\sum_{k\in I_2} \left|f(x) - f\left({}^{k}/_{n}\right)\right| r_k(x) \leq \tfrac{2M}{\delta^2} \sum_{k\in I_2} \left(x - {}^{k}/_{n}\right)^2 r_k(x)$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - {}^{k}/_{n}\right)^2 r_k(x) = \frac{2M}{\delta^2}\left(x^2 - 2x^2 + \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x\right) = \frac{2M}{\delta^2 n}x(1-x)$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2 n}$$

Ahora como $\frac{1}{n} \to 0, cuando\ n \to \infty$ se tiene que $\frac{2M}{\delta^2 n} \leq \frac{2M}{\delta^2}\varepsilon$ independiente de x

De lo cual sin pérdida de generalidad se tiene

$$\sum_{k\in I_2} \left|f(x) - f\left({}^{k}/_{n}\right)\right| r_k(x) \leq \varepsilon$$

Por lo tanto $\left|\sum_{k=0}^{n} (f(x) - f({}^{k}/_{n}) r_k(x))\right| \leq \varepsilon$, de lo cual se deduce que la sucesión $B_n(f)$ converge uniformemente hacia f.

Ahora se generaliza hacia el compacto $[a, b]$

Sea $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y defínase la función

$$\varphi(x) = (b - a)x + a$$

De donde: $f(x) = g(\varphi(x))$.Si $B_n(f)$, entonces $B_n(g) = B_n(f) o \varphi^{-1}$ converge uniformemente a g y de donde se obtiene

$$B_n(g)(x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} f((b-a)\,{}^{k}/_{n} + a)\,(x-a)^k (b-x)^{n-k}$$

Teorema 2 (Teorema de Stone - Weierstrass):

Cada función continua definida sobre un subconjunto compacto de R^n puede ser aproximado uniformemente en el compacto por un polinomio.

<u>**Demostración:**</u> Se define $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, donde cada f_i es una función real de variable real, usando el **teorema 1.** se concluye la demostración del teorema.

Teorema 3 (Teorema de Arzela - Ascoli):

Sea K un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $C(K)$ .Suponga que $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua; es decir: $\forall \mathcal{E} > 0, \exists \delta > 0$ tal que:

$$d(x_{1,}x_{2,}) < \delta \rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \mathcal{E}, \forall f \in \mathcal{F}$$

Entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $C(K)$.

<u>**Demostración:**</u> Supóngase que $\exists \varepsilon > 0$ y Q un subconjunto infinito de $\mathcal{F}$ tales que si $f, g \in Q, con\, f \neq g \rightarrow d_{\infty}(f, g) > \varepsilon$

Lo que permite definir la función $\varphi: QxQ \rightarrow K$ dada por $\varphi(f, g) = x$, con x cualquier elemento tal que $d(f(x), g(x)) > \varepsilon$

Considérese $Q_1 = Q$ y elegimos cierta $f_1 \in Q_1$

Inductivamente se construye Q_i un subconjunto infinito de Q y sea $f_i \in Q_i$ como K es compacto, existe $g_n \in Q_i - \{f_i\}$ con $g_n \neq g_m$,

$n \neq m, x_i \in K$ Tales que $a_n^i := \varphi(f_i, g_i) \rightarrow x_i$

Como $\mathcal{F}$ es uniformemente continua $\exists \delta > 0$ independiente de x_i tal que si $d(x, x_i) < \delta \rightarrow d(f(x), f(x_i)) < {}^{\varepsilon}/_{4}, \forall f \in K$

Además, existe n_0 tal que si $n \geq n_0 \rightarrow d(a_n^i, x_i)$

Defínase: $Q_{i+1} = \{g_n : n \geq n_0\}$entonces Q_{i+1} es un subconjunto infinito de Q_i , además dada $g_n \in Q_{i+1}$ se tiene: $d(f_i(a_n^i), g_{n(}a_n^i) > \varepsilon$

$$d(f_i(a_n^i), f_i(x_i)) < {}^{\varepsilon}/_4$$

$$d(g_n(a_n^i), g_n(x_i)) < {}^{\varepsilon}/_4$$

Luego

$$d\left(f_i(a_n^i), g_n(a_n^i)\right) \leq d\left(f_i(a_n^i), f_i(x_i)\right) + d(f_i(x_i), g_n(x_i)) + d\left(g_n(x_i), g_n(a_n^i)\right)$$

De donde se obtiene: $d(f_i(x_i), g_n(x_i)) \geq \frac{\varepsilon}{2}$

En particular, si $j > i \rightarrow f_j = g_n$ para alguna $g_n \in Q_{i+1}$ y luego $d\left(f_i(x_i), f_j(x_j)\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}$

Considérese $P_i = (x_i, f_j(x_j)) \in B := \cup_{x \in X} \{x\} \times \mathcal{F}(x)$

Si $d(x_i, x_j) < \delta \rightarrow d\left(f_i(x_i), f_j(x_j)\right) \geq d\left(f_j(x_j), f_i(x_j)\right) - d\left(f_i(x_j), f_i(x_i)\right) > \frac{\varepsilon}{4}$

Luego $d(P_i, P_j) \geq min\{\delta, {}^{\varepsilon}/_4\}$ lo que prueba que $\overline{B}$ no es compacto, lo cual no puede ocurrir, con lo cual el teorema queda demostrado.

El siguiente teorema garantiza la solución del problema (1.2) sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$

TEOREMA DE CAUCHY-PEANO(O TEOREMA DE PEANO): Sea $\mathcal{R}$ un subconjunto compacto en $\mathbb{R}^2$ y $f: \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua sobre $\mathcal{R}$, entonces existe una única solución de la ecuación (1.2), definida en el intervalo $I = [-\alpha, \alpha]$, donde $0 < \alpha = Min\left\{a, {}^{b}/_{M'}\right\}$,

Con $M \geq Max\{|f(x,t)| : (x,t) \in \mathcal{R}\}$

Demostración, Por hipótesis f es una función continua en el subconjunto compacto $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^2$, luego usando el Teorema de Stone-Weierstrass existe una sucesión de funciones polinomiales $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $f_m \to f$ uniformemente en $\mathcal{R}$; es decir: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M_0 > 0$ tal que:$\forall m \geq M_0$

$$|f_m(x,t) - f(x,t)| < \varepsilon, \forall\, (x,t) \in \mathcal{R} \qquad (*_1)$$

Si se escribe:

$f_m(x,t) = f_m(x,t) - f(x,t) + f(x,t)$, entonces usando la desigualdad triangular y la desigualdad $(*_1)$ se obtiene:

$$|f_m(x,t)| < \varepsilon + N, \forall\, (x,t) \in \mathcal{R}, \forall m \geq M_0 \qquad (*_2)$$

Si se elije $M' > N \to \exists \varepsilon_1 > 0 \; tal\; que \; M' > \varepsilon_1 + N$

Si en $(*_2)$, se toma $\varepsilon = \varepsilon_1$ se tiene que:

$$|f_m(x,t)| < \varepsilon_1 + N < M', \forall\, (x,t) \in \mathcal{R}, \forall m \geq M_0$$

Considérese el Problema de Cauchy:

$$\begin{Bmatrix} u'(t) = f_m(x,t), \; (x,t) \; en \; \mathbb{R}^2 \\ u(0) = u_0 \end{Bmatrix} \qquad ((1.2)')$$

$\forall m \geq M_0$ Se cumplen las hipótesis del teorema de Picard y por lo tanto admite una única solución dada por:

$$\varphi_m: [-\alpha, \alpha] \to [x_0 - b, x_0 + b]$$

Obteniéndose así una sucesión $(\varphi_m)_{m\geq M_0} \subseteq C[-\alpha,\alpha]$ con

$$\varphi_m(t) = u_0 + \int_0^t f_m(\varphi_m(s),s)ds$$

La sucesión $(\varphi_m)_{m\geq M_0}$ satisface las hipótesis del teorema de Arzela-Ascoli, como se muestra a continuación:

$(\boldsymbol{\varphi_m})_{\boldsymbol{m\geq M_0}}$ **Es acotada:** dado $t \in [-\alpha,\alpha]$ se tiene:

$$|\varphi_m(t)| = \left|u_0 + \int_0^t f_m(\varphi_m(s),s)ds\right| \leq |u_0| + \int_0^t |f_m(\varphi_m(s),s)|\, ds$$

De donde se obtiene:

$$|\varphi_m(t)| \leq |u_0| + M'|t| \leq |u_0| + M'\alpha \leq |u_0| + b$$

Es decir:

$$|\varphi_m(t)| \leq |u_0| + b, \forall\, t \in [-\alpha,\alpha], \forall m \geq M_0$$

De lo cual se deduce:

$$\|\varphi_m\|_{C[-\alpha,\alpha]} \leq |u_0| + b, \forall m \geq M_0$$

Por lo tanto: $(\varphi_m)_{m\geq M_0}$ es ACOTADA.

$(\boldsymbol{\varphi_m})_{\boldsymbol{m\geq M_0}}$ **Es equicontinua:** dados $t_0, t \in [-\alpha,\alpha]$ se tiene:

$$|\varphi_m(t) - \varphi_m(t_0)| = \left|\int_0^t f_m(\varphi_m(s),s)ds - \int_0^{t_0} f_m(\varphi_m(s),s)ds\right|$$
$$= \left|\int_{t_0}^t f_m(\varphi_m(s),s)ds\right|$$

De donde:

$$|\varphi_m(t) - \varphi_m(t_0)| \leq M' |t - t_0|$$

Luego dado $\varepsilon > 0$ basta elegir: $\delta = {}^{\varepsilon}/_{M'} > 0$ tal que si: $t_0, t \in [-\alpha, \alpha]$ y $|t - t_0| < \delta$ entonces se tiene que: $|\varphi_m(t) - \varphi_m(t_0)| < \varepsilon, \forall \varphi_m \in \mathcal{F}$

Por lo tanto φ_m es equicontinua.

Ahora usando el teorema de Arzela-Ascoli

$\exists una\ subsucesion\ (\varphi_{k_m})_{k_m \in \mathbb{N}}$ de $(\varphi_m)_{m \geq M_0}$ convergente en $C[-\alpha, \alpha]$, es decir $\exists \varphi \in C[-\alpha, \alpha]$ tal que

$$\varphi_{k_m} \to \varphi$$

Uniformemente en $[-\alpha, \alpha]$ nótese que $f_{k_m} \to f$ uniformemente en

$[x_0 - b, x_0 + b] \times [-\alpha, \alpha]$

De donde se obtiene: $f_{k_m} \circ (\varphi_{k_m}, Id) \to f \circ (\varphi, Id)$ uniformemente en $[-\alpha, \alpha]$

De otro lado como

$$\varphi_{k_m}(t) = u_0 + \int_0^t f_{k_m}(\varphi_{k_m}(s), s) ds\ \forall m \geq M_0, \forall t \in [-\alpha, \alpha]$$

Haciendo que: $m \to +\infty$ se obtiene:

$$\varphi(t) = u_0 + \int_0^t f(\varphi(s), s)\, ds\ \forall t \in [-\alpha, \alpha]$$

Es decir φ satisface ((1.2)´) y por lo tanto φ es la solución buscada.

TEOREMA (UNICIDAD): Bajo las mismas hipótesis del teorema de Cauchy - Peano, si el problema (1.2) tiene solución, ella es única.

Demostración, Sea $\psi(t) = u_0 + \int_0^t f(\psi(s), s)\, ds$, otra solución del problema (1.2)

Luego como $\varphi; \psi$ son soluciones del problema (1.2), se tiene que:

$$|(\varphi(s), s) - (\varphi(0), 0)| \leq N \; y \; |(\psi(s), s) - (\psi(0), 0)| \leq N$$

Si $\delta > N$ entonces:

$$|(\varphi(s), s) - (\varphi(0), 0)| < \delta \;\; y \;\; |(\psi(s), s) - (\psi(0), 0)| < \delta \qquad (*)$$

De otro lado si se escribe:

$$f(\varphi(s), s) - f(\psi(s), s) = f(\varphi(s), s) - f(\varphi(0), 0) + f(\psi(0), 0) - f(\psi(s), s)$$

Ya que $\varphi(0) = u_0 = \psi(0)$ por ser ambas funciones soluciones del problema (1.2), de donde usando desigualdad triangular e integrando se obtiene:

$$\begin{aligned} &\int_0^t |f(\varphi(s), s) - f(\psi(s), s)|\, ds \\ &\qquad \leq \int_0^t |f(\varphi(s), s) - f(\varphi(0), 0)|\, ds \\ &\qquad + \int_0^t |f(\psi(s), s) - f(\psi(0), 0)|\, ds \end{aligned}$$

Ahora usando las desigualdades dadas en $(*)$, y la hipótesis que la función f es continua sobre la región $\mathcal{R}$, se obtiene:

$$\int_0^t |f(\varphi(s), s) - f(\psi(s), s)|\, ds \leq 2|t|\epsilon \qquad (**)$$

De otro lado, usando $(**)$:

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &= \left| \int_0^t f(\varphi(s), s) - f(\varphi(0), 0)\, ds - \int_0^t f(\psi(s), s) - f(\psi(0), 0)\, ds \right| \\ &= \left| \int_0^t f(\varphi(s), s) - f(\psi(s), s) \right| ds \leq 2N\epsilon \end{aligned}$$

Es decir:

$$0 \leq |\varphi(t) - \psi(t)| \leq 2N\epsilon, \forall\varepsilon > 0$$

De donde se obtiene:

$$\|\varphi - \psi\|_{C[-\alpha.\alpha]} = 0 \rightarrow \varphi(t) - \psi(t) = 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha]$$

$$\rightarrow \varphi(t) = \psi(t), \forall t \in [-\alpha, \alpha]$$

Por lo tanto la solución del problema (1.2) es única.

OBSERVACIONES:

i) Por construcción $\varphi \in C[-\alpha, \alpha]$

ii) $\varphi' = f(\varphi(t), t) \rightarrow \varphi' \in C[-\alpha, \alpha]$

iii) De $(\boldsymbol{i})$ y $(\boldsymbol{ii})$ se tiene que $\varphi \in C^1[-\alpha, \alpha]$

El Teorema de Cauchy – Peano y la solución de un P.V.I

Sea el siguiente problema de valor inicial (P.V.I)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x;t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Considere $f: \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua, con $a \leq x \leq b$, entonces el problema de valor inicial (P.V.I) tiene solución en el intervalo $I = [-\alpha; +\alpha]$, con $\alpha = Min\left\{a; \frac{b}{M}\right\}$ donde $M \geq Max\{|f(x,t)|; (x;t) \in \mathcal{R}\}$.

Solución:

$\frac{dx}{dt} = f(x;t)$ entonces $dx = f(x;t)dt$

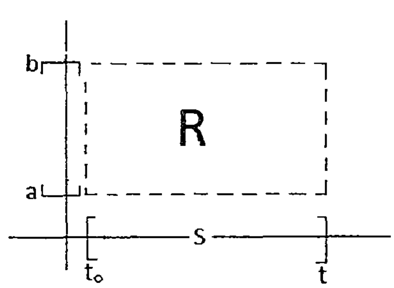
$$\int_{t_0}^{t} dx = \int_{t_0}^{t} f(x;s)ds$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(x;s)ds$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x;s)ds$$

Si $f: \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ entonces $\exists \int_{t_0}^{t} f(x;s)ds$; $(x;s) \in \mathcal{R}$

Nótese que $s \in [t_0; t] \subset \mathbb{R}$



Ejemplo:

Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + t^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

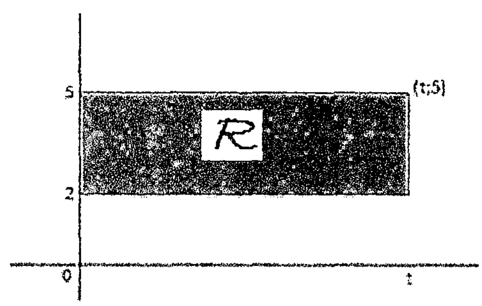
Solución:

$f(x;t) = x^2 + t^2$ ("f" es continua puesto que es una función polinómica en $\mathbb{R}^2$)

Así tenemos que si: $a = 2$; $b = 5$; $t_0 = 0$; $t > 0$

$$Max|f(x;t)| = Max|x^2 + t^2|$$

$$(x;t) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x;t) \in [2;\ 5]x[0;\ t]$$



Los valores máximos se buscan en los extremos por que la función es creciente.

Se tiene que el valor máximo lo obtenemos en el punto $(t;5)$ entonces $M = 25 + t^2$

$\alpha = Min\left\{2;\ \frac{5}{25+t^2}\right\}$ por lo tanto tenemos que $\alpha = \frac{5}{25+t^2}$

$$I = \left[-\frac{5}{25+t^2};\ \frac{5}{25+t^2}\right]$$

Si $t = 5$ entonces estamos garantizando la existencia y unicidad del P.V.I en el intervalo $I = \left[-\frac{1}{10};\ \frac{1}{10}\right]$

CAPITULO 3: EL MODELO MATEMÁTICO DE DEMANDA DE OXÍGENO EN AGUAS SUPERFICIALES (RÍOS)

1) PROCESOS QUE HACEN VARIAR LA CANTIDAD DE OXÍGENO EN EL AGUA

En un cuerpo de agua se produce y a la vez se consume oxígeno. La producción de oxígeno está relacionada con la fotosíntesis de algas y otras plantas acuáticas, mientras que el consumo dependerá de la respiración de las bacterias presentes durante la descomposición de sustancias orgánicas.
También puede intercambiarse oxígeno con la atmósfera por difusión o mezcla turbulenta(rápidos).

A continuación se muestra la interpretación matemática de dichos procesos

A. Descomposición de la materia orgánica:

La tasa de cambio con que los microorganismos descomponen la materia biodegradable es proporcional a la cantidad de materia orgánica presente en ese instante.

$$\begin{pmatrix}\textbf{\textit{Velocidad de desaparición}}\\ \textbf{\textit{de materia orgánica}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\textbf{\textit{Cantidad de materia orgánica}}\\ \textbf{\textit{disponible}}\end{pmatrix}$$

Matemáticamente se escribe como:

$$\frac{dC_{DBO}}{dt}=-K_1C_{DBO} \qquad (3,1)$$

Dónde:

- ✓ C_{DBO} : Concentración de la demanda biológica de oxígeno.
- ✓ K_1 : Constante cinética de reacción.

B. DESOXIGENACIÓN.

La cantidad de oxígeno disuelto en agua (OD) es uno de los indicadores utilizados para determinar la salud de un río, cuando el OD disminuye prevalecen factores nocivos como lodos flotantes, gases fétidos y burbujeos.

La rapidez con que se consume el OD está ligada en forma directa con la rapidez de desaparición de materia orgánica.

$$\begin{pmatrix} \textbf{\textit{El cambio en la concentración}} \\ \textbf{\textit{de oxígeno disuelto}} \\ \textbf{\textit{con respecto al tiempo}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textbf{\textit{Velocidad de desaparición}} \\ \textbf{\textit{de materia orgánica}} \end{pmatrix}$$

Matemáticamente se escribe así:

$$\frac{dC_{OD}}{dt} = \frac{dC_{DBO}}{dt} = -K_1 C_{DBO}$$

$$\frac{dC_{OD}}{dt} = -K_1 C_{DBO} \qquad (3,2)$$

Dónde:

- ✓ C_{DBO} : Concentración de la demanda biológica de oxígeno.
- ✓ C_{OD} : Concentración de oxígeno disuelto.
- ✓ K_1 : Constante cinética de reacción.

C. Reaireación:

El ritmo al que se recupera el oxígeno es proporcional a la diferencia entre el actual nivel actual de OD en el río en cualquier punto y el valor de saturación de OD. Esta diferencia se denomina déficit de oxígeno.

$$\begin{pmatrix} \textbf{\textit{La velocidad de oxigenación}} \\ \textbf{\textit{del río en cada instante}} \end{pmatrix} = (\textbf{\textit{Deficit de oxígeno}})$$

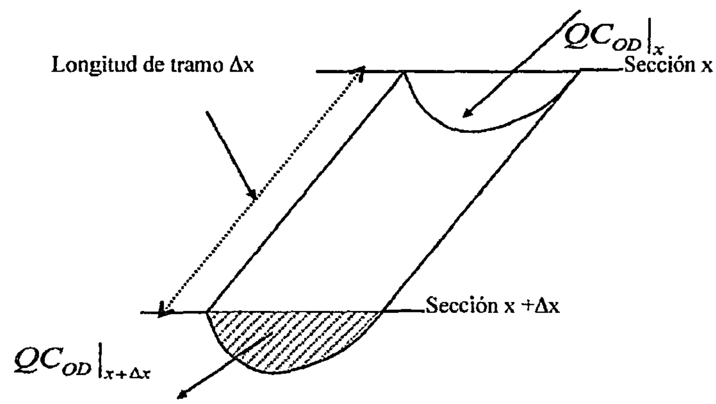
Matemáticamente se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{dC_D}{dt} = -K_1(C_S - C_{OD}) \qquad (3,3)$$

Dónde:

- ✓ C_D : Deficiencia de oxígeno en el agua.
- ✓ C_{OD} : Concentración de oxígeno disuelto.
- ✓ C_S : Constante de oxígeno disuelto saturado en el agua.

Kiely (1999), expresa la concentración de OD en términos de la deficiencia de oxígeno, es decir $C_D = (C_S - C_{OD})$, considerando que cuando un residuo biodegradable se vierte a un curso de agua consume oxígeno, el cual sólo es renovado por la reaireación atmosférica. De tal forma que la dinámica del sistema DBO – OD se representa como sigue:



2) Modelación del Sistema DBO – OD:

Considerando un volumen de control de un río con entradas y salidas como el que se muestra en la Figura 1. Se hace el balance de materia alrededor del volumen de flujo: (Acumulación)=(Entrada) - (Salida) + (Desoxigenación) - (Reaireación)

$$\frac{dC_{OD}}{dt}\Delta V = QC_{OD}|_X - QC_{OD}|_{X+\Delta X} + r_{desoxigenación}\Delta V - r_{reaireación}\Delta V \qquad (4)$$

Dónde:

- $C_{OD}|$: Concentración de oxígeno disuelto.
- $\Delta V = A\Delta X$: Incremento de volumen de longitud ΔX.

En la ecuación (4) reemplazamos $\Delta V = A\Delta X$:

$$\frac{dC_{OD}}{dt}A\Delta X = QC_{OD}|_X - QC_{OD}|_{X+\Delta X} + r_{desoxigenación}A\Delta X - r_{reaireación}A\Delta X \qquad (5)$$

Dividimos la ecuación (5) por $A\Delta X$ y teniendo en cuenta que en un estado estable

$\frac{dC_{OD}}{dt} = 0$ se tiene:

$$\frac{QC_{OD}|_X}{A\Delta X} - \frac{QC_{OD}|_{X+\Delta X}}{A\Delta X} + \frac{r_{desoxigenación}A\Delta X}{A\Delta X} - \frac{r_{reaireación}A\Delta X}{A\Delta X} = 0$$

$$\frac{QC_{OD}|_X - QC_{OD}|_{X+\Delta X}}{A\Delta X} + r_{desoxigenación} - r_{reaireación} = 0 \qquad (6)$$

Tomando el límite cuando $\Delta X \to 0$ y sustituyendo las respectivas velocidades de Desoxigenación y reaireación respectivamente tenemos:

$$\lim_{\Delta X\to 0}\left[\left(\frac{1}{A}\right)\frac{QC_{OD}|_X - QC_{OD}|_{X+\Delta X}}{A\Delta X}\right] + K_1C_{DBO} - K_2C_{OD} = 0 \qquad (7)$$

$$-\frac{1}{A}.\frac{d}{dx}(QC_{OD}) = K_1C_{DBO} - K_2C_{OD}$$

$$\frac{1}{A}.\frac{d}{dx}(QC_{OD}) = -K_1C_{DBO} + K_2C_{OD} \quad (8)$$

Consideramos:

- El flujo de entrada $Q = Cte$

$$\frac{Q}{A}.\frac{d}{dx}(C_{OD}) = -K_1C_{DBO} + K_2C_{OD} \quad (9)$$

Aplicando regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}(C_{OD}) = \frac{dC_{OD}}{dt}.\frac{dt}{dx} \quad (\propto)$$

Además sabemos que el tiempo de residencia es de la forma :

$$t = \frac{V}{Q}; \quad \text{donde} \quad V = AX$$

$$t = \frac{AX}{Q} \quad ; \quad \text{entonces} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{A}{Q} \quad (\beta)$$

Reemplazamos **(β)** en **($\propto$):**

$$\frac{d}{dx}(C_{OD}) = \frac{dC_{OD}}{dt}.\frac{A}{Q} \quad (\theta)$$

Ahora reemplazamos **(θ)** en la ecuación (9):

$$\frac{Q}{A}.\left(\frac{dC_{OD}}{dt}.\frac{A}{Q}\right) = -K_1C_{DBO} + K_2C_{OD}$$

Simplificando términos se tiene que:

$$\frac{dC_{OD}}{dt} = -K_1C_{DBO} + K_2C_{OD} \quad (\gamma)$$

Teniendo en cuenta que:

$$C_D = (C_S - C_{OD})$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d(C_D)}{dt} = \frac{d}{dt}(C_S - C_{OD})$$

$$\frac{d}{dt}C_D = -\frac{d}{dt}C_{OD}$$

Reemplazando en (γ)

$$-\frac{dC_D}{dt} = -K_1C_{DBO} + K_2C_D$$

$$\frac{dC_D}{dt} = K_1C_{DBO} - K_2C_D \tag{10}$$

Resolviendo la ecuación (3,1)

$$\frac{dC_{DBO}}{dt} = -K_1C_{DBO}$$

$$\frac{dC_{DBO}}{C_{DBO}dt} = -K_1dt$$

$$ln(C_{DBO}) = -K_1t + C_1$$

$$ln\left(\frac{C_{DBO}}{C_1}\right) = -K_1t \tag{11}$$

$$C_{DBO} = C_1e^{-K_1t} \tag{12}$$

Hallando la constante de integración, para $t = 0$, se tiene que $C_{DBO} = K_1C_{DBO_0}$

$$\frac{C_{DBO}}{e^{-K_1t}} = C_1$$

$$e^{K_1t}K_1C_{DBO} = C_1$$

$$coeficiente\ de\ dexosigenación. K_1C_{DBO} = C_1$$

$$K_1C_{DBO_0}e^{K_1t} = C_1 \tag{13}$$

Sustituimos la ecuación (13) en la ecuación (γ)

$$\frac{dC_{OD}}{dt} = K_1C_{DBO_0}e^{K_1t} - K_2C_D \tag{14}$$

Modelo DBO – OD

3) Existencia y unicidad de la solución del Sistema DBO – OD.

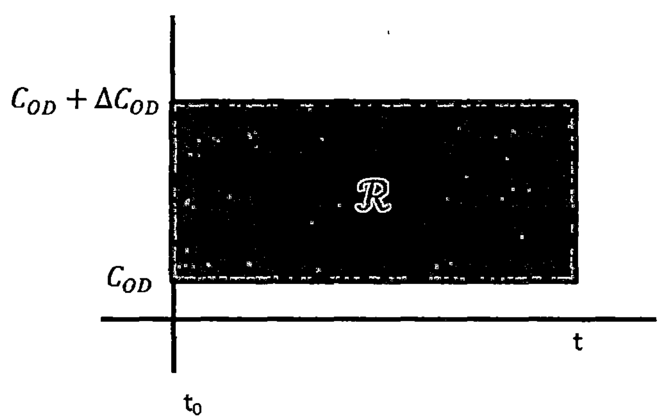
Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dC_{OD}}{dt} = K_1 C_{DBO_0} e^{K_1 t} - K_2 C_D \\ C_{OD}(t_0) = C_{S_0} - C_{D_0} \end{cases} \qquad (*)$$

Se tiene que $f(x,t) = f(C_{OD}, t) = K_1 C_{DBO_0} e^{K_1 t} - K_2 C_D$, es una función continua la cual depende del C_{OD} y del tiempo.

Para $t = 0$ obtenemos la condición inicial $x(t_0) = C_{OD}(t_0) = C_{S_0} - C_{D_0}$.

Se grafica la región $[C_{OD}\ ;\ C_{OD} + \Delta C_{OD}]\ x\ [t_0\ ; t]$ donde está definida la función.



En la región $\mathcal{R}$ se tiene que $f(C_{OD}, t) = K_1 C_{DBO_0} e^{K_1 t} - K_2 C_D$ es continua y posee un máximo en $(C_{OD} + \Delta C_{OD}\ ;\ t) \in \mathcal{R}$, con $C_{OD} \leq x \leq C_{OD} + \Delta C_{OD} \in \mathcal{R}$, bajo estas condiciones se cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy – Peano, entonces el problema de valor inicial $(*)$ tiene solución en el intervalo $I = [-\alpha; +\alpha]$, con

$\alpha = Min\left\{C_{OD}; \frac{C_{OD}+\Delta C_{OD}}{M}\right\}$ donde $M \geq Max\{|f(C_{OD}, t)|; (C_{OD}, t) \in \mathcal{R}\}$.

Bajo las mismas hipótesis del teorema de Cauchy - Peano, si el problema (1.2) tiene solución, ella es única.

Por lo tanto se garantiza la existencia y la unicidad de la solución problema de valor inicial **del Sistema DBO – OD**

4) Solución del Sistema DBO – OD.

La solución de la ecuación (14) con la condición inicial:

$$t = 0 \quad ; \quad C_D = C_{D_0} = C_{OD}(t_0) = C_{S_0} - C_{D_0}$$

Es del tipo:

$$C_{OD} = Ae^{-\int P(t)dt} + e^{-\int P(t)dt} \int e^{\int P(t)dt} f(t)dt$$

Mostrados la solución analítica de la ecuación (14) :

Dónde:

$$P(t) = K_2$$

$$f(t) = K_1 C_{DBO_0} e^{-K_1 t}$$

$$C_{OD} = Ae^{-\int K_2 dt} + e^{-\int K_2 dt} \int e^{\int K_2 dt} K_1 C_{DBO_0} e^{-K_1 t} dt$$

Integrando los primeros términos tenemos:

$$C_{OD} = Ae^{-K_2 t} + e^{-K_2 t} \int e^{K_2 t} K_1 C_{DBO_0} e^{-K_1 t} dt$$

Reordenando:

$$C_{OD} = Ae^{-K_2 t} + e^{-K_2 t} K_1 C_{DBO_0} \int e^{(K_2 - K_1)t}\, dt$$

Integrando tenemos:

$$C_{OD} = Ae^{-K_2 t} + e^{-K_2 t} \frac{K_1 C_{DBO_0}}{K_2 - K_1} e^{(K_2 - K_1)t} \tag{15}$$

Ahora evaluamos la condición inicial para encontrar la constante de integración.

$$C_D = A + \frac{K_1 C_{DBO_0}}{K_2 - K_1}$$

$$\therefore A = C_{D_0} - \frac{K_1 C_{DBO_0}}{K_2 - K_1}$$

Sustituyendo en la ecuación (14) y reordenando adecuadamente se tiene la solución de la ecuación (14)

$$C_{OD} = \frac{K_1 C_{DBO_0}}{K_2 - K_1}\left(e^{-K_1 t} - e^{-K_2 t}\right) + C_{D_0} e^{-K_2 t} \qquad (16)$$

CONCLUSIONES

- El modelo matemático de la demanda biológica de oxígeno en un río usando ecuaciones diferenciales ordinarias es tal como se muestra en la ecuación.

$$\frac{dC_{OD}}{dt} = K_1 C_{DBO_0} e^{K_1 t} - K_2 C_D$$

- Mediante el teorema de Cauchy Peano se concluye que el modelo DBO – OD posee solución, tal como se muestra en la ecuación.

$$C_{OD} = \frac{K_1 C_{DBO_0}}{K_2 - K_1}(e^{-K_1 t} - e^{-K_2 t}) + C_{D_0} e^{-K_2 t}$$

SUGERENCIAS

- A la solución analítica encontrada (16) se le puede implementar un algoritmo matemático que permiten encontrar los valores numéricos de las constantes obtenidas en cada proceso natural para cada río en particular.

Bibliografía

[1] Castells E.; Tratamiento y Valorización Energética de Residuos , España ,2012.

[2] Di Toro Dominic M.; Thomann Robert V.; O'Connor Donald J: Preliminary Model of Potomac estuary Phytoplankton. J. Environ. Eng. Div. ASCE 100(SA3):699-715, 1974.

[3] Gil Rodríguez M: Depuración de Aguas Residuales: Modelización de Procesos de Lodos Activos, España ,2006.

[5] Garduño, Carvajal: fundamentos de la Modelación Matemática en Biología, México, 1985.

[6] O'Neil P. Advanced Engineering Mathematics, Wadsworth, California, 1991.

[7] Ramalho, R.S: Tratamiento de aguas residuales, Editorial Reverte, Barcelona, 1993.

[8] Royden, H.L., Real Analysis, the MacMillan Company, New York 1971.