UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"EQUIVALENCIAS ENTRE LAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS FRACCIONARIAS Y LAS DERIVADAS CLASICAS"

Tesis presentada por:

Bach. Mat. Elmer Coronel Frías

Bach. Mat. Marlon Tomas Moreno Chapoñán

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE

Licenciado en Matemática

Asesor:

Mag. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez

Lambayeque – Perú
2016

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo
Escuela Profesional De Matemática

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada "EQUIVALENCIAS ENTRE LAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS FRACCIONARIAS Y LAS DERIVADAS CLASICAS", presentada por el Bach. Mat. Elmer Coronel Frías y por el Bach. Mat. Marlon Tomas Moreno Chapoñán, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

M.Sc. Santos Henry Guevara Quiliche
Presidente del Jurado

Lic. Mat. William Wilmer Coronado Juárez
Secretario del Jurado

Mg. Adelmo Pérez Herrera
Vocal del Jurado

Fecha de defensa Junio del 2016

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

"EQUIVALENCIAS ENTRE LAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS FRACCIONARIAS Y LAS DERIVADAS CLASICAS"

Mag. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez
Asesor

Bach. Mat. Elmer Coronel Frías
Autor

Bach. Mat. Marlon Tomas Moreno Chapoñán
Autor

Lambayeque – Perú
2016

AGRADECIMIENTO

En primer lugar a Dios. A mis padres: Miguel Coronel Llanos y Juana Frias Coronel por su constante apoyo. A mis profesores. A mis amigos. A mi esposa. Al asesor: Alcides Raúl Cuti Gutiérrez

Elmer Coronel Frías

En primera instancia a Dios. A mi madre: Rosa Nanci Chapoñán Sandoval. A mis hermanos. A mis compañeros. A mis profesores. Al asesor: Alcides Raúl Cuti Gutiérrez

Marlon T. Moreno Chapoñán

DEDICATORIA

A mis hijos: Elmer Jair Coronel Céspedes y Camila Solange Coronel Céspedes, que Dios ilumine sus caminos para que sean Forjadores del futuro.

Elmer Coronel Frías

A mi madre Rosa Nanci Chapoñán Sandoval por su incondicional apoyo en el cumplimiento de mis metas trazadas.

Marlon T. Moreno Chapoñán

Resumen

Las derivadas fraccionarias son generalizaciones de las habituales que las incluyen como casos particulares. En este contexto cabe plantearse una generalización del orden de un operador diferencial, de tal manera que sea posible establecer ciertas equivalencias entre propiedades de derivación fraccionaria y derivación clásica.

En el presente trabajo daremos una breve introducción al cálculo fraccionario. Definiremos la integral fraccionaria desde el punto de vista de Riemann-Liouville y a partir de ella definiremos la derivada de orden fraccionario, estableceremos las equivalencias de sus fórmulas y propiedades con las derivadas clásicas.

Así mismo se muestra una aplicación del cálculo fraccionario (derivada e integral fraccionaria) para resolver el problema de la tautócrona.

Abstrat

Them derived fractional are generalizations of them common to them include as cases private. In this context it should be consider a generalization of the order of a differential operator, so that it is possible to establish certain equivalences between properties of fractional derivation and classical derivation.

In this paper we will give a brief introduction to fractional calculus. We define the fractional integral from the point of view of Riemann−Liouville and from it we define the derivative of fractional order, establish the equivalence of its formulas and properties with classical derivatives.

Also an application of fractional calculus (fractional derivative and integral) is shown to solve the problem of tautochrone.

Índice general

Introducción

El cálculo es una de las herramientas utilizadas con mucha frecuencia en las matemáticas contemporáneas. Gracias al cálculo se pueden resolver problemas en diversas áreas como: Física, química, economía, biología, etc. Y, hay una conexión entre los conceptos de tangencia, curvatura y concavidad con las ideas de crecimiento, velocidad y aceleración.

Se destacan dos conceptos relevantes del cálculo elemental: La derivada y su operación inversa, la integral; los cuales son los teoremas fundamentales del cálculo.

En el cálculo elemental, según la notación de Leibniz la n-ésima derivada de una función continua f se denota por.

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t), \quad n \in \mathbb{N}$$

En la notación anterior, resulta interesante preguntarnos ¿Qué sucede cuando $n = 1/2$?. Esta fue una de las interrogantes que L'Hopital le planteó a Leibniz en el año 1695. Este hecho marca el nacimiento del cálculo de orden fraccionario y por ende de la derivada fraccionaria.

Posteriormente, algunos matemáticos realizaron investigaciones para definir formalmente la derivada fraccionaria de una función cualquiera.

Euler y Laplace fueron los primeros en encontrar algunas aproximaciones. Pero fue S.F.Lacroix en 1819 quien se dedicó a explorar la posibilidad de que la función $f(t) = t^m$ tuviera una derivada de orden fraccionario.

Se pretende en este trabajo generalizar el orden de un operador diferencial a un orden fraccionario y tratar de establecer equivalencias entre las propiedades de los operadores de derivación clásicos.

Como en cualquier área matemática, la derivada fraccionaria no se restringe al plano teórico, siendo este notable, los campos de aplicación práctica se incrementan año tras año.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Este primer capítulo presenta de manera general una introducción al término cálculo de orden fraccionario.Se establecen ciertas definiciones y se mencionan algunas funciones que aparecen de forma natural en él, que permitirá sentar las bases para el desarrollo de la teoría.

1.1. Cálculo de orden fraccionario

El símbolo $D = \dfrac{d}{dt}$ no representa ningún problema si tenemos nociones claras del cálculo de orden entero, incluso si nos tomamos la libertad de escribir.

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

Se tiene conocimiento del concepto planteado y la metodología operativa que está efectuando, siempre y cuando $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, podemos preguntarnos si existe la posibilidad de que los índices de iteración de los operadores de diferenciación y de integración, n, disminuyan sus restricciones y encuentre lugar en otro conjunto de elementos, por ejemplo $n \in \mathbb{R}$. Para fines de esta sección nos bastará con saber que la respuesta a esta pregunta es afirmativa y que además a dado pie a una nueva rama del análisis matemático llamada cálculo de orden fraccionario.

Cuando hablamos de Cálculo de orden fraccionario no nos referimos a operaciones relacionadas con fracciones, tampoco se quiere dar a entender una fracción del cálculo de orden entero que conocemos.

Al hablar de Cálculo de orden fraccionario se habla de la teoría de operadores que describen procesos de derivación e integración de órdenes fraccionarios. Esta teoría a su vez es la generalización de los operadores de derivación e integración clásicos y las consecuencias tanto teóricas como prácticas productos de ella.

Mencionar el nombre como fraccionario no parece algo coherente, pues los números reales estan compuestos por más elementos aparte de los números racionales. Un nombre más adecuado, tal vez sea el de cálculo de orden arbitrario.

1.2. Algunas Definiciones y Resultados

Para el estudio de las propiedades de los operadores de derivación e integración de orden fraccionario es necesario citar ciertas definiciones y resultados que nos ayuden a generar un mejor entendimiento.

1.2.1. Función Medible

Dados dos espacios medibles (X, Σ), (Y, Σ') y $f : X \longrightarrow Y$, se dice que f es función medible si $f^{-1}(E) \in \Sigma$ para todo $E \in \Sigma'$

1.2.2. Espacio $L_1(a, b)$

El espacio $L_1(a, b)$ está formado por las funciones medibles $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $|f(x)|$ es integrable según Lebesgue. Estos es, $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$.

La *norma* de $f \in L_1(a, b)$ está dada por:

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$$

Ejemplo
La función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x \text{ es racional} \\ \\ 1 & \text{, si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

1.2.3. Espacio $C^n[a, b]$

El espacio $C^n[a, b]$ está formado por todas las funciones $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que tienen *n-ésima* derivada contínua en $[a, b]$.

Esta definición será fundamental para la construcción del operador de derivación fraccionaria.

Ejemplo:
Sea la función

$$\begin{aligned} f : [c, d] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = (ax+b)^n \end{aligned}$$

Derivando sucesivamente la función f se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(ax+b)^{n-1}(a) \\ f''(x) &= n(n-1)(ax+b)^{n-2}(a)^2 \\ f'''(x) &= n(n-1)(n-2)(ax+b)^{n-3}(a)^3 \end{aligned}$$

Analizando las tres derivadas se deduce que:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots 2x1(ax+b)^{n-n}(a)^n \\ &= n!a^n(ax+b)^0 \\ &= n!a^n \end{aligned}$$

1.2.4. Transformada integral de Laplace

La transformada de Laplace es un operador que permite bajo ciertas condiciones resolver problemas de valor inicial de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, por lo que la transformada de Laplace constituye una herramienta muy importante.

La transformada de Laplace de una función se define por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s) \qquad s \in \mathbb{R}$$

La Transformada de Laplace de una función f existe si la integral anterior converge. Lo cual se cumple siempre que f sea al menos seccionalmente continua y de orden exponencial. Asi mismo, $F(s)$ está definida para los números reales $s > a$, donde a es una constante que depende del comportamiento de crecimiento de f.

1.2.5. Transformada de Laplace de la derivada de orden "n" de una función f

Si $f^{(n)}(t), n \in \mathbb{Z}^+$ es una función contínua por tramos en $[0, \infty >$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)(0)}$$

Ejemplo: Calcular $\mathcal{L}\{t^n\}$ mediante la transformada de las derivadas.

Solución

$$\mathcal{L}\{D_t^n t^n\} = \mathcal{L}\{n!\}$$

Como $n!$ es una constante, entonces

$$\mathcal{L}\{D_t^n t^n\} = \frac{n!}{s}, s > 0$$

Por definición $(1 \cdot 2 \cdot 4)$, se tiene

$$\begin{aligned} s^n \mathcal{L}\{t^n\} - s^{n-1} f(0) - -s^{n-2} f'(0) - \ldots - -f^{n-1}(0) &= \frac{n!}{s} \\ s^n \mathcal{L}\{t^n\} - 0 - 0 - \ldots - 0 &= \frac{n!}{s} \\ s^n \mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{n!}{s} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$$

1.2.6. Transformada de Laplace de la integral de orden "n" de una función f

Si $f : [0, \infty > \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función contínua por tramos en $[0, \infty >$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}\{I^n f(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s^n}$$

1.2.7. Convolución de funciones

Sean f y g dos funciones contínuas por tramos en $[0, \infty >$.

Se dice que $f * g$ es la convolución de f y g si y sólo si

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Su Transformada de Laplace está dada por:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$$

1.3. Funciones Especiales

Para el desarrollo de las definiciones de los operadores de orden fraccionario, es indispensable incorporar algunas funciones que, como se verá más adelante, juegan un papel muy importante en la teoría de derivación e integración de orden fraccionario. Estas funciones son la función Gamma, la función Beta y la función de Mittag−Leffler.

1.3.1. Función Gamma

La interpretación más sencilla que se le puede dar a esta función es que constituye una generalización del factorial de todo número real, aunque el argumento de ésta sea en general un número complejo.
La función $\Gamma(z)$ se define en términos de una integral impropia como sigue:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \qquad Re(z) > 0 \tag{1.1}$$

la cual converge en la mitad derecha del plano complejo.

Si se tuviera el caso en que z es un entero positivo se puede escribir a Γ de la siguiente manera

$$\Gamma(z) = (z - 1)! \tag{1.2}$$

La ecuación (1.2) puede ser fácilmente probada mediante el uso de la integración por partes.

La *propiedad* más conocida y más utilizada tal vez sea la siguiente:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \text{para todo} \quad z > 0 \tag{1.3}$$

Demostración

Según (1.1), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^{z+1-1}e^{-t}dt, \qquad \forall z>0 \\ &= \int_0^\infty t^z e^{-t}dt \end{aligned}$$

La última integral se resuelve atravéz de la integración por partes, para ello hacemos:

$$\begin{aligned} u &= t^z \longrightarrow du = zt^{z-1}dt \\ dv &= e^{-t}dt \longrightarrow v = -e^{-t} \end{aligned}$$

Luego $\Gamma(z+1) = u\cdot v/_0^\infty - \int_0^\infty vdu$
Reemplazando los datos anteriores en la expresión del lado derecho, resulta:

$$\Gamma(z+1) = (-e^{-t}t^z)/_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}zt^{z-1}dt = 0 + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

Por lo tanto de acuerdo con (1.1), sucede que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

La ecuación (1.3) juega un papel importante en el cálculo de valores de la función Gamma.
Si se toma $z=n$ (n entero positivo) y se usa (1.3) repetidamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ \vdots &= \vdots \\ \Gamma(n+1) &= n(n-1)(n-2)\ldots 1\Gamma(1) \end{aligned}$$

Esto es:

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.4}$$

Esta última expresión puede usarse para definir 0!, si se aplica para $n=0$, obteniendose

$$0! = \Gamma(1) = 1 \tag{1.5}$$

Demostración

Usando $(1 \cdot 1)$, se tiene que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt = (-e^{-t})/_o^\infty = -(e^{-\infty} - e^{-0}) = -(0-1)$$

Por lo tanto:

$$\Gamma(1) = 1$$

Ejemplo: Un valor inmediato de $\Gamma(z)$ es el siguiente

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Demostración

Teniendo en cuenta $(1 \cdot 1)$ se puede ver que

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt \quad \text{por (1.1)} \\ &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt \end{aligned}$$

Ahora haciendo un cambio de variable:

$$\begin{aligned} t &= u^2 \\ dt &= 2udu \end{aligned}$$

Para $u = 0$, $t = 0$ y cuando $u \longrightarrow \infty$, $t \longrightarrow \infty$

Podemos reescribir la última integral como:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_o^\infty (u^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-u^2}2udu = 2\int_o^\infty u^{-1}e^{-u^2}udu = 2\int_o^\infty e^{-u^2}du$$

Elevar al cuadrado los extremos

$$\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \left(2\int_o^\infty e^{-u^2}du\right)^2$$

Desarrollando el factor del lado derecho, se obtiene

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\left(\int_o^\infty e^{-u^2}du\right)\left(\int_o^\infty e^{-u^2}du\right)$$

Pero:
$$\int_o^{\infty} e^{-u^2} du = \int_o^{\infty} e^{-v^2} du$$
Reemplazamos en la segunda integral del lado derecho
$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\left(\int_o^{\infty} e^{-u^2} du\right)\left(\int_o^{\infty} e^{-v^2} dv\right) = 4\int_o^{\infty}\int_o^{\infty} e^{-u^2} e^{-v^2} dudv = 4\int_o^{\infty}\int_o^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} dudv$$
Al cambiar a coordenadas polares (r, θ)
$$\begin{aligned} u &= r\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ v &= r \operatorname{sen}\theta \\ u^2 + v^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Permiten evaluar la integral doble, entonces:
$$\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = 4\int_o^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(\int_o^{\infty} e^{-r^2} r dr\right) d\theta}_{(*)}$$

de (*) hacemos :
$$\begin{aligned} m &= r^2 \\ \longrightarrow dm &= 2rdr \\ \\ \frac{dm}{2} &= rdr \end{aligned}$$
Para $r = 0$, $m = 0$ y cuando $r \longrightarrow \infty$, $m \longrightarrow \infty$
Reemplazando en $(*)$, se tiene
$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\int_o^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_o^{\infty} e^{-m}\frac{dm}{2}\right) d\theta = 4.\frac{1}{2}\int_o^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_o^{\infty} e^{-m} dm\right) d\theta$$
Segun la demostración de $(1 \cdot 5)$: $\int_o^{\infty} e^{-m} dm = 1$, entonces:
$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2\int_o^{\frac{\pi}{2}} (1) d\theta = 2(\theta)/_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\frac{\pi}{2} - 0) = \pi$$
Por consiguiente
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Observación 1: Si z no es un número entero, entonces la función Gamma satisface:
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}, \quad 0 < z < 1 \tag{1.6}$$

Demostración

Usando (1.1) se tiene:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_o^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.\int_o^\infty s^{1-z-1}e^{-s}ds = \int_o^\infty\int_o^\infty e^{-(t+s)}t^{z-1}s^{-z}dtds\ldots \qquad (\alpha)$$

Haciendo: $u = t+s \quad \wedge \quad v = \frac{t}{s}$, se deduce que:

$$t = \frac{uv}{1+v}, \qquad s = \frac{u}{1+v}$$

Se tiene que el jacobiano de la transformación viene dado por:

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial u} & \dfrac{\partial t}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial s}{\partial u} & \dfrac{\partial s}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \\ \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante de segundo orden, resulta

$$= \left(\frac{v}{1+v}\right)\left(-\frac{u}{(1+v)^2}\right) - \left(\frac{v}{1+v}\right)\left(\frac{u}{(1+v)^2}\right)$$

Efectuando las operaciones respectivas llegamos a que

$$\begin{aligned} &= -\frac{uv}{(1+v)^3} - \frac{u}{(1+v)^3} \\ \frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)} &= -\frac{u}{(1+v)^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (α) y teniendo presente que $dtds = \left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)}\right| dudv$ nos queda

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_o^\infty\int_o^\infty e^{-u}\left(\frac{uv}{1+v}\right)^{z-1}\left(\frac{u}{1+v}\right)^{-z}\left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)}\right| dudv \\ &= \int_o^\infty\int_o^\infty e^{-u}\left(\frac{uv}{1+v}\right)^{z-1}\left(\frac{u}{1+v}\right)^{-z}\left(\frac{u}{(1+v)^2}\right) dudv \\ &= \int_o^\infty\int_o^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{1+v}\right)^{z} v^z \left(\frac{u}{1+v}\right)^{-1} v^{-1}\left(\frac{u}{1+v}\right)^{-z}\frac{u}{(1+v)^2} dudv \end{aligned}$$

Utilizando propiedades de la teoría de exponentes, se consigue

$$= \int_o^\infty \int_o^\infty e^{-u} v^{z-1} \left(\frac{1+v}{u}\right) \frac{u}{(1+v)^2})dudv$$

Simplificando términos se tiene

$$= \int_o^\infty \int_o^\infty e^{-u} v^{z-1} \frac{1}{1+v} dudv$$

$$= \underbrace{\int_o^\infty e^{-u} du}_{1} . \underbrace{\int_o^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v} dv}_{\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}}$$

Para luego obtener

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

Extensión del Dominio de la función Gamma

En (1.1) se definió la función Gamma para valores positivos de la variable z. Es posible extender el dominio de definición de $\Gamma(z)$ para valores de z negativos, considerando (1.3) en la forma:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \tag{1.7}$$

De acuerdo con (1.7), $\Gamma(0) = \dfrac{\Gamma(1)}{z}$ es infinito.

Mediante aplicaciones repetidas de (1.7), es fácil ver que $\Gamma(-1), \Gamma(-2), \Gamma(-3), \ldots$ también son infinitos.

Para cualquier otro valor negativo de z, se puede calcular $\Gamma(z)$ usando (1.7) cuantas veces sea necesario, hasta que $\Gamma(z+1)$ tenga argumento positivo.

De esta manera, juntando (1.1) y (1.7), la función $\Gamma(z)$ queda definida para todos los valores de z, excepto $z = 0, -1, -2, -3, ...$

Mediante el uso de la función Gamma podemos definir una nueva función, la cual tiene la forma

$$\emptyset(t) = \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, \forall t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$$

que resulta de mucha utilidad para plantear la integral fraccionaria.

1.3.2. Función Beta

Esta función fue estudiada por Euler y Legendre; sin embargo, su nombre se debe a Jacques Binet. La función Beta resulta de una combinación de Γ evaluada en distintos valores. Su definición clásica es la siguiente:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \tag{1.8}$$

que resulta ser convergente para todo $m > 0$ y $n > 0$

Proposición 1.1. *La función Beta es simétrica. Es decir:*

$$B(m,n) = B(n,m), \quad \forall m,n > 0 \tag{1.9}$$

Demostración
Teniendo en cuenta (1.8), se tiene

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \qquad \ldots(\theta)$$

Hacer: $z = 1 - x \longrightarrow dz = -dx$

Además, cuando

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &, \quad z = 1 \\ x = 1 \quad &, \quad z = 0 \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución respectiva en (θ), obtenemos

$$\begin{aligned} B(m,n) \ &= \ \int_1^0 (1-z)^{m-1}z^{n-1}(-dz) \\ &= \ -\int_1^0 z^{n-1}(1-z)^{m-1}dz \end{aligned}$$

Puesto que $z^{n-1}(1-z)^{m-1}$ es integrable, entonces la integral anterior queda

$$\begin{aligned} &= \ -\left(-\int_0^1 z^{n-1}(1-z)^{m-1}dz\right) \\ &= \ \int_0^1 z^{n-1}(1-z)^{m-1}dz \end{aligned}$$

Luego; según (1.8) se llega a que:

$$B(m,n) = B(n,m)$$

Proposición 1.2. *La relación con gamma de m y gamma de n está dado por:*

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \qquad \forall m,n > 0 \tag{1.10}$$

Demostración

Utilizando (1.8), se tiene:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

Sea

$$g(t) = \int_0^t x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx, \forall t > 0 \qquad \ldots(*)$$

Aplicando transformada de Laplace en ambos miembros

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx\right\}$$

Por convolución de funciones se tiene

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{t^{m-1} * t^{n-1}\} = \mathcal{L}\{t^{m-1}\} * \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{(m-1)!}{S^{m-1+1}}.\frac{(n-1)!}{s^{n-1+1}} = \Gamma(m).\Gamma(n).\frac{1}{s^{m+n}}$$

Luego, por definición de transformada inversa resulta

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\Gamma(m)\Gamma(n)\frac{1}{s^{m+n}}\right\}$$

Como la transformada inversa se da respecto a s, entonces $\Gamma(m)x\Gamma(n)$ es una constante, por lo que

$$= \Gamma(m)\Gamma(n)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{m+n}}\right\}$$

Multiplicamos dentro de la transformada inversa tanto el numerador como el denominador por $(m+n-1)!$

$$= \Gamma(m)\Gamma(n)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(m+n-1)! \cdot 1}{(m+n-1)! s^{m+n}}\right\}$$

Extrayendo el factor $(\frac{1}{(m+n-1)!})$ pues se trata de una constante

$$= \Gamma(m)\Gamma(n)\frac{1}{(m+n-1)!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(m+n-1)!}{s^{m+n}}\right\}$$

Por definición de transformada inversa, se consiguen

$$= \Gamma(m)\Gamma(n)\frac{1}{(m+n-1)!}t^{m+n-1}$$

Teniendo presente la ecuación (1.2), se llega a que

$$g(t) = \Gamma(m)\Gamma(n)\frac{1}{\Gamma(m+n)}t^{m+n-1} \qquad \ldots(**)$$

Luego, de (*) y (**) se deduce que

$$g(t) = \int_0^t x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \Gamma(m)\Gamma(n)\frac{1}{\Gamma(m+n)}t^{m+n-1}, \quad \forall t > 0$$

Como es $\forall t > 0$, en particular para $t = 1$, se tiene:

$$g(1) = \underbrace{\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx}_{B(m,n)} = \Gamma(m)\Gamma(n)\frac{1}{\Gamma(m+n)}(1)^{m+n-1}$$

Por lo tanto

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Proposición 1.3. *Para todo $m > 0$, $n > 0$*

$$\int_o^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}(\theta)\cos^{2n-1}(\theta)d\theta = \frac{1}{2}B(m,n)$$

Demostración

$$\begin{aligned}\int_o^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}(\theta)\cos^{2n-1}(\theta)d\theta &= \int_o^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-2}(\theta)\cos^{2n-2}(\theta)\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta \\ &= \int_o^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1}\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta\end{aligned}$$

Usando identidades pitagóricas se tiene

$$\int_o^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}(\theta)\cos^{2n-1}(\theta)d\theta = \int_o^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1}\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta$$

Hacemos un cambio de variable

$$\begin{aligned} z = \cos^2\theta &\longrightarrow dz = -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta d\theta \\ &\longrightarrow -\frac{dz}{2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta \end{aligned}$$

Cuando

$$\begin{aligned} \theta = 0 \quad &, \quad z = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \quad &, \quad z = 0 \end{aligned}$$

Efectuando los cambios respectivos, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_o^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}(\theta)\cos^{2n-1}(\theta)d\theta &= \int_1^0 (1-z)^{m-1}z^{n-1}\left(\frac{-dz}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^0 (1-z)^{m-1}z^{n-1}dz \end{aligned}$$

La función $(1-z)^{m-1}z^{n-1}$ es integrable, entonces la integral anterior nos queda

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}\left(-\int_0^1 z^{n-1}(1-z)^{m-1}dz\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 z^{n-1}(1-z)^{m-1}dz \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (1.8) se consigue

$$= \frac{1}{2}B(n,m) \qquad \text{por (1.8)}$$

Por simetría dada (1.9), tenemos

$$\int_o^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}(\theta)\cos^{2n-1}(\theta)d\theta = \frac{1}{2}B(m,n)$$

1.3.3. Función de Mittag-Leffler

Esta función es una generalización de la exponencial representada en serie de potencias. Su uso se ha adecuado con buenos resultados en el campo de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y muchos estudiosos en el tema la consideran como la análoga a la exponencial en ecuaciones diferenciales ordinarias.

La función de Mittag-Leffler se define como sigue:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{C}$$

Cuando $\alpha = \beta = 1$ se obtiene: $E_{1,1}(z) = e^z$ que resulta ser sólo un caso particular.

Capítulo 2

INTEGRAL FRACCIONARIA

Antes de adentrarnos en los operadores de integral Fraccionaria, es necesario hacer mención de algunos resultados y notaciones que están presentes en el cálculo de orden entero, los cuales servirán como punto de partida para la construcción de la definición de integral fraccionaria.

La n-ésima integral de una función f, continua sobre $[0,t]$ está definida recursivamente por

$$I^n f(t) = \int_0^t I^{n-1} f(t)dt \tag{2.1}$$

Para el caso en que $n = 0$, se obtiene

$$I^0 f(t) = f(t)$$

que significa que la función no está siendo alterada

El método para extender el concepto de la integral entera a una integral fraccionaria, se conoce como Método de Riemann-Liouville.

Observemos primero que $\displaystyle\int_0^t f(x)dx = (1 * f)(t)$, es decir que, bajo ciertas condiciones, una integral es igual a la convolución entre la función y 1.
¿Qué pasa si hacemos nuevamente la convolución con 1?
Obtendremos:

$$\int_0^t \int_0^\alpha f(x)dxd\alpha = (1 * (1 * f))(t)$$

Análogamente obtendremos la expresión más general:

$$\underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^\alpha}_{n-veces} f(x)dxd\alpha = \underbrace{(1 * \ldots (1 * f))}_{n-veces}(t)$$

Si llamamos I^n, a las n integrales consecutivas y 1^{*_n} a las n convoluciones con 1, podemos escribir:

$$I^n f(t) = f * 1^{*_n} \qquad \ldots(\beta)$$

Analicemos las n convoluciones 1^{*_n}

$$\begin{aligned} 1^{*_2} &= \int_0^t dx = t \\ 1^{*_3} &= \int_0^t x dx = \frac{t^2}{2} \\ 1^{*_4} &= \frac{1}{2}\int_0^t x^2 dx = \frac{t^3}{3!} \end{aligned}$$

De manera que inductivamente se llega a que:

$$1^{*_n} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Por lo tanto, reemplazando esto en (β) podemos escribir las n integrales como una sola

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-x)^{n-1} f(x)dx \tag{2.2}$$

La ecuación (2.2) es llamada Fórmula de Cauchy de la integral repetida y marca el inicio de la integral fraccionaria

2.1. Operadores de orden Fraccionario

Las derivadas e integrales de orden fraccionario son generalizaciones de las usuales que las incluyen como casos particulares. Sin embargo no hay un consenso generalizado sobre qué son la derivada y la integral fraccionaria de una función, y nos encontramos con una gran variedad de propuestas. Definimos en este trabajo algunos de los operadores de orden fraccionario más extendidos, deteniéndonos especialmente en la integral y derivada de Riemann-Liouville. Estos operadores facilitan la extensión de continuidad al semiplano $\{z \in \mathbb{C}/Re(z) > 0\}$ de las nociones clásicas de derivadas e integrales enteras.

2.1.1. Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville

En la ecuación (2.2), dado que $(n-1)! = \Gamma(n), \forall n \in \mathbb{N}$, siendo $\Gamma(n)$ la función Gamma, observamos que el miembro derecho puede tener significado para valores no enteros de n. Entonces tiene sentido intercambiar a "n" por un número no entero $\lambda > 0$, obteniendo una extensión de la fórmula de Cauchy expresado de la siguiente manera.

$$I^{\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau \tag{2.3}$$

La ecuación anterior da lugar a la definición de integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Definición 2.1. Sea $f \in L_1(a,b)$. La ecuación

$$I^{\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau \quad (t > a) \tag{2.4}$$

es llamada integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden λ de f.

Cuando $\lambda = n \in \mathbb{N}$, se rescata el resultado del cálculo de orden entero.

Ejemplo
Sea $f(t) = t^2$ con $\lambda = \frac{1}{2}$.
Considerando la ecuación (2,3) tenemos:

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}(t^2) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{2}-1} \tau^2 d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^2 d\tau}_{*} \end{aligned}$$

En $(*)$, hacemos un cambio de variable

$$u = \frac{\tau}{t} \longrightarrow du = \frac{1}{t} d\tau$$

$$\text{Para } \tau = 0 \quad , \quad u = 0$$

$$\text{Para } \tau = t \quad , \quad u = 1$$

Reemplazando valores en $(*)$, se tiene

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}(t^2) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (t-ut)^{-\frac{1}{2}}(ut)^2 t du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (t(1-u))^{-\frac{1}{2}}u^2t^2 t du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}u^2t^3 du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}u^2 du \end{aligned}$$

Como la integraciòn es respecto a u, entonces $t^{\frac{5}{2}}$ es constante

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}(t^2) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}}\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}u^2 du \\ &= \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-1}u^{3-1} du \end{aligned}$$

Por la ecuación $(1\cdot 8)$ se llega a que

$$= \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}}B(3, \frac{1}{2})$$

La ecuación $(1\cdot 10)$ convierte a la expresión anterior en

$$= \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3+\frac{1}{2})}$$

Según la ecuación $(1\cdot 2)$ y utilizando el hecho de que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, se obtiene

$$\begin{aligned} &= \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{(3-1)!\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{7}{2})} \\ &= \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{5}{2}+1)} \end{aligned}$$

Según la ecuación $(1\cdot 3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})} \\ &= \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{3}{2}+1)} \end{aligned}$$

Utilizando otra vez la ecuación $(1 \cdot 3)$ se tiene

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}(t^2) &= \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} \\ &= \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{\frac{15}{4}\Gamma(\frac{1}{2}+1)} \\ &= \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{\frac{15}{4}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \\ & \quad \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I^{\frac{1}{2}}(t^2) = \frac{16}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}}$$

2.1.2. Propiedades

Acontinuación enunciamos una serie de propiedades básicas de los operadores de integración fraccionaria de Riemann-Liouville, con las que se ponen de manifiesto las analogías y diferencias con los operadores enteros clasicos.

Propiedad 1. (**Convolución**). Si $I^\lambda f(t)$ es la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden λ, entonces ésta también puede ser representada como convolución entre funciones, así:

$$I^\lambda f(t) = (\phi * f)(t)$$

donde

$$\phi(t) = \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$$

Demostración

Por definición de convolución de funciones

$$(\phi * f)(t) = \int_0^t \phi(\tau) f(t-\tau)d\tau \qquad \cdots (*)$$

Como

$$\phi(\tau) = \frac{\tau^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$$

Al sustituir en $(*)$ se tiene

$$(\phi * f)(t) = \int_0^t \frac{\tau^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} f(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t \tau^{\lambda-1} f(t-\tau)d\tau$$

Haciendo el cambio de variable: $t-\tau = u \longrightarrow -d\tau = du$, se tiene que:

$$\begin{aligned} &\text{Si:} \\ \tau = 0 \quad &, \quad u = t \\ \tau = t \quad &, \quad u = 0 \end{aligned}$$

Ejecutando los cambios de variables se tiene

$$(\phi * f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_t^0 (t-u)^{\lambda-1} f(u)(-du) = -\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t (t-u)^{\lambda-1} f(u)(-du) = I^\lambda f(t)$$

La propiedad (1) resulta útil en su relación con la transformada integral de Laplace. Esta relación nos permite encontrar la transformada de Laplace de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville mediante:

$$\mathcal{L}\{I^\lambda f(t)\} = s^{-\lambda} F(s)$$

En efecto:

Haremos la demostración para f regular a trozos y de orden exponencial.
Considerando la propiedad (1), se tiene que

$$\mathcal{L}\{I^\lambda f(t)\} = \mathcal{L}\{(\phi * f)(t)\}$$

Como $\phi(t)$ y $f(t)$ son funciones continuas por tramos y de orden exponencial se cumple

$$= \mathcal{L}\{\phi(t)\}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Al sustituir $\phi(t)$ por $\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ y al tener presente la definición de transformada de Laplace resulta,

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\} F(s)$$

Considerando $(1 \cdot 2)$ se llega a lo siguiente

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\right\} F(s)$$

Extrayendo el término $\frac{1}{(\lambda-1)!}$, pues actúa como constante

$$= \frac{1}{(\lambda-1)!}\mathcal{L}\{t^{\lambda-1}\} F(s)$$

Por definición de transformada de Laplace de un polinomio se obtiene

$$= \frac{1}{(\lambda-1)!}\frac{(\lambda-1)!}{s^{\lambda-1+1}}F(s)$$

Simplificando términos queda

$$= \frac{1}{s^{\lambda}}F(s)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{I^{\lambda}f(t)\} = s^{-\lambda}F(s)$$

Propiedad 2. (**Linealidad**). Sean $f, g \in L_1(a,b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Entonces

$$I^{\lambda}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha I^{\lambda}f(t) + \beta I^{\lambda}g(t), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Demostración

Utilizando (2.4) se tiene

$$\begin{aligned} I^{\lambda}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1}(\alpha f(\tau) + \beta g(\tau))d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_a^t ((t-\tau)^{\lambda-1}\alpha f(\tau) + (t-\tau)^{\lambda-1}\beta g(\tau))d\tau \end{aligned}$$

Puesto que $f, g \in L_1(a,b)$

$$I^{\lambda}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1}f(\tau) + \beta\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1}g(\tau)d\tau$$

Luego, por(2.4) se concluye

$$I^{\lambda}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha I^{\lambda}f(t) + \beta I^{\lambda}g(t)$$

Propiedad 3. Sea $f \in L_1(a,b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$. entonces se verifica que:

$$\lim_{\lambda \to 0} I^{\lambda}f(t) = f(t)$$

Casi para todo $t \in [a,b]$

Demostración

Por (2.4) se tiene que:

$$I^{\lambda}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1}f(\tau)d\tau$$

Aplicamos integración por partes, para lo cual hacemos

$$u = f(\tau) \quad \longrightarrow \quad du = f'(\tau)d\tau$$

$$dv = (t-\tau)^{\lambda-1}d\tau \quad \longrightarrow \quad v = -\frac{(t-\tau)^{\lambda-1+1}}{\lambda-1+1} = -\frac{(t-\tau)^{\lambda}}{\lambda}$$

Luego:

$$I^{\lambda}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left(uv/_a^t - \int_a^t vdu\right)$$

Reemplazando datos se tiene

$$\begin{aligned}
I^{\lambda}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left[-\left(f(\tau)\frac{(t-\tau)^{\lambda}}{\lambda}\right)/_a^t - \int_a^t -\frac{(t-\tau)^{\lambda}}{\lambda}f'(\tau)d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left[-\left(f(t)\frac{(t-t)^{\lambda}}{\lambda} - f(a)\frac{(t-a)^{\lambda}}{\lambda}\right) + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{\lambda}}{\lambda}f'(\tau)d\tau\right] \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left[-\frac{1}{\lambda}f(a)(t-a)^{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_a^t (t-\tau)^{\lambda}f'(\tau)d\tau\right]
\end{aligned}$$

Extrayendo el factor comun $\frac{1}{\lambda}$

$$= -\frac{1}{\lambda\Gamma(\lambda)}\left[-(t-a)^{\lambda}f(a) - \int_a^t (t-\tau)^{\lambda}f'(\tau)d\tau\right]$$

Por $(1\cdot 3)$ se obtiene

$$= -\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left[-(t-a)^{\lambda}f(a) - \int_a^t (t-\tau)^{\lambda}f'(\tau)d\tau\right]$$

Tomando límite cuando $\lambda \longrightarrow 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0} I^{\lambda}f(t) &= \lim_{\lambda\to 0}\left[-\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left(-(t-a)^{\lambda}f(a) - \int_a^t (t-\tau)^{\lambda}f'(\tau)d\tau\right)\right] \\
&= \left[-\frac{1}{\Gamma(0+1)}\left(-(t-a)^{0}f(a) - \int_a^t f'(\tau)d\tau\right)\right]
\end{aligned}$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo se llega a que

$$= -(-f(a) - (f(t) - f(a)))$$

$$= -(-f(a) - f(t) + f(a))$$

Por lo tanto

$$\lim_{\lambda \to 0} I^{\lambda} f(t) = f(t)$$

Propiedad 4. (Semigrupo o ley de exponentes): Sea $f \in L_1(a,b)$. Entonces se verifica que:

$$I^{\alpha}[I^{\lambda} f(t)] = I^{\alpha+\lambda} f(t), \quad \alpha, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Casi para todo $t \in [a,b]$

Demostración

Utilizando (2.4) se obtiene

$$I^{\alpha}[I^{\lambda} f(t)] = I^{\alpha} \left[\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau \right]$$

Otra vez por (2.4)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^{\tau} (\tau-\beta)^{\lambda-1} f(\beta) d\beta \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} . \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^t \int_a^{\tau} (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\beta)^{\lambda-1} f(\beta) d\beta d\tau \end{aligned}$$

En la expresión anterior podemos intercambiar las integrales gracias al teorema de Fubini, llegando a la expresión

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)} \int_a^t \int_{\beta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\beta)^{\lambda-1} f(\beta) d\tau d\beta$$

$$I^{\alpha}[I^{\lambda} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)} \int_a^t f(\beta) \left[\int_{\beta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\beta)^{\lambda-1} d\tau \right] d\beta \quad \ldots \qquad (2.5)$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\begin{aligned} u = \frac{\tau-\beta}{t-\beta} \quad &\to \quad du = \frac{1}{t-\beta} d\tau \\ \text{Para } : \tau = \beta \quad &, \quad u = \frac{\beta-\beta}{t-\beta} = 0 \\ \text{Para } : \tau = t \quad &, \quad u = \frac{t-\beta}{t-\beta} = 1 \end{aligned}$$

Entonces la integral que está dentro del corchete se puede cambiar por:

$$\int_{\beta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\beta)^{\lambda-1} d\tau = \int_0^1 (t-((t-\beta)u+\beta))^{\alpha-1} ((t-\beta)u+\beta-\beta)^{\lambda-1} (t-\beta) du$$

Distribuyendo términos

$$= \int_0^1 (t - tu + \beta u - \beta)^{\alpha-1}((t-\beta)u)^{\lambda-1}(t-\beta)du$$

Asociando téerminos y utilizando leyes de exponentes, resulta

$$= \int_0^1 ((t-\beta) - (t-\beta)u)^{\alpha-1}(t-\beta)^{\lambda-1}u^{\lambda-1}(t-\beta)du$$

Factorizando y eliminando términos, se tiene

$$= \int_0^1 ((t-\beta)(1-u))^{\alpha-1}(t-\beta)^{\lambda}u^{\lambda-1}du$$

$$= \int_0^1 (t-\beta)^{\alpha-1}(1-u)^{\alpha-1}(t-\beta)^{\lambda}u^{\lambda-1}du$$

$$= \int_0^1 (t-\beta)^{\alpha+\lambda-1}u^{\lambda-1}(1-u)^{\alpha-1}du$$

Puesto que se está integrando respecto a u, entonces $(t-\beta)^{\alpha+\lambda-1}$ es una constante por lo que

$$= (t-\beta)^{\alpha+\lambda-1}\int_0^1 u^{\lambda-1}(1-u)^{\alpha-1}du$$

Por $(1 \cdot 8)$ se llega a que

$$= (t-\beta)^{\alpha+\lambda-1}B(\lambda,\alpha)$$

La ecuación $(1 \cdot 10)$ nos lleva a lo siguiente

$$\int_\beta^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\beta)^{\lambda-1}d\tau = (t-\beta)^{\alpha+\lambda-1}\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\lambda+\alpha)} \quad \ldots \tag{2.6}$$

Reemplazando (2.6) en (2.5) resulta:

$$I^\alpha[I^\lambda f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)}\int_a^t f(\beta)\left[(t-\beta)^{\alpha+\lambda-1}\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\lambda+\alpha)}\right]d\beta$$

Como se está integrando respecto a β, entonces $\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\lambda+\alpha)}$ es una constante

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)}.\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\lambda+\alpha)}\int_a^t f(\beta)(t-\beta)^{\alpha+\lambda-1}d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\lambda)}\int_a^t f(\beta)(t-\beta)^{\alpha+\lambda-1}d\beta$$

Finalmente teniendo en cuenta (2.4), se concluye

$$I^\alpha[I^\lambda f(t)] = I^{\alpha+\lambda}f(t)$$

Propiedad 5. (Conmutatividad): Sea $f \in L_1(a,b)$ y $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}^+$. Entonces

$$I^\alpha[I^\lambda f(t)] = I^\lambda[I^\alpha f(t)]$$

Demostraciòn

$$\begin{aligned} I^\alpha[I^\lambda f(t)] &= I^{\alpha+\lambda} f(t) \quad \text{(Por propiedad 4)} \\ I^\alpha[I^\lambda f(t)] &= I^{\lambda+\alpha} f(t) \quad \text{(Conmutatividad en R)} \\ I^\alpha[I^\lambda f(t)] &= I^\lambda[I^\alpha f(t)] \quad \text{(Por propiedad 4)} \end{aligned}$$

2.1.3. Ejemplos

I) Sea $f(t) = 1$

Por (2.3), se puede ver que

$$\begin{aligned} I^\lambda(1) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1}(1) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} d\tau \end{aligned}$$

Desarrollando la integral obtenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left[\left(-\frac{(t-\tau)^{\lambda-1+1}}{\lambda-1+1} \right) /_0^t \right] \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{(t-\tau)^\lambda}{\lambda} \right) /_0^t \\ &= -\frac{1}{\lambda\Gamma(\lambda)} (t-\tau)^\lambda /_0^t \end{aligned}$$

Por $(1 \cdot 3)$, resulta

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} [(t-t)^\lambda - (t-0)^\lambda] \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} (-t^\lambda) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I^\lambda(1) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} t^\lambda$$

II) Considerando la misma función del ejemplo (I) para $\lambda = \frac{1}{2}$

$$I^{\frac{1}{2}}(1) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}t^{\frac{1}{2}}$$

Teniendo en cuenta $(1 \cdot 3)$ se tiene

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^{\frac{1}{2}}$$

Como $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, entonces

$$I^{\frac{1}{2}}(1) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}$$

Por consiguiente

$$I^{\frac{1}{2}}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}$$

Si a la función del ejemplo (II) le volvemos a aplicar el operador de Riemann-Liouville de orden $\dfrac{1}{2}$ se obtiene el resultado del cálculo elemental.
Veamos:

$$I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}(1) = I^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}\right]$$

Por (2.3), se deduce

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{2}-1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\tau^{\frac{1}{2}}d\tau$$

Como $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, entonces

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}d\tau \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} z^2 = \tau \quad &\rightarrow \quad d\tau = 2zdz \\ \text{Para } \tau = 0 \quad &, \quad z = 0 \\ \text{Para } \tau = t \quad &, \quad z = \sqrt{t} \end{aligned}$$

Sustituyendo valores en la ultima integral se obtiene

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}(1) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{t}} \frac{z \cdot 2z}{\sqrt{t-z^2}}dz \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\sqrt{t}} \frac{z^2}{\sqrt{t-z^2}}dz \qquad \ldots (*) \end{aligned}$$

Aplicamos sustitución trigonométrica

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta = \frac{z}{\sqrt{t}} &\quad \to \quad \theta = \operatorname{arcsen}(\frac{z}{\sqrt{t}}) \\ z = \sqrt{t}\operatorname{sen}\theta &\quad \to \quad dz = \sqrt{t}\cos\theta d\theta \\ \text{Para } z = 0 &\quad , \quad \theta = 0 \\ z = \sqrt{t} &\quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Entonces la expresón (*). se puede reescribir de la siguiente manera

$$I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}(1) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{t}\cos\theta}{\sqrt{t-t\operatorname{sen}^2\theta}}d\theta$$

Aplicando identidad pitagórica

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{t}\cos\theta}{\sqrt{t}\cos\theta}d\theta$$

Simplificando obtenemos

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\operatorname{sen}^2\theta d\theta$$

Como se esta integrando respecto a θ, entonces t es una constante

$$\begin{aligned} &= \frac{4t}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta d\theta \\ &= \frac{4t}{\pi}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right)/_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4t}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{sen}\pi}{4}\right) \\ &= \frac{4t}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Finalmente se logra tener

$$I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}(1) = t$$

observación 2:

Otra forma de desarrollar $I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}(1)$

De acuerdo con la propiedad (4) tenemos

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}(1) &= I^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(1) \\ I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}(1) &= I^{1}(1) \end{aligned}$$

Utilizando la ecuacion (2.3) nos queda

$$= \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^t (t-\tau)^{1-1}(1)d\tau$$

Ademas sabiendo que $\Gamma(1) = 1$, la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned} &= \int_0^t d\tau \\ &= (\tau)/_0^t \end{aligned}$$

Entonces

$$I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}(1) = t$$

III) Sea $f(t) = t^{\alpha}$ con $\alpha > -1$

Por (2.3) tenemos

$$I^{\lambda}(t^{\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1}\tau^{\alpha}d\tau$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\begin{aligned} u = \frac{\tau}{t} \quad &\rightarrow \quad du = \frac{1}{t}d\tau \\ \text{Para } \tau = 0 \quad &, \quad u = \frac{0}{t} = 0 \\ \text{Para } \tau = t \quad &, \quad u = \frac{t}{t} = 1 \end{aligned}$$

Realizando los cambios respectivos, tendremos

$$\begin{aligned} I^{\lambda}(t^{\alpha}) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 (t-ut)^{\lambda-1}(ut)^{\alpha} t du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 (t(1-u))^{\lambda-1}u^{\alpha}t^{\alpha} t du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-u)^{\lambda-1}u^{\alpha}t^{\alpha+1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 t^{\alpha+\lambda}u^{\alpha}(1-u)^{\lambda-1} du \end{aligned}$$

Como la integración es respecto a u, $t^{\alpha+\lambda}$ es constante

$$= \frac{t^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 u^{\alpha}(1-u))^{\lambda-1} du$$

En la potencia u^{α}, sumamos y restamos 1 al exponente α

$$= \frac{t^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 u^{(\alpha+1)-1}(1-u)^{\lambda-1} du$$

Aplicando $(1\cdot 8)$ la espresión anterior queda de la forma

$$= \frac{t^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\lambda)} B(\alpha+1,\lambda)$$

Por $(1\cdot 10)$ el resultado anterior se puede expresar como

$$= \frac{t^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha+1+\lambda)}$$

Por lo tanto

$$I^{\lambda}(t^{\alpha}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\cdot t^{\alpha+\lambda} \qquad \dots \tag{2.7}$$

Para el caso de una potencia entera,$\alpha = n$, se tiene:

$$\begin{aligned} I^{\lambda}(t^{n}) &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)}\cdot t^{\lambda+n} \\ &= \frac{n!}{\Gamma(\lambda+n+1)}\cdot t^{\lambda+n} \qquad \text{Por } (1\cdot 4) \end{aligned}$$

Observamos que esta fórmula coincide con la del ejemplo (I) cuando $n = 0$.

Gracias a esta fórmula y a la linealidad del operador podemos calcular la integral fraccionaria de cualquier polinomio.

IV) Sea $f(t) = e^{at}$ con $a > 0$

Expresando la función exponencial e^{at} como serie de Maclaurin, tenemos

$$I^{\lambda} e^{at} = I^{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} I^{\lambda} \frac{(at)^k}{k!}$$

Puesto que la integración fraccionaria es respecto a t, $\frac{a^k}{k!}$ es constante

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} I^{\lambda} t^k$$

Por $(2 \cdot 7)$, se deduce

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\lambda+1)} t^{k+\lambda}$$

La ecuación $(1 \cdot 4)$ nos permite escribir el resultado anterior de la siguiente forma

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+\lambda+1)} t^k t^{\lambda}$$

En la expresión anterior t^{λ} actua como constante, entonces

$$= t^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+\lambda+1)}$$

Por consiguiente

$$I^{\lambda} e^{at} = t^{\lambda} E_{1,\lambda+1}(at)$$

la cual es una potencia fraccionaria multiplicada por la función de Mittag-Leffler.

2.1.4. Existencia de la integral de orden Fraccionario

Supongamos que f es continua en $[0, \infty >$ y fijemos $\lambda, t > 0$.
Si definimos la función:

$$g(\tau) = -\frac{(t-\tau)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}, \quad 0 \leq \tau \leq t$$

Entonces:

$$g'(\tau) = \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$$

Y por lo tanto g es creciente en $[0, t]$. Entonces la integral de orden fraccionario se puede expresar como una integral de Riemann-Stieltjes.

$$\begin{aligned} I^{\lambda}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1}f(\tau)d\tau \\ I^{\lambda}f(t) &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}f(\tau)d\tau \\ I^{\lambda}f(t) &= \int_0^t f(\tau)dg(\tau) \end{aligned}$$

La continuidad de f y la monotonicidad de “g” implica que esta integral existe para todo $t > 0$.

Capítulo 3

DERIVADA FRACCIONARIA

Hasta ahora únicamente hemos definido la integral de orden fraccionario. Como preludio a la definición de derivada fraccionaria recordemos algunos resultados y notaciones del cálculo elemental.

Consideremos una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- La n-ésima derivada de la función f, si $D^{n-1}f(t)$ existe, está definida recursivamente por

$$D^n f(t) = D[D^{n-1}f(t)], \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

  En particular si $n = 0$, el resultado obtenido es $f(t)$, lo cual significa que la función no se está derivando.

- La derivada entera es la inversa por la izquierda de la integral entera, es decir

$$D^n I^n f(t) = f(t), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

- La derivada entera es lineal, es decir

$$D^n[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha D^n f(t) + \beta D^n g(t) \tag{3.3}$$

  Para f y g funciones derivables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Si f es una función derivable, entonces se verifica que

$$\lim_{n \to 0} D^n f(t) = f(t), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

  Con los resultados del cálculo de orden entero que hemos mencionado estamos listos para reducir las restricciones del indice de iteración de los operadores de derivación clásicos.
  Estudiaremos dos definiciones de derivada fraccionaria, las cuales no serán equivalentes.

3.1. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Para definir la derivada fraccionaria de orden λ, una posibilidad podría ser tomar la fórmula de la integral fraccionaria $(2 \cdot 4)$ y sustituir en ella λ por $-\lambda$. Pero esta solución nos lleva a un problema muy evidente, es que para valores negativos de λ la integral de $(2 \cdot 4)$ puede no ser convergente, ademàs de que para los enteros negativos $\Gamma(\lambda)$ no está definida, de donde no coincidirá con la definición usual de derivada. Para definir la derivada de orden fraccionario , buscamos que coincida con la derivada usual en el caso en el que el orden sea un entero y para ello se define en términos de la integral fraccionaria.

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se definirá como la derivada entera de una cierta integral fraccionaria.

Definición 3.1. Sea $f \in L_1(a,b)$. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\lambda \in \mathbb{R}^+$ de f se define por:

$$D^\lambda f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\lambda} f(t), \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Cuando λ es un número entero positivo, entonces $\lambda = n$,y

$$\begin{aligned} D^n f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} I^{n-n} f(t) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} I^0 f(t) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ &= f^n(t) \end{aligned}$$

La cual coincide con la n-ésima derivada usual de f.

En particular D^0 será el operador identidad, esto es: $D^0 f(t) = f(t)$.

Una condición suficiente para que la derivada fraccionaria exista es que $f(t) \in \mathbb{C}^n[a,b]$

3.1.1. Media Derivada de un Monomio

Sea $f(t)$ un monomio de la forma:

$$f(t) = t^k, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

Su primera derivada clasica es

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}f(t) = kt^{k-1} \\ f''(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = \frac{d^2}{dt^2}f(t) = k(k-1)t^{k-2} \\ f'''(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right) = \frac{d^3}{dt^3}f(t) = k(k-1)(k-2)t^{k-3} \end{aligned}$$

En general, derivando "a" veces obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dt^a}t^k &= \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-a)(k-(a+1))\ldots(k-(a+(k-a-1)))}{(k-a)(k-(a+1))\ldots(k-(a+(k-a-1)))}t^{k-a} \\ &= \frac{k!}{(k-a)!}t^{k-a} \end{aligned}$$

Por $(1 \cdot 4)$, se concluyen

$$\frac{d^a}{dt^a}t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)}t^{k-a} \qquad \ldots \tag{3.5}$$

En particular consideremos la función $f(t) = t$.

Cálculo de la media derivada:
Utilizando $(3 \cdot 5)$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}t &= \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}t^{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}t^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por $(1 \cdot 2)$ y $(1 \cdot 3)$ se llega a que

$$= \frac{(2-1)!}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^{\frac{1}{2}}$$

Considerando el hecho de que $\Gamma(\frac{1}{2})$, se obtiene

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}t = 2\pi^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}$$

Si repetimos este proceso obtenemos la primera derivada:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}t\right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}(2\pi^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}})$$

Como la derivada fraccionaria es respecto a t, entonces $2\pi^{-\frac{1}{2}}$ es constante

$$= 2\pi^{-\frac{1}{2}}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}}$$

Usando (3.5) se consigue

$$= 2\pi^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

La ecuación $(1 \cdot 3)$ nos lleva a los siguiente

$$= 2\pi^{-\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}t^{0}$$

Teniendo presente que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, resulta

$$= 2\pi^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt}t = 1$$

3.1.2. Ejemplos:

Nos limitaremos a calcular la derivada fraccionaria para 3 funciones elementales: constante, monomio y exponencial utilizando para ello la definición $(3 \cdot 1)$.

i) *Derivada fraccionaria de una constante*

Sea la función constante $f(t) = 1$

Por definición (3.1) tenemos

$$D^{\lambda}(1) = \frac{d^n}{dt^n}I^{n-\lambda}(1), \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Si tenemos en cuenta la ecuaciòn $(2 \cdot 3)$, el resultado anterior se puede expresar como

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\lambda-1}(1)d\tau\right]$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\lambda-1}d\tau\right]$$

Desarrollando la integral nos queda

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)}\left(-\frac{(t-\tau)^{n-\lambda-1+1}}{n-\lambda-1+1}\right)/_0^t\right]$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[-\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)}\frac{1}{n-\lambda}((t-t)^{n-\lambda}-(t-0)^{n-\lambda})\right]$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[-\frac{1}{(n-\lambda)\Gamma(n-\lambda)}(-t^{n-\lambda})\right]$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\Gamma(n-\lambda)}\right]$$

Por $(1\cdot 3)$ se obtiene

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{t^{n-\lambda}}{\Gamma(n-\lambda+1)}\right]$$

$\Gamma(n-\lambda+1)$ es una constante, entonces

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\lambda+1)}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{n-\lambda}\right]$$

Haciendo uso de (3.5) se llega a lo siguiente

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\lambda+1)}\frac{\Gamma(n-\lambda+1)}{\Gamma(n-\lambda-n+1)}t^{n-\lambda-n}$$

En consecuencia

$$D^\lambda(1) = \frac{t^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} \qquad \ldots \tag{3.6}$$

Si $\lambda = \dfrac{3}{2}$, se tiene:

$$D^{\frac{3}{2}}(1) = \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{3}{2}\right)} = \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{\pi}}$$

ii) *Derivada fraccionaria de un monomio*

Sea $f(t)$ un monomio de la forma:

$$f(t) = t^{\alpha}, \quad \alpha > -1$$

Considerando la definición (3.1), se puede ver que

$$D^{\lambda}t^{\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\lambda} t^{\alpha}$$

Por medio de $(2 \cdot 3)$, la expresion anterior se convierte en

$$D^{\lambda}t^{\alpha} = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\lambda-1}\tau^{\alpha}d\tau\right]$$

Hacemos un cambio de variable: $u = \dfrac{\tau}{t} \longrightarrow du = \dfrac{1}{t}d\tau$

$$\begin{aligned} &\text{Para } \tau = 0 \quad , \quad u = 0 \\ &\text{Para } \tau = t \quad , \quad u = 1 \end{aligned}$$

Reemplazando dichos cambios en la última expresión

$$\begin{aligned} D^{\lambda}t^{\alpha} &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)}\int_0^1 (t-ut)^{n-\lambda-1}(ut)^{\alpha}tdu\right] \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)}\int_0^1 (t(1-u))^{n-\lambda-1}u^{\alpha}t^{\alpha}tdu\right] \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)}\int_0^1 t^{n-\lambda-1}(1-u)^{n-\lambda-1}u^{\alpha}t^{\alpha+1}du\right] \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)}\int_0^1 t^{n-\lambda+\alpha}u^{\alpha}(1-u)^{n-\lambda-1}du\right] \end{aligned}$$

Se observa que la integración es respecto a u, entonces $t^{n-\lambda+\alpha}$ es constante

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{t^{n-\lambda+\alpha}}{\Gamma(n-\lambda)}\int_0^1 u^{\alpha}(1-u)^{n-\lambda-1}du\right]$$

Al exponente de la potencia u^{α} sumamos y restamos 1

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{t^{n-\lambda+\alpha}}{\Gamma(n-\lambda)}\int_0^1 u^{(\alpha+1)-1}(1-u)^{(n-\lambda)-1}du\right]$$

La ecuación $(1 \cdot 8)$ convierte al resultado anterior en

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{t^{n-\lambda+\alpha}}{\Gamma(n-\lambda)}B(\alpha+1, n-\lambda)\right]$$

Por la proposición 2, se tiene

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{t^{n-\lambda+\alpha}}{\Gamma(n-\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(\alpha+1+n-\lambda)}\right]$$

Simplificando y extrayendo constantes, pues la derivada fraccionaria es respecto a t, resulta

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n-\lambda+1)}\frac{d^n}{dt^n}[t^{n-\lambda+\alpha}]$$

Segun (3.5) se consigue.

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n-\lambda+1)}\frac{\Gamma(\alpha+n-\lambda+1)}{\Gamma(n-\lambda+\alpha-n+1)}t^{n-\lambda+\alpha-n}$$

Por lo tanto

$$D^{\lambda}t^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\lambda+1)}t^{\alpha-\lambda} \qquad \ldots \qquad (3.7)$$

De la ecuación (3.7) se puede obtener dos resultados interesantes:

1. Cuando $\lambda = \alpha$, se obtiene:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}t^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\alpha+1)}t^{\alpha-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)}t^{0} \\ &= \Gamma(\alpha+1) \end{aligned}$$

   Lo cual es una constante.

2. Cuando $\lambda = \alpha + k$, con $k \in \mathbb{Z}^{+}$, resulta:

$$\begin{aligned} D^{\alpha+k}t^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-(\alpha+k)+1)}t^{\alpha-(\alpha+k)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1-k)}t^{-k} \end{aligned}$$

Es interesante mencionar que através de las ecuaciones (3.5) y (3.7) se puede establecer una relacÃón entre la derivada clásica y la derivada fraccionaria.

iii) *Derivada fraccionaria de una exponencial*

Consideremos la función exponencial

$$f(t) = e^{at} \quad \text{con } a > 0$$

Expresando la función exponencial como serie de Maclaurin resulta que

$$D^{\lambda}e^{at} = D^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{k!}$$

Puesto que la serie depende de k, entonces el operador D^{λ} puede ingresar dentro de la serie

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} D^{\lambda}\frac{(at)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D^{\lambda}\frac{a^k t^k}{k!} \end{aligned}$$

Aplicando $(1 \cdot 4)$ se obtiene

$$= \sum_{k=0}^{\infty} D^{\lambda}\frac{a^k t^k}{\Gamma(k+1)}$$

La derivada fraccionaria se aplica respecto a t, por lo que $\frac{a^k}{\Gamma(k+1)}$ es constante

$$D^{\lambda}e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(k+1)}D^{\lambda}t^k$$

Debido a (3.7) se logra que

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(k+1)}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\lambda+1)}t^{k-\lambda}$$

Simplificando términos

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(k-\lambda+1)}t^{k-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(k-\lambda+1)}t^k t^{-\lambda} \end{aligned}$$

La serie actua respecto a k, entonces $t^{-\lambda}$ es constante.

$$= t^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k-\lambda+1)}$$

$$= \frac{1}{t^{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+1-\lambda)}$$

Por consiguiente

$$D^{\lambda} e^{at} = \frac{1}{t^{\lambda}} E_{1,1-\lambda}(at)$$

Donde de la ecuación anterior $E_{1,1-\lambda}(at)$ es la función de Mittag-Leffler

3.1.3. Derivada Fraccionaria de un monomio Negativo

Hasta el momento se ha derivado monomios con exponentes mayores que -1. Ahora pretendemos derivar monomios con exponentes menores que -1.

Consideremos la integral de Liouville:

$$\int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-tu} du$$

Haciendo:

$$tu = x \quad \longrightarrow \quad u = \frac{x}{t}$$
$$du = \frac{1}{t} dx$$

Haciendo la sustitución respectiva, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-tu} du &= \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{t}\right)^{a-1} e^{-x} \frac{dx}{t} \\
&= \int_0^{\infty} \left(\frac{x^{a-1}}{t^{a-1}}\right) e^{-x} \frac{dx}{t} \\
&= \int_0^{\infty} \left(\frac{x^{a-1}}{t^a t^{-1}}\right) e^{-x} \frac{dx}{t}
\end{aligned}$$

Como la integración es respecto a x, entonces t actúa como constante

$$= \frac{1}{t^a} \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

Por $(1 \cdot 1)$ queda

$$= \frac{1}{t^a}\Gamma(a)$$
$$= \Gamma(a)t^{-a}$$

Entonces

$$t^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} u^{a-1}e^{-tu}du$$

Tomando la v-ésima derivada a ambos miembros, resulta:

$$\frac{d^v}{dt^v}t^{-a} = \frac{(-1)^v\Gamma(a+v)}{\Gamma(a)}t^{-a-v} \qquad \ldots \tag{3.8}$$

Ejemplo:

Sea $f(t) = t^{-2}$
Cálculo de la media derivada
Según (3.8) se obtiene

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}t^{-2} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma(2+\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}t^{-2-\frac{1}{2}}$$

Por $(1 \cdot 2)$ se obtiene lo siguiente

$$= \frac{\sqrt{-1}\Gamma(\frac{5}{2})}{(2-1)!}t^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{i\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{(1)!}t^{-\frac{5}{2}}$$

La ecuación $(1 \cdot 3)$ nos lleva a que

$$= i\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})t^{-\frac{5}{2}}$$

$\Gamma(\frac{3}{2})$ lo expresamos como $\Gamma(\frac{1}{2}+1)$ y luego aplicamos $(1 \cdot 3)$ para obtener

$$= i\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})t^{-\frac{5}{2}}$$

Utilizamos el hecho de que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, entonces

$$= i\frac{3}{4}\sqrt{\pi}t^{-\frac{5}{2}}$$

Repetimos otra vez este proceso para encontrar la primera derivada

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}t^{-2}\right] = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}\left[i\frac{3}{4}\sqrt{\pi}t^{-\frac{5}{2}}\right]$$

La derivada fraccionaria es respecto a t, entonces $i\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ actóa como constante

$$= \frac{3i}{4}\sqrt{\pi}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}t^{-\frac{5}{2}}$$

De acuerdo con (3.8) resulta

$$= \frac{3i}{4}\sqrt{\pi}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})}t^{-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}$$

$\Gamma(\frac{5}{2})$ se puede expresar como $\Gamma(\frac{3}{2}+1)$, por lo que

$$= \frac{3i}{4}\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{-1}\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}t^{-3}$$

Por $(1\cdot 2)$ y $(1\cdot 3)$ se obtiene

$$= \frac{3i}{4}\sqrt{\pi}\frac{i(3-1)!}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}t^{-3}$$

$\Gamma(\frac{3}{2})$ tambien se puede escribir como $\Gamma(\frac{1}{2}+1)$

$$= \frac{3i^2}{4}\sqrt{\pi}\frac{2}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)}t^{-3}$$

Considerenado $(1\cdot 3)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}t^{-2} &= \frac{3(-1)\sqrt{\pi}}{2}\frac{t^{-3}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &= \frac{-3\sqrt{\pi}}{2}\frac{t^{-3}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{-3\sqrt{\pi}}{2}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{-3} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt}t^{-2} = -2t^{-3}$$

3.1.4. Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Sea $D^{\lambda}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}I^{n-\lambda}f(t) = g^{(n)}(t) \qquad \ldots(\beta)$

donde $g(t) = I^{n-\lambda}f(t), n-1 \leq \lambda < n$
Al aplicarle la Transformada de Laplace en ambos lados resulta:

$$\mathcal{L}\{D^{\lambda}f(t)\} = \mathcal{L}\{g^{(n)}(t)\}$$

Por definición de la transformada de Laplace de la derivada de orden n de una función f, se tiene

$$= s^n\mathcal{L}\{g(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}g^k(0)$$

Debemos calcular $\mathcal{L}\{g(t)\}$ y $g^k(0)$

- Cálculo de $\mathcal{L}\{g(t)\}$

  $$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{I^{n-\lambda}f(t)\}$$

  La integral de orden fraccionario $I^{n-\lambda}f(t)$ lo podemos expresar como la convolución entre la función $f(t)$ y la función $\phi_{n-\lambda}(t)$.

  $$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{(f * \phi_{n-\lambda})(t)\}$$

  Donde

  $$\phi_{n-\lambda}(t) = \frac{t^{n-\lambda-1}}{\Gamma(n-\lambda)}$$

  Luego

  $$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-\lambda-1}}{\Gamma(n-\lambda)}\right\}$$

  Por definición de la transformada de Laplace y por $(1 \cdot 2)$ tenemos

  $$= F(s)\mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-\lambda-1}}{(n-\lambda-1)!}\right\}$$

  Sabiendo que la transformada es respecto a t, entonces $\frac{1}{(n-\lambda-1)!}$ es constante

  $$= \frac{F(s)}{(n-\lambda-1)!}\mathcal{L}\{t^{(n-\lambda-1)}\}$$

  Por definición de la transformada de un polinomio queda

  $$= \frac{F(s)}{(n-\lambda-1)!}\frac{(n-\lambda-1)!}{s^{n-\lambda-1+1}}$$

  En consecuencia

  $$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s^{n-\lambda}}$$

- Cálculo de $g^{(k)}(0)$.
  Según (β) se tiene lo siguiente

$$g^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} I^{n-\lambda} f(0)$$

Haciendo uso de la definición (3.1) se logra que

$$\begin{aligned} &= D^{k-(n-\lambda)} f(0) \\ &= D^{k+\lambda-n} f(0) \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Llegamos entonces a que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^\lambda f(t)\} &= s^n \frac{F(s)}{s^{n-\lambda}} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^{\lambda+k-n} f(0) \\ &= s^n \frac{F(s)}{s^n s^{-\lambda}} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^{\lambda+k-n} f(0) \\ &= s^\lambda F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^{\lambda+k-n} f(0) \end{aligned}$$

Reindexamos los términos de la suma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^\lambda f(t)\} &= s^\lambda F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^{\lambda+k-n+1-1} f(0) \\ &= s^\lambda F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-1)-k} D^{\lambda+k-1-(n-1)} f(0) \end{aligned}$$

Hacemos $n-1 = 2k$ y reemplazamos en los términos de la suma

$$\mathcal{L}\{D^\lambda f(t)\} = s^\lambda F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{2k-k} D^{\lambda+k-1-2k} f(0)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{D^\lambda f(t)\} = s^\lambda F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\lambda-k-1)} f(0)$$

Esta ecuación tiene el inconveniente de que las condiciones iniciales que se requieren son de orden fraccionario, pero a su vez abre las puertas para una línea de investigación llamada Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias.

3.2. Derivada Fraccionaria de Caputo

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville jugó un papel determinante en el desarrollo del cuerpo teórico del cálculo de orden fraccionario, y se utilizó con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Pero al tratar de realizar modelizaciones matemáticas de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surgió el problema de las condiciones iniciales también de orden fraccionario. Este tipo de condiciones no son fisicamente interpretables y presentan un obstáculo considerable a la hora de hacer uso práctico del cálculo de orden fraccionario.

El operador diferencial de Caputo, en contraste con el de Riemann-Liouville, emplea como condiciones iniciales derivadas de orden entero, es decir, valores iniciales que son físicamente interpretables a la manera tradicional. La definición que sigue representó pues un notable avance práctico en el estudio de fenómenos físicos como los de tipo viscoelástico y otros.

Definición 3.2. Sea $f \in L_1(a,b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$. La derivada fraccionaria de Caputo de orden λ de f se define por

$$D_c^\lambda f(t) = I^{n-\lambda} \frac{d^n}{dt^n} f(t) \quad \text{para } t > a$$

La validez de esta definición está limitada para funciones f tales que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1(a,b)$.

Esto es equivalente a decir que la n-ésima derivada de f es integrable.

Cuando $\lambda = n, n \in \mathbb{Z}^+$, se obtiene:

$$\begin{aligned} D_c^n f(t) &= I^{n-n} \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ &= I^0 \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ &= f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

La cual coincide con la n-ésima derivada usual de f.

De la definición (3.2), observamos que, al contrario que en la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, en la que primero se integra y luego se deriva, en la derivada fraccionaria de Caputo primero derivamos (n-veces) y seguidamente integramos. En consecuencia, se trata de una definición más restricitiva, y que requiere la integrabilidad de $f^{(n)}$.

Las derivadas fraccionarias de Caputo y de Riemann-Liouville son buenas generalizaciones de la derivada ordinaria, en el sentido de que respetan los valores de las derivadas enteras usuales, concordando así entre ellas. Pero en el caso no entero no coinciden.

Propiedad Sea $f \in L_1(a,b)$, entonces se verifica que

$$\lim_{\lambda \to n} D_c^{\lambda} f(t) = f^{(n)}(t), \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Demostración

Partimos de $D_c^{\lambda} f(t)$. Por definición (3.2) vemos que

$$D_c^{\lambda} f(t) = I^{n-\lambda} \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

Usando $(2 \cdot 4)$, se logra que

$$D_c^{\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\lambda-1} \frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) d\tau$$

Integramos por partes

$$u = \frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) = f^{(n)}(\tau) \quad ; \quad dv = (t-\tau)^{n-\lambda-1} d\tau$$

$$du = \frac{d}{d\tau} \frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) d\tau \quad ; \quad v = -\frac{(t-\tau)^{n-\lambda-1+1}}{n-\lambda-1+1}$$

$$du = \frac{d^{n+1}}{d\tau^{n+1}} f(\tau) d\tau = f^{(n+1)}(\tau) d\tau \quad ; \quad v = -\frac{(t-\tau)^{n-\lambda}}{n-\lambda}$$

Luego:

$$\begin{aligned} D_c^{\lambda} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \left[-\left(f^{(n)}(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-\lambda}}{n-\lambda} \right) /_a^t - \int_a^t -\frac{(t-\tau)^{n-\lambda}}{n-\lambda} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \left[-\left(f^{(n)}(t) \frac{(t-t)^{n-\lambda}}{n-\lambda} - f^{(n)}(a) \frac{(t-a)^{n-\lambda}}{n-\lambda} \right) + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\lambda}}{n-\lambda} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\Gamma(n-\lambda)} + \frac{1}{(n-\lambda)\Gamma(n-\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\lambda} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Segun la ecuación $(1 \cdot 3)$, se obtiene

$$D_c^{\lambda} f(t) = \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\lambda}}{\Gamma(n-\lambda+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\lambda+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\lambda} f^{(n+1)}(\tau) d\tau$$

Aplicando $\lim\limits_{\lambda \to n}$ en ambos miembros resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to n} D_c^{\lambda} f(t) &= \lim_{\lambda \to n} \left[\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\lambda}}{\Gamma(n-\lambda+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\lambda+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\lambda} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right] \\
&= \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-n}}{\Gamma(n-n+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-n} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \\
&= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Escribiendo de otra manera $f^{(n+1)}(\tau)$ obtenemos

$$= \frac{d^n}{da^n} f(a) + \int_a^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) \right) d\tau$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo, se tiene que

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^n}{da^n} f(a) + \frac{d^n}{dt^n} f(t) - \frac{d^n}{da^n} f(a) \\
&= \frac{d^n}{dt^n} f(t)
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\lim_{\lambda \to n} D_c^{\lambda} f(t) = f^{(n)}(t) \quad , \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

3.2.1. Ejemplos

Consideraremos los mismos ejemplos dados para la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville con la intención de descubrir las diferencias que existen entre estas dos definiciones de derivada fraccionaria.

(i) Sea la función constante $f(t) = 1$.

Por la definición (3.2) se sigue que

$$D_c^{\lambda}(1) = I^{n-\lambda} \frac{d^n}{dt^n}(1) = I^{n-\lambda}(0) = 0$$

Se observa a través de este ejemplo que el resultado de las dos definiciones (Riemann-Liouville y Caputo) no coinciden.

(ii) Sea $f(t)$ un monomio dado por $f(t) = t^{\alpha}$ con $\alpha > -1$.

Antes de calcular la $D_c^{\lambda} t^{\alpha}$, primero calculamos la $D_c^{\lambda} t^m, m \in \mathbb{N}$

$$D_c^{\lambda} t^m = I^{n-\lambda} \frac{d^n}{dt^n} t^m$$

Se presentan dos casos:

Caso 1: Si $n > m$.

Vemos que la derivada de orden entero será cero, por lo que la integral fraccionaria también tomará el valor de cero.

Caso 2: Si $n \leq m$.

La definición (3.2)nos conduce a lo siguiente

$$D_c^{\lambda} t^m = I^{n-\lambda} \frac{d^n}{dt^n} t^m$$

Por la ecuación (3.5) se sigue que

$$= I^{n-\lambda} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} t^{m-n}$$

Como la integración fraccionanria es respecto a t, entonces $\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}$ es una constante

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} I^{n-\lambda} t^{m-n}$$

De acuerdo con $(2 \cdot 7)$, se obtiene

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} \frac{\Gamma(m-n+1)}{\Gamma(m-n+n-\lambda+1)} t^{m-n+n-\lambda}$$

Simplificando términos se deduce

$$D_c^{\lambda} t^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\lambda+1)} t^{m-\lambda}$$

De donde se concluye que:

$$D_c^{\lambda} t^m = \begin{cases} o, & \text{si; } \lambda > m \\ \\ \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\lambda+1)} t^{m-\lambda}, & \text{si; } \lambda \leq m \end{cases}$$

Generalizando esta fórmula para $D_c^{\lambda} t^{\alpha}$, donde $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$ y tomando $\lambda < \alpha$, obtenemos, por la definición (3.2) que

$$D_c^{\lambda} t^{\alpha} = I^{n-\lambda} \frac{d^n}{dt^n} t^{\alpha}$$

Considerando la ecuación (3.5) logramos que

$$= I^{n-\lambda} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} t^{\alpha-n}$$

Puesto que la integración fraccionaria es respecto a t, entonces $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}$ es una constante

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} I^{n-\lambda} t^{\alpha-n}$$

La ecuación $(2 \cdot 7)$ nos genera lo siguiente

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha-n+n-\lambda+1)} t^{\alpha-n+n-\lambda}$$

Por lo tanto, simplificando se concluye que

$$D_c^{\lambda} t^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\lambda+1)} t^{\alpha-\lambda}$$

Observamos que el resultado de las dos definiciones de derivada fraccionaria aplicadas a t^{α} tomando α suficientemente grande si coincide.

(iii) Consideremos la función exponencial $f(t) = e^{at}$ con $a > 0$
Por definición (3.2) es posible afirmar que

$$D_c^{\lambda} e^{at} = I^{n-\lambda} \frac{d^n}{dt^n} e^{at}$$

Derivando $n-$ veces e^{at}

$$= I^{n-\lambda} a^n e^{at}$$

La integración fraccionaria es respecto a t, por lo que a^n es una constante

$$= a^n I^{n-\lambda} e^{at}$$

Expresando la función exponencial e^{at} como serie de Maclaurin, tenemos que

$$\begin{aligned} &= a^n I^{n-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} \\ &= a^n I^{n-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!} \end{aligned}$$

Como la serie actúa respecto a k, entonces el operador $I^{n-\lambda}$ puede ingresar dentro de la serie

$$= a^n \sum_{k=0}^{\infty} I^{n-\lambda} \frac{a^k}{k!} t^k$$

Ademas la integral fraccionaria se da respecto t, entonces

$$= a^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} I^{n-\lambda} t^k$$

Considerando la ecuación $(2 \cdot 7)$, la expresión anterior nos queda

$$= a^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+(n-\lambda)+1)} t^{k+(n-\lambda)}$$

Teniendo en cuenta la ecuación $(1 \cdot 4)$, logramos que

$$\begin{aligned} &= a^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+n-\lambda+1)} t^{k+n-\lambda} \\ &= a^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(k+n-\lambda+1)} t^k t^{n-\lambda} \end{aligned}$$

El término $t^{n-\lambda}$ actúa como constante, pues la serie varía respecto a k

$$\begin{aligned} D_c^{\lambda} e^{at} &= a^n t^{n-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+n-\lambda+1)} \\ D_c^{\lambda} e^{at} &= a^n t^{n-\lambda} E_{1,n-\lambda+1}(at) \end{aligned}$$

La última ecuación es por la definición de función Mittag-Leffler

3.2.2. Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo

Sea

$$D_c^{\lambda} f(t) = I^{n-\lambda} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = I^{n-\lambda} g(t) \qquad \ldots (\eta)$$

donde

$$g(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t)$$

$n-1 < \lambda \leq n$

Aplicamos el operador de Laplace en los extremos de (η) resulta:

$$L\{D_c^{\lambda} f(t)\} = L\{I^{n-\lambda} g(t)\}$$

Por definición de transformada de una integral fraccionaria se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D_c^{\lambda} f(t)\} &= s^{-(n-\lambda)}\mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= s^{\lambda-n}\mathcal{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

Sustituyendo $g(t)$ por $f^{(n)}(t)$, obtenemos

$$= s^{\lambda-n}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$$

Por definición de transformada de Laplace de la derivada de orden n de una función f, se logra que

$$= s^{\lambda-n}\left[s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)\right]$$

Desarrollando $s^{\lambda-n} \cdot s^n$ e/i ingresando dentro de la serie $s^{\lambda-n}$, pues la variación de la serie es en función de k, entonces

$$= s^{\lambda-n+n}\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\lambda-n+n-k-1} f^{(k)}(0)$$

Por definición de transformada de Laplace se concluye

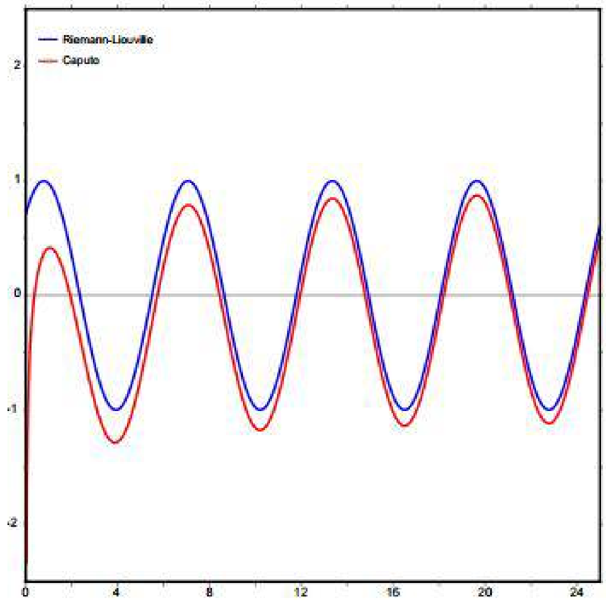
$$= s^{\lambda}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\lambda-k-1} f^{(k)}(0)$$

Las condiciones iniciales que se requieren para esta ecuación son de orden entero.

Lo interesante y realmente conveniente de ésta ùltima ecuación es que las condiciones iniciales empleadas consisten en derivadas elementales que encierran interpretaciones físicas conocidas, un hecho muy relevante para la parte de aplicaciones de los operadores fraccionarios.

Hemos visto a través de ejemplos que en general las dos definiciones de derivada fraccionaria no coinciden y presentan radicales diferencias.

Como ejemplo de la no coincidencia de estos dos tipos de derivada de orden fraccionario, mostramos las gráficas de ${}_oD^{0,5}\cos t$ y ${}_0D_c^{0,5}\cos t$
Eje horizontal: t
Eje vertical: $f(t)$



Pero es importante notar que en ambas definiciones, la parte fraccionaria de la definición es únicamente mediante la integral que se realiza (ya sea antes o después de derivar) y que la integral que se hace es siempre de orden menor que uno, pues siempre se cumple que $n - \lambda < 1$.

Capítulo 4

EQUIVALENCIAS ENTRE LAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS FRACCIONARIAS Y LAS CLASICAS

4.1. Equivalencia entre propiedades

A continuación enunciamos una serie de propiedades básicas de los operadores de derivación fraccionarios, con las que se ponen de manifiesto las equivalencias con las propiedades de los operadores de derivación clásicos.

Propiedad 1. (Propiedad equivalente a (3.2))

Sea $f \in L_1(a, b)$, entonces se verifica que

$$D^\lambda I^\lambda f(t) = f(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Casi para todo $t \in [a, b]$

Demostración

Por definición $(3 \cdot 1)$ se puede ver que

$$D^\lambda I^\lambda f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\lambda} I^\lambda f(t), \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Considerando la propiedad 4 de integración fraccionaria, tenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\lambda+\lambda} f(t) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} I^n f(t) \end{aligned}$$

Según la ecuación $(3 \cdot 2)$ se deduce que

$$D^{\lambda} I^{\lambda} f(t) = f(t)$$

Este resultado refleja que, análogamente a lo que ocurre en el caso entero, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es el operador inverso por la izquierda de la integral fraccionaria.

Propiedad 2. Linealidad. (Propiedad equivalente a (3.3))

El operador derivada fraccionaria es un operador lineal, es decir él cumple

$$D^{\lambda}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha D^{\lambda} f(t) + \beta D^{\lambda} g(t), \quad \forall f, g \in L_1(a,b) \text{ y } \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$$

Demostración

Mediante la definición $(3 \cdot 1)$, podemos afirmar que

$$D^{\lambda}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\lambda}[\alpha f(t) + \beta g(t)]$$

Por medio de la defición $(2 \cdot 1)$, el resultado anterior se puede expresar como

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\lambda-1}(\alpha f(\tau) + \beta g(\tau)) d\tau\right]$$

Distribuyendo términos se logra que

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \int_a^t (\alpha (t-\tau)^{n-\lambda-1} f(\tau) + \beta (t-\tau)^{n-\lambda-1} g(\tau)) d\tau\right]$$

Puesto que $f, g \in L_1(a,b)$.

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \left(\int_a^t \alpha (t-\tau)^{n-\lambda-1} f(\tau) d\tau + \int_a^t \beta (t-\tau)^{n-\lambda-1} g(\tau) d\tau\right)\right]$$

Como $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces la expresión anterior se escribe

$$\begin{aligned} D^{\lambda}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \alpha \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\lambda-1} f(\tau) d\tau\right] \\ &\quad + \beta \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\lambda-1} g(\tau) d\tau\right] \end{aligned}$$

Por definición $(2 \cdot 1)$ se obtiene

$$= \alpha \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\lambda} f(t) + \beta \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\lambda} g(t)$$

Finalmente por la definición $(3 \cdot 1)$ se concluye

$$= \alpha D^{\lambda} f(t) + \beta D^{\lambda} g(t)$$

En la demostración de la propiedad 2 se utilizó además de las definiciones de la derivada y la integral fraccionaria, las propiedades de linealidad de los operadores integral y derivada clásica

Propiedad 3. (Propiedad equivalente a (3.4))

Sea $f \in L_1(a,b)$, entonces se verifica que

$$\lim_{\lambda \to 0} D^{\lambda} f(t) = f(t)$$

Casi para todo $t \in [a,b]$

Demostración

Partiendo de la definición $(3 \cdot 1)$ se tiene que

$$= \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\lambda} f(t) \quad , n \in \mathbb{Z}^+$$

La definición $(2 \cdot 1)$ permite que el resultado anterior se convierta en

$$= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\lambda-1} f(\tau) d\tau) \right]$$

Aplicando $\lim\limits_{\lambda \to 0}$ en ambos miembros, resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to 0} D^{\lambda} f(t) &= \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\lambda)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\lambda-1} f(\tau) d\tau \right] \right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

Por definición $(2 \cdot 1)$ llegamos a que

$$= \frac{d^n}{dt^n} \left(I^n f(t) \right)$$

En consecuencia por la ecuación $(3 \cdot 2)$, resulta

$$\lim_{\lambda \to 0} D^{\lambda} f(t) = f(t)$$

4.2. Otras Equivalencias

Mostraremos acontinuación otras equivalencias existentes entre derivadas fraccionarias y derivadas clásicas, considerando para ello la función monomio de la forma $f(t) = t^\alpha$ con $\alpha > -1$, en la cual para encontrar las derivadas de orden fraccionario haremos uso de la ecuación $(3 \cdot 7)$ que viene dada por

$$D^\lambda t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\lambda+1)} t^{\alpha-\lambda}$$

Ejemplo 4.1. Sea $f(t) = t^3$

- **Derivadas Clásicas**:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 \\ f''(t) &= 6t \\ f'''(t) &= 6 \\ f^{iv}(t) &= 0 \end{aligned}$$

- **Derivadas Fraccionarias**:
  - *Cálculo de la primera derivada.*
    Antes de calcular la primera derivada, hallamos la media derivada para tal fin usamos la ecuación $(3 \cdot 7)$

$$D^{\frac{1}{2}}(t^3) = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-\frac{1}{2}+1)} t^{3-\frac{1}{2}}$$

Por la ecuación $(1 \cdot 4)$, resulta

$$\begin{aligned} &= \frac{3!}{\Gamma(\frac{5}{2}+1)} t^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{6}{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})} t^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

La expresión $\Gamma(\frac{5}{2})$ también se puede escribir como $\Gamma(\frac{3}{2}+1)$, entonces

$$= \frac{6}{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{3}{2}+1)} t^{\frac{5}{2}}$$

Utilizando otra vez la ecuación $(1 \cdot 4)$

$$= \frac{6}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{5}{2}}$$

Como $\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2} + 1)$ se tiene

$$= \frac{6}{\frac{15}{4}\Gamma(\frac{1}{2} + 1)} t^{\frac{5}{2}}$$

Por tercera vez utilizamos la ecuación $(1 \cdot 4)$ para obtener

$$\begin{aligned} &= \frac{6}{\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} t^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{6}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Repetimos este proceso para obtener la primera derivada

$$D^{\frac{1}{2}}[D^{\frac{1}{2}}(t^3)] = D^{\frac{1}{2}} \left[\frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} \right]$$

Puesto que la media derivada es respecto a t,entonces $\frac{16}{5\sqrt{\pi}}$ es constante

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}} D^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{5}{2}})$$

Por medio de la ecución $(2 \cdot 7)$ se llega a que

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{5}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 1)} (t^{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}})$$

En la expresión $\Gamma(\frac{5}{2}+1)$ operamos recursivamente hasta obtener $\Gamma(\frac{1}{2}+1)$ por lo que se consigue

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{\Gamma(3)} t^2$$

En $\Gamma(3)$ utilizamos la ecuación $(1 \cdot 2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{(3-1)!} t^2 \\ &= \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{2} t^2 \\ &= \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \frac{15\sqrt{\pi}}{16} t^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D(t^3) = 3t^2$$

- *Cálculo de la segunda derivada.*

$$D^{\frac{3}{2}}[D^{\frac{1}{2}}(t^3)] = D^{\frac{3}{2}}\left[\frac{16}{5\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}}\right]$$

Como la derivada fraccionaria es respecto a t, $\frac{16}{5\sqrt{\pi}}$ es constante, por lo que

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}D^{\frac{3}{2}}t^{\frac{5}{2}}$$

Usando la ecuación $(3 \cdot 7)$, obtenemos

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Gamma(\frac{5}{2}+1)}{\Gamma(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}+1)}t^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}\right]$$

Considerando el hecho de que $\Gamma(\frac{5}{2}+1) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$, se logra que

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left[\frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{\Gamma(2)}t\right]$$

Según la ecuación $(1 \cdot 2)$ se obtiene

$$\begin{aligned} &= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left[\frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{(2-1)!}t\right] \\ &= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\frac{15}{8}\sqrt{\pi}t \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$D^2(t^3) = 6t$$

- *Cálculo de la tercera derivada.*

$$D^{\frac{5}{2}}[D^{\frac{1}{2}}(t^3)] = D^{\frac{5}{2}}\left[\frac{16}{5\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}}\right]$$

La expresión $\frac{16}{5\sqrt{\pi}}$ es constante, entonces

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}D^{\frac{5}{2}}t^{\frac{5}{2}}$$

Por la ecuación $(3 \cdot 7)$ se llega a que

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Gamma(\frac{5}{2}+1)}{\Gamma(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}+1)}t^{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}\right]$$

Realizando los cálculos respectivos llegamos a que $\Gamma(\frac{5}{2}+1) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$, entonces

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left[\frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1)}t^0\right]$$

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

Por lo tanto

$$D^3(t^3) = 6$$

- *Cálculo de la cuarta derivada.*

$$D^{\frac{7}{2}}[D^{\frac{1}{2}}(t^3)] = D^{\frac{7}{2}}\left[\frac{16}{5\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}}\right]$$

Como se está derivando respecto a t, entonces $\frac{16}{5\sqrt{\pi}}$ es constante

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}D^{\frac{7}{2}}t^{\frac{5}{2}}$$

Usando la ecuación $(3 \cdot 7)$ se puede ver que

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Gamma(\frac{5}{2}+1)}{\Gamma(\frac{5}{2}-\frac{7}{2}+1)}t^{\frac{5}{2}-\frac{7}{2}}\right]$$

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left[\frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{\Gamma(0)}t^{-1}\right]$$

Utilizando el hecho de que $\Gamma(0) = \infty$, se tiene

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left[\frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{\infty}t^{-1}\right]$$

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\left[0(t)^{-1}\right]$$

Entonces se concluye que

$$D^4(t^3) = 0$$

Ejemplo 4.2. Sea $f(t) = \sqrt{t}$

- **Derivada Clásica**
  Cálculo de la primera derivada

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

- **Derivada Fraccionaria**
  Cálculo de la media derivada.
  Según la ecuación $(3 \cdot 7)$, se tiene que

$$D^{\frac{1}{2}}(\sqrt{t}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

La ecuacón $(1 \cdot 3)$ convierte el resultado anterior en

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} t^0 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} t^0 \end{aligned}$$

Si repetimos este proceso obtenemos la primera derivada

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}[D^{\frac{1}{2}}(\sqrt{t})] &= D^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi} t^0\right] \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} D^{\frac{1}{2}} t^0 \end{aligned}$$

Por la ecuación $(3 \cdot 7)$ se llega a que

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\frac{1}{2}+1)} t^{0-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} t^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$D(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

En los dos ejemplos anteriores observamos que las derivadas obtenidas (tanto clásicas como fraccionarias) coinciden.

4.3. Propiedades que no se Cumplen

La derivada fraccionaria carece de algunas cualidades importantes, como la de semigrupo, que si cumple la integral fraccionaria. Otra importante diferencia con el caso entero es que, en general, la derivada fraccionaria de una constante no nula no vale cero.

4.3.1. Semigrupo

$(D^{\alpha}[D^{\lambda}f(t)] = D^{\alpha+\lambda}f(t), \forall\alpha,\lambda \in \mathbb{R})$

Para verificar que esta propiedad no se cumple consideremos la siguiente función

$$f(t) = t^{-\frac{1}{2}} \quad \text{con } \lambda = \frac{1}{2}$$

Cálculo de la media derivada.
Por definición $(3 \cdot 1)$ tenemos

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}}) &= \frac{d}{dt}[I^{1-\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}})] \\ &= \frac{d}{dt}[I^{\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}})] \quad \ldots (*) \end{aligned}$$

Cálculo de $I^{\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}})$.
Utilizando la ecuación $(2 \cdot 3)$ resulta

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{2}-1}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau \end{aligned}$$

Hacemos un cambio de variable: $\tau = tu \longrightarrow d\tau = tdu$

$$\begin{aligned} \text{Para } \tau = 0 \quad &, \quad u = 0 \\ \text{Para } \tau = t \quad &, \quad t = tu \\ & \quad\;\; u = 1 \end{aligned}$$

Luego; realizando los cambios respectivos se obtiene

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (t-tu)^{-\frac{1}{2}}(tu)^{-\frac{1}{2}}tdu \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 ((1-u)t)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}tdu \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}tdu \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du \quad \ldots (**) \end{aligned}$$

Reemplazamos (**) en (*)

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}}) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du\right] \\ &= 0 \quad \text{(Pues la expresión del corchete es independiente de } t) \end{aligned}$$

Si volvemos a aplicar el operador de Riemann-Liouville de orden $\frac{1}{2}$ se obtiene

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}[D^{\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}})] &= D^{\frac{1}{2}}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lo cual es muy distinto de lo que se obtiene mediante

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}[D^{\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}})] &= D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(t^{-\frac{1}{2}}) \\ &= D(t^{-\frac{1}{2}}) \\ &= -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville no cumple en general la propiedad de semigrupo.

4.3.2. Función Constante

En el cálculo de orden entero la derivada de una función constante es cero, mientras que en el cálculo de orden fraccionario dicha derivada es diferente de cero.
Veamos:
Sea la función $f(t) = 1$ con $\lambda = \frac{1}{2}$.
Por la ecuación $(3 \cdot 6)$ se sigue que

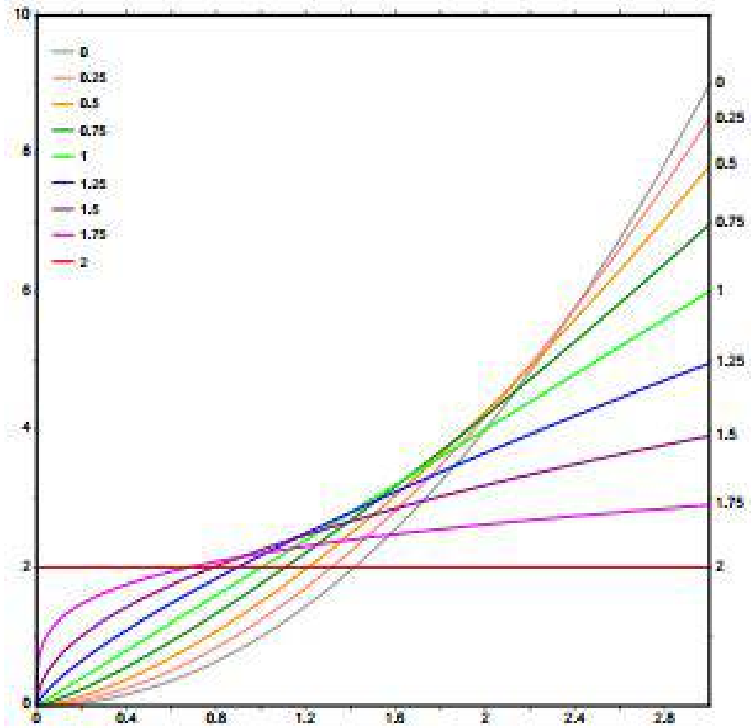
$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}(1) &= \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &= \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \neq 0 \end{aligned}$$

Esto marca una enorme diferencia entre los operadores de derivación clasicos y los fraccionarios.

4.4. ¿Cuál es la interpretación Geométrica de la Derivada Fraccionaria?

En el cálculo de orden entero, esta pregunta esta bien clara y tiene una interpretación física y geométrica muy elegante.
Sin embargo, en el caso del cálculo de orden fraccionario ésta pregunta aún no está completamente resuelta, debido a que no existe un concenso generalizado sobre qué es la derivada fraccionaria de una función.Esto implica que no hay una interpretación física y geométrica consistente sobre la derivada fraccionaria, pero si podemos presentar como caso particular una interpretación geométrica para la derivada fraccionaria de la función $f(t) = t^2$.

La siguiente figura muestra la evolución de las derivadas fraccionarias $D_0^{\lambda} t^2$, con λ variando entre 0 (Parábola) y 2 (función constante).
Eje horizontal: t
Eje vertical: $f(t)$



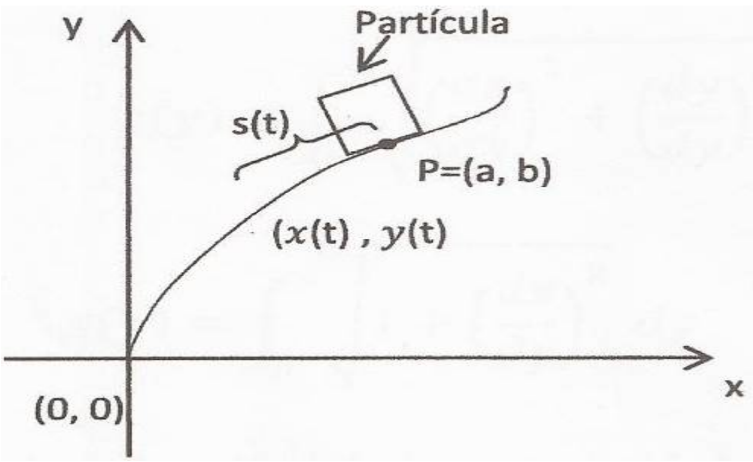
4.5. Una Aplicación

4.5.1. El problema de la tautócrona

Consiste en encontrar una curva por la cual se desliza una partícula sin fricción y es tal que,sin importar el punto de partida y empezando en reposo, llega a la parte inferior de la curva al mismo tiempo.

I. Solución al problema de la tautócrona a través del cálculo de orden entero

Sea $P = (a, b)$ el punto de partida de la partícula y sea el origen la parte inferior de la curva.



Supongamos que la curva $(x(t), y(t))$ es la solución.

Lo que se quiere es que la curva parta del punto P, por lo que al evaluar en $t = 0$ se tiene:

$$(x(0), y(0)) = (a, b)$$

Y se busca que parta del reposo por lo que:

$$(x'(0), y'(0)) = (0, 0)$$

Entonces se tendrán las condiciones iniciales:

$$(x(0), y(0)) = (a, b); \quad (x'(0), y'(0)) = (0, 0)$$

Es de conocimiento que la longitud de la curva desde el punto de partida P (en el instante $t_0 = 0$) hasta el punto $(x(t), y(t))$ en el instante t se puede expresar de la siguiente manera:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Al expresarla como una función de la altura y, y actúa como parámetro. Entonces:

$$\begin{aligned} s(y) &= \int_b^y \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2} dy \\ &= \int_b^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \end{aligned}$$

La razón de cambio de la longitud de la curva está dado por:

$$\begin{aligned} s'(y) &= \frac{d}{dy} \int_b^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \end{aligned}$$

Sea $s'(y) = f(y)$, entonces:

$$f(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \qquad \ldots \tag{4.1}$$

La partícula perderá energía potencial $E_p = mg(b - y)$, la cual se transformará en energía cinética $E_c = \dfrac{mv^2}{2}$ donde m es la masa de la partícula, g la aceleración de la gravedad, $b - y$ la altura a la cual se encuentra la partícula respecto a un plano de referencia horizontal y v la velocidad de la partícula.

Por el principio de conservación de la energía, igualamos la energía potencial a la cinética:

$$\begin{aligned} E_p &= E_c \\ mg(b - y) &= \frac{mv^2}{2} \end{aligned}$$

Despejamos la velocidad:

$$\begin{aligned} 2mg(b - y) &= mv^2 \\ 2g(b - y) &= v^2 \\ v &= \sqrt{2g(b - y)} \end{aligned}$$

Entonces la velocidad de la partícula en alguna altura y es:

$$v(y) = \sqrt{2g(b-y)}$$

La partícula recorrerá infinitesimalmente una distancia dada por $f(y)$ a una velocidad $v(y)$ por lo que el tiempo total que le tomará a la partícula llegar del punto de partida al origen, al hacer la suma (integral) de todos los tiempos, será:

$$\begin{aligned} t &= \int_0^b \frac{d}{v(y)} dy \\ &= \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{2g(b-y)}} dy \end{aligned}$$

El objetivo del problema es que el tiempo sea constante para cualquier punto de partida b. Es decir, buscamos la función $f(y)$ que nos expresa la razón de cambio de la longitud de la curva. Esto es:

$$t = c, \qquad c : constante$$

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{2g(b-y)}} dy &= c \\ \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{2g}\sqrt{b-y}} dy &= c \end{aligned}$$

Como se está integrando respecto a y, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}} dy &= c \\ \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}} dy &= c\sqrt{2g} \end{aligned}$$

Puesto que c y $\sqrt{2g}$ son constantes entonces $c\sqrt{2g}$ también es una constante.

Hacemos $c\sqrt{2g} = c'$, tal que:

$$\int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}} dy = c' \tag{4.2}$$

Sea constante para cualquier b.

La ecuación anterior se puede escribir como la convolución de la función $f(y)$ y la función $g(y) = y^{-\frac{1}{2}}$

$$(f * g)(b) = \int_0^b f(y)g(b-y)dy = \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}dy = c'$$

Aplicamos transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(b)\} = \mathcal{L}\{c'\}$$

Como $f(b)$ y $g(b)$ son funciones continuas por tramos y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}\{f(b)\}\mathcal{L}\{g(b)\} = \frac{c'}{s}, \quad s > 0$$

Por definición de transformada de Laplace, se sigue que

$$F(s)G(s) = \frac{c'}{s}$$

Cálculo de $G(s)$

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathcal{L}\{g(b)\} \\ &= \mathcal{L}\{b^{-\frac{1}{2}}\} \end{aligned}$$

Por definición de transformada de Laplace de un polinomio

$$\begin{aligned} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}!\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}}, \quad s > 0 \\ &= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{s^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Entonces:

$$F(s)\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{c'}{s}$$

Despejando $F(s)$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^{\frac{1}{2}}\frac{c'}{s}}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{s^{-\frac{1}{2}}c'}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{c'}{s^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{c'}{\sqrt{\pi s}} \end{aligned}$$

Aplicamos transformada inversa en ambos miembros:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c'}{\sqrt{\pi s}}\right\}$$

Por definición de transformada inversa, tenemos

$$f(y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c'}{\sqrt{\pi}\sqrt{s}}\right\}$$

Como la transformada inversa es respecto a s, entonces

$$\begin{aligned} &= \frac{c'}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right\} \\ &= \frac{c'}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}s^{\frac{1}{2}}}\right\} \\ &= \frac{c'}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}\right\} \end{aligned}$$

Por definición de transformada inversa

$$\begin{aligned} &= \frac{c'}{\pi}g(y) \\ &= \frac{c'}{\pi}y^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Hacemos $\dfrac{c'}{\pi} = \alpha$, entonces:

$$f(y) = \alpha y^{-\frac{1}{2}} \qquad \ldots \tag{4.3}$$

De (4.1) y (4.3), se obtiene:

$$\alpha y^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

Elevar al cuadrado ambos miembros, con la finalidad de despejar $\frac{dx}{dy}$

$$\begin{aligned}
\left(\alpha y^{-\frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right)^2 \\
\alpha^2 y^{-1} &= 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \\
\frac{\alpha^2}{y} - 1 &= \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \\
\frac{\alpha^2 - y}{y} &= \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \\
\frac{dx}{dy} &= \sqrt{\frac{\alpha^2 - y}{y}} \\
&= \sqrt{\frac{\alpha^2 - \sqrt{y}^2}{y}}
\end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}
\sqrt{y} &= \alpha \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \\
y(\theta) &= \alpha^2 \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2})
\end{aligned}$$

$$x \xrightarrow{\frac{dx}{dy}} y \xrightarrow{\frac{dy}{d\theta}} \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{d\theta}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\theta} &= \sqrt{\frac{\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2})}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2})}} \cdot \alpha^2 (2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}))(\cos(\frac{\theta}{2}))(\frac{1}{2}) \\
&= \sqrt{\frac{\alpha^2 (1 - \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2}))}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2})}} \cdot \alpha^2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \\
&= \sqrt{\frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{\operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2})}} \cdot \alpha^2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \\
&= \sqrt{\cot^2(\frac{\theta}{2})} \cdot \alpha^2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \\
&= \cot(\frac{\theta}{2}) \cdot \alpha^2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \\
&= \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} \cdot \alpha^2 \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \\
&= \alpha^2 \cos^2(\frac{\theta}{2}) \\
&= \alpha^2 \left(\frac{1}{2} \left(1 + \cos 2(\frac{\theta}{2}) \right) \right) \\
&= \frac{\alpha^2}{2} (\cos\theta + 1)
\end{aligned}
$$

Integrando

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{d\theta} d\theta &= \int \frac{\alpha^2}{2} (\cos\theta + 1) d\theta \\
x(\theta) &= \frac{\alpha^2}{2} (\operatorname{sen}\theta + \theta + k), \quad \text{k: constante}
\end{aligned}
$$

Considerando las condiciones iniciales, se obtiene:

$$
x(\theta) = \frac{\alpha^2}{2} (\theta + \operatorname{sen}\theta) + a \quad , y(\theta) = \alpha^2 \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{\alpha^2}{2} (1 - \cos\theta) + b
$$

Que viene a ser la forma paramétrica de una cicloide. La solución a nuestro problema.

II. Solución al problema de la tautócrona a través del cálculo de orden fraccionario

Partimos de la ecuación (4.2), la cual está dada por:

$$\int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}dy = c'$$

Trabajamos en el lado izquierdo con la finalidad de expresarlo de otra manera.

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{f(y)}{(b-y)^{\frac{1}{2}}}dy &= c' \\
\int_0^b f(y)(b-y)^{-\frac{1}{2}}dy &= c' \\
\int_0^b (b-y)^{\frac{1}{2}-1}f(y)dy &= c' \\
\Gamma(\frac{1}{2})_0I_b^{\frac{1}{2}}f(b) &= c'
\end{aligned}$$

Por lo tanto , buscamos que

$$_0I_y^{\frac{1}{2}}f(y) = \frac{c'}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

Aplicamos la derivada de orden $\frac{1}{2}$ en ambos lados.

$$D^{\frac{1}{2}}{}_0I_y^{\frac{1}{2}}f(y) = {}_0D_y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c'}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)$$

$$f(y) = {}_0D_y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c'}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)$$

Usando la definición $(3 \cdot 1)$ se llega a que

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dy}{}_0I_y^{1-\frac{1}{2}}\left(\frac{c'}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right) \\
&= \frac{d}{dy}{}_0I_y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c'}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)
\end{aligned}$$

Según la ecuación $(2 \cdot 3)$, resulta

$$= \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^y (y-\tau)^{\frac{1}{2}-1}\left(\frac{c'}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)d\tau\right)$$

Como la derivada usual es respecto a y, entonces

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot\left(\frac{c'}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)\left(\frac{d}{dy}\int_0^y (y-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau\right)$$

Desarrollando la integral definida conseguimos

$$= \left(\frac{c'}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\right)\left(\frac{d}{dy}\left(-\left(2(y-\tau)^{\frac{1}{2}}\right)/_0^y\right)\right)$$

Teniendo en cuenta que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{c'}{(\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})}\right)\left(\frac{d}{dy}\left(-2\left((y-y)^{\frac{1}{2}}-(y-0)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right) \\
&= \left(\frac{c'}{\pi}\right)\left(\frac{d}{dy}\left(-2\left(-(y)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right) \\
&= \frac{c'}{\pi}\cdot 2\frac{d}{dy}\left((y)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{c'}{\pi}\cdot 2\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{c\sqrt{2g}}{\pi}y^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

La expresión $f(y) = {}_0D_y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c'}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)$ se puede escribir de otra forma usando técnicas de cálculo fraccionario.

$$\begin{aligned}
f(y) &= {}_0D_y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{c\sqrt{2g}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2g}}{\Gamma(\frac{1}{2})}{}_0D_y^{\frac{1}{2}}c
\end{aligned}$$

Sustituimos c, que es el tiempo constante en que se llegará al origen por una función $h(y) = y$, estaríamos encontrando una curva en la que la altura inicial es el tiempo de caída, se llega entonces a una ecuación integral de la forma:

$$\int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}dy = h(b)$$

Donde $f(y)$ es una función incógnita.

De manera general una ecuación integral de la forma:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^b (b-y)^{\lambda-1}f(y)dy = h(b)$$

Es llamada Ecuación Integral de Abel, y la solución (si esta existe) es de la forma:

$$f(y) = {}_0D_y^{\lambda}h(y)$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{\sqrt{2g}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot {}_0D_y^{\lambda} h(y) \quad \text{Por (4.1)} \tag{4.4}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{\sqrt{8gy}}{\pi}$$

Despejar $\dfrac{dx}{dy}$

Elevar al cuadrado ambos lados y resulta:

$$\begin{aligned} 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 &= \frac{8gy}{\pi^2} \\ \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 &= \frac{8gy}{\pi^2} - 1 \\ \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 &= \frac{8gy-\pi^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

Sacando raíz cuadrada ambos miembros, resulta

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{\sqrt{8gy-\pi^2}}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{(8gy-\pi^2)8g}}{8g} \\ &= \frac{\sqrt{8g}}{\pi}\left(\sqrt{y-\frac{\pi^2}{8g}}\right) \end{aligned}$$

Se observa que para alturas pequeñas (es decir, para valores de $y < \frac{\pi^2}{8g}$) la curva no está definida, por lo que no existe una solución a este problema.

Para garantizar la existencia de una solución a un problema de la forma de la tautócrona, tenemos el siguiente resultado:

Si $h(y)$ es tal que ${}_0D_y^{\frac{1}{2}} h(y)$ existe en un intervalo $[0, y_0]$ y $[{}_0D_y^{\frac{1}{2}} h(y)]^2 \geq \frac{\pi}{2g}$ en ese intervalo. Entonces el problema tendrá una solución en $[0, y_0]$, es decir, habrá una curva tal que el tiempo de caída sea $h(y)$.

La demostración de esta afirmación se realiza utilizando conceptos de cálculo fraccionario.

Partimos de la ecuación (4.4)

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{\sqrt{2g}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot {}_0D_y^{\lambda}h(y)$$

Despejamos: $\dfrac{dx}{dy}$

Elevar al cuadrado ambos miembros:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{2g}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot {}_0D_y^{\lambda}h(y)\right)^2 \\
1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 &= \frac{2g}{(\sqrt{\pi})^2}\cdot\left[{}_0D_y^{\lambda}h(y)\right]^2 \\
\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 &= \frac{2g}{\pi}\cdot\left[{}_0D_y^{\lambda}h(y)\right]^2 - 1
\end{aligned}$$

Despejando $\frac{dx}{dy}$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2g\left[{}_0D_y^{\lambda}h(y)\right]^2-\pi}{\pi}}$$

Multiplicamos el numerador y el denominador a la expresión anterior que está dentro de la raiz por $2g$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{(2g\left[{}_0D_y^{\lambda}h(y)\right]^2-\pi)2g}{\pi(2g)}} \\
&= \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{2g\left[{}_0D_y^{\lambda}h(y)\right]^2-\pi}{2g}} \\
&= \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\cdot\sqrt{\left[{}_0D_y^{\lambda}h(y)\right]^2-\frac{\pi}{2g}}
\end{aligned}$$

Integrando resulta:

$$x(y) = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\int_0^y\sqrt{\left[{}_0D_s^{\frac{1}{2}}h(s)\right]^2-\frac{\pi}{2g}}ds$$

Concluimos que la curva existe y el problema tiene solución si los valores dentro de la raíz son positivos.

En resumen: La derivada fraccionaria de algunas funciones elementales son presentadas en la siguiente tabla.

$f(t)$	${}_0^t\mathrm{D}^\lambda f(t)$	${}_0^t\mathrm{D}_c^\lambda f(t)$
1	$\dfrac{t^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}$	0
$t^n, n \in \mathbb{Z}^+$	$\dfrac{n!}{\Gamma(n-\lambda+1)}t^{n-\lambda}$	$\begin{cases} 0 & \text{si; } \lambda > n \\ \dfrac{n!}{\Gamma(n-\lambda+1)}t^{n-\lambda} & \text{si; } \lambda \leq n \end{cases}$
$t^\alpha, \alpha > -1$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\lambda+1)}t^{\alpha-\lambda}$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\lambda+1)}t^{\alpha-\lambda}$
$e^{at}, a > 0$	$t^{-\lambda}E_{1,1-\lambda}(at)$	$a^n t^{n-\lambda}E_{1,n-\lambda+1}(at)$

Conclusiones

En este trabajo se ha presentado las distintas definiciones de la derivada e integral fraccionaria, de las cuales se pueden obtener algunas conclusiones:

- La derivada fraccionaria es una generalización de la derivada de orden entero.
- Existe una equivalencia entre ciertas propiedades de la derivada fraccionaria y la derivada clásica.
- La derivada de Riemann-Liouville de orden fraccionario, al igual que en el cálculo entero, es el operador inverso por la izquierda de la integral fraccionaria.
- En el cálculo entero, la derivada de una constante es cero, mientras que en el càlculo fraccionario la derivada de una constante es distinta de cero.
- El operador de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville no cumple en general la propiedad de semigrupo.
- Las dos definiciones de derivada fraccionaria no sólo no coinciden, sino que además la diferencia radica en las condiciones iniciales que se requieren para la transformada de Laplace. Mientras que para la Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville las condiciones iniciales son de orden fraccionario; para la Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo las condiciones iniciales son de orden entero.
- Las diferentes definiciones de derivada fraccionaria existen por no haber un consenso generalizado sobre que es la derivada fraccionaria de una función; es decir no hay una interpretación fisica y geométrica consistente sobre ella.

Bibliografía

[1] **Kilbas A. A., and Srivastava H. M., and Trujillo J. J** . "Theory and Aplications of Fractional Differential Equations", Elsevier, Asterdam, 2006.

[2] **Luis Vázquez, M. Pilar Velasco**. "Cálculo Fraccionario como instrumento de Modelización", Univesidad Complutense de Madrid, 2011

[3] **Kenneth S. Miller, Bertram Ross**. "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations". Wiley, 1993.

[4] **Igor Podlubny**. "Fractional Differential Equations", Academia Press, San Diego, 1999.

[5]] **Prieto Curiel, R.**. "El Cálculo Generalizado y las Funciones Fraccionarias", Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2009.