UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

INFORME FINAL

Código del proyecto:
Palabras Claves: Teorema del Paso de la Montaña, Problema Semilineal

1.0. DATOS PRELIMINARES

1.0 **Título:**

"Aplicación del Teorema del Paso de la Montaña a un Problema Semilineal"

2.0 **Autores** :

Nombre: Jorge Carlos Chirinos Salazar
Grados Académicos: Licenciado en Matemáticas
Categoria y Modalidad: Principal a tiempo completo
Teléfono: 979356007
Email: jchirinos154@hotmail.com

Nombre: Danessa Lisbeth Chirinos Fernández
Grados Académicos: Licenciado en Matemáticas
Magister en Ciencias Mención Matemáticas
Categoria y Modalidad: Asociado a tiempo completo
Teléfono: 966707523
Email: cursounprg@gmail.com

Nombre: Mardo Victor Gonzales Herrera
Grados Académicos: Licenciado en Matemáticas
Magister en Matemáticas
Categoria y Modalidad: Auxiliar a tiempo completo
Teléfono: 969019616
Email: mardo_unt@hotmail.com

Nombre: Raúl Eduardo Reupo Vallejos
Grados Académicos: Licenciado en Matemáticas
Magister en Informática educativa y Tecnologías de la Información
Categoria y Modalidad: Auxiliar a tiempo completo
Teléfono: 965467204
Email: rreupo@hotmail.com

3.0 **Resolución de Aprobación**
Resolución N^0 829-2017-D/FACFyM

4.0 **Tipo de Investigación**
Investigación Básica

5.0 **Área de Investigación**
Matemáticas

6.0 **Línea de Investigación**
Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales Parciales

7.0 **Localidad e Institución de Ejecución**

7.0.1 **Localidad:** Lambayeque

7.0.2 **Institución:** Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

8.0 **Duración del Proyecto:** 1 año

9.0 **Fecha de Inicio:** 25 Agosto 2017

10.0 **Fecha de término:** 25 Agosto 2018

2.0. CUERPO DEL INFORME

1.0 Resumen

En la investigación se abordó un estudio acerca de la existencia de al menos una solución de un problema semilineal, caracterizada por una ecuación diferencial parcial semilineal, junto con una condición sobre la frontera del tipo Dirichlet. Para garantizar la existencia de al menos una solución de este problema, se utilizó el Teorema del Paso de la Montaña. Para poder aplicar el Teorema del Paso de la Montaña, primero se obtuvo un funcional asociado al problema semilineal; luego se demostró la diferenciabilidad de este funcional; después se demostró que dicho funcional satisface la condición de Palais-Smale, y por último se probó que el funcional satisface las condiciones geométricas del Teorema del Paso de la Montaña. Así también se construyó un subespacio vectorial $H_\lambda(\Omega)$, del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, en el cual se garantizó la existencia de las soluciones del problema semilineal.

Abstract

In the research a study was made about the existence of at least one solution to a semilinear problem, characterized by a semilinear partial differential equation, together with a condition on the boundary, of Dirichlet type. To guarantee the existence of at least one solution to this problem, the Mountain Passage Theorem was used. To apply the Mountain Passage Theorem, we first obtained a functional associated with the semilinear problem; next we show the differentiability of this functional; next we show that it funtional satisfies the Palais-Smale condition, and finally it was proved that the functional satisfies the geometric conditions of the Paso de la Montaña Theorem. So too, a vector subspace was built $H_\lambda(\Omega)$, of the space of Sobolev, $H_0^1(\Omega)$, in which the existence of the solutions of the semilinear problem was guaranteed.

2.0 Introducción

Una gran variedad de fenómenos en física, ingeniería, mecánica, geometría, etc. se modelan a través de ecuaciones diferenciales. En particular, muchos de estos modelos adquieren la forma de ecuaciones elípticas semilineales. Uno de los grandes problemas de las ecuaciones semilineales, y en general de las ecuaciones diferenciales, es la de garantizar la existencia de al menos una solución.

Existen diversos métodos que ayudan a garantizar la existencia de las soluciones, tales como por ejemplo, el método de semigrupos, de optimización, variacionales, etc.

Dado el problema semilineal

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda u(x) &= |u(x)|^{p-2}u(x), \qquad x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, y $p \in \langle 2, 2^* \rangle$, con $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

se pretende garantizar la existencia de al menos una solución del problema semilineal (1), utilizando la teoría de variaciones y puntos críticos, en particular el Teorema del Paso de la Montaña.

3.0 Material y Métodos

4.0 Resultados

4.0.1 Definiciones y teoremas previos

En esta sección se enunciará algunas definiciones y resultados que ayudarán al cumplimiento del objetivo de este trabajo. Aquí también se enuncia el Teorema del Paso de la Montaña.

Definición 1. *Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces la aplicación $\| \cdot \|_{H_0^1} : H_0^1 \to \mathbb{R}$:*

$$\|u\|_{H_0^1} = (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma para $H_0^1(\Omega)$

Observación 1. *Si $\lambda > 0$ El conjunto*

$$H_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega); \int_\Omega \lambda u^2 dx < \infty\}$$

es un subespacio vectorial de $H_0^1(\Omega)$

Observación 2. *Sea $u \in H_\lambda$, entonces la aplicación $\|\cdot\|_\lambda : H_\lambda \to \mathbb{R}$:*

$$\|u\|_\lambda = (\int_\Omega [|\nabla u|^2 dx + \lambda u^2 dx])^{\frac{1}{2}}$$

es una norma para H_λ

Observación 3. *Las normas $\|\cdot\|_{H_0^1}$ y $\|\cdot\|_\lambda$ son equivalentes.*

En efecto. Sea $u \in H_\lambda$, entonces

$$\begin{aligned} \|u\|_\lambda^2 &= \int_\Omega [|\nabla u|^2 dx + \lambda u^2 dx] \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_\Omega u^2 dx \\ &= \|u\|_{H_0^1}^2 + \lambda \int_\Omega u^2 dx \\ &\geq \|u\|_{H_0^1}^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \|u\|_\lambda \tag{2}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|u\|_\lambda^2 &= \int_\Omega [|\nabla u|^2 dx + \lambda u^2 dx] \\ &= \|u\|_{H_0^1}^2 + \lambda \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|u\|_{H_0^1}^2 + \lambda C \|u\|_{H_0^1}^2 \qquad \text{(por la desigualdad de Poincaré)} \\ &= (1 + \lambda C)\|u\|_{H_0^1}^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\|u\|_\lambda \leq \sqrt{1 + \lambda C}\|u\|_{H_0^1} \tag{3}$$

Por lo tanto, de (2) y (3) se concluye que las equivalencia de las normas.

Observación 4. *H_λ es cerrado con $\|\cdot\|_{H_\lambda}$*

Primero se demostrará que H_λ es cerrado con $\|\cdot\|_{H_0^1}$, y luego por la equivalencia de normas se concluye que es cerrado con $\|\cdot\|_\lambda$.

En efecto. Sea $u \in \overline{H_\lambda}$, entonces existe una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_\lambda$ tal que $\|u_n - u\|_{H_0^1} \to 0$.

Como $u_n \to u$ entonces $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, es decir, existe un $M > 0$ tal que $\|u_n\|_{H_0^1} \leq M$.

Luego

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda}\|u\|_{L^2} &\leq \sqrt{\lambda}C\|u\|_{H_0^1}\\ &\leq \sqrt{\lambda}C(\|u-u_n\|_{H_0^1}+\|u_n\|_{H_0^1})\\ &< \sqrt{\lambda}C(\frac{\epsilon}{2}+M)\\ &< +\infty\end{aligned}$$

entonces

$$\lambda\|u\|_{L^2}^2 < +\infty$$

luego,

$$\lambda\int_\Omega u^2dx < +\infty$$

así, $u \in H_\lambda$. Por lo tanto H_λ es cerrado con $\|\cdot\|_{H_0^1}$; luego como $\|\cdot\|_{H_0^1}$ es equivalente a $\|\cdot\|_\lambda$, se concluye que H_λ es cerrado con $\|\cdot\|_\lambda$.

Observación 5. *Como H_λ es un subespacio cerrado de H_0^1, entonces H_λ es reflexivo, ya que H_0^1 es reflexivo. (Proposición 3.20, [2])*

Definición 2. *Se dice que $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ es un autovalor del operador laplaciano $-\Delta$ bajo las condiciones de frontera de Dirichlet, si existe $\varphi \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que*

$$\begin{aligned}-\Delta\varphi &= \lambda_1\varphi \ en\ \Omega\\ \varphi &= 0\ en\ \partial\Omega\end{aligned}$$

Observación 6. *Si λ_1 es un autovalor del operador laplaciano $-\Delta$, entonces $\lambda_1 > 0$. ([1], remark 1.7.5, p.32)*

Observación 7. *Si λ_1 es un autovalor del operador laplaciano $-\Delta$, entonces*

$$\lambda_1 = \underset{u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}}{min}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2dx}{\int_\Omega u^2dx}$$

([1], p.33). De esta última relación se deduce que para todo $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_\Omega|\nabla u|^2dx}{\int_\Omega u^2dx}$$

Teorema 1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $q \in L^\infty(\Omega)$ y $q(x) \geq 0$ en c.t.p $x \in \Omega$. Entonces el problema*

$$\begin{aligned}-\Delta u + q(x)u &= |u|^{p-2}u, \qquad en\ \Omega\\ u &= 0 \qquad\qquad en\ \partial\Omega\end{aligned} \tag{4}$$

con $p \in \langle 2, 2^*\rangle$, admite al menos una solución no negativa y no trivial.

Observación 8. *Sea el problema (1), con todas las condiciones dadas al inicio de la sección . Entonces si consideramos* $q(x) = \lambda > \lambda_1 > 0$, *se observa que* $q(x) \in L^\infty(\Omega)$, *y de esta manera se cumplen todas las condiciones del teorema 1, por lo tanto se concluye que este problema admite al menos una solución no negativa y no trivial.*

Teorema 2. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ *un conjunto abierto, acotado con frontera suave. Si existen* $a, b > 0$, *y,* $q \in \langle 1, 2^* - 1\rangle$ *tal que*

$$|f(x,t)| \leq a + b|t|^q$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. *Entonces* $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, *y además*

$$\langle I'(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx - \int_\Omega f(x, u(x))\varphi(x) dx \tag{5}$$

donde $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Teorema 3. *Sea* E *un espacio de Banach reflexivo. Si* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión acotada en* E. *Entonces existe una subsucesión* $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge en la topología débil* $\sigma(E, E^*)$.

Teorema 4. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un subconjunto abierto y acotado de* $\mathbb{R}^n$, *con* $n \geq 3$. *Entonces*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para todo } q \in [1, 2^*].$$

La incrustación es compacta si y solo si $q \in [1, 2^*\rangle$.

Definición 3. *Sea* X *un espacio de Banach y sea* $I : X \to \mathbb{R}$ *un funcional diferenciable. Una sucesión* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *tal que*

a) $\{I(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada, y*

b) $I'(u_n) \to 0$ *en* X^* *cuando* $n \to \infty$

es llamada sucesión de Palais-Smale (P-S)

Definición 4 (Condición de (P-S)). *Sea* X *un espacio de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Se dice que* I *satisface la condición de (P-S), si toda sucesión de (P-S) posee una subsucesión convergente.*

Teorema 5 (Teorema del Paso de la Montaña). *Sea* X *un espacio de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *tal que* I *satisface la condición de (P-S). Si* $I'(0) = 0$ *y*

a) *Existen* $\rho, \alpha > 0$ *tales que* $I/_{\partial B_\rho} > \alpha$

b) *Existe* $e \in X \backslash B_\rho$ *tal que* $I(e) < 0$

Entonces I *posee un valor crítico* $c \geq \alpha$, *definido por*

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

donde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \ / \ \gamma(0) = 0 \ \wedge \ \gamma(1) = e\}$$

4.0.2 Aplicación

Dado el problema (1)

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda u(x) &= |u(x)|^{p-2}u(x), \qquad & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, y $p \in \langle 2, 2^* \rangle$, con $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Aplicando el Teorema del Paso de la Montaña, se debe demostrar la existencia de al menos una solución no trivial débil no negativa del problema superlineal si y solo si $\lambda > \lambda_1$, donde λ_1 es el primer autovalor de $-\Delta$.

4.0.2.1 Obtención del Funcional asociado al problema (1)

El problema (1) se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda u(x) &= f(x,u), \qquad & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{6}$$

donde:

$$H_\lambda = H_\lambda(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega); \int_\Omega \lambda u^2 dx < \infty\}$$

es un subespacio de $H_0^1(\Omega)$; y

$$f(x,u) = |u(x)|^{p-2}u(x)$$

Por otro lado, el funcional asociado al problema (6) es, I, definido como:

$$\begin{aligned} I: \quad H_\lambda(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\to I(u) = \tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega [|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_\Omega F(x,u)dx \end{aligned}$$

donde:

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$$

entonces para el problema (1), el funcional I, estará definido como:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx \tag{7}$$

Esto es obvio, ya que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u|^2 + \lambda u^2]dx - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u|^2 dx + \lambda u^2]dx + \int_\Omega \frac{|u|^p}{p}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u|^2 dx + \lambda u^2]dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx \end{aligned}$$

Además como

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_\Omega [|\nabla u|^2 dx + \lambda u^2]dx$$

entonces el funcional I, también puede ser expresado como

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx, \qquad \forall\ u \in H_\lambda \tag{8}$$

4.0.2.2 Diferenciabilidad del funcional I

Para demostrar que $I \in C^1(H_\lambda, \mathbb{R})$, debemos garantizar las condiciones del teorema (2). En efecto,

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &= ||t|^{p-2}t| \\ &< \lambda + |t|^{p-1} \end{aligned}$$

entonces, tomando $a = \lambda > 0$ y $b = 1 > 0$. Además se sabe que $2 < p < 2^*$, por lo tanto $1 < p - 1 < 2^* - 1$, así se toma $q = p - 1 \in \langle 1, 2^* - 1\rangle$. Luego, existen $a, b > 0$ tal que

$$|f(x,t)| < a + b|u|^q$$

Por lo tanto por el Teorema (2), $I \in C^1(H_\lambda, \mathbb{R})$, y además

$$\langle I'(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx + \lambda\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx - \int_\Omega f(x,u(x))\varphi(x)dx \tag{9}$$

donde $u, \varphi \in H_\lambda(\Omega)$.

4.0.2.3 Condición de Palais-Smale (P-S) para I

En esta sección, debemos garantizar que el funcional I, satisface las condición de (P-S), es decir dado una sucesión $\{u_n\} \subset H_\lambda(\Omega)$ tal que

- $\{I(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, es acotada.

- $I'(u_n) \to 0$ en $H_\lambda(\Omega)$, cuando $n \to \infty$.

se debe probar que $\{u_n\}$ posee una subsucesión convergente.

En efecto, sea $\{u_n\} \subset H_\lambda(\Omega)$, tal que

$$|I(u_n)| = |\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^2 dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u_n|^p dx| \leq K \tag{10}$$

donde $K > 0$. Además, para $\varphi \in H_\lambda(\Omega)$

$$\langle I'(u_n), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)dx + \lambda\int_\Omega u(x)\varphi(x) - \int_\Omega f(x, u_n(x))\varphi(x)dx \to 0 \tag{11}$$

en $H_\lambda(\Omega)$, cuando $n \to \infty$.

Obsérvese que si $\varphi = u_n \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle I'(u_n), u_n\rangle &= \int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla u_n(x)dx + \lambda\int_\Omega u_n(x)u_n(x)dx - \int_\Omega f(x, u_n(x))u_n(x)dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \lambda\int_\Omega u_n^2 + \int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \lambda\int_\Omega |u_n|^2 dx - \int_\Omega |u_n|^p dx
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \lambda\int_\Omega |u_n|^2 dx - \int_\Omega |u_n|^p dx \tag{12}$$

a) **Afirmación 1: La sucesión $\{u_n\}$ es acotada.**

En efecto, de (10), se tiene

$$\begin{aligned}
K &\geq |I(u_n)| \\
&= |\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^2 dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u_n|^p dx \\
&\quad + \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u_n|^2 dx| \\
&= |(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + (\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{p})\int_\Omega |u_n|^2 dx + \frac{1}{p}\langle I'(u_n), u_n\rangle| \\
&\geq |(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + (\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{p})\int_\Omega |u_n|^2 dx| - \frac{1}{p}|\langle I'(u_n), u_n\rangle|
\end{aligned}$$

Luego, escogemos un N_0 tal que para cada $n \geq N_0$, se cumple $I'(u_n) \to 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
|I(u_n)| &\geq |(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \lambda(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\int_\Omega |u_n|^2 dx \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})|\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \lambda\int_\Omega |u_n|^2 dx| \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\|u_n\|_\lambda
\end{aligned}$$

Por otro lado obsérvese que que $(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) > 0$, entonces

$$\begin{aligned} K &\geq |I(u_n)| \\ &\geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\|u_n\|_\lambda^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\|u_n\|_\lambda^2 \leq \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}K$$

De esta manera, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

b) **Afirmación 2: La sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente en** $H_\lambda(\Omega)$

Se conoce que el espacio $H_\lambda(\Omega)$ es reflexivo, entonces por el Teorema 3, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, que la denotaremos simplemente como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, la cual converge débilmente en $H_\lambda(\Omega)$.

Luego por el teorema 4, se tiene que

$$u_k \to u \text{ en } L^p(\Omega)$$

para $p \in [2, 2^*\rangle$. Entonces, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega f(x, u_k)u_k dx \to \int_\Omega f(x, u)u dx$$

es decir

$$\int_\Omega [|u_k|^p] dx \to \int_\Omega [|u|^p] dx$$

ya que $f(x, u) = |u(x)|^{p-2}u(x)$.

Además, $\langle I'(u_k) - I'(u), u_k - u\rangle \to 0$, cuando $k \to \infty$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle I'(u_k) - I'(u), u_k - u\rangle &= \langle I'(u_k), u_k - u\rangle - \langle I'(u), u_k - u\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla u_k \nabla(u_k - u)dx + \lambda \int_\Omega u_k(u_k - u)dx - \int_\Omega u_k|u_k|^{p-2}(u_k - u)dx \\ &\quad \int_\Omega \nabla u \nabla(u_k - u)dx - \lambda \int_\Omega u(u_k - u)dx + \int_\Omega u|u|^{p-2}(u_k - u)dx \\ &= \int_\Omega \nabla(u_k - u)\nabla(u_k - u)dx + \lambda \int_\Omega |u_k - u|^2 dx - \\ &\quad \int_\Omega [u_k|u_k|^{p-2} - u|u|^{p-2}](u_k - u)dx \\ &= \|u_k - u\|_\lambda^2 - \int_\Omega [u_k|u_k|^{p-2} - u|u|^{p-2}](u_k - u)dx \end{aligned}$$

Luego, si $k \to \infty$, se tiene que

$$\|u_k - u\|_\lambda^2 \to 0$$

Por lo tanto la subsucesión converge en $H_\lambda(\Omega)$.

De la afirmación 1 y 2, se concluye que el funcional I satisface la condición de (P-S).

4.0.2.4 Condiciones Geométricas del Teorema del paso de la Montaña para I

a) **Afirmación 3:** $I'(0) = 0$
Es obvio.

b) **Afirmación 4: existen** $\rho, \alpha > 0$ **tales que** $I/_{\partial B_\rho} > \alpha$
Ahora, se demostrará que existen $\rho, \alpha > 0$ tales que $I/_{\partial B_\rho} > \alpha$, donde $B_\rho = B(0,\rho) \subset H_\lambda(\Omega)$.
En efecto, sea $u \in \partial B_\rho$, entonces $\|u\|_\lambda = \rho$. Luego

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}C_p\|u\|_{H_0^1}^p \\ &= \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{p}C_p\rho^p \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p}C_p\rho^{p-2})\rho^2 \end{aligned}$$

Luego, podemos escoger $0 < \rho < 1$ de tal manera que

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}C_p\rho^{p-2}) > 0$$

por otro lado, tomando

$$\alpha = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p}C_p\rho^{p-2})\rho^2 > 0$$

Entonces, existen $\rho, \alpha > 0$ tal que

$$I(u) > \alpha, \text{ con } \|u\|_\lambda^2 = \rho$$

c) **Afirmación 5: Existe** $e \in H_\lambda \backslash \overline{B_\rho}$ **tal que** $I(e) < 0$
Se conoce que λ_1 es un autovalor de $-\Delta$, entonces existe $\varphi \in H_0^1\backslash\{0\}$; además se puede afirmar que $\varphi \in H_\lambda\backslash\{0\}$. En efecto,

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx}{\int_\Omega \varphi^2 dx}$$

de donde se tiene que

$$\int_\Omega \varphi^2 dx \leq \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx}{\lambda_1}$$

y como $\lambda > \lambda_1 > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega \varphi^2 dx &\leq \lambda \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx}{\lambda_1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_1} \|\varphi\|^2_{H_0^1} \\ &< \infty\end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi \in H_\lambda$.

Luego para $t > 0$

$$I(t\varphi) = \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2_\lambda - \frac{|t|^p}{p}\int_\Omega |\varphi|^p dx$$

Luego si $t \to +\infty$, se tiene que $I(t\varphi) \to -\infty$. Por lo tanto es posible encontrar un $e = t_0\varphi \in H_\lambda \backslash \overline{B_\rho}$ con $t_0 > 0$ suficientemente grande, tal que $I(e) < 0$.

De las afirmaciones 3, 4 y 5, se concluye que las condiciones geométricas del Teorema del Paso de la Montaña quedan garantizadas.

Al probar todas las condiciones del Teorema del Paso de la Montaña, se concluye que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I(u) = c \qquad \wedge \qquad I'(u) = 0$$

donde

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

Es importante destacar que la no negatividad de la solución queda garantizada con el teorema 1.

5.0 Discusión

Según nuestros resultados obtenidos, demuestran que dado un problema semilineal de la forma:

$$\begin{aligned}-\Delta u + \lambda u(x) &= |u(x)|^{p-2}u(x), \qquad x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad x \in \partial\Omega\end{aligned} \tag{13}$$

entonces, es posible demostrar la existencia de al menos una solución no negativa y no trivial de dicho problema, aplicando el Teorema del paso de la Montaña. La aplicación de este Teorema fue posible, debido a que se logró asociar un funcional a dicho problema, el cual satisface las condiciones del Teorema del Paso de la Montaña. Además, las soluciones del problema semilineal, objeto de estudio en esta investigación, pertenecen al subespacio $H_\lambda(\Omega)$, el cual es un subespacio del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

6.0 Conclusiones

1. Se garantizó la existencia de al menos una solución del problema semilineal

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda u(x) &= |u(x)|^{p-2}u(x), \qquad && x \in \Omega \\ u &= 0, && x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{14}$$

2. Se obtuvo un funcional asociado al problema (14)

3. Se demostró que el funcional asociado al problema, satisfaga la condición de Palais-Smale.

4. Se aplicó el Teorema del Paso de la Montaña, para garantizar la existencia de al menos una solución del problema semilineal (14).

7.0 Recomendaciones

a) Se recomienda para futuras investigaciones, demostrar bajo qué condiciones, se verifica la existencia y unicidad de soluciones para problemas semilineales del tipo estudiado en esta investigación.

b) Se recomienda investigar si el Teorema del Paso de la Montaña se puede aplicar a otro tipo de problemas semilineales, para garantizar la existencia de soluciones de dichos problemas.

8.0 Referencias Bibliográficas

[1.] Badiale, M., Serra, E. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners. Existence Results via the Variational Approach*, Springer. London, (2011)

[2.] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer. New York, (2011)