UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

# "Modelamiento matemático del impacto de un choque positivo de ingresos externos a la economía sobre edificaciones no residenciales y residenciales"

Tesis presentada por:

**Bach. Mat. Vismar Jhony Calle Campoverde**

**Bach. Mat. Juan Francisco Inoñan Isique**

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE

**Licenciado en Matemática**

Asesor:

Lic. Mat. Elmer Lluen Cumpa

Lambayeque – Perú
2014

# Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo
# Escuela Profesional De Matemática

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada "Modelamiento matemático del impacto de un choque positivo de ingresos externos a la economía sobre edificaciones no residenciales y residenciales", presentada por la Bach. Mat. Vismar Jhony Calle Campoverde y por el Bach. Mat. Juan Francisco Inoñan Isique, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Lic. Mat. Amado Malca Villalobos
Presidente del Jurado

Mag. Oscar Santamaria Santisteban
Secretario del Jurado

Lic. Mat. Juan Cornetero Capitán
Vocal del Jurado

Fecha de defensa Abril del 2014

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

# "Modelamiento matemático del impacto de un choque positivo de ingresos externos a la economía sobre edificaciones no residenciales y residenciales"


Lic. Mat. Elmer Lluen Cumpa
Asesor

Bach.Mat. Vismar Jhony Calle Campoverde
Autor

Bach.Mat. Juan Francisco Inoñan Isique
Autor


Lambayeque – Perú
2014

# AGRADECIMIENTO

**El más sincero agradecimineto a Dios por su gran amor e iluminar nuestro camino.**
**Un agradecimiento especial a nuestros padres por su constante apoyo y concejo para lograr nuestras metas y ser mejores personas.**
**Un profundo agradecimiento a nuestro profesor asesor: Lic. Mat. Elmer Lluen Cumpa y a todos nuestros profesores por su gran ayuda y aporte en la realizacion de la presente tesis**

# DEDICATORIA

A Dios por su infinito amor.
A mi querido Abuelo Jose de la Rosa en el cielo, y a mi abuela Julia.
A mis padres Juan y Flor por su gran apoyo y a toda mi familia.
A nuestros profesores por sus concejos e incentivarnos a la investigación.

**Francisco Inoñan Isique**

A mi querida abuela Olga Correa Ríos, por su amor y comprensión.
A mis padres Beder y Ursula por su motivacion permanente, concejo e incentivarme a ser mejor cada día y sobretodo por su incondicional y constante apoyo.

**Vismar Calle Campoverde**

# *Índice general*

# *Introducción*

En esta tesis se presenta, mediante el uso de modelos de optimización intertemporal con bienes transables, y no transables, un modelo matemático para el Impacto de un Choque Positivo de Ingresos Externos a la Economía sobre Edificaciones no Residenciales y Residenciales.

La tesis se divide en dos capítulos:

En el primer capítulo, revisamos el marco teórico sobre el que descansa esta tesis. En la sección $(1 \cdot 1)$, se presentan definiciones básicas de economía, en la sección $(1 \cdot 2)$, se estudia el modelo de la enfermedad holandesa que es un modelo macroeconómico con efectos adversos en la economía, originado por el auge de la exportación primaria de un recurso no renovable; mientras que en la sección $(1 \cdot 3)$, se estudia la Teoría de los Booms de la Construcción ($TBC$), que es un complemento de la teoría de la Enfermedad Holandesa. La idea básica gira en torno a que un choque externo positivo de ingresos induce un aumento desproporcionado en la demanda de activos (algunos bienes de capital no transables, como las edificaciones no residenciales) frente a los bienes de consumo.

En el segundo capítulo, mediante el uso de modelos de optimización intertemporal con bienes transables y no transables se estudiará el impacto de un Choque Positivo de Ingresos Externos a la Economía sobre Edificaciones no Residenciales y usando un modelo de equilibrio parcial estudiamos el impacto de un Choque Positivo de Ingresos Externos a la Economía sobre Edificaciones Residenciales, en la sección $(2 \cdot 2)$, se determinan analíticamente la ecuaciones del modelo para las edificaciones no residenciales, en la sección $(2 \cdot 3)$, se determinan las ecuaciones de consumo y ahorro, en la sección $(2 \cdot 4)$, se determina la ecuación de arbitraje del mercado, en la sección $(2 \cdot 5)$, se estudia la producción del modelo para edificaciones residenciales, en la sección $(2 \cdot 6)$, se estudia el ajuste del modelo ante un choque positivo de ingresos, en la sección $(2 \cdot 7)$, se describe el marco teórico básico para la implementación del modelo para edificaciones residenciales, en la sección $(2 \cdot 8)$ usando un modelo de optimización intertemporal discreto se estudia el modelo para las edificaciones no residenciales (demanda de vivienda) , en la sección $(2 \cdot 9)$, se estudian las ecuaciones que describen el mercado de la vivienda, en la sección $(2 \cdot 10)$, se estudia el ajuste del mercado de la vivienda en una economía que enfrenta un choque positivo de ingresos.

# Capítulo 1

# *TEORIA DE LOS BOOMS DE CONSTRUCCION*

En las siguientes secciones hacemos un recorrido por las definiciones y resultados de la teoría económica que nos servirán en el siguiente capítulo.

## 1.1. Elementos básicos de Economía

El eterno problema de la escasez, que obliga a la gente hacer elecciones, es la base de la definición de la economía.

**Definición 1.1. Economía**, es la ciencia de la elección, la cual explica las elecciones que hacemos y como esas elecciones cambian conforme manejamos la escasez relativa de algún recurso. En general, en economía se trabaja con varias variables, por ello, para estudiar la influencia de cada una de ellas utilizaremos un mecanismo muy frecuente en economía: Supondremos que todas excepto una de las variables anteriores permanecen constantes, es decir, estudiaremos los efectos de la variación de una de esas variables, suponiendo que todas las demás permanecen constantes. A este supuesto se le denomina "CETERIS PARIBUS" $\Longrightarrow$ "Todo lo demás constante".

La economía puede ser vista desde la perspectiva de la Microeconomía o de la Macroeconomía.

**Definición 1.2. La Microeconomía**, es el estudio de las decisiones de individuos y empresas así como de la interacción de esas decisiones en los mercados. Estudia los precios así como los efectos de la regulación gubernamental.

**Definición 1.3. La Macroeconomía**, es el estudio de la economía nacional. Estudia los precios promedio y el empleo total nacional, ingreso y producción total nacional; los efectos de los impuestos, del gasto gubernamental y del déficit presupuestario sobre el empleo e ingresos totales nacionales, así como los efectos del capital y de las tasas de interés.

De acuerdo con quienes realiza el intercambio comercial un país, la economía se dice que es una **Economía Abierta** o una **Economía Cerrada**.

**Definición 1.4.** Una **Economía Abierta**, es una economía en que las personas, incluidas las empresas, pueden realizar el comercio de bienes y servicios con otras personas y las empresas de la comunidad internacional en general. El acto de la venta de bienes o servicios a un país extranjero se llama la **Exportación**. El acto de la compra de bienes o servicios de un país extranjero se llama la **Importación**. Juntos **Exportadores e Importadores** son llamados en conjunto el **Comercio Internacional**. La economía abierta incentiva a la **globalización**, a la alta dependencia entre países y a la búsqueda de tratados internacionales que pretendan liberar a las economías internas de los países, buscando elevar la producción mundial y los flujos de capital.

**Definición 1.5.** Una **Economía Cerrada**, es aquella en la que el comercio internacional no puede tener lugar, es decir no tiene importaciones ni exportaciones. El objetivo de una economía cerrada es la autosuficiencia ya que no se necesita comerciar con el exterior para cumplir con las necesidades de la población. Esto disminuye la legislación comercial y le da mayor control al gobierno del país en cuanto a política monetaria y fiscal.

El intercambio comercial entre países se mide a través de la llamada **Balanza Comercial**.

**Definición 1.6.** La **Balanza Comercial** es la diferencia entre las importaciones y las exportaciones de un país. Es un indicador económico que representa una gran parte en el balance de pagos del país.

La Balanza comercial incluye como gasto las importaciones, ayuda exterior y gasto e inversión nacional en el extranjero; estos gastos son el factor de débito. Como ingresos, o factor de crédito, incluye exportaciones, gasto extranjero en el país e inversiones extranjeras en el país. En el caso de que las importaciones sean mayores a las exportaciones la balanza comercial será negativa, habrá déficit en la balanza comercial.

En una economía abierta, pequeñas perturbaciones en alguna economía foránea, con la cual se tenga intercambio comercial, puede originar problemas en la economía nacional, una forma de medir cómo detectar estas perturbaciones es a través de los llamados **Choques de Ingresos**.

**Definición 1.7. Choque de Ingresos**, son aquellos choques comerciales, referidos a un aumento en los términos de intercambio o descubrimiento de recursos, o para las transferencias externas de ingresos. Se dice que es positivo, cuando por ejemplo un aumento en los términos de intercambio produce un mayor aumento en la construcción de viviendas.

Otra manera de detectar las perturbaciones en la economía es a través de los **Mercados**.

En términos económicos generales el Mercado designa aquel conjunto de personas y organizaciones que participan de alguna forma en la compra y venta de los bienes y servicios o en la utilización de los mismos. Los elementos de un mercado son, los **Bienes y Servicios**, la **Oferta de bienes y servicios**, la **Demanda de bienes y servicios** y el **Precio de los bienes y servicios**. Hablemos brevemente de estos elementos.

**Definición 1.8.** Los Bienes, son objetos materiales que por sus características tienen la capacidad de satisfacer necesidades humanas. Nosotros estamos interesados en los llamados:

- **Bienes Transables**, son aquellos bienes que están disponibles libremente a unos precios mundiales fijados exógenamente, por ejemplo: acero, cobre, oro, plata, petróleo, etc.
- **Bienes no Transables**, son aquellos bienes que no participan en el comercio internacional porque su costo de transporte es muy alto o porque son servicios que solo se pueden prestar dentro del país, por ejemplo: puentes, carreteras.
- **Bienes Sustitutos**, es aquel bien que sustituye determinado bien y satisface la misma necesidad. Ejemplos de Bienes Sustitutos son el té y el café, la carne de pollo y la carne de res, un pasaje en ómnibus y un pasaje en colectivo. Es importante subrayar que cuando se habla de bienes sustitutos se hace de dos tipos diferentes de bienes, así la sustituibilidad de uno de los bienes por otro siempre es una cuestión de grado. Un **bien** es un **sustituto perfecto** de otro, solamente si puede ser usado exactamente de la misma forma y con el mismo resultado y entonces es cuando un consumidor no tiene ningún incentivo para preferir un bien sobre el otro. El hecho resultante es que hay pocos bienes sustitutivos perfectos excepto entre dos bienes de la misma clase. No importa la proporción relativa en que se consumen los bienes, solo la cantidad absoluta. Por ejemplo, si existen 2 lápices, uno rojo

y uno azul y que al consumidor le gustan los lápices, pero le da igual el color, escoge una bolsita de lápices por ejemplo: 10 rojos y 10 azules, para el consumidor cualquier bolsita que contenga 20 lápices le va a dar igual ya que no le importa el color del lápiz.

- **Bienes complementarios**, son aquellos bienes que complementan a otro bien para que sea consumido.
- **Bienes homogéneo**s, son aquellos que el comprador considera similares en calidad pero lo suficientemente distintos en precio para justificar más comparaciones. Por ejemplo un Departamento en un mismo edificio.
- **Bienes de consumo**, son aquellos que no buscan producir otros bienes o servicios.
- **Bienes de capital**, son aquellos que tienen como fin producir o contribuir con la producción de otros bienes de consumo.
- **Bienes normales**, son aquellos cuyo consumo se incrementa cuando se incrementa el ingreso.
- **Bienes inferiores**, son aquellos cuyo consumo disminuye al aumenta al ingreso.
- **Bienes domésticos**, son todos los producidos en el país.
- **Bienes extranjeros**, son aquellos producidos fuera del país.

**Definición 1.9. Servicios**, agrupan una serie de actividades que proporcionan comodidad o bienestar a las personas, por ejemplo: la consulta médica que ofrece un doctor, las clases que dan los maestros, el espectáculo de un circo, los servicios bancarios y los que proporciona el gobierno, entre otros.

**Definición 1.10. Precio de bienes y servicios**, es la cantidad de dinero que debe darse a cambio de un bien o servicio: esto se denomina precio monetario. La razón de un precio a otro se denomina precio relativo.

**Definición 1.11. Demanda de bienes y servicios**, es la capacidad y deseo de comprar cantidades específicas de un bien o un servicio a los distintos precios en un determinado periodo de tiempo. La **demanda** representa la toma de decisiones de los **consumidores**, se refiere a la relación completa entre la cantidad demandada y el precio de un bien, y se ilustra a través de la **curva de demanda**.

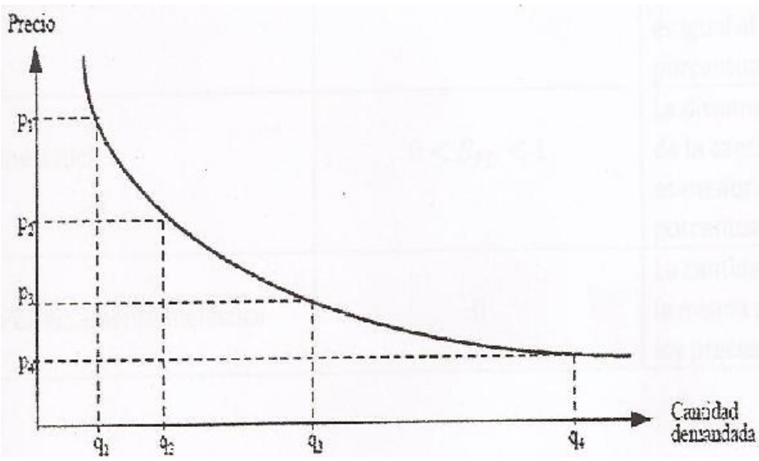


Figura 1.1: Curva de demanda

Un cambio en la demanda es un aumento (desplazamiento a la derecha) o una disminución (desplazamiento a la izquierda) de la curva de demanda.

Se rige por la llamada **Ley de la Demanda**, la cual surge del comportamiento del consumidor y afirma que cuanto más alto es el precio de un bien, menor es la cantidad demandada, suponiendo que no cambien todos los demás factores que influyen en el consumo (ceteris paribus). Es decir afirma que existe una relación inversa entre el precio y la cantidad de un bien.

**Definición 1.12. Elasticidad precio de la Demanda** ($E_{PD}$), expresa los cambios en el precio y la cantidad demandada como porcentajes del precio promedio y de la cantidad promedio y se define:

$$E_{PD} = \frac{\text{cambio porcentual de la cantidad demandada}}{\text{cambio porcentual en el Precio}}$$

En el siguiente cuadro se resumen los tipos de elasticidad precio de la demanda

Cuadro 1.1:

| **Tipo** | **Magnitud** | **Lo que Significa que** |
|---|---|---|
| Perfectamente Elástica | $\infty$ | El aumento más pequeño posible de precio ocasiona un aumenta infinitamente grande de la cantidad demandada |
| Elástica | $1 < E_{PD} < \infty$ | La disminución porcentual de la cantidad demandada excede al aumento porcentual en el precio |
| Elástica Unitaria | 1 | La disminución porcentual de la cantidad demandada es igual al aumento porcentual en el precio |
| Inelástica | $0 < E_{PD} < 1$ | La disminución porcentual de la cantidad demandada es menor que el aumento porcentual en el precio |
| Perfectamente Inelástica | 0 | La cantidad demandada es la misma a todos los precios |

**Definición 1.13. Elasticidad Ingreso de la Demanda** ($E_{ID}$), mide la sensibilidad de la demanda ante los cambios de ingreso, está definida por la siguiente relación:

$$E_{ID} = \frac{\text{cambio porcentual de la cantidad demandada}}{\text{cambio porcentual en el Ingreso}}$$

En el siguiente cuadro se resumen los tipos de Elasticidad Ingreso de la Demanda.

Cuadro 1.2:

| **Tipo** | **Magnitud** | **Lo que Significa que** |
|---|---|---|
| Elástica al Ingreso(bien normal) | $E_{ID} > 1$ | El aumento porcentual de la cantidad demandada es mayor que el aumento porcentual en el ingreso. |
| Inelástica al Ingreso(bien normal) | $0 < E_{ID} < 1$ | El aumento porcentual de la cantidad demandada es menor que el aumento porcentual en el ingreso. |
| Elasticidad negativa al Ingreso(bien inferior) | $E_{ID} < 0$ | Cuando el ingreso aumenta, la cantidad demandada disminuye. |

**Definición 1.14. Elasticidad Cruzada de demanda** ($E_{CD}$), mide la sensibilidad de la demanda de un bien ante un cambio de precio de un bien sustituto o complementario, está definida por la siguiente relación:

$$E_{CD} = \frac{\text{cambio porcentual de la Cantidad Demandada}}{\text{Cambio Porcentual en el Precio de un Sustituto o Complemento}}$$

En el siguiente cuadro se resumen los tipos de Elasticidad Cruzada de demanda.

Cuadro 1.3:

| **Tipo** | **Magnitud** | **Lo que Significa que** |
|---|---|---|
| Sustitutos Perfectos | $\infty$ | El aumento más pequeño posible de precio de un bien ocasiona un aumenta infinitamente grande de la cantidad demandada de otro bien. |
| Sustituto | $1 < E_{CD} < \infty$ | Si el precio de un bien aumenta, la cantidad demandada del otro bien también aumenta. |
| Independiente | 0 | La demanda de un bien permanece constante, independientemente del precio del otro bien. |
| Complemento | $< E_{CD} < 0$ | La demanda de un bien disminuye cuando el precio del otro bien aumenta. |

**Definición 1.15. Oferta de bienes y servicios**, es la capacidad y deseo de vender (producir) cantidades específicas de un bien o un servicio a los distintos precios en un determinado periodo de tiempo. La **oferta** representa las selecciones de los productores. La cantidad ofrecida de un bien o servicio es la cantidad que los productores planean vender durante un periodo dado a un precio en particular. Se refiere a la relación entre la cantidad ofrecida de un bien y su precio (ceteris paribus), y se ilustra a través de la **curva de oferta**.

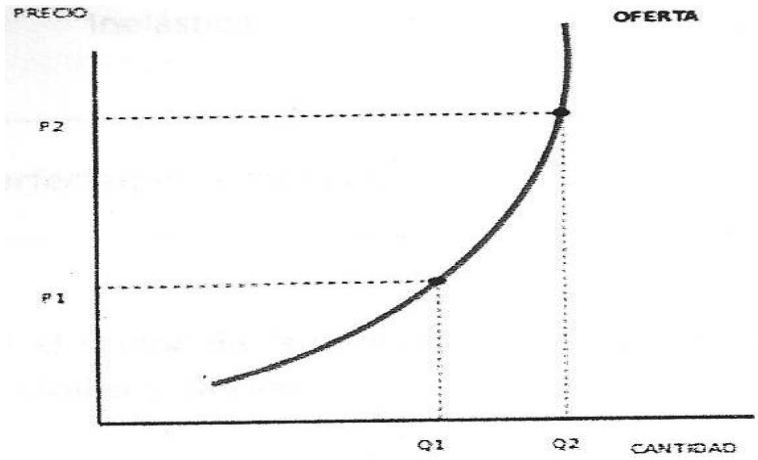


Figura 1.2: Curva de oferta

Un aumento de oferta ocasiona que la curva de oferta se desplace a la derecha. Una disminución de la oferta ocasiona que la curva de oferta se desplace a la izquierda.

Se rige por la llamada, **Ley de la Oferta**, que es un Principio que afirma que existe una relación directa entre el precio de un bien y la cantidad que los vendedores están dispuestos a ofrecer en un periodo definido, **ceteris paribus**. Nos detendremos un momento en analizar la **Elasticidad de la Oferta**.

**Definición 1.16. Elasticidad de la Oferta**, mide la sensibilidad de la cantidad ofrecida ante un cambio en el precio de un bien y se define de la siguiente manera:

$$\text{Elasticidad de la Oferta}(E_O) = \frac{\text{Cambio porcentual en la cantidad ofrecida}}{\text{Cambio porcentual en el precio}}$$

En el siguiente cuadro se resumen los tipos de elasticidad de la oferta

Cuadro 1.4:

| **Tipo** | **Magnitud** | **Lo que Significa que** |
|---|---|---|
| Perfectamente Elástica | $\infty$ | El aumento más pequeño posible de precio ocasiona un aumenta infinitamente grande de la cantidad ofrecida. |
| Elástica | $1 < E_0 < \infty$ | El aumento porcentual de la cantidad ofrecida excede el aumento porcentual en el precio. |
| Inelástica | $0 < E_0 < 1$ | El aumento porcentual de la cantidad ofrecida es menor que el aumento porcentual en el precio. |
| Perfectamente Inelástica | 0 | La cantidad ofrecida es la misma a todos los precios. |

En el sector de la construcción juega un rol preponderante los llamados Mercados de: capitales y Divisas.

**Definición 1.17. Mercado de Capital**, denominación que se utiliza para designar las diferencias operaciones financieras que se efectúan a medio y largo plazo y el conjunto de instituciones que facilitan la realización de tales operaciones. Comprende dos tipos principales:

- **Mercado de Crédito**, es aquel mercado en el que las operaciones financieras se realizan a través de préstamos de los bancos y de las instituciones de inversión.
- **Mercado de Valores**, es aquel en el que las operaciones de financiación se efectúan mediante las transacciones de diferentes títulos valores en la Bolsa de comercio.

En estos mercados los bienes transados son las llamadas **Acciones**, que son títulos o unidades de derecho de Propiedad de una Sociedad anónima abierta o cerrada o de una Sociedad encomiendita por Acciones. Pueden ser **nominales** o al **portador**, pudiendo diferenciarse series distintas por su Valor nominal o por el contenido de sus derechos. Las Acciones son títulos de Renta variable y comprenden las Acciones cotizadas en Bolsa (acciones cotizadas), las Acciones no cotizadas y otras formas de participación. Los valores de Renta variable suelen generar Ingresos en forma de dividendos a los llamados **Inversionistas**, que son las personas físicas o jurídicas que utilizan sus disponibilidades económicas para adquirir Acciones o títulos negociables en el **Mercado Financiero**, del cual forma parte el **Mercado de Capital**.

**Definición 1.18. Mercado de Divisas**, denominación que se emplea para designar al conjunto de transacciones que se realizan con monedas extranjeras entre los diferentes bancos, para atender las peticiones de sus correspondientes clientes.

En un sistema económico para llevar a cabo la producción de bienes y servicios se debe usar una combinación de los llamados **factores de producción**, cuyos elementos son: el trabajo, el capital y los recursos naturales

La utilización de cada uno de esos factores en el proceso productivo permite a sus dueños recibir una remuneración, llamada remuneración de los factores o remuneración factorial.

Así, la **remuneración de los factores específicos** es la renta que reciben los dueños del capital y la tierra por aportar estos factores al proceso productivo. Las rentas abarcan los intereses y las utilidades que perciben los dueños del capital y la tierra.

La **remuneración del factor móil intersectorial**, son los salarios que reciben los individuos como compensación por el uso de su trabajo en el proceso productivo.

Los precios de los **bienes sustitutos**, se encuentran fuertemente ligados entre sí. En este sentido no podrían tener cotizaciones demasiado dispares sin provocar una ola de compra en aquel mercado en que se encuentre relativamente más barato y una sobreoferta en que se encuentre más caro, hasta que estas mismas fuerzas de la oferta y a demanda hagan que los precios vuelvan a equilibrarse.

Ello deriva de lo que en economía se denomina **Ley del Precio Único**, esta ley establece que si no existen barreras al comercio un producto no puede tener dos o más precios distintos en un mismo mercado. Aplicado al comercio internacional, ello significa que cuando el precio en diferentes países se expresa en una misma moneda, el valor de un bien homogéneo debe ser igual.
Definiendo:

$P$ = Precio del producto en moneda nacional.
$P^*$ = Precio del producto en moneda extranjera.
$e$ = Tipo de cambio expresado como unidades de moneda local por unidad de moneda extranjera.

Entonces:

$$P = eP^*$$

Esta ley funciona bien para commodities que gocen de un activo mercado internacional, siempre y cuando el gobierno permita que el mismo se negocie libremente entre países.

Otro concepto importante en este trabajo es el llamado:

**Definición 1.19. Equilibrio del Mercado**, ocurre cuando, a los precios de mercado, todos los consumidores puedan adquirir las cantidades que deseen y los oferentes consigan vender todas las existencias. Existen dos tipos de equilibrio:

- **Equilibrio general**, situación de equilibrio de la economía en conjunto, en la que los precios de todos los bienes y servicios son tales que todos los mercados se encuentran simultáneamente en equilibrio.
- **Equilibrio parcial**, se llama así al estudio de la interacción entre la oferta y la demanda de un solo mercado, o de las interacciones en un grupo reducido de mercados o bienes, se considera que los efectos ingreso y los efectos sustitución no son significativos y, por lo tanto no afectan los demás equilibrios de la economía. Lo que permite suponer que los equilibrios en los otros mercados no dependen del equilibrio en el mercado estudiado y, por lo tanto, sus precios pueden tratarse como si fueran fijos.

Sobre los mercados actúan los llamados agentes económicos, conformada por las familias (consumidores), las empresas (productores) y el estado. A los criterios que sirven para ordenar en términos de satisfacción las distintas combinaciones de bienes, que conforman las cestas o canastas de consumo se denominan preferencias.

El agente económico debe seleccionar bienes dentro de lo que llamaremos su espacio de consumo al que representaremos por $X$. En este espacio las preferencias del agente, a las que representaremos por $\succcurlyeq$, introducen un preorden completo.

Formalmente las **preferencias**, a las cuales denotaremos por $\succcurlyeq$ se definen como una relación binaria sobre el producto cartesiano de su espacio de consumo $XxX$.

En este trabajo usaremos las llamadas **preferencias racionales**, es decir aquellas preferencias que son **completas, reflexivas y transitivas**, es decir cuando $\succeq$ definen un **preorden completo**.

**Ejemplo 1.** Sea $X = R^2_+$, escribimos: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \longleftrightarrow x_1 \geq y_1$ entonces $\succcurlyeq$ es un preorden completo.

***Demostración***

Sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$; $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2_+$

**a) Reflexividad**, como $x_1 \in \mathbb{R} \longrightarrow \quad x_1 \geq x_1$

De donde: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (x_1, x_2)$

**b) Transitividad**, supongamos: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \succcurlyeq (z_1, z_2)$, de donde:

$$x_1 \geq y_1 \wedge y_1 \geq z_1 \longrightarrow x_1 \geq z_1$$

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (z_1, z_2)$$

**c) Completitud**, sean $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow x_1 \geq y_1 \vee y_1 \geq x_1$

$$(x_1, x_1) \succcurlyeq (y_1, y_2) \vee (y_1, y_2) \succcurlyeq (x_1, x_2)$$

Decimos que una preferencia es representable por una función, llamada función de utilidad $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si se cumple:

$$x \succcurlyeq y \longleftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Si $X = \mathbb{R}^n$, unas preferencias $\succcurlyeq$ sobre $\mathbb{R}^n$ se dicen continuas si para todo par de sucesiones convergentes $x_n \longrightarrow x, y_n \longrightarrow y$ tales que $x_n \succcurlyeq y_n$ para cada $n$ se tiene $x \succcurlyeq y$.

La siguiente definición, nos permitirá dar una clasificación de la función de utilidad.

**Definición 1.20. Tasa Marginal de Sustitución entre dos Bienes (TMSB)**, indica en cuantas unidades se debe aumentar el consumo de uno de ellos, si se quiere mantener la utilidad constante cuando la disponibilidad del otro bien disminuye en una unidad. Los consumos de los restantes bienes se pueden suponer constantes.

Sea $u = u(x_1, x_2)$. Cuando $u(x_1, x_2) = u_0$, se tiene que podemos expresar $x_2$ en términos de $x_1$, es decir $x_2 = h(x_1)$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = h'(x_1)$$

De donde:

$$TMSB = \frac{dx_2}{dx_1} = h'(x_1)$$

Por otro lado, usando regla de la cadena en la ecuación $u(x_1, x_2) = u_0$, se tiene:

$$u_{x_1}\frac{dx_1}{dx_1} + u_{x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$$u_{x_1} + u_{x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}$$

$$TMSB = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}$$

$$TMSB = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}$$

Una función de utulidades es:

- **Estrictamente separable** con respecto a una partición determinada(un reparto de los distintos bienes que la componen en subconjuntos mutuamente excluyentes), si la relación marginal de sustitució entre dos bienes de dos subconjuntos distintos, es independiente de la cantidad consumida de cualquier otro bien perteneciente a otro subconjunto. En este caso, la función de utilidad se especifica en términos de una serie de subconjuntos de bienes, completamente independiente entre sí.

- **Funciones de utilidad débilmente separable** con respecto a una determinada partición, si la relación marginal de sustitución entre dos bienes cualesquiera perteneciente a uno de los subconjuntos establecidos, es independiente de la cantidad consumida de los bienes de otro subconjunto cualquiera. Es decir, que podemos analizar la demanda de esos dos bienes sin necesidad de conocer la de otros que no forman parte de la familia(agrupación de los bienes en la partición).

Como nuestro trabajo se realiza en el llamado **sector de la construcción**, revisemos algunas definiciones relacionadas con este sector.

**Definición 1.21.** Llamaremos **Edificaciones Residenciales**, a las Viviendas propiamente dichas, las cuales constituyen, bien de consumo durable o un activo tangible de inversión.

**Definición 1.22.** Las **Edificaciones no Residenciales**, son estructuras que conforman el capital no transable de la economía sirviendo como factor de producción de otros sectores del aparato productivo, como por ejemplo las bodegas, supermercados, fabricas, molino, carreteras, puentes, etc.

El llamado **Boom del sector construcción**, está asociado a un aumento considerable del precio de los bienes de dicho sector, con respecto a los precios de otros bienes de la economía.
En la siguiente sección analizamos con más detalle este concepto, en el caso particular peruano.

## 1.2. Enfermedad Holandesa

El Síndrome de Enfermedad Holandesa, corresponde a un modelo macroeconómico que tiene adversos efectos en la economía, originado por el auge de la exportación primaria de un recurso no renovable (por ejemplo, el agua, el gas, el petróleo, etc). Esto provoca la pérdida de competitividad de los restantes sectores exportadores, en especial los no tradicionales (por ejemplo, el camu camu, habas, mangos, uvas procesadas, pastas de frutas y pastas de pescado). Este modelo económico se refiere a las consecuencias que trae el nuevo flujo de recursos, donde se destaca la apreciación de la moneda nacional debido al mayor ingreso de divisas al país. Se ve un crecimiento sesgado, no equilibrado cuando un país sufre el síndrome holandés. Puede favorecer en el corto plazo, ya que aumentan los ingresos de un país y el PBI (Producto Bruto Interno). Los efectos a largo plazo van a depender de las medidas que adopte cada país, pero las exportaciones no tradicionales saldrán perjudicadas de todas formas. Esto es típico en países en vías de desarrollo, que al descubrir un recurso natural se llenan de dólares y por lo general no saben cómo invertir el excedente. El problema es cuando el país ya no puede exportar la materia prima y el crecimiento del país se basaba en estas exportaciones.

### 1.2.1. Origen

Este término económico nace a fines de los 60, principios de los 70 cuando los Países Bajos comienzan a experimentar un aumento en la riqueza producto del descubrimiento de un gran yacimiento de gas natural cerca del Mar del Norte. Esto provocó que aumentaran considerablemente las exportaciones de dicho producto, y por tanto, la entrada de divisas al país. Al haber un mayor ingreso de divisas, el florín (moneda neerlandesa) se apreció perjudicando de este modo las exportaciones no asociadas al recurso natural, por lo que el resto de bienes y servicios de Holanda vieron afectadas su competitividad. Una vez revaluada la moneda, las importaciones lograron ganar fuerza, haciendo que todo lo fabricado en el país encareciera. El sector empresarial de Holanda se vio en crisis, ya que habvía que manejar las divisas, neutralizarlas o se perderían cientos de Compañías, y eso fue lo que pasó, por lo que el desempleo aumentó.
Es por eso que toda experiencia que ve un ingreso anormal de divisas relacionado con sus recursos naturales, es llamada "enfermedad holandesa".

### 1.2.2. Consecuencias

La consecuencia de la Enfermedad Holandesa es amenazar con la economía local. La obtención de riquezas inesperadas gracias a los descubrimientos de recursos naturales (en el caso de Holanda con el gas) produce un incremento en la divisa, lo que perjudica la competitividad de las diversas exportaciones del país. Pero eso no es todo, ya que cualquier hecho que genere grandes entradas de dinero, como un incremento exhaustivo en el precio de algún recurso escaso, además de inversión extranjera directa y asistencia externa también generará efectos negativos en la economía del país.

Además, debido a las exportaciones, el ingreso de dólares aumenta considerablemente, lo que genera que la moneda local se devalué debido al tipo de cambio. Esto trae como consecuencia que los sectores como la industria tengan una merma. También, La distribución de abundancia puede ser desigual, lo que produce una enorme brecha entre los trabajadores más pagados y los menos pagados. Además, si hay una corrupción creciente.

En caso que los dólares sean convertidos en moneda local y se utilicen para adquirir bienes nacionales, el resultado dependerá si el tipo de cambio del país lo fija el banco central o es flexible.

Otras consecuencias que aquejan a esta enfermedad es, un incremento en el gasto público y en inflación, además del crecimiento en importaciones. Lo que a mediano plazo produciría una reducción en empleos y también de producción en bienes y servicios.

### 1.2.3. "Core-Model" de Corden y Neary

El modelo clásico y estático que analiza el fenómeno de "Enfermedad Holandesa" es el "Core-Model" de Corden y Neary (1982).El modelo supone una economía abierta y pequeña que produce tres tipos de bienes: los **bienes transables** ($T$), que están disponibles libremente a unos precios mundiales fijados exógenamente, los **bienes no transables** ($NT$), que son aquellos que no participan en el comercio internacional porque su costo de transporte es muy alto o porque son servicios que solo se pueden prestar dentro del país; y, el bien sobre el cual recae la **bonanza de precios o de cantidades (B)**.

El primer supuesto del modelo sugiere una economía pequeña y abierta que no puede afectar los precios de los bienes transables, determinados en el mercado internacional; esto a su vez supone que se cumple la Ley del Precio Único y que los bienes domésticos son sustitutos perfectos de los bienes extranjeros. Los precios de los no transables se determinan por la interacción entre la oferta y la demanda doméstica. El modelo básico supone que la produccivon de bienes se lleva a cabo mediante funciones neoclásicas de producción utilizando un factor especifico (capital) y un factor móvil intersectorialmente (trabajo). Como consecuencia de la bonanza la remuneración de los factores móviles tiende a igualarse, mientras que la remuneración de los factores específicos puede diferir. Detrás de la igualdad entre las remuneraciones de los factores utilizados en diferentes sectores, se encuentra el supuesto de precios y remuneraciones factoriales flexibles que aseguran el pleno empleo de los recursos.

Un supuesto adicional del modelo, que como se verá más adelante implica una restricción a su alcance, es el hecho de que la producción y el gasto doméstico de la economía deben ser iguales. Esto implica que la **balanza comercial** siempre se encuentre en equilibrio y que por ende, las **exportaciones** sean iguales a las **importaciones**.

Bajo estos supuestos, el modelo predice que un choque comercial positivo, como puede ser un aumento en los términos de intercambio, causa un mayor ingreso del sector en bonanza ($B$). El efecto total de dicho aumento se puede descomponer en un "Efecto Gasto" y en un "Efecto de Movimiento de Recursos". Si se considera que el sector en boom es un enclave, es decir, que todos sus factores son específicos, el primer efecto consiste en que un aumento del ingreso de la economía conduce a incentivar la demanda de consumo por bienes transables ($T$) y no transables ($NT$).

Suponiendo que se cumple la Ley del Precio Único y que la oferta de bienes transables ($T$) es infinitamente elástica, el exceso de demanda en este sector se corrige mediante un aumento de las importaciones. Por otro lado, suponiendo que la oferta de bienes no transables ($NT$) es perfectamente inelástica, el exceso de demanda en este sector se corrige mediante un aumento en el precio de estos bienes($P_{NT}$).

Si la tasa de cambio de la economía se define como la relación entre el precio de los transables ($P_T$) y el precio de los no transables ($P_{NT}$), es decir:

$$TC = \frac{P_T}{P_{NT}}$$

Los excesos de demanda de los dos sectores causan una apreciación real, vale decir, un aumento tanto relativo como absoluto del precio de los no transables con respecto al precio de los transables. Este aumento relativo tiene como consecuencia un movimiento de la mano de obra del sector transable hacia el sector no transable, dado que en este último se presenta un aumento en el valor de la productividad marginal del trabajo. Por lo tanto, la producción de bienes transables se deprime mientras que la producción de no transables se estimula. En este caso se presenta lo que se conoce como un proceso de desindustrialización directa.

Si el sector en bonanza ($B$) no es un enclave, el "Core−Model" predice un "Efecto de Movimiento de Recursos". Dicho efecto se puede presentar porque el aumento del precio o de la producción del bien en bonanza, conduce a un aumento en la productividad marginal del trabajo en dicho sector, sustrayendo mano de obra, dadas las condiciones de pleno empleo, tanto del sector transable como del no transable. Este efecto deprime la producción de dichos sectores, es decir, reduce su oferta, acentuando tanto los excesos de demanda del "Efecto−Gasto" como la apreciación real. Este proceso se conoce como la desindustrialización indirecta.

Obsérvese que al agregar los dos efectos, el choque comercial positivo indudablemente reduce la producción de transables ($T$), mientras que el efecto total sobre los no transables ($NT$) es ambiguo, dado que los efectos de gasto y de movimiento de recursos se contrarrestan. La apreciación real de la tasa de cambio reduce la competitividad internacional de los bienes transables y aumenta la dependencia de la economía hacia el bien en **bonanza** ($B$) como **fuente de divisas**.

Estos son los resultados del fenómeno de Enfermedad Holandesa en un modelo estático. Sin embargo, estos efectos finales pueden modificarse si se hacen algunas consideraciones

acerca de los supuestos.
Wunder (1992) afirma que si el capital es móvil intersectorialmente, las conclusiones del "Core−Model" pueden cambiar. Es importante señalar que la introducción del capital, como un factor móvil, implica que para conocer lo que sucede con la producción de cada sector, es indispensable saber en cuál factor es más intensivo relativamente. Por ejemplo, si el sector en bonanza y el sector de los no transables son intensivos en trabajo, la bonanza aumentará la demanda por mano de obra y por ende los salarios, provocando un aumento en los costos de producción que puede terminar en una sustitución de factores y en una reducción drástica de la producción de no transables.

El modelo de Corden y Neary (*l*982) arroja alguna luz sobre la relación entre los choques comerciales y los booms del sector de la construcción. Si se considera que la construcción es un bien no transable, el "Core−Model" predice que una bonanza comercial aumentará el precio y la producción de dicho sector. Sin embargo, el modelo deja algunos vacíos acerca de cómo se realiza el ajuste dinámico. Además, el producto de la construcción no sólo está conformado por un bien de consumo no transable como podrÃía ser la vivienda, sino que también incluye un bien de capital no transable como las estructuras no residenciales. En este sentido, el "Core−Model" tan sólo serviría para predecir que un choque comercial tiene como consecuencia un aumento en los precios, y en la producción de edificaciones residenciales como la vivienda. Estas consideraciones implican la necesidad de estudiar un modelo dinámico que adicionalmente introduzca bienes de capital no transable, como las edificaciones no residenciales.

Para terminar esta parte, parece importante señalar que el "Core−Model" permite concluir, como lo señalan Wunder (1992) y Cooper (1993), que el mecanismo crucial que causa la Enfermedad Holandesa no es la ocurrencia de un choque comercial, sino la entrada de divisas al país y sus efectos derivados del incremento en el ingreso y del estímulo de la demanda. Esto implica que los efectos sobre los bienes transables y no transables de la Enfermedad Holandesa, pueden presentarse en cualquier situación en la cual una economía se encuentra sometida a un flujo considerable de capitales extranjeros, incluyendo las transferencias de ayuda externa, la repatriación de ingresos y utilidades y las transferencias o remesas de trabajadores en el exterior. Esto parece claro cuando tan sólo se considera el "Efecto−Gasto". Hecha esta aclaración, de ahora en adelante a lo largo del presente trabajo cuando se hable de un choque positivo de ingresos, el término podrá aplicarse a los choques comerciales (relacionados con un aumento en los términos de intercambio o un descubrimiento de recursos), o a un aumento de las transferencias externas de ingresos.

## 1.3. Fundamentos de la Teoría de los Booms de Construcción

Muchas de las conclusiones de los modelos estáticos siguen siendo válidas para los modelos dinámicos, cuyo objetivo consiste en estudiar el ajuste de una economía ante un choque positivo de ingresos, haciendo especial énfasis en el comportamiento dinámico de la **cuenta corriente** definida como la diferencia entre el ahorro y la inversión. Tal vez en esto radica una de las principales ventajas de estos modelos con respecto a los modelos estáticos. Como señala Blanchard y Fischer (1989), dado que en una economía abierta el ahorro doméstico puede ser diferente a la inversión doméstica, la economía podrá acumular activos financieros netos contra el exterior, es decir, que algunos desbalances temporales como los déficits en cuenta corriente se podrán financiar pidiendo prestado en el exterior. Esto implica que la cuenta corriente no siempre está en equilibrio, como lo suponía el "Core−Model". Esta diferencia es fundamental ya que determina la separación entre las decisiones de ahorro privado e inversión.
Wunder (1992) señala que el modelo de estática comparativa del "Core−Model" puede ser visto como un caso específico y especial de un modelo dinámico, en el cual se tienen en cuenta las expectativas de los agentes y la evolución de las variables a lo largo del tiempo, como el consumo de los diferentes bienes y el ahorro.

La "Teoría de los Booms de la Construcción (TBC)" es un complemento de la teoría de la Enfermedad Holandesa. La $TBC$ intenta explicar cómo, al desagregar la economía en bienes de consumo y bienes de capital (activos), un choque positivo de ingresos afecta las expectativas de los agentes, su ahorro y la inversión agregada. La idea básica gira en torno a que un choque externo positivo de ingresos induce un aumento desproporcionado en la demanda de activos (algunos bienes de capital no transables, como las edificaciones no residenciales) frente a los bienes de consumo. Sus fundamentos se basan en la teoría del ingreso permanente, cuyo principio fundamental radica en que los agentes económicos tienden a suavizar su consumo a lo largo del tiempo, prefiriendo una trayectoria estable del consumo a una trayectoria inestable. De esta forma, se sugiere que el consumo no depende del ingreso corriente, como lo afirma la teoría keynesiana, sino que depende del ingreso permanente.

Utilizando esta teoría se pueden sacar algunas conclusiones acerca del comportamiento del ahorro y del consumo en una economía que se encuentra sometida a un choque positivo de ingresos.

Si el aumento en el ingreso del país se presenta como algo coincidencial que no se repetirá ni persistirá, en otras palabras, si se percibe como un choque de naturaleza totalmente transitoria, el consumo no aumentará y el aumento en el ingreso será ahorrado para suavizar la trayectoria del consumo a lo largo del tiempo. Por otro lado, si el boom se percibe como un choque de naturaleza permanente, la propensión marginal a ahorrar no se alterará y el consumo aumentará ante la variación del ingreso permanente.

Este último caso es el que describe el modelo estático del "Core−Model" en el cual se presenta un aumento en el consumo, en la producción y en el precio de los bienes no transables, y una reducción en la producción de los bienes transables.

Obsérvese que es la percepción expectante del agente económico, correcta o incorrecta, acerca de la duración de la bonanza, la que determina el cambio en el ahorro.

Así mismo, es importante señalar que el "Efecto−Gasto" típico del "Core−Model" se presentará en forma acentuada en el caso de una bonanza de naturaleza permanente, mientras que en un choque transitorio, dicho efecto se verá atenuado y postergado por el aumento del ahorro.

El incremento del ahorro se puede transmitir hacia el gasto doméstico dependiendo del ajuste en la inversión doméstica. Para esto es necesario suponer que los únicos activos que pueden mantener los agentes económicos son: los activos extranjeros, como los bonos, y el capital doméstico.

Si el país es una economía pequeña y abierta que tiene acceso a los mercados internacionales de capital y no tiene ningún tipo de restricción en la movilidad de capitales, la tasa de interés doméstica coincidirá con la tasa de interés real internacional; en cuyo caso, un aumento del ahorro doméstico debido a un choque transitorio de ingresos provocará, bajo el supuesto de **ceteris paribus**, una caída de la tasa de interés doméstica con respecto a la internacional. Esto implica que se preferirán los activos extranjeros a los domésticos y no se tendrá ningún efecto sobre la inversión doméstica.

Por el contrario, si en la misma economía existen controles y restricciones a la movilidad de capitales, se presentará una distorsión que se traducirá en una tasa de interés doméstica más alta que la internacional. Si en esta economía aumenta el ahorro, existirá una tendencia a la reducción de la tasa de interés doméstica que implicará un menor costo de los fondos para la inversión. Por lo tanto, en esta situación, un choque transitorio de ingresos podría conducir a un aumento de la inversión doméstica, que la $TBC$ asocia a las bonanzas en el sector de la construcción (aumento relativo de los precios y de la producción de las estructuras no residenciales). Este mecanismo se puede denominar el "Efecto Ahorro".

La $TBC$ también habla de un segundo determinante de la inversión relacionado con los cambios en el valor del producto marginal del capital. Este determinante se conoce como el **"Efecto de la Eficiencia Marginal de la Inversión" (EMI)** y está asociado a los incrementos del ingreso permanente. Como se explicó anteriormente, un choque de ingreso de naturaleza permanente genera un incremento tanto en la demanda como en el precio de los bienes no transables. En el corto plazo, el capital será un factor especifico de cada sector y por ende, para aumentar la producción de no transables y satisfacer su demanda, se requerirá aumentar el stock de capital a través de un aumento en la inversión.

Obsérvese que el efecto neto sobre la inversión estará determinado por el "Efecto Ahorro" y por el "Efecto de la $EMI$", y a su vez, la presencia de estos efectos dependerá de si los agentes económicos perciben el choque de ingresos como transitorio o como permanente. Siguiendo a Wunder (1992), en el caso de una bonanza de ingresos, los efectos sobre la inversión pueden ser:

Cuadro 1.5:

| **Bonanza esperada** | **Efecto ahorro** | **Efecto EMI** | **Efecto neto** |
|---|---|---|---|
| Transitoria | Positivo | Cero | Positivo |
| Permanente | Cero | Positivo | Positivo |

Es claro que en la realidad se puede encontrar en una situación intermedia, en la cual el choque de ingresos se percibe como algo parcialmente transitorio, en cuyo caso el ingreso permanente podría aumentar un poco y, por ende, habría una pequeña variación en el consumo reduciéndose el efecto sobre el ahorro. En este caso el efecto sobre la inversión sería positivo porque el pequeño efecto ahorro iría acompañado por un pequeño efecto de EMI.

Como se dijo anteriormente, estudiar el problema del ajuste de una economía ante un choque de ingresos en un marco dinámico, hace necesario distinguir entre los bienes de consumo y los bienes de capital. Supóngase que existen dos sectores en la economía que producen los bienes transables y no transables, y que se gastan en consumo o en inversión. De esta forma se puede hablar de cuatro tipos de bienes: los bienes de consumo transables (manufacturas) y no transables (servicios) y los bienes de capital transables (equipo) y no transables (estructuras no residenciales). Si el choque de ingresos se percibe como permanente, se acentuará el "Efecto-Gasto" del "Core-Model" y se presentará el efecto EMI aumentando, por ende, la demanda de bienes de consumo y de capital no transable (servicios y edificaciones no residenciales). Sin embargo, si prevalece el elemento transitorio del choque, aumentará mucho más la demanda por bienes de capital no transable con respecto a la demanda por bienes de consumo no transables, dado que aumenta el ahorro y la inversión. En este caso, el precio de los bienes de capital no transable, como las edificaciones no residenciales, aumentará mucho más que el precio de los bienes de consumo no transables, como los servicios. Estos últimos también aumentan un poco porque se reduciría su producción, al haber un movimiento de recursos de este sector hacia la producción de estructuras no residenciales. Esto es lo que se conoce como un **"boom de precios de la construcción"**. A su vez, si la oferta de bienes de capital no transable es elástica, se presentará no sólo un aumento en los precios sino también en las cantidades.

Obsérvese que si es válida la ley del precio único, los precios de los bienes de consumo y de capital transables (manufacturas y equipo) no cambian. Los posibles excesos de demanda que se presenten en este sector, por un boom de naturaleza permanente, serán corregidos por un aumento respectivo en las importaciones.

Resumiendo, de la **TBC** se podría decir que las dos hipótesis más importantes son las siguientes. En primer lugar, si en una economía pequeña y abierta y con controles y restricciones de capital, el choque de ingreso o la bonanza se percibe como un fenómeno totalmente transitorio, el ahorro aumentará y la tasa de interés doméstica caerá incentivando la inversión. Este aumento en la inversión se traducirá en un exceso de demanda de bienes de capital no transables, como las edificaciones no residenciales, que tendrá como consecuencia un aumento en sus precios y, si la oferta de este sector es elástica, un aumento en las cantidades. En segundo lugar, si el boom es de naturaleza permanente y el capital es un factor específico en cada sector productivo, la necesidad de satisfacer el exceso de demanda de bienes de consumo no transable, es decir, de aumentar su producción, incentivará la demanda de bienes de capital no transable y por ende será necesario que aumente la inversión. En este caso también se presentará un estímulo a la construcción, es decir, a la producción de edificaciones no residenciales.

Warr (1994) afirma que si la TBC es válida, en una economía sometida a un choque positivo y transitorio de ingresos deben encontrarse, además de los fenómenos de Enfermedad Holandesa, las siguientes características. En primer lugar, dada una tasa de interés internacional, debe existir una relación positiva entre las variaciones de las tasas del ahorro doméstico y las variaciones de las tasas de inversión doméstica; en segundo lugar, las variaciones de la tasa de inversión deben estar más asociadas a la magnitud absoluta de los choques comerciales (o de ingreso), que a su signo; en tercer lugar, el precio de los bienes de capital no transable, tales como las edificaciones no residenciales, debe aumentar con respecto a los precios de los bienes de capital transables, como la maquinaria y el equipo y Con respecto a los precios de los bienes de consumo transable, como las manufacturas, y no transable, como los servicios y la vivienda; por último, el precio de los insumos no transables usados en el sector de la construcción y el precio de la mano de obra de este sector también deben responder en forma similar.

De nuevo es importante señalar que la TBC se concentra en explicar el ajuste del capital no transable, como las estructuras no residenciales, dejando de lado, o mejor subvalorando, el efecto que el choque positivo de ingresos puede tener sobre otro producto del sector de la construcción, como lo es la vivienda.

# Capítulo 2

# MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL IMPACTO DE UN CHOQUE POSITIVO DE INGRESOS EXTERNOS A LA ECONOMÍA SOBRE EDIFICACIONES NO RESIDENCIALES Y RESIDENCIALES

## 2.1. Preliminares

En este capítulo, consideramos la división entre las edificaciones residenciales o viviendas y las edificaciones no residenciales o capital no transable. En ambos casos supondremos que podemos hablar de un bien homogéneo desde el punto de vista de los servicios que presta. De esta forma analizaremos por separado, cuáles son los efectos de un choque positivo de ingresos en el mercado de las edificaciones no residenciales (capital no transable) y cuáles son dichos efectos en el mercado de la vivienda.

Así para las edificaciones no residenciales, se plantea un modelo que tiene sus bases y fundamentos en los modelos de optimización intertemporal, que estudian el comportamiento de la cuenta corriente y de los sectores transable y no transable de una economía sometida a un choque comercial positivo o a un incremento en sus transferencias externas. Para el caso de la vivienda, se utilizan algunos de los resultados que se deducen de la parte del consumo y del ahorro del modelo para las edificaciones no residenciales, y se plantea un modelo de equilibrio parcial que igualmente estudia las consecuencias sobre el mercado de las edificaciones residenciales de un choque positivo de ingresos.

Antes de presentar el modelo, revisemos rápidamente las siguientes definiciones.

## Sistemas Hamiltonianos

Analizar los sistemas físicos interpretando todas las fuerzas vectoriales que intervienen en ellos es poco atractivo, y siempre se ha intentado buscar una ley más cómoda para describir el movimiento que la **Segunda ley de Newton o Ley de fuerza de Newton**:

**El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime**

En términos matemáticos esta ley se expresa mediante la relación:

$$F_{neta} = \frac{dP}{dt}$$

Dónde: $P$ es el momento lineal, y $F_{neta}$ es la fuerza total o fuerza resultante.

Suponiendo que la masa es constante y que la velocidad es muy inferior a la velocidad de la luz la ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$P = mV$$

Donde $m = Cte$ es la masa del cuerpo y $V$ su velocidad. Es decir:
Ver texto [9] de la bibliografia para comprender la ecuacion anterior.

$$F_{neta} = \frac{dP}{dt} = \frac{d(mV)}{dt} = m\frac{dV}{dt} = ma \longrightarrow F_{neta} = ma$$

Dado un sistema de partículas, $q$ representará las coordenadas de posición de una partícula, que desconocemos cómo evolucionan con el tiempo y $\dot{\mathbf{q}}$ su evolución en el tiempo, entonces a la función denotada por $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ le llamaremos **función Lagrangiana** del sistema de partículas dado. Si satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad \text{ver [9]}$$

A la ecuación anterior se le llama **Ecuación de Euler-Lagrange**. Estas ecuaciones nos ayudarán a deducir las ecuaciones de Hamilton que estudiamos a continuación.

# Ecuaciones de Hamilton

Si tenemos un sistema con **n** partículas entonces las ecuaciones de Euler−Lagrange son **n** ecuaciones de segundo orden cuyas soluciones, las **n** funciones $g_i(t)$, vienen determinadas por **2n** valores iniciales correspondientes a las coordenadas y velocidades iniciales. El enfoque de Hamilton permitirá conseguir **2n** ecuaciones diferenciales de primer orden con esas mismas **2n** condiciones iniciales. Ahora las soluciones, además de las $g_i(t)$, serán otras **n** variables independientes, las cantidades de movimiento generalizadas definidas por:

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Definiendo así una nueva descripción en el llamado **espacio de fases** $(q, p)$ frente a la anterior descripción $(q, \dot{q})$. El paso de una descripción a otra viene definido por la llamada **transformación de Legendre** que explicamos a continuación.

Por comodidad vamos a trabajar con solo un par de variables en las funciones. De lo que se trata es que dada una función en unas variables, pasar a otra transformada de forma que las primeras derivadas sean la inversa una de la otra, es decir:

$$f(x_1, x_2) \longrightarrow g(v_1, v_2)$$

De modo que:

$$v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \longrightarrow x_i = \frac{\partial g}{\partial v_i}$$

Esto se consigue por ejemplo si definimos la función $g$ de la forma siguiente:

**caso 1.**

$$g(v_i, w_i) = x_i v_i - f(x_i, w_i)$$

Calculemos la diferencial total de la función $g$

$$dg = \frac{\partial g}{\partial v_i}.dv_i + \frac{\partial g}{\partial w_i}.dw_i = x_i.dv_i + v_i dx_i - df$$

$$dg = x_i.dv_i + v_i dx_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = x_i.dv_i + v_i dx_i - v_i dx_i = x_i dv_i$$

$$\frac{\partial g}{\partial v_i}.dv_i = dg = x_i dv_i \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial v_i} dv_i = x_i dv_i$$

$$\frac{\partial g}{\partial v_i}.dv_i = x_i dv_i$$

$$x_i = \frac{\partial g}{\partial v_i}$$

**caso 2.** En el caso de que las funciones dependan de otras variables que no formen parte de la transformación, se tiene:

$$g(v_i, w_i) = x_i v_i - f(x_i, w_i)$$

De donde:

$$\frac{\partial g}{\partial v_i}.dv_i + \frac{\partial g}{\partial w_i}.dw_i = x_i.dv_i + v_i dx_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}.dx_i + \frac{\partial f}{\partial w_i}.dw_i$$

Sustituyendo: $v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ en la ecuación anterior:

$$\frac{\partial g}{\partial v_i}.dv_i - \frac{\partial g}{\partial w_i}.dw_i = x_i.dv_i + v_i dx_i - v_i dx_i - \frac{\partial f}{\partial w_i}.dw_i = x_i dv_i - \frac{\partial f}{\partial w_i}.dw_i$$

$$\frac{\partial g}{\partial v_i}.dv_i + \frac{\partial g}{\partial w_i}.dw_i = x_i.dv_i - \frac{\partial f}{\partial w_i}.dw_i$$

Ahora sustituyendo $x_i = \frac{\partial g}{\partial v_i}$ en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial g}{\partial v_i}.dv_i + \frac{\partial g}{\partial w_i}.dw_i = \frac{\partial g}{\partial v_i}.dv_i - \frac{\partial f}{\partial w_i}.dw_i$$

$$\frac{\partial g}{\partial w_i}.dw_i = -\frac{\partial f}{\partial w_i}.dw_i$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial g}{\partial w_i} = -\frac{\partial f}{\partial w_i}$$

Trasladando esto a nuestro problema de Mecánica tenemos que buscar una nueva función:

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) \longrightarrow H(q,p,t)$$

De modo que:

$$\text{si} \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \longrightarrow \text{Demostraremos que} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Para ello se define el **Hamiltoniano** del modo siguiente:

$$H(q,p,t) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$$

Y así:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt = \dot{q}dp + pd\dot{q} - d\mathcal{L} = \dot{q}dp + pd\dot{q} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}dq + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}d\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt\right)$$

Usando $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt = \dot{q}dp + pd\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}dq - pd\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

$$\frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}dq - \dot{q}dp - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

De donde:

$$\frac{\partial H}{\partial p}dp = \dot{q}dp \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$

**Nota:**

$$\frac{\partial H}{\partial q}dq = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}dq \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = -\frac{d}{dt}(p) = -\dot{p} \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

En donde se han aplicado las ecuaciones de Euler$-$Lagrange en la segunda identidad.

Hemos llegado pues a las ecuaciones que buscábamos. A partir de una nueva función definida en el espacio de fases, el Hamiltoniano del sistema viene dada por:

$$H(q,p,t) \equiv p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$$

Llegamos a un sistema de $2n$ ecuaciones del movimiento de primer orden equivalentes a las de Euler$-$Lagrange, llamadas **ecuaciones canónicas de Hamilton**:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Euler-Lagrange (Ecuac. 2do orden)}\\ \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}})-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0\end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\text{Ecuac. Hamilton (Ecuac. 1er orden)}\\ \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \\ \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{array}\right\}$$

Análogamente para el caso general de $n$ variables se tiene:

$$H(q,p,t)\equiv\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-\mathcal{L}(q,\dot{q},t);p=(p_1,\ldots,p_n);q=(q_1,\ldots,q_n)$$

Lo anterior nos permite definir un sistema Hamiltoniano.

**Definición 2.1.** Sea $E$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $H\in C^2(E)$, donde $H=H(x,y)$ con $x,y\in\mathbb{R}^n$. Un sistema de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\partial H}{\partial y}\\ \dot{y}&=-\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Con:

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\left(\frac{\partial H}{\partial x_i},\ldots,\frac{\partial H}{\partial x_n}\right)^t$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=\left(\frac{\partial H}{\partial y_i},\ldots,\frac{\partial H}{\partial y_n}\right)^t$$

Se denomina sistema Hamiltoniano con $n$ grados de libertad en $E$ y $H$ se llama función hamiltiana.

**Ejemplo 2. (péndulo esférico)**: Sean $x=(x_1,x_2);y=(y_1,y_2)$, la función Hamiltoniana:

$$H(x,y)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2)$$

es la función energía del péndulo esférico:

Entonces de $(2 \cdot 1)$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_1 &= -x_1 \\ \dot{y}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

Este sistema es equivalente al par de osciladores armónicos desacoplados:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Todos los sistemas Hamiltonianos son conservativos: la función Hamiltoniana o la energía total permanece constante a lo largo de las trayectorias del sistema.

**Teorema 2.1.** ***(Conservación de la energía)***: *La energía total $H(x, y)$ del sistema Hamiltoniano $(2 \cdot 1)$ permanece constante a lo largo de las trayectorias del sistema $(2 \cdot 1)$*

***Demostración***

Demostración, la derivada total de la función Hamiltoniana $H(x, y)$ a lo largo de las trayectorias $(x(t), y(t))$ del sistema $(2 \cdot 1)$ es:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0$$

Por lo tanto $H(x, y)$ es constante sobre cualquier curva solución de $(2 \cdot 1)$ y las trayectorias de $(2 \cdot 1)$ yacen sobre las superficies $H(x, y) = Cte.$

Una característica importante de la macroeconomía moderna es el énfasis que esta pone en los aspectos dinámicos del funcionamiento de los mercados. Ello hace necesario el desarrollo de modelos de tipo intertemporal, en los que las decisiones de los agentes económicos dependen no sólo de las condiciones presentes de mercado, sino que también de las que se estima prevalecerán a futuro. Pero ¿qué es un modelo de tipo intertemporal?. En lo que sigue trataremos de dar respuesta a la interrogante planteada.

**Modelo de Optimización Intertemporal**

El propósito de esta sección es introducir el modelo básico de elección intertemporal desde la perspectiva del comportamiento racional del individuo.

Un modelo de elección intertemporal es aquel en el que se considera que el individuo vive a lo largo de dos o más periodos ($T$), además supone que este individuo puede destinar su ingreso a consumo presente o a consumo futuro. Es decir es un modelo con $T$ periodos, que se define a continuación.

**Definición 2.2. Modelo con $T$ periodos:** Es aquel modelo en el que el número de periodos sobre los cuales el individuo (familia) debe decidir (horizonte de planificación) es $T$. Existen dos tipos de modelo con $T$ periodos:

1. **Modelos de horizonte finito ($T$ finito)**: En este caso, el horizonte $T$ está dado por la esperanza de vida del individuo. Si los individuos no están preocupados por lo que suceda después de su muerte, lo óptimo será no dejar riqueza alguna sin consumir en el periodo $T$ (en realidad, lo óptimo sería dejar deuda en $T$, pero nadie le va a permitir eso)

2. **Modelos de horizontes infinitos ($T$ infinito)**: Ocurre cuando las familias son altruistas y se preocupan por sus descendientes, el horizonte de planificación ya no es tan obvio. $T$ se extiende más allá de la esperanza de vida, ya que se otorga alguna importancia al consumo de los descendientes en las siguientes generaciones. Es decir en este modelo se tiene que $T \longrightarrow \infty$.

En este trabajo consideraremos funciones de producción neoclásicas, cuya teoría repasamos a continuación.

**Definición 2.3. Funciones homogéneas de orden $m$** : Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, es homogénea de grado $m$, si cumple:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \lambda > 0; m \in \mathbb{N}$$

Si $m = 1$, diremos simplemente que la función es linealmente homogénea.

**Ejemplo 3.** La función $f(x, y) = \sqrt{xy}$, es linealmente homogénea, puesto que si $\lambda > 0$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(\lambda x)(\lambda y)} = \sqrt{\lambda^2(xy))} = |\lambda|\sqrt{xy} = \lambda\sqrt{xy} = \lambda f(x, y)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$$

**Definición 2.4. Función de producción neoclásica**: Es aquella función de producción $f$ que cumple las siguientes propiedades:

1. Tiene rendimientos constantes a escala, es decir $f$ es homogénea de grado uno, esto significa que si el capital y el trabajo se multiplican por un número $\lambda$, entonces la producción total también se multiplica por $\lambda$.

2. Los rendimientos del capital y del trabajo son decrecientes cuando estos se consideran por separado. Es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial K} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} < 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial L} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} < 0$$

   Donde $K$ es el capital y $L$ es el trabajo.

3. Satisface las condiciones de Inada:

$$\begin{aligned} \lim_{K \to 0} \frac{\partial f}{\partial K} &= \infty \\ \lim_{K \to \infty} \frac{\partial f}{\partial K} &= 0 \\ \lim_{L \to 0} \frac{\partial f}{\partial L} &= \infty \\ \lim_{L \to \infty} \frac{\partial f}{\partial L} &= 0 \end{aligned}$$

En la siguiente sección presentamos el modelo para las edificaciones no residenciales.

## 2.2. El Modelo para las Edificaciones no Residenciales

Este modelo considera tres tipos de bienes: los **bienes de consumo transable** $(C_T)$ , los **bienes de consumo no transable** $(C_N)$ y los **bienes de capital no transable** $(K)$. Es decir el modelo considera dos sectores productivos: el sector transable y el sector no transable. Simplemente se supone que al no existir bienes de capital transable, se está afirmando que todo el producto del sector transable se consume, mientras que el producto del sector no transable se distribuye entre consumo e inversión.

Además se supondrá una economía pequeña y abierta con un solo agente, que tiene un horizonte de vida infinito, y que ofrece una cantidad fija de trabajo igual a la unidad. El agente acumula capital no transable ($K$), asociado a las estructuras no residenciales, para alquilar a una tasa determinada por el mercado competitivo de factores ($r$). El individuo puede aumentar el stock de capital a través de la inversión ($I$) siguiendo la ecuación de acumulación:

$$\text{Cambio en stock de capital} = \text{inversión} - \text{depreciación del capital}$$

Puesto que el cambio en el Stok de capital es igual a la suma de la inversión con la diferenciación del capital en el instante $t$ entonces se tiene:

$$\text{Cambio en stock de capital} = \Delta K = K_{t+1} - K_t$$

$$\text{inversión} = I_t$$

$$\text{coeficiente de depreciación del capital} = \delta$$

De donde:

$$\Delta K = I_t - \delta K_t$$

Sin pérdida de generalidad podemos reescribir la ecuación anterior del modo siguiente:

$$\dot{K} = \Delta K = I - \delta K \tag{2.2}$$

El agente tiene una **función de utilidad** $U$ que depende del consumo de bienes transables ($C_T$) y del consumo de bienes no transables ($C_N$); es decir $U(C_T, C_N)$, dichos bienes los produce utilizando funciones de producción linealmente homogéneas y neoclásicas. Para la producción utiliza como factores el trabajo ($L = 1$) y el capital ($K$) no transable, como las edificaciones no residenciales. En términos de capital y producto per cápita, las funciones de producción transables ($T$) y no transables ($N$) se pueden escribir, usando la definición de función de producción neoclásica, de la siguiente forma:

$$T = T(K_T, L_T) = f(k_T)L_T; \quad \frac{\partial f}{\partial k_T} > 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial k_T^2} < 0$$

$$N = N(K_N, L_N) = g(k_N)L_N; \quad \frac{\partial g}{\partial k_N} > 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial k_N^2} < 0$$

Dónde:

$k_i = \frac{K_i}{L_i}; i = \{k_T = \frac{K_t}{L_t}, k_N = \frac{K_N}{L_N}\}$; representa la relación capital trabajo en el sector $i$ que puede ser transable $(T)$ o no transable $(N)$.

Suponiendo flexibilidad en las remuneraciones factoriales y pleno empleo de cada factor, se puede concluir que los mercados de factores se deben encontrar en equilibrio (oferta igual a demanda). Es decir:

$$\begin{aligned} L_T + L_N &= I \\ K_T + K_N &= K \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones el problema de optimización intertemporal de un agente que maximiza su utilidad descontada a una tasa constante $\rho$, a lo largo de un horizonte infinito, se puede escribir como:

$$\text{Max} \int_{t=0}^{\infty} U(C_N, C_T) e^{-\rho t} dt$$

Sujeto a:

$$\dot{K} = I - \delta K$$

Y a una restricción intertemporal de ingreso, que implica que el cambio de los activos financieros del agente (constituido por bonos del extranjero $b$, que rinden una tasa de interés internacional $r^*$) es igual a la diferencia entre sus ingresos y sus gastos, es decir:

$$\dot{b} = Z + r^* b + f(k_T) L_T + p g(k_N) L_N - (C_T + pC_N + pI) \tag{2.3}$$

La variable $p$ es el precio de los bienes no transables (tanto de capital como de consumo), en términos del precio de los bienes transables. La variable $Z$ representa el choque como una transferencia de ingresos del exterior. Esta transferencia también podría simular los ingresos por mayores exportaciones de un sector enclave, que vende un producto enfrentado a una bonanza en precios o cantidades; de acuerdo al "Corel-Model", el hecho de que el sector en bonaza sea un enclave, implica que no utilizará recursos de otros sectores de la economía y, por ende, la bonanza no producirá ningún "Efecto de Movimiento de Recurso", tan solo producirá un "Efecto Gasto".

Para obtener el problema de optimización intertemporal definamos:

$$x = (0, 0, 0, 0, b, k) \in \mathbb{R}^6$$

$$y = (C_T, C_N, k_T, L_T, \lambda e^{-\rho t}, \lambda p e^{-\rho t}) \in \mathbb{R}^6$$

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = U(C_N, C_T)e^{-\rho t}$$

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{6} y_i \dot{x}_i - \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$$

$$H(x, y) = \lambda e^{-\rho t}\dot{b} + \lambda p e^{-\rho t}\dot{K} - U(C_N, C_T)e^{-\rho t} = \lambda e^{-\rho t}(\dot{b} + p\dot{K}) - U(C_N, C_T)e^{-\rho t}$$

De donde:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \lambda e^{-\rho t}[Ip - \delta K p + (Z + r^* b + f(k_T)L_T + pg(k_N)L_N - (C_T + pC_N + pI))] \\ &- U(C_N, C_T)e^{-\rho t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sin pérdida de generalidad, usaremos como función Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \lambda e^{-\rho t}[Ip - \delta K p + (Z + r^* b + f(k_T)L_T + pg(k_N)L_N - (C_T + pC_N + pI))] \\ &+ U(C_N, C_T)e^{-\rho t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Usando las ecuaciones de Hamilton se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial C_T} = 0; \frac{\partial H}{\partial C_N} = 0; \frac{\partial H}{\partial k_T} = 0; \frac{\partial H}{\partial L_T} = 0; -\frac{\partial H}{\partial b} = \frac{d}{dt}(\lambda e^{-\rho t}); -\frac{\partial H}{\partial K} = \frac{d}{dt}(p\lambda e^{-\rho t})$$

De otro lado, derivando parcialmente $H$ en $(2 \cdot 5)$ con respecto a $C_T$:

$$\frac{\partial H}{\partial C_T} = \lambda e^{-\rho t} + e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial C_T} = e^{-\rho t}(\frac{\partial U}{\partial C_T} - \lambda)$$

Luego:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial C_T} = e^{-\rho t}(\frac{\partial U}{\partial C_T} - \lambda) \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial C_T} - \lambda = 0$$

Obteniéndose:

$$\frac{\partial U}{\partial C_T} = \lambda \quad (2.6)$$

Si ahora, derivamos parcialmente $H$ en $(2 \cdot 5)$ con respecto a $C_N$ :

$$\frac{\partial H}{\partial C_N} = -\lambda p e^{-\rho t} + e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial C_N} = e^{-\rho t}(\frac{\partial U}{\partial C_N} - \lambda p)$$

Luego:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial C_N} = e^{-\rho t}(\frac{\partial U}{\partial C_N} - \lambda p) \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial C_N} - \lambda p = 0$$

Obteniéndose:

$$\frac{\partial U}{\partial C_N} = \lambda p \tag{2.7}$$

Del mismo modo parcialmente $H$ en $(2 \cdot 5)$ con respecto a $k_T$ :

$$\frac{\partial H}{\partial k_T} = \lambda e^{-\rho t} \frac{\partial}{\partial k_T}(Z + r^* b + f(k_T)L_T + pg(k_N)L_N - (C_T + pC_N + pI))$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_T} = \lambda e^{-\rho t}[\frac{\partial}{\partial k_T}(f(k_T)L_T) + \frac{\partial}{\partial k_T}(pg(k_N)L_N] \tag{2.8}$$

Recordemos que:

$$\begin{aligned} k_T &= \frac{K_T}{L_T} \longrightarrow k_T L_T = K_T \\ k_N &= \frac{K_N}{L_N} \longrightarrow k_N L_N = K_N \end{aligned}$$

De donde:

$$k_T L_T + k_N L_N = K = K_T + K_N$$

Luego:

$$k_N = \frac{K}{L_N} - \frac{k_T L_T}{L_N} \tag{2.9}$$

$$k_T = \frac{K}{L_T} - \frac{k_N L_N}{L_T} \tag{2.10}$$

Además:

$$L_T + L_N = I \longrightarrow L_N = I - L_T \tag{2.11}$$

Usando regla de la cadena en $(2 \cdot 9)$ y $(2 \cdot 10)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_T}(f(k_T)L_T) &= L_T f_{k_T}(k_T) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial k_T}(f(k_T)L_T) = L_T f_k(k_T) \\ \frac{\partial}{\partial k_T}(g(k_N)L_N) &= pL_N \frac{\partial g(k_N)}{\partial k_T}\frac{\partial k_N}{\partial k_T} = pL_N g_{k_T}(k_N)(-\frac{L_T}{L_N}) = -pL_T g_k(k_N) \end{aligned}$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en $(2 \cdot 8)$ se obtiene:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial k_T} = \lambda e^{-\rho t}(L_T f_k(k_T) - pL_T g_k(k_N)) = \lambda e^{-\rho t} L_T (f_k(k_T) - pg_k(k_N))$$

De donde:

$$f_k(k_T) - pg_k(k_N) = 0 \longrightarrow f_k(k_T) = r = pg_k(k_N) \tag{2.12}$$

Ahora derivando parcialmente $H$ en $(2 \cdot 5)$ con respecto a $L_T$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial L_T} &= \lambda e^{-\rho t} \frac{\partial}{\partial L_T}[f(k_T)L_T + pg(k_N)L_N] \\ \frac{\partial H}{\partial L_T} &= \lambda e^{-\rho t}\left[\frac{\partial}{\partial L_T}(f(k_T)L_T) + \frac{\partial}{\partial L_T}(pg(k_N)L_N)\right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

Usando regla de la cadena en $(2 \cdot 9)$; $(2 \cdot 10)$ y $(2 \cdot 11)$:

- $$\frac{\partial}{\partial L_T}(f(k_T)L_T) = f(k_T)+L_T\frac{\partial f(k_T)}{\partial L_T} = f(k_T)+L_T\frac{\partial f}{\partial k_T}\frac{\partial k_T}{\partial L_T} = f(k_T)+L_T f_k(k_T)(\frac{-k_T}{L_T})$$

  $$\frac{\partial}{\partial L_T}(f(k_T)L_T) = f(k_T) - f_k(k_T)k_T$$

- $$\frac{\partial}{\partial L_T}(pg(k_N)L_N) = p\frac{\partial}{\partial L_T}(g(k_N)L_N) = pL_N\frac{\partial g(k_N)}{\partial L_T} + pg(k_N)\frac{\partial L_N}{\partial L_T}$$

  $$\frac{\partial}{\partial L_T}(pg(k_N)L_N) = pL_N\frac{\partial g(k_N)}{\partial k_N}\frac{\partial k_N}{\partial L_T} + pg(k_N)\frac{\partial L_N}{\partial L_T}$$

  $$\frac{\partial}{\partial L_T}(pg(k_N)L_N) = pL_N g_k(k_N)(\frac{-k_T}{L_N}) + pg(k_N)(-1)$$

  $$\frac{\partial}{\partial L_T}(pg(k_N)L_N) = -p(g_k(k_N)k_T + g(k_N))$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en $(2 \cdot 13)$ se obtiene:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial L_T} = f(k_T) - f_k(k_T)k_T - p(g_k(k_N)k_T + g(k_N))$$

$$f(k_T) - f_k(k_T)k_T = p(g_k(k_N)k_T + g(k_N)) \tag{2.14}$$

Continuamos derivando parcialmente $H$ en $(2 \cdot 5)$ con respecto a $b$:

$$-\frac{\partial H}{\partial b} = -\lambda e^{-\rho t} r^*$$

De otro lado:

$$\frac{d}{dt}(\lambda e^{-\rho t}) = \lambda\frac{d}{dt}(e^{-\rho t}) + e^{-\rho t}\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda\rho e^{-\rho t} + e^{-\rho t}\frac{d\lambda}{dt} = e^{-\rho t}(\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\rho)$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda e^{-\rho t}) = e^{-\rho t}(\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\rho)$$

Luego:

$$-\lambda e^{-\rho t} r^* = -\frac{\partial H}{\partial b} = \frac{d}{dt}(\lambda e^{-\rho t}) = e^{-\rho t}(\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\rho) \longrightarrow -\lambda e^{-\rho t} r^* = e^{-\rho t}(\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\rho)$$

$$-\lambda r^* = \frac{d\lambda}{dt} - \lambda\rho$$

$$\lambda\rho - \lambda r^* = \frac{d\lambda}{dt} \longrightarrow \frac{d\lambda}{dt} = \lambda(\rho - r^*) \tag{2.15}$$

Finalmente derivando parcialmente $H$ en $(2 \cdot 5)$ con respecto a $K$:

$$\frac{\partial H}{\partial K} = -\lambda e^{-\rho t}[-\delta p + \frac{\partial}{\partial K}(f(k_T)L_T) + p\frac{\partial}{\partial K}(g(k_N)L_N)] \tag{2.16}$$

Usando regla de la cadena en $(2 \cdot 9)$; $(2 \cdot 10)$y $(2 \cdot 11)$:

-
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K}(f(k_T)L_T) &= L_T \frac{\partial f(k_T)}{k_T}\frac{\partial k_T}{\partial K} = L_T f_K(k_T)(\frac{1}{L_T}) = f_K(k_T) \\ \frac{\partial}{\partial K}(f(k_T)L_T) &= f_K(k_T) \end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K}(g(k_N)L_N) &= L_N \frac{\partial g(k_N)}{k_N}\frac{\partial k_N}{\partial K} = L_N g_K(k_N)(\frac{1}{L_N}) = g_K(k_N) \\ \frac{\partial}{\partial K}(g(k_N)L_N) &= g_K(k_N) \end{aligned}$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en $(2 \cdot 16)$ se obtiene:

$$-\frac{\partial H}{\partial K} = -\lambda e^{-\rho t}[-\delta p + f_K(k_T) + p g_K(k_N)]$$

De otro lado:

$$\frac{d}{dt}(p\lambda e^{-\rho t}) = \lambda e^{-\rho t}\frac{dp}{dt} + p\frac{d(\lambda e^{-\rho t})}{dt} = \lambda e^{-\rho t}\frac{dp}{dt} + p e^{-\rho t}(\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\rho)$$

$$\frac{d}{dt}(p\lambda e^{-\rho t}) = \lambda e^{-\rho t}\frac{dp}{dt} + p e^{-\rho t}(-\lambda r^*) = \lambda e^{-\rho t}(\frac{d\lambda}{dt} - p r^*)$$

De donde:

$$\lambda e^{-\rho t}(\frac{dp}{dt} - pr^*) = \frac{d}{dt}(p\lambda e^{-\rho t}) = -\frac{\partial H}{\partial K} = -\lambda e^{-\rho t}(-\delta p + f_K(k_T) + pg_K(k_N))$$

$$\lambda e^{-\rho t}(\frac{dp}{dt} - pr^*) = -p(\delta + r^*) - \frac{dp}{dt}(-\delta p + f_K(k_T) + pg_K(k_N))$$

$$(\frac{dp}{dt} - pr^*) = -(-\delta p + f_K(k_T) + pg_K(k_N))$$

$$(\frac{dp}{dt} - pr^*) = \delta p - r - r$$

$$(\frac{dp}{dt} - pr^*) = \delta p - 2r$$

$$2r = \delta p + pr^* - \frac{dp}{dt}$$

$$r = \frac{1}{2}[p(\delta + r^*) - \frac{dp}{dt}]$$

$$r = p(\delta + r^*) - \frac{dp}{dt} \tag{2.17}$$

Por simplicidad y buscando convergencia hacia un estado estacionario, supondremos que la tasa de interés internacional es igual a la tasa de descuento $r^* = \rho$ . Luego las condiciones de transversalidad vienen dadas por las siguientes condiciones:

- Al agente no le está permitido endeudarse infinitamente, es decir

$$\lim_{t\to\infty} \lambda e^{-r^*t} b = 0 \tag{2.18}$$

- El agente no puede acumular capital indefinidamente, es decir:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda e^{-r^*t} pK = 0 \tag{2.19}$$

En el modelo el multiplicador de Lagrange $\lambda$ es la **variable de coestado** del problema y representa el **precio sombra** de la riqueza financiera en términos de los bienes de consumo, es decir, muestra cuanto es el incremento marginal del bienestar que se obtiene de una unidad adicional de riqueza financiara.

Usando el hecho que $r^* = \rho$, de la ecuación $(2 \cdot 15)$ se deduce que la variable de coestado $\lambda$ es constante a lo largo de la trayectoria óptima.

Las ecuaciones de Hamilton se pueden reescribir como:

- **Ecuaciones del bloque de consumo:**

$$\frac{\partial U}{\partial C_T} = U_T = \bar{\lambda} \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial U}{\partial C_N} = U_N = p\bar{\lambda} \tag{2.21}$$

- **Ecuaciones del bloque de producción**:

$$f_k(k_T) = pg_k(k_N) = r \tag{2.22}$$

$$f(k_T) - f_k(k_T)k_T = p(g_k(k_N)k_T + g(k_N)) = w \tag{2.23}$$

- **Ecuación de arbitraje del mercado de capitales:**

$$r = p(\delta + r^*) - \frac{dp}{dt} \tag{2.24}$$

De otro lado usando las condiciones del mercado de factores:

$$L_T + L_N = I \longrightarrow L_N = I - L_T$$

$$k_T L_T + k_N L_N = K \longrightarrow K = k_T L_T - k_N L_N = k_T L_T - (I - L_T)k_N$$

Y así se deduce la:

- **Ecuación de relación de asignación sectorial:**

$$K = k_T L_T - (I - L_T)k_N \tag{2.25}$$

Si usamos las condiciones del mercado laboral:

$$L_T + L_N = I \longrightarrow L_N = I - L_T$$

Y de la condición de equilibrio del mercado de bienes no transables, es decir oferta igual a demanda se tiene:

$$pg(k_N)L_N = pC_N + pI \longrightarrow g(k_N)L_N = C_N + I$$

$$I = g(k_N)L_N - C_N$$

$$I = g(k_N)(I - L_T) - C_N$$

Luego la ecuación $(2 \cdot 2)$ se reescribe como:

$$\dot{K} = I - \delta K \longrightarrow \dot{K} = g(k_N)(I - L_T) - \delta K - C_N \tag{2.26}$$

Utilizando la ecuación de equilibrio $(2 \cdot 26)$, la restricción presupuestal del agente que representaba la:

- **Ecuación de cuenta corriente o de balanza de pagos se convierte en:**

$$\dot{b} = Z + r^* b + f(k_T)L_T - C_T \tag{2.27}$$

El bloque de ecuaciones de $(2{\cdot}20)$ a $(2{\cdot}27)$ representa el equilibrio macroeconómico a corto plazo del modelo.

## 2.3. Consumo y Ahorro

De las ecuaciones $(2{\cdot}20)$ y $(2{\cdot}21)$ se deduce que el consumo de bienes transables $C_T(\lambda, p)$ y el consumo de bienes no transables $C_N(\lambda, p)$ dependen del precio sombra $\lambda$ de la riqueza financiera y del precio relativo $p$ de los bienes no transables.

Despejando de la ecuación $(2 \cdot 3)$, el flujo de consumo:

$$C_T + pC_N = Z + r^* b + f(k_T)L_T + pg(k_N)L_N - pI - \dot{b}$$

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{+\infty} [C_T + pC_N] e^{-r^* t} dt &= \int_{t=0}^{+\infty} [Z + r^* b + f(k_T)L_T + pg(k_N)L_N - pI] e^{-r^* t} dt \\ &- \int_{t=0}^{+\infty} \dot{b} e^{-r^* t} dt \end{aligned} \tag{2.28}$$

Calculando por partes la siguiente integral:

$$\int_{t=0}^{+\infty} \dot{b} e^{-r^* t} dt = b e^{-r^* t} /_0^{+\infty} + \int_{t=0}^{+\infty} r^* b e^{-r^* t} dt$$

Usando la condición de transversalidad de la ecuación $(2 \cdot 18)$

$$\lim_{t \to \infty} \lambda e^{-r^* t} b = \lambda \lim_{t \to \infty} e^{-r^* t} b = 0$$

De donde:

$$\int_{t=0}^{+\infty} \dot{b}e^{-r^*t}dt = b(0) + \int_{t=0}^{+\infty} r^*be^{-r^*t}dt = b_0 + \int_{t=0}^{+\infty} r^*be^{-r^*t}dt$$

$$\int_{t=0}^{+\infty} \dot{b}e^{-r^*t}dt = b_0 + \int_{t=0}^{+\infty} r^*be^{-r^*t}dt$$

Usando la igualdad anterior en $(2 \cdot 28)$, se obtiene:

$$\int_{t=0}^{+\infty} [C_T + pC_N]e^{-r^*t}dt = \int_{t=0}^{+\infty} [Z + f(k_T)L_T + pg(k_N)L_N - pI]e^{-r^*t}dt - b_0 = V_0 \quad (2.29)$$

Donde $b_0$ corresponde a la cantidad de bonos extranjeros que posee el individuo en el periodo $t = 0$. La ecuación $(2 \cdot 29)$ implica que el valor presente del consumo descontado a la tasa de interés internacional es igual a la riqueza neta en el tiempo $t = 0$, denotada por $V_0$, es decir, que es igual al valor presente del producto menos la inversión, descontados a la misma tasa de interés internacional, menos el nivel de deuda inicial $b_0$.

Si adicionalmente se supone que el precio relativo de los no transables $p$ se mantiene constante a lo largo de su senda óptima se tendrá que los consumos de los bienes transables y de los bienes no transables también se mantienen constantes a lo largo de su trayectoria óptima $C_T(\lambda, p)$ y $C_N(\lambda, p)$.

Bajo este supuesto se tiene que el lado derecho de la ecuación $(2 \cdot 29)$ es una constante a lo largo del tiempo e igual al consumo agregado inicial, denotado por $C_0 = C_T(t = 0) + C_N(t = 0)$.
De donde se concluye:

$$C_t = C_0 = r^*V_0 \quad (2.30)$$

La ecuación $(2 \cdot 30)$ se considera una versión simplificada de la teoría del ingreso permanente, en la cual el consumo depende de una especie de promedio entre los ingresos presentes y futuros. La propensión marginal a consumir en este caso sería la tasa de interés internacional $r^*$.

El ahorro $S$ se puede obtener como a diferencia entre el producto y el consumo menos los intereses que se pagan por la deuda del país, representados en bonos, es decir:

$$S = Z + f(k_T)L_T + pg(k_N)L_N - C_T - pC_N - r^*b$$

Usando las ecuaciones $(2 \cdot 29)$ y $(2 \cdot 30)$, el ahorro se puede expresar como:

$$S = Z + f(k_T)L_T + pg(k_N)L_N - r^* \int_{t=0}^{+\infty} [Z + f(k_T)L_T + pg(k_N)L_N - pI]e^{-r^*(h-t)}dh \quad (2.31)$$

De la ecuación $(2 \cdot 31)$ se deduce que el ahorro aumenta cuando el producto corriente es mucho mayor que el producto futuro esperado. También esta ecuación puede ser utilizada para estudiar el efecto de un choque transitorio de ingreso simulado a través de un aumento en las transferencias $Z$. Supóngase que las transferencias aumentan inesperadamente (por ejemplo de cero a $Z$) durante un intervalo de tiempo de longitud $T$. En este caso el cambio en el valor presente neto del producto será:

$$\triangle V = Z \int_{t=0}^{T} e^{-r^* t} dt = \frac{Z}{r^*}[I - e^{-r^* t}]$$

Esto implica que el cambio en el consumo agregado denotado como c que corresponde a la suma del consumo por bienes transables y no transables será iguala a:

$$\triangle c = r^* \triangle V - Z[I - e^{-r^* t}] \quad (2.32)$$

Obsérvese que si el tiempo del choque $T$ tiende a cero, se estará simulando un choque transitorio, en cuyo caso el cambio del consumo se hace muy pequeño implicando que el ahorro aumente (se ahorra gran parte de las trasferencias o de la bonanza), por el contrario si el tiempo del choque tiene a infinito, es decir, perdura durante mucho tiempo, se estará simulando un choque permanente en cuyo caso el cambio del consumo será considerable y el ahorro no variara. De esta forma el modelo expuesto permite estudiar el efecto de las bonanzas sobre el ahorro.

## 2.4. Mercado de Capitales

La ecuación $(2 \cdot 24)$ determina el mercado de capitales, en este modelo sólo existen dos activos: los bonos extranjeros y el capital domestico no transable que, para nuestro propósito, está relacionado con las estructuras no residenciales. En este caso la tasa de interés real que rige es la tasa de interés internacional $r^*$, reescribiendo la ecuación $(2 \cdot 24)$ se obtiene:

$$\frac{\dot{p} + r - \delta p}{p} = r^* \quad (2.33)$$

Se puede decir que en equilibrio la tasa de retorno del capital domestico debe ser iguala a la tasa de interés internacional. La tasa de retorno del capital doméstico, correspondiente al lado derecho de la ecuación $(2 \cdot 33)$, es igual, en términos reales, a la apreciación del capital en un determinado periodo de tiempo $\dot{p}$, más el rendimiento correspondiente a su alquiler $r$ menos la depreciación $\delta p$. En esta situación de la economía, cualquier aumento en el ahorro traerá consigo, ceteris paribus, una caída en la tasa de retorno domestica con respecto a la tasa de interés internacional; por lo tanto se preferiría adquirir, con este ahorro extra, activos extranjeros como los bonos, en lugar de invertir en activos domésticos como el capital no transable (edificaciones no residenciales).

## 2.5. Producción

Como dijimos anteriormente las ecuaciones $(2 \cdot 22)$ y $(2 \cdot 23)$, determinan el bloque de producción del modelo. La ecuación $(2 \cdot 22)$ afirma que el valor de la productividad marginal del capital en el sector de bienes transables y en el sector de bienes no transables deben ser iguales entre sí y a su vez coincidir con la tasa de interés r a la que se alquila el capital. Asimismo la ecuación $(2 \cdot 23)$ señala que el valor de la productividad marginal del trabajo es igual en ambos sectores e igual al salario que se les paga a los trabajadores.

A partir de estas dos ecuaciones, de la ecuación $(2 \cdot 25)$ y de las funciones de producción de los sectores transables y no transables, es factible encontrar las funciones de las relaciones capital trabajo del sector transable $k_T(p)$, del sector no transable $k_N(p)$, y las remuneraciones factoriales $w(p)$ y $r(p)$ cuyo único argumento es el precio relativo de los bienes no transables. Así mismo, es posible encontrar el producto del sector no transable y el producto del sector transable en función del precio de los no transables y del stock del capital de toda la economía $N(p, K)$ y $T(p, K)$. La conclusión más importante que se deriva de este análisis, es que los cambios de estas variables con respecto a los cambios en el precio de los no transables, dependen de las intensidades relativas de cada uno de los sectores transable y no transable. De esta forma, el mecanismo a través del cual un choque de ingresos positivos se traslada a la producción de bienes transables y no transables es el precio relativo de los bienes no transables.

## 2.6. Ajuste del modelo para las Edificaciones no Residenciales y Residenciales

De la ecuación $(2 \cdot 24)$ y usando la ecuación $(2 \cdot 22)$ se tiene:

$$\frac{dp}{dt} = p(\delta + r^*) - r = p(\delta + r^*) - pg_k(k_N(p))$$

De donde:

$$\frac{dp}{dt} = p(r^* + \delta) - pg_k(k_N(p))$$

De la ecuación $(2 \cdot 26)$:

$$\dot{K} = g(k_N(p))(I - L_T(p, K)) - \delta K - C_N(\lambda, p)$$

Como las ecuaciones $(2 \cdot 24)$ y $(2 \cdot 26)$ describen la dinámica del modelo. Usando la ecuación $(2 \cdot 22)$ y de las relaciones entre las variables halladas en el bloque de consumo y de producción del modelo, se puede escribir el sistema dinámico de la siguiente forma:

$$\dot{K} = g(k_N(p))(I - L_T(p, K)) - \delta K - C_N(\lambda, p) \tag{2.34}$$

$$\dot{p} = p(r^* + \delta) - pg_k(k_N(p)) \tag{2.35}$$

Podemos reescribir el lado derecho de cada ecuación anterior del modo siguiente:

$$f_1(p, K) = p(r^* + \delta) - pg_k(k_N(p))$$

$$f_2(p, K) = g(k_N(p))L_N(p, K) - \delta K - C_N(\lambda, p)$$

- Recordemos que:

  $\frac{\partial k_N}{\partial K} = \frac{1}{L_N}$, además:

  $k_T L_T + k_N L_N = K$, y como:

$$L_T + L_N = I \longrightarrow L_N = I - L_T$$

  Se obtiene:

$$L_N = \frac{K}{k_N - k_T} + \frac{I - k_T}{k_N - k_T} \longrightarrow \frac{\partial L_N}{\partial K} = \frac{1}{k_N - k_T} \tag{2.36}$$

  De otro lado:

$$\frac{\partial f_2}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}(g(k_N(p))L_N(p, K) - \delta K - C_N(\lambda, p))$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}(g(k_N(p))L_N(p, K)) - \delta$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial K} = L_N \frac{\partial}{\partial K}(g(k_N(p)))\frac{\partial k_N}{\partial K} + g(k_N(p))\frac{\partial L_N}{\partial K} - \delta$$

Pero como:

$$\frac{\partial k_N}{K} = \frac{1}{L_N}$$

De donde:

$$\frac{\partial f_2}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}(g(k_N(p))) + g(k_N(p))\frac{\partial L_N}{\partial K} - \delta \tag{2.37}$$

Si en $(2 \cdot 37)$, usamos el supuesto de "ceteris paribus", se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial K}(g(k_N(p))) = 0$$

Y además reemplazamos $(2 \cdot 36)$, en $(2 \cdot 37)$, se obtiene:

$$\frac{\partial f_2}{\partial K} = \frac{g(k_N(p))}{k_N - k_T} - \delta \tag{2.38}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p}(g(k_N(p))L_N(p,K) - \delta K - C_N(\lambda,p)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p}(g(k_N(p))L_N(p,K)) - \frac{\partial}{\partial p}(C_N(\lambda,p)) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p}(p(r^* + \delta) - pg_k(k_N(p))) = (r^* + \delta) - \frac{\partial}{\partial p}(pg_k(k_N(p))) \\ & \frac{\partial}{\partial p}(pg_k(k_N(p))) = g_k(k_N(p)) \end{aligned}$$

Si ahora usamos en $(2 \cdot 37)$, el supuesto de "ceteris paribus", se obtiene:

$$\frac{\partial f_2}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}(g(k_N(p))) = g_k(k_N(p)) \longrightarrow g_k(k_N(p)) = \frac{\partial f_2}{\partial K} = \frac{g(k_N(p))}{k_N - k_T}$$

De donde:

$$\frac{\partial}{\partial p}(g(k_N(p))) = g_k(k_N(p)) = \frac{g(k_N(p))}{k_N - k_T}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(g(k_N(p))) = \frac{g(k_N(p))}{k_N - k_T}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} = (r^* + \delta) - \frac{g(k_N(p))}{k_N - k_T}$$

- $$\frac{\partial f_1}{\partial K} = 0$$

Este sistema formado por las ecuaciones (2·34) y (2·35) puede linealizarse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} & \frac{\partial f_1}{\partial K} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} & \frac{\partial f_2}{\partial K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p - \bar{p} \\ K - \bar{K} \end{pmatrix}$$

Usando las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r^* + \delta) - \frac{g(k_N(p))}{k_N - k_T} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial p}(g(k_N(p))L_N(p,K)) - \frac{\partial}{\partial p}(C_N(\lambda, p)) & \frac{g(k_N(p))}{k_N - k_T} - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p - \bar{p} \\ K - \bar{K} \end{pmatrix}$$

Definamos la matriz

$$J = \begin{pmatrix} (r^* + \delta) - \frac{g(k_N(p))}{k_N - k_T} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial p}(g(k_N(p))L_N(p,K)) - \frac{\partial}{\partial p}(C_N(\lambda, p)) & \frac{g(k_N(p))}{k_N - k_T} - \delta \end{pmatrix}$$

Ahora calculando el $detJ$, se obtiene:

$$detJ = \left[(r^* + \delta) - \frac{g}{k_N - k_T}\right]\left[\frac{g}{k_N - k_T} - \delta\right]$$

Realizando los cálculos respectivos se obtiene:

$$detJ = -\left(\frac{g}{k_N - k_T}\right)^2 + \left(\frac{g}{k_N - k_T}\right)(r^* + 2\delta) - \delta(r^* + \delta)$$

$$detJ = -\left[\left(\frac{-g}{k_T - k_N}\right)^2 + \left(\frac{g}{k_N - k_T}\right)(r^* + 2\delta) + \delta(r^* + \delta)\right]$$

$$detJ < 0$$

Por lo tanto el sistema tiene un punto de ensilladura en el origen. En general tanto la solución estable del sistema como la respuesta dinámica de los precios de los no transables, dependen de las intensidades relativas en capital de cada sector. Si escribimos:

$$a_{11} = (r^* + \delta) - \frac{g}{k_N - k_T}$$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{21} = \frac{\partial}{\partial p}(g(k_N(p))L_N(p,K)) - \frac{\partial}{\partial p}(C_N(\lambda,p))$$

$$a_{22} = \frac{g(k_N(p))}{k_N - k_T} - \delta$$

En primer lugar, si el sector de bienes transables es más intensivo en capital que el sector de bienes no transables $(k_T > k_N)$ , se tiene que

$$\dot{p} = a_{11}(p-\bar{p}) \longrightarrow \frac{\dot{p}}{p-\bar{p}} = a_{11} \longrightarrow Ln(p-\bar{p}) = a_{11}t + \alpha \longrightarrow (p-\bar{p}) = \gamma_0 e^{a_{11}t}$$

Ahora como en $t = 0$, se tiene que $p(0) - \overline{p(0)} = 0 \longrightarrow \gamma_0 = 0 \longrightarrow p - \bar{p} = 0$
De donde:

$$p = \bar{p} \tag{2.39}$$

Usando la ecuación anterior se tiene que:

$$\bar{K} = a_{22}(K - \overline{K}) \longrightarrow \frac{\dot{K}}{K - \overline{K}} = a_{22} \longrightarrow Ln(K - \overline{K}) = a_{22}t + \beta$$

De donde:

$$K - \overline{K} = ß_0 e^{a_{22}t}$$

Ahora como para $t = 0 \longrightarrow K(0) - \overline{K}(0) = \beta_0$, si $K_0 = K(0) \longrightarrow K_0 - \overline{K} = \beta_0$
Luego:

$$K - \overline{K} = (K_0 - \overline{K})e^{a_{22}t} \tag{2.40}$$

Observemos que en este caso el precio relativo de los bienes no transables permanece constante a lo largo del tiempo, en su nivel de estado estacionario, esto se puede explicar a través de la ecuación de arbitraje reescrita como:

$$\frac{\dot{p}}{p} + g_k(k_N) = r^* + \delta \tag{2.41}$$

Supóngase que por alguna razón el precio $p$ de los no transables aumenta, entonces aumentará el valor del producto marginal de capital en el sector de no transables y, por tanto, se contratará más de dicho factor en este sector. Esto disminuirá la productividad marginal del capital $g_k(k_N)$ en el sector. Por lo tanto para asegurar que la tasa de retorno del capital domestico siga siendo igual a la tasa de interés internacional $r^*$, se deberá tener un nuevo cambio positivo en el precio de los bienes no transables, es decir $p > 0$, lo cual conduciría a un proceso inestable de crecimiento indefinido de los precios.

Por otro lado, si el sector de bienes transables es menos intensivo en capital que el sector de bienes no transables, es decir $k_T < k_N$, se tiene que:

$$\dot{K} = a_{11}(K - \overline{K}) \rightarrow \frac{\dot{K}}{K - \overline{K}} = a_{11} \rightarrow Ln(K - \overline{K}) = a_{11}t + \alpha \rightarrow (K - \overline{K}) = \gamma_0 e^{a_{11}t}$$

Ahora como en $t = 0$, se tiene que $K(0) - \overline{K(0)} = \gamma_0$

$$K - \overline{K} = (K_0 - \overline{K})e^{a_{11}t}$$

Además:

$$\dot{p} = a_{21}(K - \overline{K}) + a_{22}(p - \bar{p}) \rightarrow \ddot{p} = a_{21}\dot{K} + a_{22}\dot{p}$$

De donde:

$$\ddot{p} = a_{21}a_{11}(K - \overline{K}) + a_{22}\dot{p}$$

$$\ddot{p} - a_{22}\dot{p} = a_{21}a_{11}(K - \overline{K})$$

Resolviendo:

$$\ddot{p} - a_{22}\dot{p} = 0$$

Se obtiene la solución homogénea $\bar{p} = p_H$:

$$\bar{p} = C_1 + C_2 e^{a_{22}t}$$

Ahora usando variación de parámetros buscamos una solución particular $\tilde{p}$ de la ecuación diferencial no homogénea, como sabemos:
$\tilde{p} = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$, con $x_1(t) = 1$; $x_2(t) = e^{a_{22}t}$
Además:

$$W[x_1, x_2] = \begin{vmatrix} 1 & e^{a_{22}t} \\ 0 & a_{22}e^{a_{22}t} \end{vmatrix} = a_{22}e^{a_{22}t}$$

$$c_1(t) = \int \frac{-a_{21}a_{11}(K - \overline{K})e^{a_{22}t}}{W[x_1, x_2]} dt = \int \frac{-a_{21}a_{11}(K - \overline{K})e^{a_{22}t}}{a_{22}e^{a_{22}t}} dt$$

$$c_1(t) = \frac{-a_{21}a_{11}}{a_{22}}\int(K-\overline{K})dt = \frac{-a_{21}a_{11}}{a_{22}}\int(K_0-\overline{K(0)})e^{a_{11}t}dt$$

$$c_1(t) = \frac{-a_{21}a_{11}(K_0-\overline{K(0)})e^{a_{11}t}}{a_{22}a_{11}}$$

$$c_1(t) = \frac{-a_{21}}{a_{22}}(K-\overline{K})$$

Y

$$c_2(t) = \int\frac{a_{21}a_{11}(K-\overline{K})}{a_{22}e^{a_{22}t}}dt = \frac{a_{21}a_{11}}{a_{22}}\int(K-\overline{K})e^{-a_{22}t}dt = \frac{a_{21}a_{11}(K_0-\overline{K(0)})}{a_{22}}\int e^{(a_{11}-a_{22})t}dt$$

$$c_2(t) = \frac{a_{21}a_{11}(K_0-\overline{K(0)})}{a_{22}(a_{11}-a_{22})}e^{(a_{11}-a_{22})t}$$

$$c_2(t) = \frac{a_{21}a_{11}(K-\overline{K})}{a_{22}(a_{11}-a_{22})}e^{-a_{22}t}$$

Luego:

$$\tilde{p} = \frac{-a_{21}}{a_{22}}(K-\overline{K}) + \frac{a_{21}a_{11}(K-\overline{K})}{a_{22}(a_{11}-a_{22})}e^{-a_{22}t}.e^{a_{22}t}$$

$$\tilde{p} = \frac{-a_{21}}{a_{22}}(K-\overline{K}) + \frac{a_{21}a_{11}(K-\overline{K})}{a_{22}(a_{11}-a_{22})}$$

$$\tilde{p} = \frac{a_{21}a_{11}}{a_{22}}(K-\overline{K})\left[1-\frac{a_{11}}{a_{11}-a_{22}}\right]$$

$$\tilde{p} = \frac{a_{21}(K-\overline{K})}{a_{11}-a_{22}}$$

De donde:

$$p = \bar{p} + \tilde{p}$$

$$p = \bar{p} + \frac{a_{21}(K-\overline{K})}{(a_{11}-a_{22})}$$

Es decir si $k_T < k_N$, se tiene que:

$$p = \bar{p} + \frac{a_{21}(K-K)}{(a_{11}-a_{22})} \tag{2.42}$$

$$K-\overline{K} = (K_0-\overline{K})e^{a_{11}t} \tag{2.43}$$

Es decir el precio de los no transables aumentará, aumentará ante un choque de ingresos, y después disminuirá a medida que responde la producción de bienes no transables.

## 2.7. El modelo para las edificaciones residenciales

**Preliminares**

Como el modelo que implementaremos involucra algunas definiciones propias de la Estadística como variables **exógenas** y el **valor esperado** de la función de utilidad, revisemos rápidamente estas definiciones.

Una **Variable aleatoria** $X$ es una función definida sobre el espacio muestral $\Omega$ con valores reales. Es decir $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sea $X$ una variable aleatoria con valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entenderemos por $P(X = x_i)$ como la **probabilidad** del suceso.

Podemos distinguir dos tipos: discretas y continuas.

- **Discretas**, son aquellas que toman un número de valores finito o infinito numerable. Estas variables corresponden a experimentos en los que se cuenta el número de veces que ha ocurrido un suceso. Para su descripción se especifica sus posibles valores con sus respectivas probabilidades.

  Por ejemplo en el experimento consistente en lanzar dos monedas, el espacio muestral es $\Omega = \{(c, c), (c, s); (s, c), (s, s)\}$, donde $c$ representa cara y $s$ representa sello. Sobre este espacio definimos la función:

  $$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; X(w) = \text{“numero de caras que aparecen”}$$

  Esta es una variable aleatoria discreta, puesto que toma los valores:

  $$X(s, s) = 0; X(c, s) = X(s, c) = 1; X(c, c) = 2$$

  Y las probabilidades que ocurran estos sucesos son:

  $$P(X = 0) = \frac{1}{4}; P(X = 1) = \frac{2}{4}; P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

  Muchas veces es de interés conocer con qué probabilidad una variable aleatoria toma valores que no sobrepasan un determinado número real $x$ , es decir, la probabilidad acumulada de que la variable tome valores inferiores a ese $x$, a esta probabilidad se le llama función de distribución ,en el caso de una variable discreta se define por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Por ejemplo, la función de distribución para la variable aleatoria $X =$ *numero de caras que aparecen al lanzar dos veces una moneda*
Viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \frac{1}{4}; & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}; & 1 \leq x < 2 \\ 1; & x \geq 2 \end{cases}$$

- **Continuas**, son aquellas que toman cualquier valor de un intervalo real de la forma:$< a, b >$, $< a, +\infty >$, $< -\infty, b >$, $< -\infty, +\infty >$ o uniones de ellos. Por ejemplo, el peso de una persona, el tiempo de duración de un suceso, etc. Una variable aleatoria continua $X$, se describen por la llamada función de densidad, que es una función real no negativa $f(x)$ tal que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

De forma que es posible calcular la probabilidad de que $X$ tome valores en un cierto intervalo $[a, b]$, mediante los procesos de integración.

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ . La función de distribución, se define por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

En lo que sigue definimos el Valor esperado para una variable aleatoria.

Sea $X$ una variable aleatoria:

**1.** Si $X$ es **discreta** y toma valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ el valor esperado o esperanza matemática o promedio, se define por

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

**2.** Si $X$ es **continua**, el valor esperado o esperanza matemática o promedio, se define por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Donde $f(x)$ es la función densidad de la variable aleatoria $X$.

Algunas propiedades de la esperanza matemática son las siguientes:
Sean $X$ e $Y$ dos variables entonces:

**Linealidad de la esperanza matemática**

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(kX) = kE(X), k \in \mathbb{R}$
- $E(k) = k, k \in \mathbb{R}$
- $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**Esperanza del producto**

- $E(XY) = E(X)E(Y)$

Únicamente en el caso de que $X$ e $Y$ sean variables aleatorias independientes.

En los modelos económicos se pueden encontrar dos clases de variables: endógenas o exógenas. Las variables endógenas se explican dentro de un modelo económico a partir de sus relaciones con otras variables. Las variables exógenas están determinadas fuera del modelo, es decir, están predeterminadas, el modelo las toma como fijas y mantienen siempre el mismo valor.

A diferencia del modelo anterior usaremos un análisis de equilibrio parcial para deducir el modelo para la vivienda, es decir estudiaremos en términos teóricos, lo que sucede en el mercado de la vivienda cuando la economía enfrenta un choque de ingresos positivos.

Iniciaremos deduciendo la ecuación de demanda de vivienda; en segundo lugar, determinaremos la ecuación de la oferta de vivienda y finalmente estudiaremos el ajuste del modelo ante un choque de ingresos.

## 2.8. La Demanda de Vivienda

Observemos que el problema de consumos de un bien o activo denominado **vivienda**, se ubica dentro del análisis intertemporal con incertidumbre. Es decir, el consumidor al invertir en una unidad de vivienda en el presente implica tanto un sacrificio directo del consumo presente de otros bienes como un sacrificio indirecto del consumo futuro de otros bienes, si en el presente los agentes económicos tienden a endeudarse para financiar la compra de vivienda. La suma de estos dos sacrificios se denomina el **costo de la vivienda**.

Supondremos un **individuo**, representativo de una economía, que maximiza el valor esperado de una función de utilidad $U(\cdot)$, estrictamente separable e invariante en el tiempo, que depende de los servicios proporcionados por la vivienda y de un bien compuesto de consumo $C_t$ en el periodo $t$. Los servicios de vivienda $V_t$ se suponen proporcionales al número de edificaciones residenciales en cada periodo $t$ del tiempo.

Por otro lado, el ingreso $y_t$ que recibe el individuo, derivado de su trabajo, se supone exógeno. Además existe la posibilidad de recibir o pagar intereses, a una tasa de interés domestica $r$, por los activos financieros netos $S_t$ que posea en cada periodo del tiempo.

Entonces, en un marco de referencia discreto, el problema de optimización de dicho consumidor en el tiempo $t = 0$ se puede formular de la siguiente forma:

$$MaxE(U_0) = MaxE\left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t U(C_t, V_t)\right] \tag{2.44}$$

Donde $\beta = \frac{1}{1+\rho}$

Sujeto a la restricción:

$$C_t = y_t + (1+r)S_{t-1} - S_t - P_t(V_t - (1-\delta)V_{t-1}) \tag{2.45}$$

Donde $E$ es el valor esperado (expectativa) condicionado a la información en el periodo cero, $\rho$ representa la tasa de descuento intertemporal y $\delta$ la tasa de depreciación de las edificaciones residenciales.

En cada periodo de tiempo la riqueza financiera $W_t$ está compuesta por los activos financieros $S_t$ y por los activos físicos, como la vivienda $V_t$. Al final de la vida del individuo, en el periodo $T$, debe cumplirse que su riqueza financiera $W_t$ debe ser mayor o igual a cero.

La ecuación $(2 \cdot 45)$ representa la restricción presupuestal intertemporal del individuo y se puede reescribir como:

$$S_t = (1+r)S_{t-1} - C_t + y_t - P_t(v_t - v_{t-1}) - \delta P_t V_{t-1} \tag{2.46}$$

O en la forma:

$$C_t = P_t(1-\delta)v_{t-1} - P_t v_t + y_t + rS_{t-1} - (S_t - S_{t-1}) \tag{2.47}$$

Donde $rS_{t-1}$ representa los intereses que gana el agente económico por sus activos financieros, $(S_t - S_{t-1})$ representa lo que invierte en activos financieros de un periodo a otro, $p_t(v_t - v_{t-1})$, representa el gasto en vivienda de un periodo a otro mientras que $\delta V_{t-1}$ representa la depreciación del activo real.

Ahora resolveremos el problema de optimización $(2 \cdot 45)$ sujeto a las condiciones $(2 \cdot 46)$ y $(2 \cdot 46)$, del modo siguiente:

**1)** Resolveremos:

$$MaxE(U_0) = MaxE\left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t U(C_t, V_t)\right]$$

Sujeto a:

$$S_t = (1+r)S_{t-1} - C_t + y_t - p_t(v_t - v_{t-1}) - \delta p_t V_{t-1}$$

Lo que es equivalente a resolver:

$$V(S_t) = Max\{U(C_t, V_t) + E_t[V(S_{t+1})]\}$$

Sujeto a:

$$S_t = g(C_t, S_t, \varepsilon_t) = (1+r)S_{t-1} - C_t + y_t - p_t(v_t - v_{t-1}) - \delta p_t V_{t-1}$$

Dónde:

$\varepsilon_t = y_t - p_t(v_t - v_{t-1}) - \delta p_t V_{t-1}$, se consideran dados.

Las condiciones de primer orden son:

- $$\frac{\partial U}{\partial C_t} + \beta E_t \left[ V'(S_{t+1}) \frac{\partial g}{\partial C_t} \right] = 0$$

$$U'_C(C_t, V_t) - \beta E_t \left[ V'(S_{t+1}) \frac{\partial g}{\partial S_t} \right] = 0$$

$$U'_C(C_t, V_t) = \beta E_t \left[ V'(S_{t+1}) \frac{\partial g}{\partial S_t} \right] \tag{2.48}$$

- $$V'(S_t) = \frac{\partial U}{\partial C_t} + \beta E_t \left[ V'(S_{t+1}) \frac{\partial g}{\partial S_t} \right]$$

$$V'(S_t) = 0 + \beta E_t \left[ V'(S_{t+1})(1+r) \right]$$
$$V'(S_t) = (1+r)\beta E_t \left[ V'(S_{t+1}) \right] \tag{2.49}$$

Usando $(2 \cdot 48)$ en $(2 \cdot 49)$

$$V'(S_t) = (1+r)U'_C(C_t, V_t)$$

De donde:

$$V'(S_{t+1}) = (1+r)U'_C(C_{t+1}, V_{t+1}) \tag{2.50}$$

Sustituyendo $(2 \cdot 50)$ en $(2 \cdot 48)$ se obtiene:

$$U'_C(C_t, V_t) = \beta E_t[(1+r)U'_C(C_{t+1}, V_{t+1})]$$

$$U'_C(C_t, V_t) = E_t[\beta(1+r)U'_C(C_{t+1}, V_{t+1})]$$

$$U'_C(C_t, V_t) = E_t \left[ \frac{(1+r)}{1+\rho}(1+r)U'_C(C_{t+1}, V_{t+1}) \right] \tag{2.51}$$

**2)** Resolveremos:

$$MaxE(U_0) = MaxE \left[ \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(C_t, V_t) \right]$$

Sujeto a:

$$C_t = p_t(1-\delta)v_{t-1} - p_t v_t + y_t + rS_{t-1} - (S_t - S_{t-1})$$

Lo que es equivalente a resolver:

$$W(S_t) = Max[U(C_t, V_t) + E_t[W(S_{t+1})]$$

Sujeto a:

$$C_t = g(C_t, S_t, \varepsilon_t) = p_t(1-\delta)v_{t-1} - p_t v_t + y_t + rS_{t-1} - (S_t - S_{t-1})$$

Dónde:

$\varepsilon_t = y_t + rS_{t-1} - (S_t - S_{t-1})$, se consideran dados.

Las condiciones de primer orden son:

- $$\frac{\partial U}{\partial V_t} + \beta E_t\left[W'(C_{t+1})\frac{\partial g}{\partial V_t}\right] = 0$$

$$U'_V(C_t, V_t) + \beta E_t[W'(C_{t+1})(p_{t+})(1-\delta) - p_t)] = 0$$
$$U'_V(C_t, V_t) = (p_t - p_(t+1)(1-\delta))\beta E_t[W'(C_(t+1))] \tag{2.52}$$

- $$W'(C_t) = \frac{\partial U}{\partial C_t} + \beta E_t\left[W'(C_{t+1})\frac{\partial g}{\partial C_t}\right]$$

$$W'(C_t) = U'_C(C_t, V_t) + 0$$

$$W'(C_t) = U'_C(C_t, V_t)$$

De donde:

$$W'(C_{t+1}) = U'_C(C_{t+1}, V_{t+1}) \tag{2.53}$$

Usando $(2 \cdot 53)$ en $(2 \cdot 52)$ se obtiene:

$$U'_V(C_t, V_t) = (p_t - p_{t+1}(1-\delta))\beta E_t[U'_C(C_{t+1}, V_{t+1})] \tag{2.54}$$

Usando la ecuación $(2 \cdot 51)$:

$$E_t[U'_C(C_{t+1}, V_{t+1})] = \frac{(1+\rho)}{(1+r)}U'_C(C_t, V_t)$$

$$\beta E_t[U'_C(C_{t+1}, V_{t+1})] = \frac{U'_C(C_t, V_t)}{1+r} \tag{2.55}$$

Sustituyendo $(2 \cdot 55)$ en $(2 \cdot 54)$ se obtiene:

$$U'_V(C_t, V_t) = \frac{(p_t - p_{t+1}(1-\delta))}{1+r} U'_C(C_t, V_t)$$

Usando el hecho que:

$$1 + \dot{p}_t = \frac{p_{t+1}}{p_t} \longrightarrow p_{t+1} = p_t(1 + \dot{p}_t)$$

$$U'_V(C_t, V_t) = U'_C(C_t, V_t) \left[ \frac{p_t - p_t(1+\dot{p}_t)(1-\delta)}{(1+r)} \right]$$

$$U'_V(C_t, V_t) = U'_C(C_t, V_t) p_t \left[ \frac{1 - (1+\dot{p}_t)(1-\delta)}{(1+r)} \right]$$

$$U'_V(C_t, V_t) = U'_C(C_t, V_t) p_t \left[ \frac{1}{1+r} - \frac{(1+\dot{p}_t)(1-\delta)}{1+r} \right]$$

Puesto que:

$$r = \left( \frac{1+r^*}{1+\rho} \right) \left( \frac{p_t}{p_{t+1}} \right)^a$$

En este trabajo suponemos que $\rho = r^* \longrightarrow r = \left( \frac{p_t}{p_{t+1}} \right)^a \longrightarrow 1 + r = 1 + \left( \frac{p_t}{p_{t+1}} \right)^a$.
De donde $\frac{1}{1+r} \approx 1$

Luego:

$$U'_V(C_t, V_t) = U'_C(C_t, V_t) p_t \left[ 1 - \frac{(1+\dot{p}_t)(1-\delta)}{1+r} \right] \tag{2.56}$$

Ahora como la esperanza matemática de una constante es la misma constante, se tiene que:

$$E_t[(1+\dot{p}_t)] = (1+\dot{p}_t) \tag{2.57}$$

Sustituyendo $(2 \cdot 57)$ en $(2 \cdot 56)$, se obtiene:

$$U'_V(C_t, V_t) = U'_C(C_t, V_t) p_t \left[ 1 - \frac{E_t[(1+\dot{p}_t)](1-\delta)}{1+r} \right] \tag{2.58}$$

De $(2 \cdot 2)$ y $(2 \cdot 3)$ se tiene que las condiciones de primer orden para el problema dado por las ecuaciones (2,44) y (2,45), vienen dadas por las ecuaciones $(2 \cdot 51)$ y $(2 \cdot 58)$, es decir por las ecuaciones:

$$U'_C(C_t, V_t) = E_t\left[\frac{(1+r)}{(1+\rho)}(1+r)U'_C(C_{t+1}, V_{t+1})\right] \tag{2.59}$$

$$U'_V(C_t, V_t) = U'_C(C_t, V_t)p_t\left[1 - \frac{E_t[(1+\dot{p}_t)](1-\delta)}{(1+r)}\right] \tag{2.60}$$

La condición $(2 \cdot 51)$ dice que a lo largo de la senda optima la utilidad marginal del consumo presente, debe ser igual al valor esperado presente de la utilidad marginal del consumo futuro incrementada en la tasa de interés; mientras que la condición $(2 \cdot 58)$ dice que a lo largo de la trayectoria optima, la utilidad marginal de una unidad adicional de vivienda debe ser igual al costo marginal en el que se incurre para financiarla. Dicho costo está constituido por el cambio en la utilidad del individuo cuando se reduce su consumo, más el cambio en su bienestar cuando se endeuda en el presente y por ende reduce su consumo futuro.

Si se supone que tanto la tasa de interés como la tasa de depreciación son independientes del precio de la vivienda, de la condición $(2 \cdot 58)$, se puede deducir la demanda de edificaciones residenciales. Para este propósito se define la tasa marginal de sustitución entre el consumo y la vivienda como sigue:

$$\frac{U'_V(C_t, V_t)}{U'_C(C_t, V_t)} \equiv h(V_t, C_t) \tag{2.61}$$

Suponiendo además que: $h'_V(V_t, C_t) < 0$

De otro lado como:

$$E_t[(1+\dot{p}_t)] = 1 + E_t[(1+\dot{p}_t)] - 1$$

$$E_t[(1+\dot{p}_t)] = 1 + E_t[(1+\dot{p}_t)] - E_t[1]$$

$$E_t[(1+\dot{p}_t)] = 1 + E_t[(1+\dot{p}_t) - 1]$$

$$E_t[(1+\dot{p}_t)] = 1 + E_t\left[\frac{p_{t+1}}{p_t} - \frac{p_t}{p_t}\right]$$

$$E_t[(1+\dot{p}_t)] = 1 + \frac{E_t[p_{t+1} - p_t]}{p_t} \tag{2.62}$$

Usando $(2 \cdot 62)$ en $(2 \cdot 58)$ la ecuación $(2 \cdot 61)$ se reescribe como sigue:

$$h(V_t, C_t) = p_t\left[1 - \left[1 + \frac{E_t[p_{t+1} - p_t]}{p_t}\right]\right]\left[\frac{(1-\delta)}{(1+r)}\right]$$

De donde:

$$h(V_t, C_t) = p_t - \frac{p_t(1-\delta)}{(1+r)} - \frac{(1-\delta)}{(1+r)}E_t[p_{t+1} - p_t]$$

$$\frac{(1-\delta)}{(1+r)}E_t[p_{t+1} - p_t] = p_t - \frac{p_t(1-\delta)}{(1+r)} - h(V_t, C_t)$$

Simplificando se obtiene:

$$E_t[p_(t+1) - p_t] = p_t\frac{(1-\delta)}{(1+r)} - h(V_t, C_t) \tag{2.63}$$

Si los periodos de tiempo se hacen cada vez más pequeños, y si las expectativas del cambio de los precios coinciden con el cambio efectivo en los precios (expectativas racionales), la ecuación (39), se convierte en:

$$\dot{p}_{t+1} = p_t\frac{(1-\delta)}{(1+r)} - h(V_t, C_t) \tag{2.64}$$

Esta ecuación es una de las formas de expresar la función demanda de vivienda, en la cual, la cantidad depende del precio de la edificación residencial, de la tasa de interés, de la tasa de depreciación y del cambio de precio de la vivienda de un periodo a otro.

## 2.9. La Oferta de Vivienda

Se puede encontrar la oferta de vivienda suponiendo que el número de viviendas construidas en cada periodo de tiempo es función directa de su precio. Por lo tanto, si se supone que la inversión bruta $I_t$ que realizan los inversionistas constructores se incentiva cuando aumenta el precio de la vivienda $p_t$ se obtiene:

$$I_t = \phi(p_t); \frac{\partial \phi}{\partial p_t} \geq 0 \tag{2.65}$$

De esta forma, la ecuación de acumulación de vivienda en la economía, neta de depreciación, que describe la oferta de vivienda nueva, se puede escribir como:

$$V_{t+1} - V_t = I_t - \delta V_t$$

Es decir:

$$V_{t+1} - V_t = \phi(p_t) - \delta V_t \tag{2.66}$$

Que en términos continuos se expresa como:

$$\dot{V}_t = \phi(p_t) - \delta V_t \tag{2.67}$$

Las ecuaciones $(2 \cdot 64)$ y $(2 \cdot 65)$ describen el mercado de la vivienda.

## 2.10. El Mercado de la Vivienda ante un choque positivo de ingresos

El modelo descrito por las ecuaciones $(2 \cdot 64)$ y $(2 \cdot 65)$ sirve para estudiar el ajuste del mercado de la vivienda en una economía que enfrenta un choque positivo de ingresos.
La idea de descubrir cuál es el mecanismo a través del cual un choque positivo de ingresos afecta el mercado de vivienda gira en torno a establecer si el choque es permanente o transitorio, y si éste, a su vez, aumenta el ahorro de la economía presionando una baja de la tasa de interés doméstica.
Supóngase que la economía no tiene acceso a los mercados internacionales de capital y que el choque de ingresos se percibe como transitorio, y además, aumenta el ahorro; en este caso, la tasa de interés doméstica, que es la tasa de los activos financieros, caerá con respecto a la tasa de retorno de la vivienda. Para mostrarlo en términos analíticos, se puede reescribir la ecuación de arbitraje $(2 \cdot 33)$ como sigue:

$$\frac{\dot{p}_t + R_t - \delta p_t}{p_t} = r \tag{2.68}$$

Donde $R_t$ es la tasa de interés de la vivienda y $r$ es la tasa de interés de los activos financieros. La ecuación $(2 \cdot 68)$ indica que en equilibrio la tasa de interés de los activos financieros debe ser igual a la tasa de retorno de la vivienda que en términos reales es igual a su valoración de un periodo a otro $\frac{\dot{p}_t}{p_t}$ más su alquiler $\frac{R_t}{p_t}$ menos la depreciación

$\delta$.

De donde, si se aumenta el ahorro de la economía y cae la tasa de interés de los activos financieros con respecto a la tasa de retorno de la vivienda, la demanda por edificaciones residenciales $V_t$ aumentará. Este efecto sobre la demanda puede ser el resultado de dos causas dependiendo de sí la vivienda se percibe como un activo de inversión o como un bien de consumo durable. Si la vivienda se percibe como un activo de inversión, la caída de la tasa de interés implica que es mucho más rentable invertir en un activo físico, como las edificaciones residenciales, que en un activo financiero. Por otro lado, si la vivienda se percibe como un bien de consumo durable, el descenso de la tasa de interés implica que el crédito para comprar una edificación residencial se vuelve más barato. Como se observa en ambos casos aumenta la demanda por vivienda.

Este exceso de demanda por vivienda, si la oferta es elástica, tiene como consecuencia un aumento tanto en el precio como en la cantidad de las edificaciones residenciales. Esto implica que en una economía que no tiene acceso a los mercados internacionales de capitales, que tiene restricciones y controles para poseer activos extranjeros, si el choque positivo de ingresos se percibe como transitorio y éste aumenta el ahorro, una posible caída en la tasa de interés real doméstica generará un boom de vivienda.

Si el **choque de ingresos** es de **naturaleza permanente** se puede pensar que los consumidores se sienten incentivados a revisar sus expectativas acerca de sus futuros ingresos. Entonces se pueden sentir incentivados a consumir más en el presente y a financiar el gasto extra pidiendo prestado y teniendo como respaldo los ingresos futuros. Esto sugeriría que la posibilidad de endeudarse, dadas unas expectativas optimistas acerca de los ingresos futuros, puede aumentar la demanda y los precios de la vivienda. Sin embargo, es posible que el efecto sobre el mercado de la vivienda de un choque de naturaleza permanente no sea tan pronunciado como el de un choque de naturaleza transitoria. La explicación radica en que en el primer caso, solo se afectan unos consumidores de la economía, ya que no todos los individuos de la economía son beneficiados por un mayor ingreso. Por el contrario, la caída de la tasa de interés será percibido por todos los agentes de la economía.

# *Conclusiones*

Los aspectos más relevantes en la presente tesis son:

**1.** Mediante un modelo de elección intertemporal continuo se plantea para edificaciones no residenciales un modelo de equilibrio macroeconómico a corto plazo mediante el cual se estudia las consecuencias sobre el mercado de las edificaciones no residenciales de un choque positivo de ingresos. Este modelo viene dado por el bloque de ecuaciones $(2 \cdot 20)$ al $(2 \cdot 27)$. En lo referente a las consecuencias de un choque positivo de ingresos es de naturaleza permanente se observó que:

- Si el sector de bienes no transables es más intensivo relativamente en capital que el sector de bienes transables $k_N > k_T$, se presentará un boom en el precio y en cantidad de las estructuras no residenciales (capital no transable). En este caso la única forma de que la oferta de bienes no transables aumente para responder al exceso de demanda generado por el incremento en el componente permanente del ingreso, es un aumento considerable en el capital no transable, factor en el cual es intensivo el sector no transable.
- Si el sector de bienes no transables es menos intensivo relativamente en capital que el sector de bienes transables $k_N < k_T$, el stock de capital no transable disminuye en el largo plazo y el precio de los no transables se mantiene constante a lo largo de su senda óptima. En este caso no se presenta ningún boom ni en precios ni en cantidades de las estructuras no residenciales de la economía.

**2.** Mediante un modelo de elección intertemporal discreto se plantea para edificaciones residenciales, es decir para la vivienda, un modelo de equilibrio parcial que igualmente estudia las consecuencias sobre el mercado de las edificaciones residenciales de un choque positivo de ingresos. Este modelo está dado por las ecuaciones $(2 \cdot 64)$ y $(2 \cdot 65)$. En lo referente a las consecuencias de un choque positivo de ingresos se observó que si:

- La economía no tiene acceso a los mercados internacionales de capital y que el choque de ingresos se percibe como transitorio, y además, aumenta el ahorro; entonces la tasa de interés doméstica, que es la tasa de los activos financieros, caerá con respecto a la tasa de retorno de la vivienda. Produciéndose un boom tanto en los precios como en la producción de edificaciones residenciales y no residenciales.

- El choque de ingresos se percibe como de naturaleza permanente puede incentivar a los consumidores a revisar sus expectativas acerca de sus ingresos futuros. Si estas expectativas son optimistas, los consumidores se pueden sentir motivados a consumir más en el presente y a financiar el gasto extra pidiendo prestado y teniendo como respaldo sus ingresos futuros. Esto sugiere la posibilidad de que aumente la demanda de vivienda y por ende sus precios. En este caso, si la oferta de vivienda es elástica, es posible que se presente un boom tanto en precios como en cantidad de viviendas residenciales.

# *Bibliografía*


[1] **Blanchard, O. y Fischer, S.**. "Lectures on macroeconomics", MIT Press, 1989, pag.75-90.

[2] **Chiang A.**. "Elements of dynamic optimization", , McGraw-Hill International Editions, New York, 1992.

[3] **Elsgoltz L**. "Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional".Editorial MIR, Moscú, 1969.

[4] **Miles D. Housing**. ", Financial Markets and Wider Economy, John Wiley and Sons", New York, 1994.

[5] **O'Neil P**. "Advanced Engineering Mathematics". Wadsworth, California, 1991.

[6] **Poterba, J.**"Tax Subsidies to Owner-Occupied Housing, Quarterly Journal of Economics". pag. 729-752.

[7] **Royden, H.L.**"Real Analysis, the MacMillan Company". New York 1971.

[8] **Stokey, N y Lucas, R.**"Recursive Methods in Economic Dynamics". Harvard University, Londres, Inglaterra, 1989.

[9] **Renán Acosta, Cesar**. (2004), "Obtensión de la ecuación de Euler-Lagrange utilizando los vectores base y vectores reciprocos", Universidad Autónoma de yucatán Merida, Mexico. Ingenieria, vol. 8, num. 1, pp.17-22.