

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Escuela Profesional de Matemáticas



## Hiperbolicidad en variedades diferenciables de dimensión infinita

Tesis para optar el título profesional de  
Licenciado en Matemáticas

AUTOR

**Mg. Joel Mendoza Jimenez**

ASESOR

Dra. Gloria María Ortiz Basauri

JURADO

M. Sc. Dolores Sánchez García

Mg. Oscar Santamaría Santisteban

Lic. Darwin Díaz Delgado

**LAMBAYEQUE - PERÚ**

2016

HIPERBOLICIDAD EN VARIEDADES DE DIMENSIÓN INFINITA

**Joel Mendoza Jimenez<sup>1</sup>**

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela Profesional de Matemáticas, de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Asesor y tesista:

---

Dr Gloria María Ortiz Basauri (asesora)

---

Mg. Joel Mendoza Jimenez (tesista)

**Lambayeque - Perú**

**2016**

---

<sup>1</sup>Versión con las correcciones del Jurado

HIPERBOLICIDAD EN VARIEDADES DE DIMENSIÓN INFINITA

**Joel Mendoza Jimenez<sup>2</sup>**

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela Profesional de Matemáticas, de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

---

M. Sc. Dolores Sánchez García (presidente)

---

Mg. Oscar Santamaría Santisteban (miembro)

---

Lic. Darwin Díaz Delgado (miembro)

---

Dr Gloria María Ortiz Basauri (asesora)

**Lambayeque - Perú**

**2016**

---

<sup>2</sup>Versión con las correcciones del Jurado

## Agradecimientos

Este trabajo no hubiese sido posible sin el apoyo de grandes personas con las cuales me siento profundamente agradecido.

Al Dr. Roland Rabanal, quien fue mi asesor en el presente trabajo, quien con su buena orientación y sus excelentes consejos lograron que se concluya este trabajo de tesis.

A la Dra. Gloria María Ortiz Basauri, gracias por brindarme orientación en el tiempo en que cursaba el pregrado y aconsejarme para continuar estudiando.

A mis amigos del pregrado con los cuales pasamos momentos amenos.

... A MIS PADRES.

## Presentación

El presente trabajo encuentra su motivación en demostrar que el conjunto estable asociado a un conjunto hiperbólico en un espacio de Banach de dimensión arbitraria tiene estructura de variedad diferenciable esto es de gran importancia ya que al probar que el conjunto estable tiene estructura de variedad diferenciable es posible hacer geometría en dicho conjunto. Además nos permite ver en tiempo futuro donde se encuentran los iterados de la función asociada. En el presente trabajo se brinda de manera detallada la descripción de algunos conjuntos hiperbólicos tales como la herradura de Smale, el solenoide y una aplicación lineal en el toro. También demostramos de manera didáctica que efectivamente el conjunto estable asociado a un conjunto hiperbólico es una variedad diferenciable.

Joel Mendoza

## RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es demostrar que el conjunto variedad estable asociado a un conjunto hiperbólico es una variedad diferenciable. Para cumplir con esto reducimos el problema de probar el conjunto variedad estable asociado a un conjunto hiperbólico es una variedad diferenciable al de encontrar la variedad estable para un punto fijo hiperbólico en un determinado espacio de Banach de dimensión arbitraria.

**Palabras clave:** variedad estable, punto fijo hiperbólico, conjunto hiperbólico.

## ABSTRACT

The objective of the present work is to show that the stable manifold associated with a hyperbolic set is a differentiable manifold. In this direction, we reduce the problem of show that the stable manifold set associated with a hyperbolic set, which is a differentiable manifold when finding the stable variety for a fixed hyperbolic point in a given Banach space of arbitrary dimension.

**Keywords** stable manifold, hyperbolic fixed point, hyperbolic set.



# Índice general

Agradecimientos	4
Presentación	6
RESUMEN	7
ABSTRACT	8
Índice de figuras	11
RESUMEN	12
Introducción	13
Capítulo 1. Variedad estable en el plano y el teorema de Grobman-Hartman	15
1. Notaciones	15
2. El principio de contracción	16
3. La variedad estable en el plano	24
4. Perturbación de aplicaciones lineales hiperbólicas.	27
5. Notación y enunciado del teorema de Grobman– Hartman	30
6. Demostración de la proposición principal	34
7. Demostración del teorema de Grobman-Hartman	40
Capítulo 2. Teorema de la variedad estable para un punto fijo	43
1. Presentación del teorema	43
2. La variedad estable	54
Capítulo 3. Conjuntos hiperbólicos y el teorema de la variedad estable	72
1. Una aplicación lineal hiperbólica en el toro	73
2. La herradura de Smale	75
3. Una herradura con medida de Lebesgue positiva	83
4. El solenoide	90
5. Espacios de dimensión infinita	93
6. La aplicación exponencial	95
7. Aplicaciones de la exponencial y la variedad estable local de $\tilde{0}$	96
8. Variedad estable local para un conjunto hiperbólico	100

Índice general	10
Conclusiones y sugerencias	105
Conclusiones	105
sugerencias	105
Apéndice A. Aplicaciones lineales	106
Apéndice B. Contracción	109
1. Contracción uniforme	109
2. Contracciones en fibras	112
Bibliografía	118
Bibliografía	118

## Índice de figuras

1. Teorema de la función implícita	22
2. Prueba de la variedad estable	27
3. Muchos homomorfismos	30
4. Función bump	41
1. Intersección de los $f^{-n}(\mathcal{B}(r))$	52
2. Cono estable e inestable	53
3. $W_r^s(0) \cap [\{q\} + C^u(\alpha)] = \{q\}$	53
4. Transformación grafo	59
5. Cono trasladado	63
6. Conos encajados	65
1. La imagen del toro bajo A (página 14 del libro [5])	73
2. La función herradura (página 15 del libro [5])	75
3. Rectángulos horizontales (página 16 del libro [5])	76
4. Contrucción del conjunto de Cantor de medida positiva ( [17])	84
5. Difeomorfismo que preserva orientación ( [17])	86
6. Acción de $f$ en $I \times J$ ( [17])	89
7. Acción de $f$ en $-I \times J$ ( [17])	89
8. Acción de $f$ en $T = \left(\frac{-\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right) \times J$ ( [17])	89
9. El toro sólido y su imagen bajo $f$ ( [11])	91
10. Intersección de $C \cap f(M)$ ( [11])	92
11. Acción de $\hat{F}$ y $\tilde{F}$	97
12. Forma local de $\hat{F}$	97
13. Acción de $\tilde{F}$	97
14. Aplicación exponencial	103

## RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es demostrar que el conjunto variedad estable asociado a un conjunto hiperebólico es una variedad diferenciable. Para cumplir con esto reducimos el problema de probar el conjunto variedad estable asociado a un conjunto hiperbólico es una variedad diferenciable al de encontrar la variedad estable para un punto fijo hiperbólico en un determinado espacio de Banach de dimensión arbitraria.

**Palabras clave:** variedad estable, punto fijo hiperbólico, conjunto hiperbólico.

## Introducción

El conjunto formado por los elementos  $q$  cuyos iterados,  $f^n(q)$ , para  $n > 0$  tal que la distancia entre  $f^n(q)$  y  $p$  tienda a cero cuando  $n$  va a infinito, donde  $p$  es un punto fijo hiperbólico para  $f$ , se le denomina variedad estable. De manera análoga se define variedad inestable. En principio estos son solamente conjuntos, sin embargo por el teorema de Hartman–Grobman estos llegan a ser discos topológico pero este teorema no brinda ninguna información acerca de la diferenciabilidad de estos discos. El teorema de la variedad estable para un punto fijo hiperbólico asegura que estos conjuntos, variedad estable e inestable, aparte de ser discos topológicos, como lo aseguraba el teorema de Hartman–Grobman, llegan a ser variedades diferenciables tan suaves como la función que los origina  $f$ , es más estas variedades pueden ser representadas por el gráfico de alguna función que va de un disco dentro de uno de los subespacios en el otro subespacio. Para probar esto primero se demostrará que estas variedades son Lipschitz, nuevamente el teorema de Hartman–Grobman no muestra que son Lipschitz, una vez que esto es verificado es posible probar la diferenciabilidad.

Cuando se tiene un punto fijo hiperbólico se tiene una descomposición del espacio tangente en el punto hiperbólico en dos subespacios que se les denomina espacio estable y espacio inestable. Sin embargo ¿Qué sucede si se tiene este comportamiento para mas de un punto? Sea  $\Lambda$  un conjunto no unitario tal que  $f(\Lambda) = \Lambda$  y en cada punto de  $\Lambda$  se tiene una descomposición del espacio tangente es más esta descomposición varía de manera continua. ¿Será que existen variedad estable e inestable para este conjunto? La respuesta es afirmativa y esto se da en el teorema de la variedad estable para conjuntos hiperbólicos la prueba de este teorema se reduce al teorema de variedad estable para un punto fijo hiperbólico para alguna función adecuada en espacios de dimensión infinita.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera:

Capítulo 1: Aquí se estudia el principio de contracción en  $\mathbb{R}$  y en  $\mathbb{R}^n$ , además del principio de contracción uniforme mediante el cual los puntos fijo de una función (que en principio debe ser contracción) varían de manera continua. Se da una prueba que el teorema de la variedad estable es válida en el plano y se finaliza con perturbaciones de aplicaciones hiperbólicas.

Luego se centra en la prueba del teorema de Hartman–Grobman versión local mediante el cual un sistema es topológicamente conjugado a su parte lineal en un entorno del un

punto fijo hiperbólico. La prueba es encontrar un homomorfismo como punto fijo de una contracción adecuada.

Capítulo 2: En este capítulo se enuncia y prueba el teorema de la variedad estable para un punto fijo hiperbólico para ello previamente se definen los conos hiperbólicos (estable e inestable) y se muestra que la aplicación derivada es invariante cuando se restringe a estos conos hiperbólicos. Así se probará que la variedad estable es localmente el gráfico de una función que va de una bola abierta en el espacio estable en bola abierta en el espacio inestable.

Capítulo 3: En este capítulo se define conjunto hiperbólico, se dan algunos ejemplos como: una aplicación lineal hiperbólica en el toro, la herradura de Smale con medida nula, una herradura de Smale con medida no nula que es denominada herradura de Bowen, por el último el solenoide. En el caso de la herradura de Smale se prueba que esta herradura tiene una infinidad numerable de órbitas periódicas de todos los periodos, una infinidad no numerable de órbitas no periódicas y una órbita densa, además esta herradura tiene medida de Lebesgue cero, sin embargo es posible construir una herradura con medida de Lebesgue positiva aquí también realizamos esta construcción.

Se prueba la existencia de las variedades estable e inestable para un conjunto hiperbólico, para ello se realiza una pequeña introducción a espacios de dimensión finita para que en estos espacios se encuentre un punto fijo que tiene la propiedad de descomposición del espacio tangente en suma directa del espacio estable e inestable para así aplicar el teorema dado en el capítulo 3, es decir la variedad estable para un conjunto hiperbólico resultará como la variedad estable de un punto fijo para una función conveniente definida en espacios de dimensión infinita.

Apéndice: Aquí se realiza algunos teoremas para no distraer la lectura del tema central, tales como: aplicaciones lineales, contracción uniforme y contracción en fibras. El teorema de contracción uniforme nos permitirá concluir que la variedad estable para un conjunto hiperbólico es tan suave como la función que origina a la variedad.

## Variedad estable en el plano y el teorema de Grobman-Hartman

En el presente capítulo se desarrollan las notaciones y teoremas básicos que se utilizarán en los siguientes capítulos. Además se da el principio de contracción que permite probar el principio de contracción suave: los puntos fijos de una función dada varían de manera continua. Por otro lado se prueba un resultado que dice que si se tiene un punto periódico de periodo  $m$  y la matriz jacobiana de la  $m$ -ésima derivada en dicho punto no tiene como autovalor a uno, entonces toda función cerca a la función dada posee un único punto periódico de periodo  $m$ . En seguida se da el teorema de la variedad estable en el plano para terminar con perturbaciones de aplicaciones lineales hiperbólicas aquí se sigue [12, 20]. Luego se estudia la versión discreta del teorema de Grobman-Hartman según la cual cada difeomorfismo es topológicamente conjugado a su parte lineal, en una vecindad del punto fijo hiperbólico. Las demostraciones originales se encuentran en [8, 9], (vea también [16]), pero la prueba moderna estudia las funciones que están a una distancia acotada de una transformación lineal (vea [20, 23]). Con esto, la conjugación encontrada, que perturba la identidad, es única y se obtiene la proposición principal, la cual permite probar el teorema Grobman-Hartman para los difeomorfismos. La prueba del teorema en dimensión infinita para difeomorfismos se encuentra en [19, 22].

### 1. Notaciones

Una función  $f : O \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  se dice que es **diferenciable en**  $x_0 \in O$ , si existe una aplicación lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que satisface

$$f(x_0 + v) - f(x_0) = T.v + r(v),$$

y  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ . Cuando esto se cumple  $\forall x_0 \in U \subset O$  se dirá que  $f$  es **diferenciable en**  $U$ . Se prueba que  $T(x_0)$  es única y la matriz asociada en las bases canónicas viene dada por:

$$Df = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & D_2 f_1(x_0) & \cdots & D_n f_1(x_0) \\ D_1 f_2(x_0) & D_2 f_2(x_0) & \cdots & D_n f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(x_0) & D_2 f_m(x_0) & \cdots & D_n f_m(x_0) \end{pmatrix},$$

donde  $D_i f_j$  representa la derivada parcial de  $f_j$  con respecto a la  $i$ -ésima componente de  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . A esta matriz se le denomina **Matriz Jacobiana de**  $f$ .

**Notación**

- Se denota por  $D_i f$  al vector

$$D_i f = \begin{bmatrix} D_i f_1 \\ D_i f_2 \\ \vdots \\ D_i f_m \end{bmatrix}$$

- La **norma del supremo de una matriz** viene dada por

$$\|A\| = \max_{v \neq 0} \frac{\|A(v)\|}{\|v\|} = \max_{\|v\|=1} \|A(v)\|$$

- La **norma del mínimo de una matriz** en dimensiones finitas está dada por:

$$m(A) = \inf_{v \neq 0} \frac{\|A(v)\|}{\|v\|} = \max_{\|v\|=1} \|A(v)\|.$$

En el caso en que  $A$  fuese invertible, se tiene:

$$m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$$

## 2. El principio de contracción

DEFINICIÓN 1.1. Para una función  $f$  y un punto  $x$ , la **órbita positiva de  $x$  bajo  $f$**  es

$$\mathcal{O}^+(f, x) = \{x, f(x), f(f(x)), \dots, f^n(x), \dots\},$$

además, si  $f$  es invertible la **órbita de  $x$  bajo  $f$**  viene dada por

$$\mathcal{O} = \{\dots, f^{-1}(f^{-1}(x)), f^{-1}(x), x, f(x), \dots\}.$$

Un **punto fijo** de  $f$  es un elemento  $x$  del dominio que cumple  $f(x) = x$ . Así

$$Fix(f) = \{x \in Dom(f) : f(x) = x\}.$$

Un **punto periódico de  $f$**  es un punto  $x$  tal que  $f^n(x) = x$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ , tal  $n \geq 1$  es llamado un periodo de  $f$ . El más pequeño de estos es llamado **periodo principal**.

EJEMPLO 1.2. Si  $f(x) = -x^3$  en  $\mathbb{R}$ , entonces 0 es el único punto fijo y  $\pm 1$  es una órbita periódica, esto es, 1 y  $-1$  son puntos periódicos con periodo principal 2.

EJEMPLO 1.3. La clase de equivalencia

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} : y \sim x\} = \{y \in \mathbb{R} : y - x \in \mathbb{Z}\} = x + \mathbb{Z}$$

definen el grupo aditivo

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[x] : [x] = x + \mathbb{Z}; x \in \mathbb{R}\}.$$

La biyección

$$\begin{aligned} R_\alpha(x) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x &\mapsto x + \alpha \end{aligned}$$

Satisface  $R_\alpha^m(x) = x + \alpha m$ . Además



- Si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , entonces existe algún  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $R_\alpha^m(x) - x = [0]$ ; es decir cualquier  $x$  es un punto periódico para  $R_\alpha$ .
- Si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , entonces  $R_\alpha^m(x) - x \neq [0], \forall m \in \mathbb{N}$ ; es decir,  $R_\alpha$  no posee puntos periódicos.

OBSERVACIÓN 1.4. Si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  todas las órbitas son densas. Pues para cada  $A \subset S^1$  cerrado e invariante su complemento es vacío.

En efecto, sea  $A = \overline{\mathcal{O}(f, x)}$  la clausura de una órbita,  $A$  es cerrado e invariante. Si  $A \neq S^1$ , su complemento se escribe como unión de intervalos abiertos y disjuntos. En particular para el intervalo de mayor longitud los iterados  $R_\alpha^m(I)$  no se superponen y tienen la misma longitud que  $I$ , además la suma de sus longitudes no puede exceder la longitud de  $S^1$ . Por lo tanto,  $S^1 \setminus A = \emptyset$ . Esta contradicción muestra que  $S^1 = \overline{\mathcal{O}(f, x)}$ ;  $\forall x \in S^1$ .

EJEMPLO 1.5. Sea la función

$$\begin{aligned} E_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

Se tiene que  $E_2^m(x) = 2^m x$ . Para calcular los puntos periódicos de  $E_2$  se hace  $2^m x - x = x(2^m - 1) = 0$ , para que se de esta igualdad, tal  $x$  debe ser de la forma  $x = \frac{\tilde{m}}{2^m - 1}$ .

- Si  $\tilde{m} = 0$ , entonces  $x = 0$ ,
- Si  $\tilde{m} = 1$ , entonces  $x = \frac{1}{2^m - 1}$ ,
- Si  $\tilde{m} = 2$ , entonces  $x = \frac{2}{2^m - 1}$ ,
- Si  $\tilde{m} = 2^m - 2$ , entonces  $x = \frac{2^m - 2}{2^m - 1}$ ,

Luego, por un argumento inductivo se obtiene que hay exactamente  $2^m - 2 + 1 = 2^m - 1$  puntos periódicos.

PROPOSICIÓN 1.6 (Principio de contracción en  $\mathbb{R}$ ). Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado, posiblemente no acotado, y  $f : I \rightarrow I$  una  $\lambda$ -contracción (es decir: existe  $\lambda < 1$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ ). Entonces,  $f$  tiene un único punto fijo  $x_0 \in I$ , y

$$|f^n(x) - x_0| \leq \lambda^n |x - x_0| \text{ para } x \in I, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Así, cada órbita de  $f$  converge exponencialmente a  $x_0$ .

DEMOSTRACIÓN. Aplicando inductivamente la definición de  $\lambda$ -contracción no es difícil ver que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \lambda|x - y| \\ |f^2(x) - f^2(y)| &= |f(f(x)) - f(f(y))| \leq \lambda|f(x) - f(y)| \leq \lambda^2|x - y| \\ |f^3(x) - f^3(y)| &= |f(f^2(x)) - f(f^2(y))| \leq \lambda|f^2(x) - f^2(y)| \leq \lambda^3|x - y|. \end{aligned}$$

Así sucesivamente se obtiene

$$(1) \quad |f^n(x) - f^n(y)| \leq \lambda^n |x - y| \text{ para } x, y \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Para  $x \in I$  y  $m \geq n$  se tiene

$$f^m(x) - f^n(x) = \sum_{k=0}^{m-n-1} (f^{n+k+1}(x) - f^{n+k}(x))$$

Al aplicar la desigualdad triangular se tiene

$$\begin{aligned} |f^m(x) - f^n(x)| &\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} |f^{n+k+1}(x) - f^{n+k}(x)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^{n+k} |f(x) - x| \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |f(x) - x| \end{aligned}$$

Luego para  $n$  suficientemente grande,  $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, es decir  $f^k(x)$  convergerá a algún punto del cerrado  $I$ .

Además por (1) este límite es el mismo para todo  $x$ , pues al hacer  $n \rightarrow \infty$  en  $|f^n(\tilde{x}) - f^n(x)| \leq \lambda^n |x - \tilde{x}|$  se obtiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$  pues  $\lambda^n \rightarrow 0$  ( $\lambda < 1$ ). Por lo tanto el punto fijo de  $f$  será

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x_0,$$

pues para  $\tilde{x} = f(x_0)$ , (1) muestra que

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = f(x_0).$$

□

**PROPOSICIÓN 1.7** (Principio de contracción en  $\mathbb{R}^n$ ). *Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un cerrado y  $f : X \rightarrow X$  una  $\lambda$ -contracción (como en la proposición 1.6). Entonces  $f$  tiene un único punto fijo  $x_0$  y  $d(f^n(x), x_0) \leq \lambda^n d(x, x_0)$  para cada  $x \in X$ , donde  $d(\cdot, \cdot)$  es la distancia euclidiana.*

**DEMOSTRACIÓN.** La prueba es la misma que en  $\mathbb{R}$ , solo que en vez de valor absoluto se trabaja con la norma euclidiana.

Iterando  $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$  se tiene que

$$(2) \quad d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y) \text{ para } x, y \in X \text{ } n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, pues:

$$(3) \quad d(f^m(x), f^n(y)) \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} d(f^{n+k+1}(x), f^{n+k}(y)),$$

luego

$$\begin{aligned} d(f^m(x), f^n(y)) &\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^{n+k} d(f(x), x) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x), x) \end{aligned}$$

para  $m \geq n$ , y  $\lambda^n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto es,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$  existe (pues en  $\mathbb{R}^n$  toda sucesión de Cauchy, es convergente) y esta en  $X$ , puesto que  $X$  es cerrado. Por (2) este límite es el mismo para todo  $x$ . Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ , entonces

$$\begin{aligned} d(x_0, f(x_0)) &\leq d(x_0, f^n(x)) + d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f(x_0)) \\ &= (1 + \lambda)d(x_0, f^n(x)) + \lambda^n d(x, f(x)) \end{aligned}$$

para  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Así  $f(x_0) = x_0$  porque  $d(x_0, f^n(x)) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Al tomar límite cuando  $m \rightarrow \infty$  en (3) se obtiene  $d(f^n(x), x_0) \leq \lambda^n d(x, x_0)$  □

**OBSERVACIÓN 1.8.** Si las funciones coordenadas  $f_j$  de  $f = (f_1, \dots, f_m) : X \rightarrow X$  se comportan como en la Proposición 1.6, es decir,

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq \lambda_j |x - y|, \text{ con } 0 < \lambda_j < 1$$

se obtiene un punto fijo para  $f$  en  $X$ .

**2.1. El teorema de la función inversa.** El teorema de la función inversa dice que, si una función de clase  $C^1$  posee derivada invertible en algún punto, entonces la función es invertible cerca de dicho punto. Es decir si se asume cierta cualidad sobre la parte lineal, esta se verá localmente reflejada en la parte no lineal.

**TEOREMA 1.9. (Teorema de la función inversa)** Sea  $O \subset \mathbb{R}^m$  abierto,  $f : O \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable, y  $Df$  es invertible en  $a \in O$  y continua en  $a$ . Entonces existen vecindades  $U \subset O$  de  $a$  y  $V$  de  $b = f(a)$  tal que  $f : U \rightarrow V$  es una biyección. La inversa  $g : V \rightarrow U$  de  $f$  es diferenciable con  $Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}$ . Además, si  $f$  es  $C^r$ , entonces también lo es su inversa.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $y$  fijo y considere la función

$$\varphi_y(x) = x + Df(a)^{-1}(y - f(x)),$$

definida en  $O$ . Se nota que  $\varphi_y(x) = x$  si y solo si  $f(x) = y$ , es decir el problema se reduce a demostrar que  $\varphi_y$  es una contracción en algún subconjunto  $W$ , pues ello nos dara un punto fijo para  $\varphi_y$ .

Sea  $A = Df(a)$ ,  $\alpha < \frac{\|A^{-1}\|^{-1}}{2}$ , al usar la continuidad de  $Df$  en  $a$  se puede tomar  $\epsilon > 0$  talque  $\|Df(x) - A\| < \alpha \forall x \in \overline{W} = B(a, \epsilon)$ .

Para ver que  $\varphi_y$  es una contracción, se ve la norma de la matriz jacobiana

$$\|D\varphi_y(x)\| = \|I - A^{-1}Df(x)\| = \|A^{-1}(A - Df(x))\| < \|A^{-1}\|\alpha < 1/2 = \lambda,$$

$\forall x \in W$ . Luego se tiene que

$$\|\varphi_y(x) - \varphi_y(x')\| \leq \lambda \|x - x'\|, \quad \forall x \in W,$$

es decir  $\varphi_y(x)$  es una contracción en  $W$ .

Además existe una vecindad  $V$  de  $b$  tal que  $\varphi_y(x)$  es una contracción de  $\overline{W}$   $\forall y \in V$  y tiene un único punto fijo  $g(y) \in W$  (que depende continuamente de  $y$ ).

Sea  $U = g(V) = W \cap f^{-1}(V)$  es abierto, puesto que el determinante de  $Df(x)$  es una función continua y al tomar  $V$  más pequeño (si fuera necesario) se puede asumir que  $Df(x) \neq 0$  en  $U$  y además que  $Df(x)$  es invertible en  $U$ .

Para  $y = f(x) \in V$  se quiere mostrar que  $Dg(y)$  existe y es la inversa de  $B = Df(g(y))$  donde  $B = Df(g(y))$ , para ello se toma  $y + k = f(x + h) \in V$ . Pero

$$g(y + k) - g(y) - B^{-1}k = h - B^{-1}k = -B^{-1}(f(x + h) - f(x) - Bh),$$

además se necesita comparar  $\|k\|$  con  $\|h\|$  (esto es para utilizar la definición de  $Df(x)$ ), esto se puede obtener de la definición de  $\varphi_y(x)$ , en efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\|h\|}{2} &\geq \|\varphi_y(x + h) - \varphi_y(x)\| = \|h + A^{-1}(f(x) - f(x + h))\| \\ &= \|h - A^{-1}k\| \geq \|h\| - \|A^{-1}\| \|k\| \end{aligned}$$

de donde  $\frac{1}{\|k\|} < \frac{1}{\alpha\|h\|}$ . Por lo tanto

$$\frac{\|g(y + k) - g(y) - B^{-1}k\|}{\|k\|} < \frac{\|B^{-1}\|}{\alpha} \frac{\|f(x + h) - f(x) - Bh\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \leq \|k\|/\alpha} 0$$

Lo que prueba que  $Dg(y) = B^{-1}$ .

Finalmente, si  $f \in C^r$  y  $g \in C^k$  para algún  $k < r$ . Entonces  $Df(g(y)) \in C^k$  y también su inversa  $Dg$  que es una matriz dividida en cada entrada por  $\det(A)$ , esto es  $g \in C^{k+1}$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 1.10. El teorema de la función inversa aún es válido sin asumir la continuidad de la derivada, para esto vea [24] y sus referencias.

COROLARIO 1.11. Sea  $O \subset \mathbb{R}^m$  abierto,  $f : O \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $C^1$  con  $Jf(x)$  invertible  $\forall x \in O$ , entonces  $f$  es abierta.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $G \subset O$  un subconjunto abierto de  $O$ , como  $O$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $G$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Se quiere probar que  $f(G)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, sea  $x \in G, \exists r_x > 0$  tal que

$$B(f(x), r_x) = \{y : \|f(x) - y\| < r_x\}$$

está contenido en  $f(G)$ . Para ello se aplica el teorema de la función inversa a la restricción  $f|_G$ . Como  $Jf|_G(x) = Jf(x)$ , entonces existe abiertos  $U$  de  $a$  contenido en  $G$  y un abierto  $V$  de  $f(a)$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $V = f(U)$ .

Luego existe  $r_x > 0$  tal que

$$B(f(x), r_x) \subset f(G)$$

$\square$

En la prueba del teorema de la variedad estable, se necesitará un resultado más preciso sobre las vecindades en las cuales la función es inyectiva. Esto se da en la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 1.12.** *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$ . Además  $x_0 \in U$ , y  $L = Df_{x_0}$  es una aplicación lineal invertible con inversa lineal acotada. Sea  $y_0 = f(x_0)$  y algún  $\beta$  con  $0 < \beta < 1$ . Sea  $r > 0$  tal que:*

- (i)  $\overline{B}(x_0, r) \subset U$ ,
- (ii)  $\|L - Df_x\| \leq m(L)(1 - \beta)$ ,  $\forall x \in \overline{B}(x_0, r)$ .

Entonces

$$f(\overline{B}(x_0, r)) \supset \{y_0\} + L(\overline{B}(0, \beta r)) \supset \overline{B}(y_0, m(L)\beta r).$$

Más aún, cada punto  $y \in \{y_0\} + L(\overline{B}(0, \beta r))$  tiene exactamente una pre-imagen  $x \in \overline{B}(x_0, r)$ ,  $f(x) = y$ , así la función inversa  $g$  es una función de clase  $C^1$  definida

$$\{y_0\} + L(\overline{B}(0, \beta r)) \supset \overline{B}(y_0, m(L)\beta r)$$

hacia  $\overline{B}(x_0, r)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Para la prueba ver página 352 de [14]. □

**2.2. El teorema de la función implícita.** Como una aplicación directa del teorema de la función inversa se obtiene el teorema de la función implícita, que además, es una aplicación indirecta del principio de contracción. Como sucede con el teorema de la función inversa, el teorema de la función implícita transfiere información de la parte lineal de una función a la función en si misma. Sea  $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación lineal, y puede ser escrita como  $A = (A_1, A_2)$ , donde  $A_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si se escoge cierto  $k \in \mathbb{R}^m$  y se quiere encontrar un  $h \in \mathbb{R}^n$  tal que  $A(h, k) = 0$  lo que es lo mismo  $A_1 h + A_2 k = 0$ , y si  $A_1^{-1}$  fuera invertible se tiene

$$A(h, k) = 0 \leftrightarrow h = -A_1^{-1} A_2 k,$$

esto se puede interpretar diciendo que la ecuación  $A(h, k) = 0$  implícitamente define una función  $h = Lk$  tal que  $A(Lk, k) = 0$ . El teorema de la función inversa afirma que si esto es verdad para la parte lineal entonces también lo es para la función en si misma: Bajo algunas hipótesis tales como la existencia de  $A^{-1}$ , la ecuación  $f(x, y) = 0$  implícitamente define una función  $x = g(y)$  tal que  $f(g(y), y) = 0$ .

**TEOREMA 1.13. (Teorema de la función implícita)** *Sea  $O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  un abierto y  $f = (f_1, \dots, f_n) : O \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Si existe  $(a, b) \in O$  tal que  $f(a, b) = 0$*

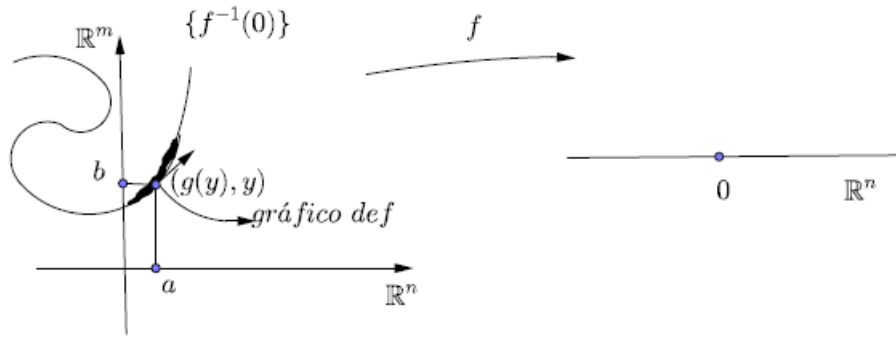
$y$

$$D_1 f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a, b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a, b) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a, b) \end{pmatrix}$$

es invertible, entonces existen vecindades abiertas  $U \subset O$  de  $(a, b)$  y  $V \subset \mathbb{R}^m$  de  $b$  tal que para cada  $y \in V$  existe una única  $x = g(y) \in \mathbb{R}^n$  con  $(x, y) \in U$  y  $f(x, y) = 0$ . Además,  $g$  es de clase  $C^r$  y  $Dg(b) = -(D_1 f(a, b))^{-1} D_2 f(a, b)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $F(x, y) = (f(x, y), y) : O \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . La función es de clase  $C^r$ , ya que  $f$  y la aplicación proyección a la segunda variable lo son. Si  $A = DF(a, b)$ ,

FIGURA 1. Teorema de la función implícita



entonces por la regla de la cadena se tiene  $DF(a, b) = (A(h, k), k)$ , además  $\det(DF(a, b)) = \det(D_1 f(a, b)) \neq 0$ , luego por el teorema 1.9 existen abiertos  $U \subset O$  de  $(a, b)$  y  $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  de  $(0, b)$  tal que  $F : U \rightarrow W$  es invertible con inversa de clase  $C^r$   $G = F^{-1} : W \rightarrow U$ . Para cada  $y \in V := \{y \in \mathbb{R}^m | (0, y) \in W\}$  existe un  $x =: g(y) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(x, y) \in U$  y  $F(x, y) = (0, y)$ , es decir  $f(x, y) = 0$ .

Como  $(g(y), y) = (x, y) = G(0, y)$  por lo tanto  $g$  es clase  $C^r$ , ya que  $G$  lo es.

Para encontrar  $Dg(b)$ , sea  $\gamma(y) := (g(y), y)$ , entonces  $f(\gamma(y)) = 0$ , luego  $Df(\gamma(y))D\gamma(y) = 0$ , de donde al evaluar en  $y = b$  se tiene:

$$D_1 f(a, b)Dg(b) + D_2 f(a, b) = 0$$

□

**2.3. El principio de contracción suave.** Como una consecuencia del teorema de la función implícita resulta el principio de contracción suave. Este principio afirma que los puntos fijos de una función suave varían de manera continua.

TEOREMA 1.14. Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  y existe  $\lambda < 1$  tal que  $d(f(x, y), f(x', y)) \leq \gamma d(x, x')$  para  $x, x' \in X$ . Entonces para cada  $y \in Y$  existe un único punto fijo  $g(y)$  de  $x \mapsto f(x, y)$ , y  $g$  es de clase  $C^r$  en  $\mathbb{R}^m$ .

DEMOSTRACIÓN. La existencia del punto fijo  $g(y)$  sigue de la proposición 1.7. Para ver que  $g$  es de clase  $C^r$  se usa el teorema 1.13 a la función  $F(x, y) = f(x, y) - x$ , pues  $(g(y), y)$  es un cero de  $F(x, y)$ . Además

$$\|D_1 F v\| = \|D_1 f v - v\| \geq \|v\| - \|D_1 f v\| \geq (1 - \lambda)\|v\| > 0$$

para  $v \neq 0$ , entonces  $D_1 F$  es invertible, así  $g$  es de clase  $C^r$  □

PROPOSICIÓN 1.15. Si  $p$  es un punto periódico de periodo  $m$  para una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $C^1$  y la diferencial  $Df_p^m$  no tiene a uno como autovalor (en este caso  $p$  es llamado un punto periódico transversal), entonces para cada función  $g$  de clase  $C^1$ ,  $C^1$ -cerca<sup>1</sup> a  $f$ , existe un único punto periódico para  $g$  de periodo  $m$ .

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración es encontrar un punto fijo de la función  $g^m(x)$ . Encontrar este punto fijo será lo mismo que demostrar que cierta función es una contracción en una vecindad cerrada de  $p$ .

Se introduce coordenadas locales cerca de  $p$  llevando  $p$  al origen, en estas coordenadas  $Df_0^m$  es una matriz. Como no posee a uno como autovalor, la función  $F = f^m - Id$ , definida localmente en esas coordenadas, es localmente invertible (por el teorema de la función inversa).

Sea  $g$  una función  $C^1$ -cerca a  $f$ . Cerca de cero se puede escribir  $g^m = f^m - H$ , donde  $H$  y  $DH$  son pequeñas.

$$x = g^m(x) = (f^m - H)(x) = (F + Id - H)(x)$$

o lo que es equivalente a

$$(F - H)(x) = 0 \text{ ó } x = F^{-1}H(x)$$

Solo resta probar que  $F^{-1}H$  es una contracción en una vecindad de cero.

Como  $F^{-1}$  tiene derivadas acotadas y  $H$  y sus derivadas son pequeñas. Se denota  $\|\cdot\|_0$  la norma  $C^0$ ,  $\|DF^{-1}\|_0$  y

$$\max(\|H\|_0, \|DH\|_0) \leq \epsilon$$

Como  $F(0) = 0$  por la desigualdad del valor medio se tiene

$$\|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(y)\| \leq \epsilon L\|x - y\| \text{ para todo } x, y \text{ en una vecindad de cero.}$$

---

<sup>1</sup> Dos funciones de clase  $C^1$   $f$  y  $g$  son  $C^1$ -cercas si  $|f - g|$  y  $\|Df - Dg\|$  son uniformemente pequeños en  $\mathbb{R}^n$ : existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|Df(x) - Dg(x)\| < \epsilon_0.$$

Además

$$\begin{aligned}\|F^{-1}H(0)\| &\leq L\|H(0)\| \leq \epsilon L \\ \|F^{-1}H(x)\| &\leq \|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(0)\| + \|F^{-1}H(0)\| \leq \epsilon L\|x\| + \epsilon L.\end{aligned}$$

Al considerar  $\epsilon \leq \frac{R}{L(1+R)}$  y  $X = \{x : \|x\| \leq R\}$  se tiene que  $F^{-1}H$  es una contracción que va de  $X$  en sí misma. En efecto

$$\|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(y)\| \leq \epsilon L\|x - y\| \leq \frac{R}{1+R}\|x - y\|.$$

Así por la proposición 1.7,  $F^{-1}H$  tiene un único punto fijo, el cual también es el único punto fijo de  $g^m$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 1.16.** Si  $f$  es una función de clase  $C^1$  con punto fijo hiperbólico  $p$ , esto es  $Df_p$  no tiene autovalores sobre  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$  y  $g$  una función de clase  $C^1$ , cerca a  $f$ , entonces  $g$  tiene un único punto fijo hiperbólico cerca a  $p$  y este es además hiperbólico para  $g$ .

### 3. La variedad estable en el plano

Al gráfico  $c \subset \mathbb{R}^2$  de una función de clase  $C^1$ ,  $\varphi : \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (esto es,  $x$  como una función de  $y$ ) con  $|D\varphi| \leq \gamma$  se le llama una  $\gamma$ -**curva vertical**. Cuando  $\varphi$  tiene a  $y$  dependiendo de  $x$  se le denomina una  $\gamma$ -**curva horizontal**.

**LEMA 1.17.** Sea  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación lineal dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} k_u & 0 \\ 0 & k_s \end{pmatrix}, \quad \text{con } 0 < k_s < k_u.$$

Para  $\gamma > 0$ ,  $\epsilon < \frac{k_u - k_s}{\gamma + 2 + \frac{1}{\gamma}}$  y alguna aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  para la cual ,

$$\|Df - A\|_\infty = \sup\{\|Df(x) - A\| : x \in \mathbb{R}^2\} \leq \epsilon,$$

la inversa de  $f$  preserva  $\gamma$ -curvas verticales, esto es la preimagen de una  $\gamma$ -curva vertical bajo  $f$  es nuevamente una  $\gamma$ -curva vertical.

**DEMOSTRACIÓN.** Para la prueba es conveniente usar la norma de la suma  $\|(x, y)\|_s = |x| + |y|$  en  $\mathbb{R}^2$ , y  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ .

Se desea probar que para una  $\gamma$ -curva vertical dada por  $x = c(y)$ , se puede resolver la ecuación  $f_1(x, y) = c(f_2(x, y))$  o de manera equivalente

$$(4) \quad F(x, y) = f_1(x, y) - c(f_2(x, y)) = 0$$

para una función definida implícitamente  $x = g(y)$  con  $|Dg| \leq \gamma$ . Como la preimagen de la curva es no vacía, existe un  $(a, b)$  para el cual  $F(a, b) = 0$ .

**Se verifica que  $D_1F \neq 0$ .**



En efecto: Puesto que  $\left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} - k_u & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} - k_s \end{pmatrix} \right\| \leq \epsilon$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} - k_u & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} - k_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| &\leq \left\| \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} - k_u, \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right\|_s; \\ &= \left| \frac{\partial f_1}{\partial x} - k_u \right| + \left| \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|; \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

De donde se obtiene que  $\left| \frac{\partial f_1}{\partial x} - k_u \right| \leq \epsilon$  y  $\left| \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| \leq \epsilon$ . De manera similar al evaluar la matriz en  $(0, 1)$  se tiene que  $\left| \frac{\partial f_2}{\partial y} - k_s \right| \leq \epsilon$  y  $\left| \frac{\partial f_1}{\partial y} \right| \leq \epsilon$ .

Además

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| &= \left| -k_u - \left( \frac{\partial f}{\partial x} - k_u \right) \right| \\ &\geq \left| -k_u \right| - \left| \frac{\partial f}{\partial x} - k_u \right| \\ &= k_u - \left| \frac{\partial f}{\partial x} - k_u \right| \\ &\geq k_u - \epsilon. \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} |D_1 F| &= \left| \frac{\partial f_1}{\partial x} - Dc \circ f_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| \\ &\geq \left| \frac{\partial f_1}{\partial x} \right| - \left| Dc \circ f_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \right| \\ &\geq k_u - \epsilon - \gamma \epsilon \\ &= k_u - (1 + \gamma) \epsilon > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema 1.13, se puede resolver al menos localmente la ecuación (4) para una función  $x = g(y)$ . Solo resta probar que  $|Dg| \leq \gamma$ , para ello se tiene que calcular  $|D_2 F|$ .

$$\begin{aligned} |D_2 F| &= \left| \frac{\partial f_1}{\partial y} - Dc \circ f_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial f_1}{\partial y} \right| + \left| Dc \circ f_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} \right| \\ &\leq \epsilon + \gamma(\epsilon + k_s) \\ &= \gamma k_s + \epsilon(\gamma + 1) \end{aligned}$$

Así

$$|Dg| = \left| -\frac{D_2 F}{D_1 F} \right| \leq \frac{\gamma k_s + \epsilon(\gamma + 1)}{k_u - (1 + \gamma) \epsilon},$$

se necesita que

$$\frac{\gamma k_s + \epsilon(\gamma + 1)}{k_u - (1 + \gamma) \epsilon} \leq \gamma$$

lo que es lo mismo a

$$\begin{aligned} \gamma k_s + \epsilon(\gamma + 1) &\leq \gamma(k_u - (1 + \gamma) \epsilon) \\ \epsilon(\gamma + 1) + \epsilon(\gamma + \gamma^2) &\leq \gamma(k_u - k_s) \\ \epsilon(\gamma^2 + 2\gamma + 1) &\leq \gamma(k_u - k_s) \\ \epsilon &\leq \frac{\gamma(k_u - k_s)}{\gamma^2 + 2\gamma + 1}. \end{aligned}$$

Es decir

$$\epsilon \leq \frac{(k_u - k_s)}{\gamma + 2 + \frac{1}{\gamma}},$$

lo que se da como hipótesis, por ende,  $|Dg| \leq \gamma$ .

La función  $g$  está definida en todo  $\mathbb{R}$  no solo localmente, esto se debe a la unicidad de  $g$  dada por el Teorema de la función implícita, (vea el teorema 1.13).  $\square$

La notación  $\|\cdot\|_\infty$  fue dada en el lema anterior.

TEOREMA 1.18. (*Teorema de la variedad estable en el plano.*) Sea la aplicación lineal  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} k_u & 0 \\ 0 & k_s \end{pmatrix} \text{ con } 0 < k_s < 1 < k_u.$$

Existe  $\epsilon > 0$  tal que para cada aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^r$  para la cual  $\|Df - A\|_\infty \leq \epsilon$ , el conjunto de puntos con semiórbitas positivas acotadas es el gráfico de una función de clase  $C^r$ , de  $y$ .

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración es definir una contracción en el espacio  $l^\infty$  de sucesiones acotadas  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  con la norma del supremo

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |x_n|.$$

$l^\infty$  es un espacio métrico completo, para la prueba ver pág 392 de [12].

Sea  $\epsilon > 0$  tal que se pueda aplicar el lema 1.17 a  $f^{-1}$  y  $A^{-1}$  con los papeles intercambiados, esto es,  $f$  preserva  $\gamma$ -curvas horizontales para cierto  $\gamma$ . Para algún  $y \in \mathbb{R}$  se consideran las imágenes sucesivas  $f^n(L_y)$  de la línea  $L_y = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}\}$  todas estas son  $\gamma$ -curvas horizontales.

Dado  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$  existe un único  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $(x, z) \in f^n(L_y)$ , así es posible asociar a  $x$  un  $x' \in \mathbb{R}$  tomando un  $y' \in \mathbb{R}$  tal que  $(x', y') \in f^{n-1}(L_y)$  y  $f(x', y') = (x, y)$ . Con ello se construye la función

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_y : l^\infty &\rightarrow l^\infty \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} &\mapsto (x'_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \end{aligned}$$

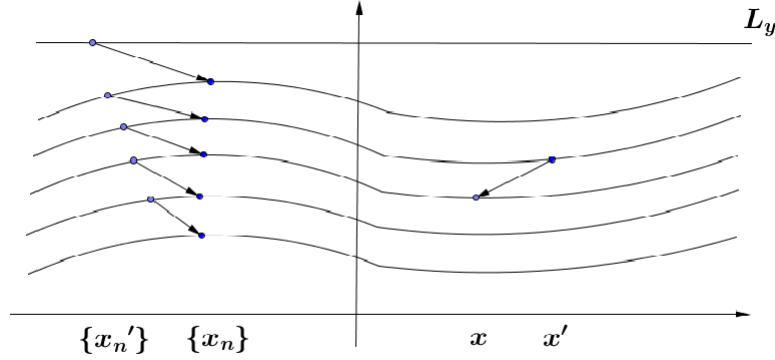
Al agregar en la coordenada  $y$ ,  $y_n$ , se tiene que cada una de estas son secuencias acotadas en el plano, ya que pertenecen a  $l^\infty$ . Puesto que  $f$  expande las  $x$ -coordenadas, entonces  $\mathfrak{F}$  las contrae, siendo así  $\mathfrak{F}$  una contracción.

En efecto: se puede tomar un  $\epsilon$  tal que  $k_u - \epsilon > 1$ , además como  $f$  lleva  $\gamma$ -curvas horizontales en  $\gamma$ -curvas horizontales,  $f$  expande de tal manera que:

$$\begin{aligned} \|f(x'_n, z'_n) - f(y'_n, z'_n)\|_\infty &\geq (k_u - \epsilon) \|x'_n - y'_n\|_\infty \\ \|x_n - y_n\|_\infty &\geq (k_u - \epsilon) \|\mathfrak{F}_y(x_n) - \mathfrak{F}_y(y_n)\|_\infty \\ \|\mathfrak{F}_y(x_n) - \mathfrak{F}_y(y_n)\|_\infty &\leq \frac{1}{k_u - \epsilon} \|x_n - y_n\|_\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto existe un único punto fijo  $(g(y), y)$  que depende continuamente de  $y \in \mathbb{R}$ , esto es el grafo de la función continua  $g(y)$  resulta ser el conjunto de puntos con semiórbitas positivas acotadas.

FIGURA 2. Prueba de la variedad estable



Como  $l^\infty$  es un espacio de Banach se puede hablar de diferenciabilidad, (ver página 400 de [12]), y puesto que  $f$  y las curvas  $f^n(L_y)$  son de clase  $C^r$  implica que  $\mathcal{F}$  es de clase  $C^r$  nuevamente por el teorema 1.13 se tiene que  $g$  es  $C^r$ .  $\square$

#### 4. Perturbación de aplicaciones lineales hiperbólicas.

Sea  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ , además la parte lineal de  $F$  cuando se restringe a  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  es una contracción y cuando se restringe a  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}$  es una expansión, entonces si fuese posible controlar el resto de la expansión de Taylor, es posible hacer que  $F$  y su parte lineal sean topológicamente conjugados.

**TEOREMA 1.19.** (*Teorema del punto fijo hiperbólico*) Sean  $0 < k_s < 1 < k_u$ ,  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación lineal tal que:

- $A|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}}$  es una  $k_s$ -contracción.
- $A^{-1}|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}}$  es una  $\frac{1}{k_u}$ -contracción.

Si  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación tal que  $f = F - A$  es acotada y

$$\text{Lip}(f) \leq \epsilon := \min\{1 - k_s, 1 - k_u^{-1}\}.$$

Entonces  $F$  tiene un único punto fijo  $p$  en  $B\left(0, \frac{\|F(0)\|}{\epsilon - \text{Lip}(f)}\right)$ , la bola de centro en 0 y radio  $\frac{\|F(0)\|}{\epsilon - \text{Lip}(f)} > 0$ .

**DEMOSTRACIÓN.** La idea de la demostración es probar que  $F$  es una contracción para ello se necesita estimar  $\|A(x)\|$ , con  $x = v + w$  donde  $w \in \mathbb{R}^{n-m}$  y  $v \in \mathbb{R}^m$ , (i.e  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ ). Puesto que  $A$  es lineal  $A(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \|A(v)\| &= \|A(v) - A(0)\| \leq k_s \|v\| \\ \|A(w)\| &= \|A(w) - A(0)\| \leq \frac{1}{k_u} \|w\| \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\|A(x)\| &= \|A(v+w)\| = \|A(v) + A(w)\| \\
&\leq \|A(v)\| + \|A(w)\| \\
&\leq k_s \|v\| + \frac{1}{k_u} \|w\| \\
&\leq \max\{k_s, \frac{1}{k_u}\} \|x\|.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(y)\| &= \|f(x) + A(x) - f(y) - A(y)\| \\
&\leq \|f(x) - f(y)\| + \|A(x) - A(y)\| \\
&\leq \text{Lip}(f) \|x - y\| + \max\{k_s, \frac{1}{k_u}\} \|x - y\| \\
&= (\text{Lip}(f) + \max\{k_s, \frac{1}{k_u}\}) \|x - y\| \\
&\leq (\epsilon + \max\{k_s, \frac{1}{k_u}\}) \|x - y\|
\end{aligned}$$

puesto que  $\epsilon + \max\{k_s, \frac{1}{k_u}\} < 1$  se tiene que  $F$  es una contracción, por lo tanto por la proposición 1.7 se tiene que  $F$  posee un único punto fijo  $p$ . Además

$$\begin{aligned}
\|F(x)\| &\leq \|F(x) - F(0)\| + \|F(0)\| \\
&\leq \|x\|(\epsilon + \max\{k_s, \frac{1}{k_u}\}) + \|F(0)\| \\
&= 2\epsilon \|x\| + \|F(0)\|
\end{aligned}$$

Es decir:

$$(5) \quad \|F(x)\| \leq 2\epsilon \|x\| + \|F(0)\|.$$

Sea  $M > 0$  tal que  $\|x\| \leq M\|F(0)\|$ , de la ecuación (5) se obtiene:

$$(6) \quad \|F(x)\| \leq (2\epsilon M + 1)\|F(0)\|,$$

al evaluar esta última desigualdad en el punto fijo  $x = p$  resulta:

$$(7) \quad \|p\| \leq \|F(0)\|(2\epsilon M + 1),$$

como se desea que  $\|p\| \leq \frac{\|F(0)\|}{\epsilon - \text{Lip}(f)}$ , para esto bastará tomar  $M < \frac{1}{2\epsilon}(\frac{1}{\epsilon - \text{Lip}(f)} - 1)$ .  
note que  $M > 0$  por la forma como se tomó  $\epsilon$ .  $\square$

**TEOREMA 1.20.** *Suponga  $0 < k_s < 1 < k_u$  y  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación lineal tal que:*

- $A|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}}$  es una  $k_s$ -contracción.
- $A^{-1}|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}}$  es una  $\frac{1}{k_u}$ -contracción.

*Suponga que  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación tal que  $f = F - A$  es acotada y*

$$\text{Lip}(f) \leq \epsilon := \min\{\|A^{-1}\|, 1 - k_s, 1 - k_u^{-1}\}.$$

*Entonces existe un único homeomorfismo  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que*

$$h = H - \text{Id} \text{ es acotada y } H \circ A \circ H^{-1} = F.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero se muestra que  $F$  es un homeomorfismo. Como

$$y = F(x) \Leftrightarrow y = f(x) + A(x) \Leftrightarrow y - f(x) = A(x) \Leftrightarrow x = A^{-1}(y - f(x))$$

$A^{-1}(y - f(x))$  es una contracción en  $x$ .

En efecto:

$$\begin{aligned} \|A^{-1}(y - f(x_1)) - A^{-1}(y - f(x_2))\| &= \|A^{-1}(f(x_2)) - A^{-1}(f(x_1))\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|f(x_2) - f(x_1)\| \\ &\leq \text{Lip}(f) \|A^{-1}\| \|x_2 - x_1\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|A^{-1}\|^{-1} \|x_2 - x_1\| \\ &\leq C \|x_2 - x_1\| \text{ donde } C < 1. \end{aligned}$$

Luego  $A^{-1}(y - f(x))$  es una contracción, entonces existe un único  $x$  talque  $x = A^{-1}(y - f(x))$ , se observa que  $F^{-1}(y) = A^{-1}(y - f(x))$ , pues  $F^{-1}(F(x)) = A^{-1}(F(x) - f(x)) = A^{-1}(A(x)) = x$ , entonces  $F^{-1}$  es continua. Por lo tanto  $F$  es un homeomorfismo.

Para hacer la prueba mas simétrica se introduce  $G = A + g$  con  $g$  acotada y  $\text{Lip}(g) \leq \epsilon$ . El primer paso es mostrar que existe una única función continua acotada  $h$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$(8) \quad F \circ (Id + h) = (Id + h) \circ G,$$

o de manera equivalente

$$A \circ h \circ G^{-1} + f \circ (Id + h) \circ G^{-1} + A \circ G^{-1} - Id = h.$$

Para este propósito se considera  $E$  el espacio de funciones continuas acotadas de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ , denotado por,  $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , puesto que  $A|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}}$  es una  $k_s$ -contracción y  $A^{-1}|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}}$  es una  $\frac{1}{k_u}$ -contracción,  $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  queda dividido en  $E_s = C_b^0(\mathbb{R}^m \times \{0\}, \mathbb{R}^m \times \{0\})$  y  $E_u = C_b^0(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}, \{0\} \times \mathbb{R}^{n-m})$ . Es decir  $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = E_s \oplus E_u$ .

Se define las aplicaciones  $\mathcal{A} : E \rightarrow E$  y  $\mathcal{F} : E \rightarrow E$  dadas por:

$$\mathcal{A}(h) = A \circ h \circ G^{-1} \text{ y } \mathcal{F}(h) = f \circ (Id + h) \circ G^{-1} + A \circ G^{-1} - Id$$

$\mathcal{A}$  preserva  $E_s$  y  $E_u$ ,  $\mathcal{A}|_{E_s}$  es una  $k_s$  contracción, y  $\mathcal{A}^{-1}|_{E_u}$  es una  $k_u^{-1}$  contracción. Puesto que  $\text{Lip}(\mathcal{F}) \leq \text{Lip}(f)$ , entonces por el teorema del punto fijo hiperbólico (ver teorema 1.19) se tiene que  $\mathcal{A} + \mathcal{F}$  tiene un único punto fijo en  $E$ . Esto brinda la función  $h$  deseada.

Resta probar que  $H$  es un homeomorfismo, aquí es donde la simetría ayuda. Esto produce un  $\tilde{h}$  tal que

$$G \circ (Id + \tilde{h}) = (Id + \tilde{h}) \circ F$$

combinando esto con (8) se obtiene las relaciones

$$\begin{aligned} G \circ (Id + \tilde{h}) \circ (Id + h) &= (Id + \tilde{h}) \circ (Id + h) \circ G \\ F \circ (Id + h) \circ (Id + \tilde{h}) &= (Id + h) \circ (Id + \tilde{h}) \circ F \end{aligned}$$

puesto que se ha probado la unicidad de la conjugación y la identidad conjuja  $F$  con  $F$  y  $G$  con  $G$ . Se tiene que

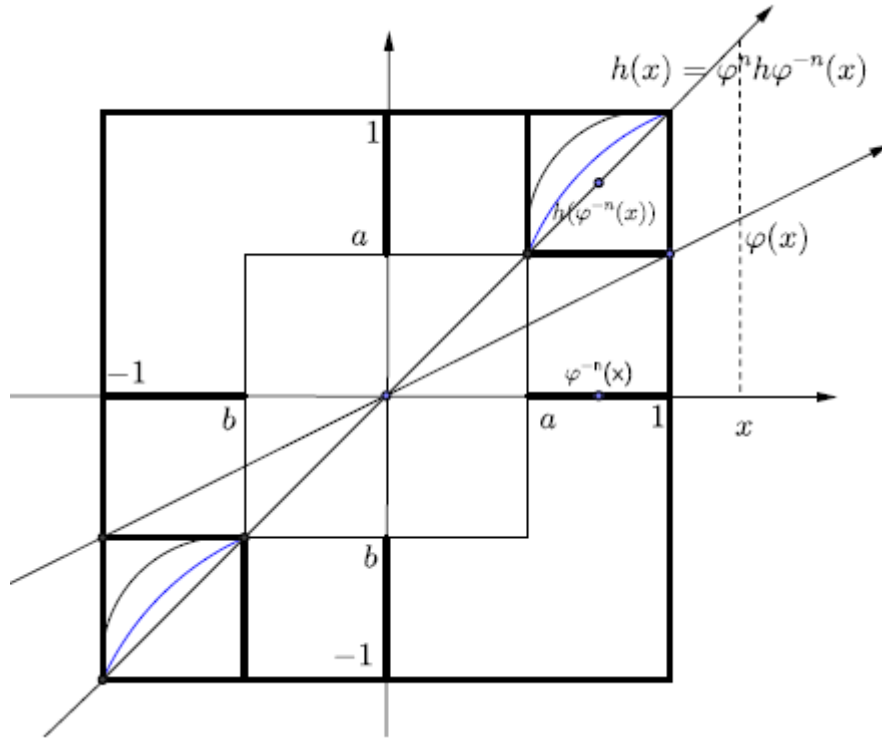
$$(Id + \tilde{h}) \circ (Id + h) = (Id + h) \circ (Id + \tilde{h})$$

lo que en particular prueba que  $H = (Id + h)$  es un homemorfismo.  $\square$

OBSERVACIÓN 1.21. La unicidad del homeomorfismo  $H$  se da por  $H - Id$  es acotada, al retirar esta hipótesis es posible encontrar una infinidad de homeomorfismos  $H$  que satisfacen la igualdad requerida.

Para ello se tiene el siguiente ejemplo, sea una contracción  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\varphi(0) = 0$  y supongamos que  $\varphi(1) = a > 0$  y  $\varphi(-1) = b < 0$ . Ahora sea un homeomorfismo  $h : [-1, b] \cup [a, 1] \rightarrow [-1, b] \cup [a, 1]$  con  $h(-1) = -1$ ,  $h(b) = b$ ,  $h(a) = a$ ,  $h(1) = 1$  (como se ve en la figura ??) se extiende  $h$  a toda la recta colocando  $h(0) = 0$  y  $h(x) = \varphi^n h \varphi^{-n}(x)$  donde  $n$  es tal que  $\varphi^{-n}(x) \in [-1, b] \cup [a, 1]$ , así se tiene tantas soluciones de la ecuación  $h\varphi = \varphi h$  como tantos homemorfismos existan de  $[-1, b] \cup [a, 1]$  en sí mismo.

FIGURA 3. Muchos homemorfismos



## 5. Notación y enunciado del teorema de Grobman– Hartman

La siguiente definición será necesaria.

DEFINICIÓN 1.22. Para cada aplicación lineal  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se definen los subespacios

$$\mathbb{E}_A^u = \text{span}\{v^u \in \mathbb{R}^n : v^u \text{ es un } \gamma_u\text{- autovector generalizado de } A \text{ y } |\gamma_u| > 1\},$$

y

$$\mathbb{E}_A^s = \text{span}\{v^s \in \mathbb{R}^n : v^s \text{ es un } \gamma_s\text{- autovector generalizado de } A \text{ y } |\gamma_u| < 1\}.$$

Con esto, la aplicación lineal  $A$  es **hiperbólica** si

$$(9) \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s, \text{ donde } \mathbb{E}_A^\sigma = \mathbb{E}^\sigma \text{ para } \sigma = u, v.$$

Además, el punto fijo  $f(p) = p$  de una función es **hiperbólico** si la derivada  $Df_p$  es una aplicación lineal hiperbólica, es decir  $Df_p$  satisface (9).

TEOREMA 1.23 (Teorema de Grobman-Hartman). *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Si  $p \in \mathbb{R}^n$  es un punto fijo hiperbólico, entonces existen vecindades  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $0$ , y un homeomorfismo  $h : V \rightarrow U$  tal que*

$$f(h(x)) = h(Ax), \quad \forall x \in V, \text{ donde } A = Df_p.$$

Para probar el teorema es necesario brindar el lenguaje adecuado. Por ejemplo para los espacios de Banach  $(\mathbb{E}_i, |\cdot|_i)$  el conjunto

$$L(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2) = \{A : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2 : A \text{ es lineal y acotada}\},$$

también tiene estructura de espacio de Banach cuando su norma se define como:

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|Av|_2}{|v|_1},$$

donde  $|\cdot|_i$  es la norma de  $\mathbb{E}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Observe que si cada  $\mathbb{E}_i$  es un espacio euclidiano,  $\|A\|$  es finito (lo cual equivale a decir que el operador  $A$  es acotado) y por lo tanto continuo. Análogamente, es posible definir la **norma del mínimo**:

$$m(A) = \inf_{v \neq 0} \frac{|Av|_2}{|v|_1},$$

para lo cual se cumple  $m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$ , cuando  $A$  es invertible.

OBSERVACIÓN 1.24. *Si  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación lineal hiperbólica e invertible,  $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s$ , entonces cuando*

$$0 < \max\{|\lambda|, |\lambda^{-1}| : \lambda \text{ es autovalor de } A\} < a < 1,$$

*se tiene*

$$\|A|_{\mathbb{E}^s}\| \leq a \quad y \quad \|(A|_{\mathbb{E}^u})^{-1}\| \leq a,$$

*pues*

$$m(A^{-1}) \leq |\lambda|^{-1} \leq \|A^{-1}\|, \forall \lambda \text{ autovalor de } A.$$

En efecto, si  $\lambda$  es un autovalor real de  $A$  se tiene que  $A.v = \lambda.v$ , luego  $|A.v| = |\lambda||v|$ , esto implica que

$$(10) \quad \frac{|A.v|}{|v|} = |\lambda|,$$

de donde

$$\sup_{v \neq 0} \frac{|A.v|}{|v|} \geq |\lambda|, \text{ entonces } \|A\| \geq |\lambda|.$$

Sin embargo, si en (10) se toma el ínfimo de los  $v$ 's distintos de cero, se tiene:

$$\inf_{v \neq 0} \frac{|A.v|}{|v|} \leq |\lambda|, \text{ entonces } m(A) \leq |\lambda|.$$

También se observa que si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$ , entonces  $\lambda^{-1}$  es un autovalor de  $A^{-1}$ . Para esto basta observar lo siguiente:

$$Av = \lambda v \Rightarrow A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \Rightarrow \lambda^{-1}v = A^{-1}v,$$

de esto resulta  $m(A^{-1}) \leq |\lambda|^{-1} \leq \|A^{-1}\|$ .

EJEMPLO 1.25. ( $C_b^0(\mathbb{R}^n)$  es un espacio de Banach) Sea  $C_b^0(\mathbb{R}^n) = C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  el espacio de todas las funciones continuas y acotadas<sup>2</sup> de  $\mathbb{R}^n$  en si mismo. La topología  $C^0$  del supremo en  $C_b^0(\mathbb{R}^n)$  viene dada por:

$$\|v_1 - v_2\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |v_1(x) - v_2(x)|,$$

con esta norma  $C_b^0(\mathbb{R}^n)$  es un espacio métrico completo, es decir, un espacio de Banach. Además

$$C_b^1(\mathbb{R}^n) = \{g \in C_b^0(\mathbb{R}^n) : g \text{ es de clase } C^1 \text{ y } \|Dg_a\| \leq C\},$$

donde  $C$  es una constante positiva independiente de  $a$ . También es un espacio de Banach si

$$\|g\|_1 = \|g\|_0 + \|Dg_a\|_0$$

EJEMPLO 1.26. Si  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación lineal hiperbólica, entonces la función

$$\begin{aligned} A_{\sharp} : C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \\ v &\mapsto A \circ v \circ A^{-1} \end{aligned}$$

es un operador lineal. Con esta definición de  $A_{\sharp}$ , se tiene en  $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  el siguiente operador lineal

$$(11) \quad \mathcal{L}(v) = (id - A_{\sharp})v = v - A \circ v \circ A^{-1}.$$

---

<sup>2</sup>Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es llamada **acotada** si existe una constante uniforme  $C > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$



Puesto que  $A$  es hiperbólica, entonces existe una descomposición de  $\mathbb{R}^n$  como:  $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s$ , (ver definición 1.22), esta induce una descomposición del espacio de funciones continuas acotadas,

$$C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^u) \oplus C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^s).$$

Luego es posible restringir  $A_\#$  a  $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^\sigma)$  para  $\sigma = u, s$ , esta restricción se denota por:

$$A_\#^\sigma = A_\#|_{C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^\sigma)}, \quad \mathcal{L}^\sigma = \mathcal{L}|_{C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^\sigma)}.$$

Como en  $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s$ , la norma del máximo permite definir la norma

$$\|\mathcal{L}\| = \max\{\|\mathcal{L}^u\|, \|\mathcal{L}^s\|\},$$

de  $\mathcal{L} : C_b^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$  satisfaciendo (11).

**5.1. Proposición principal.** Esta proposición afirma que existe una conjugación topológica entre  $A + g$  y  $A$ ; la conjugación encontrada es una perturbación de la identidad y depende de la hiperbolicidad de  $A$ . Note que  $A$  es una aplicación lineal hiperbólica invertible que en principio no tiene relación con  $f$ . En el teorema de Grobman-Hartman (ver teorema 1.23),  $A$  debe ser la parte lineal de  $f$ .

**PROPOSICIÓN 1.27 (Proposición principal).** *Sea  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  una aplicación lineal hiperbólica invertible. Entonces se cumple lo siguiente*

a) *Existe  $a \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$  tal que:*

$$(12) \quad 0 < \max\{|\lambda|, |\lambda^{-1}| : \lambda \text{ es autovalor de } A\} < a < 1.$$

b) *Si  $\epsilon > 0$  tal que*

$$(13) \quad 0 < \epsilon < \min \left\{ 1 - a, \quad m(A) = \inf_{v \neq 0} \frac{|Av|_2}{|v|_1} \right\}$$

*Entonces, por cada  $g \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$  con  $\text{Lip}(g) < \epsilon$  existe un homeomorfismo  $id + v$  con  $v \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$  tal que:*

$$(A + g) \circ (id + v) = (id + v) \circ A.$$

**5.1.1. Idea y motivación de la demostración.** La existencia de la conjugación puede ser probada por el teorema de la función implícita, presentado en el teorema 1.13. Para  $g \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ , se desea encontrar una aplicación  $id + v$  que conjugue  $A + g$  con  $A$ , es decir:

$$\begin{aligned} (A + g) \circ (id + v) &= (id + v) \circ A, \\ (A + g) \circ (id + v) \circ A^{-1} &= (id + v), \\ (id + v) - (A + g) \circ (id + v) \circ A^{-1} &= 0, \\ v - A \circ v \circ A^{-1} - g \circ (id + v) \circ A^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, dado  $g$  se quiere encontrar  $v_g$  tal que  $\Psi(g, v_g) = 0$ , donde  $\Psi : C_b^1(\mathbb{R}^n) \times C_b^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$  definida por

$$\Psi(g, v) = v - A \circ v \circ A^{-1} - g \circ (id + v) \circ A^{-1}.$$

Pero  $\Psi(0, 0) = 0$ , por eso se podría aplicar el teorema de la función implícita en una vecindad de  $(0, 0) \in C_b^1(\mathbb{R}^n) \times C_b^0(\mathbb{R}^n)$  y encontrar  $v_g \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\Psi(g, v_g) = 0$ . Para esto bastaría ver que la derivada parcial con respecto a la segunda variable:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)_{(0,0)} \hat{v} = \hat{v} - A \circ \hat{v} \circ A^{-1} \equiv \mathcal{L}(\hat{v}) \quad (\text{vea ejemplo 1,26})$$

sea un isomorfismo. Sin embargo, la solución de la ecuación  $\Psi(g, v) = 0$  la encontraremos como un punto fijo de la función  $\Theta : C_b^0(\mathbb{R}^n) \times C_b^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$  dada por:

$$\Theta(g, v) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}v - \Psi(g, v)\}$$

(Las funciones  $g$  requeridas necesitan ser acotadas para que  $\Theta$  tome sus valores en  $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ ). Luego de probar que  $\mathcal{L}$  es un isomorfismo usando el lema 1.28, probaremos que  $\|\mathcal{L}\|Lip(g) < 1$ , por lo tanto  $\Theta(g, \cdot)$  es una contracción en  $C_b^0(\mathbb{R}^n)$  con un único punto fijo  $v_g$ . Así la existencia de la conjugación  $id + v_g$  estará probada. Solo restará probar que esta es en efecto un homeomorfismo, para ello se denota por  $h_f = id + v_g$ , como  $f = A + g$  se sigue que  $h_f = f \circ h_f \circ A \circ h_f \circ A = f \circ h_f$ . Las partes (b) y (c) del lema 1.29 muestran que  $h_f$  es inyectiva y sobreyectiva respectivamente. Por lo tanto  $h_f$  es el homeomorfismo deseado.

## 6. Demostración de la proposición principal

La parte (a) se obtiene de una aplicación directa de la definición de  $A$  pues su espectro es discreto y no se incluye al cero. A partir de ahora solo consideramos la demostración de la parte (b), para eso se usa que en cada  $\mathbb{E}^\sigma$ ,  $\sigma = u, s$  se cumple:

$$\|(A|\mathbb{E}^u)^{-1}\| \leq a < 1 \text{ y } \|A|\mathbb{E}^s\| \leq a < 1,$$

donde  $0 < a < 1$  viene dado por (12) (ver la observación 1.24). Sobre  $\mathbb{R}^n$  se define la norma del máximo entre las normas en  $\mathbb{E}^u$  y  $\mathbb{E}^s$ , es decir si  $v = v^u + v^s$  con  $v^\sigma \in \mathbb{E}^\sigma$  para  $\sigma = u, s$ , se escribe

$$|v| = \max\{|v^u|, |v^s|\}.$$

LEMA 1.28. Sea  $\mathbb{E}$  un espacio de Banach y  $G, B \in L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ .

a) Si  $\|G\| \leq a < 1$ , entonces  $id - G$  es un isomorfismo y

$$\|(id - G)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - a}.$$

b) Si  $B$  es un isomorfismo con  $\|B^{-1}\| \leq a < 1$ , entonces  $B - id$  es un isomorfismo y

$$\|(B - id)^{-1}\| \leq \frac{a}{1 - a}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar a), por cada  $y$  se quiere encontrar  $x$  tal que  $x - G(x) = y$  lo que es lo mismo a  $x = G(x) + y$ . Este  $x$  puede ser hallado como punto fijo de la aplicación  $u_y : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  definida por  $u_y(x) = G(x) + y$ , pues  $u_y$  es una contracción, en efecto:

$$|u_y(x_1) - u_y(x_2)| = |G(x_1 - x_2)| \leq a|x_1 - x_2|.$$

Entonces por el teorema 1.14 existe un único punto fijo  $x_y$  tal que

$$x_y = u_y(x_y) = y + G(x_y).$$

La existencia de  $x_y$  muestra que  $(id - G)$  es sobre y la unicidad muestra que  $(id - G)$  es inyectiva, luego  $(id - G)$  es un isomorfismo.

Se nota que si  $x = (id - G)^{-1}(y)$ , entonces  $x - G(x) = y$  con esto se tiene que:

$$\begin{aligned} |y| &= |x - G(x)|, \\ &\geq |x| - a|x|, \\ &= |x|(1 - a). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} |x| &\leq \frac{|y|}{(1 - a)}, \\ \frac{|x|}{|y|} &\leq \frac{1}{(1 - a)}, \\ \frac{(id - G)^{-1}(y)}{|y|} &\leq \frac{1}{(1 - a)}, \\ \|(id - G)^{-1}\| &\leq \frac{1}{(1 - a)}. \end{aligned}$$

Esto es  $(id - G)^{-1}$  es una aplicación lineal acotada y  $\|(id - G)^{-1}\| \leq \frac{1}{(1 - a)}$ . Por lo tanto, a) es verdad.

Para probar b) se observa que el ítem a) muestra que  $id - B^{-1}$  es un isomorfismo, entonces  $B^{-1} - id$  también lo es. Desde que

$$B - id = B(id - B^{-1})$$

es decir es la composición de dos isomorfismos, luego  $B - id$  es un isomorfismo. Su inversa  $(B - id)^{-1} = (id - B^{-1})^{-1}B^{-1}$ , entonces  $\|(B - id)^{-1}\| \leq (\frac{1}{1 - a})a$ . Por lo tanto b) es verdad y se concluye la prueba del lema.  $\square$

**6.1. Demostración de la proposición 1.27.** Se quiere demostrar que el operador definido en el ejemplo 1.26, dado por  $\mathcal{L}^\sigma = id - A_\#^\sigma$ , es invertible (vea sección 5.1.1). Se escribe  $C_b^0(E^\sigma)$  en vez de  $C_b^0(\mathbb{R}^n, E^\sigma)$ . La norma de  $A_\#^\sigma$  viene dada por

$$\|A_\#^\sigma\| = \sup_{v \in C_b^0(E^\sigma) - \{0\}} \frac{\|A_\#^\sigma v\|_0}{\|v\|_0}.$$

Si  $v \in C_b^0(E^s)$ ,

$$\begin{aligned}\|A_\#^s\| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |A \circ v \circ A^{-1}x|, \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |Av(y)|, \\ &\leq a\|v\|_0,\end{aligned}$$

luego  $\|A_\#^s\| \leq a$ . Por el lema 1.28(a),  $\mathcal{L}^s = id - A_\#^s$  es invertible con  $\|(\mathcal{L}^s)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$ .

Si  $v \in C_b^0(E^u)$ ,

$$\begin{aligned}\|(A_\#^u)^{-1}\| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(A^{-1} \circ v \circ A)x|, \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |A^{-1}v(y)|, \\ &\leq a\|v\|_0,\end{aligned}$$

luego  $\|(A_\#^u)^{-1}\| \leq a$ . Por el lema 1.28(b),  $\mathcal{L}^u = id - A_\#^u$  es invertible con  $\|(\mathcal{L}^u)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$ .

Como la norma en  $\mathbb{R}^n$  viene dada por el máximo de las normas en  $E^u$  y  $E^s$ , se obtiene  $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$ .

El problema de encontrar un cero de  $\Psi$  será reemplazado por encontrar un punto fijo para la función  $\Theta : C_b^1(\mathbb{R}^n) \times C_b^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$  dada por

$$\begin{aligned}\Theta(g, v) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}v - \Psi(g, v)\}, \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{v - A_\#(v) - v + A_\# + g \circ (id + v) \circ A^{-1}\}, \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{g \circ (id + v) \circ A^{-1}\}.\end{aligned}$$

$\Theta(g, v)$  es una contracción en la segunda variable.

En efecto:

$$\begin{aligned}\|\Theta(g, v_1) - \Theta(g, v_2)\|_0 &\leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g \circ (id + v_1) \circ A^{-1}x - g \circ (id + v_2) \circ A^{-1}x| \\ &\leq \frac{1}{1-a} Lip(g) \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |v_1(y) - v_2(y)| \\ &\leq \frac{1}{1-a} Lip(g) \|v_1 - v_2\|_0\end{aligned}$$

Para un  $g$  fijo con  $Lip(g) < \epsilon$  y  $\epsilon$  dado en (13), se cumple que  $\frac{1}{1-a} Lip(g) < 1$  y por eso  $\Theta(g, \cdot)$  es una contracción en  $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ , luego por el teorema 1.14 se tiene que  $\theta$  tiene un punto fijo  $v_g$  tal que  $\Theta(g, v_g) = v_g$  esto muestra que existe un cero para  $\Psi$  tal que  $\Psi(g, v_g) = 0$ . Con este punto fijo  $v_g$  se obtiene

$$h_f = id + v_g$$

la cual satisface:

$$(14) \quad (A + g) \circ h_f = h_f \circ A.$$

Para concluir, resta mostrar que  $h = h_f$  es un homeomorfismo, esto se obtiene del siguiente lema.

LEMA 1.29. Sea  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  una aplicación lineal hiperbólica invertible y  $a > 0$  tal que

$$\max\{\|A_{\sharp}^s\|, \|(A_{\sharp}^u)^{-1}\|\} \leq a < 1.$$

Si  $g \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$  y  $Lip(g) < 1 - a$ , entonces la aplicación  $h_f = id + v_g$ , que satisface (14), se cumple lo siguiente:

- a) La función  $f = A + g$  es inyectiva y sobreyectiva entonces es un difeomorfismo.
- b) La función  $h = h_f$  es inyectiva.
- c) La función  $h = h_f$  es sobreyectiva, entonces es un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$ .

DEMOSTRACIÓN. Para probar a) se asume que  $f(x) = f(y)$ , entonces

$$0 = f(x) - f(y) = A(x - y) + g(x) - g(y).$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 &= |A(x - y) + g(x) - g(y)|, \\ &\geq m(A)|x - y| - Lip(g)|x - y|, \\ &= (m(A) - Lip(g))|x - y|, \\ &\geq (m(A) - \epsilon)|x - y|, \end{aligned}$$

donde  $\epsilon$  fue elegido en (13), se tiene que  $m(A) - Lip(g) > 0$ . De esto se concluye que  $|x - y| \leq 0$ .

Por lo tanto  $x = y$  (vea la demostración del lema 1.17). Lo que muestra que  $f$  es inyectiva.

Por otro lado,  $f$  es sobreyectiva porque está a una distancia acotada de la aplicación lineal  $A$ , la cual es inyectiva y sobreyectiva. La prueba de esto se da en el lema 1.30 a). Luego a) es verdad.

La demostración de b) es dividida en dos partes:

- b.1) Si  $h(x) = h(y)$ , entonces  $h(A^n x) = h(A^n y)$ .
- b.2) Sean  $x = x^u + x^s$  e  $y = y^u + y^s$ , donde  $x^\sigma \in \mathbb{E}^\sigma$  para  $\sigma \in \{u, s\}$ . Si  $h(x) = h(y)$ , entonces  $x = y$

Para probar b.1) se tiene que  $h(x) = h(y)$ , además  $h$  satisface (14), es decir,  $f \circ h = h \circ A$ , esto implica:

$$h \circ A(x) = f \circ h(x) = f \circ h(y) = h \circ A(y)$$

Además

$$\begin{aligned} h(A^2 x) &= (h \circ A) \circ Ax \\ &= (f \circ h) \circ Ax \\ &= f \circ (h \circ A)(x) \\ &= f \circ (h \circ A)(y) \\ &= (f \circ h) \circ Ay \\ &= (h \circ A) \circ Ay \\ &= h(A^2 y) \end{aligned}$$

Así sucesivamente se obtiene  $h(A^n x) = h(A^n y)$  para  $n > 0$ . Además, como  $f$  es invertible y  $f^{-1} \circ h = h \circ A^{-1}$  de manera análoga se prueba que  $h(A^n x) = h(A^n y)$  para  $n \leq 0$ , luego

$$h(A^n x) = h(A^n y), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ si } h(x) = h(y).$$

Por lo tanto b.1) es verdad.

Para probar b.2) se escribe  $x$  e  $y$  como sigue:  $x = x^u + x^s$ ,  $y = y^u + y^s$  con  $x^s, y^s \in \mathbb{E}^s$ .

La demostración es dada por contradicción, para esto se asume que  $x \neq y$ , entonces  $x^u \neq y^u$  ó  $x^s \neq y^s$ .

Si  $x^u \neq y^u$ , entonces  $|A^j x^u - A^j y^u| \geq a^{-j} |x^u - y^u|$ . Se puede tomar un  $j \geq 0$  con  $|A^j x^u - A^j y^u| \geq 3\|h - id\|_0 > 0$  (Si  $h$  fuera la identidad,  $h$  sería un homeomorfismo y no habría nada que probar). Entonces al llamar  $x_j = A^j(x)$  y  $y_j = A^j(y)$ ,

$$h(x_j) - h(y_j) = x_j - y_j + (h - id)(x_j) - (h - id)(y_j),$$

pero por b.1) se tiene que  $h(x_j) = h(y_j)$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &= |h(x_j) - h(y_j)| \\ &\geq |x_j^u - y_j^u| - |(h - id)(x_j)| - |(h - id)(y_j)| \\ &\geq 3\|h - id\|_0 - \|h - id\|_0 - \|h - id\|_0 \\ &\geq \|h - id\|_0 > 0 \end{aligned}$$

esto es imposible para  $x^u \neq y^u$ , por lo tanto  $x^u = y^u$ . De manera similar al usar iteraciones negativas, se prueba que  $x^s = y^s$ . Esto prueba b.2).

En b.2) se ha probado que  $h$  es inyectiva. Por lo tanto b) es verdadero.

Para probar c), es decir la sobreyectividad de  $h$ , se usa el hecho de que la distancia de  $h$  a la identidad es acotada: sea  $b = \|h - id\|_0$ .

Se usa las notaciones  $B_r(0) = B(0, r)$  la bola abierta de centro en el origen y radio  $r$ ,  $\overline{B}_r(0)$  es la bola cerrada de centro en el origen y radio  $r$  y  $S_r(0) = \overline{B}_r(0) \setminus B_r(0)$  la esfera centrada en el origen de radio  $r$ . Se nota que:

- Para  $x \in \overline{B}_r(0)$ ,  $|h(x)| \leq |h(x) - x| + |x| \leq b + r$ , entonces  $h(\overline{B}_r(0)) \subset \overline{B}_{r+b}(0)$ .
- Para  $x \in S(r)$ ,  $|h(x)| \geq |x| - |h(x) - x| \geq r - b$ , entonces  $h(S(r)) \subset \overline{B}_{r+b}(0) \setminus B_{r-b}(0)$ .

La prueba de c) se divide en dos partes:

- c.1) Si  $h$  es inyectiva y continua entonces es una aplicación abierta.
- c.2)  $h(\mathbb{R}^n)$  es un conjunto cerrado.

Para probar c.1) se hace uso del lema 1.30 b), el cual implica que  $h$  lleva abiertos en abierto, al tomar la unión de estos se tiene que  $h(\mathbb{R}^n)$  es abierto. Luego c.1) es verdad.

Para probar c.2), solo basta mostrar que  $\overline{h(\mathbb{R}^n)} \subset h(\mathbb{R}^n)$ .

En efecto: Sea  $z_0 \in \overline{h(\mathbb{R}^n)}$ , entonces existe  $x_j$  tal que  $h(x_j)$  converge a  $z_0$ . Es decir,  $|h(x_j)| \leq |z_0| + 1 \equiv R$ . Como  $h(x_j) = x_j + h(x_j) - x_j$ , entonces

$$\begin{aligned} |h(x_j)| &= |x_j + h(x_j) - x_j|, \\ |h(x_j)| &\geq |x_j| - |h(x_j) - x_j|, \\ |h(x_j)| &\geq |x_j| - b, \end{aligned}$$

desde que  $R \geq |h(x_j)| \geq |x_j| - b$  se tiene que  $|x_j| \leq R + b$  y los  $x_j$  están acotados. Por la compacidad de  $\overline{B}_{R+b}(0)$  existe una subsucesión  $x_{j_i}$  que converge a un punto  $x_0 \in \overline{B}_{R+b}(0)$ . Por continuidad de  $h$  se tiene que  $h(x_0) = z_0$ , luego  $z_0$  está en la imagen y  $\overline{h(\mathbb{R}^n)} = h(\mathbb{R}^n)$ . Por lo tanto  $h(\mathbb{R}^n)$  es cerrado, así c.2) es verdad.

Puesto que  $h(\mathbb{R}^n)$  es abierto y cerrado y  $\mathbb{R}^n$  es conexo, se tiene que  $h(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ , es decir  $h$  es sobreyectiva. Por lo tanto c) será verdad y se completa la prueba luego de aceptar el siguiente lema.  $\square$

LEMA 1.30.

- a) Sea  $A + g$ , donde  $A$  es una aplicación lineal hiperbólica y  $g \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$  es tal que  $Lip(g) < \epsilon$  (este  $\epsilon$  satisface el ítem (b) de la proposición 1.27). Entonces  $A + g$  es sobreyectiva.
- b) Sea  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua e inyectiva, entonces  $h$  es abierta, es decir, lleva conjuntos abiertos en conjuntos abiertos.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar la parte a) se considera la homotopía

$$\begin{aligned} H : \overline{B}_r(0) \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\mapsto (1 - t)A + t(A + g(0) - g(x)) \end{aligned}$$

entre  $H(x, 0) = A$  y  $H(x, 1) = A + g(0) - g(x)$ . Esta homotopía es continua  $\forall t \in [0, 1]$ . Solo resta probar que  $H(x, t) \neq 0$ ,  $\forall (x, t) \in \partial(B_r(0))$ , pues como  $A$  es invertible se tiene que el grado de  $A$  es distinto de cero, luego por el teorema 2,1,2 de [15] se tiene que  $A + g$  tiene grado distinto de cero, por lo tanto  $A + g$  es sobreyectiva.

En efecto:

$$\begin{aligned} \|H(x, t)\| &= \|(1 - t)A + t(A + g(0) - g(x))\|, \\ &= \|A + t(g(0) - g(x))\|, \\ &= \|A + t(g(x) - g(0))\|, \\ &\geq m(A) - \|x\|Lip(g), \end{aligned}$$

además  $x \in \partial(B_r(0))$ . Así  $\|H(x, t)\| \geq m(A) - \epsilon r > 0$ , para que esta última desigualdad sea válida bastará tomar  $r < \frac{m(A)}{\epsilon}$ . Esto concluye la prueba de a).

Para demostrar la parte b), sea  $B_r(a)$  se tiene que probar que  $f(B_r(a))$  contiene una bola abierta de centro  $f(a)$ . Para ello se asume que  $h(0) = 0$  y se considera la homotopía

continua

$$\begin{aligned} H : \overline{B}_r(0) \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\mapsto h\left(\frac{x}{1+t}\right) - h\left(\frac{-tx}{1+t}\right) \end{aligned}$$

entre  $H(x, 0) = h(x)$  y  $H(x, 1) = h(\frac{x}{2}) - h(\frac{-x}{2})$ , esta última es una función impar, luego tiene grado distinto de cero (ver teorema 3,2,6 de [15]), como  $h$  es homotópica a una función impar se tiene que  $h$  tiene grado distinto de cero (teorema 2.1.2 de [15]).

Puesto que  $\partial(\overline{B}_r(0))$  es compacto y  $h$  es continua entonces  $h|_{\partial(\overline{B}_r(0))}$  es un homeomorfismo, por el teorema de separación de Jordan, (ver teorema 3,3,1 de [15]), se tiene que  $h(\partial(\overline{B}_r(0)))$  divide a  $\mathbb{R}^n$  en tantas componentes conexas como lo hace  $\partial(\overline{B}_r(0))$ , además  $h$  lleva el interior de  $\overline{B}_r(0)$  en el interior de  $h(\partial(\overline{B}_r(0)))$ . Como  $h$  tiene grado distinto de cero, se tiene que existe  $B_s(0) \subset h(B_r(0))$ .

Para que el ítem b) sea válido resta probar que  $H(x, t) \neq 0, \forall (x, t) \in \partial(B_r(0)) \times [0, 1]$ , la prueba se da por el absurdo. Supongamos que existe  $(x, t) \in \partial(B_r(0)) \times [0, 1]$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{x}{1+t}\right) - h\left(\frac{-tx}{1+t}\right) &= 0 \\ h\left(\frac{x}{1+t}\right) &= h\left(\frac{-tx}{1+t}\right), \end{aligned}$$

como  $h$  es inyectiva, resulta  $\frac{x}{1+t} = \frac{-tx}{1+t}$ , esto implica que  $x = 0$  esto es una contradicción pues  $\|x\| = r$ . Por lo tanto  $H(x, t) \neq 0, \forall (x, t) \in \partial(B_r(0)) \times [0, 1]$ , así la homotopía está bien definida. Esto concluye la prueba de b) y por lo tanto la prueba del lema.  $\square$

## 7. Demostración del teorema de Grobman-Hartman

Para la prueba del teorema de Grobman-Hartman se usa las funciones **bump** que pasan de ser idénticamente cero a funciones que son idénticamente uno. La construcción se da en el siguiente lema.

LEMA 1.31. *Dados los números  $0 < a < b$ , existe una función  $\beta$  de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que*

$$0 \leq \beta(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \beta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq a \\ 0 & , \quad |x| \geq b \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea la función

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ e^{-1/x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Se nota que  $\alpha$  es  $C^\infty$ .

Para  $a < b$ , sea  $\gamma(x) = \alpha(x - a)\alpha(b - x)$ . Entonces,  $\gamma(x) \geq 0$  y es mayor que cero exactamente en el intervalo  $(a, b)$ , nuevamente  $\gamma$  es  $C^\infty$ .



Ahora se define

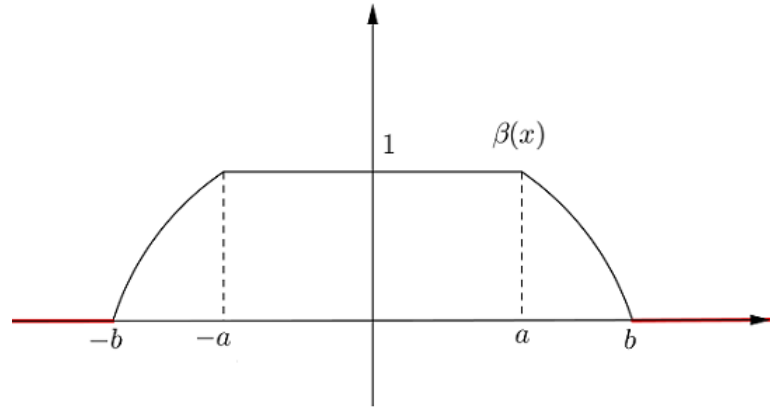
$$\delta(x) = \frac{\int_x^b \gamma(s) ds}{\int_a^b \gamma(s) ds},$$

entonces  $0 \leq \delta(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$  y

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq a \\ 0 & , \quad x \geq b. \end{cases}$$

Por último se define  $\beta(x)$  en  $\mathbb{R}^n$  por  $\beta(x) = \gamma(|x|)$  (ver figura 4). □

FIGURA 4. Función bump



LEMA 1.32. Sea  $U_0$  una vecindad abierta del origen en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo local de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  con  $f(0) = 0$  y  $A = Df_0$ . Entonces dado un  $\epsilon > 0$  existe una vecindad más pequeña  $U \subset U_0$  de 0 y una extensión de clase  $C^r$   $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\bar{f}|_U = f|_U$ ,  $(\bar{f} - A) \in C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , y  $Lip(\bar{f} - A) < \epsilon$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\beta(x)$  la función **bump** de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$  dada por el lema 4 con  $a = 1$  y  $b = 2$ . Entonces existe una constante uniforme  $K \geq 1$  tal que  $|\beta'(x)| \leq K \ \forall x \in \mathbb{R}$ .

Sea  $g = f - A$ , entonces  $Dg_0 = 0$ . Se puede tomar  $r > 0$  tal que  $\|Dg_x\| < \epsilon/(4K) \ \forall x \in B(0, 2r)$  y  $B(0, 2r) \subset U_0$ . Finalmente, sea

$$\varphi(x) = \beta\left(\frac{x}{r}\right)g(x), \quad \bar{f}(x) = Ax + \varphi(x) \ .$$

Se nota que:

$$\blacksquare \quad \bar{f} = f \text{ en } B(0, r)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= Ax + \varphi(x) \\ &= Ax + \beta\left(\frac{x}{r}\right)g(x); \quad \beta\left(\frac{x}{r}\right) = 1 \\ &= Ax + g(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

■  $\bar{f} = A$  en  $B(0, 2r)$

En efecto:

$$\begin{aligned}\bar{f} &= Ax + \varphi(x) \\ &= Ax + \beta\left(\frac{x}{r}\right)g(x); \quad \beta\left(\frac{x}{r}\right) = 0 \\ &= Ax.\end{aligned}$$

La función  $\bar{f}$  está definida en todo  $\mathbb{R}^n$  y es de clase  $C^r$  ya que  $f$  lo es. Esto es  $\bar{f} \in C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

Solo falta probar que  $Lip(\bar{f} - A) = Lip(\varphi(x)) < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Si  $x, y \notin B(0, 2r)$  no hay nada que probar pues  $\varphi(x) = 0$ .

Si  $x, y \in B(0, 2r)$  se tiene que:

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \varphi(y)| &= \left| \beta\left(\frac{x}{r}\right)g(x) - \beta\left(\frac{y}{r}\right)g(y) \right| \\ &\leq \left| \beta\left(\frac{x}{r}\right) - \beta\left(\frac{y}{r}\right) \right| |g(x)| + |g(x) - g(y)| \cdot \left| \beta\left(\frac{y}{r}\right) \right| \\ &\leq K \cdot \frac{1}{r} |x - y| \cdot \left(\frac{\epsilon}{4K}\right) |x| + 1 \cdot \left(\frac{\epsilon}{4K}\right) \cdot |x - y| \\ &\leq \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4K}\right) |x - y| \\ &\leq \epsilon |x - y|,\end{aligned}$$

con esto la prueba de la proposición está completa.  $\square$

**TEOREMA 1.23 (TEOREMA DE GROBMAN-HARTMAN)** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Si  $p \in \mathbb{R}^n$  es un punto fijo hiperbólico, entonces, existen vecindades  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $\mathbf{0}$  y un homeomorfismo  $h : V \rightarrow U$  tal que

$$f(h(x)) = h(Ax), \forall x \in V, \text{ donde } A = Df_p.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Puesto que  $f$  es un difeomorfismo, en particular  $f$  es un difeomorfismo local. Para  $f$  el punto fijo hiperbólico  $p$  puede ser llevado al origen mediante la traslación  $T(x) = x - p$ , así se tiene como punto fijo al origen. Por la proposición 1.32 existe una extensión  $\bar{f}$  que es igual a  $f$  en una vecindad de  $\mathbf{0}$ . Entonces las hipótesis del teorema 1.27 son satisfechas. Entonces,  $\bar{f}$  y  $A$  son conjugados en todo  $\mathbb{R}^n$ , como  $\bar{f} = f$  en una vecindad de  $\mathbf{0}$ , se tiene que  $f$  y  $A$  son conjugados en una vecindad de  $\mathbf{0}$ . Esto muestra el teorema.  $\square$

## Teorema de la variedad estable para un punto fijo

*En este capítulo se demuestra que el teorema de la variedad estable en el plano, teorema 1.18, es válido también en espacios de Banach como el  $\mathbb{R}^n$ . Es decir, dado un punto fijo hiperbólico  $p$  para  $f$ , una aplicación de clase  $C^k$ , y dada una vecindad  $U' \subset U$  de  $p$ , el conjunto formado por los puntos cuyas iteraciones positivas de  $f$  que caen en  $U'$  son, en efecto, variedades diferenciables de la misma clase que la función  $f$ . Es mas, es posible ver este conjunto como el gráfico de alguna función adecuada, [23]. Se logra conseguir que la variedad estable local sea incrustada, sin embargo la variedad estable global solo está inmersa [20].*

### 1. Presentación del teorema

**1.1. Conceptos y resultados previos.** Antes de dar la definición de variedad estable y variedad inestable, previamente, es necesario brindar algunos conceptos y resultados sobre teoría espectral en operadores acotados.

2.1. En esta sección se denota por  $\mathbb{E}$  un espacio de Banach y por  $\mathcal{L}(E)$  el conjunto formados por los operadores  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  lineales y acotados. Se define el **espectro de  $T$** ,  $\sigma(T)$ , como

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es un isomorfismo}\}^1,$$

en particular cada autovalor de  $T$  pertenece a  $\sigma(T)$ . Análogamente, el **resolvente de  $T$**  es el conjunto

$$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T).$$

Dado  $\lambda \in \rho(T)$ , el **operador resolvente de  $T$  en  $\lambda$**  es

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}.$$

OBSERVACIÓN 2.2. *Se puede notar lo siguiente:*

- *En un espacio de Banach complejo, el espectro de  $T$  siempre es distinto del vacío, para una prueba de esto ver página 390 de [13].*
- *En el caso que  $\mathbb{E}$  sea un espacio vectorial real se usará la complexificación, tanto del espacio de Banach real como del operador real (ver [26]).*
- *Como una consecuencia del teorema de aplicación abierta, (ver página 286 de [13]),  $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$  es un operador lineal acotado para cada  $\lambda \in \rho(T)$  cuando  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ , complexificado.*

---

<sup>1</sup>Algunos autores consideran  $\lambda I - T$  en lugar de  $T - \lambda I$ , esto es con la intención de aplicar el lema 1.28.

- En dimensión finita, el espectro de  $T$ ,  $\sigma(T)$ , coincide con el conjunto de autovalores de  $T$ . Esto se consigue al observar que un operador lineal, definido en un espacio de dimensión finita es invertible si y solo si es inyectivo. En efecto, si  $\lambda \in \sigma(T)$ , el operador  $T - \lambda I$  no es invertible, ni es inyectivo, por lo tanto existe algún vector  $v \neq 0$  tal que  $(T - \lambda I)v = 0$ ; esto es la definición de que  $\lambda$  sea autovalor de  $T$ .

En dimensión infinita pueden existir elementos del espectro que no sean autovalores. Tal como se observa en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.3. El espacio vectorial

$$l^1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 1} |x_n| < \infty \right\}$$

con la norma dada por:

$$\|(x_1, x_2, \dots)\| = \sum_{n \geq 1} |x_n|$$

es un espacio de Banach. Sea el operador lineal **shift**, desplazamiento,

$$\begin{aligned} T : l^1 &\rightarrow l^1 \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto (0, x_1, x_2, \dots), \end{aligned}$$

este operador es acotado, además  $\|T\| = 1$ .

En efecto: basta observar

$$\|Tx\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|x\|, \quad \text{entonces} \quad \|T\| = 1.$$

Es claro que  $\lambda = 0$  no es un autovalor de  $T$ , pues  $Tx = 0$  implica que  $x = 0$ , es decir  $\lambda = 0$  no cumple la definición de ser autovalor. Sin embargo,  $T - \lambda I = T$  no es sobreyectivo pues  $\text{imágen}(T) \neq l^1$  esto es debido a que el conjunto imágen de  $T$  consta de los elementos en  $l^1$  que tienen como primera coordenada a 0. Por lo tanto  $T - 0I$  no es un isomorfismo. Luego  $\lambda = 0 \in \sigma(T)$ .

El siguiente resultado muestra que el resolvente es un conjunto abierto en  $\mathbb{C}$ , además se ve que el espectro está acotado superiormente, también relaciona el espectro de un isomorfismo con el espectro de su inversa.

LEMA 2.4. Sea  $\mathbb{E}$  un espacio de Banach y  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  un operador lineal acotado. Entonces se cumple lo siguiente:

- El resolvente  $\rho(T)$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{C}$ .
- $\forall \lambda \in \sigma(T)$  se tiene  $|\lambda| \leq \|T\|$ . Por lo tanto  $\sigma(T)$  es compacto.
- Si además  $T$  es un isomorfismo, entonces

$$\sigma(T^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para dar la prueba de (a) se toma  $\lambda_0 \in \rho(T)$  y cualquier  $\lambda \in \mathbb{C}$ , entonces  $T_\lambda = T - \lambda I$  satisface

$$\begin{aligned} T - \lambda I &= T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I \\ &= (T - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}]. \end{aligned}$$

Esto puede ser escrito de la forma

$$(15) \quad T_\lambda = T_{\lambda_0} V, \quad \text{donde } V = I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}.$$

Puesto que  $\lambda_0 \in \rho(T)$  y  $T$  es acotada, entonces  $R_{\lambda_0} = T_{\lambda_0}^{-1}$  es un operador lineal acotado definido en todo el espacio de Banach (ver página 343 de [13]). La parte (a) del lema 1.28 muestra que  $V$  tiene una inversa y

$$(16) \quad V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}]^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j,$$

cuando  $\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}\| < 1$ , esto es

$$(17) \quad |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}.$$

Desde que  $T_{\lambda_0}^{-1} = R_{\lambda_0}$  pertenece al espacio de operadores lineales acotados, y se cumple (15) se tiene que para cada  $\lambda$  satisfaciendo (17) el operador  $T_\lambda$  tiene una inversa

$$(18) \quad R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T_{\lambda_0} V)^{-1} = V^{-1} R_{\lambda_0}.$$

Entonces (17) y la continuidad de  $\lambda \mapsto T_\lambda$ ,  $A \mapsto A^{-1}$  induce una vecindad de  $\lambda_0$  tal que para cualquier  $\lambda$  que pertenece a esta vecindad se tiene  $T_\lambda = T - \lambda I$  es un isomorfismo, es decir  $\lambda \in \rho(T)$ . Por lo tanto se ha demostrado que  $\rho(T)$  es un conjunto abierto. Luego (a) es verdad.

Para probar (b) se procede por contradicción, es por ello que se asume  $\lambda \in \sigma(T)$  con  $|\lambda| > \|T\|$ . Por el lema 1.28 (a) se tiene que  $(Id - \frac{T}{\lambda})$  es un isomorfismo, y en consecuencia  $\lambda I - T$  también lo es. Esto es una contradicción con  $\lambda \in \sigma(T)$ . Con esto se ha probado que  $\sigma(T)$  es acotado. Como  $\sigma(T)$  es el complemento de  $\rho(T)$  en  $\mathbb{C}$  y  $\rho(T)$  es abierto, (esto es del ítem (a)), sigue que  $\sigma(T)$  es cerrado. Por lo tanto  $\sigma(T)$  es compacto. Es decir la parte (b) del lema es válido.

Para probar (c) sea  $\lambda \in \sigma(T)$ , puesto que  $T$  es un isomorfismo, entonces  $0 \notin \sigma(T)$ , y se da la siguiente igualdad

$$T - \lambda I = -\lambda T \left( T^{-1} - \frac{1}{\lambda} I \right).$$

Como  $T$  es un isomorfismo se tiene que  $T - \lambda I$  es un isomorfismo si y solo si  $T^{-1} - \frac{1}{\lambda} I$  lo es, de donde se tiene que  $T^{-1} - \frac{1}{\lambda} I$  no es un isomorfismo ya que  $T - \lambda I$  no lo es. Por lo tanto (c) es verdad y se concluye la demostración del lema.  $\square$

LEMA 2.5. Si  $T$  es un operador lineal acotado sobre un espacio de Banach, entonces para el radio espectral se cumple lo siguiente:

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

En vista que  $\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$  solo depende de  $T$ , se define el **radio espectral de  $T$**  como

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

DEMOSTRACIÓN. Para la demostración ver la página 391 de [13].  $\square$

PROPOSICIÓN 2.6. Sea  $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  un operador lineal acotado en un espacio vectorial normado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

- a) El radio espectral  $\sigma(T)$  es estrictamente menor que 1.
- b) Existe una norma  $|\cdot|$ , equivalente<sup>2</sup> a  $\|\cdot\|$  para la cual  $|T| < 1$ .
- c) Existen  $C > 0$  y  $0 < \mu < 1$  tal que  $\|T^n(x)\| \leq C\mu^n\|x\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{E}$ ,  $n > 0$

DEMOSTRACIÓN. (a)  $\Rightarrow$  (b). Se hace uso del lema 2.5, pues  $r(T) < 1$ , así:

$$(19) \quad r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1.$$

Por el lema 2.4 existe una distancia positiva  $s = \frac{d(\sigma(T), S^1)}{2} > 0$ , tal que  $r(T) < s < 1$ . Para  $n$  suficientemente grande  $\frac{\|T^n\|}{s^n} < 1$ . Luego existe  $C_1 > 0$  para  $n$  suficientemente grande tal que  $\|T^n\| \leq C_1 s^n$ , es decir, existe  $N_0$  de modo que:

$$\|T^n x\| \leq C_1 s^n \|x\| \quad \forall n_0 > N_0;$$

para los  $n \leq N_0$  se hace  $C_2 = \max \left\{ \left\| \frac{T^m}{s^m} \right\|, \quad m = 0, \dots, N \right\}$ . Por lo tanto, al tomar  $C = \max\{C_1, C_2\}$  se cumple

$$(20) \quad \|T^n x\| \leq C s^n \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{E}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Elegido  $N > N_0$  tal que

$$(21) \quad 1 > C s^N = C \left( \frac{d(\sigma(T), S^1)}{2} \right)^N,$$

se define la siguiente norma

$$|x| = \sum_{n=0}^{N-1} \|T^n(x)\|, \quad \forall x \in \mathbb{E}$$

---

<sup>2</sup>Dos normas definidas sobre el mismo espacio vectorial  $V$  son equivalentes si estas generan las mismas topologías, como una consecuencia de esta definición se tiene que si dos normas  $|\cdot|$  y  $\|\cdot\|$  en  $V$  son equivalentes existen constantes positivas  $a, b$  tal que

$$a\|x\| \leq |x| \leq b\|x\|, \quad \forall x \in V.$$

Es claro que  $|x| > \|x\|$ , (basta desarrollar la sumatoria), además de la ecuaciones (20) y (21) se tiene:

$$\begin{aligned} |x| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} C s^n \|x\| \\ &= C \|x\| \sum_{n=0}^{N-1} s^n \\ &= C \left( \frac{1-s^N}{1-s} \right) \|x\| \\ &\leq \frac{C}{1-s} \|x\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(22) \quad \|x\| \leq |x| \leq \frac{C}{1-s} \|x\|$$

así ambas normas  $|\cdot|$  y  $\|\cdot\|$  son equivalentes. Para concluir la prueba de (a) implica (b) falta probar que  $|T| < 1$ , en efecto al usar (20) para  $x \in \mathbb{E}$  se tiene:

$$(23) \quad |Tx| = \sum_{n=1}^N \|T^n x\| = |x| - \|x\| + \|T^N x\| \leq |x| - (1 - Cs^N) \|x\|$$

y usando (22) se tiene:

$$(24) \quad |Tx| \leq \left( 1 - \frac{(1-s)(1-Cs^N)}{C} \right) |x|,$$

pero  $s$  y  $N$  fue elegido tal que  $1-s > 0$  y  $1-Cs^N > 0$ . Por lo tanto  $|T| < 1$ . Esto prueba que (a) implica (b).

$(b) \Rightarrow (c)$ . Se asume  $|T| < 1$ , y se procede de forma análoga a la prueba de (a) implica (b), (esta vez tomando  $|\cdot|$  en lugar de  $\|\cdot\|$ ), se muestra que existe  $C' > 0$  y  $\mu < 1$  tal que se cumple la siguiente relación

$$(25) \quad |T^n x| \leq C' \mu^n |x|,$$

análoga a (20). Al usar la equivalencia entre las normas  $|\cdot|$  y  $\|\cdot\|$  se tiene que existen constantes positivas  $a, b$  tales que se verifica

$$(26) \quad b \|T^n x\| \leq |T^n x| \leq C' \mu^n |x| \leq C' \mu^n a \|x\|,$$

y así se obtiene

$$\|T^n x\| \leq C \mu^n \|x\|, \quad \text{donde } C = \frac{aC'}{b}.$$

Por lo tanto (b) implica (c) es válido.

$(c) \Rightarrow (a)$ . Se parte de que  $\|T^n x\| \leq C \mu^n \|x\|$ , entonces  $\|T^n\| \leq C \mu^n$ , de esto resulta

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} \leq C^{\frac{1}{n}} \mu,$$

y al aplicar el lema 2.5 se concluye que  $r(T) \leq \mu < 1$ . Luego (c) implica (a) es válido. Esto termina la prueba de la proposición.  $\square$

**1.2. Enunciado del teorema.** Para enunciar el teorema de la variedad estable se considera función diferenciable de clase  $C^k$  sobre un espacio de Banach,  $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  se permite que  $f$  no sea biyectiva. Se asume que  $p$  es un punto fijo y que  $A = Df_p$  es la derivada de  $f$  en el punto  $p$ . Un punto fijo  $p$  es llamado **hiperbólico** si

$$\text{spc}(Df_p) \cap \{\alpha : |\alpha| = 1\} = \emptyset,$$

donde  $\text{spc}(Df_p)$  representa el espectro de  $Df_p$ , definido en parágrafo 2.1.

PROPOSICIÓN 2.7. Sea  $p \in \mathbb{E}$  un punto hiperbólico para  $Df_p$ , entonces

a) Existen subespacios  $\mathbb{E}^s$  y  $\mathbb{E}^u$  tal que  $\mathbb{E} = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$  y

$$Df_p(\mathbb{E}^\sigma) = \mathbb{E}^\sigma, \quad \sigma \in \{s, u\} \quad (\text{invariantes por } Df_p).$$

b) Existen constantes positivas  $\mu < 1$  y  $\lambda > 1$  tal que

$$\text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^u}) \subset \{\alpha : |\alpha| > \lambda\}, \quad y \quad \text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^s}) \subset \{\alpha : |\alpha| < \mu\}.$$

c)  $Df_p|_{\mathbb{E}^u}$  es un isomorfismo.

d) Existe constantes positivas  $C, \mu < 1, \lambda > 1$  tal que

$$(27) \quad \|Df_p^n|_{\mathbb{E}^s}\| \leq C\mu^n \quad y \quad \|Df_p^{-n}|_{\mathbb{E}^u}\| \leq C\lambda^{-n}.$$

e) Existe  $\|\cdot\|$  una norma equivalente a  $\|\cdot\|$  tal que

$$(28) \quad |Df_p^n|_{\mathbb{E}^s}| \leq \mu^n, \quad y \quad |Df_p^{-n}|_{\mathbb{E}^u}| \leq \lambda^{-n}.$$

DEMOSTRACIÓN. En el caso de aplicaciones lineales  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  estos subespacios invariantes corresponde a los generados por los autovectores asociados a autovalores cuyo módulo es menor que uno, o mayor que uno; para resultados sobre aplicaciones lineales hiperbólicas, ver apéndice A. Para la prueba del ítem (a), ver página 421 de [25].

Para la prueba del ítem (b) se usa que los conjuntos  $\text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^u})$  y  $\text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^s})$  son conjuntos compactos en  $\mathbb{C}$  (ver lema 2.4), luego tiene que existir una distancia positiva y se elige la constante  $\mu > 0$  de modo que

$$0 < \mu < d(\text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^s}), S^1) < 1 \quad y \quad \lambda = \mu^{-1} > d(\text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^u}), S^1) > 1$$

y en consecuencia

$$\text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^u}) \subset \{\alpha : |\alpha| > \lambda\}, \quad \text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^s}) \subset \{\alpha : |\alpha| < \mu\}.$$

Esto muestra que (b) es válido.

Para probar (c) se procede por contradicción, es decir, se supone que  $Df_p|_{\mathbb{E}^u}$  no es un isomorfismo, esto implica que  $0 \in \text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^u})$  esto es una contradicción pues  $\text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^u}) \subset \{\alpha : |\alpha| > \lambda\}$ . Por esto se tiene que  $Df_p|_{\mathbb{E}^u}$  es un isomorfismo sobre  $\mathbb{E}^u$ , es decir (c) es válido.



Para probar (d) se asume que  $\text{spc}(Df_p|_{\mathbb{E}^s}) < 1$ , de donde se obtiene que el radio espectral  $r(Df_p|_{\mathbb{E}^s}) < 1$ . Luego la proposición 2.6 asegura que existen constantes positivas  $C_1, \mu$  tal que  $\|Df_p^n(x)|_{\mathbb{E}^s}\| \leq C_1\mu^n\|x\|$ ,  $\forall x$  y así

$$\|Df_p^n|_{\mathbb{E}^s}\| \leq C_1\mu^n.$$

Por otro lado como  $Df_p|_{\mathbb{E}^u}$  es un isomorfismo, entonces está bien definido  $(Df_p|_{\mathbb{E}^u})^{-1}$ , luego usando que  $r(Df_p|_{\mathbb{E}^u}) > 1$  y el item (c) del lema 2.4 se tiene que  $r(Df_p^{-1}|_{\mathbb{E}^u}) < 1$  así por la proposición 2.6 se tiene que existen constantes positivas  $C_2, \lambda > 1$  tal que

$$\|Df_p^{-n}|_{\mathbb{E}^u}\| \leq C_2\lambda^{-n}.$$

Si se toma  $C = \max\{C_1, C_2\}$ , se verifica

$$\|Df_p^n|_{\mathbb{E}^s}\| \leq C\mu^n, \quad \|Df_p^{-n}|_{\mathbb{E}^u}\| \leq C\lambda^{-n}.$$

Esto prueba que (d) es verdad.

La prueba de (e) es una aplicación directa de la proposición 2.6.  $\square$

**DEFINICIÓN 2.8.** Dado un punto fijo hiperbólico  $p$  para una función  $f$  de clase  $C^k$ , y dada una vecindad  $U' \subset U$  de  $p$ , se definen los siguientes conjuntos:

a) **La variedad estable local** para  $p$  en una vecindad  $U'$  es definida por el siguiente conjunto

$$W^s(p, U', f) = \{q \in U' : f^j(q) \in U' \text{ para } j > 0 \text{ y } d(f^j(q), p) \rightarrow 0 \text{ si } j \rightarrow \infty\}.$$

b) **La variedad inestable local** para  $p$  en  $U'$  es definida por el siguiente conjunto

$$W^u(p, U', f) = \{q \in U' : \text{existe alguna elección de la historia pasada de } q, \{q_{-j}\}_{j=0}^{\infty} \text{ tal que } d(q_{-j}, p) \rightarrow 0 \text{ cuando } j \rightarrow \infty\}.$$

La historia pasada de un punto  $q$  como la sucesión de puntos  $\{q_{-j}\}_{j=0}^{\infty}$  tal que  $q_0 = q$  y  $f(q_{-j-1}) = q_{-j}$  para  $j \geq 0$ .

**OBSERVACIÓN 2.9.**

■ En la página 134 de [20] se pueden encontrar la siguiente definición de variedad estable local e inestable local, respectivamente:

- $W_r^s(p) = \{q \in \mathcal{B}_r(p); \quad f^n(q) \in \mathcal{B}_r(p), \quad \forall n \geq 0\}$
- $W_r^u(p) = \{q \in \mathcal{B}_r(p); \quad f^{-n}(q) \in \mathcal{B}_r(p), \quad \forall n \geq 0\}.$

esta definición es equivalente a la definición 2.8 pues es posible encontrar  $\beta > 0$  tal que  $U = \mathcal{B}_r(p) \subset U'$  aquí  $\mathcal{B}_r(p) = \mathbb{E}^s(r) \times \mathbb{E}^u(r)$  y en  $\mathbb{E}$  se toma el máximo entre las normas de  $\mathbb{E}^s$  y  $\mathbb{E}^u$ . Es por ello que cuando  $p = 0$  se denota la variedad estable local  $W^s(0, \mathcal{B}_r(0), f)$  por  $W_r^s(0)$ .

- *El teorema de Grobman-Hartman, (ver teorema 1.23), prueba que las variedades estable e inestable son discos topológicos pero no garantizan que sean diferenciables. En efecto la parte difícil de la prueba del teorema de la variedad estable es mostrar que esas variedades son Lipschitz. Una vez que esto es sabido se puede probar que son diferenciables. Nuevamente el teorema de Grobman-Hartman no prueba que son Lipschitz. Por otro lado el Teorema de Grobman-Hartman prueba que todas las órbitas cerca del punto fijo se comportan como su parte lineal, mientras que el teorema de la variedad estable solo da información sobre los puntos que están en la variedad estable e inestable.*

El siguiente teorema establece que estas variedades estables e inestables son variedades incrustadas<sup>3</sup>  $C^k$  que pueden ser representadas como gráfico de una aplicación de un disco en uno de los subespacios en el otro subespacio. Aquí disco cerrado en algún espacio de Banach  $E$  de radio  $\delta > 0$  centrado en el origen con radio  $\delta$  es el conjunto

$$(29) \quad E(\delta) = \{x \in E : |x| \leq \delta\}$$

TEOREMA 2.10. *(Teorema de la variedad estable). Sea  $p$  un punto fijo hiperbólico para una función de clase  $C^k$   $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  con  $k \geq 1$ . Se asume que las derivadas son uniformemente continuas en términos del punto en el que la derivada es tomada. Entonces existe alguna vecindad de  $p$ ,  $U' \subset U$ , tal que  $W^s(p, U', f)$  y  $W^u(p, U', f)$  son discos incrustados  $C^k$  tangentes a  $\mathbb{E}^s$  y  $\mathbb{E}^u$ , respectivamente. En efecto, si se considera  $\mathbb{E} = \mathbb{E}^u \times \mathbb{E}^s$ , existe un  $r > 0$  pequeño tal que  $U' = p + (\mathbb{E}^u(r) \times \mathbb{E}^s(r)) \subset U$ , el conjunto  $W^s(p, U', f)$  será el gráfico de una función  $C^k$ ,  $\sigma^s : \mathbb{E}^s(r) \rightarrow \mathbb{E}^u(r)$  con  $\sigma^s(0) = 0$  y  $D\sigma_0^s = 0$  :*

$$W^s(p, U', f) = \{p + (\sigma^s(y), y) : y \in \mathbb{E}^s(r)\}.$$

*Similarmente, existe una función  $C^k$ ,  $\sigma^u : \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathbb{E}^s(r)$  con  $\sigma^u(0) = 0$  y  $D\sigma_0^u = 0$  :*

$$W^u(p, U', f) = \{p + (x, \sigma^u(x)) : x \in \mathbb{E}^u(r)\}.$$

*Más aun, para  $r > 0$  suficientemente pequeño y  $U' = p + (\mathbb{E}^u(r) \times \mathbb{E}^s(r))$ ,*

$$\begin{aligned} W^s(p, U', f) &= \{q \in U' : f^j(q) \in U' \text{ para } j \geq 0\} \\ &= \{q \in U' : f^j(q) \in U' \text{ para } j \geq 0, \\ &\quad d(f^j(q), p) \leq \mu^j d(q, p) \quad \forall j \geq 0\}. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Sean  $M, N$  variedades diferenciables. Una función  $f : M \rightarrow N$  diferenciable se dice que es una incrustación si para cada  $x \in M$  se tiene que  $Df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  es inyectiva (inmersión), además  $f$  es inyectiva y propia. Que la variedad estable sea incrustada significa que es la imagen de una incrustación.

Esto significa que cada punto que no está en  $W^s(p, U', f)$  deja  $U'$  bajo iterados y los puntos sobre  $W^s(p, U', f)$  convergen a  $p$  exponencialmente. Análogamente,

$$\begin{aligned} W^u(p, U', f) &= \{q \in U' : \text{existe alguna elección de la historia pasada de } q \text{ con} \\ &\quad \{q_{-j}\}_{j=0}^{\infty} \subset U'\} \\ &= \{q \in U' : \text{existe alguna elección de la historia pasada de } q \text{ con} \\ &\quad \{q_{-j}\}_{j=0}^{\infty} \subset U', \quad d(q_{-j}, p) \leq \lambda^{-j} d(q, p) \quad \forall j \geq 0\} \end{aligned}$$

Una vez obtenida la variedad estable e inestable local, entonces la **variedad inestable global** es obtenida por

$$W^u(p, f) = \bigcup_{j \geq 0} f^j W^u(p, U', f).$$

Si  $f$  es invertible, entonces la **variedad estable global** es obtenida por

$$W^s(p, f) = \bigcup_{j \geq 0} f^{-j} W^s(p, U', f).$$

OBSERVACIÓN 2.11. Esta definición de variedad estable e inestable global es equivalente a la definición dada en la página 133 del libro [20], la cual es la siguiente:

- La variedad estable global de  $p$  es el conjunto de puntos de  $\mathbb{E}$  que tienen a  $p$  como  $\omega$ -límite.
- La variedad inestable global de  $p$  es el conjunto de puntos de  $\mathbb{E}$  que tienen a  $p$  como  $\alpha$ -límite.

**1.3. Idea de la demostración.** Se da una idea de la prueba del teorema 2.10 tomando  $p = 0$ . Es decir, el conjunto  $W_r^s(0)$ , ver observación 2.9, será el gráfico de una función Lipschitz  $\varphi^s : \mathbb{E}^s \rightarrow \mathbb{E}^u$  con constante de Lipschitz menor igual que  $\alpha$  para algún  $\alpha$  fijado. Es decir se quiere probar la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 2.12. La variedad estable local,  $W_r^s(0) = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(\mathcal{B}(r))$ , es el gráfico de una función  $\varphi^s : \mathbb{E}^s(r) \rightarrow \mathbb{E}^u(r)$  con  $\varphi^s(0) = 0$  y además es lipschitziana con constante de Lipschitz  $\alpha > 0$ .

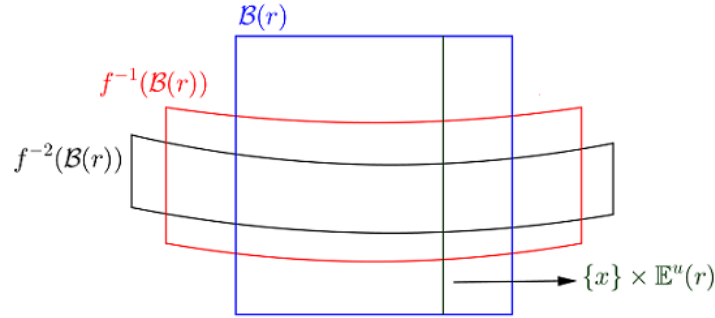
Para verificar que  $W_r^s(0)$  es el gráfico de una función, se usa la caracterización de  $W_r^s(0)$  como los puntos cuya órbita positiva permanece en  $\mathcal{B}(r) = \mathbb{E}^s(r) \times \mathbb{E}^u(r)$ , es decir:

$$\begin{aligned} W_r^s(0) &= \{x : f^j(x) \in \mathcal{B}(r), \quad \forall j \geq 0\} \\ &= \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(\mathcal{B}(r)). \end{aligned}$$

Ver figura 1.

Para mostrar que  $W_r^s(0)$  es un gráfico, es necesario que  $W_r^s(0) \cap [\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)]$  consista solo de un punto para cada  $x \in \mathbb{E}^s(r)$ .

EJEMPLO 2.13. El disco  $\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)$  es un ejemplo trivial de gráfico de una función  $\mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathbb{E}^s(r)$  con constante de Lipschitz menor que  $\alpha^{-1}$ .

FIGURA 1. Intersección de los  $f^{-n}(\mathcal{B}(r))$ 

En la demostración del teorema de la variedad estable en el plano, teorema 1.18, fue necesario el concepto de  $\gamma$ -curva vertical. Aquí se trata de imitar dicha prueba es por ello que se quiere una definición similar a  $\gamma$ - curva vertical, en este caso puesto que estamos tratando con espacios de Banach se les denominará  $\alpha$ -disco estable o  $\alpha^{-1}$ - inestable, según sea el caso. Esto sugiere la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 2.14.** Un **disco  $\alpha$ -inestable** es el gráfico de una función  $\varphi : \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathbb{E}^s(r)$ , donde  $\varphi$  es de clase  $C^1$ , tal que

$$Lip(\varphi) = \sup_{y \in \mathbb{E}^u(r)} \|D\varphi_y\| \leq \alpha^{-1}.$$

Análogamente, un **disco  $\alpha$ -estable** se define como el gráfico de una función  $\psi : \mathbb{E}^s(r) \rightarrow \mathbb{E}^u(r)$ , con

$$Lip(\psi) = \sup_{x \in \mathbb{E}^s(r)} \|D\psi_x\| \leq \alpha.$$

Continuando con la idea de la demostración, usando las cotas de las derivadas de  $f$ , el lema 2.24 muestra que si  $D_0^u$  es un disco inestable, entonces  $D_1^u = f(D_0^u) \cap \mathcal{B}(r)$  es un disco inestable (con constante de Lipschitz menor que  $\alpha^{-1}$ ) y

$$diam(f(D_0^u) \cap \mathcal{B}(r)) \leq (\lambda - \epsilon\alpha^{-1})^{-1} diam(D_0^u) = (\lambda - \epsilon\alpha^{-1})^{-1} 2r.$$

Por un proceso de inducción, se tiene que:  $D_j^u = f(D_{j-1}^u) \cap \mathcal{B}(r)$  es un disco inestable, y

$$(30) \quad diam \left( \bigcap_{j=0}^n f^{-j}(D_j^u) \right) \leq (\lambda - \epsilon\alpha^{-1})^{-n} 2r.$$

De esta última igualdad se deduce que la intersección infinita es un punto al cual se escribe  $(x, \varphi^s(x))$  :

$$\begin{aligned} [\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)] \cap W_r^s(0) &= [\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)] \cap \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(\mathcal{B}(r)) \\ &= \{(x, \varphi^s(x))\}. \end{aligned}$$

Esto muestra que  $W_r^s(0)$  es el gráfico de  $\varphi^s$ .

El lema 1.17 afirma que la inversa de una función, definida en el plano, cercana a una aplicación lineal preserva  $\gamma$ -curvas verticales. En espacios de Banach este hecho se traduce en que la derivada preserva  $\alpha^{-1}$ -discos inestables. Una forma de probar esto es que el gráfico de la función que define el disco inestable se encuentre en el interior de la región definida encerrada por  $y = |\alpha^{-1}|x$ . Esto sugiere la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.15. (Figura 2) Se denomina **cono estable** al conjunto:

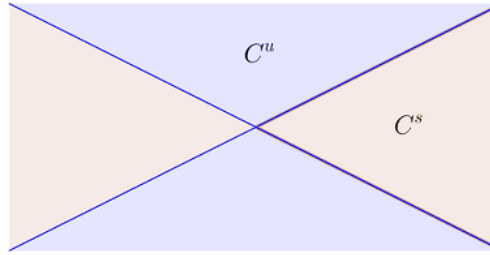
$$C^s(\alpha) = \{(v_s, v_u) \in \mathbb{E}^s \times \mathbb{E}^u : |v_u| \leq \alpha|v_s|\},$$

de manera análoga se define el **cono inestable** como:

$$C^u(\alpha) = \{(v_s, v_u) \in \mathbb{E}^s \times \mathbb{E}^u : |v_u| \geq \alpha|v_s|\}.$$

Además estos conos, tanto el cono estable como el cono inestable varían continuamente con respecto a su vértice.

FIGURA 2. Cono estable e inestable

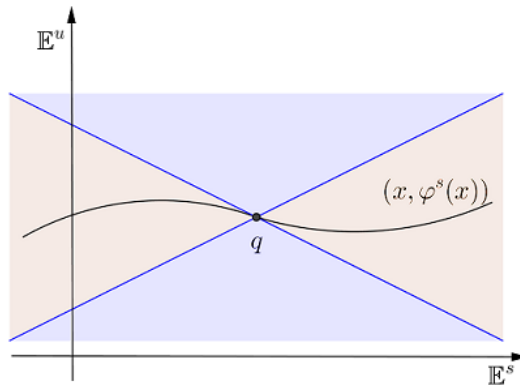


La condición que

$$W_r^s(0) \cap [\{q\} + C^u(\alpha)] = \{q\}, \quad \forall q \in W_r^s(0)$$

es equivalente a que el gráfico sea  $\alpha$ -Lipschitz, esto se ve en la figura 3.

FIGURA 3.  $W_r^s(0) \cap [\{q\} + C^u(\alpha)] = \{q\}$



La proposición 2.12 muestra que esta intersección,  $W_r^s(0) \cap [\{q\} + C^u(\alpha)]$ , es un punto singular

por el mismo argumento con el que se mostró que  $W_r^s(0)$  es un gráfico. Es decir, se ha mostrado que  $W_r^s(0)$  es el gráfico de una función de Lipschitz. Para mostrar que la variedad estable local es de clase  $C^1$  si  $f$  lo es, se da la siguiente proposición

**PROPOSICIÓN 2.16.** *La variedad estable local,  $W_r^s(0)$ , es de clase  $C^1$  y es tangente a  $\mathbb{E}^s$  en el punto fijo.*

Luego por un proceso de inducción se demuestra que  $W_r^s(0)$  es  $C^k$ , si  $f$  lo es, esto se da en el siguiente teorema

**TEOREMA 2.17.** *Si  $f$  es  $C^k$  para  $k \geq 1$ , entonces  $W_r^s(0)$  es  $C^k$ .*

Esto completa la prueba del teorema 2.10.

## 2. La variedad estable

### 2.1. Lemas previos.

2.18. *Para empezar la prueba primero recordemos las normas del máximo y del mínimo introducidas en la sección 5 del capítulo 2. Sea  $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  la norma del máximo está definida por:*

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|Av|}{|v|}$$

*y la norma del mínimo viene dada por:*

$$m(A) = \inf_{v \neq 0} \frac{|Av|}{|v|}.$$

*Si  $A$  es invertible, entonces  $m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$ . Para un punto hiperbólico  $p$  para el cual  $\|Df_p^{-n}|_{\mathbb{E}^u}\| < C\lambda^{-n}$  para  $n > 0$ , se sigue que  $m(Df_p^n|_{\mathbb{E}^u}) > C\lambda^n$ , esto se debe a que  $Df_p|_{\mathbb{E}^u}$  es un isomorfismo (ver ítem (c) de la proposición 2.7).*

2.19. *Por coordenadas locales es posible asumir que el punto fijo en el espacio de Banach  $\mathbb{E}$  es el cero. Puesto que  $0 \in \mathbb{E}$  es hiperbólico se tiene que  $\mathbb{E} = \mathbb{E}^s \times \mathbb{E}^u$ . Se denota por  $\pi_s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^s$  la proyección de  $\mathbb{E}$  sobre  $\mathbb{E}^s$  y por  $\pi_u : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^u$  la proyección de  $\mathbb{E}$  sobre  $\mathbb{E}^u$ . Entonces  $f(0) = 0$  y se usa la descomposición de  $\mathbb{E} = \mathbb{E}^s \times \mathbb{E}^u$  para escribir*

$$Df_0 = \begin{pmatrix} A_{ss} & 0 \\ 0 & A_{uu} \end{pmatrix},$$

*donde  $A_{ss} = \pi_s Df_0|_{\mathbb{E}^s \times \{0\}}$  y  $A_{uu} = \pi_u Df_0|_{\{0\} \times \mathbb{E}^u}$ . Puesto que  $0$  es punto hiperbólico, existen constantes  $0 < \mu < 1 < \lambda$  y normas en cada espacio  $\|\cdot\|_s, \|\cdot\|_u$  tal que*

$$(31) \quad m(A_{uu}) > \lambda > 1 \quad \text{y} \quad \|A_{ss}\| < \mu < 1, \quad (\text{ver proposición 2,7}).$$

*Fijamos estas normas y sobre  $\mathbb{E}$  se coloca la norma del máximo de las normas dadas en  $\mathbb{E}^s$  y  $\mathbb{E}^u$ , es decir en  $\mathbb{E} = \mathbb{E}^s \times \mathbb{E}^u = \{(v_s, v_u) : v_s \in \mathbb{E}^s, v_u \in \mathbb{E}^u\}$  se usa*

$$(32) \quad \|(v_s, v_u)\| = \max\{\|v_s\|_s, \|v_u\|_u\}.$$

Se define una vecindad del punto fijo en  $\mathbb{E}$  como el producto de bolas de radio  $r$  (esto es porque se está tomando en  $\mathbb{E}$  el máximo de las normas en los espacios estable e inestable):

$$(33) \quad \mathcal{B}(r) = \mathbb{E}^s(r) \times \mathbb{E}^u(r).$$

Entonces,  $f : \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{E}$  con  $f(0) = 0$ .

2.20. Se fija  $\alpha > 0$ , que sirve como una cota sobre los gráficos de funciones de  $\mathbb{E}^s$  a  $\mathbb{E}^u$ . Se toma  $\epsilon > 0$  y  $\lambda, \mu$  como en (31) tal que se verifican las siguientes desigualdades

$$(34) \quad \mu + \epsilon\alpha + \epsilon < 1 \quad y \quad \lambda - \epsilon\alpha^{-1} - 2\epsilon > 1.$$

(Estas desigualdades dan las cotas para los términos fuera de la diagonal). Dado  $\alpha$  y  $\epsilon$  como en (34), es posible encontrar  $r$  lo suficientemente pequeño tal que para  $q \in \mathcal{B}(r)$ , se tiene

$$Df_q = \begin{pmatrix} A_{ss}(q) & A_{su}(q) \\ A_{us}(q) & A_{uu}(q) \end{pmatrix}$$

con

$$(35) \quad \begin{aligned} \|A_{ss}(q)\| &< \mu, \\ m(A_{ss}(q)) &> \lambda, \\ \|A_{su}(q)\| &< \epsilon \\ \|A_{us}(q)\| &< \epsilon, \\ \|Df_q - Df_0\| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Se dice que  $f$  satisface las **estimativas hiperbólicas** en una vecindad cuando las desigualdades anteriores son satisfechas. Con las notaciones fijadas se inicia a probar algunos resultados que nos ayuden a probar el teorema de la variedad estable, teorema 2.10.

LEMA 2.21. Sea  $f : \mathcal{B}(r) = \mathbb{E}^s(r) \times \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathbb{E}$  una función con  $f(0) = 0$ , se fija  $\alpha > 0$  y  $\epsilon > 0$  tal que se cumple (34), además  $f$  satisface las estimativas hiperbólicas (35) entonces

- a) Para  $q \in \mathcal{B}(r)$ , la derivada  $Df_q C^u(\alpha) \subset C^u(\alpha)$ .
- b) Sea  $q, q' \in \mathcal{B}(r)$  y  $q' \in \{q\} + C^u(\alpha)$ . Entonces se cumple lo siguiente:
  - (b.1)  $|\pi_s \circ f(q') - \pi_s \circ f(q)| \leq \alpha^{-1}(\mu + \epsilon\alpha)|\pi_u(q' - q)|$ ,
  - (b.2)  $|\pi_u \circ f(q') - \pi_u \circ f(q)| \geq (\lambda - \epsilon\alpha^{-1})|\pi_u(q' - q)|$ ,
  - (b.3)  $f(q') \in \{f(q)\} + C^u(\alpha)$ .
- c) Se asume que  $f(q_{-1}) = q$ ,  $f(q'_{-1}) = q'$ ,  $q' \in \{q\} + C^s(\alpha)$ , y todos los puntos  $q, q'$ ,  $q_{-1}, q'_{-1} \in \mathcal{B}(r)$ . Entonces,
  - (c.1)  $q'_{-1} \in \{q_1\} + C^s(\alpha)$ ,
  - (c.2)  $|\pi_s q'_{-1} - \pi_s q_{-1}| \geq (\mu + \epsilon\alpha)^{-1}|\pi_s q' - \pi_s q|$ .

DEMOSTRACIÓN. Para probar la parte (a) del lema se toma  $v = (v_s, v_u) \in C^u(\alpha) \setminus \{0\}$ , y  $q \in \mathcal{B}(r)$ .

Primero se nota que:

$$Df_q.v = \begin{pmatrix} A_{ss}(q) & A_{su}(q) \\ A_{us}(q) & A_{uu}(q) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_s \\ v_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ss}(q)v_s + A_{su}(q)v_u \\ A_{us}(q)v_s + A_{uu}(q)v_u \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{|\pi_s Df_q.v|}{|\pi_u Df_q.v|} &= \frac{|A_{ss}(q)v_s + A_{su}(q)v_u|}{|A_{us}(q)v_s + A_{uu}(q)v_u|} \\ &\leq \frac{\|A_{ss}(q)\||v_s| + \|A_{su}(q)\||v_u|}{m(A_{uu}(q))|v_u| - \|A_{us}(q)\||v_s|} \\ &= \frac{\|A_{ss}(q)\|\frac{|v_s|}{|v_u|} + \|A_{su}(q)\|}{m(A_{uu}(q)) - \|A_{us}(q)\|\frac{|v_s|}{|v_u|}} \\ &\leq \frac{\mu\alpha^{-1} + \epsilon}{\lambda - \epsilon\alpha^{-1}} \\ &= \frac{\alpha^{-1}(\mu + \epsilon\alpha)}{\lambda - \epsilon\alpha^{-1}} \\ &< \alpha^{-1}; \end{aligned}$$

esto se da al escoger  $\epsilon$  de manera que  $\mu + \epsilon\alpha < 1$  y  $\lambda - \epsilon\alpha^{-1} > 1$ . Por lo tanto  $Df_q C^u(\alpha) \subset C^u(\alpha)$ , siempre que  $q \in \mathcal{B}(r)$ . Esto demuestra la parte (a) del lema.

Para probar (b.1) la idea es calcular como varía  $\pi_s \circ f$  a lo largo del segmento que une  $q$  con  $q'$ ,  $\psi(t) = q + t(q' - q)$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Por el teorema de valor medio se obtiene

$$\begin{aligned} |\pi_s \circ f(q') - \pi_s \circ f(q)| &= |\pi_s \circ f \circ \psi(1) - \pi_s \circ f \circ \psi(0)|; \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{d}{dt} [\pi_s \circ f \circ \psi(t)] \right|. \end{aligned}$$

Se observa que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\pi_s \circ f \circ \psi(t)] &= \pi_s Df(\psi(t)).\psi'(t) \\ &= \pi_s \begin{pmatrix} A_{ss}(\psi(t)) & A_{su}(\psi(t)) \\ A_{us}(\psi(t)) & A_{uu}(\psi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_s(q' - q) \\ \pi_u(q' - q) \end{pmatrix}; \\ &= \pi_s \begin{pmatrix} A_{ss}(\psi(t))\pi_s(q' - q) + A_{su}(\psi(t))\pi_u(q' - q) \\ A_{us}(\psi(t))\pi_s(q' - q) + A_{uu}(\psi(t))\pi_u(q' - q) \end{pmatrix}; \\ &= A_{ss}(\psi(t))\pi_s(q' - q) + A_{su}(\psi(t))\pi_u(q' - q). \end{aligned}$$



Al hacer  $d = |\pi_s \circ f(q') - \pi_s \circ f(q)|$  se satisface que:

$$\begin{aligned}
d &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{su}(\psi(t))\| |\pi_u(q' - q)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{ss}(\psi(t))\| |\pi_s(q' - q)|; \\
&= \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{su}(\psi(t))\| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{ss}(\psi(t))\| \frac{|\pi_s(q' - q)|}{|\pi_u(q' - q)|} \right\} |\pi_u(q' - q)|; \\
&\leq \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{su}(\psi(t))\| + \alpha^{-1} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{ss}(\psi(t))\| \right\} |\pi_u(q' - q)|; \\
&\leq (\epsilon + \alpha^{-1} \mu) |\pi_u(q' - q)| \\
&= \alpha^{-1} (\mu + \epsilon \alpha) |\pi_u(q' - q)|.
\end{aligned}$$

con lo cual (b.1) es válido.

Para la prueba de (b.2) se necesita obtener una estimativa de la expansión mínima, podría tomarse la inversa de la función. Para obtener una función del espacio en sí misma, se divide el desplazamiento de  $q$  a  $q'$  en las direcciones de  $\mathbb{E}^s$  y  $\mathbb{E}^u$  y luego se aplica el teorema 1.9 a la parte que concierne al desplazamiento en la dirección de  $\mathbb{E}^u$ .

Sea  $q = (q_s, q_u)$  y  $q' = (q'_s, q'_u)$  para  $q, q'$  como en las hipótesis del lema. Sea  $z = (q_s, q'_u)$ , entonces

$$(36) \quad q' - q = (q' - z) + (z - q),$$

con  $z - q \in \{0\} \times \mathbb{E}^u$  y  $q' - z \in \mathbb{E}^s \times \{0\}$ .

Para  $y \in \mathbb{E}^u(r)$  y  $x \in \mathbb{E}^s(r)$  se definen las funciones

$$h(y) = \pi_u \circ f(q_s, y); \quad g(x) = \pi_u \circ f(x, 0).$$

Entonces,  $g(q_s) = \pi_u \circ f(q_s, 0) = h(0)$ . También  $Dg_x = \pi_u(Df_x(x, 0)) = A_{us}(x, 0)$ , por lo tanto  $\|Dg_x\| \leq \epsilon$ . Por el teorema de valor medio se tiene

$$|g(q_s) - g(0)| \leq \epsilon q_s \Rightarrow |h(0) - g(0)| \leq \epsilon q_s \Rightarrow |h(0)| \leq \epsilon |q_s| \leq \epsilon r.$$

Entonces  $Dh_y = \pi_u Df_y(q_s, y) = A_{uu}(q_s, y)$  el cual es un isomorfismo con norma mínima mayor que  $\lambda$ , y  $\|Dh_y - A_{uu}(0, 0)\| < \epsilon$ .

Por la proposición 1.12,  $h|_{\mathbb{E}^u(r)}$  está sobre  $\mathbb{E}^u(r)((\lambda - \epsilon)r - |h(0)|) \supset \mathbb{E}^u(r)((\lambda - 2\epsilon)r) \supset \mathbb{E}^u(r)$  y  $h$  tiene inversa única en este conjunto. También por el teorema 1.9, la derivada de  $h^{-1}$  está dada por  $D(h^{-1})_{h(y)} = (Dh_y)^{-1}$ , la cual tiene norma menor que  $\lambda^{-1}$  (ver (35)).

Además por el teorema de valor intermedio para  $h^{-1}$ ,

$$|h^{-1}(w_2) - h^{-1}(w_1)| \leq \lambda^{-1} |w_2 - w_1|.$$

Al hacer  $w_2 = h(q'_u) = \pi_u \circ f(z)$  y  $w_1 = h(q_u) = \pi_u \circ f(q)$ , se tiene  $h^{-1}(w_2) = q'_u$  y  $h^{-1}(w_1) = q_u$ , de esto resulta

$$(37) \quad \lambda |\pi_u(q' - q)| \leq |\pi_u \circ f(z) - \pi_u \circ f(q)|.$$

Se retorna al desplazamiento de  $z$  a  $q'$ , al usar (36) se tiene

$$\begin{aligned} |\pi_u \circ f(z) - \pi_u \circ f(q)| &\leq \sup \|A_{us}\| |\pi_s(q' - q)| \\ &\leq \epsilon |\pi_s(q' - q)|. \end{aligned}$$

De donde

$$(38) \quad |\pi_u \circ f(z) - \pi_u \circ f(q)| \leq \epsilon \alpha^{-1} |\pi_u(q' - q)|.$$

De las ecuaciones (37) y (38) se obtiene

$$\begin{aligned} |\pi_u \circ f(q') - \pi_u \circ f(q)| &= |\pi_u \circ f(q') - \pi_u \circ f(z) + \pi_u \circ f(z) - \pi_u \circ f(q)| \\ &\geq |\pi_u \circ f(z) - \pi_u \circ f(q)| - |\pi_u \circ f(q') - \pi_u \circ f(z)|, \\ &\geq \lambda |\pi_u(q' - q)| - \epsilon \alpha^{-1} |\pi_u(q' - q)| \\ &= (\lambda - \epsilon \alpha^{-1}) |\pi_u(q' - q)|, \end{aligned}$$

es decir (b.2) es válido.

Para probar (b.3) usamos (b.1) y (b.2) de donde se obtiene

$$\frac{|\pi_s[f(q') - f(q)]|}{|\pi_u[f(q') - f(q)]|} \leq \alpha^{-1} \frac{\mu + \epsilon \alpha}{(\lambda - \epsilon \alpha^{-1})} < \alpha^{-1}.$$

En esta última desigualdad se uso el hecho de que  $\mu + \epsilon \alpha < 1$  y  $\lambda - \epsilon \alpha^{-1} > 1$ . Por lo tanto  $f(q') \in f(q) + C^u(\alpha)$ , esto prueba (b.3).

Para probar (c.1) se usa el hecho de que  $C^u(\alpha)$  y  $C^s(\alpha)$  son conos complementarios, es decir

$$C^s(\alpha) = \mathbb{E} \setminus \text{int}(C^u(\alpha)).$$

Como  $q' \notin \{q\} + C^u(\alpha)$ , por el lema 2.21(b.3) se tiene que  $q'_{-1} \notin \{q_{-1}\} + C^u(\alpha)$ , entonces  $q'_{-1} \in \{q_{-1}\} + C^s(\alpha)$ . Es decir (c.1) es verdad.

Para probar (c.2) se sigue el método dado en la prueba del lema 2.21 (b.1).

Sea  $\psi(t) = q_{-1} + t(q'_{-1} - q_{-1})$ ,

$$\begin{aligned} |\pi_s q' - \pi_s q| &= |\pi_s \circ f \circ \psi(1) - \pi_s \circ f \circ \psi(0)| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{d}{dt} \pi_s \circ f \circ \psi(t) \right| \end{aligned}$$

Se observa que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \pi_s \circ f \circ \psi(t) &= \pi_s Df(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \\ &= \pi_s \begin{pmatrix} A_{ss}(\psi(t)) & A_{su}(\psi(t)) \\ A_{us}(\psi(t)) & A_{uu}(\psi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_s(q'_{-1} - q_{-1}) \\ \pi_u(q'_{-1} - q_{-1}) \end{pmatrix}; \\ &= \pi_s \begin{pmatrix} A_{ss}(\psi(t))\pi_s(q'_{-1} - q_{-1}) + A_{su}(\psi(t))\pi_u(q'_{-1} - q_{-1}) \\ A_{us}(\psi(t))\pi_s(q'_{-1} - q_{-1}) + A_{uu}(\psi(t))\pi_u(q'_{-1} - q_{-1}) \end{pmatrix}; \\ &= A_{ss}(\psi(t))\pi_s(q'_{-1} - q_{-1}) + A_{su}(\psi(t))\pi_u(q'_{-1} - q_{-1}). \end{aligned}$$

Luego al hacer  $e = |\pi_s \circ f(q') - \pi_s \circ f(q)|$  se obtiene, resulta

$$\begin{aligned}
e &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{su}(\psi(t))\| |\pi_u(q'_{-1} - q_{-1})| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{ss}(\psi(t))\| |\pi_s(q'_1 - q_1)|; \\
&= \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{su}(\psi(t))\| \frac{|\pi_u(q'_{-1} - q_{-1})|}{|\pi_s(q'_{-1} - q_{-1})|} + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{ss}(\psi(t))\| \right\} |\pi_s(q'_{-1} - q_{-1})|; \\
&\leq \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{ss}(\psi(t))\| + \alpha \sup_{0 \leq t \leq 1} \|A_{su}(\psi(t))\| \right\} |\pi_s(q'_{-1} - q_{-1})|; \\
&\leq (\mu + \alpha\epsilon) |\pi_s(q'_{-1} - q_{-1})|.
\end{aligned}$$

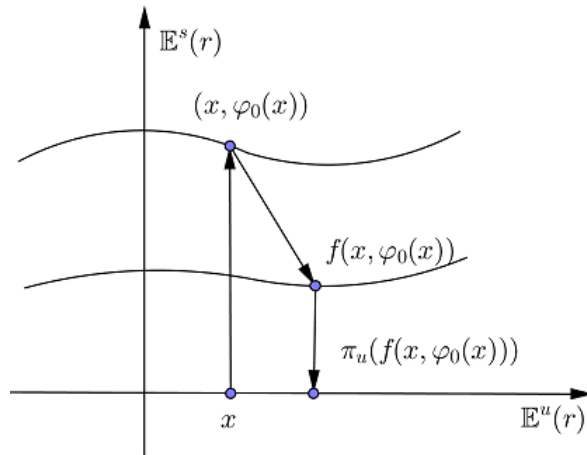
Por lo tanto  $|\pi_s q'_{-1} - \pi_s q_{-1}| \geq (\mu + \epsilon\alpha)^{-1} |\pi_s q' - \pi_s q|$ . Es decir (c.2) es válido. Esto termina la prueba del lema.  $\square$

DEFINICIÓN 2.22. Sean  $f : \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{E}$  una función con  $f(0) = 0$ , tal que las ecuaciones (34) y (35) son satisfechas, entonces para cada  $\varphi_0 : \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathbb{E}^s(r)$  con  $\|(D\varphi_0)_y\| \leq \alpha^{-1}$  y  $\sigma_0 : \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathcal{B}(r)$  la función asociada definida por  $\sigma_0(y) = (\varphi_0(y), y)$  se define la **transformación grafo de  $\sigma_0$**  a la función  $\sigma_1 : \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathbb{E}^s(r)$  definida por

$$(39) \quad \sigma_1 = f \circ \sigma_0 \circ [\pi_u \circ f \circ \sigma_0]^{-1}|_{\mathbb{E}^u(r)}$$

Ver el gráfico 4

FIGURA 4. Transformación grafo



OBSERVACIÓN 2.23. Las constante de Lipschitz de  $\sigma_1$  es la misma constante de Lipschitz de  $\sigma_0$ , tal como se prueba en el corolario 2.25.

LEMA 2.24. Sean  $f : \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{E}$  una función de clase  $C^1$  con  $f(0) = 0$ ,  $D_0^u$  un disco  $C^1$  inestable sobre  $\mathbb{E}(r)$ . Además si se cumple (34), es decir  $\lambda - \epsilon\alpha^{-1} > 1 + 2\epsilon > 1$ ,  $\mu + \epsilon\alpha < 1 - \epsilon < 1$  y las estimativas hiperbólicas son satisfechas (35). Entonces para un disco inestable  $D_0^u$  (de radio  $r > 0$ ) se cumple:

a)  $D_1^u = f(D_0^u) \cap \mathcal{B}(r)$  es un disco inestable sobre  $\mathbb{E}(r)$  y

$$\text{diam}[\pi_u(f^{-1}(D_1^u) \cap D_0^u)] \leq (\lambda - \epsilon\alpha^{-1})^{-1}2r.$$

b) Inductivamente, sea  $D_n^u = f(D_{n-1}^u) \cap \mathcal{B}(r)$ . Entonces,  $D_n^u$  es un disco inestable para  $n \geq 1$  y

$$\text{diam}[\pi_u \bigcap_{j=0}^n f^{-1}(D_j^u)] \leq (\lambda - \epsilon\alpha^{-1})^{-n}2r.$$

DEMOSTRACIÓN. Para la prueba de (a) partimos de que  $D_0^u$  es un disco  $C^1$  inestable, entonces es el gráfico de una función  $C^1$ ,  $\varphi_0 : \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathbb{E}^s(r)$  con  $\|D(\varphi_0)_y\| \leq \alpha^{-1}$ . Sea  $\sigma_0 : \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathcal{B}(r)$  la función asociada definida por  $\sigma_0 = (\varphi_0(y), y)$ .

Sea  $h = \pi_u \circ f \circ \sigma_0$ , se necesita saber el tamaño del conjunto cubierto por  $h$  y sobre el cual  $h$  tiene inversa y esta inversa es única. Para ello se aplica el teorema 1.12 para lo cual se necesita estimar  $\|Dh_y - A_{uu}(0)\|$  :

$$\begin{aligned} \|Dh_y - A_{uu}(0)\| &= \|D(\pi_u \circ f \circ \sigma_0)_y - A_{uu}(0)\| \\ &= \left\| \pi_u \begin{pmatrix} A_{ss}(\sigma_0(y)) & A_{su}(\sigma_0(y)) \\ A_{us}(\sigma_0(y)) & A_{uu}(\sigma_0(y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D(\varphi_0)_y \\ 1 \end{pmatrix} - A_{uu}(0) \right\| \\ &= \left\| \pi_u \begin{pmatrix} A_{ss}(\sigma_0(y))D(\varphi_0)_y + A_{su}(\sigma_0(y)) \\ A_{us}(\sigma_0(y))D(\varphi_0)_y + A_{uu}(\sigma_0(y)) \end{pmatrix} - A_{uu}(0) \right\| \\ &= \|A_{us}(\sigma_0(y))D(\varphi_0)_y + A_{uu}(\sigma_0(y)) - A_{uu}(0)\| \\ &\leq \|A_{uu}(\sigma_0(y)) - A_{uu}(0)\| + \|A_{us}(\sigma_0(y))\| \|D(\varphi_0)_y\| \\ &\leq (\epsilon + \epsilon\alpha^{-1}) \\ &= \lambda\lambda^{-1}(\epsilon + \epsilon\alpha^{-1}) \\ &= \lambda(\lambda^{-1}\epsilon + \epsilon\alpha^{-1}\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Al tomar  $\beta = 1 - \epsilon\lambda^{-1} - \epsilon\alpha^{-1}\lambda^{-1}$  en el teorema 1.12 se tiene que  $h$  es un difeomorfismo local de clase  $C^1$  y tiene inversa definida sobre

$$h(\mathbb{E}^u(r)) \supset \{h(0)\} + \mathbb{E}^u((\lambda - \epsilon - \epsilon\alpha^{-1})r) \supset \mathbb{E}^u((\lambda - \epsilon - \epsilon\alpha^{-1})r - |h(0)|).$$

En la última línea se necesita estimar  $|h(0)|$ , para ello se observa que  $h(0) = \pi_u \circ f(\varphi_0(0), 0)$  con  $|\varphi_0(0)| \leq r$  y  $\pi_u \circ f(0, 0) = 0$ , por la desigualdad del valor medio aplicado a  $\pi_u \circ f$  se tiene que

$$\begin{aligned} |h(0)| &= |\pi_u \circ f(\varphi_0(0), 0) - \pi_u \circ f(0, 0)| \\ &\leq \sup(\|A_{us}\|)|\varphi_0(0) - 0| \\ &\leq \epsilon r. \end{aligned}$$

Al usar esta estimativa se tiene que  $h$  tiene una inversa definida sobre

$$h(\mathbb{E}^u(r)) \supset \mathbb{E}^u((\lambda - \epsilon\alpha^{-1})r - |h(0)|) \supset \mathbb{E}^u((\lambda - \epsilon - \epsilon\alpha^{-1})r) \supset \mathbb{E}^u(r).$$

Como  $h = \pi_u \circ f \circ \sigma_0$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$  que cubre  $\mathbb{E}^u(r)$ ,  $h^{-1}(\mathbb{E}^u(r)) \subset \mathbb{E}^u(r)$ .

Sea la transformación grafo de  $\sigma_0$  (ver definición 39),

$$\sigma_1 = f \circ \sigma_0 \circ h^{-1}|_{\mathbb{E}^u(r)}$$

Se observa que  $\pi_u \circ \sigma_1 = \pi_u \circ f \circ \sigma_0 \circ h^{-1} = h \circ h^{-1} = id|_{\mathbb{E}^u(r)}$ . Por lo tanto,  $\sigma_1$  es un gráfico sobre  $\mathbb{E}^u(r)$ . También se necesita una estimación para  $\|D(h^{-1})_y\|$ . Para  $v_u \in \mathbb{E}^u$ ,

$$\begin{aligned} |D(h)_y v_u| &= |D(\pi_u \circ f \circ \sigma_0)_y v_u| \\ &= |\pi_u Df(\sigma_0(y)) D(\sigma_0)_y v_u| \\ &= \left| \pi_u \begin{pmatrix} A_{ss}(\sigma_0(y)) & A_{su}(\sigma_0(y)) \\ A_{us}(\sigma_0(y)) & A_{uu}(\sigma_0(y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D(\varphi_0)_y v_u \\ v_u \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \pi_u \begin{pmatrix} A_{ss}(\sigma_0(y)) D(\varphi_0)_y v_u + A_{su}(\sigma_0(y)) v_u \\ A_{us}(\sigma_0(y)) D(\varphi_0)_y v_u + A_{uu}(\sigma_0(y)) v_u \end{pmatrix} \right| \\ &= |A_{us}(\sigma_0(y)) D(\varphi_0)_y v_u + A_{uu}(\sigma_0(y)) v_u| \\ &\geq |A_{uu}(\sigma_0(y)) v_u| - |A_{us}(\sigma_0(y)) D(\varphi_0)_y v_u| \\ &\geq m(A_{uu}(\sigma_0(y))) |v_u| - \|A_{us}(\sigma_0(y))\| \|D(\varphi_0)_y\| |v_u| \\ &\geq (\lambda - \epsilon \alpha^{-1}) |v_u|. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $m(Dh_y) \geq \lambda - \epsilon \alpha^{-1}$ ,  $\|D(h^{-1})_y\| \leq (\lambda - \epsilon \alpha^{-1})^{-1}$ , y al usar el teorema de valor intermedio para  $h^{-1}$  se tiene

$$|h^{-1}(y_2) - h^{-1}(y_1)| \leq (\lambda - \epsilon \alpha^{-1})^{-1} |y_2 - y_1|.$$

Puesto que  $h^{-1}(\mathbb{E}^u(r)) = \pi_u(f^{-1}(D_1^u) \cap D_0^u)$ , se tiene que

$$\text{diam}[\pi_u(f^{-1}(D_1^u) \cap D_0^u)] \leq (\lambda - \epsilon \alpha^{-1})^{-1} 2r.$$

Si se define  $\varphi_1(y) = \pi_s \circ \sigma_1(y) = \pi_s \circ f(\varphi_0 \circ h^{-1}(y), h^{-1}(y))$ , entonces

$$\begin{aligned} \|D(\varphi_1)_y\| &\leq \|A_{su}(\sigma_0 \circ h^{-1}(y)) D(h^{-1})_y\| \\ &\quad + \|A_{ss}(\sigma_0 \circ h^{-1}(y)) D(\varphi_0)_{h^{-1}(y)} D(h^{-1})_y\| \\ (40) \quad &\leq \epsilon (\lambda - \epsilon \alpha^{-1})^{-1} + \mu \alpha^{-1} (\lambda - \epsilon \alpha^{-1})^{-1} \\ &\leq \alpha^{-1} \left( \frac{\mu + \epsilon \alpha}{\lambda - \epsilon \alpha^{-1}} \right) \\ &\leq \alpha^{-1}. \end{aligned}$$

en este argumento se usó el hecho que  $\lambda - \epsilon \alpha^{-1} > 1$  y  $\mu + \epsilon \alpha < 1$ . Esto prueba (a).

La prueba de (b) sigue de (a) por inducción sobre  $n$ . Esto concluye la prueba del lema.  $\square$

**COROLARIO 2.25.** *En las condiciones del lema 2.24 y la definición 2.22 se preserva la constante de Lipschitz mediante la transformación grafo.*

**DEMOSTRACIÓN.** Esto se probará por el proceso de inducción, sea  $\varphi_0 : \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathbb{E}^s(r)$  con  $\|(D\varphi_0)_y\| \leq \alpha^{-1}$  y  $\sigma_0 : \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathcal{B}(r)$  la función asociada definida por  $\sigma_0(y) = (\varphi_0(y), y)$ .

- Para  $n = 1$  la transformación grafo de  $\sigma_0$ , entonces por (40) se tiene que la transformación grafo de  $\sigma_0$  cumple  $\varphi_1(y) = \pi_s \circ \sigma_1(y)$  con  $\|D(\varphi_1)_y\| \leq \alpha^{-1}$  es decir mantiene la constante de Lipschitz.
- Se asume que para  $n-1$  la transformación grafo de  $\sigma_{n-2}$  tiene constante de Lipschitz menor que  $\alpha^{-1}$ .
- Se prueba que que la transformación grafo  $\sigma_n$  de  $\sigma_{n-1}$  mantiene la constante de Lipschitz. En efecto puesto que  $\sigma_n = \sigma(\sigma_{n-1})$  y como  $\sigma_{n-1}$  tiene constante de Lipschitz menor que  $\alpha^{-1}$  (por hipótesis inductiva), entonces su imagen  $\sigma(\sigma_{n-1}) = \sigma_n$  mantiene la constante de Lipschitz (primer paso de inducción). Esto termina la prueba del corolario.

□

## 2.2. La variedad estable como el gráfico de una función.

PROPOSICIÓN 2.12 *La variedad estable local,  $W_r^s(0) = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(\mathcal{B}(r))$ , es el gráfico de una función  $\varphi^s : \mathbb{E}^s(r) \rightarrow \mathbb{E}^u(r)$  con  $\varphi^s(0) = 0$  y además es lipschitziana con constante de Lipschitz  $\alpha > 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $S_n = \bigcap_{j=0}^n f^{-j}(\mathcal{B}(r))$ , entonces  $W_r^s(0) = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ : la órbita positiva de un punto en la intersección infinita está contenida en  $\mathcal{B}(r)$ , entonces  $S_n$  se encuentra en  $W_r^s(0)$ .

El primer paso es usar el lema 2.24 para ver que  $W_r^s(0) \cap [\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)]$  es a lo más un punto para cada  $x \in \mathbb{E}^s(r)$ . Sea  $x \in \mathbb{E}^s(r)$  fijo y sea  $D_0^u = \{x\} \times \mathbb{E}^u(r)$  este es un disco inestable, para ello basta tomar la función constante  $x$ , por el lema 2.24 se tiene que

$$D_n^u = f(D_{n-1}^u(x)) \cap \mathcal{B}(r)$$

es un disco inestable, y

$$[\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)] \cap S_n = \bigcap_{j=0}^n f^{-j}(D_j^u(x)) \subset D_0^u(x)$$

es una sucesión de conjuntos cerrados y completos cuyos diámetros están acotados por  $(\lambda - \epsilon\alpha^{-1})^{-n}2r$ . Puesto que los diámetros de  $[\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)] \cap S_n$  tienden a cero cuando  $n$  tiende a infinito, entonces la intersección  $[\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)] \cap W_r^s(0)$  es un punto singular para cada  $x$  y  $W_r^s(0)$  es un gráfico sobre  $\mathbb{E}^s$ .

Para mostrar que el gráfico es Lipschitz, sea  $q \in W_r^s(0)$ . Se asume que

$$q' \in W_r^s(0) \cap [\{q\} + C^u(\alpha)].$$

Porque  $q, q' \in W_r^s(0)$ , entonces  $f^j(q), f^j(q') \in \mathcal{B}(r) \forall j \geq 0$ . Por inducción al aplicar el lema 2.21 (b) se tiene que  $\forall j \geq 0$ ,

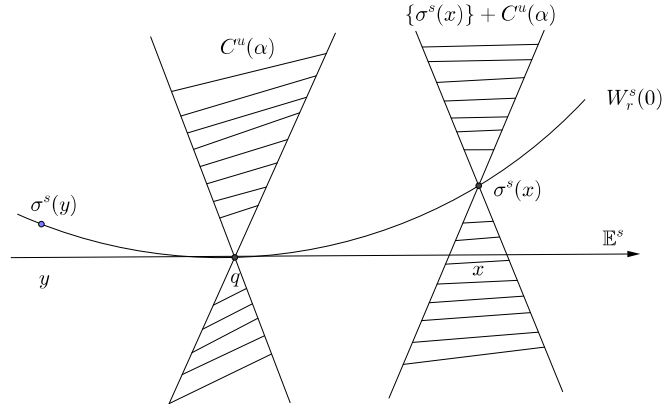
$$f^j(q) \in \{f^j(q')\} + C^u(\alpha)$$

y

$$|\pi_u(f^j(q) - f^j(q'))| \geq (\lambda - \epsilon\alpha^{-1})^j |\pi_u(q - q')|.$$

Si  $q' \neq q$ , entonces  $(\lambda - \epsilon\alpha^{-1})^j$  se va a infinito, lo que quiere decir que  $f^j(q)$  o  $f^j(q')$  debe dejar  $\mathcal{B}(r)$ . Por lo tanto  $q = q'$ , y existe a lo mas un punto en  $W_r^s(0) \cap [\{q\} + C^u(\alpha)]$ . Al aplicar esto a  $x, y \in \mathbb{E}(r)$  con  $x \neq y$ , desde que  $\sigma^s(x) = (x, \varphi^s(x)) \neq (y, \varphi^s(y)) = \sigma^s(y)$ , se sigue que  $\sigma^s(y) \notin \{\sigma^s(x)\} + C^u(\alpha)$ ,  $\sigma^s(y) - \sigma^s(x) \notin C^u(\alpha)$  y  $\sigma^s(y) - \sigma^s(x) \notin C^s(\alpha)$ . Ver gráfico 5. Esto es,  $\text{Lip}(\pi_u \circ \sigma^s) \leq \alpha$ . Esto completa la demostración de la proposición.  $\square$

FIGURA 5. Cono trasladado



PROPOSICIÓN 2.26. Sea  $\mu + \epsilon\alpha < 1$  y  $q \in W_r^s(0)$ , entonces  $|f^j(q)| \leq \alpha(\mu + \epsilon\alpha)^j |q|$  para  $j \geq 0$ . Por lo tanto  $f^j(q)$  converge al punto fijo  $0$  exponencialmente, (ver Proposición 1.6).

DEMOSTRACIÓN. Porque  $W_r^s(0)$  es  $\alpha$ -Lipschitz, se tiene  $|\pi_u[f^j(q) - 0]| \leq \alpha |\pi_s[f^j(q) - 0]|$  esto es los iterados  $f^j(q) \in \{0\} + C^s(\alpha)$ . Al aplicar el lema 2.21(b) a  $f^j(q)$  y  $f^j(0) = 0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} (\mu + \epsilon\alpha)|f^{j-1}(q)| &\geq (\mu + \epsilon\alpha)|\pi_s \circ f^{j-1}(q)| \\ &= (\mu + \epsilon\alpha)|\pi_s \circ [f^{j-1}(q) - f^{j-1}(0)]| \\ &\geq \alpha^{-1}(\mu + \epsilon\alpha)|\pi_u \circ [f^{j-1}(q) - f^{j-1}(0)]| \\ &\geq |\pi_s \circ [f^j(q) - f^j(0)]| \\ &\geq |\pi_s \circ f^j(q)|. \end{aligned}$$

Por inducción se tiene

$$(41) \quad (\mu + \epsilon\alpha)^j |q| \geq |\pi_s \circ f^j(q)|.$$

Entonces, la componente inestable está acotada por  $\alpha$  veces esta cantidad:

$$|\pi_u \circ f^j(q)| \leq |\pi_s \circ f^j(q)| \leq \alpha(\mu + \epsilon\alpha)^j |q|.$$

Porque se hace uso de la norma del máximo de las componentes se tiene:

$$|f^j(q)| \leq (\mu + \epsilon\alpha)^j |q| \max\{1, \alpha\}.$$

Además al hacer  $j \rightarrow +\infty$  se tiene que  $f^j(q) \rightarrow 0$  que es el punto fijo. Esto completa la demostración.  $\square$

**2.3. Diferenciabilidad de la variedad estable.** En esta subsección se prueba que la variedad estable es de clase  $C^1$  cuando  $f$  lo es.

LEMA 2.27. *Sea  $q \in W_r^s(0)$ . Entonces, los conos*

$$C^{s,n}(q) \subset C^{s,n-1}(q) \subset \dots \subset C^{s,1}(q) \subset C^{s,0}(q),$$

*y existe un ángulo positivo entre los vectores en  $C^{s,n+1}(q)$  y el complemento de  $C^{s,n}(q)$ . La intersección  $\bigcap_{n \geq 0} C^{s,n}(q)$  es un plano  $P_q$  que es el gráfico de la aplicación lineal  $L_q : \mathbb{E}^s \rightarrow \mathbb{E}^u$ . El plano  $P_q$  depende continuamente de  $q$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 2.21 (a),  $Df_{f^j(q)} C^u(\alpha) \subset C^u(\alpha)$ , entonces

$$C^{s,1}(f^j(q)) = [Df_{f^j(q)}]^{-1} C^s(\alpha) \subset C^s(\alpha) = C^{s,0}(f^j(q)).$$

Por inducción se tiene,

$$C^{s,n}(q) \subset C^{s,n-1}(q) \subset \dots \subset C^{s,1}(q) \subset C^{s,0}(q).$$

(Ver figura 6). Del argumento de la proposición 2.12 aplicado a esta sucesión de aplicaciones lineales en lugar de una función no lineal, se tiene que  $C^{s,n}(q)$  converge un conjunto que es el gráfico de una función de Lipschitz de  $\mathbb{E}^s$  a  $\mathbb{E}^u$ . (Esto significa que el máximo ángulo en el cono  $C^{s,n}(q)$  converge a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .) Cada uno de estos conos  $C^{s,n}(q)$  contiene un plano, entonces se sigue que la intersección contiene un plano  $P_q$  (que depende de  $q$ ). Puesto que la intersección en el gráfico de una función Lipschitz, entonces la intersección es igual al plano  $P_q$ , el cual es el gráfico de una aplicación lineal  $L_q : \mathbb{E}^s \rightarrow \mathbb{E}^u$ .

La estimación dada en la prueba del lema 2.21 (a) muestra que existe un ángulo positivo entre  $C^{s,1}(f^n(q))$  y el complemento de  $C^{s,0}(f^n(q))$ , lo cual implica que existe un ángulo positivo entre vectores de

$$C^{s,n+1}(q) = D(f^{-n})_{f^n(q)} C^{s,1}(f^n(q))$$

y el complemento de

$$C^{s,n}(q) = D(f^{-n})_{f^n(q)} C^{s,0}(f^n(q)).$$



El cono  $C^{s,n+1}(q) \setminus \{q\}$  está en el interior de  $C^{s,n}(q)$ , entonces para  $q'$  suficientemente cerca a  $q$  se tiene,  $P_{q'} \subset C^{s,n+1}(q') \subset C^{s,n}(q)$ . Por la topología en el conjunto de planos esto muestra que  $P_q$  es una función continua de  $q$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.16** *La variedad estable local,  $W_r^s(0)$ , es de clase  $C^1$  y es tangente a  $\mathbb{E}^s$  en el punto fijo  $0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Hasta aquí se ha mostrado que  $W_r^s(0)$  es el gráfico de una función de Lipschitz  $\varphi^s : \mathbb{E}^s(r) \rightarrow \mathbb{E}^u(r)$  con  $Lip(\varphi^s) \leq \alpha$ . Se dió  $\sigma^s : \mathbb{E}^s(r) \rightarrow \mathcal{B}(r)$  definida por  $\sigma^s(x) = (x, \varphi^s(x))$ .

Se procede a probar que  $\sigma^s$  y  $\varphi^s$  son  $C^1$ .

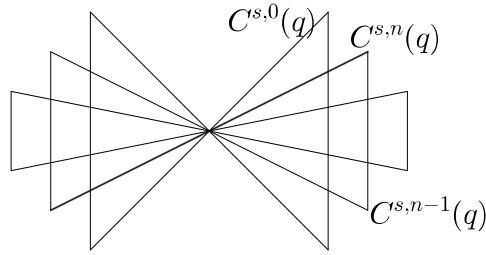
Para algún  $q \in W_r^s(0)$ , se tiene que  $\sigma^s(\mathbb{E}^s(r)) \subset \{q\} + C^s(\alpha)$ . Para obtener la derivada de  $\varphi^s$ , se usa la comparación de la acción no lineal de  $f$  en  $C^s(\alpha)$  con la acción lineal de  $Df_q$  en  $C^s(\alpha)$ .

Se define

$$\begin{aligned} C^{s,0}(q) &= C^s(\alpha) \\ C^{s,n}(q) &= (Df_q^n)^{-1}C^s(\alpha), \text{ para } n \geq 1. \end{aligned}$$

El objetivo es probar que  $\varphi^s$  es diferenciable en  $x_0 = \pi_s q$  con  $D\varphi_{x_0}^s = L_q$  y  $P_q = T_q W_r^s(0)$ .

FIGURA 6. Conos encajados



Como  $P_q$  varía continuamente esto muestra que  $\varphi^s$  es de clase  $C^1$ . Porque  $P_0 = \mathbb{E}^s \times \{0\}$ , esto muestra que  $W_r^s(0)$  es tangente a  $\mathbb{E}^s$  en  $0$ .

Para simplificar la prueba se asume que  $f$  es invertible. La prueba que sigue puede ser modificada cuando  $f$  no es invertible, pero se vuelve menos sencilla: esto involucra probar que  $\sigma^s(x) - \sigma^s(x_0) \notin C^{s,n}(\sigma^s(x_0))$  es imposible.

Por la definición de conos,

$$D(f^{-n-1})_{f^{n+1}(q)} C^{s,0}(f^{n+1}(q)) = C^{s,n+1}(q).$$

Por el lema 2.27,

$$C^{s,n+1}(q) \cap \{v : |v| = 1\} \subset \text{int}(C^{s,n}(q))$$

y existe un ángulo positivo entre vectores de  $C^{s,n+1}(q)$  y el complemento de  $C^{s,n}(q)$ . Para comparar el efecto de  $f^{-n-1}$  y  $D(f^{-n-1})_{f^{n+1}(q)}$ , solo se puede usar pequeños desplazamientos, entonces se define los **conos truncados**

$$C^{s,n}(f^{n+1}(q), \delta) = C^{s,n}(f^{n+1}(q)) \cap \pi_s^{-1}(\mathbb{E}^s(\delta)).$$

Por la diferenciabilidad de  $f^{-n-1}$  se tiene que existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} f^{-n-1}(\{f^{n+1}(q)\} + C^{s,0}(f^{n+1}(q), \delta)) &= f^{-n-1}(f^{n+1}(q)) \\ &\quad + Df_q^{-n-1}(C^{s,0}(f^{n+1}(q), \delta)) \\ &= \{q\} + Df_q^{-n-1}(C^{s,0}(f^{n+1}(q), \delta)) \\ &\subset \{q\} + Df_q^{-n}(C^{s,0}(f^{n+1}(q), \delta)) \\ &= \{q\} + C^{s,n}(q). \end{aligned}$$

Es decir

$$(42) \quad f^{-n-1}(\{f^{n+1}(q)\} + C^{s,0}(f^{n+1}(q), \delta)) \subset \{q\} + C^{s,n}(q).$$

Por la continuidad de  $\sigma^s$  y  $f^{n+1}$ , además el hecho que  $\varphi^s$  es  $\alpha$ -Lipschitz se tiene que existe  $\eta > 0$  tal que si  $|x - x_0| \leq \eta$ , entonces

$$f^{n+1}(\sigma^s(x)) \in f^{n+1}(\sigma^s(x_0)) + C^{s,0}(f^{n+1}(\sigma^s(x_0)), \delta)$$

Por la inclusión (42) y al usar  $f^{-n-1}$  resulta que

$$\sigma^s(x) \in \{\sigma^s(x_0)\} + C^{s,n}(\sigma^s(x_0)).$$

Esto es, se ha probado que dado un  $n = \eta(n) > 0$  tal que para  $|x - x_0| < \eta$ ,

$$\sigma^s(x) - \sigma^s(x_0) \in C^{s,n}(\sigma^s(x_0)),$$

i.e., se mostró que  $\sigma^s$  satisface la definición de la derivada en  $x_0$ . Esto termina la prueba de la proposición.  $\square$

**TEOREMA 2.17** Si  $f : \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{E}$  es  $C^k$  para  $k \geq 1$ , entonces  $W_r^s(0)$  es  $C^k$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $k = 1$ , entonces esto se cumple por la proposición 2.16. Se asume que  $f$  es  $C^k$ ,  $k \geq 2$  con  $f(0) = 0$ .

Sea la función  $F(p, v) = (f(p), Df_p v)$ , esta función  $F$  está definida para  $(p, v)$  con  $p \in \mathcal{B}(r)$  y  $v$  es un vector tangente en  $p$ ,  $v \in T_p \mathbb{E} \approx \mathbb{E}$ .

Entonces  $F$  es  $C^{k-1}$ ,  $F(0, 0) = (0, 0)$ , y

$$DF_{(p,v)}(\dot{p}, \dot{v}) = \begin{pmatrix} Df_p \dot{p} \\ D^2 f_p(v, \dot{p}) + Df_p \dot{v} \end{pmatrix},$$

entonces

$$DF_{(0,0)}(\dot{p}, \dot{v}) = \begin{pmatrix} Df_0 \dot{p} \\ Df_0 \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_0 & 0 \\ 0 & Df_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \end{pmatrix}.$$

Esto es,  $(0,0)$  es un punto hiperbólico para  $F$ . Por inducción  $F$  tiene una variedad estable  $C^{k-1}$ ,  $W_r^s((0,0), F)$ . Esta variedad es caracterizada por los puntos  $(p, v)$  tales que  $p_j \in \mathcal{B}(r)$  y  $|v_j| \leq r$ ,  $\forall j \geq 0$  donde  $(p_j, v_j) = F^j(p, v)$ . Por lo tanto,  $p \in W_r^s(0, f)$ .

En efecto,  $|v_j| = |Df_p^j(p)|$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito. Pero los vectores en  $TW_r^s(0, f)$  tienen esta propiedad.

Por la unicidad de  $W_r^s((0,0), F)$  y las dimensiones de  $T_p W_r^s(0, f)$  y  $W_r^s((0,0), F) \cap (\{p\} \times T_p \mathbb{E})$ ,

$$\{v : (p, v) \in W_r^s((0,0), F)\} = T_p W_r^s(0, f).$$

Esto es,  $TW_r^s(0, f)$  es  $C^{k-1}$  y  $W_r^s(0, f)$  es  $C^k$ . Es decir el teorema es válido.  $\square$

**2.4. La variedad inestable.** Aquí se dan los resultados que ayuden a dar probar que la variedad inestable local también es una variedad diferenciable del mismo tipo de diferenciabilidad de  $f$ .

LEMA 2.28. Sean  $D^s = D_0^s$  un disco  $\alpha$ -Lipschitz estable sobre  $\mathbb{E}^s(r)$ ,  $f : \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{E}$  que satisface las relaciones (34) y (35).

a) Entonces,  $D_1^s = f^{-1}(D^s) \cap \mathcal{B}(r)$  es un disco  $\alpha$ -Lipschitz estable sobre  $\mathbb{E}^s(r)$  y

$$\text{diam}[f(D_1^s)] \leq (\mu + \epsilon\alpha)2r.$$

b) Inductivamente se define  $D_n^s = f^{-1}(D_{n-1}^s) \cap \mathcal{B}(r)$ . Entonces,  $D_n^s$  es un disco  $\alpha$ -Lipschitz estable para  $n \geq 1$  y

$$\text{diam}[f^n(D_j^s)] \leq (\mu + \epsilon\alpha)^n 2r.$$

DEMOSTRACIÓN. El primer paso es mostrar que  $D_1^s = f^{-1}(D^s)$  contiene exactamente un punto en cada fibra  $\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)$ . Pero  $p \in f^{-1}(D^s) \cap [\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)]$  si y solo si  $f(p) \in D^s \cap f[\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)]$  y  $p \in \{x\} \times \mathbb{E}^u(r)$ . Por el lema 2.24, el segundo conjunto es el gráfico de una función de clase  $C^1$ ,  $\psi : \mathbb{E}^u(r) \rightarrow \mathbb{E}^s(r)$  la cual tiene derivada menor que  $\alpha^{-1}$ . Por lo tanto existe un único punto en la intersección de estos conjuntos. Este hecho puede ser visto al considerar la composición  $\pi_u \circ \sigma(\pi_s \psi)$ , la cual es una contracción.

Sea  $z$  el punto de intersección:  $\{z\} = D^s \cap f[\{x\} \times \mathbb{E}^u(r)]$ . Por la prueba del lema 2.24, existe un único punto  $p \in \{x\} \times \mathbb{E}^u(r)$  con  $f(p) = z$ . Esto es,  $p \in f^{-1}(D^s) \cap \{x\} \times \mathbb{E}^u(r)$  es único. Por el lema 2.21 (c.1) el gráfico es  $\alpha$ -Lipschitz y  $\text{diam}[f(D_1^s)] \leq (\mu + \epsilon\alpha)2r$ . Esto indica el cambio en el lema 2.24.  $\square$

Finalmente se quiere dar una caracterización de los puntos en  $W_r^u$ . Esto se da en la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 2.29.** *Si  $p \in W_r^u$ , entonces algún tiempo pasado  $p_{-j} \in \mathcal{B}(r)$  con  $p_0 = p$  y  $f(p_{-j-1}) = p_{-j}$ , además  $|p_{-j}| \leq (\lambda - \epsilon\alpha)^{-j}|p|$ . También, la historia pasada es única en  $W_r^u$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $p_0 = p \in W_r^u$  y  $p_{-j} \in \mathcal{B}(r)$  una historia pasada. Esto es  $p_0 \in \{0\} + C^u(\alpha)$ .

Al aplicar inducción y el lema 2.21(b) con  $q = 0$ , se tiene

$$(\lambda - \epsilon\alpha^{-1})^j |\pi_u p_{-j}| \leq |\pi_u p - 0| = |\pi_u p_0|,$$

entonces

$$|\pi_u p_{-j}| \leq (\lambda - \epsilon\alpha^{-1})^{-j} |\pi_u p_0|.$$

Esto es,  $|\pi_u p_0|$  converge a cero exponencialmente y puesto que  $|\pi_s p_{-j}| \leq \alpha |\pi_u p_{-j}|$ , se tiene que la componente estable también converge exponencialmente a cero.

Para mostrar la unicidad, sean  $p_{-j}$  y  $q_{-j}$  dos historias pasadas para  $p$  que permanecen en  $\mathcal{B}(r) \forall j \geq 0$ . Entonces,  $p_0 = q_0$ , por lo tanto  $q_0 \in \{p_0\} + C^s(\alpha)$ . Por inducción y por el lema 2.21(c) se tiene que  $q_{-j} \in \{p_{-j}\} + C^s(\alpha)$  para  $j > 0$ . Aplicando la estimativa del lema 2.21(c) la única manera de que  $p_{-j-k}$  y  $q_{-j-k}$  permanezcan en  $\mathcal{B}(r) \forall k \geq 0$  es para  $p_{-j} = q_{-j}$ . Esto prueba la unicidad en  $W_r^u$ .  $\square$

**TEOREMA 2.30.** *Si  $f$  es  $C^k$  para  $k \geq 1$ , entonces la variedad inestable local  $W_r^u(0, f)$  es  $C^k$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $f$  es invertible la existencia de la variedad inestable para  $f$  sigue de la existencia de la variedad estable para  $f^{-1}$ . Ahora se indican los cambios necesarios en el caso en que  $f$  no sea invertible.

Se pueden usar los lemas 2.21 (b) y 2.21 (c), solo se necesita un reemplazo para el lema 2.24 esto se da en el lema 2.28, esto termina la prueba del teorema.  $\square$

**2.5. La variedad estable global.** Aquí se dará la demostración del teorema de la variedad estable.

**TEOREMA 2.31.** *Sea  $p$  un punto fijo hiperbólico para una función de clase  $C^k$   $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  con  $k \geq 1$ . Se asume que las derivadas son uniformemente continuas en términos del punto en el que la derivada es tomada. Entonces existe alguna vecindad de  $p$ ,  $U' \subset U$ , tal que  $W^s(p, U', f)$  y  $W^u(p, U', f)$  discos incrustados  $C^k$  que son tangentes a  $\mathbb{E}^s$  y  $\mathbb{E}^u$  respectivamente.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por la proposición 2.12 la variedad estable local es el gráfico de una aplicación  $\varphi^s : \mathbb{E}^s(r) \rightarrow \mathbb{E}^u(r)$  con  $\varphi^s(0) = 0$ , luego por la proposición 2.16 se tiene que la variedad estable local es de clase  $C^1$  y es tangente a  $\mathbb{E}^s$ , finalmente el teorema 2.17 muestra que la variedad estable local es de clase  $C^k$ , esto termina la prueba del teorema.  $\square$

Para probar la última parte del teorema 2.10 es necesario una caracterización de la variedad estable global y de la variedad inestable global, esto se da en el siguiente lema.

LEMA 2.32. *Sea  $\mathbb{E}$  un espacio de Banach,  $U$  un abierto en  $\mathbb{E}$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{E}$  de clase  $C^1$  tal que  $p \in U$  es un punto fijo hiperbólico para  $f$ . Entonces*

a) *Existe  $r > 0$  tal que*

$$W_f^s(p, r) \subset W_f^s(p), \quad W_f^u(p, r) \subset W_f^u(p).$$

$$\text{b) } W_f^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_f^s(p, r)] \text{ y } W_f^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n[W_f^u(p, r)]$$

DEMOSTRACIÓN. Para la prueba de (a) solo se demuestra que  $W_f^s(p, r) \subset W_f^s(p)$ , para el caso en que  $W_f^u(p, r) \subset W_f^u(p)$  se procede de manera análoga.

Sea  $q \in W_f^s(p, r) \subset W_f^s(p)$ , entonces  $f^n(q) \in U$ ,  $\forall n \geq 0$ , y  $d(f^n(q), p) < r \quad \forall n \geq 0$ , es decir  $f^n(q) \in B_r(p) \quad \forall n \geq 0$ .

Ahora sea  $h : U \rightarrow V$  el homeomorfismo dado por el teorema de Grobman-Hartman, teorema 1.23, este homeomorfismo hace que  $h(f^n(q)) \in h(U)$ ,  $\forall n \geq 0$  y  $h(f^n(q)) \in h(B_r(p)) \subset B_{r'}(0)$ , para algún  $r' > 0$ ,  $\forall n \geq 0$ . Puesto que  $A \circ h = h \circ f$ , entonces  $A^n(h(q)) \in B_{r'}(0) \quad \forall n \geq 0$ , es decir  $\|A^n(h(q))\| \leq r'$ ,  $\forall n \geq 0$ .

Sea  $h(q) = x^u + x^s$ , así  $A^n(h(q)) = A^n x^u + A^n x^s$ , con esto se tiene que

$$(43) \quad \|A^n x^u\| \leq \|A^n h(q)\| \leq r'.$$

Sin embargo  $\|x^u\|_u = \|A_u^{-n} A_u^n x^u\|_u \leq a^n \|A_u^n x^u\|_u$ , donde  $a < 1$  luego

$$\|A_u^n x^u\|_u \geq a^{-n} \|x^u\|_u,$$

esto implica

$$(44) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_u^n x^u\|_u \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} \|x^u\|_u.$$

Es decir para que (43) sea válida, la única posibilidad es que en (44)  $x^u = 0$ , por lo tanto  $h(q) = x^s \in \mathbb{E}^s \cap h(U)$ , así  $A^n(h(q)) \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces al aplicar  $h$  se obtiene que  $h^{-1}(A^n(h(q))) \rightarrow h^{-1}(0) = p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo tanto  $f^n(q) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Con esto termina la prueba de (a).

Para la prueba de (b) procedemos por doble inclusión, primero se probará que  $W_f^s(p) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_f^s(p, r)]$ .

En efecto: sea  $q \in W_f^s(p)$ , entonces  $f^n(q) \in U$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(q), p) = 0$ , luego existe  $r > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(f^n(q), p) < r$ ,  $\forall n \geq N$ , es decir  $d(f^n(f^N(q)), p) < r$ ,  $\forall n \geq 0$ , por consiguiente  $f^N(q) \in W_f^s(p, r)$  para algún  $N \in \mathbb{N}$ , por lo tanto  $q \in f^{-N}(W_f^s(p, r))$ , de donde se concluye que  $q \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_f^s(p, r)]$ .

Para probar que  $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_f^s(p, r)] \subset W_f^s(p, r)$  se usa el item (a) del cual se tiene que  $W_f^s(p, r) \subset W_f^s(p)$ , entonces por la invarianza de  $W_f^s(p)$  mediante  $f$  se tiene:

$$f^{-n}[W_f^s(p, r)] \subset f^{-n}[W_f^s(p)] = W_f^s(p), \quad \forall n \geq 0,$$

esto implica que  $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_f^s(p, r)] \subset W_f^s(p, r)$ , para el caso de la variedad inestable global se procede de manera similar, esto prueba la parte (b) del lema. Esto termina la prueba del lema.  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.33.** *Sean  $\mathbb{E}^s$  y  $\mathbb{E}^u$  los espacios estables e inestable por  $A = Df_p$ . Entonces existe una inmersión topológica biunívoca<sup>4</sup>  $\varphi_s : \mathbb{E}^s \rightarrow \mathbb{E}$ , ( $\varphi_u : \mathbb{E}^u \rightarrow \mathbb{E}$ ), cuya imagen es  $W^s(p)$  ( $W^u(p)$  respectivamente).*

**DEMOSTRACIÓN.** Necesitamos definir una función cuyo dominio sea  $\mathbb{E}^s$ , para ello se toma  $x \in \mathbb{E}^s$ , esto implica que  $A^n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , elijamos el primer  $n_0$  tal que  $A^{n_0} \in U$  donde este abierto  $U$  es en el cual es posible aplicar el teorema de Grobman-Hartman y  $0 \in U$ . Entonces se define

$$\begin{aligned} \varphi_s : \mathbb{E}^s &\rightarrow \mathbb{E} \\ x &\mapsto f^{-n_0} h^{-1} A^{n_0}(x), \end{aligned}$$

puesto que  $h^{-1}$  conjugue  $A$  y  $f$ , se tiene que  $\varphi_s$  está bien definida, es decir no depende de  $n_0$  escogido. Que  $\varphi_s$  sea una inmersión topológica biunívoca es porque para  $x \in \mathbb{E}^s$  siempre existe un abierto  $U$  en el cuál se puede aplicar el teorema de Grobman-Hartman, es decir  $f^{-n_0} h^{-1} = h^{-1} A^{-n_0}$ .

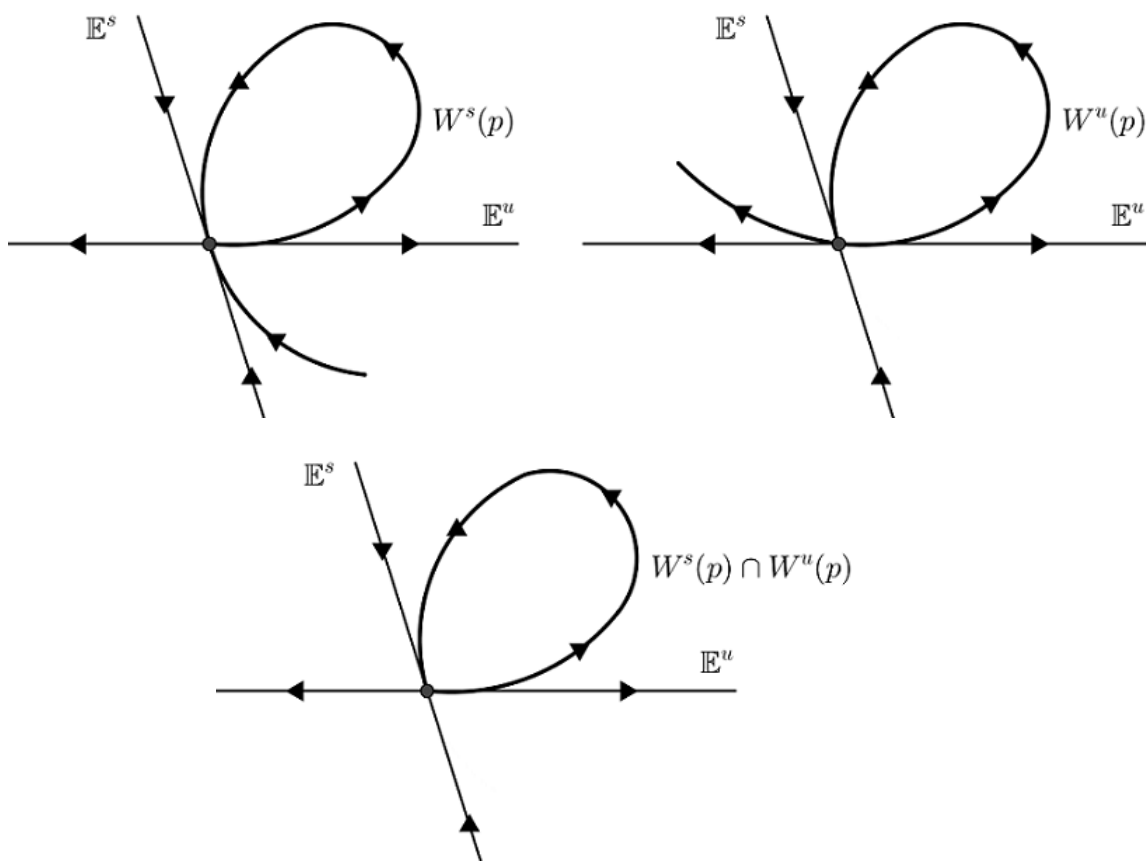
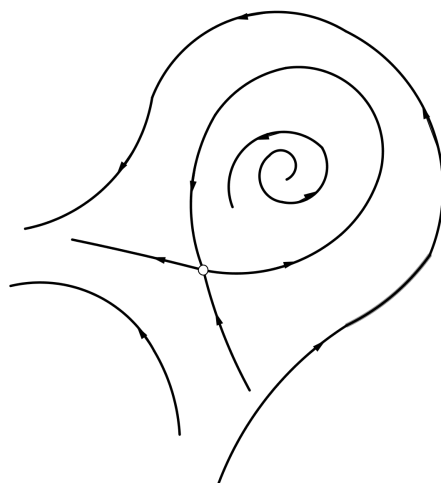
Resta probar que  $\varphi_s(\mathbb{E}^s) = W^s(p)$ . En efecto la implicación que  $\varphi_s(\mathbb{E}^s) \subset W^s(p)$  es por definición, para probar que  $\varphi_s(\mathbb{E}^s) \supseteq W^s(p)$  se toma  $q \in W^s(p)$  se necesita encontrar  $x \in \mathbb{E}^s$  tal que  $\varphi_s(x) = q$ , sea tal  $x = A^{-n_0} h f^{n_0}(q)$  es claro que  $x \in \mathbb{E}^s$ , además  $\varphi_s(x) = q$ . Esto prueba que  $\varphi_s(\mathbb{E}^s) = W^s(p)$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.34.**

- a) *La demostración del teorema 2.10 es una consecuencia directa del teorema 2.31 y de la proposición 2.33 relacionada con la variedad estable global.*
- b) *Mientras que la variedad estable e inestable local son variedades diferenciables incrustadas, la variedad estable e inestable global son solo variedades inmersa como se puede observar en las siguientes gráficas.*

---

<sup>4</sup>Sean  $M, N$  variedades topológicas, una inmersión topológica es una función continua  $F : M \rightarrow N$  tal que para cada punto  $x \in M$  existe una vecindad  $V$  tal que  $F|_V$  es un homeomorfismo sobre su imagen.



## Conjuntos hiperbólicos y el teorema de la variedad estable

*Se quiere ampliar el concepto de punto hiperbólico, definido en el capítulo anterior, a conjuntos mas grandes. Un conjunto invariante  $\Lambda$  (es decir  $f(\Lambda) = \Lambda$ ) para el difeomorfismo  $f$  es hiperbólico si en cada punto  $p \in \Lambda$  se obtiene una descomposición “especial” en subespacios, los cuales varían continuamente respecto a  $p \in \Lambda$  (ver definición 3.1). Además se dan ejemplos de conjuntos hiperbólicos tales como la herradura de Smale, el solenoide y la herradura de Bowen, esta tiene la novedad de poseer medida de Lebesgue positiva. Para esto se consultará [3, 11, 20, 23, 28]. Luego se muestra el teorema de la variedad estable para un conjunto invariante hiperbólico, es decir  $f(\Lambda) = \Lambda$ . Este teorema es una generalización del teorema de la variedad estable para un punto fijo, sin embargo este último será utilizado para probar el primero, es decir buscamos un punto fijo para una función adecuada definida en espacios de dimensión infinita. Para esto se hace referencia a [18, 28].*

DEFINICIÓN 3.1. Un conjunto invariante tiene **estructura hiperbólica** para un difeomorfismo  $f$  en  $M$  si:

- (i) En cada punto  $p \in \Lambda$ , se cumple  $T_p M = \mathbb{E}_p^u \oplus \mathbb{E}_p^s$ , el espacio tangente a  $M$  se descompone como la suma de  $\mathbb{E}_p^u$  y  $\mathbb{E}_p^s$ .
- (ii) Esta descomposición es invariante mediante la aplicación derivada en el sentido que  $Df_p(\mathbb{E}_p^u) = E_{f(p)}^u$  y  $Df_p(\mathbb{E}_p^s) = E_{f(p)}^s$ .
- (iii) Existen  $0 < \lambda < 1$  y  $C \geq 1$  independientes de  $p$  tales que  $\forall n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |Df_p^n v^s| &\leq C \lambda^n |v^s|, \quad \forall v^s \in \mathbb{E}_p^s, \quad y \\ |Df_p^{-n} v^u| &\leq C \lambda^n |v^u|, \quad \forall v^u \in \mathbb{E}_p^u. \end{aligned}$$

Si el conjunto invariante  $\Lambda$  tiene estructura hiperbólica para  $f$ . También se dice que  $\Lambda$  es un **conjunto (invariante) hiperbólico**.

OBSERVACIÓN 3.2. Con la hipótesis dadas en la definición 3.1 para el conjunto hiperbólico, se sigue que  $\mathbb{E}_p^u$  y  $\mathbb{E}_p^s$  varían continuamente con  $p$ , (ver [2]). En términos de conos, la continuidad puede expresada como sigue: dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(p, q) < \delta$ , entonces

$$\mathbb{E}_q^u \subset C_p^u(\epsilon) = \{v^u + v^s : v^u \in \mathbb{E}_p^u, v^s \in \mathbb{E}_p^s, \|v^s\| \leq \epsilon \|v^u\|\}.$$

Ver página 267 de [23].

EJEMPLO 3.3 (Punto fijo hiperbólico). Si se supone que  $\Lambda$  se reduce a un punto  $p$ , se tiene que  $f(p) = p$  y  $D_p f$  es un isomorfismo de  $T_p M$  en si mismo. En este caso existirá la división hiperbólica si todos los autovalores de  $D_p f$  tienen módulo distinto de 1.



EJEMPLO 3.4 (Órbita periódica hiperbólica). Sea  $\Lambda$  una órbita periódica;  $\Lambda = \{p_1, \dots, p_k\}$ ;  $f(p_i) = p_{i+1} \pmod k$ ,  $k \geq 2$ . Entonces se tiene

$$TM_\Lambda = (T_{p_1}M \cup \dots \cup T_{p_k}M).$$

Una descomposición hiperbólica de  $TM_\Lambda$  es una descomposición hiperbólica de los espacios tangentes de  $M$  en cada punto de la órbita es decir,

$$\begin{aligned} T_{p_i}M &= \mathbb{E}_{p_i}^s \oplus \mathbb{E}_{p_i}^u \\ Tf(\mathbb{E}_{p_i}^s) &= \mathbb{E}_{p_{i+1}}^s \pmod k; \\ Tf(\mathbb{E}_{p_i}^u) &= \mathbb{E}_{p_{i+1}}^u \pmod k. \end{aligned}$$

En este ejemplo se tienen las siguientes observaciones:

- (1)  $Df^k$  es un automorfismo en cada  $T_{p_i}M$ .
- (2) Existe una descomposición hiperbólico en  $TM_\Lambda$  si y solo si cada  $p_i$  es un punto fijo hiperbólico para  $f^k$ .

DEFINICIÓN 3.5. Se dice que un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  de clase  $C^1$  es **Anosov**, si  $M$  es un conjunto hiperbólico para  $f$ .

En la siguiente sección se presenta un difeomorfismo de Anosov.

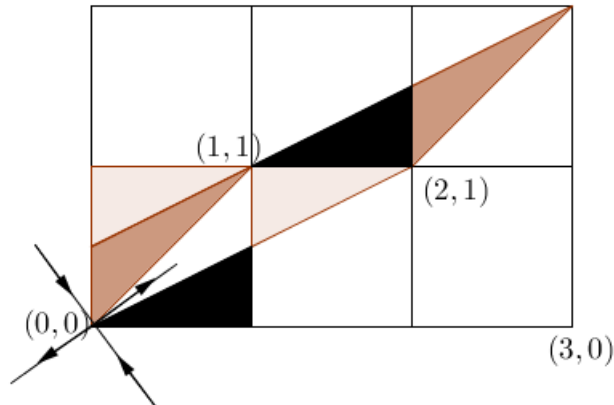
### 1. Una aplicación lineal hiperbólica en el toro

Sea la aplicación lineal de  $\mathbb{R}^2$  dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son  $\lambda = (3 + \sqrt{5})/2 > 1$  y  $1/\lambda$ . La aplicación expande por  $\lambda$  en la dirección del autovector  $v_\lambda = ((1 + \sqrt{5})/2, 1)$ , y se contrae por  $1/\lambda$  en la dirección del autovector  $v_{1/\lambda} = ((1 - \sqrt{5})/2, 1)$ .

FIGURA 1. La imagen del toro bajo A (página 14 del libro [5])



Los autovectores son perpendiculares puesto que la matriz es simétrica.

Desde que  $A$  tiene entradas enteras, entonces preserva  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  e induce una aplicación del toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , (ver el ejemplo 1.3), en si mismo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\bar{A}} & \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \end{array}$$

La aplicación  $\bar{A}$  está definida por

$$(45) \quad \bar{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x_1 + x_2) \bmod 1 \\ (x_1 + x_2) \bmod 1 \end{pmatrix}$$

(ver figura 1).  $\mathbb{T}^2$  es un conjunto invariante para  $\bar{A}$  porque  $A$  tiene autovalores uno mayor que 1 y el otro menor que 1, además  $A^{-1}$  tiene entradas enteras (esto es porque  $\det(A) = 1$  y  $A$  tiene entradas enteras).

(46) Por lo tanto  $\bar{A}$  es un difeomorfismo de Anosov para  $\mathbb{T}^2$ .

Además se observa que los puntos periódicos de  $\bar{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  son los puntos con coordenadas racionales. Por lo tanto se obtiene la siguiente proposición

**PROPOSICIÓN 3.6.** *La aplicación  $\bar{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , definida como en (45) es un difeomorfismo lineal de Anosov. Además, los puntos periódicos de  $\bar{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  son los puntos con coordenadas racionales y forman un conjunto denso en  $\mathbb{T}^2$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La prueba de que  $\bar{A}$  sea un automorfismo lineal de Anosov está hecha en (46).

Solo resta mostrar que los puntos periódicos de  $\bar{A}$  corresponde con el conjunto de puntos racionales de  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , es decir, el conjunto

$$(47) \quad \left\{ \left( \frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q} \right) + \mathbb{Z}^2 : p_1, p_2, q \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq p_1, p_2 \leq q, \quad q > 0 \right\}.$$

El hecho de elegir el mismo denominador para los puntos racionales, en (47), es que si tomamos  $\left( \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right)$ , entonces al aplicar  $\bar{A}$  se tiene

$$\bar{A} \left( \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right) = \left( \frac{2p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}, \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2} \right),$$

con lo cual se retorna al caso en el que los denominadores son iguales. Por lo tanto es suficiente trabajar con el conjunto definido en (47).

En efecto sea  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  un punto periódico de  $\bar{A}$ , se tiene  $\bar{A}^n(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ , para algún  $n > 0$ . Por lo tanto

$$(48) \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \text{ para algunos } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Como  $A$  es hiperbólica, entonces  $A$  no tiene autovalores de módulo 1, luego  $A^n$  no tiene autovalores de módulo 1. Por lo tanto  $A^n - I$  es invertible. Entonces las soluciones de (48) tienen la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A^n - I)^{-1} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \text{ para algunos } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Como  $(A^n - I)$  tiene todas las entradas en  $\mathbb{Z}$ , entonces  $(A^n - I)^{-1}$  tiene todas las entradas en  $\mathbb{Q}$ , por lo tanto  $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ .

Sea  $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right)$  un punto con coordenadas racionales, entonces al aplicar  $\bar{A}$  de manera sucesiva se tiene

$$\begin{aligned} \bar{A}\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right) &= \left(\frac{2p_1 + p_2}{q}, \frac{p_1 + p_2}{q}\right) \\ \bar{A}^2\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right) &= \left(\frac{5p_1 + 3p_2}{q}, \frac{3p_1 + 2p_2}{q}\right) \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

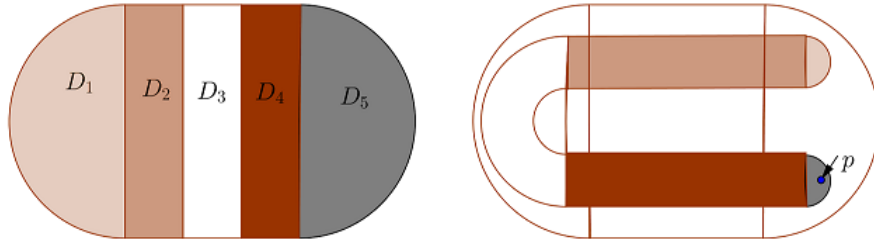
luego existe algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\bar{A}^{n_0}\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right)$ , es decir  $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right)$  es un punto periódico para  $\bar{A}$ .

Esto termina la demostración de la proposición.  $\square$

## 2. La herradura de Smale

3.7. Sea una región  $D \subset \mathbb{R}^2$  que consiste de dos regiones semicirculares  $D_1, D_5$  unidas al cuadrado unitario  $R = D_2 \cup D_3 \cup D_4$ . (Ver figura 2)

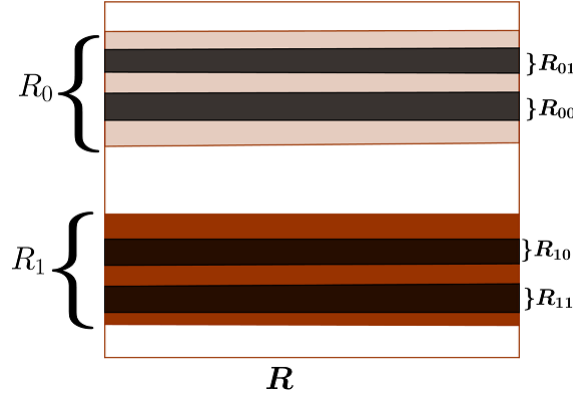
FIGURA 2. La función herradura (página 15 del libro [5])



Sea  $f : D \rightarrow D$  una función diferenciable que envía  $D$  en la herradura como se muestra en la figura 2. También se asume que  $f$  estira  $D_1 \cup D_4$  uniformemente en la dirección horizontal por un factor  $\mu > 2$  y contrae uniformemente en la dirección vertical por  $0 < \lambda < 1/2$ . Desde que  $f(D_5) \subset D_5$ , entonces el Teorema de punto fijo de Brouwer garantiza la existencia de un punto fijo  $p \in D_5$ .

Sea  $R_0 = f(D_2) \cap R$  y  $R_1 = f(D_4) \cap R$ . Además se nota que  $f(R) \cap R = R_0 \cup R_1$ . El conjunto  $f^2(R) \cap f(R) \cap R = f^2(R) \cap R$  consiste de cuatro rectángulos horizontales  $R_{ij}, i, j \in \{0, 1\}$ , de altura  $\lambda^2$  (ver figura 3).

FIGURA 3. Rectángulos horizontales (página 16 del libro [5])



De manera general, para alguna sucesión finita  $\omega_0, \dots, \omega_n$  de ceros y unos, se tiene

$$R_{\omega_0 \dots \omega_n} = R_{\omega_0} \cap f(R_{\omega_1}) \cap \dots \cap f^n(R_{\omega_n})$$

es un rectángulo horizontal de altura  $\lambda^n$ , y  $f^n(R) \cap R$  es la unión de  $2^n$  de estos rectángulos.

Para una sucesión infinita  $\omega = (\omega_i) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ , con  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ , sea  $R_\omega = \cap_{i=0}^{\infty} f^i(R_{\omega_i})$ .

El conjunto  $H^+ = \cap_{n=0}^{\infty} f^n(R) = \cup_{\omega} R_\omega$  es el producto de un intervalo de longitud 1 y un conjunto de Cantor vertical (Un conjunto de Cantor es un conjunto compacto, perfecto, totalmente desconexo) el cual se denota por  $C^+$ . Además la proyección de  $f^n(R) \cap R$  al eje vertical tiene longitud  $(2\lambda)^n$ . También se tiene que  $f(H^+) = H^+$ .

De manera análoga se construye  $H^-$  usando preimagenes. Se observa que  $f^{-1}(R_0) = f^{-1}(R) \cap D_2$ , y  $f^{-1}(R_1) = f^{-1}(R) \cap D_4$ , son rectángulos verticales de ancho  $\mu^{-1}$ , además la proyección de  $f^{-n}(R) \cap R$  al eje horizontal tiene longitud  $(\frac{2}{\mu})^n$ . Para alguna sucesión finita  $\omega_{-m}, \dots, \omega_{-1}$  de ceros y unos, se tiene  $\cap_{i=1}^m f^{-i}(R_{\omega_i})$  es un rectángulo vertical de ancho  $\mu^{-m}$ , y  $H^- = \cap_{i=1}^{\infty} f^{-i}(R)$  es el producto de un intervalo vertical de longitud 1 y un conjunto de Cantor horizontal denotado por  $C^-$ .

**LEMA 3.8.** *Los conjuntos de Cantor  $C^+$  y  $C^-$  definidos en el párrafo 3.7 tienen medida de Lebesgue cero.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por el proceso de construcción  $C^+$  tiene medida  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\lambda)^n$  y puesto que  $\lambda < \frac{1}{2}$  resulta:

$$\text{medida}(C^+) = 0.$$

De manera análoga, tomando en cuenta que  $\mu > 2$

$$\text{medida}(C^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\mu^{-1})^n = 0.$$

Esto termina la prueba. □

DEFINICIÓN 3.9. El **conjunto herradura**

$$H = H^+ \cap H^- = \cap_{i=-\infty}^{\infty} f^i(R)$$

es el producto de dos conjuntos de Cantor  $C^-$  con  $C^+$ , es cerrado y  $f$ -invariante. Además debe tener las siguientes propiedades

- a) Una infinidad numerable de órbitas periódicas de todos los periodos.
- b) Una infinidad no numerables de órbitas no periódicas.
- c) Una órbita densa.

3.10. Para cada punto  $x \in H$  es posible asociar una sucesión de 0's y 1's como sigue

$$\begin{aligned} \omega_n(x) &= 0, & \text{si } f^n(x) \in R_0 \\ \omega_n(x) &= 1, & \text{si } f^n(x) \in R_1. \end{aligned}$$

Esto permite definir el homeomorfismo

$$(49) \quad \begin{aligned} \Phi : \Lambda &\rightarrow \prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}, \\ x &\mapsto \{\omega_n(x)\} \end{aligned}$$

El siguiente lema prueba que, efectivamente,  $\Phi$  es un homeomorfismo.

LEMA 3.11. (ver página 25 de [28]) Sea  $\Phi$  la función definida en (49). Se denota por  $\Sigma(2)$  al espacio compacto<sup>1</sup>  $\prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}$  con la topología producto y un abierto básico para la topología de  $\prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}$  está dado por los conjuntos abiertos

$$C(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k; i_1, \dots, i_k) = \{\{\omega_n\} : \omega_{i_1} = \epsilon_1, \dots, \omega_{i_k} = \epsilon_k, \epsilon_j \in \{0, 1\}\}.$$

Entonces

- a) Existe un automorfismo natural de  $\Sigma(2)$ , el **shift**  $\gamma$  dado por  $(\gamma\{\omega_n\})_k = \omega_{k+1}$ . Esto hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f|_H} & H \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \Sigma(2) & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma(2) \end{array}.$$

- b) La función definida en (49) es un homeomorfismo entre  $\Lambda$  y  $\prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}$ .
- c) Sea  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$ ,  $\gamma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$  y  $\Phi : \Lambda \rightarrow \Sigma(2)$  el homeomorfismo definido en (49). Si  $f$  y  $\gamma$  son topológicamente conjugados<sup>2</sup> por  $\Phi$ , entonces  $\Phi$  lleva órbitas de  $f$  en órbitas de  $\gamma$ .

<sup>1</sup>Esto es por el teorema de Tychonoff, ver página 224 de [7].

<sup>2</sup>Si  $\Phi \circ f = \gamma \circ \Phi$ , se dice que  $f$  y  $\gamma$  son **topológicamente conjugados** mediante el homeomorfismo  $\Phi$ .

DEMOSTRACIÓN. La prueba del item a) es directamente de las definiciones de  $\Phi$  y  $\sigma$ . Para la prueba del item (b) se inicia probando la continuidad de  $\Phi$ .

**$\Phi$  es continua:** Sean  $x \in H$ ,  $U$  una vecindad de  $\Phi(x)$ . Es posible tomar un abierto básico, es decir un cilindro abierto

$$\text{Cil}(\Phi(x), N) = \{\{y_n\} : y_i = (\Phi(x))_i, \text{ para } |i| \leq N\},$$

tal que  $\text{Cil}(\Phi(x), N) \subset U$ .

Para cada  $i \in \mathbb{Z}$  con  $|i| \leq N$  es posible tomar una bola  $B_{\delta_i}(f^i(x))$  contenida en la franja horizontal de  $f(R) \cap R$  en la cual  $f^i(x)$  se encuentra. Puesto que  $f$  es continua, entonces para todo  $i \in \mathbb{Z}$  con  $|i| \leq N$  se tiene que  $(\Lambda \cap f^{-i}(B_{\delta_i}(f^i(x))))$  es una vecindad de  $x$  en  $\Lambda$ . Luego la intersección finita

$$B_N(x) = \bigcap_{|i| \leq N} (\Lambda \cap f^{-i}(B_{\delta_i}(f^i(x))))$$

también es una vecindad para  $x$  en  $\Lambda$ . Por construcción  $\Phi(B_N(x))$  está contenido en el cilindro  $\text{Cil}(\Phi(x), N)$ . Por lo tanto  $\Phi$  es continua.

**$\Phi$  es inyectiva:** Sean  $x, y$  dos puntos en  $H$ , tal que  $\Phi(x) = \Phi(y)$ . El primer paso es mostrar que si la parte positiva de las sucesiones son iguales, es decir,  $(\Phi(x))_i = (\Phi(y))_i, \forall i \geq 0$ , entonces las abcisas de  $x$  e  $y$  son iguales.

En efecto Puesto que  $\Phi(x) = \Phi(y)$  se tiene que  $f^{i+1}(x)$  y  $f^{i+1}(y)$  están en la misma franja horizontal de  $f(R) \cap R$  (ver figura 2), entonces  $f^i(x)$  y  $f^i(y)$  están en la misma franja horizontal y también en la misma franja vertical de  $f^{-1}(R) \cap R$ . Porque  $f^i(x)$  y  $f^i(y)$  están en la misma franja vertical de  $f^{-1}(R) \cap R$  se tiene que:

$$\begin{aligned} |\text{abcisa}(f^{i+1}(y)) - \text{abcisa}(f^{i+1}(x))| &= \mu |\text{abcisa}(f^i(y)) \\ &\quad - \text{abcisa}(f^i(x))|, \end{aligned}$$

donde  $\mu > 2$  es el factor que estira  $D_2 \cup D_4$  uniformemente en dirección horizontal. Por lo tanto  $\forall n$  se tiene que:

$$|\text{abcisa}(f^n(y)) - \text{abcisa}(f^n(x))| = \mu^n |\text{abcisa}(y) - \text{abcisa}(x)|.$$

Si se supone que  $\text{abcisa}(y) \neq \text{abcisa}(x)$  y se hace  $n \rightarrow \infty$  se tendría que la distancia entre las abcisas de  $f^n(x)$  y  $f^n(y)$  es infinita, esto es imposible pues  $f^n(x)$  y  $f^n(y)$  siempre permanecen en  $R$ . Luego  $\text{abcisa}(y) = \text{abcisa}(x)$ .

De manera análoga analizando el pasado de  $x$  e  $y$  se puede mostrar que  $\text{ordenada}(x) = \text{ordenada}(y)$ .

Así  $x = y$  y por lo tanto  $\Phi$  es inyectiva.

**$\Phi$  es sobre:** En la figura 3, se puede observar que  $f(R) \cap R$  está dividido en dos rectángulos disjuntos  $R_0$  y  $R_1$ , al aplicar nuevamente  $f$  a cada uno de estos

rectángulos se obtienen cuatro rectángulos  $R_{01}$ ,  $R_{00}$ ,  $R_{10}$ ,  $R_{11}$ , los cuales se denotan del siguiente modo

$$\begin{aligned}(0, 0) &= R_0 \cap f(R_0), & (0, 1) &= R_0 \cap f(R_1) \\ (1, 0) &= R_1 \cap f(R_0), & (1, 1) &= R_1 \cap f(R_1).\end{aligned}$$

Sea  $\alpha = (a_1, \dots, a_N)$  una sucesión finita de  $0's$  y  $1's$  y se asume que  $R_\alpha = I_{a_0} \cap f(R_{a_1}) \cap \dots \cap f^N(R_{a_N})$  es una franja horizontal no vacía contenida en  $R_0$  ó  $R_1$ . Esto es, se ha mostrado que

$$I_0 \cap f(I_\alpha) = I_0 \cap f(R_{a_1}) \cap \dots \cap f^{N+1}(R_{a_N})$$

y

$$I_1 \cap f(I_\alpha) = I_1 \cap f(R_{a_1}) \cap \dots \cap f^{N+1}(R_{a_N})$$

son dos franjas horizontales no vacías.

Por inducción se tiene que para cada sucesión finita  $a_0, \dots, a_n$  existe una franja horizontal no vacía

$$I_{\alpha_0} \cap f(R_{a_1}) \cap \dots \cap f^{N+1}(R_{a_N}) \neq \emptyset.$$

Sea  $\alpha = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . Se quiere probar que la intersección  $I_\alpha = \bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} f^i(I_{\alpha_i})$ , es no vacía, pues si esto fuese verdad se tiene que si  $x \in I_\alpha$ ,  $f^i(x)$  pertenece a  $I_{\alpha_i}$  para cada  $i$  y  $\Phi(x) = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  con lo cual  $\Phi$  sería sobre.

En efecto Para esto es suficiente que todas las intersecciones correspondientes a las sucesiones finitas sean no vacías. Esto es, si todos los conjuntos  $I_{\alpha, N} = \bigcap_{i=-N}^N f^i(I_{\alpha_i})$  son vacíos, ellos forman una sucesión encajada de subconjuntos cerrados no vacíos del conjunto compacto  $\Lambda$ . Por lo tanto la intersección  $I_\alpha = \bigcap_N I_{\alpha, N}$  es también no vacío.

Por lo tanto  $\Phi$  es un homeomorfismo, es decir el item (b) es válido.

Para la prueba de (c), sea  $x_0 \in \Lambda$ , entonces la órbita de  $x_0$  bajo  $f$  es

$$\{\dots, f^{-n}(x_0), \dots, f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\},$$

dado que  $f = \Phi^{-1} \circ \gamma \circ \Phi$ , entonces para  $n \geq 0$  se tiene:

$$\begin{aligned}f^n(x_0) &= \Phi^{-1} \circ \gamma \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \gamma \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi^{-1} \circ \gamma \circ \Phi(x_0) (n \text{ veces}) \\ f^n(x_0) &= \Phi^{-1} \circ \gamma^n \circ \Phi(x_0),\end{aligned}$$

de donde

$$(50) \quad \Phi \circ f^n(x_0) = \gamma^n \circ \Phi(x_0),$$

es decir  $\Phi$  lleva órbitas de  $f$  en órbitas de  $\gamma$  para  $n \geq 0$ .

También vale que  $f^{-1} = \Phi^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \Phi$ , entonces para  $n > 0$  se tiene:

$$\begin{aligned} f^{-n}(x_0) &= \Phi^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \Phi(x_0) (n \text{ veces}) \\ f^{-n}(x_0) &= \Phi^{-1} \circ \gamma^{-n} \circ \Phi(x_0), \end{aligned}$$

de donde

$$(51) \quad \Phi \circ f^{-n}(x_0) = \gamma^{-n} \circ \Phi(x_0).$$

Por lo tanto de (50), (51) se tiene que  $\Phi$  lleva las órbitas de  $f$  en las órbitas de  $\gamma$ , esto prueba el ítem (c) y por lo tanto la prueba del lema.  $\square$

**OBSERVACIÓN 3.12.** Se observa que la función  $\gamma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$  tiene exactamente dos puntos los cuales son la sucesión cuyo todos sus elementos son ceros y la sucesión que tiene todos sus elementos iguales a uno.

Las sucesiones bi-infinitas las cuales se repiten periódicamente después de alguna longitud fija se denotará por la sucesión de longitud finita con una barra encima, ver página 87 de [30], por ejemplo:

$$\begin{aligned} \{\dots 101010101010\dots\} &\text{ es denotado por } \{\overline{1010}\} \\ \{\dots 010010010010\dots\} &\text{ es denotado por } \{\overline{010010}\} \end{aligned}$$

Para la siguiente proposición, la cual involucra la dinámica de  $\gamma$ , es necesario definir los siguientes conjuntos

**DEFINICIÓN 3.13.** Sea la función  $\gamma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$ , se define lo siguiente

- a) El conjunto  $Per(\gamma) = \{p \in \Sigma(2) : \gamma^k(p) = p, \text{ para algun } k\}$ .
- b) Un punto  $p \in \Sigma(2)$  se dice no errante para  $\gamma$ , si para toda vecindad  $U$  de  $p$  existe un número entero positivo  $n$  tal que  $\gamma^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Luego el **Conjunto no errante**  $\Omega(\gamma)$  se define

$$\Omega(\gamma) = \{p \in \Sigma(2) : p \text{ es no errante}\}$$

**OBSERVACIÓN 3.14.** Se puede observar lo siguiente

$$Per(\lambda) \subset \Omega(\lambda) \subset \Sigma(2),$$

y puesto que  $\Omega(\gamma)$  es cerrado, (pues es el complemento de un conjunto abierto), se tiene

$$\overline{Per(\lambda)} \subset \Omega(\lambda) \subset \Sigma(2).$$

**PROPOSICIÓN 3.15.** (Ver página 90 de [30]) La función  $\gamma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$  tiene:

- a) Una infinidad numerable de órbitas periódicas de todos los periodos.
- b) Una infinidad no numerables de órbitas no periódicas.
- c) Una órbita densa, es decir  $\Omega(\gamma) = \overline{Per(\gamma)} = \Sigma(2)$ .

**DEMOSTRACIÓN.**



- a) Primero se observa que las órbitas de sucesiones las cuales se repiten periódicamente son periódicas bajo la iteración por  $\gamma$ , por ejemplo, para las sucesión  $\{\overline{10,10}\}$  se tiene

$$\begin{aligned}\gamma\{\overline{10,10}\} &= \{\overline{01,01}\} \\ \gamma\{\overline{01,01}\} &= \{\overline{10,10}\}.\end{aligned}$$

Así  $\gamma^2\{\overline{10,10}\} = \{\overline{10,10}\}$  es una órbita de periodo 2 bajo  $\gamma$ .

En general:

$$\begin{aligned}s &= \{\overline{s_0 s_1 \cdots s_{k-1} . s_0 s_1 \cdots s_{k-1}}\} \\ \gamma(s) &= \{\overline{s_1 s_2 \cdots s_{k-1} s_0 . s_1 s_2 \cdots s_{k-1} s_0}\} \\ \gamma^2(s) &= \{\overline{s_2 s_3 \cdots s_{k-1} s_0 s_1 . s_2 s_3 \cdots s_{k-1} s_0 s_1}\} \\ &\vdots \\ \gamma^k(s) &= \{\overline{s_0 s_1 \cdots s_{k-1} . s_0 s_1 \cdots s_{k-1}}\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión de órbitas de repetición periódicas de periodo  $k$  corresponden a órbitas de periodo  $k$ . Además, dado cualquier  $k$  fijo el número de sucesiones que tienen bloques de longitud  $k$  que se repiten periódicamente es finito, así que,  $\gamma$  tiene una infinidad numerable de órbitas periódicas teniendo todos los periodos posibles, por ejemplo

$$\begin{aligned}\text{Periodo 1} &: \{\overline{0,0}\} \quad \{\overline{1,1}\} \\ \text{Periodo 2} &: \{\overline{10,10}\} \rightarrow \{\overline{01,01}\} \rightarrow \{\overline{10,10}\} \\ &: \{\overline{01,01}\} \rightarrow \{\overline{10,10}\} \rightarrow \{\overline{01,01}\} \\ \text{Periodo 3} &: \{\overline{001,001}\} \rightarrow \{\overline{010,010}\} \rightarrow \{\overline{100,100}\} \rightarrow \{\overline{001,001}\} \\ &: \{\overline{010,010}\} \rightarrow \{\overline{100,100}\} \rightarrow \{\overline{001,001}\} \rightarrow \{\overline{010,010}\} \\ &: \{\overline{100,100}\} \rightarrow \{\overline{001,001}\} \rightarrow \{\overline{010,010}\} \rightarrow \{\overline{100,100}\} \\ &: \{\overline{011,011}\} \rightarrow \{\overline{110,110}\} \rightarrow \{\overline{101,101}\} \rightarrow \{\overline{011,011}\} \\ &: \{\overline{101,101}\} \rightarrow \{\overline{011,011}\} \rightarrow \{\overline{110,110}\} \rightarrow \{\overline{101,101}\} \\ &: \{\overline{110,110}\} \rightarrow \{\overline{101,101}\} \rightarrow \{\overline{011,011}\} \rightarrow \{\overline{110,110}\} \\ \dots &: \dots\end{aligned}$$

En general existen  $k!$  órbitas periódicas de periodo  $k$  que corresponden al número posible de permutaciones del bloque a la derecha del punto decimal,  $.s_0 s_1 \cdots s_{k-1}$ .

- b) Dado que  $\Sigma(2)$  es no numerable si quitamos la infinidad numerable de sucesiones de símbolos periódicos, permanecerá un número no numerable de sucesiones de símbolos no periódicos y dado que las órbitas de sucesiones no periódicas nunca se repiten queda probado b).
- c) Primero hay que definir una métrica en  $\Sigma(2)$ .

Sean

$$\begin{aligned}s &= \{\cdots, s_{-n}, \cdots, s_{-1} s_0, s_1, \cdots, s_n, \cdots\} \\ s' &= \{\cdots, s'_{-n}, \cdots, s'_{-1} s'_0, s'_1, \cdots, s'_n, \cdots\}\end{aligned}$$

dos elementos en  $\Sigma(2)$ , se define una métrica en  $\Sigma(2)$  como sigue:

$$\begin{aligned} d : \Sigma(2) \times \Sigma(2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, s') &\mapsto d(s, s') = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{|s_i - s'_i|}{2^{|i|}}. \end{aligned}$$

Para probar el item c) se tiene que mostrar la existencia de algún  $s \in \Sigma(2)$  tal que su órbita sea densa en  $\Sigma(2)$ , es decir, para cualquier  $s' \in \Sigma(2)$  y dado  $\epsilon > 0$  se debe tener

$$d(s', \gamma^n(s)) < \epsilon.$$

Para construir  $s$  primero se observa todas las sucesiones finitas de longitud  $k$  por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{longitud 1} &: \{0\}\{1\} \\ \text{longitud 2} &: \{00\}\{01\}\{10\}\{11\} \\ \text{longitud 3} &: \{000\}\{001\}\{010\}\{011\} \\ &: \{100\}\{101\}\{110\}\{111\} \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

En general existen  $2^k$  sucesiones finitas de longitud  $k$ . Ahora se introduce un orden en las sucesiones finitas de 0's y 1's del siguiente modo: Sean  $s = \{s_1 s_2 \cdots s_k\}$  y  $\bar{s} = \{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \cdots \bar{s}_{k'}\}$ , se dice que  $s < \bar{s}$  si  $k < k'$ , en el caso en que  $k = k'$  se dirá que  $s < \bar{s}$  si  $s_i < \bar{s}_i$  donde  $s_i$  es el primer entero donde  $s_i \neq \bar{s}_i$ , por ejemplo

$$\{0\} < \{1\}, \quad \{0\} < \{00\}, \quad \{01\} < \{11\}, \text{ etc.}$$

Este ordenamiento permite diferenciar sucesiones finitas de igual longitud. Así se denota las sucesiones de 0's y 1's de longitud  $k$  como sigue:

$$s_1^k < s_2^k < \cdots s_{2^k}^k,$$

donde el superíndice indica la longitud de la sucesión y el subíndice indica la sucesión en particular de longitud  $k$ , la cual está determinada de manera única por el orden anterior, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{longitud 1} &: \{0\}_1^1 < \{1\}_2^1 \\ \text{longitud 2} &: \{00\}_1^2 < \{01\}_2^2 < \{10\}_3^2 < \{11\}_4^2 \\ \text{longitud 3} &: \{000\}_1^3 < \{001\}_2^3 < \{010\}_3^3 < \{011\}_4^3 < \\ &: \{100\}_5^3 < \{101\}_6^3 < \{110\}_7^3 < \{111\}_8^3 \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Esto nos da una manera de escribir el candidato para una órbita densa, que es la siguiente:

$$s = \{\cdots s_8^3 s_6^3 s_4^3 s_2^3 s_2^2 s_2^1 s_1^2 s_3^2 s_1^3 s_3^3 s_5^3 s_7^3 \cdots\}.$$

Luego  $s$  contiene todas las sucesiones posibles de longitud fija. Solo resta probar que la órbita de  $s$  es densa en  $\Sigma(2)$ .

En efecto: sea  $s'$  un elemento arbitrario de  $\Sigma(2)$  y sea una vecindad (cilindro) de  $s'$

$$\text{Cil}^{M(\epsilon)}(s') = \{s'' \in \Sigma(2) : d(s', s'') < \epsilon\}$$

de manera equivalente

$$\text{Cil}^{M(\epsilon)}(s') = \{s'' \in \Sigma(2) : s'_i = s''_i, \quad \forall |i| \leq M\}.$$

Por construcción de  $s$ , la sucesión finita

$$\{s'_{-M} \cdots s'_{-1} s'_0 s'_1 \cdots s'_M\}$$

está contenida en algún lugar de  $s$ . Luego debe existir algún  $\tilde{M}$  tal que  $d(\gamma^{\tilde{M}}(s), s') < \epsilon$ . Por lo tanto se concluye que la órbita de  $s$  es densa en  $\Sigma(2)$ .

Por la observación 3.14 resta probar que  $\overline{\text{Per}(\gamma)} = \Sigma(2)$ . Es decir se tiene que construir una sucesión de puntos periódicos  $\tau_n$  que converjan a un punto arbitrario  $s = (\dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 \cdot s_1 s_2 \dots)$ . Se define la sucesión  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cuyo término general es  $\tau_n = (\dots s_{-n} s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 \cdot s_1 s_2 \dots s_n \dots, \dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 \cdot s_1 s_2 \dots s_n \dots, \dots)$ , esto es,  $\tau_n$  es una sucesión periódica cuyas entradas son iguales a las de  $s$  desde la  $(-n)$ ésima entrada hasta la  $n$ ésima entrada. Por lo tanto  $\tau_n \rightarrow s$ . Esto termina la demostración. □

El teorema principal de esta sección es el siguiente:

**TEOREMA 3.16.** *La herradura de Smale tiene:*

- a) *Una infinidad numerable de órbitas periódicas de todos los periodos.*
- b) *Una infinidad no numerables de órbitas no periódicas.*
- c) *Una órbita densa.*
- d) *Tiene medida de Lebesgue cero.*

**DEMOSTRACIÓN.** Puesto que  $f$  es topológicamente conjugado a  $\gamma$ , la demostración de los ítem (a), (b) y (c) del teorema sigue del lema 3.11 y del teorema 3.15. La prueba de (d) se desprende del lema 3.8. Esto termina la demostración del teorema. □

### 3. Una herradura con medida de Lebesgue positiva

La herradura de Smale, la cual es un conjunto de Cantor, tiene medida de Lebesgue cero. Sin embargo es posible construir una herradura, en el sentido de la definición 3.9, con medida de Lebesgue positiva, el proceso de construcción es análogo, sin embargo se coloca una restricción en la medida de los intervalos que se retiran en la construcción estos intervalos no todos tienen igual medida. Aquí se hace uso de los artículos [3, 17].

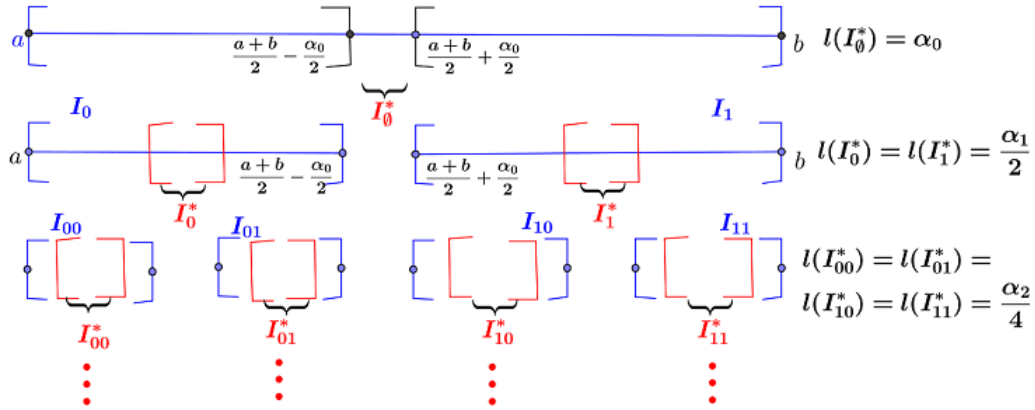
LEMA 3.17. Sean  $I$  un intervalo no degenerado de la recta real y  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un sucesión de números reales de modo que  $\alpha_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , además  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < l(I)$ , donde  $l(I)$  denota la longitud del intervalo  $I$ . Además sea  $\underline{s} = s_1 s_2 \cdots s_n \in \Sigma^+(2) = \{s : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} : s(i) = s_i \in \{0, 1\}, i \in \mathbb{N}\}$  una sucesión de 0's y 1's de longitud  $n = n(\underline{s})$ , es posible que la sucesión sea vacía si se toma la longitud  $n = n(\underline{s})$  igual a cero, entonces existe un conjunto de Cantor de medida positiva definido por

$$K_I = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n(\underline{s})=m} I_{\underline{s}},$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $I = I_0 = [a, b]$ , de este intervalo se retira el interior del intervalo  $I_0^*$  el cual tiene longitud  $\alpha_0$ , con esto  $I_0^* \subset I_0$  al efectuar este retiro restan dos intervalos, uno a la izquierda y otro a la derecha, a los cuales se denotan por  $I_0$  e  $I_1$ .

De cada uno de estos intervalos  $I_k$  ( $k = 0, 1$ ) se retiran el interior de los intervalos  $I_k^*$  los cuales tienen longitud  $\frac{\alpha_1}{2}$  y también poseen el mismo centro de  $I_k$ . Así se tiene 4 intervalos los cuales se denotan por  $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$ . (Ver figura 4)

FIGURA 4. Contrucción del conjunto de Cantor de medida positiva ([17])



Al repetir este proceso y considerar la sucesión  $\underline{s}$  de longitud  $n = n(\underline{s})$  se define  $I_{s_0}$  e  $I_{s_1}$  los intervalos de la izquierda y de la derecha que restan cuando el interior del intervalo  $I_{\underline{s}}^*$  es retirado de  $I_{\underline{s}}$ .

De esta construcción se tiene que  $I_{\underline{s}k}$ ,  $k = 0, 1$  tiene longitud  $\frac{\alpha_{n(\underline{s})+k}}{2^{n(\underline{s})+k}}$  y el mismo centro de  $I_{\underline{s}k}$ . Luego el conjunto de cantor está dado por:

$$K_I = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n(\underline{s})=m} I_{\underline{s}},$$

donde los intervalos que fueron retirados del intervalo  $I$  tienen longitud distinta.

La medida de Lebesgue de  $K_I$  está dad por:

$$m(K_I) = l(I) - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n,$$

se nota que la medida del conjunto de Cantor  $K_I$  es positiva pues  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < l(I)$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 3.18. *Sea  $J$  otro intervalo no degenerado,  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de puntos con  $\beta_n > 0$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \leq l(J)$ , es posible construir, de manera análoga, intervalos  $J_{\underline{s}}$ ,  $J_{\underline{s}}^*$  y  $K_J$ .*

*Se asume que  $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $(\alpha_n)$  son los mismos del lema 3.17. Además se elige una sucesión de números  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\delta_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y para cada  $\underline{s}$  se considera*

$$g_{\underline{s}} : I_{\underline{s}}^* \rightarrow J_{\underline{s}}^*$$

*un difeomorfismo de clase  $C^1$  que preserva orientación. También se asume que  $g_{\underline{s}}$  satisface:*

- i)  $g'_{\underline{s}}(x) = \gamma$  para  $x$  una extremidad de  $I_{\underline{s}}^*$ ,
- ii)  $g'_{\underline{s}}(I_{\underline{s}}^*)$  está contenido en un intervalo generado por  $\gamma \pm \delta_n$  y  $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \pm \delta_n$ .

*Al considerar todas las sucesiones  $\underline{s}$  se que tiene la función*

$$(52) \quad g : \bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^* \rightarrow \bigcup_{\underline{s}} J_{\underline{s}}^*$$

*está bien definida, entonces se tiene lo siguiente:*

- a)  $\bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^*$  es denso en  $I$ .
- b) La función  $g$  definida en (52) es uniformemente continua.
- c) Es posible extender  $g$  a una función  $g^* : I \rightarrow J$  tal que  $g^*$  es un homeomorfismo, además  $g^*$  es de clase  $C^1$ .

DEMOSTRACIÓN. Primero demos un ejemplo para entender mejor la notación, al fijar la longitud de  $\underline{s}$  se considera un difeomorfismo  $g_{\underline{s}} : I_{\underline{s}}^* \rightarrow J_{\underline{s}}^*$ .

Por ejemplo si  $n(\underline{s}) = 1$  se tiene que

$$I_{\underline{s}}^* = I_0^* \cup I_0^* \cup I_1^*,$$

$$J_{\underline{s}}^* = J_0^* \cup J_0^* \cup J_1^*,$$

y para este caso un difeomorfismo  $g_{\underline{s}}$  viene dado por la figura 5. Para probar que  $\bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^*$  es denso en  $I$ . Sean  $x \in I$ ,  $\epsilon > 0$ , si  $x$  está en el complemento de  $\bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^*$  es inmediato.

Suponga que  $x \in K_I = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n(\underline{s})=m} I_{\underline{s}}$ , entonces  $x \in \bigcup_{n(\underline{s})=m} I_{\underline{s}}, \forall m \in \mathbb{N}$ .

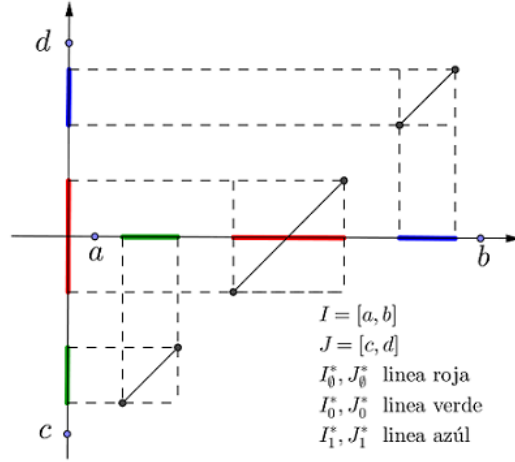
Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha_{n_0-1} < \epsilon$ . Luego existe  $x' \in I \setminus \bigcup_{n(\underline{s})=n_0} I_{\underline{s}}$  tal que  $|x - x'| \leq \alpha_{n_0-1} < \epsilon$ .

Con esto queda probado que  $\bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^*$  es denso en  $I$ .

Para probar que  $g$  es uniformemente continua, se toma  $\epsilon > 0$ , y sean  $x, y \in \bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^*$  tal que  $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ . Al tomar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\beta_{n_0} < \epsilon$  y  $|g(x) - g(y)| \leq \beta_{n_0} < \epsilon$  basta elegir  $\delta^* = \alpha_{n_0}$  para tener  $|g(x) - g(y)| < \epsilon$  esto vale  $\forall n \geq n_0$ .

Luego existe  $\delta^*$  tal que si  $x, y \in \bigcup_{n(\underline{s}) \geq n_0} I_{\underline{s}}^*$ , entonces  $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ .

FIGURA 5. Difeomorfismo que preserva orientación ([17])



Falta probar la afirmación para  $n < n_0$  para esto se usa que  $g \in C^1$ .

Como  $g \in C^1$ , entonces  $g'$  está acotada por  $M_n$  en  $I_{\underline{s}}^*$  donde  $n = n(\underline{s})$  para todo  $n < n_0$ .

Por el teorema de valor medio se tiene:

$$|g(x) - g(y)| \leq |g'(\zeta)| |x - y| < \epsilon, \text{ si } |x - y| < \delta_n$$

donde  $\delta_n = \frac{\epsilon}{M_n}$  y  $\zeta$  pertenece al intervalo formado por  $x$  e  $y$ .

Es suficiente tomar  $\delta = \min\{\delta^*, \delta_1, \dots, \delta_{n_0-1}\}$  para obtener que  $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ . Por lo tanto  $g$  es uniformemente continua. Además  $g$  es un difeomorfismo.

Para probar (c) se hace uso del item (b), puesto que este es válido es posible extender  $g$  de manera uniformemente continua a una función  $g^* : I \rightarrow J$  definida por

$$(53) \quad g^*(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \in \bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^* \\ \lim_{y \rightarrow x} g(y) & , \quad x \in K_I \end{cases}$$

Para probar que  $g^*$  es un homeomorfismo, se hace uso del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} I_{\underline{s}}^* & \xrightarrow{g} & J_{\underline{s}}^* \\ \downarrow Id_{I_{\underline{s}}^*} & & \downarrow Id_{J_{\underline{s}}^*} \\ I & \xrightarrow{g^*} & J \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I_{\underline{s}}^* & \xleftarrow{g^{-1}} & J_{\underline{s}}^* \\ \downarrow Id_{I_{\underline{s}}^*} & & \downarrow Id_{J_{\underline{s}}^*} \\ I & \xleftarrow{(g^*)^{-1}} & J \end{array} .$$

Como  $g$  es un difeomorfismo, entonces existe  $g^{-1} : J_{\underline{s}}^* \rightarrow I_{\underline{s}}^*$  y de la misma forma es posible extender  $g^{-1}$  a una función continua  $(g^*)^{-1} : J \rightarrow I$ , solo resta probar que  $(g^*)^{-1}$  es la inversa de  $g^*$ .

Para ello se debe verificar que  $(g^*)^{-1}g^* = Id_I$  y  $g^*(g^*)^{-1} = Id_J$ .

Del diagrama de arriba se tiene  $Id_{J_{\underline{s}}^*} \circ g = g^* \circ Id_{I_{\underline{s}}^*}$  y  $Id_{I_{\underline{s}}^*} \circ g^{-1} = (g^*)^{-1} \circ Id_{J_{\underline{s}}^*}$ , de la primera igualdad se tiene  $g^* \circ (g^*)^{-1} = Id_{J_{\underline{s}}^*}$  y de la segunda se tiene  $g^* \circ (g^*)^{-1} = Id_{I_{\underline{s}}^*}$ .

Por lo tanto  $(g^*)^{-1}$  es la inversa de  $g^*$  y como ambas son continuas entonces  $g^*$  es un homeomorfismo.

Para probar que  $g^*$  es de clase  $C^1$ , se tiene que la derivada de  $g^*$  viene dada por

$$(g^*)'(x) = \begin{cases} g'(x) & , \quad x \in I \setminus K_I \\ \gamma & , \quad x \in K_I \end{cases}$$

tomemos  $x \in I$ , esto produce dos casos:

- (i) Si  $x \in I \setminus K_I$ , entonces  $x \in I_{\underline{s}}$  para algún  $\underline{s}$ . Puesto que  $g^*|_{I_{\underline{s}}} = g$  de clase  $C^1$  se tiene que  $g'$  es continua en  $x$ .

Por lo tanto  $(g^*)'$  es continua en  $x$ .

- (ii) Si  $x \in K_I$ , sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión tal que  $x_n \rightarrow x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se debe estimar

$$|(g^*)'(x) - (g^*)'(x_n)| = |\gamma - (g^*)'(x_n)|.$$

Para esto hay tres casos:

- i') Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_I$ , entonces  $|(g^*)'(x) - (g^*)'(x_n)| = 0$ . Por lo tanto  $(g^*)'(x) \rightarrow (g^*)'(x_n)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- ii') Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I \setminus K_I$ ,

$$|(g^*)'(x) - (g^*)'(x_n)| = |\gamma - g'(x_n)| < \delta_n,$$

esta última desigualdad se da por la característica  $b$ ) dada para la función  $g'$ .

Luego cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$  con esto se tiene  $(g^*)'(x_n) \rightarrow (g^*)'(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por lo tanto  $(g^*)'$  es continua en  $x$ .

- iii') Si  $(x_n) = (x_{n_k}) \cup (x_{n_j})$  donde  $(x_{n_k}) \subset I \setminus K_I$  y  $(x_{n_j}) \subset K_I$ , entonces de  $a$ ) y  $b$ ) se tiene  $(g^*)'(x_n) \rightarrow (g^*)'(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por lo tanto  $(g^*)'$  es continua en  $x$ . Esto prueba que  $(g^*)'$  es continua en  $x$ .

Esto termina la prueba de que  $g^*$  es de clase  $C^1$  y por lo tanto termina la prueba de la proposición.

□

Es decir se ha obtenido un difeomorfismo, al que se denomina  $G$ ,  $G : I \rightarrow J$  de clase  $C^1$ . En el siguiente teorema se construye la herradura de medida positiva.

**TEOREMA 3.19.** (*[3]*) Sea  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión con  $\beta_n > 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < 2$  y  $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \rightarrow 1$ , se considera  $J = [-1, 1]$ ,  $I = [\frac{\beta_0}{2}, 1]$  y la sucesión  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $\alpha_n = \frac{\beta_{n+1}}{2}$ . Además sea  $S = I \times J$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  un difeomorfismo, donde  $S = I \times J$ , definido por:

1.  $f(x, y) = (G(x), G^{-1}(y))$ , para  $(x, y) \in I \times J$ .
2.  $f(x, y) = (G(-x), -G^{-1}(y))$ , para  $(x, y) \in -I \times J$ .
3.  $f(T) \cap (J \times J) = \emptyset$  donde  $T = (-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}) \times J$ ,

entonces existe una herradura de clase  $C^1$ , en el sentido de la definición 3.9, con medida de Lebesgue positiva.

DEMOSTRACIÓN. Empezaremos probando que la herradura tiene medida positiva, para ello sea  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión con  $\beta_n > 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < 2$  y  $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \rightarrow 1$ .

Sean  $J = [-1, 1]$ ,  $I = [\frac{\beta_0}{2}, 1]$  y la sucesión  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $\alpha_n = \frac{\beta_{n+1}}{2}$ . Entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < l(I)$  y  $\gamma = 2$ , con esto es posible obtener un difeomorfismo  $G : I \rightarrow J$  de clase  $C^1$  de la manera descrita anteriormente.

Para la construcción de la herradura se debe tener en consideración las propiedades de  $G$ , en este caso la principal de ellas es que preserva orientación. Por tanto se realiza los mismos pasos que para la construcción de la herradura de Smale, es decir, se contrae el cuadrado  $S$  en la dirección en la dirección vertical y se estira en la dirección horizontal y por último se dobla en forma de herradura interceptando con  $S$ , esta noción geométrica de lo que debe pasar con  $S$  es traducida en la definición del difeomorfismo  $f$  como sigue:

Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  un difeomorfismo, donde  $S = I \times J$ , definido por:

1.  $f(x, y) = (G(x), G^{-1}(y))$ , para  $(x, y) \in I \times J$ .
2.  $f(x, y) = (G(-x), -G^{-1}(y))$ , para  $(x, y) \in -I \times J$ .
3.  $f(T) \cap (J \times J) = \emptyset$  donde  $T = (-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}) \times J$ .

Hay que describir como trabaja  $f$  en  $I \times J$ ,  $-I \times J$  y en  $(-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}) \times J$ .

Se observa en la figura 6 que cada punto  $(x, y) \in I \times J$  es llevado por  $f$  en un punto  $(G(x), G^{-1}(y)) \in J \times I$ . En particular  $f(1, y) = (G(1), G^{-1}(y))$  (se denota por  $f(1, y)$  la imagen del conjunto  $\{1\} \times J$  por  $f$ .)  $G(1) = 1$  pues si no lo fuera existiría algún  $c \in [\frac{\beta_0}{2}, 1)$  tal que  $G(c) = 1$  y se tendría  $G(c) > G(1)$  lo que contradice el hecho que  $G$  preserva orientación. Por tanto  $f(1, y) = (1, G^{-1}(y))$ . Como en la figura 6.

De la misma manera se tiene:

$$f(\frac{\beta_0}{2}, y) = (G(\frac{\beta_0}{2}), G^{-1}(y)) = (-1, G^{-1}(y)).$$

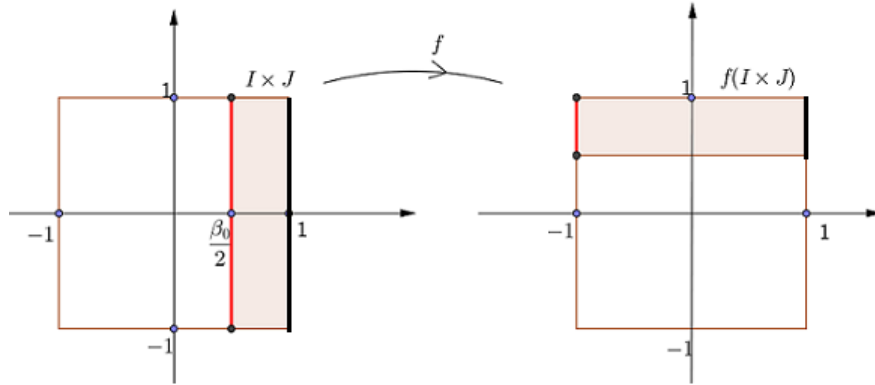
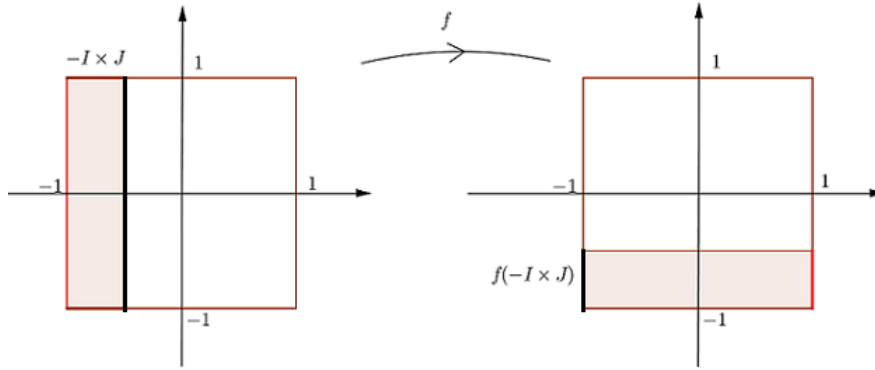
Si  $G(\frac{\beta_0}{2}) \neq 1$  existiría  $c \in (\frac{\beta_0}{2}, 1]$  tal que  $G(c) = -1 < G(\frac{\beta_0}{2})$  lo que de nuevo contradice el hecho que  $G$  preserva orientación. Así se tiene la imagen de  $I \times J$  bajo  $f$  como en la figura 6. De manera análoga se analiza cuando  $(x, y) \in -I \times J$ , en este caso se tiene  $f(x, y) = (G(-x), -G^{-1}(y)) \in J \times (-I)$ . En particular

$$f(-1, y) = (G(1), -G^{-1}(y)) = (1, G^{-1}(y)), \quad f(-\frac{\beta_0}{2}, y) = (G(-\frac{\beta_0}{2}), G^{-1}(y)),$$

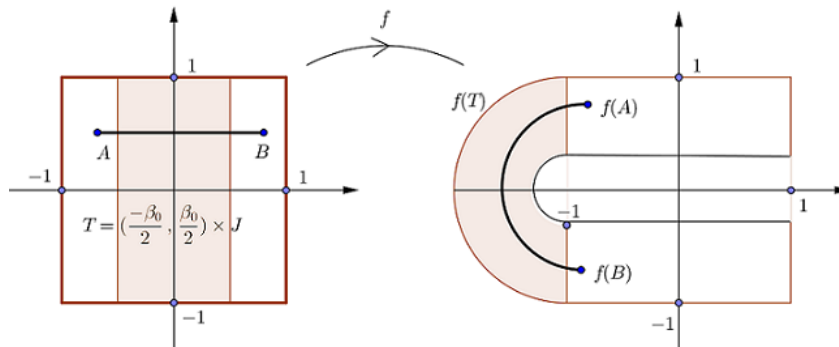
como puede ser visto en la figura 7

Falta analizar lo que ocurre en la región  $T = (-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}) \times J$  para ello se toma un segmento de recta  $\overline{AB}$  donde  $A \in I \times J$  y  $B \in (-I) \times J$ . Se observa (ver figura 8) que cuando se aplica el difeomorfismo  $f$  al segmento  $\overline{AB}$ , la curva  $f(\overline{AB})$  está ligada sin interrupciones por un



FIGURA 6. Acción de  $f$  en  $I \times J$  ([17])FIGURA 7. Acción de  $f$  en  $-I \times J$  ([17])

punto en  $f(I \times J)$  y un punto en  $f((-I) \times J)$  y puesto que  $f(T) \cap J \times J = \emptyset$  y  $G$  preserva orientación, se concluye que  $f(T)$  es una región como en la figura 8.

FIGURA 8. Acción de  $f$  en  $T = \left(\frac{-\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right) \times J$  ([17])

Así se define la herradura  $\Omega$  como el conjunto

$$\Omega = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(S) = K_J \times K_J.$$

De forma análoga que en la herradura de Smale, los iterados  $f^n(S)$  para  $n < 0$  serán herraduras en posición vertical en  $S$ . Por tanto se tiene una herradura de *Smale* con la intersección de esos conjuntos.

La herradura de Bowen  $\Omega$  tiene medida de Lebesgue dada por:

$$m(\Omega) = m(K_J \times K_J) = (m(K_J))^2.$$

Pero  $m(K_J) = 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n > 0$ , luego

$$m(\Omega) = (2 - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n)^2 > 0.$$

Puesto que la construcción es análoga a la herradura de Smale de medida nula es posible encontrar una conjugación entre la herradura de Bowen y el espacio  $\Sigma(2)$  definido en el lema 3.11, es decir para la herradura de Bowen es válido el item (b) del lema 3.11. Por ello la definición 3.9 es satisfecha. Esto completa la prueba. Con esto se acaba la construcción de la herradura de Bowen.  $\square$

Si tuviésemos la intención de construir una herradura de clase  $C^2$  con medida positiva, esto no se podría por el siguiente resultado.

**TEOREMA 3.20.** *Sea  $f \in C^2$  como en el teorema 3.19, entonces la herradura tiene medida de Lebesgue cero.*

**DEMOSTRACIÓN.** Ver el teorema 5,6 de [4].  $\square$

#### 4. El solenoide

Sea el toro sólido

$$M = S^1 \times D^2 = [0, 1] \times \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Como en [11, pag. 532], consideramos la función  $f : M = S^1 \times D^2 \rightarrow M$  definida por

$$(54) \quad f(\varphi, x, y) = (2\varphi, \frac{x}{10} + \frac{1}{2} \cos \varphi, \frac{y}{10} + \frac{1}{2} \sin \varphi)$$

Desde que la matriz  $Df$  tiene autovalores  $\mu = 2$  y  $\lambda = 1/2$  de multiplicidad 2,  $f$  estira por un factor  $\mu = 2$  en la dirección de  $S^1$  y contrae por un factor  $\lambda = 1/2$  en la dirección de  $D^2$ .

La imagen  $f(M)$  está contenida en el interior de  $M$ .

**En efecto**

$$\begin{aligned} & (\frac{x}{10} + \frac{1}{2} \cos \varphi)^2 + (\frac{y}{10} + \frac{1}{2} \sin \varphi)^2 = \\ & \frac{1}{100}(x^2 + y^2) + \frac{1}{10}(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + \frac{1}{4}(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ & \leq \frac{1}{100} + \frac{2}{10} + \frac{1}{4} < 1. \end{aligned}$$

Esto muestra que  $f(\mathbb{T}^2)$  está contenido en el interior de  $\mathbb{T}^2$ .

$f$  es inyectiva

**En efecto** Si  $f(\varphi_1, x_1, y_1) = f(\varphi_2, x_2, y_2)$ , entonces

$$\begin{aligned} 2\varphi_1 &= 2\varphi_2 \\ \frac{x_1}{10} + \frac{1}{2} \cos \varphi_1 &= \frac{x_2}{10} + \frac{1}{2} \cos \varphi_2 \\ \frac{y_1}{10} + \frac{1}{2} \sin \varphi_1 &= \frac{y_2}{10} + \frac{1}{2} \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

Si  $\varphi_1 = \varphi_2$ , entonces se tiene  $x_1 = x_2$  y  $y_1 = y_2$ . Si  $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{10} + \frac{1}{2} \cos \varphi_1 &= \frac{x_2}{10} - \frac{1}{2} \cos \varphi_1 \\ \frac{y_1}{10} + \frac{1}{2} \sin \varphi_1 &= \frac{y_2}{10} - \frac{1}{2} \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

o equivalentemente

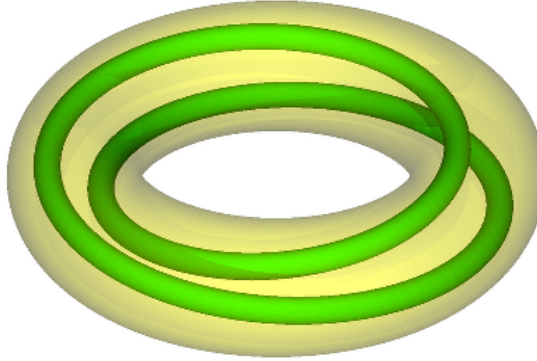
$$\frac{1}{10}(x_2 - x_1) = \cos \varphi_1, \quad \frac{1}{10}(y_2 - y_1) = \sin \varphi_1$$

lo que implica

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 100$$

lo cual es imposible pues  $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq 8$ . Esto prueba que  $f$  es inyectiva. Si

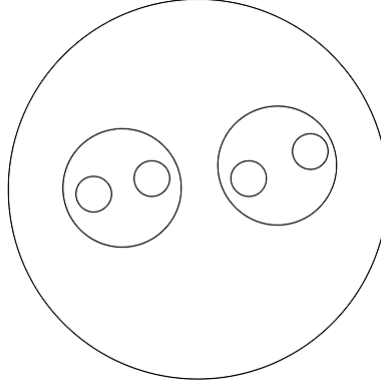
FIGURA 9. El toro sólido y su imagen bajo  $f$  ([11])



se toma una sección transversal  $C = \{\theta\} \times D^2$  de  $M$ , la imagen  $f(M)$  interseccionará a  $C$  en dos circunferencias de radio  $\frac{1}{10}$  como se ve en la figura 10. Se observa que  $C \cap f(M)$  puede escribirse como  $C \cap f(M) = f(C_1) \cap f(C_2)$  donde  $C_1$  y  $C_2$  son dos secciones transversales.

Sea  $f^2(M)$ , es claro que  $f^2(M) \subset f(M)$ , más aún  $C \cap f^2(M) = f(C_1 \cap f(M)) \cup f(C_2 \cap f(M))$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son dadas como antes. Esto es,  $C \cap f^2(M)$  consiste de cuatro discos, dos de ellos dentro de  $f(C_1)$  y los otros dos dentro de  $f(C_2)$ , como se observa en la figura 10.

Al considerar imagenes sucesivas de  $f^l(M)$  se tiene que  $C \cap f^{l+1}(M)$  consiste de  $2^{l+1}$  discos, cada par dentro de  $C \cap f^l(M)$ . Por lo tanto se ha demostrado el item (a) de la siguiente proposición

FIGURA 10. Intersección de  $C \cap f(M)$  ([11])

PROPOSICIÓN 3.21. ([11]) Sea la función  $f : M \rightarrow M$  definida en (54) la cual cumple  $f(M) \subset M$ , el conjunto maximal invariante dentro de  $M$  es

$$\Lambda = M \cap f(M) \cap f^2(M) \cap \cdots = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(M),$$

entonces:

- a)  $\Lambda$  es una atractor.
- b)  $\Lambda$  es una conjunto hiperbólico para  $f$

DEMOSTRACIÓN. Acá se probará el item (b), puesto que el item (a) ya fue probado. Primero se prueba que los conos de la forma

$$\{(u, v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 \leq \gamma^2 u\}$$

son invariantes bajo  $Df_{(\varphi, x, y)} M : T_{(\varphi, x, y)} M \rightarrow T_{(\varphi, x, y)} M$  para  $\gamma$  adecuado. En las coordenadas dadas se tiene

$$Df(u, v_1, v_2) = (2u, -\frac{u}{2} \sin \varphi + \frac{v_1}{10}, \frac{u}{2} \cos \varphi + \frac{v_2}{10}) := (\hat{u}, \hat{v}_1, \hat{v}_2).$$

Se supone que

$$v_1^2 + v_2^2 < \gamma^2 u^2,$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{v}_1^2 + \hat{v}_2^2 &= \left(-\frac{u}{2} \sin \varphi + \frac{v_1}{10}\right)^2 + \left(\frac{u}{2} \cos \varphi + \frac{v_2}{10}\right)^2 \\ &= \frac{u^2}{4} + \frac{1}{100}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{u}{10}(v_2 \cos \varphi - v_1 \sin \varphi) \\ &\leq \frac{u^2}{4} + \frac{1}{100}(\gamma^2 u^2) + \frac{1}{10}u(2\gamma u) \\ &= \frac{u^2}{4} + \frac{1}{100}(\gamma^2 u^2) + \frac{1}{5}\gamma u^2 \\ &= \left(\frac{1}{4\gamma^2} + \frac{1}{100} + \frac{1}{5\gamma}\right)\gamma^2 u^2, \end{aligned}$$

se necesita que el lado derecho de esta última igualdad sea menor que 4, para ello bastará tomar  $\gamma \geq \frac{3}{10}$ , con esto resulta

$$\hat{v}_1^2 + \hat{v}_2^2 \leq \gamma^2(2u)^2 = \gamma^2 \hat{u}^2.$$

Es decir, se ha probado que los conos horizontales con  $\gamma \geq \frac{3}{10}$  son  $Df$ - invariantes. Este mismo cálculo muestra que los conos verticales con  $\gamma \leq \frac{3}{10}$  son invariantes bajo  $Df^{-1}$ .

Además se necesita probar la condición de hiperbolicidad, es decir se debe probar que  $Df$  expande los conos horizontales y contrae los conos verticales.

Se supone que  $v_1^2 + v_2^2 \leq \gamma^2 u^2$ . Entonces

$$\|Df(u, v_1, v_2)\|^2 > 4u^2 \geq \frac{4}{1 + \gamma^2} \|(u, v_1, v_2)\|^2 > \|(u, v_1, v_2)\|^2.$$

esto sucede siempre que  $\gamma^2 < 3$ .

Por lo tanto  $Df$  expande los  $\gamma$ -conos horizontales si  $\frac{3}{10} \leq \gamma < \sqrt{3}$ .

De manera similar si  $v_1^2 + v_2^2 \geq \frac{u^2}{\gamma^2}$ , entonces

$$\begin{aligned} \|Df(u, v_1, v_2)\|^2 &= 4u^2 + \left(-\frac{u}{2} \sin \varphi + \frac{v_1}{10}\right)^2 + \left(\frac{u}{2} \cos \varphi + \frac{v_2}{10}\right)^2 \\ &\leq 4\gamma^2(v_1^2 + v_2^2) + \frac{u^2}{4} + \frac{(v_1^2 + v_2^2)}{100} + \frac{4}{10}(v_2 \cos \varphi - v_1 \sin \varphi) \\ &\leq \frac{u^2}{4} + \left(\frac{1}{100} + \frac{\gamma}{5} + 4\gamma^2\right)(v_1^2 + v_2^2) \\ &\leq \frac{u^2}{4} + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{25} + \frac{16}{25}\right)(v_1^2 + v_2^2) \\ &< \frac{3}{4} \|(u, v_1, v_2)\|^2, \end{aligned}$$

siempre que  $\gamma \geq \frac{2}{5}$ .

Esto es  $Df^{-1}$  preserva y expande  $\gamma$ -conos verticales para  $\frac{2}{5} \leq \gamma \leq \frac{10}{3}$ .

Por lo tanto  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico para  $f$ . □

## 5. Espacios de dimensión infinita

En esta sección se dan algunas definiciones y notaciones, útiles en lo que sigue del capítulo.

Sea  $\Lambda$  cerrado en  $M$  y  $E = TM$  el fibrado tangente sobre  $\Lambda$ . Se denota por  $\Gamma^0(\Lambda, E)$  el espacio de secciones continuas de  $E$  y por  $\Gamma^b(\Lambda, E)$  el espacio de secciones acotadas. Estos dos espacios tienen estructura natural de fibrado vectorial<sup>3</sup>. El espacio  $\Gamma^0(\Lambda, E) \subset \Gamma^b(\Lambda, E)$  pues  $M$  y  $\Lambda$  son compactos. La norma del supremo en  $\Gamma^b(\Lambda, E)$  es definida por  $\|h\| = \sup_{x \in \Lambda} \|h(x)\|$ .

---

3

■ Un fibrado vectorial (diferenciable) de rango  $n$  consiste de un espacio total  $E$ , un espacio base  $M$  y una proyección  $\pi : E \rightarrow M$ , donde  $M$  y  $E$  son variedades diferenciables, cada fibra  $E_x = \pi^{-1}(x)$

Esta norma hace de  $\Gamma^0(\Lambda, E)$  un espacio de Banach. El conjunto  $\Gamma^0(\Lambda, E)$  es cerrado en  $\Gamma^b(\Lambda, E)$  pues el límite uniforme de funciones continuas es continua.

DEFINICIÓN 3.22. Sea  $f$  un homeomorfismo de  $M$  y  $\Lambda$  un conjunto cerrado,  $f$ -invariante. Si  $f$  es de clase  $C^1$  se define el automorfismo

$$f_{\#} : h \mapsto Df \cdot h \cdot f^{-1},$$

esto es,  $(f_{\#}(h))(x) = Df_{f^{-1}(x)}(h(f^{-1}(x)))$

LEMA 3.23. Sea  $f_{\#} : h \mapsto Df \cdot h \cdot f^{-1}$ , ver definición 3.22, entonces se verifica lo siguiente:

- a) Si  $f$  es  $C^1$ , el automorfismo  $Df$  de  $TM$  es  $C^0$ , entonces  $f_{\#}$  envía  $\Gamma^0(\Lambda, T_{\Lambda}M)$  en  $\Gamma^0(\Lambda, T_{\Lambda}M)$ .
- b)  $f_{\#}$  es una función continua de  $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)$  en  $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)$  y además  $\|f_{\#}\| = \|Df\|$ .

DEMOSTRACIÓN. La prueba de (a) es solo aplicar la definición. Para la prueba de (b) se consideran  $h_1, h_2$  en  $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)$  tal que  $\|h_1 - h_2\| \leq \frac{\epsilon}{\lambda}$  así se tiene

$$\begin{aligned} \|f_{\#}h_1 - f_{\#}h_2\| &= \|(f_{\#}(h_1))(x) - (f_{\#}(h_2))(y)\| \\ &= \|Df_{f^{-1}(x)}(h_1(f^{-1}(x))) - Df_{f^{-1}(y)}(h_2(f^{-1}(y)))\| \\ &\leq \|Df_z\| \|h_1(f^{-1}(x)) - h_2(f^{-1}(y))\|, \quad z \in [f^{-1}(x), f^{-1}(y)] \\ &\leq \lambda \left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Con esto se ha probado que  $f_{\#}$  es continua, además de la definición de  $f_{\#}$  se tiene que  $\|f_{\#}\| = \|Df\|$ . Esto termina la demostración.  $\square$

PROPOSICIÓN 3.24. Sean  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo  $C^1$ ,  $\Lambda$  un conjunto cerrado, invariante por  $f$ .  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico para  $f$  si y solo si  $f_{\#}$  es una aplicación lineal hiperbólica (ver Apéndice A).

DEMOSTRACIÓN.

[ $\Rightarrow$ ] Si  $\Lambda$  es hiperbólico para  $f$ , entonces el espacio vectorial  $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)$  admite una descomposición hiperbólica para  $f_{\#}$

$$\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M) = \Gamma^b(\Lambda, E^s) \oplus \Gamma^b(\Lambda, E^u),$$

---

para  $x \in M$  tiene estructura de espacio vectorial  $n$ -dimensional y además la siguiente trivialización local es satisfecha:

Para cada  $x \in M$ , existe una vecindad  $U$  de  $x$  y un difeomorfismo  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  con la propiedad que para cada  $y \in U$ , la aplicación

$$\varphi_y : \varphi|_{E_y} : E_y \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo entre espacios vectoriales.

- Una sección en  $\Gamma(\Lambda, E)$  es una aplicación  $f : \Lambda \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ f = \text{identidad}_{\Lambda}$ .

es decir,  $f_{\#}$  es una aplicación lineal hiperbólica.

[ $\Leftarrow$ ] Como  $f_{\#}$  es una aplicación lineal hiperbólica, entonces se tiene que

$$\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M) = E^s \oplus E^u$$

es una descomposición hiperbólica para  $f_{\#}$ .

Se construye una descomposición hiperbólica para  $T_{\Lambda}M$  como sigue

$$E_x^s = E^s(x) = \{g_s(x) : g_s \in E^s\} \subset T_{\Lambda}M,$$

$$E_x^u = E^u(x) = \{g_u(x) : g_u \in E^u\} \subset T_{\Lambda}M$$

de donde se tiene que

$$T_xM = E_x^s \oplus E_x^u = \{g(x) : g \in \Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)\}, \text{ para cada } x \in \Lambda.$$

Por lo tanto  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico para  $f$ . □

## 6. La aplicación exponencial

Sea  $B(\Lambda, M)$  el espacio de aplicaciones acotadas (no necesariamente continuas) de  $\Lambda$  en la variedad Riemanniana  $M$ . El espacio  $B(\Lambda, M)$  es una variedad de Banach modelada sobre el espacio de campos vectoriales acotados (secciones del fibrado tangente)  $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)$ .

Se define la aplicación  $\exp_x : T_xM \rightarrow M$  como sigue<sup>4</sup>

- a)  $D(\exp_x)(0) = id$ ,
- b) envía líneas en  $T_xM$  que pasan por el origen en geodésicas en  $M$  que pasan por  $x$ ,
- c) envía bolas en  $T_xM$  cerca del origen en bolas en  $M$  cerca de  $x$ ,
- d)  $d(\exp_x x_i, x) = \|x_i\|$  para  $x_i$  suficientemente pequeño en  $T_xM$ .

En (c) aún vale algo mas esto sigue de (a) se tiene por el teorema de la aplicación inversa que para  $\delta$  suficientemente pequeño es un difeomorfismo sobreyectivo de  $B(0, \delta)$  en  $B(x, \delta)$  y cuando  $M$  es compacto  $\delta$  no depende de  $x$ . En este caso, la aplicación exponencial es un difeomorfismo de una vecindad de la sección cero del fibrado tangente sobre una vecindad de la diagonal en  $M \times M$  :

$$\exp : u \mapsto (m, \exp_m(u)), \quad u \in T_m(M).$$

**Cartas sobre  $B(\Lambda, M)$ .** Sean

$$\text{inc}(\Lambda) \text{ la inclusión de } \Lambda \text{ en } M(x \mapsto x),$$

$U_{\delta}$  la vecindad de  $\text{inc}(\Lambda)$  en  $B(\Lambda, M)$ , es decir,

$$U_{\delta} = \{g \in B(\Lambda, M) : d(g(x), x) \leq \delta, \quad \forall x \in \Lambda\}.$$

---

<sup>4</sup>Ver páginas 130 y 131 de [21].

La carta  $\Phi$  está definida por:

$$\begin{aligned}\Phi : U_\delta &\rightarrow \Gamma_\delta^b(\Lambda, TM) \subset \Gamma^b(\Lambda, TM) \\ h &\mapsto \Phi(h) = \exp^{-1}(\text{gráfico}(h)).\end{aligned}$$

$\Phi(h)$  es la sección dada por  $\Phi(h)(x) = \exp_x^{-1}(h(x))$ , esto es,  $\Phi(h)(x) = \exp^{-1}(x, h(x))$ .

Además se nota que  $\Phi(\text{inc}(\Lambda)) = \exp_x^{-1}(x)$ , es decir,  $\Phi(\text{inc}(\Lambda))$  es la sección cero, la cual es denotada por  $\tilde{0}$ .

### 7. Aplicaciones de la exponencial y la variedad estable local de $\tilde{0}$

DEFINICIÓN 3.25. Sea  $M$  una variedad Riemanniana y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo.

- a) Se define el automorfismo de  $B(\Lambda, M)$  asociado a  $f$ ,  $\hat{F}$ , como  $\hat{F} = fhf^{-1}$ .
- b) Con cartas exponencial, es suficiente estudiar  $\tilde{F}$  definida en una vecindad de la sección cero definida por

$$\tilde{F} = \Phi \hat{F} \Phi^{-1}.$$

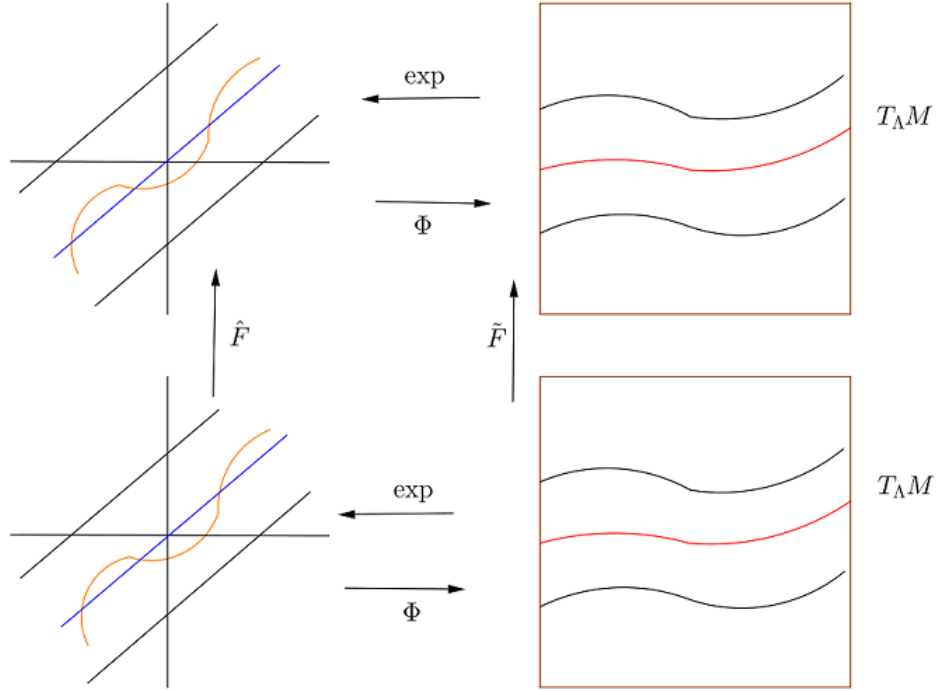
OBSERVACIÓN 3.26. (ver figuras 11) Se tienen las siguientes observaciones

- a) La inclusión  $\text{inc}(\Lambda)$  es un punto fijo para  $\hat{F}$ . (ver la acción de  $\hat{F}$  y  $\tilde{F}$  en la figura 11). Se probará que  $\text{inc}(\Lambda)$  es, en efecto, un punto fijo hiperbólico para  $\hat{F}$ .
- b) La imagen de la sección  $\sigma$  de  $\Gamma_\eta^b(\Lambda, TM)$ , para  $\eta < \delta$ , es la sección

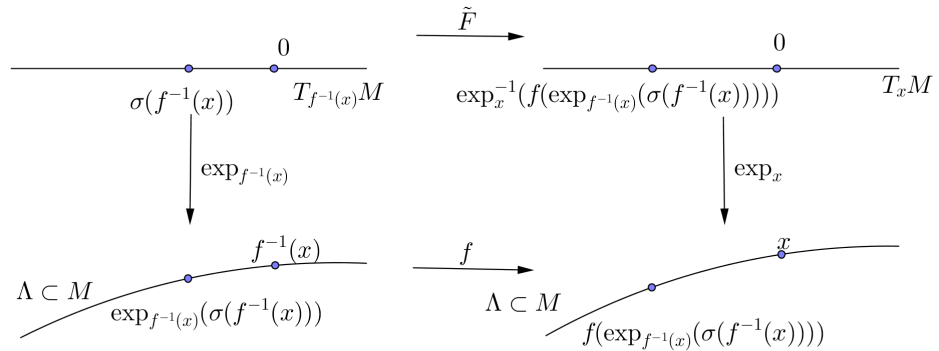
$$\tilde{F}(\sigma)(x) = \exp_x^{-1}(f(\exp_{f^{-1}(x)}(\sigma(f^{-1}(x))))),$$

ver figura 13.



FIGURA 11. Acción de  $\hat{F}$  y  $\tilde{F}$ FIGURA 12. Forma local de  $\hat{F}$ 

$$\begin{array}{ccc}
 U(\text{inc}(\Lambda)) & \xrightarrow{\hat{F}} & B(\Lambda, M) \\
 \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\
 \Gamma_\delta^b(\Lambda, TM) & \xrightarrow{\tilde{F}} & \Gamma_\delta^b(\Lambda, TM)
 \end{array}$$

FIGURA 13. Acción de  $\tilde{F}$ 

LEMA 3.27. Sean  $M$  una variedad Riemanniana,  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico respecto a  $f$ , además  $\hat{F}$  y  $\tilde{F}$  dadas en la definición 3.25. Entonces se obtiene lo siguiente:

- a) La aplicación  $\tilde{F}$  es tan suave como  $f$  y tiene por derivada en  $\tilde{0}$  al automorfismo  $f_{\#} = D_{\tilde{0}}\tilde{F}$  de  $\Gamma^b(\Lambda, TM)$  definido por

$$f_{\#}(\sigma) = Df \cdot \sigma \cdot f^{-1}.$$

- b)  $\text{inc}(\Lambda)$ , la inclusión de  $\Lambda$  en  $M$  ( $x \mapsto x$ ), es un punto fijo hiperbólico para  $\hat{F}$ .

DEMOSTRACIÓN. Para la prueba del item (a) se considera lo siguiente

$$\begin{aligned} D\tilde{F} &= D(\exp_x^{-1})(f(\exp_{f^{-1}(x)}(\sigma(f^{-1}(x))))) \cdot Df(\exp_{f^{-1}(x)}(\sigma(f^{-1}(x)))) \\ &\quad \cdot D(\exp_{f^{-1}(x)})(\sigma(f^{-1}(x))) \cdot D(\sigma)(f^{-1}(x)) \cdot D(f^{-1}(x)), \end{aligned}$$

al evaluar  $D\tilde{F}$  en la sección cero  $\tilde{0}$ , y usar el hecho que  $D(\exp_x)(\tilde{0}) = id$  se tiene:

$$\begin{aligned} D_{\tilde{0}}\tilde{F} &= Df(\sigma(f^{-1}(x))) \cdot D\sigma(f^{-1}(x)) \cdot Df^{-1}(x) \\ &= Df \cdot \sigma \cdot f^{-1}, \end{aligned}$$

con lo cual  $D_{\tilde{0}}\tilde{F} = Df \cdot \sigma \cdot f^{-1} = f_{\#}$ , esto prueba el item (a).

Para la prueba del item (b) se tiene que  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico para  $f$ , luego por el lema 3.24 que  $f_{\#}$  es una aplicación lineal hiperbólica, entonces  $\tilde{0}$  es un punto fijo hiperbólico para  $\tilde{F}$ . Por lo tanto  $\text{inc}(\Lambda)$  es un punto fijo hiperbólico para  $\hat{F}$ . Esto termina la prueba del item (b) y por lo tanto del lema.  $\square$

OBSERVACIÓN 3.28. Bajo las hipótesis del lema 3.27, el fibrado  $\Gamma^b(\Lambda, TM)$  tiene la siguiente descomposición hiperbólica para  $f_{\#} = D_{\tilde{0}}\tilde{F}$ :

$$\Gamma^b(\Lambda, TM) = \Gamma^b(\Lambda, E^s) \oplus \Gamma^b(\Lambda, E^u),$$

donde  $T_{\Lambda}M = E^s \oplus E^u$  es una descomposición hiperbólica de  $TM$  para  $f$ .

**7.1. La variedad estable de  $\tilde{0}$ .** Al aplicar el teorema de la variedad estable para un punto fijo (teorema 2.10) a  $\tilde{0}$  se tiene que existe una variedad invariante para  $\tilde{F} : \tilde{W}_{\eta}^s(\tilde{0}, \tilde{F})$  que es el gráfico de una función  $C^r$ :

$$\psi : \Gamma_{\eta}^b(\Lambda, E^s) \rightarrow \Gamma_{\eta}^b(\Lambda, E^u).$$

La variedad estable  $\tilde{W}_{\eta}^s(\tilde{0}, \tilde{F})$  está definida con la norma  $\|\cdot\|'$  sobre

$$\Gamma^b(\Lambda, TM) = \Gamma^b(\Lambda, E^s) \oplus \Gamma^b(\Lambda, E^u)$$

definida por

$$\|(x^s, x^u)\|' = \max(\|x^s\|, \|x^u\|).$$

La variedad estable  $\tilde{W}_{\eta}^s(\tilde{0}, \tilde{F})$  satisface

$$\tilde{W}_{\eta}^s(\tilde{0}, \tilde{F}) = \{\sigma \in \Gamma_{\eta}^b(\Lambda, TM) : \tilde{F}^n(\sigma) \in \Gamma_{\eta}^b(\Lambda, TM), \forall n \geq 0\},$$

donde

$$(55) \quad \text{si } \tau \in \Gamma_{\eta}^b(\Lambda, E^s), \text{ entonces } \phi(\tau) \in \Gamma_{\eta}^b(\Lambda, E^u)$$

es la única sección del fibrado inestable que satisface:

$$(\tilde{F})^n(\tau, \psi(\tau)) \in B'_\eta(\tilde{0}), \quad \forall n \geq 0,$$

donde  $B'_\eta(\tilde{0})$  es la bola de radio  $\eta$  centrada en  $\tilde{0}$  en  $\Gamma^b_\eta(\Lambda, TM)$  con la norma  $\|\cdot\|'$ .

Al regresar a la norma  $\|\cdot\|$  sobre  $\Gamma^b(\Lambda, TM)$  inducida por la métrica Riemanniana en  $M$ , se tiene

$$W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F}) = \{\sigma \in \Gamma^b(\Lambda, TM) : \|\tilde{F}^n(\sigma)\| \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}.$$

Desde que las normas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|'$  son equivalentes se tiene que para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,

$$W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F}) \subset \tilde{W}_\eta^s(\tilde{0}, \tilde{F}).$$

LEMA 3.29. *Se tiene:*

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{\exp_x(\sigma(x)) : \sigma \in W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F})\} = \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}$$

$$[W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F}) \subset \Gamma^b(\Lambda, TM); W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda) \subset B(\Lambda, M)]$$

DEMOSTRACIÓN. Aquí se probará que

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}$$

$$(a) \quad W_\epsilon^s(x, f) \supset \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}.$$

En efecto: Sea  $h$  un punto en la variedad estable  $W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})$ , por definición la sucesión  $\hat{F}^n(h) \rightarrow \text{inc}(\Lambda)$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , esto es:

$$\sup_{z \in \Lambda} d[\hat{F}^n(h)(z), \hat{F}^n(\text{inc})(z)] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Además desde que  $\text{inc}(\Lambda)$  es un punto fijo para  $\hat{F}$  se tiene:

$$\sup_{z \in \Lambda} d[\hat{F}^n(h)(z), z] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty,$$

de la definición de  $\hat{F}$  se tiene que  $\hat{F}^n = f^n h f^{-n}$ , al reemplazar esto resulta

$$\sup_{z \in \Lambda} d[f^n h f^{-n}(z), z] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty,$$

luego al usar la continuidad de  $f^n$  se sigue que

$$\sup_{z \in \Lambda} d[f^n h(z), f^n(z)] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Por lo tanto  $h(z) \in W_\epsilon^s(z, f)$ .

$$(b) \quad W_\epsilon^s(x, f) \subset \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}.$$

En efecto: Sea  $y \in W_\epsilon^s(x, f)$ , por definición se tiene  $d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Lo que se debe probar es la existencia de una función que pertenezca a  $W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})$  tal que la imagen de  $x$  bajo esta función resulte  $y$ .

Esta función se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\delta_x^y(x) &= y, \\ \delta_x^y(z) &= z, \quad \forall z \neq x,\end{aligned}$$

es claro que  $\delta_x^y \in B(\Lambda, M)$ .

Además se observa que:

$$\hat{F}(\delta_x^y(z)) = f \circ \delta_x^y \circ f^{-1}(z) = \begin{cases} z & ; \quad x \neq f^{-1}(z), \\ f(y) & ; \quad x = f^{-1}(z), \end{cases}$$

lo que implica

$$\hat{F}(\delta_x^y(z)) = f \circ \delta_x^y \circ f^{-1}(z) = \begin{cases} z & ; \quad f(x) \neq z, \\ f(y) & ; \quad f(x) = z, \end{cases}$$

y

$$\delta_{f(x)}^{f(y)}(z) = \begin{cases} z & ; \quad f(x) \neq z, \\ f(y) & ; \quad f(x) = z, \end{cases}$$

de donde  $\hat{F}(\delta_x^y(z)) = \delta_{f(x)}^{f(y)}(z)$ , luego por inducción se tiene:

$$\hat{F}^n(\delta_x^y(z)) = \delta_{f^n(x)}^{f^n(y)}(z).$$

Solo resta mostrar que si  $y \in W_\epsilon^s(x, f)$ , entonces la función  $\delta_x^y \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})$

$$\begin{aligned}d(\hat{F}^n(\delta_x^y), \text{inc}(\Lambda)) &= \sup_{z \in \Lambda} d(\hat{F}^n(\delta_x^y(z)), \text{inc}(\Lambda)(z)) \\ &= \sup_{z \in \Lambda} d(\delta_{f^n(x)}^{f^n(y)}(z), z) \\ &= d(f^n(y), f^n(x)).\end{aligned}$$

Ahora como,  $y \in W_\epsilon^s(x, f)$ ,  $d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  se tiene que  $d(\hat{F}^n(\delta_x^y), \text{inc}(\Lambda)) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Es decir,  $\delta_x^y \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})$ .

Por lo tanto  $y \in \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}$ . De (a) y (b) se tiene que:

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\},$$

o en cartas exponenciales

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{\exp_x \sigma(x) : \sigma \in W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F})\}.$$

□

## 8. Variedad estable local para un conjunto hiperbólico

Esta sección está dedicada a probar el siguiente teorema

**TEOREMA 3.30.** *Sean  $f$  un difeomorfismo de  $M$ , y  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico cerrado para  $f$  el cual está con la métrica adaptada (ver la observación A.2). Entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que para cada  $x \in W_\epsilon^s(x, f)$  es un disco incrustado de dimensión igual a la dimensión de  $E_x^s$ ; más aún,  $T_x W_\epsilon^s(x) = E_x^s$ ; y similarmente para el caso inestable.*

*Los discos estable e inestable también satisface lo siguiente :*

1.

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \quad \forall y \in W_\epsilon^s(x), \quad \forall n \geq 0,$$

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \quad \forall y \in W_\epsilon^u(x), \quad \forall n \geq 0,$$

donde  $\lambda < 1$  es tal que  $\|Df|_{E^s}\| < \lambda$  y  $\|(Df|_{E^u})^{-1}\| < \lambda$ .

2. la incrustación de  $W_\epsilon^{u(\text{resp.}s)}(x, f)$  varía continuamente con  $x$ . Más precisamente, si  $f$  es  $C^r$  y  $n = \dim E^s$ , entonces existe una vecindad  $U$  de  $x$  y una aplicación continua

$$\Theta : U \rightarrow \text{Emb}^r(D^n, M)$$

tal que  $\Theta(y)(0) = y$ ,  $\Theta(y)(D^n) = W_\epsilon^s(y, f)$ ,  $\forall y \in U$ .

3.

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{y : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon; \quad \forall n \geq 0\},$$

$$W_\epsilon^u(x, f) = \{y : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon; \quad \forall n \leq 0\}.$$

4. La variedad  $W_\epsilon^{u(\text{resp.}s)}(x, f)$  es tan suave como  $f$ .

Para la prueba del teorema 3.30 es necesario los siguientes resultados previos.

LEMA 3.31. Existe una aplicación fibrado<sup>5</sup> continua  $\mu$  de clase  $C^r$  sobre cada fibra tal que la imagen de una sección  $\sigma$  en  $\Gamma_\eta^b(\Lambda, E^s)$  bajo la aplicación  $\psi$  que define  $\tilde{W}_\eta^s(\tilde{0}, \tilde{F})$  puede ser escrita como  $\psi(\sigma) = \mu \circ \sigma$ .

El diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_\eta^s & \xrightarrow{\mu} & E_\eta^u \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{id} & \Lambda \end{array}$$

conmuta.

Más aún, la restricción de  $\mu$  en cada fibra sobre  $x$  con sus derivadas hasta de orden  $r$ , dependen continuamente de  $x$ .

DEMOSTRACIÓN. La condición que  $\psi(\sigma) = \mu \circ \sigma$  implica en particular que el valor de  $\psi(\sigma)$  en  $x$  depende unicamente de  $\sigma(x)$  y no de los valores de  $\sigma$  en otros lugares.

Sean  $x \in \Lambda$ , y  $\sigma_1, \sigma_2$  dos secciones en  $\Gamma_\eta^b(\Lambda, E^s)$  tal que  $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ ; se probará que  $\psi(\sigma_1)(x) = \psi(\sigma_2)(x)$ .

En efecto, se asume que  $\psi(\sigma_1)(x) \neq \psi(\sigma_2)(x)$ .

Como  $[\sigma_1, \psi(\sigma_1)]$  y  $[\sigma_2, \psi(\sigma_2)]$  pertenecen a  $\tilde{W}_\eta^s(\tilde{0}, \tilde{F})$ , se tiene  $\tilde{F}^n(\sigma_1, \psi(\sigma_1)) \rightarrow \tilde{0}$  y  $\tilde{F}^n(\sigma_2, \psi(\sigma_2)) \rightarrow \tilde{0}$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , (esto es definición de variedad estable para  $\tilde{0}$ , vista

<sup>5</sup>Un aplicación fibrado es una aplicación  $\mu : (E_1, \pi_1, B_1) \rightarrow (E_2, \pi_2, B_2)$ , donde  $(E_i, \pi_i, B_i)$  son fibrados vectoriales para cada  $i = 1, 2$ .

como el gráfico de la función  $\psi$ ,) Ahora se define la función acotada,  $\tau \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^u)$ , definida por:

$$\begin{aligned}\tau(y) &= \psi(\sigma_1)(y) \quad \text{para } y \neq x \\ \tau(x) &= \psi(\sigma_2)(x).\end{aligned}$$

De la definición de  $\tau$  se tiene que  $\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau) \rightarrow \tilde{0}$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , puesto que  $\psi(\sigma_1)(x) \neq \psi(\sigma_2)(x)$  entonces  $\tau \neq \psi(\sigma_1)$ , solo resta probar que  $d(\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau), \tilde{0})$  porque si se tuviera esto, se habría encontrado otra sección del fibrado inestable tal que  $\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau) \in B'_\eta(\tilde{0})$  y esto contradice (55).

En efecto:

$$\begin{aligned}d(\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau), \tilde{0}) &= \sup_{z \in \Lambda} d(\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau)(z), \tilde{0}_z) \\ &= \sup_{z \in \Lambda} \|\exp_z^{-1}[f^n(\exp_{f^{-n}(z)}(\sigma_1, \tau)(f^{-n}(z)))]\| \\ &= \max \left\{ \sup_{\substack{z \in \Lambda \\ z \neq f^{-n}(x)}} \|\exp_z^{-1}[f^n(\exp_{f^{-n}(z)}(\sigma_1, \psi(\sigma_1))(f^{-n}(z)))]\|, \right. \\ &\quad \left. \|\exp_{f^n(x)}^{-1}[f^n(\exp_x(\sigma_2, \psi(\sigma_2))(x))]\| \right\} \\ &\leq \max\{d(\tilde{F}^n(\sigma_1, \psi(\sigma_1)), \tilde{0}), d(\tilde{F}^n(\sigma_2, \psi(\sigma_2)), \tilde{0})\}.\end{aligned}$$

la última expresión tiende a cero, cuando  $n \rightarrow +\infty$ , lo que demuestra que al reemplazar  $\psi(\sigma_1)(x)$  por  $\psi(\sigma_2)(x)$ , se tiene que  $\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau)$  sigue convergiendo uniformemente a la sección cero. Esto es  $\psi(\sigma_1)(x) = \psi(\sigma_2)(x)$ , lo que prueba que  $\psi(\sigma)(x)$  solo depende de  $\sigma(x)$ .

Ahora es posible definir la función  $\mu : E_\eta^s \rightarrow E_\eta^u$  por  $\mu(v) = \psi(\delta_x^v)(x)$ , donde  $\delta_x^v$  es la sección dada por  $\delta_x^v(x) = v$ ,  $\delta_x^v(z) = 0_z$  para  $z \neq x$ . Es decir  $\mu$  es definida por la siguiente composición

$$E_x^s \longrightarrow \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^s) \xrightarrow{\psi} \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^u) \xrightarrow{ev_x} E_x^u,$$

$$v \longmapsto \delta_x^v \longmapsto \psi(\delta_x^v) \longmapsto \psi(\delta_x^v)(x) = \mu(v).$$

Esta definición garantiza que  $\mu$  preserva las fibras de  $E_\eta^s$ . Además,  $\mu$  es inducida por la función por la aplicación  $\psi : \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^s) \rightarrow \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^u)$  la cual es de clase  $C^r$ , por lo tanto la restricción de  $\mu$  a la fibra de  $E_\eta^s$  sobre  $x$ ,  $\mu_x$ , es de clase  $C^r$ .

Solo resta probar que  $\mu_x$  depende continuamente de  $x$  en la topología  $C^r$ , lo cual no es inmediato ya que se ha considerado secciones acotadas sin tener en cuenta una topología para  $\Lambda$ .

Para probar la continuidad es suficiente probar que  $\mu$  induce una función de clase  $C^r$  del espacio de secciones continuas  $\Gamma_\eta^0(\Lambda, E^u)$ .

Como se recuerda el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C^0(\Lambda, M) & \xrightarrow{\hat{F}} & C^0(\Lambda, M) \\ \text{inclusión} \downarrow & & \downarrow \text{inclusión} \\ B(\Lambda, M) & \xrightarrow{\hat{F}} & B(\Lambda, M) \end{array} .$$

La inclusión  $inc(\Lambda)$  es un punto fijo hiperbólico para la función  $\hat{F} : C^0(\Lambda, M) \rightarrow C^0(\Lambda, M)$ . Es posible, al trabajar con cartas, producir la variedad estable de  $inc(\Lambda)$  como el gráfico de la función

$$\psi' : \Gamma_\eta^0(\Lambda, E^s) \rightarrow \Gamma_\eta^0(\Lambda, E^u).$$

Esta función  $\psi'$  es de clase  $C^r$  y debería ser la restricción de  $\psi$  a  $\Gamma_\eta^0(\Lambda, E^s)$ , desde que la variedad estable de 0 en  $\Gamma_\eta^0(\Lambda, M)$  es el gráfico de  $\psi$ . Así  $\psi'(\sigma) = \mu \circ \sigma$  y se observa que la función  $\mu_x$  y todas sus derivadas hasta de orden  $r$  dependen continuamente de  $x$ .  $\square$

### Demostración del teorema 3.30.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene

$$W_\epsilon^s(x, b) = \{exp_x(\gamma(x)) : \gamma \in W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F})\} \subset \tilde{W}_\eta^s(x, b),$$

donde

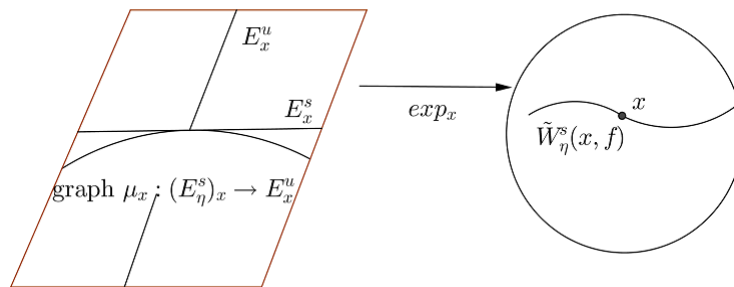
$$\tilde{W}_\eta^s(x, b) = \{exp_x[v, \mu(v)] : v \in E_x^s, \|v\| < \eta\}$$

o de manera equivalente

$$\tilde{W}_\eta^s(x, b) = \{exp_x(\text{graph } \mu_x \subset T_x M)\}.$$

Desde que la restricción de  $\mu$  a cada fibra es  $C^r$  y además  $exp_x$  es un difeomorfismo local, entonces  $\tilde{W}_\eta^s(x, b)$  es un disco embebido alrededor de  $x$  de dimensión igual a la dimensión de  $E_x^s$  (ver figura 14).

FIGURA 14. Aplicación exponencial



Desde que  $\psi(\tilde{0}) = \tilde{0}$ , se tiene que:  $\mu \circ \tilde{0} = \tilde{\psi}(\tilde{0}) = \tilde{0}$ , entonces  $\mu(0_{E_x^s}) = 0_{E_x^u}$ .

Desde que el gráfico de  $\psi$ ,  $\{(\sigma, \psi(\sigma)) : \sigma \in \Gamma_\epsilon^b(\Lambda, E^s)\}$ , es tangente a  $\Gamma_\epsilon^b(\Lambda, E^s)$  en  $\tilde{0}$ , el gráfico de la restricción de  $\mu$  a la fibra sobre  $x$ ,  $\{(v, \mu(v)) : v \in E_x^s, \|v\| \leq \eta\}$  es tangente a  $E_x^s$  en el origen del espacio tangente a  $M$  en  $x$ . Por lo tanto

$$(56) \quad T_x(\tilde{W}_\eta^s(x, f)) = E_x^s.$$

Sea la función

$$\begin{aligned} \text{graph } \mu : \Lambda &\rightarrow \text{Emb}(D^s, M) \\ x &\mapsto \exp_x[\text{graph } \mu_x], \end{aligned}$$

donde  $s = \dim E_x^s$ . Esta función esta definida localmente por las cartas del fibrado  $E^s$  y es continua.

Descompongamos esta función.

Sea  $C_x : D_\eta^s \rightarrow (E_\eta^s)_x$  la carta trivializante del fibrado en una vecindad de  $x$ . Además sea la función

$$\begin{aligned} p_x : D_\eta^s &\rightarrow M \\ y &\rightarrow \exp_x[C_x(y), \mu \circ C_x(y)]. \end{aligned}$$

(No olvidar reescalar via la función  $\text{sc} : D_1^s \rightarrow D_\eta^s$ .) La función  $\text{graph } \mu$  está definida localmente por  $(\text{graph } \mu)x = p_x \circ \text{sc}$  y es continua.

Por lo tanto  $\tilde{W}_\eta^s(x, f)$  es un disco  $C^r$  que depende continuamente sobre  $x$  en la topología  $C^r$ .

Ahora se mostrará que  $W_\epsilon^s(x, f)$  es un disco de la misma dimensión que  $\tilde{W}_\eta^s(x, f)$  y que varía continuamente sobre  $x$ .

En efecto: Como  $T_x(\tilde{W}_\eta^s(x, f)) = E_x^s$  (ver ecuación (56)) se tiene que:

$$\|T_x(\tilde{W}_\eta^s(x, f))\| = \|T_x f|_{\tilde{W}_\eta^s(x, f)}\| = \|E_x^s\| < \lambda \Rightarrow \|T_x f|_{\tilde{W}_\eta^s(x, f)}\| < \lambda.$$

Así se tiene que para  $\epsilon$  suficientemente pequeño se cumple la siguiente implicación:

Si  $y \in \tilde{W}_\eta^s(x, f)$  y  $d(x, y) \leq \epsilon$ , entonces  $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ .

Esta afirmación es verdadera ya que  $\tilde{W}_\eta^s(x, f)$  varía continuamente con respecto a  $x$ , es más  $\epsilon$  puede ser tomado independientemente de  $x$  ya que  $\Lambda$  es compacto.

Con esto se tiene:

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{y \in \tilde{W}_\eta^s(x, f) : d(y, x) \leq \epsilon\} = \tilde{W}_\eta^s(x, b) \cap B_\epsilon(x).$$

Ahora si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño

$$\tilde{W}_\eta^s(x, b) \cap B_\epsilon(x)$$

es un disco y el teorema de isotopía de Thom (ver la sección 8 del libro [10], también vea el teorema B.4 del Apéndice 2) muestra que este depende continuamente  $C^r$  de  $x$ .  $\square$



## Conclusiones y sugerencias

### Conclusiones

Del trabajo se pueden extraer las siguientes conclusiones

1. El conjunto, en principio, llamado variedad estable para un punto fijo hiperbólico es en efecto una variedad diferenciable.
2. Es posible llevar esta idea de punto fijo hiperbólico, a un conjunto mayor esto se realiza usando la idea de conjunto hiperbólico.
3. También es posible demostrar que el conjunto variedad estable asociado a un conjunto hiperbólico es un variedad diferenciable.
4. Es posible llevar el principio de contracción a un espacio de dimensión infinita.
5. Se construyó como conjuntos hiperbólicos a la herradura de Smale con medida de Lebesgue cero, este era un conjunto caótico pues todas las bi-sucesiones eran posibles.
6. Es posible construir una herradura de Smale con medida de Lebesgue positiva y con esto no se puede despreciar el caos.

### sugerencias

1. Sería bueno encontrar explícitamente la variedad estable de ciertos conjuntos hiperbólicos.
2. Se sugiere estudiar si la intersección de la variedad estable e inestable sigue siendo un conjunto unitario mediante perturbaciones.
3. En la variedad estable e inestable se encuentran dominadas por un conjunto llamado cono hiperbólico donde aparece una especie de pendiente que en general no depende de el punto donde se está estudiando la variedad (esto pasa en el caso de variedades compactas). Sería bueno estudiar si se puede tomar la pendiente de manera uniforme o si una gobierna sobre la otra.

## Aplicaciones lineales

*En este apéndice se desarrolla el tema concerniente a aplicaciones lineales, para este propósito hacemos uso del libro [23].*

Sea  $A$  una matriz real de orden  $n \times n$ . Si  $v$  es autovector para el autovalor  $\lambda$ , entonces  $A^n v = \lambda^n v$ . Por tanto, si  $|\lambda| < 1$ , entonces  $|A^n v| = |\lambda|^n |v|$ , tiende a cero, cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Al usar la forma canónica de Jordan se tiene el siguiente resultado:

**TEOREMA A.1.** *Sea  $A$  una matriz real de orden  $n \times n$  y la aplicación  $x \mapsto Ax$ . Son equivalentes*

- a) *Existe una norma  $|\cdot|_*$  en  $\mathbb{R}^n$  y una constante  $0 < \mu < 1$  tal que para alguna condición inicial  $x \in \mathbb{R}^n$ , los iterados satisfacen*

$$|A^n x|_* \leq \mu^n |x|_*, \quad \forall n \geq 0.$$

- b) *Para alguna norma  $|\cdot|'$  en  $\mathbb{R}^n$  y una constante  $0 < \mu < 1$  y  $C \geq 1$  tal que para alguna condición inicial  $x \in \mathbb{R}^n$ , los iterados satisfacen*

$$|A^n x|' \leq C \mu^n |x|', \quad \forall n \geq 0.$$

- c) *Todos los autovalores  $\lambda$  de  $A$  satisfacen  $|\lambda| < 1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver página 116 de [23]. □

**OBSERVACIÓN A.2.** Se tienen las siguientes observaciones

- La prueba de este teorema es similar a la prueba para ecuaciones diferenciales lineales reemplazando las integrales por sumatorias.
- Como en las ecuaciones diferenciales lineales, la norma dada en el ítem (a) del teorema A.1 es llamada **Norma adaptada**.

**DEFINICIÓN A.3.** Gracias al resultado obtenido en el teorema A.1, se puede definir lo siguiente:

- a) Una aplicación lineal inducida por una matriz cuyos autovalores tienen valor absoluto menor que uno es llamada una **contracción lineal** y el origen es llamado **punto fijo atractor** para esta aplicación.
- b) Si todos los autovalores tienen norma mayor que uno, entonces  $A^n x$  es una expansión para  $n > 0$  y una contracción para  $n < 0$ , en este caso la aplicación inducida por  $A$  es llamada **expansión lineal**, y el origen un **punto fijo repulsor** para esta aplicación.

**TEOREMA A.4.** *Sea  $B, C$  dos matrices de orden  $n \times n$  que inducen contracciones lineales invertibles (o ambas inducen expansiones),  $Bx, Cx$ . Además  $B$  y  $C$  pertenecen al mismo camino componente de  $Gl(n, \mathbb{R})$ , el conjunt de matrices invertibles de orden  $n \times n$ . Entonces la aplicación lineal  $Bx$  es topologicamente conjugado a la aplicaión lineal  $Cx$*

DEMOSTRACIÓN. Ver página 119 de [23] □

**OBSERVACIÓN A.5.** El Grupo Lineal General,  $Gl(n, \mathbb{R})$ , tiene dos componentes conexas, que son el conjunto de matrices invertibles que tienen determinante positivo y el conjunto de matrices invertibles que tienen determinante negativo. Por tanto, si  $A$  y  $B$  son dos elementos de  $Gl(n, \mathbb{R})$  ambos con determinante positivo (ambos preservan orientación), entonces  $A$  y  $B$  son topologicamente conjugados. Similarmente, si  $A$  y  $B$  son dos elementos de  $Gl(n, \mathbb{R})$  ambos con determinante negativo (ambos revierten orientación), entonces  $A$  y  $B$  son topologicamente conjugados.

**DEFINICIÓN A.6.** Si todos los autovalores de  $A$  tienen norma distinto de uno,  $Ax$  es llamada **aplicación lineal hiperbólica**, con esto es posible definir los siguientes autoespacios:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^u &= \text{span}\{v : v \text{ es un autovector generalizado para un autovalor } \lambda, \\ &\quad \text{con } |\lambda| > 1; \} \\ \mathbb{E}^c &= \text{span}\{v : v \text{ es un autovector generalizado para un autovalor } \lambda, \\ &\quad \text{con } |\lambda| = 1; \} \\ \mathbb{E}^s &= \text{span}\{v : v \text{ es un autovector generalizado para un autovalor } \lambda, \\ &\quad \text{con } |\lambda| < 1; \}\end{aligned}$$

Estos subespacios son llamados **autoespacio inestable**, **autoespacio central** y **autoespacio estable**.

En seguida se prueba que la condición de ser hiperbólico se preserva mediante perturbaciones, este resultado es usado para probar que aplicaciones lineales hiperbólicos cercanas son topologicamente conjugadas que es un análogo al teorema A.4, para ello se necesita definir el siguiente conjunto

$$H(n, \mathbb{R}) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) : Ax \text{ es aplicación lineal hiperbólica}\}$$

**TEOREMA A.7.** *Sea  $A \in H(n, \mathbb{R})$ . Si  $B$  está cerca de  $A$ , entonces  $B \in H(n, \mathbb{R})$  y la división para  $B$ ,  $\mathbb{E}_B^u \oplus \mathbb{E}_B^s$ , tiene dos subespacios con las mismas dimensiones que tiene  $A$ . Más aún como  $A$  varia de manera continua a  $B$ , entonces los subespacios también varían de manera continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $p(\lambda)$  el polinomio característico para  $A$ . Sea  $\gamma$  una curva cerrada simple dentro del disco unitario abierto del plano complejo que encierra los autovalores de

$A$  cuya norma es menor que uno y está orientada en sentido antihorario. Sea  $\gamma'$  una curva cerrada simple fuera del disco cerrado unitario abierto en el plano complejo que rodea todos los autovalores de  $A$  que tienen norma mayor que uno pero no encierra al disco unitario, también orientada en sentido antihorario, además sea  $q(z)$  el polinomio característico de  $B$

Por residuos se tiene que

$$\text{dimensión}(E_A^s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz \quad , \quad \text{dimensión}(E_A^u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{p'(z)}{p(z)} dz$$

cuentan el número de raíces de  $p(z)$  dentro de  $\gamma$  y  $\gamma'$  respectivamente. Además cada una de estas integrales varía continuamente con el cambio de  $p(z)$  a  $q(z)$ . Así para  $B$  cerca a  $A$  el polinomio característico  $q(z)$  no se anula sobre  $\gamma$  o sobre  $\gamma'$  y todas las raíces de  $q(z)$  están en el interior de  $\gamma$  o  $\gamma'$ . Por lo tanto  $B$  es hiperbólico con la misma dimensiones en los subespacios que  $A$ .

Para probar que los espacios estables e inestables varían continuamente se tienen las proyecciones (ver sección 148 de [25], además puede consultar [1])

$$P^s v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (zI - C)^{-1} v dz, \quad P^u v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} (zI - C)^{-1} v dz,$$

de  $\mathbb{R}^n$  a  $E^s$  y  $\mathbb{R}^n$  a  $E^u$  respectivamente. Puesto que estas integrales varían continuamente con los cambios de  $C$  a  $A$  y luego a  $B$ , entonces los subespacios  $E_B^s$  y  $E_B^u$  varían continuamente.

Por lo tanto los subespacios de  $B$  están cerca de los subespacios de  $A$ .  $\square$

**TEOREMA A.8.** *Sea  $A$  un matriz de orden  $n \times n$  que induce una aplicación lineal hiperbólica  $Ax$ . Si  $B$  está cerca de  $A$ , entonces  $Bx$  es topológicamente conjugado a  $Ax$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Este resultado sigue del caso de contracciones y expansiones lineales (teorema A.4) y el hecho de que la dimensión de los espacios en que se divide el espacio total no cambia (teorema A.7).  $\square$

## Contracción

*Una aplicación definida en un espacio métrico completo en si mismo que envia un par de puntos cercanos a que se encuentren aún más cerca tiene un punto fijo. Este principio de contracción tiene muchas alcances incluyendo el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales y la existencia y suavidad de variedades invariantes. En este apéndice se hace uso del libro [6].*

Aquí se asume que  $(X, d)$  es un espacio métrico. Un punto  $x_0 \in X$  es un punto fijo para una función  $T : X \rightarrow X$  si  $T(x_0) = x_0$ . El punto  $x_0$  es llamado **atractor global** si  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x_0$  para cada  $x \in X$ .

DEFINICIÓN B.1. Sea  $T : X \rightarrow X$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \lambda < 1$ . La función  $T$  es llamada contracción (con constante de contracción  $\lambda$ ) si

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

para cualquier  $x, y \in X$

El siguiente teorema es fundamental pues establece que una contracción vista como un sistema dinámico tiene como punto fijo a un atractor global.

TEOREMA B.2. (*Teorema de la aplicación de contracción*) Si la función  $T$  es una contracción en el espacio métrico completo  $(X, d)$  con constante de contracción  $\lambda$ , entonces  $T$  tiene un único punto fijo  $x_0 \in X$ . Más aún si  $x \in X$ , entonces la sucesión  $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $x_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y

$$d(T^n(x), x_0) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(T(x), x)$$

DEMOSTRACIÓN. Ver página 122 de [6]. □

### 1. Contracción uniforme

En seguida se considera contracciones que dependen de un parámetro y se prueba una versión uniforme del teorema B.2

DEFINICIÓN B.3. Sea  $A$  un conjunto,  $T : X \times A \rightarrow X$ , y  $\lambda \in \mathbb{R}$  es tal que  $0 \leq \lambda < 1$ . La función  $T$  es una contracción uniforme si

$$d(T(x, a), T(y, a)) \leq \lambda d(x, y)$$

para cualquier  $x, y \in X$  y  $a \in A$ .

Para contracciones uniformes en espacios de Banach donde la métrica viene definida en términos de la norma del espacio de Banach por  $d(x, y) = \|x - y\|$ , se tiene el siguiente resultado.

**TEOREMA B.4.** *(Teorema de contracción uniforme) Sea  $X, Y$  espacios de Banach,  $U \subset X$  y  $V \subset Y$  subconjuntos abiertos,  $\bar{U}$  denota la clausura de  $U$ , la función  $T : \bar{U} \times V \rightarrow \bar{U}$  es una contracción uniforme con constante de contracción  $\lambda$ , y para cada  $y \in V$ , sea  $g(y)$  el único punto fijo de la contracción  $x \mapsto T(x, y)$  en  $\bar{U}$ . Si  $k$  es un número entero no negativo y  $T \in C^k(\bar{U} \times V, X)$ , entonces  $g : V \rightarrow X$  está en  $C^k(V, X)$ . También si  $T$  es analítica real, entonces  $g$  lo es.*

**DEMOSTRACIÓN.** La prueba del teorema se da cuando  $k = 0, 1$ . La prueba para  $k > 1$  se usa un proceso de inducción. En el caso analítico se requiere una prueba de la convergencia de la serie de Taylor de  $g$ .

Por la definición de  $g$  en las hipótesis del teorema se tiene  $T(g(y), y) = g(y)$ ,  $\forall y \in V$ .

Si  $k = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \|g(y+h) - g(y)\| &= \|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y)\| \\ &\leq \|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y+h)\| \\ &\quad + \|T(g(y), y+h) - T(g(y), y)\| \\ &\leq \lambda \|g(y+h) - g(y)\| + \|T(g(y), y+h) - T(g(y), y)\| \end{aligned}$$

Por tanto

$$\|g(y+h) - g(y)\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \|T(g(y), y+h) - T(g(y), y)\|$$

pero  $T$  es continua en el punto  $(g(y), y)$ .

Por tanto, si  $\epsilon > 0$  es dado, existe algún  $\delta > 0$  tal que

$$\|T(g(y), y+h) - T(g(y), y)\| < \epsilon, \text{ siempre que } \|h\| < \delta$$

. En otras palabras  $g$  es continua.

Si  $k = 1$ , se considera la función  $g : V \rightarrow \bar{U}$  dada por  $g(y) = T(g(y), y)$ .

Se probará que  $g \in C^1$ .

La primera observación es que si  $g \in C^1$ , entonces por la regla de la cadena se tiene

$$Dg(y) = T_x(g(y), y)Dg(y) + T_y(g(y), y).$$

En otras palabras si  $Dg(y)$  existe se espera que sea solución de la ecuación

$$(57) \quad z = T_x(g(y), y)z + T_y(g(y), y)$$

Se probará que para cada  $y \in V$  la aplicación

$$z \mapsto T_x(g(y), y)z + T_y(g(y), y),$$

sobre el espacio de Banach de aplicaciones lineales acotadas de  $Y$  a  $X$  es una contracción.

En efecto si  $z_1, z_2$  son dos transformaciones lineales acotadas de  $Y$  a  $X$ , entonces

$$\|T_x(g(y), y)z_1 + T_y(g(y), y) - T_x(g(y), y)z_2 - T_y(g(y), y)\| \leq \|T_x(g(y), y)\| \|z_1 - z_2\|.$$

Por lo tanto la aplicación es una contracción siempre que  $\|T_x(g(y), y)\| < 1$ . En efecto se verá pronto que  $\|T_x(g(y), y)\| \leq \lambda$ . Una vez que esta desigualdad ha sido probada se sigue del principio de contracción que para cada  $y \in V$  la ecuación (57) tiene una única solución  $z(y) = Dg(y)$  con esto se tiene que  $Dg(y)$  es continua, ya que  $T_x, T_y$  (las derivadas parciales de  $T$ ) son continuas.

La diferenciabilidad de la función  $y \mapsto g(y)$  es probada verificando el límite

$$(58) \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|g(y+h) - g(y) - z(y)h\|}{\|h\|} = 0$$

Para obtener la desigualdad requerida  $\|T_x(g(y), y)\| < 1$ , se observa que  $T \in C^1$ .

En particular, la derivada parcial  $T_x$  es una función continua y

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|T(x+h, y) - T(x, y) - T_x(x, y)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Sea  $\xi \in X$  tal que  $\|\xi\| = 1$  y se nota que para cada  $\epsilon > 0$  si se define  $h = \epsilon\xi$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} \|T_x(x, y)\xi\| &= \left\| \frac{1}{\epsilon} T_x(x, y)h \right\| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} (\|T(x+h, y) - T(x, y) - T_x(x, y)h\| \\ &\quad + \|T(x+h, y) - T(x, y)\|) \\ &\leq \frac{\|T(x+h, y) - T(x, y) - T_x(x, y)h\|}{\|h\|} + \frac{\lambda\|h\|}{\|h\|} \end{aligned}$$

Al hacer  $\epsilon \rightarrow 0$ , se obtiene que  $\|T_x(x, y)\xi\| \leq \lambda$ , como era requerido.

Para probar (58), sea  $\gamma = \gamma(h) := g(y+h) - g(y)$ . Desde que  $g(y)$  es un punto fijo de la contracción  $T$ , se tiene

$$\gamma = T(g(y) + \gamma, y+h) - T(g(y), y).$$

Se define  $\Delta := T(g(y) + \gamma, y+h) - T(g(y), y) - T_x(g(y), y)\gamma - T_y(g(y), y)h$ , se observa que

$$\begin{aligned} \gamma &= T(g(y) + \gamma, y+h) - T(g(y), y) - T_x(g(y), y)\gamma \\ &\quad - T_y(g(y), y)h + T_x(g(y), y)\gamma + T_y(g(y), y)h \\ &= T_x(g(y), y)\gamma + T_y(g(y), y)h + \Delta, \end{aligned}$$

También desde que  $T \in C^1$ , se tiene que para cada  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tal que  $\|\Delta\| < \epsilon(\|\gamma\| + \|h\|)$  siempre que  $\|\gamma\| < \delta$  y  $\|h\| < \delta$ .

La función  $h \mapsto \gamma(h)$  es continua. Esto sigue de la primera parte la prueba desde que  $T \in C^0$ . Luego es posible encontrar  $\delta_1 > 0$  tan pequeño que  $\delta_1 < \delta$  y  $\|\gamma(h)\| < \delta$  siempre que  $\|h\| < \delta_1$ , por lo tanto

$$\|\Delta(\gamma(h), h)\| \leq \epsilon(\|\gamma(h)\| + \|h\|) \text{ siempre que } \|h\| \leq \delta_1.$$

Para  $\|h\| < \delta_1$ , se tiene

$$\begin{aligned}\|\gamma(h)\| &= \|T_x(g(y), y)\gamma + T_y(g(y), y)h + \Delta(\gamma, h)\| \\ &\leq \lambda\|\gamma\| + \|T_y(g(y), y)\| \|h\| + \epsilon(\|\gamma(h)\| + \|h\|),\end{aligned}$$

de donde

$$(1 - \lambda - \epsilon)\|\gamma(h)\| \leq (\|T_y(g(y), y)\| + \epsilon)\|h\|.$$

Si se toma  $\epsilon < 1 - \lambda$ , entonces

$$\|\gamma(h)\| \leq \frac{1}{1 - \lambda - \epsilon}(\|T_y(g(y), y)\| + \epsilon)\|h\| := \psi\|h\|,$$

y sigue que

$$\|\Delta(\gamma(h), h)\| \leq \epsilon(1 + \psi)\|h\|.$$

Finalmente al citar la ecuación (57)

$$z = T_x(g(y), y)z + T_y(g(y), y)$$

y se observa que

$$\begin{aligned}(I - T_x(g(y), y))(\gamma(h) - z(y)h) &= \gamma(h) - T_x(g(y), y)\gamma(h) - T_y(g(y), y)h \\ &= \Delta(\gamma(h), h).\end{aligned}$$

También desde que  $\|T_x(g(y), y)\| < \lambda < 1$ , se tiene

$$(I - T_x(g(y), y))^{-1} = I + \sum_{j=1}^{\infty} T_x^j$$

y

$$\|(I - T_x(g(y), y))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T_x\|} \leq \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Esto implica la desigualdad

$$\|\gamma(h) - z(y)h\| \leq \frac{\epsilon}{1 - \lambda}(1 + \psi)\|h\|$$

Luego sigue la ecuación (58).

Por una aplicación de la primera parte de la prueba sobre las soluciones de contracciones que dependen continuamente del parámetro,  $y \mapsto z(y)$  es continua. Esto completa la prueba para el caso cuando  $k = 1$ .  $\square$

## 2. Contracciones en fibras

Aquí se extiende el principio de contracción a fibrados. El resultado de esta extensión es llamado **teorema de contracción en fibras** es muy usado en probar la suavidad de funciones que están definidas como punto fijo de contracciones.

Sean  $X, Y$  espacio métricos. Una aplicación  $\Gamma : X \times Y \rightarrow X \times Y$  de la forma

$$\Gamma(x, y) = (\Lambda(x), \Psi(x, y))$$



donde  $\Lambda : X \rightarrow X$  y  $\Psi : X \times Y \rightarrow Y$ , es llamada **aplicación fibrado sobre la base  $\Lambda$  con parte principal  $\Psi$** . Aquí la terna  $(X \times Y, X, \pi)$ , donde  $\pi : X \times Y \rightarrow Y$  es la proyección  $\pi(x, y) = x$ , es llamada **fibrado trivial sobre  $X$  con fibra  $Y$** .

DEFINICIÓN B.5. Sea  $u \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \mu < 1$ . La aplicación fibrado  $\Gamma : X \times Y \rightarrow X \times Y$  es llamada **contracción en fibras**, si la función  $y \mapsto \Psi(x, y)$  es una contracción con constante de contracción  $\mu$  para cada  $x \in X$ .

TEOREMA B.6. (*Teorema de contracción en fibras.*) Sea  $X$  e  $Y$  dos espacios métricos,  $\Gamma : X \times Y \rightarrow X \times Y$  una contracción en fibras continua sobre  $\Lambda : X \rightarrow X$  con parte principal  $\Psi : X \times Y \rightarrow Y$ . Si  $\Lambda$  tiene a un punto fijo  $x_\infty$  como atractor global, y si  $y_\infty$  es un punto fijo de la aplicación  $y \mapsto \Psi(x_\infty, y)$ , entonces  $(x_\infty, y_\infty)$  es un punto fijo y además un atractor global para  $\Gamma$ .

DEMOSTRACIÓN. Se denota por  $d_X$  la métrica en  $X$ , y por  $d_Y$  la métrica en  $Y$ , la métrica en el espacio métrico  $X \times Y$  viene dada por  $d := d_X + d_Y$ .

Se deberá probar que para cada  $(x, y) \in X \times Y$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma^n(x, y) = (x_\infty, y_\infty),$$

donde el límite es tomado con respecto a la métrica  $d$ .

Por conveniencia notacional se denota a la función  $y \mapsto \Psi(x, y)$  por  $\Psi_x$ . Entonces, por ejemplo, se tiene

$$(59) \quad \Gamma^{n+1}(x, y) = (\Lambda^{n+1}(x), \Psi_{\Lambda^n(x)} \circ \Psi_{\Lambda^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y))$$

y por la desigualdad triangular resulta

$$(60) \quad \begin{aligned} d(\Gamma^{n+1}(x, y), (x_\infty, y_\infty)) &\leq d(\Gamma^{n+1}(x, y), \Gamma^{n+1}(x, y_\infty)) \\ &\quad + d(\Gamma^{n+1}(x, y_\infty), (x_\infty, y_\infty)). \end{aligned}$$

Además se nota que: (para esto se usa (59))

$$\begin{aligned} d(\Gamma^{n+1}(x, y), \Gamma^{n+1}(x, y_\infty)) &= d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)} \circ \Psi_{\Lambda^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y), \\ &\quad \Psi_{\Lambda^n(x)} \circ \Psi_{\Lambda^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty)). \end{aligned}$$

Más aún, si  $\mu$  es la constante de contracción para la fibra de contracción  $\Gamma$ , entonces:

$$d(\Gamma^{n+1}(x, y), \Gamma^{n+1}(x, y_\infty)) \leq \mu^{n+1} d_Y(y, y_\infty),$$

y por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Gamma^n(x, y), \Gamma^n(x, y_\infty)) = 0$ .

Para el segundo sumando de (60), resulta:

$$(61) \quad \begin{aligned} d(\Gamma^{n+1}(x, y_\infty), (x_\infty, y_\infty)) &= d_X(\Lambda^{n+1}(x), x_\infty) \\ &\quad + d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)} \circ \Psi_{\Lambda^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), y_\infty). \end{aligned}$$

Por la hipótesis de que  $x_\infty$  es un atractor global, el primer sumando del lado derecho de la última igualdad converge a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Por tanto para completar la prueba es suficiente verificar el límite

$$(62) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)} \circ \Psi_{\Lambda^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), y_\infty) = 0$$

Se observa que

$$\begin{aligned} d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), y_\infty) &\leq d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), \Psi_{\Lambda^n(x)}(y_\infty)) \\ &\quad + d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)}(y_\infty), y_\infty) \\ &\leq \mu d_Y(\Psi_{\Lambda^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), y_\infty) \\ &\quad + d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)}(y_\infty), y_\infty), \end{aligned}$$

y por inducción se tiene que

$$d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)} \circ \Psi_{\Lambda^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), y_\infty) \leq \sum_{j=0}^n \mu^{n-j} d_Y(\Psi_{\Lambda^j(x)}(y_\infty), y_\infty).$$

Para cada número entero no negativo  $m$  se define  $a_m := d_Y(\Psi_{\Lambda^m(x)}(y_\infty), y_\infty)$ , cada  $a_m$  es no negativo y

$$a_m = d_Y(\Psi_{\Lambda^m(x)}(y_\infty), \Psi(x_\infty, y_\infty))$$

Usando la continuidad de  $\Psi$  y la hipótesis que  $x_\infty$  es un punto fijo y atractor global, se sigue que la sucesión  $\{a_m\}_{m=0}^\infty$  converge a cero y por lo tanto es acotada. Si  $A$  es una cota superior para los elementos de esta sucesión, entonces para cada  $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$  se tiene  $0 \leq a_m < A$ .

Dado  $\epsilon$ . Existe algún  $K > 0$  tan grande que

$$0 \leq a_k < \frac{1}{2}(1 - \mu)\epsilon$$

siempre que  $k \geq K$ . Por lo tanto, si  $n \geq K$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \mu^{n-j} a_j &= \sum_{j=0}^{K-1} \mu^{n-j} a_j + \sum_{j=K}^n \mu^{n-j} a_j \\ &\leq A \sum_{j=0}^{K-1} \mu^{n-j} + \frac{1}{2}(1 - \mu)\epsilon \sum_{j=K}^n \mu^{n-j} \\ &\leq A \frac{\mu^{n-K+1}}{1 - \mu} + \frac{1}{2}\epsilon \end{aligned}$$

Por otra parte, existe algún  $N \geq K$  tal que

$$\mu^{n-K+1} < \frac{(1 - \mu)\epsilon}{2A}$$

siempre que  $n \geq N$ .

En otras palabras  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \mu^{n-j} a_j = 0$ , es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \mu^{n-j} d_Y(\Psi_{\Lambda^j(x)}(y_\infty), y_\infty) = 0,$$

luego  $d_Y(\Psi_{\Lambda^n(x)} \circ \Psi_{\Lambda^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \Psi_x(y_\infty), y_\infty) = 0$ . Esto acaba la prueba.  $\square$

Se presenta un teorema de cálculo avanzado, el cual se utiliza en la prueba del teorema B.9.

**TEOREMA B.7.** *Si una sucesión de funciones diferenciables es uniformemente convergente y la correspondiente sucesión de sus derivadas es uniformemente convergente, entonces la función límite de la sucesión original es diferenciable y sus derivadas es el límite de la sucesión correspondiente de sus derivadas.*

DEMOSTRACIÓN. Ver página 388 de [31]. □

B.8. *Para el siguiente resultado se dan unas notaciones previas.*

Sean  $C^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N : f \text{ es continua.}\}$ ,

$$C^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) = \{f \in C^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) : \|f\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^M} |f(\xi)| < \infty\}.$$

Claro,  $C^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$  es un espacio de Banach con la norma del supremo.

También sea el siguiente conjunto

$$\mathcal{B}_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) = \{f \in C^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) : \text{Lip}(f) = \sup_{\xi_1 \neq \xi_2} \frac{|f(\xi_1) - f(\xi_2)|}{|\xi_1 - \xi_2|} < \rho\}.$$

El conjunto  $\mathcal{B}_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$  es cerrado en  $C^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ . Por lo tanto  $\mathcal{B}_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$  es un espacio métrico completo con respecto a la norma del supremo.

En caso de que  $f \in C^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$  es continuamente diferenciable, su derivada  $Df$  es un elemento de  $C^0(\mathbb{R}^M, L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$  el espacio de funciones continuas de  $\mathbb{R}^M$  al espacio de funciones lineales de  $\mathbb{R}^N$  a  $\mathbb{R}^N$ . El subconjunto  $\mathcal{F}$  de  $C^0(\mathbb{R}^M, L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$  consistiendo de todos los elementos que son acotados con respecto a la norma

$$\|\Phi\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} (\sup_{|v|=1} |\Phi(\xi)v|),$$

es un espacio de Banach.

La bola métrica cerrada  $\mathcal{F}_\rho$  de radio  $\rho > 0$  centrada en el origen de  $\mathcal{F}$  (esto es, toda  $\Phi$  tal que  $\|\Phi\| \leq \rho$ ) es un espacio métrico completo relativo a la norma dada sobre  $\mathcal{F}$ .

**TEOREMA B.9.** *Si  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  y  $G : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$  son funciones continuamente diferenciables,  $\|F\| + \|G\| < \infty$ ,  $\|DF\| < 1$ , y  $\|DG\| < \infty$ , entonces la ecuación funcional  $F \circ \phi - \phi = G$  tiene una única solución  $\alpha$  en  $\mathcal{B}_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$  para cada  $\rho > \|DG\|/(1 - \|DF\|)$ . Además,  $\alpha$  es continuamente diferenciable y  $\|D\alpha\| < \rho$ .*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que  $\rho > \|DG\|/(1 - \|DF\|)$  o  $\|DF\|\rho + \|G\| < \rho$ . Si  $\phi \in \mathcal{B}_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ , entonces la función  $F \circ \phi - G$  es continua.

Además, se tiene que:

$$\|F \circ \phi - G\| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^M} |F(\phi(\xi))| + \|G\| \leq \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^N} |F(\zeta)| + \|G\| < \infty,$$

y, por el teorema del valor medio,

$$\begin{aligned} |F(\phi(\xi)) - G(\xi) - (F(\phi(\eta)) - G(\eta))| &\leq \|DF\| |\phi(\xi) - \phi(\eta)| + \|DG\| |\xi - \eta| \\ &\leq (\|DF\| \text{Lip}(\phi) + \|DG\|) |\xi - \eta|, \end{aligned}$$

Donde  $\|DF\| \text{Lip}(\phi) + \|DG\| < \rho$ . Esto sigue que la función  $F \circ \phi - G$  es un elemento del espacio  $B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ .

Se define  $\Lambda : B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) \longrightarrow B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$  por

$$\Lambda(\phi)(\xi) := F(\phi(\xi)) - G(\xi).$$

Esta función está bien definida desde que  $F\phi - G$  está en  $B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ , también, se nota que por la hipótesis  $\|DF\| < 1$ .

Si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  están en el espacio  $B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ , entonces

$$|\Lambda(\phi_1)(\xi) - \Lambda(\phi_2)(\xi)| < \|DF\| \|\phi_1 - \phi_2\|;$$

esto es,  $\Lambda$  es una contracción en el espacio métrico completo  $B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ . Por lo tanto, hay una única función  $\alpha \in B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$  tal que  $F \circ \alpha - \alpha = G$ . Además, si  $\phi \in B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^n(\phi) = \alpha$ .

Se probará que la función  $\alpha$  es continuamente diferenciable. Para este fin, note que para  $\phi \in B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$  y  $\Phi \in \mathcal{F}_\rho$  resulta que

$$\|DF(\phi(\xi))\Phi(\xi) - DG(\xi)\| \leq \|DF\| \|\Phi\| + \|DG\| < \rho;$$

este resultado es usado para definir  $\Psi : B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) \times \mathcal{F}_\rho \longrightarrow \mathcal{F}_\rho$  por

$$\Psi(\phi, \Phi)(\xi) := DF(\phi(\xi))\Phi(\xi) - DG(\xi).$$

La función  $\Phi \mapsto \Psi(\phi, \Phi)$  es una contracción en  $\mathcal{F}_\rho$  cuya constante de contracción es menor que uno y uniforme en  $B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ ; en efecto se tiene que:

$$\|\Psi(\phi, \Phi_1)(\xi) - \Psi(\phi, \Phi_2)(\xi)\| \leq \|DF\| \|\Phi_1 - \Phi_2\|.$$

Por lo tanto, se define una aplicación fibrado

$$\Gamma : B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) \times \mathcal{F}_\rho \rightarrow B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) \times \mathcal{F}_\rho$$

dada por:

$$\Gamma(\phi, \Phi) := (\Lambda(\phi), \Psi(\phi, \Phi)),$$

que es una contracción en las fibras. Para probar que  $\Gamma$  es una contracción en las fibras es suficiente probar que  $\Gamma$  es continua.

Se nota que  $\Lambda$  es una contracción,  $\Phi \rightarrow \Psi(\phi, \Phi)$  es una función afín, y

$$|\Psi(\phi, \Phi)(\xi) - \Psi(\phi_0, \Phi_0)(\xi)| \leq \|DF\| \|\Phi - \Phi_0\| + \|\Phi_0\| \|DF \circ \phi - DF \circ \phi_0\|.$$

Por tanto para probar la continuidad de  $\Gamma$  es suficiente probar que la función  $\phi \mapsto DF \circ \phi$  es continua.

Sea  $\phi_0$  fijo,  $\phi_0 \in B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$  y se observa que la función  $DF$  es uniformemente continua en la bola cerrada  $B$  centrada en el origen en  $\mathbb{R}^N$  con radio  $\|\phi_0\| + 1$ .

También, la imagen de  $\phi_0$  está en  $B$ . Por la continuidad uniforme de  $DF$ , para cada  $\epsilon > 0$  existe un número positivo  $\delta < 1$  tal que  $|DF(\xi) - DF(\eta)| < \epsilon$  siempre que  $\xi, \eta \in B$  y  $|\xi - \eta| < \delta$ .

Si  $\|\phi - \phi_0\| < \delta$  y  $\xi \in \mathbb{R}^M$ , entonces

$$|\phi(\xi)| \leq \|\phi - \phi_0\| + \|\phi_0\| < 1 + \|\phi_0\|;$$

y además la imagen de  $\phi$  está en la bola  $B$ .

Por lo tanto, se tiene que

$$\|DF \circ \phi - DF \circ \phi_0\| < \epsilon \text{ siempre que } \|\phi - \phi_0\|;$$

esto es,  $DF$  es continua en  $\phi_0$ .

Sea  $\Phi_\infty$  el único punto fijo de la contracción  $\Phi \rightarrow \Psi(\alpha, \Phi)$  sobre el punto fijo  $\alpha$ . También se define una sucesión en  $B_\rho^0(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) \times \mathcal{F}_\rho$  como sigue:  $(\phi_0, \Psi_0) = (0, 0)$  y para cada  $n$  entero positivo

$$(\phi_{n+1}, \Psi_{n+1}) := \Gamma(\phi_n, \Phi_n).$$

Se nota que  $D\phi_0 = \Phi_0$  y al proceder por inducción, si  $D\phi_n = \Phi_n$ , entonces

$$\begin{aligned} D\phi_n &= D(\Lambda(\phi_n)) = DF \circ \phi_n D\phi_n - DG \\ &= \Psi(\phi_n, D\phi_n) = \Psi(\phi_n, \Phi_n) = \Phi_{n+1}; \end{aligned}$$

esto es,  $D\phi_n = \Phi_n \forall n \geq 0$ .

por el teorema de contracción en fibras se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D\phi_n = \Phi_\infty.$$

La sucesión  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  converge uniformemente a  $\alpha$ . Por el teorema B.7 se tiene que  $\alpha$  es diferenciable con derivada  $\Phi_\infty$ .

Por lo tanto,  $\alpha$  es continuamente diferenciable. □

## Bibliografia

- [1] JOSÉ FERREIRA ALVES *Hyperbolic isomorphisms in Banach spaces* Centro de matemática–Universidade do Porto 24 de June 2014.
- [2] BONATTI, CHRISTIAN AND DÍAZ, LORENZO J. AND VIANA, MARCELO *Dynamics beyond uniform hyperbolicity* Cambridge Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [3] BOWEN, RUFUS *A horseshoe with positive measure* Inventiones Mathematicae, volumen 29, 1975.
- [4] BOWEN, RUFUS AND RUELLE, DAVID *The ergodic theory of Axiom A flows* Inventiones Mathematicae, Volumen 29, 1975.
- [5] BRIN, MICHAEL AND STUCK, GARRETT *Introduction to dynamical systems* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [6] CHICONE, CARMEN *Ordinary differential equations with applications* Second edition, Springer, New York, 2006.
- [7] DUGUNDJI, JAMES *Topology* Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1966.
- [8] GROBMAN, D. M. *Homeomorphism of systems of differential equations* Doklady Akademii Nauk SSSR, volumen 128, 1959.
- [9] HARTMAN, PHILIP *A lemma in the theory of structural stability of differential equations* Proceedings of the American Mathematical Society, volumen 11, 1960.
- [10] HIRSCH, MORRIS W. *Differential topology* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
- [11] HASSELBLATT, BORIS AND KATOK, ANATOLE *Introduction to the modern theory of dynamical systems* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [12] HASSELBLATT, BORIS AND KATOK, ANATOLE *A first course in dynamics, With a panorama of recent developments* Cambridge University Press, New York, 2003.
- [13] KREYSZIG, ERWIN *Introductory functional analysis with applications* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [14] SERGE LANG *Analysis I* Addison-Wesley Series in Mathematics. Reading, Mass. etc. Addison-Wesley Publishing Company. XI, 460 p. (1968).
- [15] LLOYD, N. G. *Degree theory* Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1978.
- [16] R. MINC *O topologiueskoui ekvivalentnosti sostoyaniui ravnovesiya sistemy treh differencial nyh uravneniui* Nauc. Dokl. Vyss. Skoly, Fiz. Mat. Nauki, volumen 1, 1958.
- [17] ANDERSON L. MACIEL AND ALESSANDRA KREUTZ *A ferradura de medida positiva* Revista do Ciencias Naturais e Exatas UFSM, volumen 36, 2013.
- [18] NITECKI, ZBIGNIEW *Differentiable dynamics: An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms* The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.-London, 1971.
- [19] PALIS, J. *On the local structure of hyperbolic points in Banach spaces* Anais da Academia Brasileira de Ciências, volumen 40, 1968.
- [20] PALIS, JR., JACOB AND DE MELO, WELINGTON *Introdução aos sistemas dinâmicos* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1978.
- [21] PETERSEN, PETER *Riemannian geometry* Springer-Verlag, New York, 1998.

- [22] PUGH, CHARLES C. *On a theorem of P. Hartman* American Journal of Mathematics, volumen 91, 1969.
- [23] ROBINSON, CLARK *Dynamical systems: Stability, symbolic dynamics, and chaos* CRC Press, Boca Raton, FL 1999.
- [24] RADULESCU, SORIN AND RADULESCU, MARIUS *Local inversion theorems without assuming continuous differentiability* Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 138, 1989.
- [25] RIESZ, FRIGYES AND SZ.NAGY, BÉLA *Functional analysis* Dover Publications, Inc., New York, 1990.
- [26] RUAN, ZHONG-JIN *Complexifications of real operator spaces* Illinois Journal of Mathematics, volumen 47, 2003.
- [27] RUDIN, WALTER *Principles of mathematical analysis, edition Third* McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976.
- [28] SHUB, MICHAEL *Global stability of dynamical systems* Springer-Verlag, New York, 1987.
- [29] SMALE, S. *Differentiable dynamical systems* Bulletin of the American Mathematical Society, volumen 73, 1967.
- [30] WIGGINS, STEPHEN *Global bifurcations and chaos* Springer-Verlag, New York, 1988.
- [31] ZORICH, VLADIMIR A. *Mathematical analysis II* Springer-Verlag, Berlín, 2009.