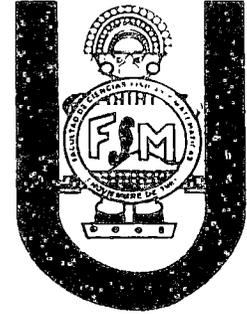




**UNIVERSIDAD NACIONAL  
"PEDRO RUIZ GALLO"**  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS  
Y MATEMÁTICAS



**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**

**SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON  
CON CONDICIONES DE FRONTERA NO HOMOGÉNEA  
UTILIZANDO EL MÉTODO DE GALERKIN**

# **TESIS**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

**Presentado por:**

**Bach. Mat. Farroñan Santisteban Alvaro**

**Asesor:**

**Lic. Mat. Reupo Vallejos Raúl Eduardo**

**Lambayeque - Peru**

**2015**



UNIVERSIDAD NACIONAL  
"PEDRO RUIZ GALLO"  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON  
CON CONDICIONES DE FRONTERA NO HOMOGÉNEA  
UTILIZANDO EL MÉTODO DE GALERKIN**

Tesis

Para optar el título profesional de  
Licenciado en Matemáticas

presentado por:

Bach. Mat. Farroñan Santisteban Alvaro

Asesor

Lic. Mat. Reupo Vallejos Raúl Eduardo

Lambayeque – Perú

2015

# Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

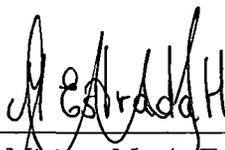
## Escuela Profesional De Matemática

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “Solución de la Ecuación de Poisson con condiciones de Frontera no Homogénea Utilizando el Método de Galerkin”, presentado por el Bach. Mat. Farroñan Santisteban Alvaro en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas



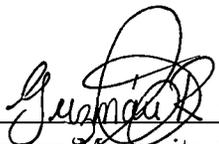
---

Dra. Iris Margarita Tejada Romero  
Presidente del Jurado



---

Lic. Mat. Miriam María Estrada Huancas  
Secretario del Jurado



---

Mag. Carmen Margarita Guzmán Roldán  
Vocal del Jurado

Fecha de defensa: 10/12/2015

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Escuela Profesional de Matemática

**“Solución de la Ecuación de Poisson  
con condiciones de Frontera no Homogénea  
utilizando el Método de Galerkin ”**



---

Lic. Mat. Reupo Vallejos Raúl Eduardo

Asesor



---

Bach. Mat. Farroñan Santisteban Alvaro

Autor

Lambayeque – Perú

2015

## **Agradecimiento**

Al asesor Lic. Mat. Raul Eduardo Reupo Vallejos,  
por la paciencia y dedicacion en el desarrollo y la  
culminacion de la presente.

## **Dedicatoria**

A mis padres Alejandro y Maria Cristina por todo su sacrificio y esfuerzo que hicieron al darme la herencia mas grande del mundo como es la educacion. A mi hermana Elsa y hermano Wilmer por su constante apoyo moral e incondicional.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Conocimientos Previos</b>	<b>8</b>
1.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales . . . . .	8
1.1.1. Definición de Ecuación Diferencial Parcial . . . . .	8
1.2. Tipos de ecuaciones diferenciales parciales . . . . .	9
1.2.1. Clasificación de las EDP de Segundo Orden . . . . .	10
1.2.2. Solución de la Ecuación Diferencial Parcial . . . . .	10
1.2.3. Solución Aproximada de la Ecuación Diferencial Parcial . . . . .	11
1.2.4. Funcional . . . . .	11
1.3. Algunos Teoremas Integrales del Cálculo Vectorial . . . . .	12
1.4. Teorema de Lax - Milgram . . . . .	16
1.5. Formulación Variacional: Pesos Residuales . . . . .	17
1.6. Formulación Variacional del Problema de Valor de Contorno . . . . .	18
1.6.1. Método de Pesos Residuales . . . . .	18
1.7. Aproximación de los Problemas Variacionales . . . . .	23
1.7.1. Aproximación usando Pesos Residuales . . . . .	23
1.8. Método de Galerkin . . . . .	24
<b>2. Formulación Funcional de la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera</b>	<b>26</b>

Índice general	II
<hr/>	
2.1. Operador Diferencial . . . . .	26
2.2. Operador Autoadjunto y Definido Positivo . . . . .	29
2.3. Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera no Homogénea . . . . .	32
2.3.1. Formulación de la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera no Homogénea, utilizando el método de Galerkin . . . . .	34
<b>3. Aplicación del Método de Galerkin</b>	<b>36</b>
3.1. Ejemplos Aplicativos . . . . .	37
<b>Conclusiones</b>	<b>48</b>
<b>Sugerencias</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>50</b>

---

# Resumen

El método de Galerkin es uno de los métodos de pesos residuales que ayudan a obtener una solución aproximada para problemas con condiciones de frontera y condiciones iniciales, del tipo que se presentan en problemas de ingeniería, física y matemática.

La mayoría de problemas en matemáticas, física, economía, biología, etc, se modelan a través de ecuaciones diferenciales parciales, y en particular se trabaja con una ecuación de Poisson.

Utilizando el método de Galerkin se logra obtener una ecuación de menor orden que la ecuación en estudio; y esto nos lleva simplemente a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

Finalmente en la presente investigación se mostrará una alternativa para encontrar una solución aproximada de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogénea, utilizando el método de Galerkin, de una manera mas sencilla desarrollando simplemente sistemas de ecuaciones lineales algebraicas.

# Abstract

The Galerkin method is one method of waste pesos to help obtain an approximate solution for problems with conditions border and initial conditions, the type that occur in engineering problems, physics and mathematics.

Most problems in mathematics, physics, economics, biology, etc., are modeled by partial differential equations, in particular working with a Poisson equation.

Using the Galerkin method is possible to obtain an equation of lower order that the equation under consideration; and this leads us simply to solve a system of linear algebraic equations.

Finally in this investigation it will show an alternative to find an approximate solution of Poisson's equation with inhomogeneous boundary conditions, using the Galerkin method, in a more simple way just developing systems of linear algebraic equations.

# Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales, son de fundamental importancia para el modelamiento de fenómenos naturales. Esta amplia y práctica utilidad justifica el esfuerzo que muchos matemáticos han hecho para crear esta teoría y el que otros continúan haciendo a fin de resolver problemas originados en esta área.

En la actualidad las ecuaciones diferenciales parciales tienen varias aplicaciones a distintas ramas de la ciencia tales como Física, Química, Biología, Ingeniería, etc.

Sabemos que en el mundo real existen fenómenos; ya sean físicos, económicos, biológicos, etc, que son modelados a través de ecuaciones diferenciales parciales y para encontrarles solución existen métodos analíticos tales como separación de variables, series de Fourier, ecuaciones integrales, etc; las cuales nos permiten encontrar las soluciones a dichas ecuaciones.

Algunas veces las ecuaciones diferenciales que ayudan a modelar los distintos fenómenos en estas ciencias, como por ejemplo la Conducción del Calor en un medio continuo, Flujo de un fluido ideal irrotacional, Flujo de un fluido a través de un medio poroso, Pequeñas deformaciones de una membrana bajo carga lateral, entre otros, no son tan sencillas solucionarlas por los métodos analíticos; es por ello que se tiene que buscar algunos métodos numéricos para encontrar una solución aproximada a dichas ecuaciones.

Para establecer una descripción cuantitativa de un problema físico, en primer lugar es necesario plantear un sistema de ecuaciones diferenciales (ordinarias o en derivadas parciales) válidas en cierta región o dominio y sujetas a determinadas condiciones iniciales y de borde.

En segundo lugar, se necesita resolver el sistema planteado; las mayores dificultades surgen en esta instancia, ya que sólo las ecuaciones más simples pueden ser resueltas en forma exacta.

Con el propósito de salvar estas dificultades, es necesario replantear el problema matemático dándole una forma puramente algebraico que involucre solamente operaciones básicas. Para lograr este objetivo, el problema continuo debe ser discretizado, entiéndase como tal el procedimiento en el que se reemplazan los infinitos puntos en los que se necesita conocer la función incógnita por un número finito de ellos, dando lugar a un número finito de parámetros desconocidos. Este proceso conlleva, en general a un cierto grado de aproximación.

Entre los distintos métodos utilizados para discretizar un problema nos referimos a aquellos que emplean distintas funciones de prueba para materializar la aproximación, en la que sobresale el Método de Galerkin.

Este método es una herramienta poderosa para proponer soluciones aproximadas a problemas de contorno, pero presenta una seria limitación; porque no establece un procedimiento sistemático para la construcción de las funciones de prueba necesarias para determinar la forma de las aproximaciones. Salvo los requerimientos de independencia, continuidad y derivabilidad, estas funciones son arbitrarias por lo que el analista debe enfrentar el problema de elegir entre distintas posibilidades alguna de las cuales pueden resultar no muy claras.

Lo que si está claro es que la calidad de la solución dependerá fuertemente de las propiedades de las funciones elegidas; la situación empeora cuando se trabaja en tres dimensiones (3D) en los que las funciones de prueba deben diseñarse para satisfacer las condiciones de borde en contornos que pueden presentar geometrías complicadas.

Por otro lado, una mala elección de las funciones de prueba puede producir matrices mal condicionadas que hagan difícil o imposible la solución del problema dentro de los límites de la precisión esperada.

La alternativa es dividir el dominio en subdominios o elementos no superpuestos y entonces construir una aproximación por tramos sobre cada subdominio; e inclusive se pueden utilizar distintas expresiones en cada uno de los subdominios en que se ha particionado el dominio.

En el presente trabajo nos centramos en aplicar el Método de Galerkin para encontrar una solución aproximada de la Ecuación de Poisson con condiciones de Frontera no Homogéneas.

---

Es importante indicar que las condiciones de frontera que se consideran son:

$$\begin{array}{llll} \text{Dirichlet} & u = g(s) & \text{en} & C_1 \\ \text{Neuman} & \frac{\partial u}{\partial n} = j(s) & \text{en} & C_2 \\ \text{Robbin} & \frac{\partial u}{\partial n} + \theta(s)u = h(s) & \text{en} & C_3 \end{array}$$

Entiéndase que estas condiciones de frontera son no homogéneas si:

$$g(s) = j(s) = h(s) \neq 0$$

En caso contrario diremos que estas condiciones de frontera son homogéneas.

La ecuación de Poisson:

$$-\nabla^2 u = f \tag{1}$$

Aparece en un gran número de aplicaciones en ingeniería, incluyendo problemas de transferencia de calor, electrostática, mecánica de fluidos y mecánica de los sólidos, entre otros; además está asociada a fenómenos físicos estacionarios, esto es, independientes del tiempo, como por ejemplo potenciales electrostáticos generados por distribuciones bajas de carga.

Cabe resaltar que la ecuación de Poisson es del tipo Elíptico, además que es muy interesante desde el punto de vista físico.

El significado físico de algunos términos y parámetros que intervienen en la ecuación (1) depende del área particular en la cual se aplica.

Si la ecuación de Poisson (1) está sujeta a condiciones de frontera no homogéneas, entonces se obtiene un problema bien puesto, como el siguiente:

$$\begin{array}{llll} -\nabla^2 u = f & & & \\ u = g(s) & \text{en} & C_1 & \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(s)u = h(s) & \text{en} & C_3 & \end{array} \tag{2}$$

Donde "u" puede representar la temperatura de un cuerpo, el potencial electromagnético, el desplazamiento de una membrana elástica fija en su contorno y sometida a una fuerza.

Existen métodos analíticos que ayudan a solucionar el problema (2); por ejemplo a través del método de separación de variables, pero a veces resulta difícil aplicar estos para tal fin, por tal motivo hay que pensar en otras alternativas de solución, y todo el peso recae en los métodos numéricos.

Estos métodos ayudan a obtener una solución aproximada del problema (2), y es entonces donde se formula una primera interrogante, ¿Qué método numérico ayudará a resolver el problema (2)?.

El método de diferencias finitas es el más simple de todos, en particular para mallas con una geometría uniforme; sin embargo su mayor desventaja consiste en la dificultad que se presenta para tratar efectivamente la solución de problemas sobre formas geométricas irregulares; para lo cual el método de Galerkin es una alternativa de solución para el problema (2).

Con frecuencia la ecuación de Poisson con condiciones de frontera; es decir el problema (2) puede ser formulado variacionalmente a través de la formulación débil, utilizando para esto el método de pesos residuales.

El método de Galerkin es uno de los métodos de pesos residuales que ayudan a obtener una solución aproximada para el problema (2).

Ante todo esto surge la interrogante; ¿De qué manera se aplica el método de Galerkin para solucionar la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas?

En la presente investigación nuestro objetivo general es aplicar el método de Galerkin para encontrar la solución aproximada de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas; además de formular la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas mediante la formulación variacional y a través de métodos de pesos residuales, también encontrar la solución aproximada de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas que serían nuestros objetivos específicos.

La presente investigación es muy importante porque se mostrará una alternativa para encontrar una solución aproximada de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogénea, utilizando el método de Galerkin, de una manera mas sencilla desarrollando simplemente sistemas de ecuaciones lineales algebraicas.

Además el presente proyecto se justifica, ya que la mayoría de problemas en matemáticas, física, economía, biología, etc, se modelan a través de ecuaciones diferenciales parciales, y en particular se trabaja con una ecuación de Poisson.

---

A veces estas ecuaciones resultan un poco tediosas poder resolverlas por métodos analíticos, por lo que el método de Galerkin surge como alternativa de solución.

Al aplicar el método de Galerkin, se obtendrá una solución aproximada de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas.

Este trabajo tuvo como objetivo principal aplicar el método de Galerkin para encontrar una solución aproximada de la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera no Homogéneas.

Para lograr este objetivo se tuvo en cuenta la formulación variacional y el método de Galerkin, mediante el cual se logró obtener una ecuación de menor orden que la ecuación en estudio; a través de la cual el problema de Poisson con condiciones de frontera no homogénea se redujo simplemente a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

La presente investigación consta de tres capítulos realizados con base en las necesidades creadas mediante el objetivo a cumplir.

Inicialmente se da un breve recuento sobre los conocimientos previos que nos servirán de base para poder desarrollar dicha investigación tales como; las ecuaciones diferenciales en las que se detallan su definición, tipos de ecuaciones diferenciales parciales, orden y solución de una ecuación diferencial parcial, así como también un definición sobre el funcional; algunos teoremas integrales del cálculo vectorial, pesos residuales, formulacion del problema del valor de contorno, aproximación de los problemas variacionales y el Método de Galerkin.

En el segundo capítulo se realiza la formulación funcional de la Ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas; donde estudiamos lo relacionado al operador diferencial, operador autoadjunto definido positivo y la Ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogénea.

En el tercer capítulo realizamos una aplicación mediante dos ejemplos y sus respectivas gráficas.

Finalmente llegando a las conclusiones y sugerencias para tener presentes en una futura investigación.

---

# Capítulo 1

## Conocimientos Previos

### 1.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales

En esta sección se realizará un breve estudio acerca de las ecuaciones diferenciales parciales tales como; definición, clasificación, orden, solución exacta y aproximada.

#### 1.1.1. Definición de Ecuación Diferencial Parcial

Una ecuación diferencial parcial describe una relación entre una función conocida y sus derivadas parciales. Las ecuaciones derivadas parciales aparecen en todas las áreas de física e ingeniería. Además, en años recientes hemos visto un dramático incremento de las ecuaciones diferenciales parciales en las áreas de biología, química, ciencias de la computación (particularmente en la relación de procesamiento de imágenes y gráficos) y en economía (financia). De hecho, en cada área donde hay una interacción entre un número de variables independientes, intentamos definir funciones en estas variables y para modelar una variedad de procesos de construcción de ecuaciones para estas funciones. La forma general de una ecuación diferencial parcial para una función  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_{11}}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son variables independientes,  $u$  es una función desconocida, y  $u_{x_i}$  denota la derivada parcial  $\partial u / \partial x_i$ . La ecuación es, en general, complementada por condiciones adicionales tales como condiciones iniciales o condiciones de frontera.

## 1.2. Tipos de ecuaciones diferenciales parciales

### ■ De acuerdo al orden.

El orden de una ecuación diferencial parcial es definido como el orden de la derivada más alta de la ecuación. Si la derivada más alta es de orden  $k$ , entonces la ecuación se dice ser de orden  $k$ .

Así, por ejemplo:

- La ecuación  $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$  es llamada ecuación de segundo orden.
- Mientras que  $u_t + u_{xxxx} = 0$  es llamada ecuación de cuarto orden.
- Además la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y); \quad u = u(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Conocida como la Ecuación de Poisson; es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, puesto que el orden de la derivada es el mas alto que aparece en la ecuación.

### ■ De acuerdo a la linealidad

#### Ecuaciones Lineales:

Una ecuación es llamada lineal si en (1.1),  $F$  es una función lineal de la función desconocida  $u$  y sus derivadas.

Así por ejemplo:

- La ecuación  $x^7 u_x + e^{xy} u_y + \sin(x^2 + y^2) u = x^3$  es una ecuación lineal
- Mientras  $u_x^2 + u_y^2 = 1$  es una ecuación no lineal.

#### Ecuaciones No Lineales:

Si una ecuación no es lineal entonces será no lineal. Así por ejemplo:

$$u_{xx} + u_{yy} = u^3 \tag{1.2}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = |\nabla u|^2 u \tag{1.3}$$

donde  $|\nabla u|$  denota la norma del gradiente de  $u$ , son ecuaciones no lineales.

▪ **De acuerdo a la Homogeneidad**

Una ecuación lineal es homogénea si el término que no está afectado por la variable dependiente ni por sus derivadas (término independiente) es cero para todo  $x$ . Caso contrario se dirá que es no homogénea.

Así, por ejemplo:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , es una ecuación homogénea llamada Ecuación de Laplace; también conocida como la Ecuación Homogénea de Poisson.
- $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = h(x,y)$ ; con  $h(x,y) \neq 0$ , es una ecuación no homogénea.

**1.2.1. Clasificación de las EDP de Segundo Orden**

**Definición 1.1.** Sea la E.D.P. de segundo orden  $A(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + F(x,y)u(x,y) = f(x,y)$  en una cierta región  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  se dice que la E.D.P.es:

1. Hiperbólica en  $\Omega$ , si:  $B^2 - AC > 0$  en  $\Omega$ .
2. Parabólica en  $\Omega$ , si:  $B^2 - AC = 0$  en  $\Omega$ .
3. Elíptica en  $\Omega$ , si:  $B^2 - AC < 0$  en  $\Omega$ .



Ejemplos:

- Las ecuaciones  $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$  y  $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$  son hiperbólicas  $\forall(x,y) \in \Omega$ .
- La ecuación  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$  es parabólica  $\forall(x,y) \in \Omega$ .
- La ecuación  $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$  es elíptica  $\forall(x,y) \in \Omega$ .

**1.2.2. Solución de la Ecuación Diferencial Parcial**

Se dice que una función  $f$  cualquiera es solución de una ecuación diferencial en cierta región  $D$ , si sustituida en dicha ecuación la reduce a una identidad.

### 1.2.3. Solución Aproximada de la Ecuación Diferencial Parcial

En muchos problemas teóricos y aplicados, se requiere hallar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. En algunos casos simples es posible hallar una fórmula que represente la solución a través de funciones elementales bien conocidas. Sin embargo, por regla general es posible encontrar la solución exacta. Para un problema lineal es posible si el dominio de definición de la solución tiene forma geométrica arbitraria. El caso de un problema no lineal es aún mas complicado; es así que en las últimas décadas paralelo con los métodos analíticos se usan cada vez los métodos numéricos en donde la solución numérica representa un conjunto de números y se considera la solución aproximada del problema diferencial original.

### 1.2.4. Funcional

Sea  $M$  una clase de funcionales  $y(x) \in M$  le corresponde, según una regla, un número determinado  $I$ , se dice que en la clase  $M$  está definida un funcional  $I$  y se escribe  $I = [y(x)]$ . La clase  $M$  de funciones  $y(x)$  en la clase que está definida el funcional  $I = [y(x)]$  se denomina campo de funciones del funcional.

Ejemplo:

Sea  $M = C[0, 1]$  el conjunto de todas las funciones continuas  $y(x)$  definidas en el segmento  $[0, 1]$  y sea

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx$$

Entonces,  $J[y(x)]$  es un funcional de  $y(x)$ ; a toda función  $y(x) \in C[0, 1]$  le corresponde un valor determinado  $J[y(x)]$ .

Tomando funciones concretas en lugar de  $y(x)$ , obtenemos los valores correspondientes de  $J(y)$ .

Por ejemplo:

- Si  $y(x) = 1$ , tenemos:

$$J[1] = \int_0^1 dx = 1$$

- Si  $y(x) = \cos(\pi x)$ , tenemos:

$$J[\cos(\pi x)] = \int_0^1 \cos(\pi x) dx = 0$$

---

### 1.3. Algunos Teoremas Integrales del Cálculo Vectorial

En esta sección, se estudiará algunos teoremas importantes, propios del cálculo vectorial, como por ejemplo: el teorema de la divergencia, la primera y la segunda forma del teorema de Green que se utilizará en capítulos posteriores de este trabajo.

Llamaremos sólido simple a todo conjunto compacto  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  homeomorfo a una bola y cuya frontera  $\partial V$  es una superficie orientable que puede descomponerse en una cantidad finita de superficies paramétricas simples con bordes, orientadas de tal manera que en los trozos de curva donde dos de estas superficies se peguen, las orientaciones sean opuestas.

Supondremos que dicha frontera está orientada con la normal unitaria  $n$  apuntando hacia el exterior de  $V$ .

Un campo conocido es el gradiente denotado por  $\nabla f$ , donde  $f$  es una función escalar. Si llamamos al vector  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  el operador Nabla, podemos obtener la definición del gradiente y otras definiciones más:

**Definición 1.2.** Sea  $f$  una función escalar y  $F = (P, Q, R)$  un campo vectorial.

Se define:

- El Gradiente de  $f$  como el vector:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- La Divergencia de  $F$  como:

$$\operatorname{div} F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- El Laplaciano de  $f$  como:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**Teorema 1.** Si  $V$  es una región tridimensional limitado por una superficie  $S = \partial V$ , con vector normal unitario  $n$ . Sea  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Entonces:

1. Teorema de la divergencia de Gauss para un campo vectorial  $F$ .

$$\int_V \operatorname{div} F dV = \int_S F n dS$$

Demostración:

Haremos la demostración asumiendo que  $V$  es un sólido proyectable  $xy$ , proyectable  $yz$  y proyectable  $xz$ .

Que  $V$  sea proyectable  $xy$  significa que  $V$  puede escribirse de la forma siguiente:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D; \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

donde  $D$  es una región del plano  $xy$  limitada por una curva cerrada simple regular a trozos, y  $\varphi, \psi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  son funciones de clase  $C^1$  en  $D$ ; es decir,  $V$  puede verse como lo que queda entre las gráficas de las dos funciones de clase  $C^1$  definidas en la proyección de  $V$  sobre el plano  $xy$ .

Análogamente se define el ser proyectable  $xz$  o proyectable  $yz$ .

Sea  $F = (P, Q, R)$

Como  $V$  es proyectable  $xy$  podemos escribir:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D; \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

donde  $D, \varphi, \psi$  cumplen las condiciones explicitadas anteriormente; aplicando el teorema de Fubini, obtenemos lo siguiente:

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_D [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))] dx dy \quad (\alpha)$$

Calculemos por otra parte la integral:

$$\int_S (0, 0, R) n dS$$

Podemos descomponer  $S$  en tres regiones  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , donde:

$$S_1 = \{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

$$S_2 = \{(x, y, \psi(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \partial D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

En  $S_1$  el vector normal exterior unitario  $n$  es perpendicular al eje  $z$  y por tanto también al campo  $(0,0,R)$ , de modo que:

$$\int_S (0, 0, R)ndS = 0$$

Por otro lado la normal  $n$  apunta hacia arriba en  $S_2$  y hacia abajo en  $S_1$ , de modo que al calcular las integrales  $\int_{S_i} (0, 0, R)ndS$ , obtenemos:

$$\int_{S_3} (0, 0, R)ndS = \int_D (0, 0, R(x, y, \psi(x, y))) \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}, -\frac{\partial\psi}{\partial y}, 1\right) dx dy = \int_D R(x, y, \psi(x, y)) dx dy$$

mientras que:

$$\int_{S_1} (0, 0, R)ndS = \int_D (0, 0, R(x, y, \varphi(x, y))) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, -1\right) dx dy = - \int_D R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_S (0, 0, R)ndS &= \int_{S_2} (0, 0, R)ndS + \int_{S_1} (0, 0, R)ndS + \int_{S_3} (0, 0, R)ndS \\ &= \int_D R(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \int_D R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy \end{aligned}$$



lo que combinado con  $\alpha$ , obtenemos:

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_S (0, 0, R)ndS \tag{\alpha_1}$$

Análogamente, usando que  $V$  es proyectable  $xz$  y proyectble  $yz$ , se logra obtener que:

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \int_S (0, Q, 0)ndS \tag{\alpha_2}$$

y además:

$$\int_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \int_S (P, 0, 0)ndS \tag{\alpha_3}$$

Finalmete, sumando  $(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_2)$  y  $(\alpha_3)$ , logramos obtener que:

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx dy dz = \int_S (P, Q, R)ndS$$

Es decir el enunciado del teorema para sólidos proyectables en cualquiera de las tres direcciones de los ejes.

La clase de dichos sólidos incluye las bolas y en general todos los sólidos convexos de  $\mathbb{R}^3$ .

Además:

- Si  $F = K\nabla u$ ;

$$\int_S \text{div} F dv = \int_S K \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

- Si  $F = K\nabla u$ ;

$$\int_S \text{div} F dv = \int_S (K\nabla u) nds$$

2. Teorema de Green para campos escalares  $u$  y  $v$ .

- Primera Forma

$$\int_V (u\nabla^2 v + \nabla u \nabla v) dV = \int_S u \nabla v \cdot ndS$$

- Segunda Forma

$$\int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dV = \int_S (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) dS$$

3. Teorema generalizado de Green para campos escalares  $u$  y  $v$ , con un tensor  $k$ , representado por una matriz de orden  $3 \times 3$ .

- Primera Forma

$$\int_V [u \text{div}(K\nabla v) + \nabla u \cdot (K\nabla v)] dV = \int_S u(K\nabla v) \cdot ndS$$

- Segunda Forma; para  $K$  simétrica.

$$\int_V [u \text{div}(K\nabla v) + v \cdot \text{div}(K\nabla u)] dV = \int_S [u(K\nabla v) - v(K\nabla u)] \cdot ndS$$

Los teoremas integrales establecidos anteriormente pueden ser fácilmente interpretados en una región bidimensional  $D$  delimitada por una curva  $C$ ; para tales regiones, el operador  $\nabla = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}]^T$ ; y  $K$  es representado por una matriz de orden  $2 \times 2$ .

En algunos de los ejemplos los problemas de una dimensión se consideran de modo que  $\nabla = [\frac{\partial}{\partial x}]$ ; en este caso las integrales de contorno se obtienen mediante la búsqueda de la diferencia entre los valores del integrando en cada extremo del intervalo.

## 1.4. Teorema de Lax - Milgram

Antes de enunciar el teorema, definamos lo siguiente:

**Definición 1.3.** Sea  $V$  un espacio de Hilbert, una forma bilineal es una función dada por:

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow a(u, v)$$

que cumple:

- $a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v), \forall u_1, u_2 \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2), \forall v_1, v_2 \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**Definición 1.4.** (Forma Bilineal Continua)

Se dice que  $a$  es continua, si existe una constante  $K > 0$  tal que:

$$|a(u, v)| \leq K \|u\| \|v\|$$

$$\forall u \in V, v \in V$$

**Definición 1.5.** (Forma Bilineal Elíptica)

Se dice que  $a$  es elíptica si existe una constante  $\alpha > 0$  tal que:

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$

$$\forall u \in V, v \in V$$

**Teorema 2.** (Teorema de Lax - Milgram)

Sea  $V$  un espacio de Hilbert y  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal continua, elíptica definida en  $V$ .

Entonces dado un funcional lineal  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  continua, entonces existe un único elemento  $u \in V$ , tal que:

$$a(u, v) = \langle L, L(v) \rangle$$

$\forall v \in V$  y además;

$$\|u\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \|L\|$$

## 1.5. Formulación Variacional: Pesos Residuales

Uno de los problemas más importantes de la física matemática es el problema de valor de contorno, en el cual se busca una función  $u$  que es solución de una ecuación diferencial en un dominio  $\Omega$  y frontera  $\partial\Omega = \Gamma$ ; es decir:

$$A(u) = f, \quad \text{en } \Omega \quad (1.4)$$

y que satisface condiciones especificadas sobre el contorno  $\Gamma$  del dominio

$$B(u) = g \quad \text{sobre } \partial\Omega = \Gamma \quad (1.5)$$

La función incognita puede ser un campo escalar o vectorial y pertenece a un espacio funcional  $V$ , de igual manera la ecuación diferencial puede ser una ecuación simple o un sistema de ecuaciones lineales o no lineales.

En el caso lineal las ecuaciones (1.4) y (1.5) se pueden escribir en la forma

$$A(u) = Au = f, \quad \text{en } \Omega \quad (1.6)$$

$$B(u) = Bu = g, \quad \text{sobre } \Gamma \quad (1.7)$$

Muchos problemas de los planteados anteriormente tienen la propiedad que; su solución minimiza un cierta funcional  $J$  definida sobre un conjunto de funciones  $V$ ,

$$J : V \rightarrow \mathbb{R}$$

cuando  $J$  es una forma cuadrática definida positiva, la minimización es equivalente a encontrar el punto estacionario de tal funcional. Así, la tarea de solucionar un problema de valor de contorno es equivalente al de encontrar una función en  $V$  que hace  $J$  estacionaria, esto se llamará, Formulación Variacional del Problema de Valor de Contorno, la herramienta básica para esto es el cálculo de variaciones clásico.

Según lo descrito anteriormente, no todos los problemas de contorno pueden llegar a ser formulados variacionalmente, por lo que se interpretan mediante la formulación débil, utilizando para esto el método de pesos residuales que es mucho mas general.

## 1.6. Formulación Variacional del Problema de Valor de Contorno

Según la descripción anterior, no todos los problemas de contorno pueden llegar a ser formulados variacionalmente, por lo que se interpretan mediante la formulación débil, utilizando para esto el Método de Pesos Residuales que es mucho mas general que la continuación se detalla.



### 1.6.1. Método de Pesos Residuales

La formulación pesos residuales, que consiste en la siguiente metodología, se considera la siguiente ecuación diferencial con condiciones de contorno

$$\begin{cases} A(u) = f, & \text{en } \Omega \\ B(u) = g, & \text{sobre } \Gamma = \partial \Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

Sea  $\hat{u}$  una solución aproximada de la ecuación, la cual lo podemos elegir en algún espacio de funciones admisibles  $V$ .

Al sustituir  $\hat{u}$  en la ecuación diferencial (1.8) generalmente no será satisfecha, existiendo por tanto un residual  $r = r(\hat{u})$ , dado por

$$r = A\hat{u} - f$$

también llamado error residual, el cual generalmente no es cero.

La mejor aproximación  $\hat{u}$  es aquella que minimiza el residual  $r$  en todo el dominio  $\Omega$  según algún criterio, tal como:

Se debe distribuir el error en todo el dominio  $\Omega$ , según una función peso  $w \in W$ ; donde  $W$  es algún espacio apropiado de funciones de fácil manejo, de tal manera que el error acumulado en todo el dominio sea nulo, es decir se cumpla la ecuación

$$\int_{\Omega} rw \, d\Omega = 0$$

o equivalentemente

$$\int_{\Omega} (A(\hat{u}) - f)w \, d\Omega = 0 \quad (1.9)$$

El criterio de minimizar este error se le puede hacer mas potente en el sentido que: Debemos asegurar que si (1.9) es satisfecha para toda función  $w \in W$  entonces la ecuación diferencial (1.4) debe ser satisfecha en todos los puntos del dominio.

La prueba de esta aserción es inmediata.

En efecto: si existiera un punto o una parte del dominio tal que  $A(u) \neq f$ , entonces se puede hallar o construir una función  $w$  tal que  $\int_{\Omega} A(\hat{u})wd\Omega \neq \int_{\Omega} fwd\Omega$ , lo cual prueba la aserción.

Si las condiciones de contorno son también satisfechas entonces realizamos la misma operación

$$\int_{\Gamma} (B(\hat{u}) - g)v d\Gamma = 0 \quad (1.10)$$

para  $v \in \hat{W}$  espacio definido en el contorno de  $\Gamma$ .

Es decir tenemos la identidad

$$\int_{\Omega} (A(\hat{u}) - f)wd\Omega + \int_{\Gamma} (B(\hat{u}) - g)v d\Gamma = 0, \quad \forall w \in W, \quad y \quad v \in \hat{W} \quad (1.11)$$

En los cálculos anteriores se asume que las integrales utilizadas en la ecuación (1.11) existen en base a la elección de los espacios respectivos.

Ahora; en muchas ocasiones es factible utilizar algunas técnicas del cálculo para llevar a cabo algunas modificaciones del integrando, la integración por partes por ejemplo, así como utilizar las propiedades de las funciones peso, la ecuación (1.11) se puede escribir en la forma:

$$\int_{\Omega} (D(\hat{u}) - fw)d\Omega + \int_{\Gamma} (F(\hat{u})v - gv)d\Gamma = 0, \quad \forall w \in W, \quad y \quad v \in \hat{W} \quad (1.12)$$

donde  $D$  y  $F$  son operadores que generalmente contienen derivadas de orden menor que las derivadas de los operadores  $A$  y  $B$ .

Esto significa que, que se necesita un orden menor de continuidad para  $\hat{u}$  a cambio de un mayor orden de continuidad para  $w$  y  $v$ .

La ecuación (1.12) es mas permisiva que la original, por lo que se llama la formulación débil de la ecuación (1.8), y es de alguna manera sorprendente, por su uso, que esta ecuación es físicamente mucho mas realista que la ecuación diferencial original la cual implica una mayor suavidad en las soluciones.

Finalmente, haciendo una notación apropiada la ecuación anterior se puede presentar en la siguiente forma:

$$a(\hat{u}, w) = l(w), \quad w \in W \tag{1.13}$$

Por tanto, la formulación variacional débil de (1.4) es el siguiente

$$\begin{cases} \text{Hallar } \hat{u} \in V, \text{ tal que :} \\ a(\hat{u}, w) = l(w), \quad \forall w \in W \end{cases} \tag{1.14}$$

La presentación integral de (1.11) o (1.14) es la base para realizar la aproximación por elementos finitos.

Con el objetivo de ser mas prácticos, trabajaremos en el siguiente problema

$$(P) \begin{cases} -u'' = f & x \in (0, 1) = \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Para la formulación variacional, debemos construir un espacio funcional apropiado.

Consideramos  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , conjunto abierto,  $C^\infty(\Omega)$  denota el espacio de funciones infinitamente diferenciables definidas sobre  $\Omega$ , es decir:

$$C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ infinitamente diferenciable}\}$$

Para cada  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ , se define su soporte, por:

$$\text{Sop } \varphi = \overline{\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}}$$

Además definimos el espacio de funciones,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\text{Sop } \varphi \text{ es compacto}\}$$

Sea  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  arbitraria, multiplicando la ecuación diferencial de (P) por  $\varphi$  e integrando en  $\Omega = (0, 1)$  (esta operación se justifica mas adelante con la presentación de los pesos residuales), se tiene,

$$\int_0^1 -\varphi u'' dx = \int_0^1 \varphi f dx$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} -\left(\varphi u' \Big|_0^1 - \int_0^1 u' \varphi' dx\right) &= \int_0^1 \varphi f dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \\ -\varphi u' \Big|_0^1 + \int_0^1 u'(x) \varphi'(x) dx &= \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \end{aligned}$$

Como  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty$ , se cumple,

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)f dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \tag{1.15}$$

Esta ecuación (1.15) se le conoce como la forma Variacional de (P).

Ahora, por otro lado, sea  $L^2(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \int_\Omega \varphi^2 dx < \infty\}$  el espacio de funciones cuadrado integrables sobre  $\Omega$ , evidentemente que se cumple  $C^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ .

**Definición 1.6.** Dada  $v \in L^2(\Omega)$ , se dice que  $v' \in L^2(\Omega)$  en el sentido distribucional, si existe  $z \in L^2(\Omega)$  tal que

$$-\int_\Omega v\varphi' dx = \int_\Omega z\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

y se escribe  $v' := z$ .

En virtud de la definición anterior, podemos introducir el Espacio de Sobolev.

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / v' \in L^2(\Omega)\}$$

el cual es un Espacio de Hilbert, dotado del siguiente producto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (u.v + u'v') dx, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

de ello, se sigue que la norma  $H^1(\Omega)$  está dada por

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} &= \int_\Omega (u^2 + u'^2) dx, \quad \forall u \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

Además, denotamos por  $H_0^1(\Omega)$  la clausura de  $C_0^\infty(\Omega)$  en  $H^1(\Omega)$ , es decir

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / u(0) = u(1) = 0\}.$$

En este espacio se puede plantear la forma variacional del problema exigiendo que la solución sea bien mas general, es decir que tenga menos condiciones de regularidad, que en el caso de la solución buscada en (P), que toma el nombre de solución débil.

**Formulación débil de (P):** En base a la construcción de los espacios anteriores y por la densidad de  $C_0^\infty$  en  $H_0^1$  podemos usar (1.15) para presentar la formulación débil del problema (P)

$$(fv) \begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega u'v' dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

También llamada formulación variacional del problema (P) en el espacio  $H_0^1(\Omega)$ .

**Observación 1.1.**

- (a) La solución de  $(P)$  se llama solución fuerte de  $(P)$
- (b) La solución de  $(fv)$  se llama solución débil de  $(P)$

**(1) Notación abstracta para la formulación variacional  $(fv)$** 

Para presentar el problema en la forma abstracta introduzcamos las siguientes notaciones:

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} u'v' dx, \text{ forma bilineal en } H_0^1(\Omega) \\ l(v) = \int_{\Omega} f v dx, \text{ forma lineal en } H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

- (2) Como la forma bilineal es simétrica, es decir  $a(u, v) = a(v, u)$ , el problema  $(fv)$  es equivalente al problema de cálculo variacional

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} q(u)$$

donde

$$q(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - l(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u')^2 dx - \int_{\Omega} f u dx$$

es una forma cuadrática

**Observación 1.2.** En la práctica, para hallar la forma variacional, de acuerdo a las condiciones de contorno se construyen los espacios  $V$  y  $W$ , generalmente los mismos, y a partir de la ecuación diferencial se parte de la ecuación (1.10).

---

## 1.7. Aproximación de los Problemas Variacionales

### 1.7.1. Aproximación usando Pesos Residuales

Sea la solución aproximada en el subespacio finito dimensional  $V_N \in V$  de la forma

$$\hat{u}_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j$$

donde  $\{\varphi_j\}$  es una base de  $V_N$  y  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  son los parámetros por determinar. Cuando  $\hat{u}_N$  es sustituida en la Ecuación Diferencial generalmente ésta no será satisfecha, se tiene el residual,

$$r = A\hat{u}_N - f$$

La mejor aproximación  $\hat{u}_N$  es aquella que minimiza el residual  $r$  en todo el dominio  $\Omega$ , con los pesos residuales.

Sea  $\{w_j\}_{j=1}^N$  una familia de pesos previamente elegida, generalmente funciones.

$$\begin{cases} \text{Hallar } \alpha \in \mathbb{R}^N, \text{ tal que :} \\ \int_{\Omega} r w_j d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.16)$$

La elección de esta familia de pesos, determina los diferentes métodos de pesos residuales.



## 1.8. Método de Galerkin

Ahora trabajamos con problemas donde no necesariamente se presentan como la minimización de formas cuadráticas y se escriben en la forma general siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in V, \text{ tal que :} \\ A(u) = f \end{cases} \quad (1.17)$$

donde  $A$  es un operador diferencial y  $V$  es un espacio de Hilbert.

Estos problemas, en su mayoría, pueden llegar a formularse variacionalmente.

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in V, \text{ tal que} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (1.18)$$

El método de Galerkin es usado tanto en el problema (1.17) como en el problema (1.18). Para deducir el método de Galerkin que aproxima la solución de (1.17) o (1.18) se considera primero una sucesión de subespacios de dimensión finita  $V_N \subset V$  (de dimensión  $N$  para cada  $N$ ) y se plantea los siguientes problemas aproximados (por simplicidad trabajamos con el problema (1.18)).

$$\begin{cases} \text{Hallar } \hat{u}_N \in V_N, \text{ tal que} \\ a(\hat{u}_N, v) = l(v), \quad \forall v \in V_N \end{cases} \quad (1.19)$$

Esta formulación aproximada se le conoce con el nombre de Método de Galerkin.

A continuación veamos que resolver (1.19) se reduce a resolver un sistema lineal de ecuaciones.

En efecto, sea  $\{\varphi_j\}^N$  una base de  $V_N$ , llamado conjunto de funciones base, debemos hallar escalares  $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ ,  $(\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T \in \mathbb{R}^N)$  tal que

$$\hat{u}_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j$$

Luego el problema (1.19) se convierte en

$$\begin{cases} \text{Hallar } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \text{ tal que} \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j a(\varphi_j, v) = l(v), \quad \forall v \in V_N \end{cases} \quad (1.20)$$

Como  $v$  es arbitrario en  $V_N$ , se elige los elementos de la base previamente dada, obteniendo el problema equivalente.

$$\begin{cases} \text{Hallar } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \text{ talque} \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j a(\varphi_j, \varphi_i) = l(\varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (1.21)$$

Luego, sea  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$  donde  $b_i = l(\varphi_i)$  y  $K = (m_{ij})_{N \times N}$ , donde  $m_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ ,

$i, j = \overline{1, N}$ .

Por tanto la formulación (1.21) se escribe como

$$\begin{cases} \text{Hallar } \alpha \in \mathbb{R}^N, \text{ talque} \\ K\alpha = b \end{cases} \quad (1.22)$$

La coercividad de la forma bilineal  $a$ , garantiza la solución única de (1.22).

El método de Galerkin pertenece a la familia de los métodos de Pesos Residuales.

## Capítulo 2

# Formulación Funcional de la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera

### 2.1. Operador Diferencial

Varios problemas en muchas áreas de las matemáticas aplicadas a menudo se modelan como una Ecuación diferencial Parcial junto a condiciones iniciales y de frontera, y la solución da respuesta a estos problemas. La naturaleza de la solución de una ecuación diferencial parcial depende de la forma que la ecuación toma. Todos lineal y casi lineal, ecuaciones de segundo orden se clasifican como elíptica, hiperbólica o parabólica. En cada una de estas categorías allí son ecuaciones que modelan ciertos fenómenos físicos. La clasificación es determinada por los coeficientes de las derivadas parciales más altas que se producen en la ecuación. En este capítulo, consideraremos funciones que dependen de dos variables independientes solamente, de modo que el álgebra resultante no varíe las subyacentes ideas.

Consideremos la Ecuación Diferencial Parcial de segundo orden:

$$\mathcal{L}u = f \tag{2.1}$$

donde  $\mathcal{L}$  es el operador definido por:

$$\mathcal{L}u \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$a$ ,  $b$  y  $c$  son, en general, las funciones de  $x$  e  $y$ ; también pueden depender de sí mismo  $u$  y sus derivadas, en cuyo caso la ecuación es no lineal.

Ecuaciones no lineales son, en general, mucho más difícil de tratar que las ecuaciones lineales, la cual no se discutirá aquí. La ecuación (2.1) se dice que es:

- Elíptica si:  $b^2 < 4ac$
- Hiperbólica si:  $b^2 > 4ac$
- Parabólica si:  $b^2 = 4ac$

A diferencia de ecuaciones diferenciales ordinarias, no generalmente es ventajoso para investigar la solución de una ecuación diferencial parcial de forma aislada del límite asociado a las condiciones iniciales.

De hecho, siempre será una ecuación junto con las condiciones prescritas que forma un modelo matemático de una situación particular. En general, las ecuaciones elípticas están asociadas con fenómenos de estado estacionario y requieren un conocimiento de los valores de la función desconocida, o su derivada, en el límite de la región de interés. Por lo tanto la ecuación de Poisson,

$$-\nabla^2 u = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Da un modelo que describe la variación del potencial electrostático en una medio con permitividad  $\epsilon$  y en el que hay una distribución de carga por  $\rho$  unidad de volumen.

En el caso  $\rho = 0$  tenemos la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 u = 0$$

A fin de que la solución sea única, es necesario conocer el potencial o distribución de carga en el límite de los alrededores. Se trata de un valor límite para el problema.

Las ecuaciones hiperbólicas son, en general, asociados con problemas de propagación y requieren también de la especificación de ciertos valores iniciales o posibles límites.

Por lo tanto, la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$


---

da el pequeño desplazamiento transversal,  $\mu(x, t)$ , de una cuerda vibrante; las ondas se propagan a lo largo de la cadena con la velocidad  $c$ .

En este tipo de problemas generalmente se requiere conocer el desplazamiento, o su derivado, en los extremos, junto con el desplazamiento inicial y distribución de la velocidad. Se trata de un problema de valor inicial y de frontera.

Finalmente, las ecuaciones parabólicas son problemas modelo en el que la cantidad de interés varía lentamente en comparación con los movimientos aleatorios que producen estas variaciones. Como es el caso con las ecuaciones hiperbólicas, que están asociados con problemas de valor inicial. Así, la ecuación del calor, o ecuación de difusión,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

describe la variación de la temperatura,  $u(x, t)$ , en una varilla delgada que tiene un  $\alpha$  difusividad térmica uniforme.

Los cambios de temperatura en el material son producidos por el movimiento de moléculas individuales y se producen lentamente en comparación con éstos movimientos moleculares. O bien la temperatura o su derivado por lo general se administran en los extremos de la varilla, junto con una distribución inicial de la temperatura. Esto de nuevo es un problema inicial con valores en la frontera.

Las tres ecuaciones se producen en muchas áreas de matemáticas aplicadas, la ingeniería y la ciencia.

En este capítulo vamos a considerar los métodos aproximados en los que nuestras técnicas de elementos finitos, que se describen mas adelante. Ello es en el área de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas que los métodos de elementos finitos se han utilizado más ampliamente, ya que los operadores diferenciales implicados pertenecen a la clase importante de operadores definidos positivos.

En el presente capítulo abordaremos en especial las ecuaciones Elípticas; ya que la Ecuación de Poisson en un tipo de ecuaciones elípticas y el método de Galerkin se utiliza para estudiar problemas elípticos.

---

## 2.2. Operador Autoadjunto y Definido Positivo

Supongamos que la función  $\mu$  satisface la ecuación (2.1) en una región de dos dimensiones  $D$  delimitada por una curva cerrada  $C$ , es decir,

$$\mathcal{L}u = f$$

donde  $f(x, y)$  es una función dada de la posición.

Supongamos también que  $u$  satisface dadas las ciertas condiciones homogéneas en la frontera  $C$ .

Normalmente estas condiciones son de los siguientes tipos:

$$\text{Condición de frontera } \textit{Dirichlet}: u = 0, \tag{2.2}$$

$$\text{Condición de } \textit{Neumann}: \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \tag{2.3}$$

$$\text{Condición de } \textit{Robin} \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(s)u = 0, \tag{2.4}$$

Aquí  $s$  es la longitud del arco, medida a lo largo de  $C$  desde algún punto fijo en  $C$ , y  $\frac{\partial}{\partial n}$  representa la diferenciación a lo largo de la normal exterior a la frontera.

Teniendo en cuenta que la condición Neumann se puede obtener de la condición de Robin solamente configurando  $\sigma = 0$ .

Un problema se dice que está correctamente planteado, en el sentido de Hadamard (1923), si y sólo si cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe una solución.
2. La solución es única.
3. La solución depende de la forma continua en los datos.

Si al menos una de estas condiciones no se cumple, entonces el problema se dice que está mal planteado.

Para un operador elíptico  $\mathcal{L}$ , el problema se plantea correctamente sólo cuando una de estas condiciones se sostiene en cada punto en el límite.

Los métodos numéricos que discutiremos implican procesos; como cambiar nuestra ecuación diferencial parcial en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

---

Dos propiedades importantes de  $\mathcal{L}$  conducen a propiedades particularmente útiles de la matriz del sistema.

1. El operador  $\mathcal{L}$  se dice que es autoadjunto si y sólo si la expresión:

$$\iint_D u\mathcal{L}u\,dxdy - \iint_D u\mathcal{L}v\,dxdy$$

es una función sólo de  $u, v$  y sus derivadas evaluadas en el límite.

En particular, para condiciones de contorno homogéneas,  $\mathcal{L}$  es autoadjunto si y sólo si:

$$\iint_D u\mathcal{L}u\,dxdy = \iint_D u\mathcal{L}v\,dxdy$$

Demostración:

Supongamos que  $\mathcal{L} = -\nabla^2$ , de manera que la ecuación (2.1) se convierte en la ecuación de Poisson; entonces:

$$\begin{aligned} \iint_D v\mathcal{L}u\,dxdy - \iint_D u\mathcal{L}v\,dxdy &= \iint_D u\nabla^2 v\,dxdy - \iint_D v\nabla^2 u\,dxdy \\ &= \oint_C \left( u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \end{aligned}$$

en virtud de la segunda forma del teorema de Green.

Así, el operador  $-\nabla^2$  es autoadjunto.

También;  $v\nabla^2 u = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \cdot \nabla v$ , y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \iint_D u(-\nabla^2 u)\,dxdy &= - \iint_D \operatorname{div}(u\nabla u)\,dxdy + \iint_D |\nabla u|^2\,dxdy \\ &= - \oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds + \iint_D |\nabla u|^2\,dxdy, \end{aligned}$$

usando el teorema de la divergencia; consulte preliminares.

Así, si  $u$  satisface cualquiera de las condiciones de contorno (2.2) o (2.3) se deduce que  $-\nabla^2$  es definida positiva.

Para la condición de límite de Robin (2.4), el integral de contorno se vuelve:

$$\oint_C \sigma u^2\,ds$$

y por lo tanto  $-\nabla^2$  es definida positiva siempre que  $\sigma > 0$ .

---

2. El operador  $\mathcal{L}$  se dice que es definida positiva si y sólo si, para todas las funciones  $u$ ,

$$\iint_D u\mathcal{L}u\,dxdy \geq 0$$

la igualdad ocurre si y sólo si  $u = 0$ .

Demostración:

Observemos que por el Teorema de la Divergencia tenemos:

$$\begin{aligned} v\nabla^2 u &= \operatorname{div}(v.\nabla u) - \nabla u.\nabla v \\ \iint_D u(-\nabla^2 u)\,dxdy &= -\iint_D \operatorname{div}(v.\nabla u)\,dxdy + \iint_D \|\nabla u\|^2\,dxdy \\ &= -\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS + \iint_D \|\nabla u\|^2\,dxdy \end{aligned}$$

Si  $u$  satisface las condiciones de frontera homogéneas, entonces el operador  $-\nabla^2$  es definido positivo.

En ambas definiciones, se supone que  $u$  y  $v$  satisfacen la existencia de la diferenciabilidad adecuada de las operaciones en condiciones de orden.

---

### 2.3. Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera no Homogénea

Consideremos la Ecuación de Poisson:

$$-\nabla^2 u = f$$

en  $D$ , sujeto a las condiciones de contorno

$$u = g(s) \text{ en } C_1 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(s)u = h(s) \text{ en } C_2 \tag{2.6}$$

De la primera ecuación:

$$-\nabla^2 u = f$$

podemos obtener:

$$-\nabla^2 u \cdot v_i = f \cdot v_i$$

con  $v_i \in V$  espacio vectorial de dimensión finita y  $v_i = 0$  en  $C_1$

$$-\nabla^2 u \cdot v_i - f \cdot v_i = 0$$

$$-\int (\nabla^2 u + f)v_i dx dy = 0$$

Luego:

$$-\int \nabla^2 \tilde{u} v_i - \int f v_i dx dy = 0 \tag{2.7}$$

Por la primera forma del teorema de Green:

$$\int_D (u \nabla^2 v + \nabla u \nabla v) dx dy = \int_C u \nabla v n ds$$

donde  $D$  es un dominio abierto de  $R^2$  y  $C = C_1 \cup C_2$

Entonces en la anterior ecuación tenemos que:

$$\int (\nabla^2 \tilde{u})v_i dx dy = \int_C v_i \nabla \tilde{u} n ds - \int_D \nabla \tilde{u} \nabla v_i dx dy \tag{2.8}$$

Luego reemplazando (2.8) en (2.7), obtenemos:

$$\int \int_D \nabla \tilde{u} \nabla v_i dx dy - \oint_C v_i \nabla \tilde{u} n ds - \int \int_D f v_i dx dy = 0$$


---

con  $v_i \in V$ ,  $i = 0, \dots, n$  y  $C = C_1 \cup C_2$

$$\int \int_D \nabla \tilde{u} \nabla v_i dx dy - \oint_{C_1} v_i \nabla u n ds - \oint_{C_2} v_i \nabla \tilde{u} n ds - \int \int_D f v_i dx dy = 0$$

$$\int \int_D (\nabla \tilde{u} \nabla v_i - f v_i) dx dy + \oint_{C_2} (\sigma u - h) v_i ds = 0$$

Que es la formulación de la Ecuación de Poisson.

---

### 2.3.1. Formulación de la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera no Homogénea, utilizando el método de Galerkin

El método de Galerkin proporciona un algoritmo para minimizar un funcional dado y requiere escoger un conjunto completo adecuado de funciones bases linealmente independiente:

$$v_i(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

,  $v_i \in V$  espacio de dimensión finita la solución exacta  $u$ , es aproximada por una sucesión de funciones de prueba:

$$\tilde{u} = \hat{u}_n = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

Donde las constantes  $c_i$  son escogidas para minimizar el funcional.

Luego de varios procedimientos como los que se realizaron en la sección anterior, el problema es reducido a una solución de un sistema de ecuaciones lineales algebraicas.

Entonces la formulación de la Ecuación de Poisson es:

$$- \iint_D (\nabla^2 u + f) v_i dx dy = 0$$

,  $i = 1, \dots, n$  que aplicando la primera forma del teorema de Green, se convierte en:

$$\iint_D \nabla \hat{u} \cdot \nabla v_i dx dy - \oint_C v_i \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} ds - \iint_D f v_i dx dy, \quad i = 0, \dots, n$$

En  $C_2$ , la condición de contorno Robin (2.22) se cumple, y en  $C_1$  la función de prueba debe cumplir la condición esencial de Dirichlet (2.21), mientras que las funciones de base debe satisfacer la forma homogénea de esta condición, es decir, en  $C_1$ ,  $v_i = 0$ .

Es decir:

$$\nabla(\hat{u}) = \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right)$$

$$\nabla(v_i) = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x}, \frac{\partial v_i}{\partial y} \right)$$


---

Luego:

$$\nabla(\hat{u}) \cdot \nabla(v_i) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y}$$

Además:

$$\oint_C v_i \cdot \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} ds = \oint_{C_1 \cup C_2} v_i \cdot \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} ds$$

$$= \oint_{C_1} v_i \cdot \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} ds + \oint_{C_2} v_i \cdot \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} ds$$

$$= \oint_{C_2} v_i \cdot \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} ds$$

$$= \oint_{C_2} v_i (h(s) - \sigma(s)u) ds$$



Así, luego de reemplazar las ecuaciones de Galerkin se convierte en:

$$\iint_D \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial y} - f v_i \right) dx dy + \oint_{C_2} (\sigma \hat{u} - h) v_i ds = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.9)$$

## Capítulo 3

# Aplicación del Método de Galerkin

El método de Galerkin proporciona un algoritmo para minimizar un funcional dado y requiere escoger un conjunto completo adecuado de funciones bases linealmente independiente:

$$v_i(x, y), i = 0, 1, 2, \dots$$

la solución exacta  $u$ , es aproximada por una sucesión de funciones de prueba:

$$\hat{u}_N = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

Donde las constantes  $c_i$  son escogidas para minimizar el funcional.

Luego de varios procedimientos, el problema es reducido a la solución de un sistema de ecuaciones lineales algebraicas.

### 3.1. Ejemplos Aplicativos

Ejemplo 1.

Consideremos la Ecuación de Poisson:

$$-\nabla^2 u = 2(x + y) - 4$$

evaluados en los puntos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ .

Las condiciones de contorno son:

$$u(0, y) = y^2, \quad u(x, 0) = x^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 2 - 2y - y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 2 - x - x^2.$$

Solución.

Sea  $v_i \in V = H_0^1(\Omega) = v \in L^2(\Omega), \nabla v \in L^2 \mathbf{y} \quad v = 0 \text{ en } C_1, V$  espacio vectorial.

y

$$C_1 = \{x = 0, \text{ si } 0 \leq y \leq 1\}$$

$$C_1 = \{y = 0, \text{ si } 0 \leq x \leq 1\}$$

$$C_2 = \{x = 1, \text{ si } 0 \leq y \leq 1\}$$

$$C_2 = \{y = 1, \text{ si } 0 \leq x \leq 1\}$$

Entonces:

$$-\nabla^2 u = f(x, y)$$

con  $f(x, y) = 2(x + y) - 4 ; (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$

$$-v_i \nabla^2 u = [2(x + y) - 4]v_i$$

con  $v_i \in V$  espacio vectorial.

$$-\int \int_D v_i \nabla^2 u dx dy = \int \int_D [2(x + y) - 4]v_i dx dy$$

con  $v_i \in V$

Aplicando la primera forma del teorema de Green, obtenemos:

$$\int \int_D \nabla u \nabla v_i dx dy - \oint_C v_i \nabla u \cdot \mathbf{n} ds - \int \int_D [2(x + y) - 4]v_i dx dy = 0$$

con  $v_i \in V$

$$\int \int_D \nabla u \nabla v_i dx dy - \oint_C 1 v_i \nabla u \cdot n ds - \oint_C 2 v_i \nabla u \cdot n ds - \int \int_D [2(x+y) - 4] v_i dx dy = 0$$

con  $v_i \in V$

$$\int \int_D \nabla u \nabla v_i dx dy - \int \int_D [2(x+y) - 4] v_i dx dy - \oint_C 2 v_i \nabla u \cdot n ds = 0$$

con  $v_i \in V$

$$\int \int_D \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y} - (2(x+y) - 4) v_i \right] dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) v_i(1, y) dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) v_i(x, 1) dx \right] = 0$$

Observemos que:

$$\int \int_D \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y} - (2(x+y) - 4) v_i \right] dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) v_i(1, y) dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) v_i(x, 1) dx \right] = 0$$

$$\int \int_D \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y} \right] dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) v_i(1, y) dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) v_i(x, 1) dx \right] =$$

$$\int \int_D [2(x+y) - 4] v_i dx dy$$

Luego haciendo:

$$L(v_i) = \int \int_D [2(x+y) - 4] v_i dx dy$$

y

$$a(u, v_i) = \int \int_D \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y} \right] dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) v_i(1, y) dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) v_i(x, 1) dx \right]$$

Luego la formulación variacional de nuestro problema original es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1, \text{ tal que :} \\ a(u, v_i) = L(v_i), \forall v_i \in H_0^1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Fácilmente se demuestra que  $a$  es una forma bilineal, continua y elíptica o coersiva y además  $L$  también es lineal y continua, por lo tanto aplicando el teorema de Lax - Milgran, garantizamos que el problema variacional (3.1) tiene una única solución.

Aplicando Galerkin:

$$\tilde{u} = x^2 + y^2 + \sum_{i=0}^2 c_i v_i$$

Entonces:

$$\tilde{u}_0 = x^2 + y^2 + c_0 v_0$$

$$\tilde{u}_0 = x^2 + y^2 + c_0 xy$$

con  $xy = v_0 \in H_0^1$

$$\tilde{u}_1 = x^2 + y^2 + c_0 v_0 + c_1 v_1$$

$$\tilde{u}_1 = x^2 + y^2 + c_0 xy + c_1 xy(x + y)$$

con  $xy(x + y) = v_1 \in H_0^1$

$$\tilde{u}_2 = x^2 + y^2 + c_0 v_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2$$

$$\tilde{u}_2 = x^2 + y^2 + c_0 xy + c_1 xy(x + y) + c_2 x^2 y(x + y)$$

$x^2 y(x + y) \in H_0^1$

Luego para  $i = 0$  se tiene:

$$\int \int_D \left[ \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial y} - (2(x + y) - 4)v_0 \right] dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x}(1, y) \cdot v_0(1, y) dy + \int_0^1 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial y}(x, 1) v_0(x, 1) dx \right] = 0$$

Esto es:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( [2x + c_0 y]y + [2y + c_0 x]x \right) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 (2(x + y) - 4)xy dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) v_0(1, y) dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) v_0(x, 1) dx \right] = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( [4xy + c_0 x^2 + c_0 y^2] \right) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 (2x^2 y + 2xy^2 - 4xy) dx dy - \left[ \int_0^1 (2y - 2y^2 - y^3) dy + \int_0^1 (2x - 2x^2 - x^3) dx \right] = 0$$

Luego de realizar los cálculos básicos de integración obtenemos:

$$c_0 = -\frac{7}{4}$$

Por lo que la función de prueba  $\tilde{u}$  queda escrita de la siguiente manera:

$$\tilde{u} = x^2 + y^2 - \frac{7}{4}xy$$

Cuya representación gráfica es la siguiente:

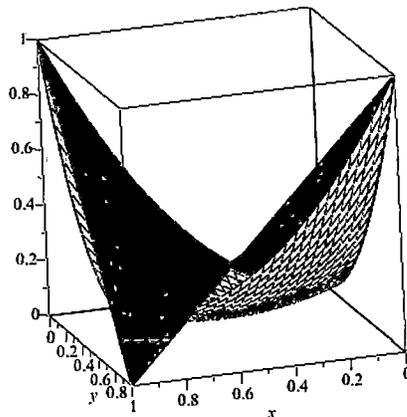


Figura 3.1: Representación gráfica con una función de prueba

Donde la grafica de color azul es la solución exacta y la de color verde es la solución aproximada.

Luego para  $i = 1$  se tiene:

$$\int \int_D \left[ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial y} - (2(x+y) - 4)v_1 \right] dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}(1, y) \cdot v_1(1, y) dy + \int \frac{\tilde{u}_1}{\partial y}(x, 1) \cdot v_1(x, 1) dx \right] = 0$$

Esto es:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( [2x + c_0y + 2c_1xy + c_1y^2]y + [2y + c_0x + 2c_1xy + c_1x^2]x \right) dx dy -$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (2(x+y) - 4)xy dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y)v_0(1, y) dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1)v_0(x, 1) dx \right] = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( [2x + c_0y + 2c_1xy + c_1y^2]y + [2y + c_0x + 2c_1xy + c_1x^2]x \right) dx dy -$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (2(x+y) - 4)xy dx dy - \left[ \int_0^1 (2 - 2y - y^2)y dy + \int_0^1 (2 - 2x - x^2)x dx \right] = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( [2x + c_0y + 2c_1xy + c_1y^2](2xy + y^2) + [2y + c_0x + 2c_1xy + c_1x^2](2xy + y^2) \right) dx dy$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 (2(x+y) - 4)xy(x+y) dx dy -$$

$$\left[ \int_0^1 (2 - 2y - y^2)(y + y^2) dy + \int_0^1 (2 - 2x - x^2)(x + x^2) dx \right] = 0$$

Luego de realizar los cálculos básicos de integración obtenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} & \frac{103}{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{18} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde resulta:  $c_0 = 0$  y  $c_1 = -1$

Por lo que la función de prueba  $\tilde{u}$  queda escrita de la siguiente forma:

$$\tilde{u} = x^2 + y^2 - xy(x + y)$$

Cuya representación gráfica es la siguiente:

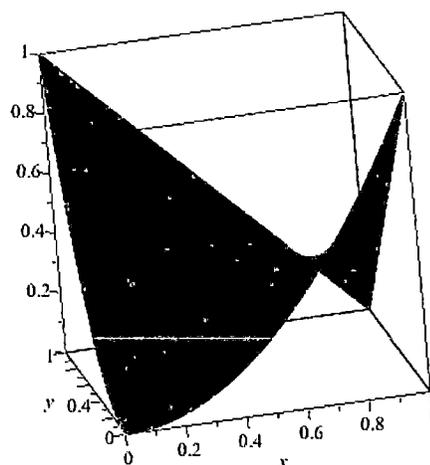


Figura 3.2: Representación gráfica con dos funciones de prueba

Podemos observar que las dos gráficas coinciden; esto quiere decir que la ecuación de Galerkin produce la solución aproximada  $\hat{u}$ , como se esperaba.

Observe que  $\hat{u}$  es, la solución exacta, y la razón es que es una combinación lineal de la base elegida de funciones.

Ejemplo 2.

Consideremos la siguiente ecuación de Poisson:

$$-\nabla^2 u = -6x - 2$$

Las condiciones de contorno son:

$$u(0, y) = y^2; \quad u(x, 0) = x^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 2 - 2y - y^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 2 - x - x^2.$$

De igual forma que en el ejemplo (1) se realizan los mismos procedimientos, obteniendo:

$$\tilde{u} = x^3 + y^2 + \sum_{i=0}^2 c_i v_i$$

Sea  $v_0(x, y) = xy$ ,  $v_1(x, y) = xy(x + y)$ ,  $v_2(x, y) = x^2y(x + y)$  y  $v_3(x, y) = xy^2(x + y)$  los cuales pertenecen a  $H_0^1$

Luego:

Luego para  $i = 0$ , reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1xy + c_1y^2]y + [2y + c_0x + 2c_1xy + c_1x^2]x \right) dx dy + \\ & \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)xy dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y)v_0(1, y)dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1)v_0(x, 1)dx \right] = 0 \\ & \int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1xy + c_1y^2]y + [2y + c_0x + 2c_1xy + c_1x^2]x \right) dx dy + \\ & \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)xy dx dy - \left[ \int_0^1 3y dy + \int_0^1 2x dx \right] = 0 \end{aligned}$$

Para  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1xy + c_1y^2](2xy + y^2) + [2y + c_0x + 2c_1xy + c_1x^2](2xy + x^2) \right) dx dy \\ & + \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)(x^2y + xy^2) dx dy - \left[ \int_0^1 3(y + y^2)dy + \int_0^1 2(x^2 + y^2)dx \right] = 0 \end{aligned}$$

Luego de integrar y resolver el sistemas de ecuaciones obtenemos:

$$c_0 = -\frac{1083}{178}$$
$$c_1 = \frac{195}{89}$$

Donde  $\tilde{u}$  lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$\tilde{u} = x^3 + y^3 - \frac{1083}{178}xy + \frac{195}{89}xy(x + y)$$

Cuya representación gráfica es la siguiente:

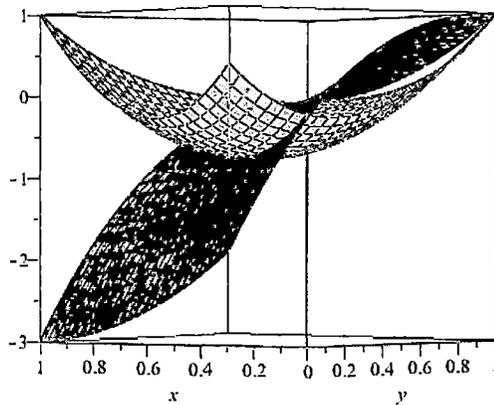


Figura 3.3: Representación gráfica con dos funciones de prueba

Donde la gráfica de color azul es la solución exacta y la de color verde es la solución aproximada.

Los procedimientos son los mismo que en el ejemplo (1):

Luego para  $i = 0$ , reemplazamos obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1(2xy + y^2) + c_2(3x^2y + 2xy^2) + c_3(2xy^2 + y^3)]y + \right. \\ & \quad \left. [2y + c_0x + c_1(x^2 + 2xy) + c_2(x^3 + 2x^2y) + c_3(2x^2y + 3xy^2)]x \right) dx dy + \\ & \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)xy dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y)v_0(1, y)dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1)v_0(x, 1)dx \right] = 0 \\ & \int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1(2xy + y^2) + c_2(3x^2y + 2xy^2) + c_3(2xy^2 + y^3)]y + \right. \\ & \quad \left. [2y + c_0x + c_1(x^2 + 2xy) + c_2(x^3 + 2x^2y) + c_3(2x^2y + 3xy^2)]x \right) dx dy + \\ & \quad \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)xy dx dy - \left[ \int_0^1 3y dy + \int_0^1 2x dx \right] = 0 \end{aligned}$$

Para  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1(2xy + y^2) + c_2(3x^2y + 2xy^2) + c_3(2xy^2 + y^3)](2xy + y^2) + \right. \\ & \quad \left. [2y + c_0x + c_1(x^2 + 2xy) + c_2(x^3 + 2x^2y) + c_3(2x^2y + 3xy^2)](x^2 + 2xy) \right) dx dy + \\ & \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)(x^2y + xy^2) dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y)v_1(1, y)dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1)v_1(x, 1)dx \right] = 0 \\ & \int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1(2xy + y^2) + c_2(3x^2y + 2xy^2) + c_3(2xy^2 + y^3)](2xy + y^2) + \right. \\ & \quad \left. [2y + c_0x + c_1(x^2 + 2xy) + c_2(x^3 + 2x^2y) + c_3(2x^2y + 3xy^2)](x^2 + 2xy) \right) dx dy + \\ & \quad \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)(x^2y + xy^2) dx dy - \left[ \int_0^1 3(y + y^2)dy + \int_0^1 2(x + x^2)dx \right] = 0 \end{aligned}$$

Para  $i = 2$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1(2xy + y^2) + c_2(3x^2y + 2xy^2) + c_3(2xy^2 + y^3)](2xy + y^2) + \right. \\ & \quad \left. [2y + c_0x + c_1(x^2 + 2xy) + c_2(x^3 + 2x^2y) + c_3(2x^2y + 3xy^2)](x^2 + 2xy) \right) dx dy + \\ & \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)(x^2y + xy^2) dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y)v_2(1, y)dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1)v_2(x, 1)dx \right] = 0 \\ & \int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1(2xy + y^2) + c_2(3x^2y + 2xy^2) + c_3(2xy^2 + y^3)](3x^2y + 2xy^2) + \right. \\ & \quad \left. [2y + c_0x + c_1(x^2 + 2xy) + c_2(x^3 + 2x^2y) + c_3(2x^2y + 3xy^2)](x^3 + 2x^2y) \right) dx dy + \\ & \quad \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)(x^3y + x^2y^2) dx dy - \left[ \int_0^1 3(y + y^2)dy + \int_0^1 2(x^3 + x^2)dx \right] = 0 \end{aligned}$$


---

Para  $i = 3$ :

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1(2xy + y^2) + c_2(3x^2y + 2xy^2) + c_3(2xy^2 + y^3)](2xy^2 + y^3) + [2y + c_0x + c_1(x^2 + 2xy) + c_2(x^3 + 2x^2y) + c_3(2x^2y + 3xy^2)](2x^2 + 3xy^2) \right) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)(x^2y^2 + xy^3) dx dy - \left[ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y)v_3(1, y) dy + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1)v_3(x, 1) dx \right] = 0$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( [3x^2 + c_0y + 2c_1(2xy + y^2) + c_2(3x^2y + 2xy^2) + c_3(2xy^2 + y^3)](2xy + y^2) + [2y + c_0x + c_1(x^2 + 2xy) + c_2(x^3 + 2x^2y) + c_3(2x^2y + 3xy^2)](x^2 + 2xy) \right) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 (6x + 2)(x^2y + xy^2) dx dy - \left[ \int_0^1 3(y^2 + y^3) dy + \int_0^1 2(x + x^2) dx \right] = 0$$

Luego de integrar y resolver el sistemas de ecuaciones obtenemos:

$$c_0 = -\frac{2223}{461}$$

$$c_1 = \frac{1824}{2479}$$

$$c_2 = \frac{1266}{3265}$$

$$c_3 = \frac{747}{1694}$$



Donde  $\tilde{u}$  lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$\tilde{u} = x^3 + y^3 - \frac{2223}{461}xy + \frac{1824}{2479}xy(x + y) + \frac{1266}{3265}x^2y(x + y) + \frac{747}{1694}xy^2(x + y)$$

Cuya representación gráfica es la siguiente:

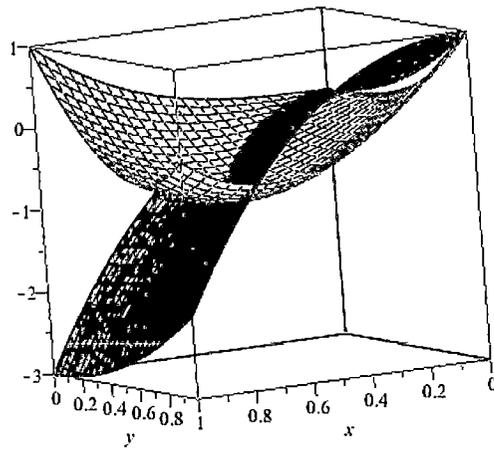


Figura 3.4: Representación gráfica con cuatro funciones de prueba

Observemos que la gráfica de color azul es la solución exacta y la de color verde es la solución aproximada.

# Conclusiones

1. Aplicando el método de Galerkin encontramos una solución débil para la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas; ya que el problema que se ha solucionado es la formulación débil del problema de Poisson.
2. Mediante el método de Galerkin fue posible resolver el problema débil o variacional, mediante un sistema de ecuaciones lineales algebraicas.
3. La solución encontrada del problema variacional (como se muestra en los ejemplos) se encuentra en el espacio de Sobolev  $H_0^1$ .
4. Las funciones de prueba con las que se han trabajado son del tipo polinómicas; aunque no se descarta la posibilidad de utilizar otro tipo de funciones linealmente independientes como lo exige el método de Galerkin, y de tal manera también que pertenezcan al espacio vectorial (construido), donde se encuentre la solución.

# Sugerencias

1. Se sugiere investigar el mismo método cuando el dominio tiene forma irregular.
2. En esta investigación sólo hemos utilizado funciones de prueba de tipo polinómicas; por lo que se sugiere investigar utilizando las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc.
3. Queda abierta la investigación para encontrar la solución aproximada de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas; pero utilizando otros métodos.

# Bibliografía

- [1] **L. Collantes; A. Coronel;** “*Formulación Variacional de Ecuaciones Diferenciales Parciales. Revista Integración. Vol. 28,2,2010*”;Pag. 133 - 152.
- [2] **A.J.Davies. The Finit Element Method. An Introduction with Partial Differential Equations. Secon Edition;** “*Oxford University Press*”;United States, 2011.
- [3] **B. Daya Reddy;**“*Introductory Functional Analysis. With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements. ;Editorial Springer Verlag*”; New York, 1998.
- [4] **V. Iório;** “*EDP Un Curso de Graduación. Instituto de Matemática y Ciencias Afines*”; Perú; 1999.
- [5] **S. Larson; V. Thommée;** “*Partial Differential Equation with Numerical Methods. Springer - Velag*”. Berlin - Heidelberg, 2008.
- [6] **C. Pita Ruiz;** “*Cálculo Vectorial. Primera Edición*”; Universidad Panamericana; México; 1995.
- [7] **A. Quarteroni; Alberto Valli;** “*Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer Verlag*”. Berlin - Heidelberg, 2008.
- [8] **A. Stanoyevitch;** “*Introduction to Numerical Ordinary and Partial Differential Equations using Matlab. Wiley - Sons*”; United Stated; 2005.