UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

" Árboles Binomiales aplicados a la Valoración de las Opciones Financieras"

TESIS

"PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICAS".

Presentado por:

Bach. Mat. Sánchez Samillán Erika Mishel
Bach. Mat. Vidaurre Bances Zoila Maribel

Asesor:

M.Sc.Lluen Cumpa Elmer

LAMBAYEQUE – PERÚ
2021

UNIVERSIDAD NACIONAL“ PEDRO RUIZ GALLO”

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “ **Árboles Binomiales aplicados a la Valoración de las Opciones Financieras** ”, presentada por las Bachilleres en Matemáticas, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Dr. Paredes Tirado Gonzalo

Presidente Jurado de Tesis

M.Sc.Chiroque Baldera José Antonio

Secretario Jurado de Tesis

Dra. **Estrada Huancas Miriam María**

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: 13 de octubre del 2021

UNIVERSIDAD NACIONAL" PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Árboles Binomiales aplicados a la Valoración de las Opciones Financieras"

Bach. Mat. Sánchez Samillán Erika Mishel
Autor

Bach. Mat. Vidaurre Bances Zoila Maribel
Autor

Dr. **Lluen Cumpa Elmer**
Asesor

Lambayeque – Perú

2021

Agradecimiento

En primer lugar agradecer de todo corazón a nuestro Dios por mantenernos con vida y salud, a nuestro asesor Dr. Elmer Lluen Cumpa , por hacer sencillo lo que al principio nos resultaba complejo.

Un agradecimiento a toda la familia de la escuela de matemática de nuestra prestigiosa “Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo”,a nuestros profesores por compatir con cada uno de nosotros sus conocimientos Finalmente a nuestros padres por motivarnos a la aventura de estudiar una ciencia tan preciada,por creer y confiar en nosotras, nos sentimos en especial gratitud hacia ellos pues nos dieron la oportunidad de actualmente estar a pocos pasos de ser profesionales.

Dedicatoria

Este proyecto de tesis se lo dedicamos en primer lugar a nuestro Dios. De manera especial a nuestros queridos padres, pues todo lo que hoy somos es por ellos , por su apoyo incondicional, consejos, comprensión y amor , por ayudarnos con los recursos económicos necesarios para poder estudiar, por habernos orientado y forjado con valores y principios. A cada uno de nuestros docentes quienes se convirtieron en un ejemplo a seguir y que nos enseñaron tanto de nuestra ciencia como de la vida, motivándonos siempre a seguir adelante, en especial a nuestro asesor por darse el tiempo de guiarnos e indicarnos el camino a tomar para llegar hacer de nuestro proyecto, un proyecto que deje en el lector ganas de seguir investigando más sobre nuestro tema. Y por último y no menos importante, a cada uno de nuestros compañeros que forman parte de nuestra familia matemática,con quienes pasamos buenos y malos momentos pues todos aprendemos de todos y si nos equivocamos nos ayudamos, pues nuestro objetivo es hacer notar la riqueza de nuestra ciencia.

Resumen

En el mundo financiero hay complejidades que surgen al momento de valorar las opciones financieras, ya que se encuentran con ciertas dificultades para definir y cuantificar la volatilidad de los precios los cuales nos muestran dos situaciones, la primera está relacionada a la subida de precios, mientras que la segunda a la baja de precios.
Existen diversos métodos de valoración de opciones que pueden aplicarse a una inversión financiera dada, entre ellas se encuentran: el modelo de Black y Scholes, diferencias finitas, simulación de Montecarlo, entre otras. Dichos proyectos no tiene en cuenta la incertidumbre de los flujos de caja, es por eso que consideramos una técnica analítica: El método de Árboles binomiales, que es capaz de resolver situaciones más complejas.
Con estas consideraciones surge la pregunta ¿ es posible determinar el valor de una opción financiera a partir del método de árboles binomiales ?
Esto se logra a través del método de valoración por árboles binomiales, de manera que no haya condiciones de arbitraje para garantizar la existencia de una opción financiera.

El objetivo para encontrar el valor inicial de la opción, es construir un árbol binomial en el tiempo para los movimientos del activo, con base a las tasas que están sobre el valor del activo riesgoso. Además se encuentra la existencia de dos movimientos que son asociados a la binomialidad y una probabilidad a cada movimiento, se calcula la tasa libre de riesgo de las opciones y además se aplica este método al caso de una empresa.

En base a ello se logra ver que si es posible determinar el valor de una opción financiera a partir del método de árboles binomiales,ya que se pudo llegar a encontrar la fórmula general del valor de una opción financiera y aplicarla en un caso específico demostrando la veracidad de la misma.

Palabras clave : Árboles binomiales, opción, activo.

Abstract

In the financial world there are complexities that arise when evaluating financial options, since they encounter certain difficulties in defining and quantifying price volatility, which show us two situations, the first is related to the rise in prices, while than the second to lower prices.

There are various options valuation methods that can be applied to a given financial investment, among them are: the Black and Scholes model, finite differences, Monte Carlo simulation, among others. These projects do not take into account the uncertainty of cash flows, that is why we consider an analytical technique: The Binomial Trees method, which is capable of solving more complex situations.

With these considerations, the question arises, is it possible to determine the value of a financial option from the binomial tree method?

This is achieved through the binomial tree valuation method, so that there are no arbitrage conditions to guarantee the existence of a financial option.

The objective to find the initial value of the option is to build a binomial tree in time for the asset movements, based on the rates that are on the risky asset value. In addition, the existence of two movements that are associated with the binomiality and a probability to each movement is found, the risk-free rate of the options is calculated and this method is also applied to the case of a company.

Based on this, it is possible to see that if it is possible to determine the value of a financial option from the binomial tree method, since it was possible to find the general

formula for the value of a financial option and apply it in a specific case demonstrating the veracity of it.
Keywords: Binomial trees, option, active.

Introducción

Este proyecto pretende motivar al lector a hacer uso del método de árboles binomiales para encontrar el valor de una opción financiera aplicable a situaciones reales de significativa complejidad, el objetivo es construir un árbol binomial en el tiempo para los movimientos del activo, con base a las tasas que están sobre el valor del activo riesgoso, con el cual se encontró el valor inicial de la opción financiera.

La alta competencia en los mercados financieros, la globalización, los cambios tecnológicos han generado que actualmente muchos proyectos de inversión se desarrollen en ambientes de incertidumbre y como solución a estas necesidades surge una nueva herramienta conocida como " La Valoración de Opciones"que tiene en cuenta la tasa libre de riesgo, para ello se utiliza el método de árboles binomiales, en el cual se hace uso de un modelo binomial donde el valor del activo toma dos posibles valores, uno de ellos aumenta y el otro disminuye a cada uno se le asocia una probabilidad. Todo ese proceso permite llevar el valor final a la actualidad, por tanto es posible encontrar el valor de la opción financiera.

Existen distintos tipos de opciones, las cuales es importante saber diferenciarlas ya que depende del tipo de opción para poder calcular su valor, pues se calcula de manera diferente.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1:

Derivados Financieros

Haro(2005), afirma que los derivados financieros son acuerdos donde su valor depende de la acción, estos pactos son muy utilizados para las empresas en sus negociaciones, existen tres tipos de derivados financieros:Los swaps, forwards y opciones.
En el desarrollo del proyecto nos centramos en el uso de las opciones, vemos bajo que condiciones y variables es posible obtener el resultado.

Tipos de derivados financieros

1. Swaps:Permite hacer un trueque de acciones.
2. Forwards: Acuerdos de compra y venta de acciones, se acuerda un precio y se debe ejecutar en una fecha determinada.
3. Opciones: Este acuerdo permite al comprador tener el derecho de comprar o vender una determinada acción, la ventaja es que no está obligado a hacerlo en caso de que no le convenga.

1.1 Opciones Financieras

Una opción es un instrumento financiero derivado que supone un derecho, no la obligación, para el poseedor de esta a comprar o vender un activo subyacente (bienes,

acciones,divisas,etc.)a un precio ya determinado, llamado precio de ejercicio hasta una fecha determinada también en el contrato. (López,2015)
Partes:

1. **Tipo de opción:**Opción de compra o de venta así como europea y americana.

2. **Activo Subyacente:** Es el producto a negociar (acciones, divisas petróleo, cemento, oro, etc.)

3. **Cantidad del activo negociado:**Hace referencia al total de la acción a comprar o vender.

4. **Fecha de vencimiento:** es el día hasta el cual tiene validez el contrato.

5. **Precio de ejercicio:** Es el precio acordado al que se venderá el activo y estará estipulado en el contrato.

Otro elemento que no se considera en el contrato es la **" prima"**, que es el valor que tiene la opción.
En las opciones se presentan dos posiciones, cada una de ellas nos muestran su postura con respecto al contrato.

- **Posición Larga:**Va asociada con la obligación de comprar un activo(divisas, títulos, etc.)(Gray y Place,2003)

- **Posición corta:** Conlleva a la obligación de vender.(Gray y Place,2003)

1.1.1 Opciones de Compra

Es un contrato entre el comprador de la opción quien adquiere sobre el vendedor de la opción el derecho pero no la obligación de comprarle una cantidad determinada de un activo a un cierto precio y en un momento futuro pagando a cambio un precio.(Forner,s.f)

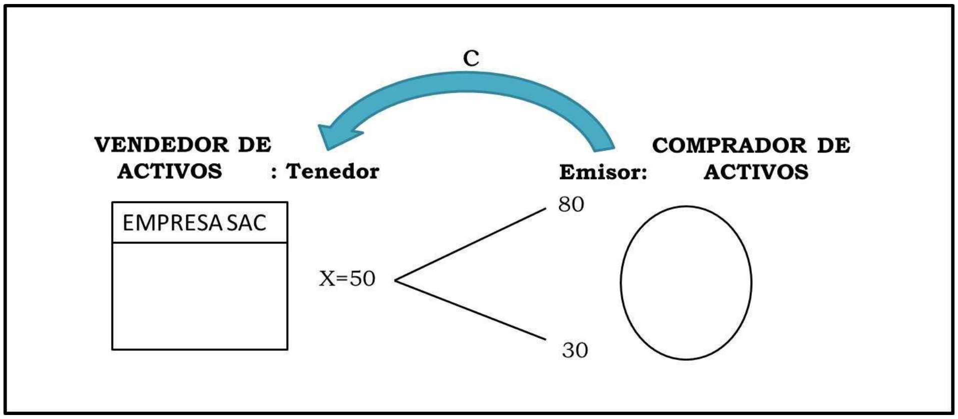

Figura 1.1: Diagrama de una opción de compra

Elaboración propia

1.1.2 Opciones de venta

Es un contrato entre el comprador de la opción quien adquiere sobre el vendedor el derecho pero no la obligación de venderle una cantidad determinada de un activo a un cierto precio y en un momento futuro pagando a cambio un precio.(Forner,s.f)

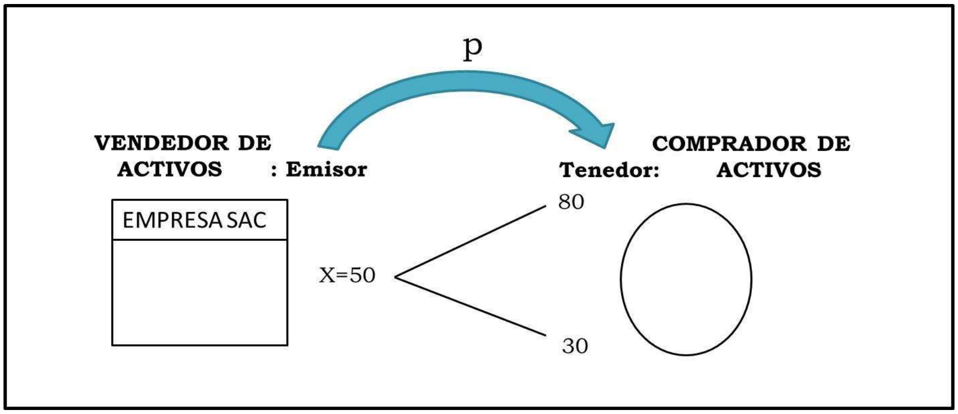

Figura 1.2: Diagrama de una opción de venta

Elaboración propia

1.1.3 Posiciones en un contrato de opción

1. **Posición larga sobre opciones de compra**

   El comprador paga una prima **"c"** por el derecho de comprar. Si el precio del activo subyacente baja, el comprador tiene el derecho de no ejercer la opción y únicamente pierde el valor de la prima. En cambio, si el precio del activo subyacente sube, el comprador ejerce la opción y compra la acción al precio pactado.(Díaz y Hernández, 2008)

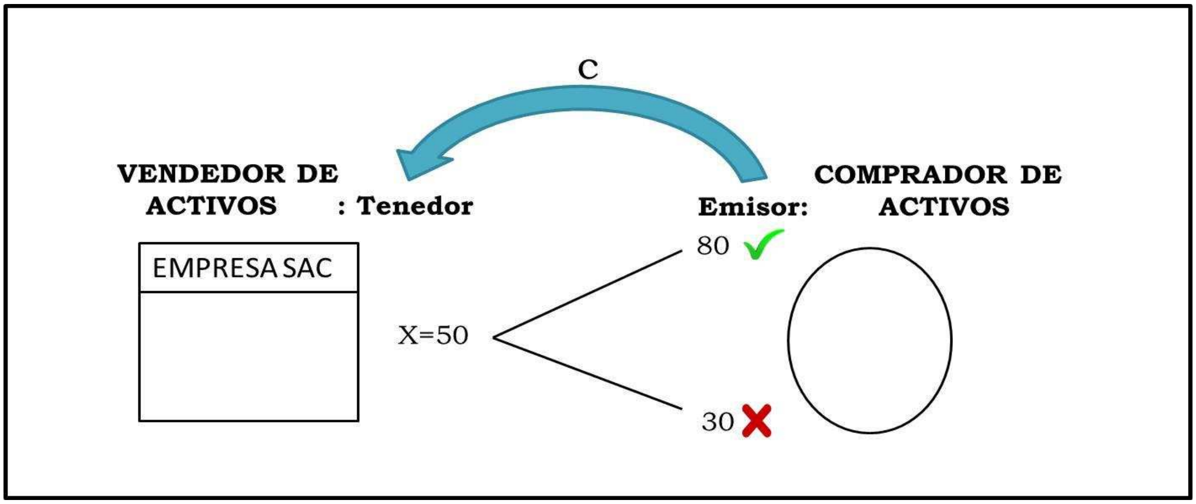

Figura 1.3: Representación de la compra de una opción de compra

Elaboración propia

2. **Posición corta sobre opciones de compra**

   El vendedor recibe una prima **"c"**.Si el precio del activo subyacente baja, la opción no se ejerce y el vendedor obtiene la ganancia de la prima.En cambio, si el precio del activo subyacente sigue igual o sube, se ejerce la opción ocasionando pérdidas al vendedor.(Díaz y Hernández, 2008)

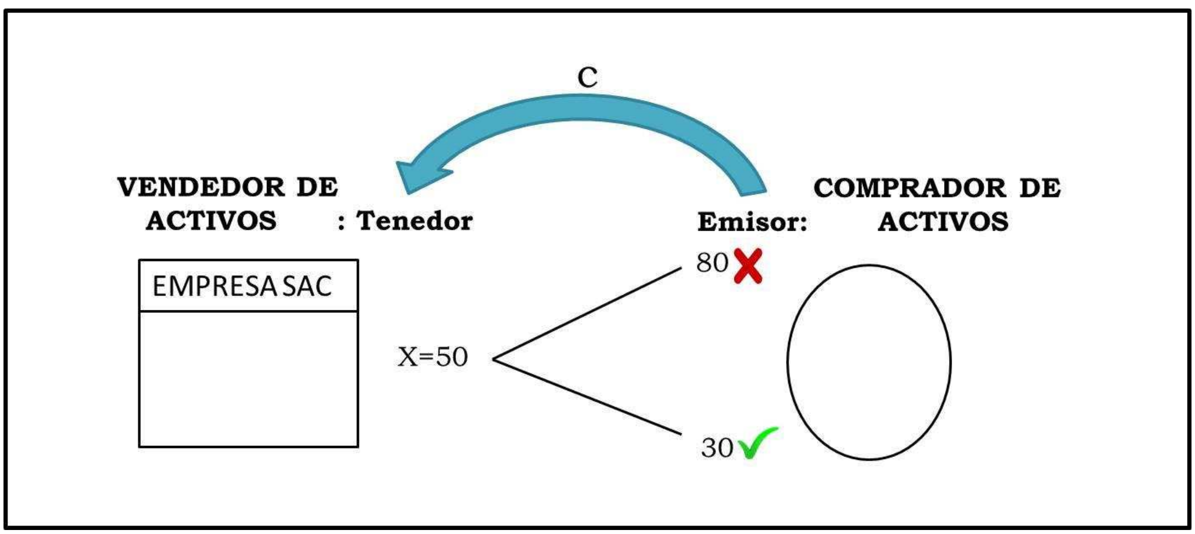

Figura 1.4: Representación de la venta de una opción de compra

Elaboración propia

3. **Posición larga sobre opciones de venta**

El comprador de la opción paga una prima **"p"**. Si el precio del activo subyacente sube, no se ejerce la opción y el comprador perdería el valor de la prima.En cambio si el valor del activo subyacente baja, se ejerce la opción y vende dicho activo al precio pactado.(Díaz y Hernández, 2008)

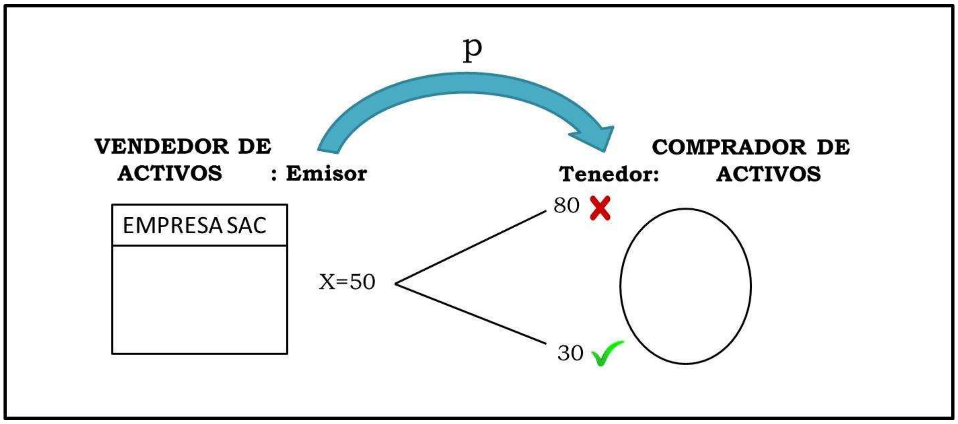

Figura 1.5: Representación de la compra de una opción de venta

Elaboración propia

4. **Posición corta sobre opciones de venta** El vendedor de la opción recibe una prima **"p"**. Si el precio del activo subyacente sube, entonces la opción no se ejerce y el vendedor obtiene la ganancia de la prima. En cambio, si el valor del activo subyacente permanece igual o baja, la opción se ejerce y el comprador esta obligado a comprar dicho activo al precio pactado.(Díaz y Hernández, 2008)

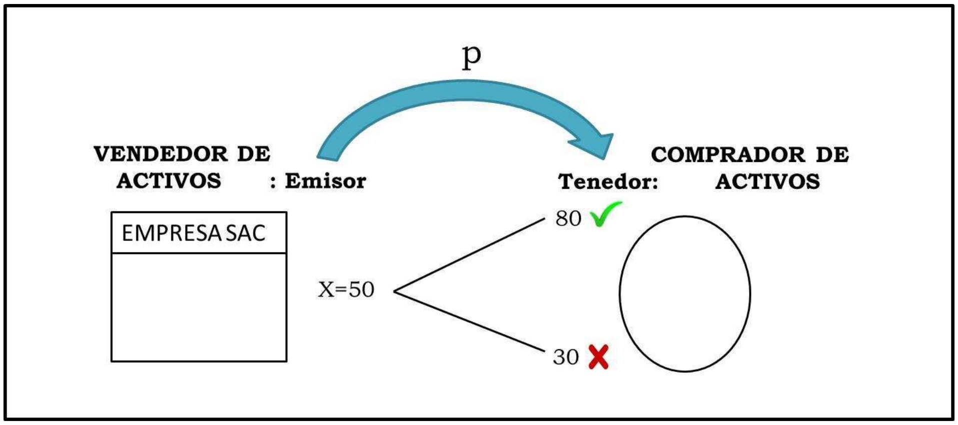

Figura 1.6: Representación de la venta de una opción de venta

Elaboración propia

1.1.4 Opciones Americanas y Europeas

De acuerdo al tiempo en el que se puede ejercer una opción, tenemos:

1. **Opciones americanas:**

   Se pueden ejercer en cualquier fecha hasta el día de vencimiento.Forner,C(s,f)

2. **Opciones europeas:**Se ejercen únicamente en el día de vencimiento.

1.1.5 Opciones dentro, fuera y en el dinero

Según la relación entre el precio de ejercicio y de mercado, tenemos:(UAMF,sf,p,104)

1. **Dentro del dinero:**

   En opciones de compra, se cumple cuando el precio de mercado es mayor que el de ejercicio, en opciones de venta se cumple cuando es menor.(UAMF,sf,p,104)

2. **Fuera del dinero:**

   En opciones de compra, se cumple cuando el precio de mercado es menor que el de ejercicio, en opciones de venta se cumple cuando es mayor.(UAMF,sf,p,104)

3. **En el dinero:**

   Para opciones de compra y venta, se cumple cuando el precio de mercado es igual al precio de ejercicio.(UAMF,sf,p,104)

1.1.6 Valor intrínseco y valor en el tiempo de las opciones

Al haber cambios en el precio de una acción con respecto al tiempo, el valor de una opción tendrá un valor intrínseco y en el tiempo, a partir de estos se generan ciertas condiciones para la determinación del valor de opciones.

1. **El valor intrínseco**

   Se obtiene restando el precio de la acción con el precio de ejercicio, ahora veremos las condiciones cuando se trata de una opción de compra y cuando se trata de una opción de venta.(Zalba.A,2014,p.20)

   - Para las opciones de compra restaremos el precio de mercado de la acción con el precio de ejercicio.

$$\boxed{c = max\,(S - X, 0)}$$

- Para las opciones de venta restaremos el precio de ejercicio con el precio de mercado de la acción.

$$\boxed{p = max\,(X - S, 0)}$$

2. **El valor temporal:** Hace referencia a la posibilidad de tener un lucro por el valor de opción, por si hubiera cambios en el precio de la acción, todo esto dentro de la fecha de vencimiento de la opción.

1.1.7 Cálculo de los precios de las opciones

1. **Valor intrínseco del activo subyacente:**Mientras más aumente el precio del activo más aumentará el proceso de la opción de compra, pero disminuirá el de la opción de venta.

2. **Precio de ejercicio de la opción:**A mayor precio de ejercicio mayor precio de la opción de compra, en opciones de venta sucede lo contrario

3. **Tasa de interés libre de riesgo:**A mayor tasa de interés libre de riesgo mayor precio de opciones de compra, pero menor precio de opciones de venta.

4. **Dividendos:**A dividendos altos menor el precio de las opciones de compra, pero mayor el precio de opciones de venta.

5. **Plazo al vencimiento:**A mayor precio de vencimiento, mayor precio de opciones de compra y venta.

6. **Volatilidad del activo subyacente:**A mayor volatilidad mayor es el precio de las opciones de compra y opciones de venta.

El valor de una opción de compra aumenta si:

$$\text{Aumentan}\begin{cases} -\text{Precio actual de la acción} \\ -\text{Vencimiento} \\ -\text{ La volatilidad} \end{cases} \quad \text{Disminuyen}\begin{cases} -\text{Tasa de interés} \\ -\text{Precio de ejercicio} \\ -\text{ Los dividendos} \end{cases}$$

El valor de una opción de venta aumenta si:

$$\text{Aumentan}\begin{cases} -\text{Precio de ejercicio} \\ -\text{Vencimiento} \\ -\text{ Dividendos} \\ -\text{ La volatilidad} \end{cases} \quad \text{Disminuyen}\begin{cases} -\text{Tasa de interés} \\ -\text{Precio actual de la acción} \end{cases}$$

1.1.8 Estructura de un acuerdo de una opción de compra

- En un acuerdo de opción de compra es primordial incluir la fecha donde entra en vigencia.

- Los datos del comprador y vendedor de la opción, en el caso del comprador se debe considerar sus nombres y apellidos completos, así como su dirección; para el caso del vendedor o propietario de la opción sus nombres y apellidos completos si se trata de una empresa se coloca en nombre de ésta (teniendo en cuenta que la empresa debe estar construida y debe operar de acuerdo a las leyes del estado) y también se coloca la dirección donde se encuentra ubicada.

- Se considera también el monto que pagará por el activo en caso ejerza su derecho de compra.

- Se hace mención del activo y sus características (describir el bien).

- Además se considera la fecha de vencimiento la fecha límite que tiene para ejercer la opción.

- Es importante también colocar las clausulas y condiciones del contrato que se hayan acordado entre ambas partes.
- Por último, deben firmar y sellar el comprador y vendedor de la opción y un testigo.

ACUERDO DE OPCIÓN DE COMPRA

Éste acuerdo de opción de compra entra en vigencia el [FECHA]

ENTRE: **[NOMBRE DE LA COMPAÑÍA]** (el "propietario"), la compañía constituida y que opera de acuerdo con las leyes de [Estado /Provincia] de [ESTADO/PROVINCIA], con oficina central ubicada en:

[DIRECCIÓN COMPLETA]

Y: **[NOMBRE]**(el "comprador"),una persona física cuyo principal lugar de residencia se encuentra en:

[DIRECCIÓN COMPLETA]

1. El comprador, por el presente acuerdo, paga al propietario la suma de [MONTO] en contraprestación de esta opción, la cual [SERÁ O NO SERÁ] acreditada al precio de compra si se ejerce la opción.
2. El comprador tiene la opción de y el derecho a comprar [DESCRIBIR EL BIEN] durante el periodo de la opción por el precio total de [MONTO].
3. Esta opción permanecerá vigente hasta el [FECHA DE FINALIZACIÓN] y, acto seguido, expirará salvo que se ejerza antes.
4. Para ejercer la opción, el comprador debe notificar al propietario de ésta, por correo certificado, dentro del periodo de la opción.
5. Si el comprador ejerce la opción, luego, el comprador y el propietario aceptan firmar el contrato de venta completo anexado a esta y consumar la venta de acuerdo con sus términos.
6. Este acuerdo de opción será vinculante para y redundará en beneficio de las partes, sus sucesores y cesionarios y representantes personales.

Firmado y sellado a los [DÍA] días del me de [MES] de [AÑO]

____

En presencia de [NOMBRE DEL TESTIGO]
[OCUPACIÓN]

____

[NOMBRE DE SU COMPAÑÍA]

____

[NOMBRE DEL COMPRADOR]

Figura 1.7: Modelo de acuerdo de opción de compra

Elaboración propia

1.2 Condiciones de arbitraje sobre opciones

En esta sección veremos las condiciones de arbitraje que debemos tener en cuenta sobre las opciones de compra (c) y opciones de venta (p).

1.2.1 Condiciones de arbitraje sobre opciones de compra

1. Una opción de compra siempre es mayor o igual a cero, pues el comprador de la opción tiene que pagar un precio por ella.Así pues:

$$\boxed{c \geq 0}$$

2. Una opción de compra siempre es menor o igual que el valor del activo subyacente, pues no le conviene al consumidor de la opción pagar por la opción un precio mayor que el de la acción.Así pues:

$$\boxed{c \leq S}$$

3. Una opción de compra americana es mayor o igual a la diferencia entre el valor del activo subyacente y el precio de ejercicio, la desigualdad estaría dada de la siguiente manera:

$$\boxed{c \geq S - X}$$

donde:
X: precio de ejercicio.

4. El valor de una opción de compra europea es mayor o igual a la diferencia entre el valor del activo subyacente y el valor actual del precio de ejercicio, la desigualdad esta dada de la siguiente manera:

$$\boxed{c \geq S - VA(X)}$$

1.2.2 Condiciones de arbitraje sobre opciones de venta

1. Una opción de venta siempre es mayor o igual a cero, pues el comprador de la opción tiene que pagar un precio por ella.Así pues:

$$\boxed{p \geq 0}$$

2. Una opción de venta siempre es menor o igual que el precio de ejercicio, pues no le conviene al comprador pagar por la opción un precio mayor que el precio mayor que el precio de ejercicio.Así pues:

$$\boxed{p \leq X}$$

donde:

X: precio de ejercicio.

3. Una opción de venta americana es mayor o igual a la diferencia entre el precio de ejercicio y el valor del activo subyacente, la desigualdad estaría dada de la siguiente manera:

$$\boxed{p \geq X - S}$$

donde:

S: activo subyacente.

4. Una opción de venta europea es mayor o igual a la diferencia entre el valor actual del precio de ejercicio y el valor del activo subyacente, la desigualdad estaría dada de la siguiente manera:

$$\boxed{p \geq VA(X) - S}$$

1.3 Ratio de cobertura (H)

El ratio de cobertura es la garantía para las empresas ante complicaciones que generen pérdidas futuras, además es el que señala y evalúa la calidad crediticia de éstas..(ANDBANK,2014)

$$\boxed{H = \frac{c_u - c_d}{S \times (U - D)}}$$

donde:

c_u:es valor de la opción cuando la acción incrementa.

c_d: es valor de la opción cuando la acción disminuye.

S: valor del activo subyacente.

$U = 1 + g$, U: coef. de crecimiento; $g$es tasa de incremento.

$D = \dfrac{1}{D}$, D:coef. de decrecimiento.

1.4 Inversión Financiera

Es el total de dinero que se invierte, con el objetivo de hacerlo crecer.Se determina en base a lo siguiente.(ACHES,2018)

$$\boxed{H \times S - c}$$

donde:
H: es el ratio de cobertura.
S: valor inicial de la acción.
c: valor de la opción.

1.5 Flujo de Caja

Es aquel que informa la liquidez total de una empresa y la cual ayuda a la mejora de toma de decisiones.(Moreno,2010), se determina de la siguiente manera,si:

a) los precios suben :$H \times SU - c_u$

b) los precios bajan :$H \times SD - c_d$

1.6 Tasa libre de Riesgo (R_f)

Es una elección de inversión de modo que el activo este libre de riesgo, además de un rendimiento efectivo en la unidad monetaria.(Castillo,2018)
Se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{flujo\ de\ caja}{inversion} - 1 = R_f}$$

1.7 Árboles Binomiales

El método de árboles binomiales se basa en construir un árbol en el tiempo para movimientos del activo. Ya construido, se procede el método hacia atrás encontrando el precio anterior respecto a las bases de los movimientos actuales y las probabilidades que se encuentra con nuestros valores simulados. (Rodríguez,2017)

- Ventaja: Es fácil de interpretar
- Desventaja: La precisión no es exacta para el contrato, como tal, no captura toda la información.

Capítulo 2: Árboles binomiales para la valoración de opciones

En este capítulo se hace uso del modelo binomial, el cual considera que el precio el activo toma solamente dos posibles valores uno que aumenta y el otro que disminuye cada uno con su respectiva probabilidad, dicho proceso consiste en llevar el valor final al presente. Cabe resaltar que mientras mayor sel el número de periodos,más exacto es el valor de la opción a encontrar.

2.1 Árboles binomiales para la valoración de opciones de compra

En esta sección haciendo uso del capítulo 1 se trabaja el modelo binomial para un periodo, luego dos y finalmente varios periodos, de los cuales se obtiene la fórmula general que nos será de gran utilidad para encontrar el valor de una opción de compra, y así poder ejecutar el capitulo 3.

2.1.1 Modelo binomial para un periodo

Se considera que el valor presente de un activo es 140 euros, y al cabo de un tiempo el valor puede subir a 160 euros o bajar a 122.48 euros.Si obtenemos una opción de compra" **c**", el valor de ésta será 20 si da el caso de incremento, pero si baja el valor será nulo, es decir cero. (ver la figura 2.1).

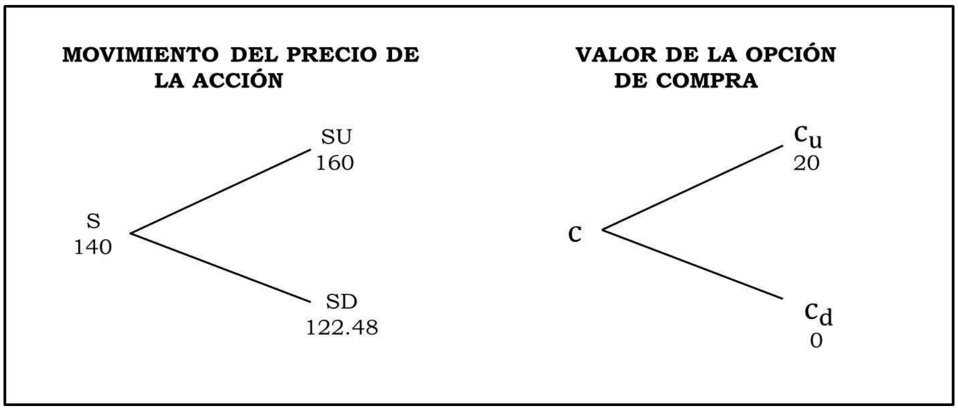

Figura 2.1: Valor de la opción de compra según el movimiento del precio de la acción Juan Mascareñas,1994

Por tanto se hace uso del ratio de cobertura (H), pues nos permite que cualquiera sea la variación, el flujo de caja sea el mismo y no habrá riesgo.(Mascareñas,1994).
Luego tenemos que:

a) El valor del activo dentro de un tiempo es 160 euros y el de la opción 20 euros, entonces el flujo de caja es:

$$\boxed{H \times 160 - 20}$$

b) El valor del activo de un tiempo es de 122.48 euros y al no ser ejercida el valor de la opción es 0. Entonces el flujo de caja es :

$$\boxed{H \times 122{,}48 - 0}$$

Al igualar ambos flujos de caja,tenemos que:

$$\begin{aligned} 160H - 20 &= 122,48H - 0 \\ 37,52H &= 20 \\ H &= \frac{20}{37,52} \\ H &= 0,533 \end{aligned}$$

Supongamos ahora que el valor de la tasa libre de riesgo sea del 6 %, el valor del flujo de caja será:

$$0,533 \times 160 - 20 = 65,28$$

y el de la inversión:

$$\boxed{inversion = 0,533 \times 140 - c}$$

Despejando, tenemos el valor de la opción de compra:

$$\begin{aligned} \frac{65,28}{0,533 \times 140 - c} &= 1 + 0,6 \\ 65,28 &= (74,62 - c)1,06 \\ c &= \frac{13,372}{1,06} \\ c &= 13,81 \end{aligned}$$

Reemplazando en la fórmula de tasa libre de riesgo en base al valor de la opción encontrado, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{65,28}{0,533 \times 140 - 13,02} &= 1 + R_f \\ \frac{65,28}{61,58} &= 1 + R_f \\ 1,06 &= 1 + R_f \\ R_f &= 0,06 \\ R_f &= 6\,\% \end{aligned}$$

En adelante obtendremos la fórmula para calcular el rendimiento libre de riesgo. Haciendo uso de un ejemplo numérico obtendremos que los términos SU y Sd son precios de la acción cuando sube y baja respectivamente.

En la figura 2.2, observaremos las dos posibilidades que tendríamos en caso de una subida o bajada de precios de la acción.

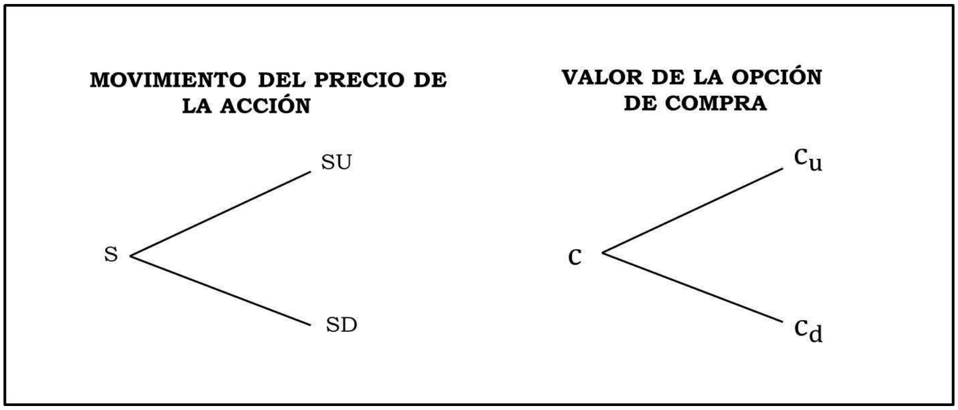

Figura 2.2: Diagrama general de un árbol binomial

Juan Mascareñas,1994

El flujo de caja esperado al final del periodo será:

a) Si los precios suben:

$$H \times SU - c_u \tag{2.1}$$

b) Si los precios bajan:

$$H \times SD - c_d \tag{2.2}$$

Igualando las ecuaciones (2.1),(2.2) y despejando H, obtendremos el valor del ratio de cobertura:

$$H = \frac{c_u - c_d}{S \times (U - D)} \tag{2.3}$$

Si sustituimos las variables por los valores usados en el caso anterior y donde :

$$\begin{aligned} U &= 1 + g, g = 14,3\,\% & D &= \frac{1}{U} \\ U &= 1 + 0,143 & D &= \frac{1}{1,143} \\ U &= 1,143 & D &= 0,875 \end{aligned}$$

obtendremos:

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{20-0}{140\times(1,143-0,875)}\\
H &= \frac{20}{37,52}\\
H &= 0,533
\end{aligned}
$$

Para calcular el valor de la opción de compra, se tiene que:

$$1+R_f = \frac{H\times SU - c_u}{H\times S - c} \tag{2.4}$$

operando tenemos:

$$
\begin{aligned}
HS + HSR_f - c - cR_f &= HSU - c_u\\
HS(1+R_f-U) + c_u &= c(1+R_f)
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

sustituyendo (2.3) en (2.5), tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{c_u-c_d}{\cancel{S}\times(U-D)}\cancel{S}(1+R_f-U)+c_u &= c(1+R_f)\\
\frac{c_u-c_d}{U-D}(1+R_f-U)+c_u &= c(1+R_f)\\
\frac{(c_u-c_d)(1+R_f-U)+c_u(U-D)}{U-D} &= c(1+R_f)\\
\frac{c_u+c_uR_f-\cancel{Uc_u}-c_d-c_uR_f+Uc_d+\cancel{c_uU}-c_uD}{U-D} &= c(1+R_f)\\
\frac{c_u(1+R_f-D)}{U-D}+\frac{c_d(U-1-R_f)}{U-D} &= c(1+R_f)\\
\frac{c_u(1+R_f-D)}{U-D}+\frac{c_d(U-(1+R_f))}{U-D} &= c(1+R_f)
\end{aligned}
$$

ahora, denominaremos:

$$p = \frac{1+R_f-D}{U-D} \qquad\qquad 1-p = \frac{U-(1+R_f}{U-D}$$

Dichos valores (p) y $(1-p)$ nos muestran tanto la probabilidad implícita de ascenso como la probabilidad implícita de descenso del valor de la acción subyacente, respectivamente.Por ejemplo, si sustituimos en p las variables por los datos del ejemplo con el que venimos trabajando obtendremos dichas probabilidades:

$$p = \frac{1+0,06-0,875}{1,143-0,875} = 0,69 = 69\,\%\text{de que ascienda}$$

$$1-p=\frac{1,143-(1+0,06)}{1,143-0,875}=0,309=31\,\%\text{de que descienda}$$

Por tanto, retomando nuestra demostración y sustituyendo parte de la ecuación anterior por el valor de p y $(1-p)$, obtendremos:

$$c_u p + c_d(1-p) = c(1+R_f)$$

despejando c, obtendremos:

$$c=\frac{c_u p + c_d(1-p)}{1+R_f} \tag{2.6}$$

Luego, sustituyendo los valores de las variables por los datos del ejemplo, nos resulta:

$$c=\frac{(20\times 0,69+0\times 0,31)}{1,06}=13,02$$

Nota 2.1. $\boxed{c=\left(\frac{1}{1+R_f}\right)[(1-p)c_d+pc_u]}$

sabemos que :

$c_u = max(SU-X,0)$

$c_d = max(SD-X,0)$

SD :precio de la acción sube.

SU :precio de la acción baja.

X :precio de ejercicio.

entonces

$$c=\left(\frac{1}{1+R_f}\right)[(1-p)max(SD-X,0)+(p)max(SU-X,0)]$$

$$c=\left(\frac{1}{1+R_f}\right)\left[\left(\frac{1!}{0!1!}\right)p^0(1-p)^1 max(SU^0D^1-X,0)+\left(\frac{1!}{1!0!}\right)p^1(1-p)^0 max(SU^1D^0-X,0)\right]$$

$$\boxed{c=\left(\frac{1}{1+R_f}\right)\sum_{x=0}^{n=1}\binom{1}{0}p^x(1-p)^{n-x}max(SU^xD^{n-x}-X,0)}$$

2.1.2 Modelo binomial para dos periodos

Para determinar el valor de una opción para dos periodos, vamos a suponer que U=143 y D=0,875, veremos como después de dos periodos, el valor del activo puede subir a 182,8 o bajar a 107,17. Por tanto obtendremos tres posibles valores de la opción de compra, como se observa en la figura:

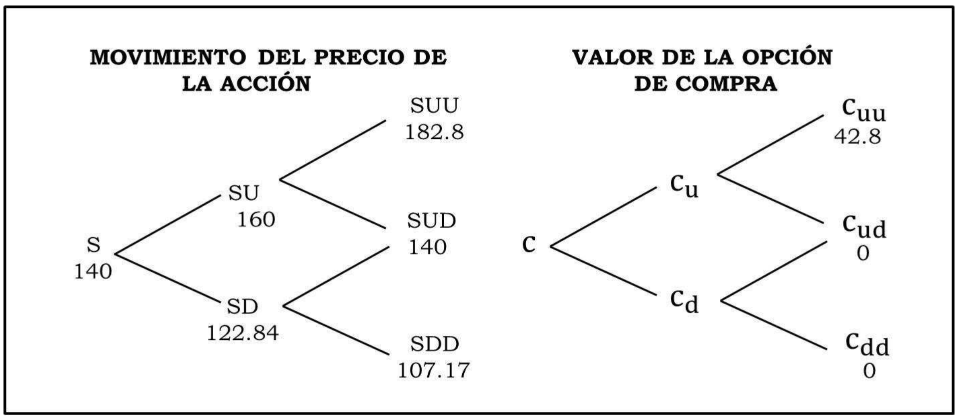

Figura 2.3: Valor de la opción de compra en dos periodos

Juan Mascareñas,1994

Pasos:

- Calcularemos el valor de la opción de compra al finalizar el primer periodo para ambas probabilidades en función a los posibles valores que pueda tomar al finalizar el segundo, es decir de derecha a izquierda.
- Con ambos valores calcularemos el valor de la opción.

Así tendremos:

$$c_u = \frac{c_{uu}p + c_{ud}(1-p)}{1+R_f} \tag{2.7}$$

$$c_u = \frac{42,8 \times 0,69 + 0 \times 0,031}{1,06}$$

$$c_u = 36,34 euros$$

$$c_d = \frac{c_{ud}p + c_{dd}(1-p)}{1+R_f} \tag{2.8}$$
$$c_d = \frac{0 \times 0,69 + 0 \times 0,031}{1,06}$$
$$c_d = 0euros$$

Reemplazando ambos valores en la ecuación (2.6), tenemos:

$$\begin{aligned} c &= \frac{c_u p + c_d(1-p)}{1+R_f} \\ c &= \frac{36,34 \times 0,69 + 0 \times 0,031}{1,06} \\ c &= 23,65euros \end{aligned} \tag{2.9}$$

Entones, el valor de la opción de compra para dos periodos es 23,65 euros.

Nota 2.2. Si sustituimos las ecuaciones (2.7) y (2.8) en la ecuación (2,6), obtenemos:

$$c = \frac{1}{1+R_f}\left[\left(\frac{c_{uu}p + c_{ud}(1-p)}{1+R_f}p + \frac{c_{ud}p + c_{dd}(1-p)}{1+R_f}(1-p)\right)\right]$$
$$c = \frac{1}{(1+R_f)}^2\left(c_{uu}p^2 + c_{ud}p - c_{ud}p^2 + c_{ud}p - c_{ud}p^2 + c_{dd}(1-p)^2\right)$$
$$c = \frac{1}{(1+R_f)^2}\left(c_{uu}p^2 + 2p(c_{ud} - c_{ud}p) + c_{dd}(1-p)^2\right)$$
$$c = \frac{1}{(1+R_f)^2}\left(c_{uu}p^2 + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}\right)$$

Sabemos que:

$c_{uu} = max(SUU - X, 0) = max(SU^2 - X, 0)$

$c_{dd} = max(SDD - X, 0) = max(SD^2 - X, 0)$

$c_{ud} = max(SUD - X, 0)$

SD : el precio de la acción baja.

SU :el precio de la acción sube.

X :precio de ejercicio.

entonces:

$$c = \left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\left[(1-p)^2 max(SD^2 - X, 0) + 2p(1-p)max(SUD - X, 0) + p^2 max(SU^2 - X, 0)\right]$$

$$c = \left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\left[\left(\frac{2!}{0!2!}\right)p^0(1-p)^2max(SU^0D^2-X,0)\right]+$$

$$\left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\left[\left(\frac{2!}{1!1!}\right)p^1(1-p)^1max(SUD-X,0)\right]+$$
$$\left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\left[\left(\frac{2!}{2!0!}\right)p^2(1-p)^0max(SU^2D-X,0)\right]$$

$$\boxed{c = \left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\sum_{x=0}^{n=2}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}max(SU^xD^{n-x}-X,0)}$$

2.1.3 Modelo binomial para varios periodos

En esta sección haremos uso del triángulo de pascal, con el desarrollo de las combinatorias, de donde obtendremos el modelo binomial para determinar el valor de una opción financiera.Considerando además a **"n"** como la cantidad de periodos y recalcando que la potencia de un binomio es

$$(a+b)^n = \sum C_{(n,x)}b^xa^{n-x}$$

donde:

$C_{(n,x)} = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$, es la combinatoria de **"n"** números tomados desde **"x"**.
Luego, la función de distribución binomial es:

$$f(x) = C_{(n,x)}p^x(1-p)^{n-x}$$

donde: p : probabilidad de éxito (ascenso).

$(1-p)$:probabilidad de fracaso (descenso).

n :cantidad de periodos.

x : cantidad de éxitos.

por tanto:

$$\boxed{c = \left(\frac{1}{(1+R_f)^n}\right)\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}max(SU^xD^{n-x}-X,0)} \tag{2.10}$$

En resumen:

1. El valor de las acciones se representan por una binomial multiplicativa.

2. Los coeficientes de crecimiento y decrecimiento son los mismos en todos los periodos.

3. El ratio de cobertura se encontrará libre de riesgo en cada periodo.

4. Las tasas de interés libre de riesgo también permanecen iguales.

2.2 Árboles binomiales para la valoración de opciones de venta

En esta sección haremos un proceso similar al de opciones de compra, para obtener la fórmula general para determinar el valor de opciones de venta, partiremos del modelo binomial de un periodos, luego de dos y finalmente para varios periodos, cabe recalcar que mientras mayor sea el número de periodos, mas exacto es el valor de la opción a encontrar.
De ahí radica la importancia del uso de la fórmula general ya que le daremos mayor valor a “n”.

2.2.1 Modelo binomial para un periodo

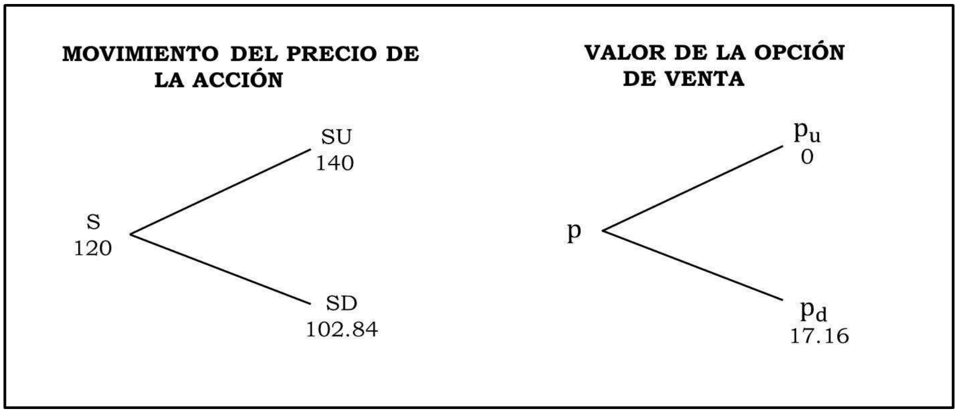

Figura 2.4: Valor de la opción de venta según el movimiento del precio de la acción Juan Mascareñas,1994

Supondremos que se adquirirán *hp* acciones, donde *hp* será el ratio de cobertura el cual tendrá signo negativo. Así pues:

a) Si el valor de la acción sube dentro de un periodo, tenemos que el flujo de caja será:

$$\boxed{h_pSU - p_u} \tag{2.11}$$

b) Si el valor de la acción baja dentro de un periodo, tenemos que el flujo de caja será:

$$\boxed{h_pSD - p_d} \tag{2.12}$$

Luego, igualando las ecuaciones (2.11) y (2.12) tenemos:

$$h_pSU - p_u = h_pSD - p_d$$
$$h_p(SU - SD) = p_u - p_d$$

$$\boxed{h_p = \frac{p_u - p_d}{S \times (U - D)}} \tag{2.13}$$

sustituyendo las variables por los valores que venimos manejando y donde:

$$\begin{aligned}
U &= 1 + g, g = 16,7\,\% & D &= \frac{1}{U} \\
U &= 1 + 0,167 & D &= \frac{1}{1 + 0,167} \\
U &= 1,167 & D &= 0,857
\end{aligned}$$

obtendremos:

$$\begin{aligned}
h_p &= \frac{0 - 17,6}{120 \times (1,67 - 0,857)} \\
h_p &= \frac{-17,6}{37,2} \\
h_p &= -0,473
\end{aligned}$$

Haciendo uso del flujo de caja e inversión, será posible obtener una ecuación que nos permita determinar el valor de una opción de venta. Es decir, se tiene que:

$$1 + R_f = \frac{h_p \times SU - p_u}{h_p \times S - p} \tag{2.14}$$

operando tenemos:

$$\begin{aligned}
h_p S + h_p S R_f - p - p R_f &= h_p SU - p_u \\
h_p S(1 + R_f - U) + p_u &= p(1 + R_f)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

sustituyendo (2.13) en (2.15), tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{p_u - p_d}{\cancel{S} \times (U - D)} \cancel{S}(1 + R_f - U) + p_u &= p(1 + R_f) \\
\frac{p_u - p_d}{U - D}(1 + R_f - U) + p_u &= p(1 + R_f) \\
\frac{(p_u - p_d)(1 + R_f - U) + p_u(U - D)}{U - D} &= p(1 + R_f) \\
\frac{p_u + p_u R_f - \cancel{U p_u} - p_d - p_u R_f + U p_d + \cancel{p_u U} - p_u D}{U - D} &= p(1 + R_f) \\
\frac{p_u(1 + R_f - D)}{U - D} + \frac{p_d(U - 1 - R_f)}{U - D} &= p(1 + R_f) \\
\frac{p_u(1 + R_f - D)}{U - D} + \frac{p_d(U - (1 + R_f))}{U - D} &= p(1 + R_f)
\end{aligned}$$

ahora, denominaremos:

$$m = \frac{1 + R_f - D}{U - D} \qquad 1 - m = \frac{U - (1 + R_f}{U - D}$$

Estos valores nos muestran la probabilidad implícita de ascenso (m) y la de descenso ($1 - m$) del valor de la acción subyacente.

Reemplazando, tenemos que:

$$m = \frac{1 + 0,06 - 0,857}{1,167 - 0,857} = 0,654 = 65\,\%\text{de que ascienda}$$

$$1 - m = \frac{1,167 - (1 + 0,06)}{1,167 - 0,857} = 0,345 = 35\,\%\text{de que descienda}$$

Sustituyendo parte de la ecuación anterior por el valor de m y $(1 - m)$, obtendremos:

$$p_u m + p_d(1 - m) = p(1 + R_f)$$

Finalmente, despejando tenemos la ecuación para determinar el valor de una opción de compra.

$$\boxed{p = \frac{p_u m + p_d(1 - m)}{1 + R_f}} \tag{2.16}$$

es decir, el precio teórico de la opción de venta es igual al valor actual de la media ponderada de los flujos de caja que dicha opción proporciona en su fecha de vencimiento.

Luego, sustituyendo los valores de las variables por los datos del ejemplo, nos resulta:

$$p = \frac{(0 \times 0,65 + 17,6 \times 0,35)}{1,06} = 5,81\text{EUROS}$$

Nota 2.3.

$$p = \left(\frac{1}{1 + R_f}\right)[(1 - m)p_d + (m)p_u]$$

sabemos que :

$p_u = max(X - SU, 0)$

$p_d = max(X - SD, 0)$

SD :precio de la acción baja.

SU :precio de la acción sube.

X :precio de ejercicio.

entonces

$$p = \left(\frac{1}{1 + R_f}\right)[(1 - m)max(X - SD, 0) + (m)max(X - SU, 0)]$$

$$p = \left(\frac{1}{1 + R_f}\right)\left[\left(\frac{1!}{0!1!}\right)m^0(1 - m)^1 max(X - SU^0 D^1, 0) + \left(\frac{1!}{1!0!}\right)m^1(1 - p)^0 max(X - SU^1 D^0, 0)\right]$$

$$\boxed{p = \left(\frac{1}{1+R_f}\right) \sum_{x=0}^{n=1} \binom{1}{0} m^x (1-m)^{n-x} max(X - SU^x D^{n-x}, 0)}$$

2.2.2 Modelo binomial para dos periodos

Nuestro objetivo en esta subsección es obtener el valor de la opción de venta(p) para dos periodos, el cual consiste en aplicar el modelo binomial.De esa forma consideremos:

$$U = 1,167$$

$$D = 0,857$$

Se sabe que el valor de la acción puede subir o bajar, según se observa en la figura 2.5.

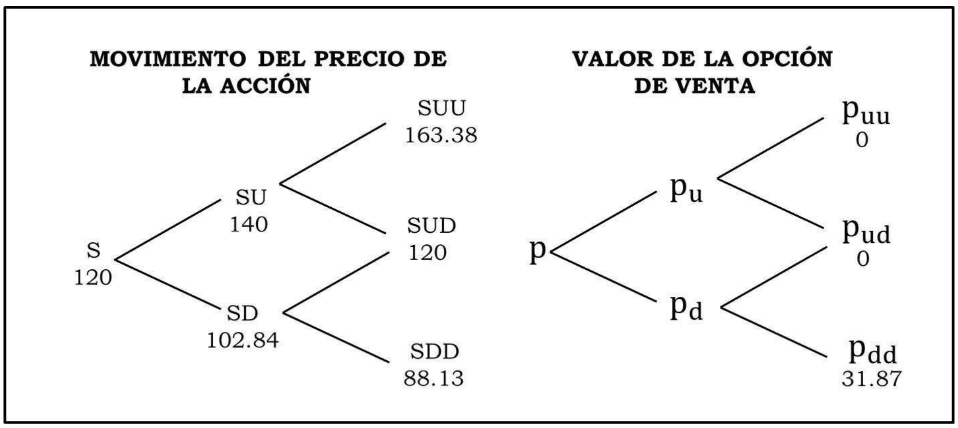

Figura 2.5: Valor de la opción de venta en dos periodos

Juan Mascareñas,1994

Para ambas situaciones calcularemos el valor de la opción de venta en base a los posibles valores que se toma al finalizar el segundo periodo.

Luego, a través de la misma expresión, calcularemos el valor de la opción de venta.

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{p_{uu}m + c_{ud}(1-m)}{1+R_f} \\ p_u &= \frac{0 \times 0,65 + 0 \times 0,35}{1,06} \\ p_u &= 0euros \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
p_d &= \frac{p_{ud}m + p_{dd}(1-m)}{1+R_f} \\
p_d &= \frac{0 \times 0,65 + 31,87 \times 0,35}{1,06} \\
p_d &= 10,52 euros
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Reemplazando los dos valores obtenidos, tenemos que:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{p_u m + p_d(1-m)}{1+R_f} \\
p &= \frac{0 \times 0,65 + 10,52 \times 0,35}{1,06} \\
p &= 3,47 euros
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Por tanto el valor de la opción de venta para dos periodos es de 3.47 euros.

Nota 2.4. Si sutstituimos las ecucaciones (2.17) y (2.18) en la ecuación (2.19), obtenemos:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{1+R_f}\left[\left(\frac{p_{uu}m + p_{ud}(1-m)}{1+R_f}m + \frac{p_{ud}m + p_{dd}(1-m)}{1+R_f}(1-m)\right)\right] \\
c &= \frac{1}{(1+R_f)}^2 \left(p_{uu}m^2 + p_{ud}m - p_{ud}m^2 + p_{ud}m - p_{ud}m^2 + p_{dd}(1-m)^2\right) \\
p &= \frac{1}{(1+R_f)^2}\left(p_{uu}m^2 + 2m(p_{ud} - p_{ud}m) + p_{dd}(1-m)^2\right) \\
p &= \frac{1}{(1+R_f)^2}\left(p_{uu}m^2 + 2m(1-m)p_{ud} + (1-m)^2 p_{dd}\right)
\end{aligned}$$

Sabemos que:

$p_{uu} = max(X - SUU, 0) = max(X - SU^2, 0)$

$p_{dd} = max(X - SDD, 0) = max(X - SD^2, 0)$

$p_{ud} = max(X - SUD, 0)$

SD :el precio de la acción baja.

SU :el precio de la acción sube.

X :precio de ejercicio.

entonces:

$$p = \left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\left[(1-m)^2 max(X - SD^2, 0) + mp(1-m)max(X - SUD, 0) + m^2 max(X - SU^2, 0)\right]$$

$$p = \left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\left[\left(\frac{2!}{0!2!}\right)m^0(1-m)^2max(X-SU^0D^2,0)\right]+$$

$$\left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\left[\left(\frac{2!}{1!1!}\right)m^1(1-m)^1max(X-SUD,0)\right]+$$
$$\left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\left[\left(\frac{2!}{2!0!}\right)m^2(1-m)^0max(X-SU^2D,0)\right]$$

$$\boxed{P = \left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\sum_{x=0}^{n=2}\binom{2}{0}m^x(1-m)^{n-x}max(X-SU^xD^{n-x},0)}$$

2.2.3 Modelo binomial para varios periodos

Recordemos que la potencia **"n"** de un binomio es:

$$(a+b)^n = \sum C_{(n,x)}b^x a^{n-x}$$

donde: $C_{(n,x)} = \binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$, es la combinatoria de **"n"**números tomados desde **"x"**.

Luego, la función de distribución binomial es:

$$f(x) = C_{(n,x)}m^x(1-m)^{n-x}$$

donde: m : probabilidad de éxito (ascenso).

$(1-m)$:probabilidad de fracaso (descenso).

n :cantidad de eventos.

x : cantidad de éxitos.

por tanto:

$$\boxed{p = \left(\frac{1}{(1+R_f)^2}\right)\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}m^x(1-m)^{n-x}max(X-SU^xD^{n-x},0)} \tag{2.20}$$

Por tanto, tenemos que:

1. el valor de las acciones se representan por una binomial multiplicativa.

2. Los coeficientes de crecimiento y decrecimiento son los mismos en todos los periodos.

3. El ratio de cobertura se encontrará libre de riesgo para cada periodo.

4. Las tasas libre de riesgo permanecen iguales.

Capítulo 3:

Aplicación del método de Árboles binomiales

En este capítulo realizaremos la aplicación del método de árboles binomiales, a partir de una opción de compra que se realizó con la empresa de **Cementos Pacasmayo**. Comenzaremos describiendo el historial de empresa.

3.1 Empresa Cementos Pacasmayo

Esta empresa es una de las mas reconocidas y resaltantes en el mercado peruano, fue inaugurada en 1949.
Esta empresa hace uso de nuevas tecnologías para realizar su producción, por lo que tienen una posición superior ante sus competidores.

Figura 3.1: Proceso de producción de cemento

Reporte Financiero CENTRUM,2012.

Como se observa en la imagen tiene un buen manejo de producción del cemento, cabe recalcar que trabaja con varias marcas y por ende manejan distintos precios según el tipo de cemento.

El valor del precio del cemento tiene variabilidad con respecto al tiempo, por ello hemos considerado tomar como ejemplo aplicativo una opción de compra donde el activo es el cemento, analizaremos cada parte del contrato, el cual debe tener en cuenta la cantidad total de cemento, el precio actual del producto, la fecha de vencimiento.

Posteriormente, tomaremos el modelo binomial, considerando las posibilidades que habrá si el precio del cemento sube o baja.

Todo ello radicará en encontrar el valor de la opción, haciendo uso de la fórmula general que encontramos en las secciones anteriores.

Figura 3.2: Indagación de competidores de cemento

Reporte Financiero CENTRUM,2012.

La figura se explica de la manera siguiente:

- La **amenaza de entrada** de nuevos competidores a la industria es baja ya que las barreras de entradas son altas. Las inversiones en capital para instalar plantas de producción e incorporar nuevas tecnologías representan un desembolso consecuente que frena los nuevos entrantes. Una red de distribución poderosa minimizando los costos de transporte es una ventaja competitiva muy difícil de construir que conlleva los actores que la poseen a tener un poder de marca que reduce las posibilidades de entrada de nuevos competidores.
  Finalmente las regulaciones del estado en cuanto al uso de recursos naturales y a la explotación de la riqueza del país son muy numerosas y frenan los nuevos actores a introducirse en la industria. A consecuencia de las altas barreras de entrada, la competencia informal se está desarrollando produciendo, sin respetar las regulaciones, cemento de baja calidad.

- El precio de los insumos es bajo, por lo que el **poder de negociación de los proveedores** también lo es.

- La mayoría de clientes son las familias que viven en viviendas humildes, por lo que el **poder de negociación de los compradores** es bajo.

- Al haber mayor inclinación al cemento, la **disponibilidad de los sustitutos** es baja.

Figura 3.3: Punto de empresas de cemento en el Perú

Reporte Financiero CENTRUM,2012.

3.2 Caso Aplicativo

En esta sección consideraremos un acuerdo de opción de compra y determinaremos el valor de dicha opción haciendo uso de las fórmulas encontradas en los capítulos anteriores, antes de ello haremos una comparación donde los resultados convergen y por tanto se comprueba la veracidad de las fórmulas halladas.

ACUERDO DE OPCIÓN DE COMPRA

Éste acuerdo de opción de compra entra en vigencia el 20 de enero del 2020

ENTRE : **CEMENTOS PACASMAYO SAA**
Eduardo Hochscild Beck
PERÚ- LIMA
Calle Colonial N° 150, urbanización el vivero, Santiago de Surco

Y : **Ricardo del Águila Villarreal**, una persona física cuyo principal, lugar de residencia se encuentra en:
Teodoro Cárdenas 540 – Cercado de Lima

1. El comprador, por el presente acuerdo, paga al propietario la suma de s/ 20400 soles en contraprestación de esta opción, la cual será acreditada al precio de compra si se ejerce la opción.
2. El comprador tiene la opción del derecho a comprar 850 bolsas de cementos T de 45,5 kg durante el periodo de la opción por el precio total de s/.20400
3. Esta opción permanecerá vigente hasta el 20 de Enero del 2021 y, acto seguido, expirará salvo que se ejerza antes.
4. Para ejercer la opción, el comprador debe notificar al propietario de ésta, por correo certificado, dentro del periodo de la opción.
5. Si el comprador ejerce la opción, luego, el comprador y el propietario aceptan firmar el contrato de venta completo anexado a esta y consumar la venta de acuerdo con sus términos.
6. Este acuerdo de opción será vinculante para y redundará en beneficio de las partes, sus sucesores y cesionarios y representantes personales.

Firmado y sellado a los 20 días del mes de Enero del 2020

En presencia de [NOMBRE DEL TESTIGO]
[OCUPACIÓN]

[NOMBRE DE SU COMPAÑÍA]

[NOMBRE DEL COMPRADOR]

Figura 3.4: Acuerdo de opción de compra de la empresa Cementos Pacasmayo

Business in a box, s.f.

- Dado el contrato de opción de compra se tiene que el precio del activo subyacente es: $S = 20400$ soles. Además la fecha de vencimiento del contrato tiene una duración de 1 año = 12 meses.

- Según la bolsa de valores entre los meses de enero y abril el precio de mercado del cemento varía entre 22,15 soles a 26 soles, pero en cierto momento el comprador decide ejercer su derecho pues en ese momento el precio del cemento permanece en 26 soles.


CEMENTOS PACASMAYO S.A.A.
INDUSTRIALES

Resumen | Histórico de cotizaciones | Hechos de importancia | Información corporativa | Información financiera

Valor: CPACASC1

CPACASC1

Precio fecha actual

Fecha cotización	Apertura	Cierre	Máxima	Mínima	Promedio	Cantidad Negociada	Monto Negociado (S/.)
10/04/2020	24	26	26	22,152	24,076	850	20400

Inversión mensual financiera = 9322.5 soles

Figura 3.5: Bolsa de Valores

Empresa Cementos Pacasmayo.

Supuesto 1:

- Sabemos que en los 4 primeros meses el precio de mercado del cemento varió entre 22.152 a 26 soles, veamos que sucede si en ese momento el comprador decide ejercer su derecho pues en abril del 2020 el precio del cemento permanece en 26 soles.

- Ahora construimos nuestro árbol binomial para un periodo.

1. Calculamos el coeficiente de crecimiento:(U)

$$U = \frac{SU}{S} = \frac{22100}{20400} = 1,083$$

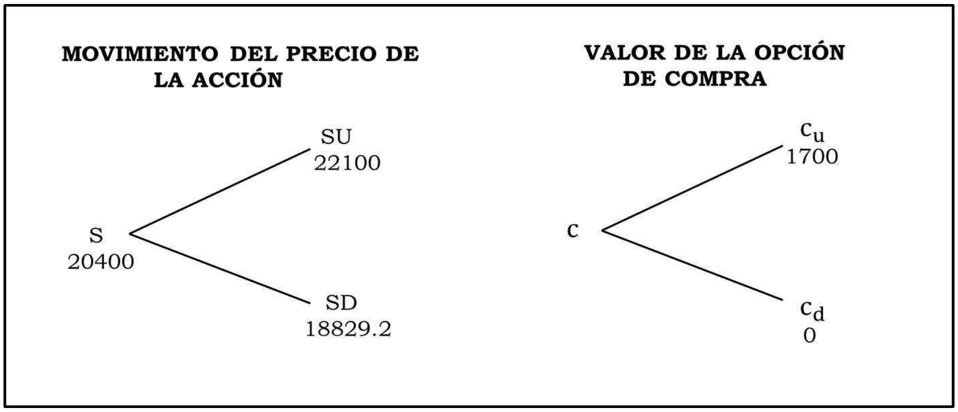

Figura 3.6: Modelo de árbol binomial para un periodo

Elaboración propia.

2. Calculamos la tasa de crecimiento:(g)

   Se sabe que:

$$U = 1 + g$$

$$1,083 = 1 + g$$

$$g = 0,083 \Rightarrow g = 8,3\,\%$$

3. Calculamos el coeficiente de decrecimiento:(D)

$$D = \frac{1}{U} = \frac{1}{1,083} = 0,923$$

4. Calculamos el Ratio cobertura:(H)

$$H = \frac{c_u - c_d}{S \times (U - D)}$$

$$H = \frac{1700 - 0}{20400 \times (1,083 - 0,923)}$$

$$H = \frac{1700}{20400 \times 0,16}$$

$$H = \frac{1700}{3,264}$$

$$H = 0,52$$

5. Ahora calcularemos la tasa libre de riesgo si el precio sube:

$$R_f = \frac{flujodecaja}{inversion} - 1$$

$$\begin{aligned} flujodecaja &= H \times SU - c_u \\ &= 0,52 \times 22100 - 1700 \\ &= 11492 - 1700 \\ &= 9792\text{SOLES} \end{aligned}$$

Además según la bolsa de valores de la inversión de la empresa es de 9322.5 soles, por tanto:

$$R_f = \frac{9792}{9325} - 1 = 0,05 = 5\,\%$$

6. Calculamos la probabilidad implícita de ascenso (p)y la de descenso $(1-p)$ del valor de la acción subyacente, por fórmula tenemos:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1 + R_f - D}{U - D} \\ p &= \frac{1 + 0,05 - 0,923}{1,083 - 0,923} \\ p &= \frac{0,127}{0,16} \\ p &= 0,794 \\ p &= 79,4\,\% prob.\ de\ que\ ascienda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - p &= \frac{U - (1 + R_f)}{U - D} \\ 1 - p &= \frac{1,083 - (1 + 0,05)}{1,083 - 0,923} \\ 1 - p &= \frac{0,033}{0,16} \\ 1 - p &= 0,206 \\ 1 - p &= 20,6\,\% prob.de\ que\ descienda \end{aligned}$$

7. Ahora reemplazamos en la ecuación (2.6) del valor de una opción de compra

$$\begin{aligned} c &= \frac{c_u p + c_d(1-p)}{1 + R_f} \\ c &= \frac{1700(0,794) + 0}{1 + 0,05} \\ c &= \frac{1349}{1,05} \\ c &= 1285,5 soles \end{aligned}$$

Para comprobar la veracidad de la fórmula general usaremos el caso 1 y veremos que los resultados convergen

$$c = \left(\frac{1}{(1+R_f)^n}\right)\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}max\left\{(SU^xD^{n-x}-X,0)\right\}$$

$$c = \frac{1}{(1+0,05)^1}\left[\left(\frac{1!}{0!1!}\right)(0,794)^0(0,206)^1\cancel{max\left\{20400(1,083)^0(0,923)^1-20400,0\right\}}\right]+$$

$$\frac{1}{(1+0,05)^1}\left[\left(\frac{1!}{1!0!}\right)(0,794)^1(0,206)^0max\left\{20400(1,083)^1(0,923)^0-20400,0\right\}\right]$$

$$c = \frac{1}{1,05}[0,794(1700)]$$

$$c = \frac{1349,8}{1,05}$$

$$c = 1285,5soles$$

Supuesto 2:

A partir del segundo cuatrimestre entre mayo y agosto el precio de mercado del cemento varía entre 20.45 y 28.16 soles.

Construimos nuestro árbol binomial para 2 periodos

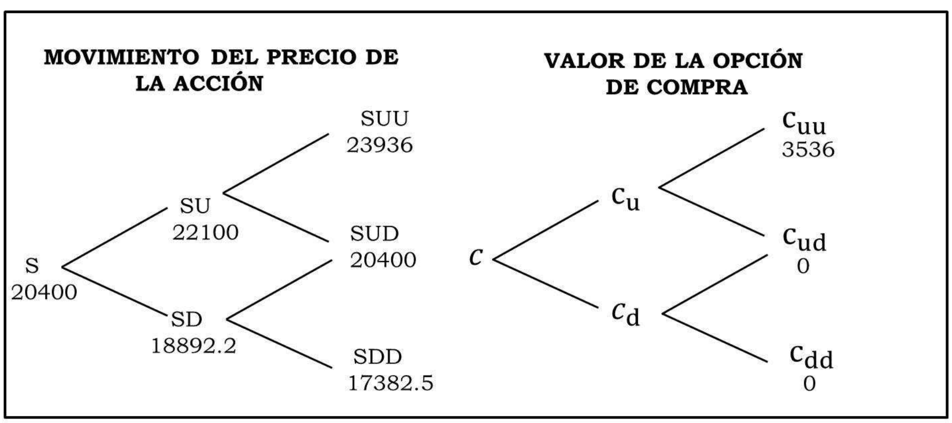

Figura 3.7: Modelo de árbol binomial para dos periodo

Elaboración propia.

1. El valor del coeficiente de crecimiento (U) y el coeficiente de decrecimiento (D)

permanecen igual, pues los supuestos al construir el modelo binomial son en base a estos. Se cumple que:

$$U = \frac{SUU}{SU} = \frac{23936}{22100} = 1,083$$
$$D = \frac{1}{U} = \frac{1}{1,083} = 0,923$$

2. Por lo anterior, se tiene que:

$$R_f = 0,05 = 5\,\%$$

$$p = 0,794 = 79,4\,\%$$

$$1 - p = 0,206 = 20,6\,\%$$

la tasa libre de riesgo(R_f), la probabilidad implícita de ascenso (p) y la probabilidad de descenso($1-p$) no varían.

3. Calcularemos el valor de la opción de compra al final del primer periodo tanto en caso de ascenso del precio de la acción (c_u), como de descenso (c_d) en función a los posibles valores que pueda tomar la misma al final del segundo periodo. Para ello usaremos la ecuación (2.7) y (2.8):

$$c_u = \frac{c_{uu}p + c_{ud}(1-p)}{1+R_f} \qquad c_d = \frac{c_{ud}p + c_{dd}(1-p)}{1+R_f}$$
$$c_u = \frac{2807,584 + 0}{1+0,05} \qquad c_d = 0$$
$$c_u = \frac{2807,584}{1,05}$$
$$c_u = 2673,9$$

4. Ahora calcularemos el precio teórico de la opción de compra reemplazando en la ecuación (2.6):

$$c = \frac{c_u p + c_d(1-p)}{1+R_f}$$
$$c = \frac{2673,9(0,794)}{1,05}$$
$$c = \frac{2123,0766}{1,05}$$
$$c = 2021,97 soles$$

Para comprobar la veracidad de la fórmula general usaremos el caso 2 y veremos que los resultados convergen:

$$c = \frac{1}{(1+R_f)^n}\sum_{x=0}^{n}\left[\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}max\left\{(SU^xD^{n-x}-X),0\right\}\right]$$

$$c = \frac{1}{(1+0,05)^2}\left[\left(\frac{2!}{0!2!}\right)(0,794)^0(0,206)^2\cancel{max\left\{20400(1,083)^0(0,923)^2-20400,0\right\}}\right]+$$

$$\frac{1}{(1+0,05)^2}\left[\left(\frac{2!}{1!1!}\right)(0,794)^1(0,206)^1\cancel{max\left\{20400(1,083)^1(0,923)^1-20400,0\right\}}\right]+$$

$$\frac{1}{(1+0,05)^2}\left[\left(\frac{2!}{2!0!}\right)(0,794)^2(0,206)^0max\left\{20400(1,083)^2(0,923)^0-20400,0\right\}\right]$$

$$c = \frac{1}{(1,05(^2}[0,630436(3526,9356)]$$

$$c = \frac{223,5}{1,05}$$

$$c = 2021,36soles$$

Supuesto 3:

Para calcular el valor de la opción para el último cuatrimestre, usaremos la ecuación (2.10)

$$c = \frac{1}{(1+R_f)^n}\sum_{x=0}^{n}\left[\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}max\left\{(SU^xD^{n-x}-X),0\right\}\right]$$

$$c = \frac{1}{(1+0,05)^3}\left[\left(\frac{3!}{0!3!}\right)(0,794)^0(0,206)^3\cancel{max\left\{20400(1,083)^0(0,923)^3-20400,0\right\}}\right]+$$

$$\frac{1}{(1+0,05)^3}\left[\left(\frac{3!}{1!2!}\right)(0,794)^1(0,206)^2\cancel{max\left\{20400(1,083)^1(0,923)^2-20400,0\right\}}\right]+$$

$$\frac{1}{(1+0,05)^3}\left[\left(\frac{3!}{2!1!}\right)(0,794)^2(0,206)^1max\left\{20400(1,083)^2(0,923)^1-20400,0\right\}\right]+$$

$$\frac{1}{(1+0,05)^3}\left[\left(\frac{3!}{3!0!}\right)(0,794)^3(0,206)^0max\left\{20400(1,083)^3(0,923)^0-20400,0\right\}\right]$$

$$c = \frac{1}{(1,05)^3}\left[3(0,13)max\{(22084,562-20400),0\}+(0,5)max\{(2512,871-20400),0\}\right]$$

$$c = \frac{1}{1,158}\left[0,39(1684,562)+0,5(5512,871)\right]$$

$$c = 0,864\left[656,97918+2756,4355\right]$$

$$c = 0,864(3413,41468)$$

$$c = 2949,19soles$$

Conclusiones

- Es posible determinar el valor de una opción financiera a partir del método de árboles binomiales,ya que se pudo llegar a encontrar la fórmula general del valor de una opción financiera y aplicarla en un caso específico demostrando la veracidad de la misma.

- Al construir el árbol binomial en el tiempo para los movimientos del activo, calculamos la tasa de crecimiento $g = 8,3\,\%$(con respecto al ejemplo aplicativo realizado en el capítulo 3), en base a ello se logró construir el árbol binomial para más periodos.

- Se asoció dos probabilidades a cada movimiento encontrado:
  Probabilidad que asciende($p = 79{,}4\,\%$)
  Probabilidad que desciende($1 - p = 20,6\,\%$)

- Al calcular la tasa libre de riesgo, teniendo en cuenta el flujo de caja y la inversión se obtuvo que$R_f = 5\,\%$

- Para el caso aplicativo de Cementos Pacasmayo, la duración de la opción de compra fue de 12 meses, se realizaron 3 iteraciones(periodos) divididas en 3 cuatrimestres y se obtuvo que:
  − El valor de la opción para un periodo fue 1285,5 soles.
  − El valor de la opción para 2 periodos fue 2021.97 soles.
  −El valor de la opción para 3 periodos fue 2949.19 soles.

- Se probó que cuanto mayor es el precio del activo mayor es el precio de la opción de compra: En el supuesto 1 el tenedor ejerce su derecho cuando el precio del

activo era de 26 soles, por lo que el precio de la opción fue de 1285,5 soles. En el supuesto 2 el tenedor ejerce su derecho cuando el precio del activo subió a 28.16 soles, por lo que el valor de la opción fue de 2021.97 soles.
Podemos notar que las iteraciones calculadas varían e incrementan mientras mayor es el precio del activo subyacente.

- Si el plazo para la fecha de vencimiento es mayor, la probabilidad de ejercer el derecho es mayor, por lo tanto el valor de la opción incrementa; es decir mientras mas cerca al plazo de vencimiento se ejerza la opción, mayor será el valor de esta.

- Como una opción de compra no puede valer más que el activo subyacente, es recomendable para la empresa que el tenedor ejerza su derecho durante el primer periodo, para no generarle grandes perdidas, pues los precios del activo en nuestros supuestos incrementan.

- Se nota que es importante considerar cuando la inversión inicial es primordial para realizar una inversión en el futuro, ya que en base a ella se crean las posibilidades para una expansión a beneficio del comprador de la opción.

Recomendaciones

- Dado que el método de árboles binomiales es un método muy exacto, se debe utilizar el método para determinar el valor de una opción cuando el precio del activo subyacente disminuye.
- Hacer uso de la fórmula general en otro caso aplicativo para calcular el valor de una opción de venta cuando el valor del activo incremente y otro caso donde el valor del activo disminuya.
- Existe otro método para calcular el valor de una opción, este es el método de Black Scholes por lo que sería interesante realizar un análisis comparativo entre el método de árboles binomiales y el método de Black Scholes y demostrar la convergencia de ambos.

Bibliografía

ACMES Agente de seguros y finanzas, *Tu mejor inversión*, Recuperado de https://www.acmes.com.mx/uncategorized/tu-mejor inversión/ , 21 de mayo del 2018.

ANDBANK Private Bankes, *Observatorio del inversor*, Recuperado de https://www.andbank.es/observatorio del inversor/que-es-el-ratio de-cobertura/ , 19 de marzo del 2014.

Business-in-a-box., *Acuerdo de opción de compra* ,Recuperado de: http://www.biztree.com/es/doc/acuerdo-de-opcion-de-compra-D2907

BUSINESS empresarial, *Tipos de Cementos Pacasmayo [figura 3.4*,]Recu perado de https://www.businessempresarial.com.pe/pacasmayo-lanzo-portafolio de-productos-que-busca-innovar-el-sector-de-la-construcción/,2019

CENTRUM Reporte financieros., *Cementos pacasmayo S.A.A.* ,Recuperado de: https://www.cementospacasmayo.com.pe/, 17 de setiembre del 2012.

CENTRUM Reporte financieros, *Proceso de producción de cemento [figura 3.1],*Recuperado de https://www.cementospacasmayo.com.pe/,2012

CENTRUM Reporte financieros, *Análisis de la industria cementera en el Perú [figura [3.2],*Recuperado de https://www.cementospacasmayo.com.pe/,2012

CENTRUM Reporte financieros, *Distribución de fábricas de Cemento en el Perú [figura 3.3],*Recuperado de https://www.cementospacasmayo.com.pe/,2012

Forner,C.(s.f, *Apuntes de Ingeniería Financiera TEMA 3: Opciones I:Introducción*, Recuperado de: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/16066/4/Tema %20a %20las %20Opciones.pdf

Gil,A., *Valoración de opciones estratégicas: en el enfoque de la "Option pricingntheory"*, Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1991.

Hull,J.,*Introducción a los mercados de futuros y opciones.*, Editorial Pearson eduation. Madrid, 2002

López,M. *Método de valoración de opciones*,Recuperado de : https://revista-anales.icai.es/web/n 12/seccion 3.html , 2012.

Mascareñas,J., *Método binomial de valoración de opciones.* ,Recuperado de:https://www.gacetafinanciera.com, 1994

RPP noticias, *Representantes de Cementos Pacasma yo S.A.A firmado con NYSE [figura 3.5]*,Recuperado de https://amp.rpp.pe/economía/economía/cementos-pacasmayo-lista-en-nyse-y obtiene-recursos-por-us-234-millones-noticia-429224,2012