

“Teorema de la representación conforme de Riemann”

Tesis

Para optar el título profesional de
Licenciado en Matemáticas

Presentado por:

Bach. Mat. Riojas Chozo William,
Bach. Mat. Vega Távara Carlos Enrique

Asesor

Ortiz Basauri Gloria

Lambayeque - Perú

2017

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Escuela Profesional De Matemática

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “ Teorema de la representación conforme de Riemann ”, presentado por el Bach. Mat. Riojas Chozo William y el Bach. Mat. Vega Távara Carlos Enrique en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Lic. Mat. Calderón Torres Alexander

Presidente del Jurado

Lic. Mat. Llontop Santamaría Arnulfo

Secretario del Jurado

Lic. Mat. Rojas Burga Victor Raúl

Vocal del Jurado

Fecha de defensa:

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela Profesional De Matemática

“Teorema de la representación conforme de Riemann”

Dra. Ortiz Basauri Gloria

Asesor

Bach. Mat. Vega Távara Carlos Enrique

Autor

Bach. Mat. Riojas Chozo William

Autor

Lambayeque - Perú

2017

Agradecimiento

Agradecemos en primer lugar a Dios por darnos la oportunidad de vivir toda esta gran experiencia.

Agradecer a nuestro asesor Dra. Gloria Ortiz Basauri y al Mag. Mat. Fernando Huancas S. por su ayuda, apoyo y sus grandes aportes para poder desarrollar el presente trabajo.

Agradecer especialmente a nuestros padres por su amor y apoyo incondicional, ya que sin ellos no hubiese sido posible la realización de este trabajo.

Agradezco a Dios por darme la bendición de disfrutar de toda esta experiencia vivida.

Agradecer mis padres y a mi hermano por estar siempre a mi lado.

A todas esas personas que estuvieron allí apoyándome.

Agradecimiento de Chozo.

Dedicatoria

*Dedico este trabajo a mis padres,
por su constante apoyo y dedicación,
ya que sin ellos no hubiese sido
posible desarrollarme como persona y
como profesional.*

*A mi hermano por ser un amigo y
un gran compañero en mi vida.*

*A mis tíos Rosa, Jorge, Violeta
y a mi padrino Carlos Rojas.*

Carlos Vega Távara.

Dedicatoria de Chozo.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es estudiar diferentes temas relacionados con el Teorema de representación conforme de Riemann. Nos centraremos principalmente en dos resultados: El Teorema de representación de Riemann y el problema de Dirichlet para dominios simplemente conexos. Para el desarrollo de este trabajo es necesario tener conocimientos sobre el análisis complejo. Esto último en cuanto a la parte matemática ayuda a una mejor comprensión de ciertos conceptos y permite la relación entre ellos; ya que posee múltiples aplicaciones en la práctica, por ejemplo en la solución de problemas de flujo de calor, teoría potencial, mecánica de fluidos, teoría electromagnética, aerodinámica y muchas más.

El Capítulo 1 contiene los preliminares, en donde se estudiará conceptos importantes, y se introduce la notación que haremos uso. Además se estudiará el Teorema de la aplicación abierta, un resultado de gran relevancia que nos garantiza que toda función holomorfa es abierta. A continuación estudiaremos las transformaciones conformes, transformaciones que serán protagonistas en la demostración del Teorema de representación de Riemann, y se darán algunos ejemplos sobre estas transformaciones. Por último se estudiará el principio del módulo máximo, que nos permite en el siguiente capítulo demostrar el Lema de Schwarz.

En el capítulo 2 demostraremos el Lema de Schwarz, herramienta importante para la demostración del Teorema de representación de Riemann y que también nos permite obtener los automorfismos en el disco unidad. A continuación se estudiará el espacio de las funciones holomorfas, en el cual se inicia definiendo una topología que recibe el

nombre de topología de la convergencia uniforme sobre compactos, en seguida se estudia las familias normales, equicontinuas y relativamente compacto, a consecuencia de ello tenemos un resultado llamado el Teorema de Montel, que afirma que una familia es normal si y solo si sus funciones están uniformemente acotadas sobre compactos, teorema importante del cual se hará uso para construir la biyección conforme del Teorema de Riemann. Luego veremos el Teorema de Hurwitz, del que obtendremos que el límite de una sucesión de funciones holomorfas inyectivas es constante o inyectivo.

Finalmente se enuncia y demuestra en forma detallada el Teorema de representación de Riemann, además se prueba la equivalencia del problema de Dirichlet con el Teorema de Riemann, donde se hace uso del núcleo de Poisson para solucionar el problema de Dirichlet mediante el isomorfismo conforme garantizado por el Teorema de Riemann. Para darle más énfasis a nuestro trabajo mostramos un teorema que caracteriza los abiertos simplemente conexos haciendo uso del Teorema de la representación conforme de Riemann.

Finalmente en el Capítulo 3 se muestra un ejemplo explícito donde se hace uso del núcleo de Poisson para solucionar un problema de Dirichlet relacionado al potencial complejo. Además del uso de las aplicaciones conformes para la solución de un problema relacionado a la transferencia de calor.

Abstract

The main objective of this work is to study different topics related to Riemann's conformal representation theorem. We will focus mainly on two results: Riemann's representation theorem and Dirichlet's problem for simply related domains. For the development of this work it is necessary to have knowledge about the complex analysis. This latter as regards the mathematical part helps a better understanding of certain concepts and allows the relation between them; As it has multiple applications in practice, for example in solving problems of heat flow, potential theory, fluid mechanics, electromagnetic theory, aerodynamics and many more.

Chapter 1 contains the preliminaries, where we will study important concepts, and introduce the notation that we will use. In addition, the Open Application Theorem will be studied, a result of great relevance that guarantees that all holomorphic functions are open. Next we will study the conforming transformations, transformations that will be protagonists in the demonstration of the Theorem of representation of Riemann, and will give some examples on these transformations. Finally the principle of the maximum module will be studied, which allows us in the next chapter Demonstrate the Schwarz Lemma.

In Chapter 2 we will show Schwartz's Lemma, an important tool for the demonstration of Riemann's representation theorem, and also allows us to obtain automorphisms in the unit disc. Next we will study the space of holomorphic functions, in which we start by defining a topology that is called the topology of uniform convergence on compact, then we study normal families, equicontinuous and relatively compact, as a result we have A result called the Montel Theorem, which states that a family is normal if and only if

its functions are uniformly bounded on compact, it is important theorem which will be used to construct the conformal bijection of Riemann's Theorem. Next presents and demonstrates in detail the Theorem of Representation of Riemann, and the equivalence of the Dirichlet problem with the Riemann's theorem is tested, where the Poisson kernel is used to solve the Dirichlet problem by the isomorphism as guaranteed by The Riemann's Theorem. To give more emphasis to our work we show a theorem that characterizes the open simply connected using the Riemann's conformal representation theorem.

Finally, in Chapter 3 an explicit example is shown where the Poisson kernel is used to solve a Dirichlet problem related to the complex potential. In addition to the use of conforming applications for the solution of a problem related to heat transfer.

Introducción

En el año 1851 Georg Friedrich Bernhard Riemann en la defensa de su tesis doctoral presenta una prueba del Teorema de representación conforme de Riemann, la cual fue defendida ante Gauss. En ella Riemann muestra la existencia de un isomorfismo conforme a la solución del problema de Dirichlet. Para esto, hace uso del principio de Dirichlet.

Teorema 0.1. (*Principio de Dirichlet*). Sea Ω un abierto acotado y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la solución de $\Delta u = 0$ con condición de frontera g , es decir, $u|_{\partial\Omega} = g$. Entonces u es la función que minimiza la energía de Dirichlet.

$$\int \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2)$$

La prueba presentada por Riemann recibió numerosas críticas en años posteriores. Por ejemplo en 1870 Weierstrass sacó a la luz un contraejemplo que demostraba que la existencia de la función minimizante de principio de Dirichlet no era cierta en general. Más tarde Hilbert demostró que para las condiciones que Riemann había impuesto no eran ciertas en general, para cualquier abierto simplemente conexo, sin embargo la prueba presentada por Hilbert no era fácil de entender. Luego Schwarz, haciendo uso de su principio de reflexión y de algunos métodos para problemas de frontera demostraría el siguiente resultado.

Teorema 0.2. Sea Ω un abierto simplemente conexo acotado por un número finito de curvas reales analíticas que intersecan en ángulos distintos de cero. Existe entonces un homeomorfismo de $\bar{\Omega}$ en $\bar{D}(0, 1)$ que transforma de manera conforme Ω en $D(0, 1)$.

En la época de Schwarz, los teoremas de este tipo eran considerados los más difíciles del análisis. De hecho, los abiertos simplemente conexos con una frontera arbitraria fueron

recién estudiados por W.F. Osgood en el año 1900.

Antes de 1912, todos los métodos que ofrecían una aproximación al Teorema de Riemann hacían uso del problema con valores de frontera de la ecuación potencial $\Delta u = 0$.

En 1912, Carathéodory diseñó un método en el que, para un abierto simplemente conexo Ω , encuentra una sucesión $(f_n)_n$ que converge sobre compactos a un isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow D(0, 1)$. Por primera vez, se demuestra rigurosamente el Teorema de Riemann con una técnica relativamente simple. Poco después, Koebe mejoraría la prueba eliminando las superficies de Riemann de las que Caratheodory hacía uso.

En 1922 L. Fejér y F. Riesz se dieron cuenta que el isomorfismo conforme del teorema de Riemann se podía obtener como solución de un problema que maximiza las derivadas. Obtuvieron así una nueva prueba, publicada por primera vez en la revista húngara *Acta Szeged*, que es la que estudiamos en este trabajo.

Los números complejos nacen de la necesidad de encontrar una extensión algebraica cerrada de los números reales. La importancia del análisis complejo, radica en la definición de función holomorfa, más exigente que la derivabilidad real, la cual consigue proveer al análisis complejo de un especial interés, no sólo porque sus resultados pueden presentarse totalmente autocontenidos sino por lo sorprendente de algunos de sus teoremas. Del estudio de las funciones holomorfas aparecen las aplicaciones conformes, las cuales serán las aplicaciones protagonistas en este trabajo.

Índice general

Introducción	VII
2 CAPÍTULO 1	
Preliminares	
1.1. Notación y resultados básicos de análisis complejo	2
1.2. Teorema de la aplicación abierta	23
1.3. Transformaciones conformes	27
1.4. Principio del Módulo Máximo	38
41 CAPÍTULO 2	
Teorema de la representación de Riemann	
2.1. Lema de Schwarz	41
2.2. El espacio de las funciones Holomorfas	47
2.3. El Teorema de Riemann	56
2.4. Equivalencia con el problema de Dirichlet	63
2.4.1. Del problema de Dirichlet al Teorema de Riemann	66
2.4.2. Del Teorema de Riemann al problema de Dirichlet	69
76 CAPÍTULO 3	
Aplicaciones	
Conclusiones y Sugerencias	85
Bibliografía	86

Capítulo 1:

Preliminares

1.1 Notación y resultados básicos de análisis complejo

La notación empleada en este trabajo es la usual del análisis complejo. En esta sección la introduciremos junto con los resultados básicos del análisis complejo que se suponen conocidos.

Denotaremos por \mathbb{C} al cuerpo de los números complejos y usualmente por Ω a un subconjunto abierto de él. Como conjunto, \mathbb{C} , no es otra cosa que \mathbb{R}^2 , por tanto, dar una topología en \mathbb{C} es lo mismo que dar una topología en \mathbb{R}^2 , es decir, la topología asociada a la norma euclídea.

De esta forma si $z \in \mathbb{C}$, escribimos $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ a la norma de $z \in \mathbb{C}$.

Si expresamos z como $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, llamaremos $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$ a su parte real e imaginaria respectivamente y $\bar{z} = x - iy$ al conjugado de z .

Un número complejo z se puede expresar en su forma polar como $z = re^{i\theta}$ con $r, \theta \in \mathbb{R}$, llamaremos $r = |z|$ y θ al argumento de z .

Llamaremos argumento principal de z , denotado por $\operatorname{Arg}(z)$ al único argumento de z tal que $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$ y $\arg(z)$ al conjunto de todos sus argumentos.

Llamaremos plano complejo ampliado al conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde $(\infty \notin \mathbb{C})$. En este conjunto adoptamos la aritmética usual con ∞ . Al plano complejo ampliado \mathbb{C}_∞ se le dota de una topología para la cual es un espacio compacto.

1. Los entornos de los puntos $a \in \mathbb{C}$ son los entornos en \mathbb{C}_∞ .
2. Para $a = \infty$ una base de entornos en \mathbb{C}_∞ viene dada por:

$$V_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}, r > 0$$

3. \mathbb{C}_∞ se puede identificar con

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

donde la aplicación $\psi : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow S$ dada por $\psi(\infty) = (0, 0, 1) =: N$ y

$$\psi(x + iy) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), z = (x + iy) \in \mathbb{C}$$

es una biyección cuya inversa es:

$$\psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

ψ establece un homeomorfismo entre \mathbb{C}_∞ y S .

La aplicación ψ recibe el nombre de proyección estereográfica.

En el plano complejo ampliado se definirá más adelante las transformaciones de Möbius, aplicaciones de gran importancia en el transcurso del presente trabajo.

Atendiendo a la topología de plano complejo, dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ se llama disco abierto de centro a y radio r .

El conjunto $D^*(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$, se llama disco perforado de centro a .

El conjunto $\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$ con $a \in \mathbb{C}$ y $r \geq 0$, se llama disco cerrado de centro a y radio r . Observar que $\overline{D}(a, 0) = \{a\}$.

Representaremos por $C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ a la circunferencia de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$.

Sea $E \subset \mathbb{C}$, diremos que z es un punto interior de E si se puede encontrar un entorno ε

de z totalmente contenido en E . El conjunto formado solo por puntos interiores se llama conjunto abierto.

Diremos que $A \subset \mathbb{C}$ es conexo cuando no puede ser descrito como unión disjunta de dos conjuntos abiertos. Intuitivamente, un conjunto conexo está formado por un pieza “que no se puede dividir”.

Llamaremos dominio en el plano complejo al conjunto de puntos de dicho plano que sea abierto y conexo. El nombre de dominio para los conjuntos abiertos y conexos está dado por el hecho de que en ellos serán definidos las funciones de variable compleja.

Definición 1.1. *Se llama función de variable compleja a una aplicación cuyo dominio Ω y rango Ω' son subconjuntos de \mathbb{C} . La notación habitual para este tipo de funciones es $z = (x, y)$ para representar a un elemento de Ω y $w = (u, v)$ para un elemento de Ω' . Se define una función compleja como*

$$f : \Omega \longrightarrow \Omega'; \quad \Omega \subset \mathbb{C}, \Omega' \subset \mathbb{C} \quad (1.1)$$

$$z = (x, y) \mapsto w = (u, v) = f(z)$$

Se desprende de la definición que u y v , parte real e imaginaria de w , son funciones reales de dos variables.

$$f : z \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Definición 1.2. *Si a cada valor de z le corresponde solo un valor w , se dice que $w = f(z)$ es una función unívoca.*

Ejemplo 1.1. La función $w = z^2$ es una función unívoca.

Definición 1.3. *Si a cada valor de z le corresponde más de un valor de w , se dice que w es una función multivaluada de z .*

Una función multivaluada puede considerarse como una colección de funciones biunívocas, y a cada miembro se le conoce como una rama de la función, a un miembro particular suele considerársele la rama principal de la función multivaluada, y al correspondiente valor de la función, como valor principal.

Ejemplo 1.2. Sea $w^5 = z$ es una función multivaluada.

En efecto, sea $z = re^{i\theta}$, de manera que $w = z^{1/5} = r^{1/5}e^{i\theta/5}$. Si $r = r_1$ y $\theta = \theta_1$, entonces $w_1 = r_1^{1/5}e^{i\theta_1/5}$. A medida que el valor de θ aumenta de θ_1 a $\theta_1 + 2\pi$, se tiene

$$w = r_1^{1/5}e^{i(\theta_1+2\pi)/5} = r_1^{1/5}e^{i\theta_1/5} \cdot e^{2\pi i/5}$$

$$w = w_1e^{2\pi i/5}$$

Después de dos circuitos, se tiene

$$w = r_1^{1/5}e^{i(\theta_1+4\pi)/5} = r_1^{1/5}e^{i\theta_1/5} \cdot e^{4\pi i/5}$$

$$w = w_1e^{4\pi i/5}$$

Para tres y cuatro circuitos, se tiene

$$w = w_1e^{6\pi i/5}, \quad w = w_1e^{8\pi i/5}$$

Después de cinco circuitos completos, el valor de w es $w = w_1e^{10\pi i/5} = w_1$, de manera que después de cinco circuitos completos en torno al origen, se obtiene el valor original de w . Por tanto el ciclo se repite

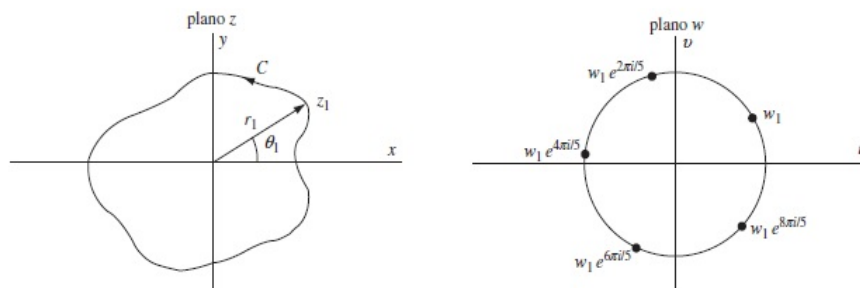


Figura 1.1: La función multivaluada $w = z^{1/5}$.

Entonces $w = z^{1/5}$ es una función con cinco valores, los cuales están dados por $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$w = z^{1/5} = r^{1/5}e^{i(\theta+2\pi k)/5}$$

$$w = r^{1/5}[\cos(\theta + 2\pi k)/5 + i \sin(\theta + 2\pi k)/5]$$

A la función w se le considera como una colección de 5 funciones biunívocas, a las que se les conoce como ramas de la función multivaluada, al restringir θ de manera adecuada. Entonces por ejemplo se escribe:

$$w = r^{1/5}(\cos(\theta/5) + i \sin(\theta/5))$$

donde se consideran los cinco intervalos posibles para θ , los cuales son $0 \leq \theta < 2\pi$, $2\pi \leq \theta < 4\pi$, $4\pi \leq \theta < 6\pi$, $6\pi \leq \theta < 8\pi$, $8\pi \leq \theta < 10\pi$, el resto de intervalos da repeticiones de estos.

Al primer intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$, se le conoce como rango principal de θ , y corresponde a la rama principal de la función multivaluada. Como al rodear sucesivamente $z = 0$ se obtienen diferentes valores de $f(z)$, a $z = 0$ se le conoce como punto de ramificación.

El análisis geométrico de las funciones de variable compleja requiere de cuatro dimensiones: dos para la variable z y dos para la variable w . Una solución para ello es representar los elementos del dominio de la función sobre un plano (llamado $[z]$) y los elementos del rango sobre otro plano (llamado $[w]$). Una forma de caracterizar geoméricamente a las funciones de variable compleja es a través de la representación de las transformaciones que produce a curvas y conjuntos en general, de un plano a otro.

Esta representación es útil para resolver diversos problemas físicos de campos y potenciales.

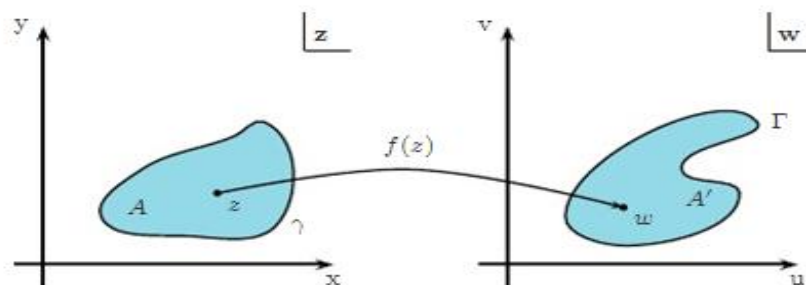


Figura 1.2: Transformación de regiones mediante una función de variable compleja

Definición 1.4. Si $w = u + iv$ es una función unívoca de $z = x + iy$, se escribe $u + iv = f(x + iy)$. Si se igualan las partes reales y las imaginarias, se ve que esto equivale a

$$u = u(x, y) \quad y \quad v = v(x, y) \quad (1.2)$$

Así, dado un punto (x, y) del plano z , como P en la figura (1.3), existe un punto correspondiente (u, v) en el plano w , como P'. Al conjunto de ecuaciones (1.2) [o a su equivalente, $w = f(z)$] se le llama transformación. Se dice que el punto P se lleva o transforma en el punto P' por medio de esa transformación, y a P' se le conoce como la imagen de P.

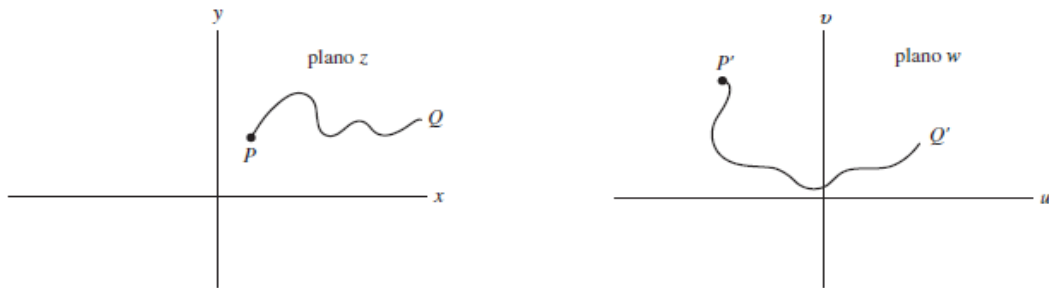


Figura 1.3: Transformación de puntos del plano xy al plano uv .

Ejemplo 1.3. Sea la función

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longrightarrow z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

que define el sistema:

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

Para caracterizar la transformación se eligen dos familias de rectas, la primera de las paralelas al eje y (familia γ_1), y la segunda de las paralelas al eje x (familia γ_2).

La función z^2 transforma las familias γ_1 y γ_2 del plano z en las familias Γ_1 y Γ_2 ,

respectivamente, del plano \mathbb{C}_w , que representa familias de parábolas como se demuestra a continuación.

$$\begin{aligned} \gamma_1 \begin{cases} x = k \\ y = y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} &\xrightarrow{z^2} \Gamma_1 \begin{cases} u = k^2 - y^2 \\ v = 2ky \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \begin{cases} u = k^2 - \frac{v^2}{4k^2}, k \neq 0 \\ u \leq 0 \\ v = 0, k = 0 \end{cases} \\ \gamma_2 \begin{cases} x = x \\ y = k \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} &\xrightarrow{z^2} \Gamma_2 \begin{cases} u = x^2 - k^2 \\ v = 2xk \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \begin{cases} u = \frac{v^2}{4k^2} - k^2, k \neq 0 \\ u \geq 0 \\ v = 0, k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La función z^2 transforma rectángulos del plano \mathbb{C}_z en rectángulos de lados parabólicos en el plano \mathbb{C}_w .

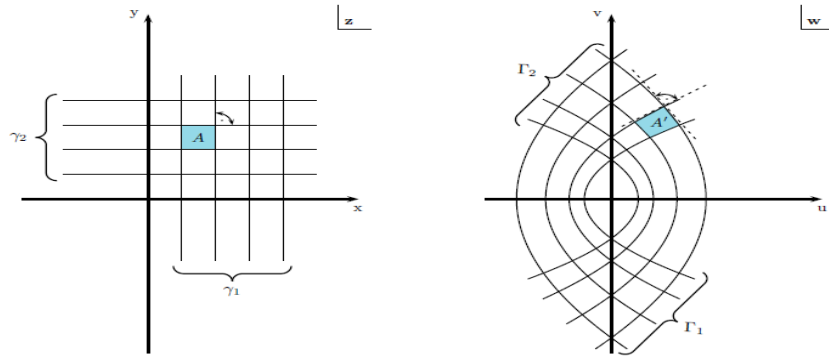


Figura 1.4: Transformación de caminos mediante la función $f(z) = z^2$

Algunas transformaciones generales.

A continuación α, β son constantes complejas dadas, y “ a ”, “ θ_0 ” son constantes reales.

Definición 1.5. Llamamos *traslación* a la transformación dada por $w = z + \beta$.

Mediante esta transformación, las figuras del plano z se desplazan o trasladan en dirección del vector β .

Definición 1.6. Llamamos *rotación* a la transformación dada por $w = e^{i\theta_0}z$.

Mediante esta transformación, las figuras del plano z se rotan un ángulo θ_0 .

Si $\theta_0 > 0$, la rotación es en sentido contrario a las manecillas del reloj, y si $\theta_0 < 0$, la rotación es en sentido de las manecillas del reloj.

Definición 1.7. Llamaremos dilatación a la transformación dada por $w = az$.

Mediante esta transformación, las figuras del plano z se dilatan (o contraen) en la dirección de z , si “ $a > 1$ ” (o $0 < a < 1$). La contracción se considera un caso especial de la dilatación.

Definición 1.8. Llamaremos inversión a la transformación dada por $w = 1/z$.

Ahora, $|w| = 1/|z|$ y $\arg(w) = -\arg(z)$. Las distancias al origen se transforman en sus recíprocas y los argumentos se transforman en sus opuestos.

Ejemplo 1.4. Sea \mathcal{R} la región rectangular del plano z , limitada por $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 1$. Determine la región \mathcal{R}' del plano w a la que se lleva la región \mathcal{R} con las transformaciones: a) $w = z + (1 - 2i)$, b) $w = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z$.

Solución

a) Sea $w = z + (1 - 2i)$. Así, $u + iv = x + iy + 1 - 2i = (x + 1) + i(y - 2)$ y $u = x + 1$, $v = y - 2$. La recta $x = 0$ se lleva a $u = 1$; $y = 0$ se lleva a $v = -2$; $x = 2$ se lleva a $u = 3$; $y = 1$ se lleva a $v = -1$.

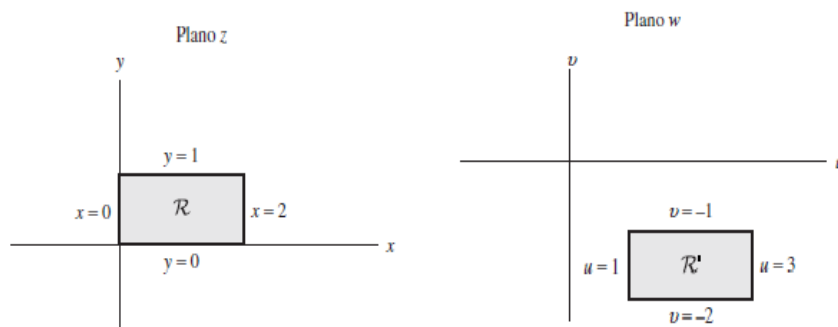


Figura 1.5: Traslación del rectángulo \mathcal{R} en el plano z al rectángulo \mathcal{R}' en el plano w

b) Sea $w = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z$. Así, $u+iv = (1+i)(x+iy) = x-y+i(x+y)$ y $u = x-y$, $v = x+y$. La recta $x = 0$ se lleva a $u = -y$, $v = y$ ó $u = -v$, la recta $y = 0$ se lleva a $u = x$, $v = x$ ó $u = v$, $x = 2$ se lleva a $u = 2-y$, $v = 2+y$ ó $u+v = 4$; $y = 1$ a $u = x+1$, $v = x+1$ ó $v-u = 2$

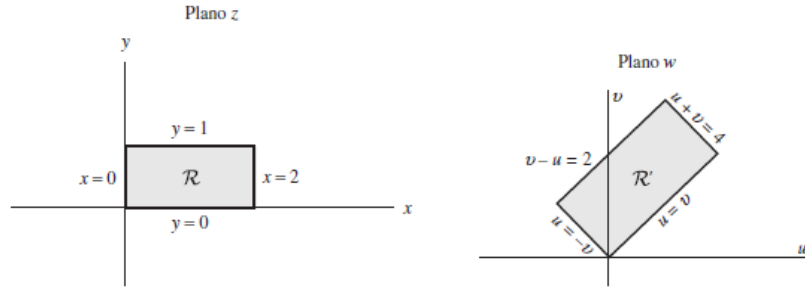


Figura 1.6: Rotación del rectángulo \mathcal{R} en el plano z al rectángulo \mathcal{R}' en el plano w

En general, la transformación $w = az$ realiza una rotación y una dilatación de una región.

Ejemplo 1.5. Determinar la región del plano w a la que se lleva cada una de las regiones siguientes mediante la transformación $w = z^2$. a) Primer cuadrante del plano z , b) Región limitada por $x = 1$, $y = 1$, $y x + y = 1$.

a) Sea $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\phi}$. Entonces $\rho e^{i\phi} = r^2 e^{i2\theta}$ y $\rho = r^2$, $\phi = 2\theta$. Por tanto, los puntos del plano z en (r, θ) se rotan un ángulo 2θ . Como los puntos del primer cuadrante del plano z ocupan la región $0 \leq \theta \leq \pi/2$, estos puntos son llevados a $0 \leq \phi \leq \pi$, o el semiplano superior del plano W .



Figura 1.7: Transformación del primer cuadrante al semiplano superior mediante $w = z^2$.

b) Como $w = z^2$ equivale a $u + iv = x^2 - y^2 + 2ixy$, entonces $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. La recta $x = 1$ se lleva a $u = 1 - y^2$, $v = 2y$ ó $u = 1 - \frac{v^2}{4}$; la recta $y = 1$ a $u = x^2 - 1$, $v = 2x$ ó $u = \frac{v^2}{4} - 1$; la recta $x + y = 1$ ó $y = 1 - x$ a $u = x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 1$, $v = 2x(1 - x) = 2x - 2x^2$ ó $v = \frac{1}{2}(1 - u^2)$.

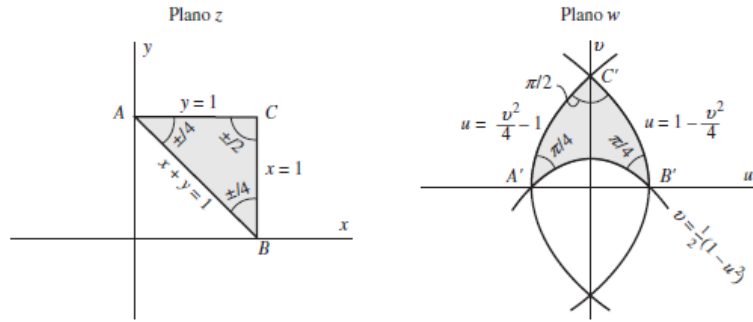


Figura 1.8: Transformación del triángulo ABC al triángulo $A'B'C'$.

Llamando $A'C' = \gamma_1$, $B'C' = \gamma_2$, $A'B' = \gamma_3$. Entonces:

$$\text{Arg}(\gamma_1, \gamma_3) = \text{Arg}(\gamma_1'(-1)) - \text{Arg}(\gamma_3'(-1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Arg}(\gamma_1, \gamma_2) = \text{Arg}(\gamma_2'(2)) - \text{Arg}(\gamma_1'(2)) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Arg}(\gamma_2, \gamma_3) = \frac{\pi}{4}.$$

Se observa que los ángulos del triángulo ABC son iguales, respectivamente, a los ángulos del triángulo curvilíneo $A'B'C'$. Es decir la transformación preserva ángulos.

Definición 1.9. La transformación $w = \alpha z + \beta$, α y β constantes complejas, se conoce como transformación lineal. Se observa que una transformación lineal es una combinación de las transformaciones traslación, rotación y dilatación.

Definición 1.10. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. se dice que f es derivable en sentido complejo en $a \in \Omega$ se existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

El valor de este límite se denota por $f'(a)$ y se llama derivada de f en a .

Se dice que f es holomorfa en Ω cuando es derivable para todo punto $a \in \Omega$. Denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de funciones holomorfas en Ω .

Otra manera de escribir la derivada de $f(z)$ es

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

Teorema 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $a \in \Omega$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función de Ω en \mathbb{C} . Notemos que $a = \alpha + i\beta$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) f es derivable (en sentido complejo) en el punto a .*
- ii) Las funciones $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ son diferenciables en $a = (\alpha, \beta)$ y además se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) = \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) = -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Demostración. Ver [7]. ■

Teorema 1.2. *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Son equivalentes*

- i) f es holomorfa en Ω .*
- ii) f es continua y la forma diferencial $f(z)dz$ es cerrada en Ω , es decir $\int_{\partial C} f(z)dz = 0$ para cada curva cerrada simple $C \subset \Omega$.*

Usualmente llamaremos teorema de Cauchy-Goursat a la implicación $i) \rightarrow ii)$ y llamaremos teorema de Morera a su recíproco $ii) \rightarrow i)$.

Demostración. Ver [1],[8]. ■

Teorema 1.3. (*Fórmula Integral de Cauchy*). Sea $f(z)$ holomorfa sobre y en el interior de una curva simple cerrada C y sea “ a ” un punto en el interior de C . Entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (1.3)$$

donde C se recorre en sentido positivo. además, la n -ésima derivada de $f(z)$ en $z = a$ es

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n = 1; 2; 3; \dots \quad (1.4)$$

La expresión en (1.3) puede considerarse el caso especial de la expresión (1.4) en el que $n = 0$, con $0! = 1$.

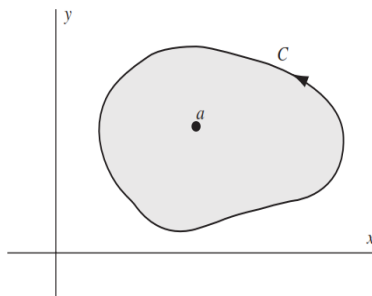


Figura 1.9: Región encerrada por la curva C .

Los resultados dados en (1.3) y (1.4) se conocen como fórmulas integrales de Cauchy, y son importantes porque muestran que si una función $f(z)$ se conoce sobre una curva simple cerrada C , puede hallarse el valor de la función y los valores de todas sus derivadas en todos los puntos interiores de C .

Por tanto, si una función de variable compleja tiene primera derivada, es decir, es holomorfa, en una región simplemente conexa \mathcal{R} , todas sus derivadas de orden superior existen en \mathcal{R} , es decir también son holomorfas, hecho que no se cumple con las funciones de variable real.

Para demostrar el teorema(1.3), se hará uso del siguiente resultado, su demostración se encuentra en [8].

Teorema 1.4. Sea $f(z)$ una función holomorfa en una región limitada por dos curvas simples cerradas \mathcal{C} y \mathcal{C}_1 (donde \mathcal{C}_1 se encuentra en el interior de \mathcal{C}) y sobre estas curvas.

Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}_1} f(z) dz$$

Este resultado se puede generalizar mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.5. Sea $f(z)$ una función holomorfa en una región limitada por las curvas simples cerradas que no se superponen $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ donde $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n$ se encuentran en el interior de \mathcal{C} , y sobre estas curvas. Entonces,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \oint_{\mathcal{C}_2} f(z) dz \cdots + \oint_{\mathcal{C}_n} f(z) dz$$

Esto muestra que si se desea integrar $f(z)$ a lo largo de la curva \mathcal{C} puede sustituirse por cualquier curva \mathcal{C}_1 siempre que $f(z)$ sea holomorfa en la región entre $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$.

Ahora pasaremos a la demostración de la formula integral de Cauchy.

Demostración. La función $\frac{f(z)}{z-a}$ es analítica sobre y en el interior de \mathcal{C} excepto en el punto $z = a$. De acuerdo con el teorema (1.4), se tiene

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (1.5)$$

donde se elige Γ como una circunferencia de radio ε con centro en a . De este modo, una ecuación de Γ es $|z-a| = \varepsilon$ ó $z-a = \varepsilon e^{i\theta}$, donde $0 \leq \theta < 2\pi$.

Se sustituye $z = \varepsilon e^{i\theta} + a$, $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$ y la integral de la derecha en (1.5) se convierte en

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon e^{i\theta} + a) i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{i\theta} + a) d\theta \end{aligned}$$

De manera que, de acuerdo con (1.5)

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{i\theta} + a) d\theta \quad (1.6)$$

Se toman los límites en ambos lados de (1.6), y mediante la continuidad de $f(z)$, se tiene

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} f(a) d\theta \\ &= if(a)(2\pi) \end{aligned}$$

De donde

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

■

La demostración de la n -ésima derivada de $f(z)$ en $z = a$ se encuentra en [1], donde se hace uso de la inducción matemática para su demostración.

Teorema 1.6. (*Teorema de Weierstrass*). Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω que converge uniformemente sobre compactos hacia una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, entonces f es holomorfa en Ω y la sucesión de las derivadas $(f'_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos hacia la derivada f' .

Demostración. Ver [7].

■

El siguiente resultado es el principio de identidad, también llamado principio de prolongación analítica. Será de gran utilidad para extender funciones que conocemos en \mathbb{R} al plano complejo.

Teorema 1.7. Si dos funciones holomorfas en un dominio Ω coinciden en un subconjunto de Ω que tiene algún punto de acumulación en Ω entonces dichas funciones coinciden en Ω .

Demostración. Ver [7].

■

Definición 1.11. Un punto en el que $f(z)$ no sea holomorfa se llama punto singular o singularidad de $f(z)$. Existen varios tipos de singularidad.

a. Singularidad aislada. El punto $z = z_0$ es una singularidad aislada o un punto singular aislado de $f(z)$ si es posible hallar un $\delta > 0$ tal que el círculo $|z - z_0| = \delta$ no contenga ningún otro punto singular distinto de z_0 (es decir, si existe una vecindad agujerada δ de z_0 que no contenga ninguna singularidad). Si no es posible hallar un δ con estas características, se dice que z_0 es una singularidad no aislada.

Si z_0 no es punto singular y es posible hallar un $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| = \delta$ no contenga ningún punto singular, entonces z_0 es un punto ordinario de $f(z)$.

b. Si z_0 es una singularidad aislada y es posible hallar un entero positivo “ n ” tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_0$ es un polo de orden n . Si $n = 1$, z_0 es un polo simple.

Ejemplo 1.6.

1. $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$ tiene un polo de orden 3 en $z = 2$, pues para $n = 3$, se tiene

$$\lim_{z \rightarrow 2} (z-2)^3 \frac{1}{(z-2)^3} = 1 \neq 0$$

2. $f(z) = \frac{(3z-2)}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$ tiene un polo de orden 2 en $z = 1$, y polos simples en $z = -1$ y $z = 4$.

c. Singularidad removible. Un punto singular aislado z_0 es una singularidad removible de $f(z)$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe. Al definir $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ se muestra que $f(z)$ no sólo es continua en z_0 , sino también analítica en z_0 .

Ejemplo 1.7. El punto singular $z = 0$ es una singularidad removible de $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, pues $\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{\sin(z)}{z} \right) = 1$

d. Singularidad esencial. El punto $z = z_0$ es una singularidad esencial si no es posible hallar un entero positivo n tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$.

En la siguiente definición introducimos la noción de función meromorfa.

Definición 1.12. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es meromorfa si existe un conjunto $P \subset \Omega$ de puntos aislados en Ω tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus P$ y f tiene un polo en cada punto de P . Es claro que, toda función holomorfa es también una función meromorfa.

Definición 1.13. Se llama residuo de la función holomorfa $f(z)$ en su punto singular aislado z_0 en cuyo entorno la función es univaluada, a la expresión

$$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \quad (1.7)$$

donde $C \subset \mathbb{C}$ es un entorno cerrado cualquiera que envuelve al punto z_0 .

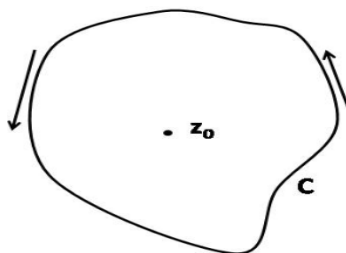


Figura 1.10: Definición del residuo en un punto singular aislado.

Recordar que si z_0 es un punto singular aislado para la función $f(z)$, esta puede ser desarrollada en el entorno de dicho punto en una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.8)$$

y los coeficientes de esta serie vienen dados por la expresión

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (1.9)$$

donde C es cualquier contorno cerrado que envuelva al punto z_0 .

Teniendo en cuenta (1.9) podemos afirmar que el residuo de una función en su punto singular aislado es igual al coeficiente a_{-1} del desarrollo de dicha función en serie de Laurent en el entorno de dicho punto.

$$Res[f(z), z_0] = a_{-1}$$

De donde

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

Al coeficiente a_{-1} se le llama residuo de $f(z)$ en $z = z_0$. El residuo es una medida del grado de no analiticidad de $f(z)$, pues es lo que queda de la función al integrarla alrededor del punto; lo que le resta analiticidad a la función. De ahí el origen de su nombre.

Teorema 1.8. (*Teorema de los residuos*). Si $f(z)$ es holomorfa en el interior y sobre una curva simple cerrada \mathcal{C} , excepto en un número finito de puntos a, b, c, \dots, n en el interior de \mathcal{C} , en los que los residuos son $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \dots, n_{-1}$, respectivamente, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots + n_{-1})$$

es decir, $2\pi i$ veces la suma de los residuos en todas las singularidades contenidas en \mathcal{C} .

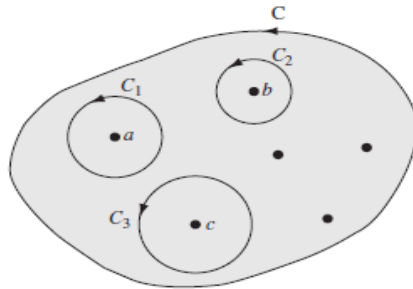


Figura 1.11: Integración sobre una región simplemente conexa con n singularidades

Demostración. Se trazan las circunferencias C_1, C_2, \dots , comprendidos en el interior de \mathcal{C} y con centros en a, b, c, \dots, n respectivamente.

Esto es posible porque a, b, c, \dots, n , son puntos interiores. De acuerdo con el teorema (1.5), se tiene

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots$$

Pero

$$\oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}, \quad \oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i b_{-1}$$

De este modo

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots) = 2\pi i(\text{suma de residuos})$$

■

La prueba dada aquí del teorema del residuo es para regiones simplemente conexas que contengan una cantidad finita de singularidades de $f(z)$. Esta prueba se extiende a regiones con una cantidad infinita de singularidades aisladas y a regiones múltiplemente conexas.

El siguiente resultado nos permitirá calcular el residuo de una función holomorfa en un polo de orden m .

Proposición 1.1. *Si $f(z)$ es holomorfa en el interior y sobre una curva cerrada simple \mathcal{C} , excepto en un polo “ a ” de orden m en el interior de \mathcal{C} , entonces el residuo de $f(z)$ en “ a ” está dado por*

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\} \quad (1.10)$$

Demostración. Ver [8]. ■

Ejemplo 1.8. Si $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$, entonces $z = 1$ y $z = -1$ son polos de orden uno y dos, respectivamente.

Utilizando (1.10), se tiene

$$\text{Residuo en } z = 1 \text{ es } \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left\{ \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Residuo en } z = -1 \text{ es } \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) \right\} = -\frac{1}{4}$$

El siguiente teorema puede ser empleado para calcular con gran facilidad algunas integrales cuyo integrando tenga la forma de la derivada logarítmica de una función holomorfa. Si esto es así, basta tan solo contar el número de ceros y de polos y multiplicar su diferencia por $2\pi i$. Es decir, integramos contando puntos.

Este teorema nos será de gran utilidad para demostrar más adelante el principio del argumento y como consecuencia, el Teorema de Rouché.

Teorema 1.9. *Sea $f(z)$ holomorfa en el interior y sobre una curva cerrada simple \mathcal{C} , salvo en un polo $z = \alpha$ de orden(multiplicidad) p en el interior de \mathcal{C} . Suponga únicamente que f posee un único cero $z = \beta$ de orden(multiplicidad) n sobre \mathcal{C} . Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p$$

Demostración. Sean \mathcal{C}_1 y γ_1 circunferencia de \mathcal{C} que no se superponen y que encierran a $z = \alpha$ y a $z = \beta$, respectivamente.

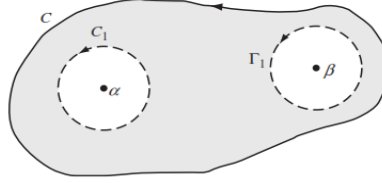


Figura 1.12: Región simplemente conexa con un cero y un polo.

De esta manera

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (1.11)$$

Como $f(z)$ es un polo de orden p en $z = \alpha$, se tiene

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z - \alpha)^p} \quad (1.12)$$

donde $F(z)$ es holomorfa y diferente de cero en el interior y sobre \mathcal{C}_1 . Así, tomando logaritmos en (1.12) y derivando, se tiene

$$\begin{aligned} \ln f(z) &= \ln \left(\frac{F(z)}{(z - \alpha)^p} \right) \\ \ln f(z) &= \ln (F(z)) - \ln ((z - \alpha)^p) \\ \ln f(z) &= \ln (f(z)) - p \ln (z - \alpha) \end{aligned}$$

Derivando

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{(z - \alpha)} \quad (1.13)$$

de manera que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz - \frac{p}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{dz}{z - \alpha} \quad (1.14)$$

Observar que $\frac{F'(z)}{F(z)}$ es holomorfa sobre \mathcal{C}_1 pues por la Fórmula Integral de Cauchy se tiene que por ser $F(z)$ holomorfa entonces existen y son holomorfas todas las derivadas

de la función $F^{(n)}(z)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular para $n = 1$, se obtiene que $F'(z)$ es analítica.

Luego $\frac{F'(z)}{F(z)}$ es holomorfa, de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz - \frac{p}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{dz}{z - \alpha} \\ &= \frac{1}{2\pi i} (0) - \frac{p}{2\pi i} \left(2\pi i \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) \frac{1}{(z - \alpha)} \right) \\ &= 0 - p = -p \end{aligned}$$

Por otra parte como $f(z)$ tiene un cero de orden n en $z = \beta$, se tiene

$$f(z) = (z - \beta)^n G(z) \quad (1.15)$$

donde $G(z)$ es holomorfa y diferente de cero en el interior y sobre γ_1

Aplicando logaritmo y derivando

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - \beta} + \frac{G'(z)}{G(z)} \quad (1.16)$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{n}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z - \beta} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{G'(z)}{G(z)} dz \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{n}{2\pi i} (2\pi i) + 0 = n \quad (1.18)$$

Reemplazando en (1.17)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p \end{aligned}$$

■

Teorema 1.10. (*Principio del Argumento*). Sea $f(z)$ holomorfa en el interior y sobre una curva cerrada simple \mathcal{C} excepto por un número finito de polos en el interior de \mathcal{C} . Suponga que $f(z) \neq 0$ en \mathcal{C} . Si N y P son, respectivamente, el número de ceros y el número de polos de $f(z)$ en el interior de \mathcal{C} , contando las multiplicidades, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \quad (1.19)$$

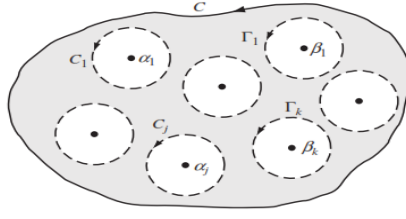


Figura 1.13: Región simplemente conexa con un número de ceros y polos finitos.

Demostración. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ y $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ los respectivos polos y ceros de $f(z)$ en el interior de \mathcal{C} , y suponga que sus multiplicidades son p_1, p_2, \dots, p_j y n_1, n_2, \dots, n_k

Encerrando todos los polos y todos los ceros en las circunferencias $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_j$ y $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, que no se superponen. Esto siempre es posible porque los polos y los ceros son aislados

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \\ &\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_1 + n_2 + \dots + n_k - (p_1 + p_2 + \dots + p_j)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^j p_j = N - P$$

■

Como consecuencia del teorema del argumento, enunciamos el teorema de Rouché.

Teorema 1.11. Sea $f(z)$ y $g(z)$ holomorfas en el interior y sobre una curva simple cerrada \mathcal{C} y suponga que $|g(z)| < |f(z)|$ sobre \mathcal{C} . Entonces, $f(z) + g(z)$ y $f(z)$ tienen el mismo número de ceros en el interior de \mathcal{C} .

Demostración. Ver[8]

■

1.2 Teorema de la aplicación abierta

El teorema de la aplicación abierta se presenta como uno de los principales resultados de la teoría de funciones holomorfas y nos garantiza que todas ellas son abiertas. Este teorema se utilizará en numerosas ocasiones a lo largo del trabajo.

Para demostrarlo, debemos probar primero el teorema de la función inversa para funciones holomorfas.

Teorema 1.12. (*Teorema de la función inversa*) Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sea $a \in \Omega$ un punto en el que $f'(a) \neq 0$. Entonces existen entornos abiertos U de a y W de $f(a)$ de modo que $f|_{U_a}$ es inyectiva, $W = f(U_a)$ y $g = (f|_{U_a})^{-1} : W \rightarrow V_a$ es holomorfa. Además, si $w = f(z)$, $g'(w) = 1/f'(z)$.

Demostración. La demostración se basará usando el teorema de la función inversa para funciones diferenciales reales.

Entonces habría que comprobar que el jacobiano es diferente de cero, pero se sabe que el jacobiano de f en a es $|f'(a)|^2$, esto se debe a que al ser f holomorfa se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el jacobiano vendría dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 = |f'(z)|^2 \end{aligned}$$

con lo cual evaluando en el punto a , si $f'(a)$ no se anula, tampoco se anula el jacobiano. Por tanto, tenemos garantizado por el teorema de la función inversa para funciones diferenciables reales, que existen entornos abiertos U de a y W de $f(a)$, de modo que $f|_{U_a}$ es biyectiva y f^{-1} es de clase C^1 en W .

$$f : U_a \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad g : W \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Solo falta comprobar que g es holomorfa, para lo cual se usará las condiciones de Cauchy-Riemman.

Puesto que g es diferenciable entonces existen sus derivadas parciales y además la matriz jacobiana de g es la inversa de la matriz jacobiana de f ,

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|f'|^2} \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

usando las condiciones de Cauchy-Riemman para f . Se tiene que

$$x_u = \frac{u_x}{|f'|^2}, x_v = \frac{v_x}{|f'|^2}, y_u = -\frac{v_x}{|f'|^2}, y_v = \frac{u_x}{|f'|^2}$$

$$x_u = y_v, x_v = -y_u,$$

y por lo tanto g es holomorfa. Finalmente

$$\begin{aligned} g'(w) &= \frac{\partial g(u + iv)}{\partial u} \\ &= x_u(u, v) + iy_u(u, v) \\ &= \frac{u_x(x, y)}{u_x(x, y)^2 + v_x(x, y)^2} - i \frac{v_x(x, y)}{u_x(x, y)^2 + v_x(x, y)^2} \\ &= \frac{1}{u_x(x, y) + iv_x(x, y)} \\ &= \frac{1}{f'(z)} \end{aligned}$$

■

El siguiente lema recorre una gran parte del camino en la demostración del teorema de la aplicación abierta.

Lema 1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante y a un cero aislado de $f(z) - f(a)$ con multiplicidad m . Entonces existe un entorno abierto $U_a \subset \Omega$, un $\delta > 0$ y una biyección $\varphi : U_a \rightarrow D(0, \delta)$ tales que $f(z) = f(a) + (\varphi(z))^m$ y $\varphi'(z) \neq 0$ para todo $z \in U_a$ y $(\varphi^{-1})'(w) \neq 0$ para todo $w \in D(0, \delta)$.

Demostración. El punto “ a ” es un cero de $f(z) - f(a)$ de multiplicidad m , luego existe un disco $D(a, r) \subset \Omega$ tal que $f(z) - f(a) = (z - a)^m g(z)$, con $g(z) \neq 0$ y holomorfa en

dicho disco. Se tiene entonces que la función $\frac{g'(z)}{g(z)}$ es holomorfa en $D(a, r)$ y por lo tanto tiene una primitiva, es decir, existe $\varphi'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$, de donde se obtiene que g posee un logaritmo holomorfo, esto es $e^{\varphi(z)} = g(z)$ para todo $z \in D(a, r)$. Dado $m \in \mathbb{N}$ la función $\psi(z) = e^{\varphi(z)/m}$ es holomorfa en $D(a, r)$ y verifica que

$$(\psi(z))^m = e^{\varphi(z)} = g(z) \quad \text{para todo } z \in D(a, r)$$

es decir, ψ es una raíz m -ésima holomorfa de g en $D(a, r)$.

Existe entonces una función $\psi \in \mathcal{H}(D(a, r))$ tal que $(\psi(z))^m = g(z)$. Así, se tiene que $f(z) - f(a) = ((z - a)\psi(z))^m = (\varphi(z))^m$, donde se ha definido $\varphi : D(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ como $\varphi(z) = (z - a)\psi(z)$.

Tenemos que $\varphi \in \mathcal{H}(D(a, r))$, $\varphi(a) = 0$ y $\varphi'(z) = \psi(z) + (z - a)(\psi'(z))$.

Esto implica que $\varphi'(a) = \psi(a) \neq 0$.

Aplicando el teorema de la función inversa para la función φ , existe $V_a \subset D(a, r)$ y existe $W_0 \subset \mathbb{C}$ entorno del cero tales que $\varphi : V_a \rightarrow W_0$ es una biyección con $\varphi'(z) \neq 0$ y $(\varphi^{-1})(w) \neq 0$ para todo $z \in V_a$ y $w \in W_0$. Tomamos entonces $\delta > 0$ tal que $D(0, \delta) \subset W_0$ y definiendo U_a como $U_a = \varphi^{-1}(D(0, \delta)) \subset V_a \subset D(a, r)$, obteniéndose el resultado. ■

Ahora demostraremos el teorema de la aplicación abierta, teniendo a nuestra disposición el lema anterior.

Teorema 1.13. (*Teorema de la aplicación abierta*). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante. Entonces f es abierta. Es más para cada $a \in \Omega$, si m es la multiplicidad de a como cero de $f(z) - f(a)$, se tiene que existen abiertos $U_a \subset \Omega$ y $V_b \subset f(\Omega)$ de a y $b = f(a)$ respectivamente tales que $f(z) - w$ tiene exactamente m ceros distintos en U_a para cada $w \in V_b \setminus \{b\}$.

Demostración. Sea $G \subset \Omega$ abierto, entonces se ha de probar que $f(G)$ es abierto. Sea $b \in f(G)$, llamemos $a \in G$ un punto tal que $f(a) = b$. Como $m \in \mathbb{N}$ es el orden del cero de la función $f(z) - f(a)$, entonces por el lema anterior existen un abierto U_a , $\delta > 0$ y una biyección $\varphi : U_a \rightarrow D(0, \delta)$ que verifican $f(z) = f(a) + (\varphi(z))^m$ para todo $z \in U_a$ y $(\varphi^{-1})'(w) \neq 0$ para todo $w \in D(0, \delta)$. Sabemos también, que $\varphi(U_a)$ es abierto

y $\varphi(a) = 0 \in \varphi(U_a)$. Por tanto, para $\delta > 0$, se tiene $D(0, \sqrt[m]{\delta}) \subset \varphi(U_a)$. Sea ahora w tal que $|w - f(a)| < \delta$ y sea $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} = \sqrt[m]{w - f(a)}$, ($|u_k| < \sqrt[m]{\delta}, 1 \leq k \leq m$); se tendrá que

$$\exists z_1, z_2, \dots, z_m \in U_a : \varphi(z_k) = u_k, 1 \leq k \leq m$$

de donde,

$$\{z \in U_a : f(z) = w\} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\},$$

Considerando $V_b = D(b, \delta) \subset f(G)$.

■

El siguiente corolario será de gran utilidad para obtener isomorfismos conformes, las cuales se estudiarán más adelante.

Corolario 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es inyectiva. Entonces $f'(a) \neq 0$ para cada $a \in \Omega$.*

Demostración. Suponiendo que existe $a \in \Omega$ con $f'(a) = 0$, entonces la aplicación $z \rightarrow f(z) - f(a)$ tendría un cero en a de orden al menos dos, pues en caso contrario, podemos escribir

$$\begin{aligned} f(z) - f(a) &= (z - a)\varphi(z), \text{ con } \varphi(a) \neq 0 \\ f'(z) &= \varphi(z) + (z - a)\varphi'(z) \end{aligned}$$

evaluando en a ,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \varphi(a) + 0 \\ 0 &= \varphi(a) \end{aligned}$$

Lo que es absurdo, luego se tiene que para un entorno de a , f tendría al menos dos raíces, por lo que no sería inyectiva, lo que contradice la hipótesis.

■

1.3 Transformaciones conformes

Las transformaciones conformes serán las aplicaciones protagonistas del Teorema de la representación de Riemann.

Las transformaciones conformes se utilizan para resolver problemas físicos relacionados con la ecuación de Laplace, ya que constituye un método estándar para resolver problemas con valor en la frontera en teoría bidimensional del potencial, al transformar una región complicada dada en otra más sencilla.

Definición 1.14. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva. Diremos que γ tiene tangente en un punto $z = \gamma(t)$ cuando es derivable en t y $\gamma'(t) \neq 0$. El vector $\gamma'(t)$ se llama vector tangente a γ en $z = \gamma(t)$.

Ahora recordemos la definición del ángulo entre dos curvas.

Definición 1.15. Dadas dos curvas $\gamma, \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ que se cortan en un punto $z = \gamma(t), \sigma(s)$ y que tienen tangente en dicho punto, se define el ángulo de la curva γ con la curva σ en el punto z por:

$$\widehat{\gamma, \sigma}(z) = \text{Arg} \left(\frac{\gamma'(t)}{\sigma'(s)} \right)$$

donde como es usual $\text{Arg}(z)$ denota el conjunto de todos los argumentos de cualquier complejo no nulo z . Observe que $\widehat{\gamma, \sigma}(z) \neq \widehat{\sigma, \gamma}(z)$.

A continuación se dará la definición de transformación conforme.

Definición 1.16. Sea Ω un abierto de \mathbb{C} y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en \mathbb{C} . Se dice que f es conforme en un punto z_0 de Ω si f transforma curvas con tangente en z en curvas con tangente en $w_0 = f(z_0)$ y conserva ángulos en magnitud y sentido. Es decir, si $\gamma, \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ son curvas en Ω que se cortan en $z_0 = (x_0, y_0)$ y que tienen tangente en z_0 , son llevados respectivamente a $f \circ \gamma$ y $f \circ \sigma$ que se cortan en $w_0 = (u_0, v_0)$ y tienen tangente en w_0 , tales que

$$\widehat{\gamma, \sigma}(z_0) = \widehat{f \circ \gamma, f \circ \sigma}(w_0)$$

Se dice que f es conforme en Ω si es conforme en todos sus puntos. El siguiente resultado caracteriza las funciones conformes.

Proposición 1.2. *Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y $z_0 \in \Omega$. f es holomorfa en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0 .*

Demostración. Sean $\gamma, \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ curvas en Ω que se cortan en $\gamma(t_0) = z_0 = \sigma(s_0)$ y que tienen tangente en dicho punto. Entonces, γ y σ son derivables con $\gamma'(t_0) \neq 0$ y $\sigma'(s_0) \neq 0$. Para demostrar que f es conforme, probaremos que $f \circ \gamma$ y $f \circ \sigma$ tienen tangente en $f(z_0)$ y que $\widehat{\gamma, \sigma}(z_0) = \widehat{f \circ \gamma, f \circ \sigma}(z_0)$.

Sea $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma, \tilde{\sigma} = f \circ \sigma$. Observar que $\tilde{\gamma}(t_0) = \tilde{\sigma}(s_0) = f(z_0)$. Por la regla de la cadena, tenemos:

$$\tilde{\gamma}'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0) \neq 0 \quad (1.20)$$

$$\tilde{\sigma}'(s_0) = f'(\sigma(s_0)) \cdot \sigma'(s_0) = f'(z_0) \cdot \sigma'(s_0) \neq 0 \quad (1.21)$$

De (1.20) y (1.21) se deduce que $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\sigma}$ tienen tangente en $f(z_0)$ y

$$\frac{\tilde{\gamma}'(t_0)}{\tilde{\sigma}'(s_0)} = \frac{f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0)}{f'(z_0) \cdot \sigma'(s_0)} = \frac{\gamma'(t_0)}{\sigma'(s_0)}$$

Lo que implica que $\widehat{\gamma, \sigma}(z_0) = \widehat{\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}}(f(z_0))$, es decir f es conforme en z_0 . ■

La siguiente proposición nos muestra que el recíproco de la proposición anterior es cierto.

Proposición 1.3. *Sea Ω un abierto de \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en Ω y $z_0 \in \Omega$. Escribimos $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)), v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$, para todo $x + iy \in \Omega$. Supongamos que f es conforme en z_0 y que u y v son diferenciables en z_0 . Entonces f es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$.*

Demostración. Ver [3]. ■

La siguiente definición introduce la noción de isomorfismo conforme, un concepto que será esencial a la hora de enunciar el teorema de Riemann.

Definición 1.17. *Sean Ω_1 y Ω_2 dominios en \mathbb{C} . se dice que $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es un isomorfismo conforme de Ω_1 sobre Ω_2 cuando es biyectiva, f y f^{-1} es conforme. Se dice en este caso que los abiertos Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes.*

Un isomorfismo conforme de un dominio Ω sobre sí mismo se llama un automorfismo conforme de Ω .

El problema general de la representación conforme consiste en decidir si dos abiertos del plano complejo son isomorfos, y en caso de que lo sean, tratar de determinar todos los isomorfismos conformes entre ellos.

En ese sentido las transformaciones de Möbius nos serán de gran utilidad para obtener isomorfismos conformes.

Definición 1.18. *Llamamos transformación de Möbius a una aplicación $T: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida de la forma*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son constantes tales que $ad - bc \neq 0$.

Conviene considerar a la función anterior como una acción de la matriz compleja

$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en el plano complejo y dada para $z \in \mathbb{C}$ por la igualdad

$$T_A(z) = A \cdot z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az + b}{cz + d}$$

Observe ahora que si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ es un complejo no nulo, la matriz

$$\lambda A := \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

Determina la misma transformación lineal fraccional ya que

$$(\lambda A) \cdot z = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{az + b}{cz + d} = A \cdot z$$

Claramente una transformación de Möbius es holomorfa en la región $\Omega = \mathbb{C} - \{cz + d = 0\}$ y su derivada es

$$T'_A(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

donde $ad - bc = \det A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se sigue que si $\det A = 0$, entonces T_A es constante. Por otra parte, si $\det A \neq 0$, la matriz A es invertible y se dice que T_A es una transformación de Möbius. como la inversa de la matriz A es $\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Entonces la matriz $B := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ determina la inversa de la transformación de Möbius ya que

$$T_A \circ T_B.z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\frac{dz - b}{-cz + a} \right) = \frac{(ad - bc)z}{ad - bc} = z$$

Por lo tanto que $T_A \circ T_B = id$, y por tanto T_A es biyectiva, entonces, por el corolario (1.1), las transformadas de Möbius son conformes.

El siguiente resultado nos permitirá construir la razón doble.

Proposición 1.4. *Dadas dos ternas de puntos distintos $\mathbb{C}_\infty, z_1, z_2, z_3$ y w_1, w_2, w_3 , existe una única transformación de Möbius T tal que $T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2$ y $T(z_3) = w_3$.*

Demostración. La transformación de Möbius se puede escribir en la forma:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$Az w + Bz + Cw + D = 0, A \neq 0 \quad (1.22)$$

Dividimos (1.3) por A, entonces:

$$zw + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A}w + \frac{D}{A} = 0$$

$$\alpha z + \beta w + \delta = -zw, \text{ donde } \alpha = \frac{B}{A}, \beta = \frac{C}{A}, \delta = \frac{D}{A}$$

Como z_i se aplica en w_i para $i = 1, 2, 3$, tenemos

$$\alpha z_1 + \beta w_1 + \delta = -z_1 w_1,$$

$$\alpha z_2 + \beta w_2 + \delta = -z_2 w_2,$$

$$\alpha z_3 + \beta w_3 + \delta = -z_3 w_3,$$

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{pmatrix},$$

que es un sistema de tres ecuaciones lineales en α, β y δ .

Este sistema es no homogéneo, ya que si $z_i = 0$ para algún $i = 1, 2, 3$, entonces $z_j \neq 0$ para todo $j = 1, 2, 3, j \neq i$, puesto que son tres puntos distintos. Análogamente para

$w_i, i = 1, 2, 3$. Luego siempre deben existir $z_i \neq 0$ y $w_i \neq 0$ para por lo menos un i , con $i = 1, 2, 3$.

*Si $\Delta \neq 0$, con $\Delta = \det M$ entonces existe una única solución para α, β, δ .

*Si $\Delta = 0$, la primera columna de Δ es una combinación lineal de las columnas segunda y tercera; entonces:

$$z_1 = mw_1 + n,$$

$$z_2 = mw_2 + n,$$

$$z_3 = mw_3 + n,$$

luego $w = \frac{1}{m}z - \frac{n}{m}$, es una transformación lineal única que es un caso especial de la transformaciones de Möbius. Con esto queda demostrado que tal transformación existe y es única, ahora se va a deducir dicha transformación.

Si w_1, w_2, w_3 corresponde a z_1, z_2, z_3 tenemos:

$$w - w_k = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_k + b}{bz_k + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_k)}{(cz + d)(cz_k + d)},$$

entonces

$$w - w_1 = \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)} \quad (1.23)$$

$$w - w_3 = \frac{(ad - bc)(z - z_3)}{(cz + d)(cz_3 + d)} \quad (1.24)$$

reemplazando w por w_2 y z por z_2 , tenemos:

$$w_2 - w_1 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_1)}{(cz_2 + d)(cz_1 + d)} \quad (1.25)$$

$$w_2 - w_3 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)} \quad (1.26)$$

Multiplicando (1.23) por (1.26) y dividiendo entre (1.24) por (1.25), y como $ad - bc \neq 0$

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = T(z) \quad (1.27)$$

se tiene:

$$(z - z_3)(w - w_1)(z_2 - z_1)(w_2 - w_3) = (z - z_1)(w - w_3)(z_2 - z_3)(w_2 - w_1) \quad (1.28)$$

*Si $z = z_1$ entonces $w = w_1$.

*Si $z = z_3$, entonces $w = w_3$.

*Si $z = z_2$, hay un factor común en ambos miembros de la ecuación (1.28), y esta se reduce a:

$$(w - w_1)(w_2 - w_3) = (w - w_3)(w_2 - w_1)$$

resolviendo, se obtiene: $w = w_2$. ■

A la transformación de Möbius T del lado derecho de la igualdad en 1.27 la notaremos por (z, z_1, z_2, z_3) y a esta aplicación la llamaremos razón doble de z, z_1, z_2, z_3 . Además se verifica que $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1, T(z_3) = \infty$.

Ejemplo 1.9. Sea z_0 un punto en el semiplano superior del plano z . Muestre que la transformación $w = e^{i\theta_0}[(z - z_0)/(z - \bar{z}_0)]$ lleva el semiplano superior del plano z al interior del círculo unitario en el plano w , es decir, a $|w| \leq 1$

Se tiene

$$|w| = \left| e^{i\theta_0} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|$$

De acuerdo con la gráfica, si z está en el semiplano superior, $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$, en donde la igualdad se satisface si y sólo si z está en el eje x . Por tanto $|w| \leq 1$

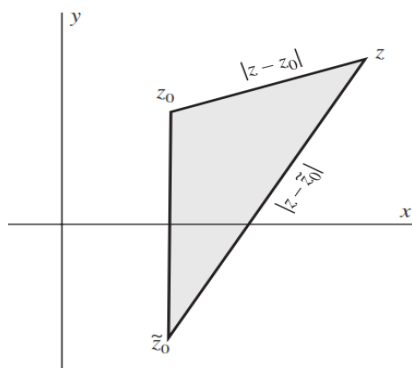


Figura 1.14: Para z en el semiplano superior, $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$.

Ejemplo 1.10. Encuentra una transformación de Möbius que lleve el semiplano superior al círculo unidad del plano w de manera que $z = i$ se lleve a $w = 0$, y el punto al infinito, a $w = -1$.

Se tiene que $w = 0$ debe corresponder a $z = i$, y $w = -1$, a $z = \infty$. Así, de $w = e^{i\theta_0} \left\{ \frac{(z - z_0)}{(z - \bar{z}_0)} \right\}$, se tiene $0 = e^{i\theta_0} \left\{ \frac{(i - z_0)}{(i - \bar{z}_0)} \right\}$, de manera que $z_0 = i$. Para $z = \infty$, se tiene $w = e^{i\theta_0} = -1$.

Por tanto, la transformación buscada es:

$$w = (-1) \left(\frac{z - i}{z + i} \right)$$

$$w = \frac{i - z}{i + z}$$

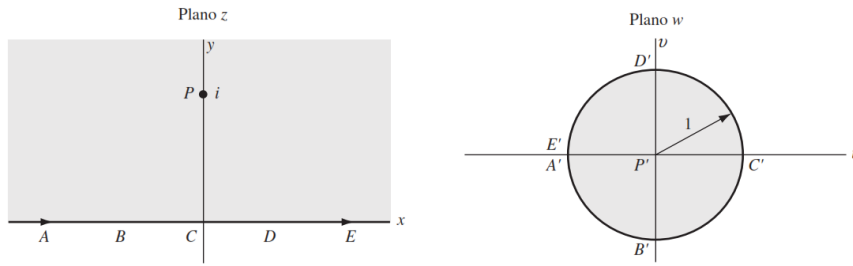


Figura 1.15: Transformación de Möbius del semiplano superior al disco unidad.

Ejemplo 1.11. Encontrar una transformación de Möbius que lleve los puntos $z = 0, z = -i, z = -1$ a $w = +i, w = 1, w = 0$, respectivamente.

Reemplazando, se tiene:

$$\frac{(w - i)(1 - 0)}{(w - 0)(1 - i)} = \frac{(z - 0)(-i + 1)}{(z + 1)(-i - 0)}$$

despejando,

$$w = -i \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)$$

El siguiente resultado nos permitirá relacionar la Transformación de Möbius con las transformaciones generales.

Proposición 1.5. *La transformación de Möbius puede considerarse una combinación de las transformaciones de translación, rotación, dilatación e inversión.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c^2(az + b)}{c^2(cz + d)} \\
 &= \frac{ac^2z + bc^2}{c^2(cz + d)} \\
 &= \frac{ac^2z + acd + bc^2 - acd}{c^2(cz + d)} \\
 &= \frac{ac(cz + d) + c(bc - ad)}{c^2(cz + d)} \\
 &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} \\
 &= \lambda + \frac{u}{z + v}
 \end{aligned}$$

donde $\lambda = \frac{a}{c}$, $u = \frac{bc - ad}{c^2}$, $v = \frac{d}{c}$ son constantes. La transformación es equivalente a $\xi = z + v$, $\tau = \frac{1}{\xi}$ y $w = \lambda + \mu\tau$, las cuales son combinaciones de las transformaciones generales. ■

Ejemplo 1.12. Es de interés la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{z + i}{z - i}$$

que transforma el semiplano superior al disco unidad. Esta aplicación aparece en numerosas ocasiones y la llamaremos transformación de Cayley.

Proposición 1.6. *Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias (en sentido amplio).*

Demostración. La ecuación general de una circunferencia en el plano z la podemos escribir como:

$$Az\bar{z} + \overline{B}z + B\bar{z} + C = 0, \text{ donde } A > 0, C > 0 \text{ y } B \in \mathbb{C}$$

Entonces, se tiene:

- i) si $A = 0$ la circunferencia se reduce a una línea recta.
- ii) Si $w = z + a$, $a \in \mathbb{C}$, entonces $z = w - a$ y $\bar{z} = \overline{w - a} = \bar{w} - \bar{a}$, por lo cual

$$A(w - a)(\bar{w} - \bar{a}) + \bar{B}(\bar{w} - \bar{a}) + B(w - a) + C = 0$$

$$Aw\bar{w} - A\bar{a}w - Aa\bar{w} + Aa\bar{a} + \bar{B}\bar{w} - \bar{B}\bar{a} + Bw - Ba + C = 0$$

$$Aw\bar{w} + (\bar{B} - Aa)\bar{w} + (B - A\bar{a})w + (Aa\bar{a} - \bar{B}\bar{a} - Ba + C) = 0$$

que es la ecuación de una circunferencia en el plano w .

- iii) Si $w = az$, $a \in \mathbb{C}$, entonces $z = \frac{w}{a}$ y $\bar{z} = \frac{\bar{w}}{\bar{a}}$, por tanto

$$A\left(\frac{w}{a}\right)\left(\frac{\bar{w}}{\bar{a}}\right) + \bar{B}\left(\frac{\bar{w}}{\bar{a}}\right) + B\left(\frac{w}{a}\right) + C = 0,$$

$$Aw\bar{w} + \bar{B}a\bar{w} + B\bar{a}w + Ca\bar{a} = 0,$$

$$Aw\bar{w} + (\bar{B}a)\bar{w} + (B\bar{a})w + Ca\bar{a} = 0,$$

que también es la ecuación de una circunferencia en el plano w .

- iv) Si $w = \frac{1}{z}$, entonces $z = \frac{1}{w}$ y $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$, lo cual implica que

$$A\left(\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) + \bar{B}\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) + B\left(\frac{1}{w}\right) + C = 0,$$

$$A + \bar{B}w + B\bar{w} + Cw\bar{w} = 0,$$

$$Cw\bar{w} + B\bar{w} + \bar{B}w + A = 0,$$

que también es la ecuación de una circunferencia en el plano w . Como la transformación de Möbius se considera una combinación de traslación, rotación, dilatación e inversión, se tiene el resultado deseado. ■

La función exponencial nos proporciona un primer ejemplo de isomorfismo conforme. La derivada de la función exponencial no se anula nunca, luego la transformación $z \rightarrow e^z$ es conforme e inyectiva sobre cualquier abierto Ω de \mathbb{C} con la propiedad no contener parejas de puntos z_1, z_2 verificando $z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.13. La función $f(z) = e^z$ establece un isomorfismo conforme entre la banda horizontal $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im} z < \pi\}$ y el semiplano superior.

En efecto, sea $w = f(z) = e^z = se^{i\varphi}$, $\text{cons} = e^x$, $\varphi = y$. entonces $w = \rho e^{i\phi} = se^{i\varphi}$; de donde $\rho = e^x$, $\phi = y$, de donde $0 < \phi < \pi$.

Ejemplo 1.14. El rectángulo limitado por $y = 0$, $y = \pi$, $x = 0$, $x = 1$ se transforma mediante $f(z) = e^z$ al sector circular comprendido entre los radios $\rho = 1$, $\rho = e$, y los ángulos $\phi = 0$, $\phi = \pi$.

En efecto, sabemos que $we^z = e^x e^{iy} = \rho$, así $\rho e^{i\phi} = e^x e^{iy}$, de donde $\rho = e^x$ y $\phi = y$. Como $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$, entonces $1 \leq \rho \leq e$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

Ejemplo 1.15. La aplicación

$$S_a(z) = e^{i\alpha} \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $a \in D(0, 1)$ es un isomorfismo conforme del disco unidad en sí mismo.

En efecto, si $|z| = 1$, entonces

$$\begin{aligned} |S_a(z)| &= |e^{i\alpha}| \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \frac{|z - a|}{|\bar{z}| |1 - \bar{a}z|} = \frac{|z - a|}{|z - \bar{a}z\bar{z}|} \\ &= \frac{|z - a|}{|\bar{z} - \bar{a}|} = 1 \end{aligned}$$

Además las transformaciones de Mobius transforman circunferencias en circunferencias o rectas, luego S_a transforma necesariamente la frontera del disco unidad en sí misma. Como S_a es derivable y continua por ser una transformación de Mobius, la imagen de \mathbb{D} debe ser conexa y por tanto, o bien $S_a(D(0, 1)) = D(0, 1)$ o bien $S_a(D(0, 1)) = \mathbb{C} \setminus D(0, 1)$. Pero la segunda opción es absurda porque $S_a(a) = 0$. Así, S_a es una biyección holomorfa del disco unidad en sí mismo.

Se demostrará más adelante de hecho, que todas las biyecciones holomorfas del disco unidad en sí mismo que envían un punto $a \in D(0, 1)$ al origen, son de este tipo.

Usando cálculo elemental garantizamos que la inversa de S_a es precisamente S_{-a} , que $S_a(a) = 0$ y que $S'_a(a) = \frac{1}{1 - |a|^2}$.

Veamos un resultado que nos permitirá encontrar isomorfismos conformes sin tener que comprobar que cumplan todas las propiedades de la definición.

Proposición 1.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \rightarrow G$ una función holomorfa e inyectiva. Entonces, para cada $a \in \Omega$, se cumple que $f'(a) \neq 0$, $G = f(\Omega)$ es abierto y la inversa $f^{-1} : G \rightarrow \Omega$ es holomorfa. Consecuentemente $f^{-1}(b) \neq 0$ para cada $b \in G$ y así f será un isomorfismo conforme entre Ω y G .*

Demostración. Debido a que f es inyectiva, entonces $f'(a) \neq 0$, para cada $a \in \Omega$. Así, por el teorema de la aplicación abierta $G = f(\Omega)$ es abierto, por lo tanto f es biyectiva. Tomando $b = f(a)$, tenemos que

$$\frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{(b+h) - b} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(b+h)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$$

Y como f es inyectiva, $f'(a) \neq 0$, es decir, existe la derivada, por lo tanto f^{-1} es holomorfa. ■

A continuación se estudia el Principio de módulo máximo para luego utilizarlo en la demostración del lema de Schwarz, el cual será de gran importancia en la demostración del Teorema de la representación de Riemann.

1.4 Principio del Módulo Máximo

En gran medida, los resultados que se exponen en esta sección se basan observando la propiedad de la media, la cual nos afirma que el valor de una función holomorfa en el centro de una circunferencia es la media de sus valores en la circunferencia.

Recordemos que una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con Ω un abierto de \mathbb{C} ; satisface la propiedad de la media si para cada $D(a, r) \subset \Omega$, se tiene

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Con las mismas hipótesis del resultado anterior, se tiene

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta$$

Se observa, que el segundo miembro es la media de los valores de $|f|$ en la circunferencia, pero ahora se está promediando números reales. Se tiene ahora una desigualdad, pero que se puede decir cuando el valor promedio $|f(a)|$ sea mayor o igual que todos los valores de $|f|$ en $C(a, r)$.

Teorema 1.14. (*Principio del módulo máximo*). Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(a, \delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in D(a, \delta)$. Entonces f es constante.

Demostración. Fijado $r \in]0, \delta[$, la función continua $\psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\psi(t) = |f(a)| - |f(a + re^{it})|, \forall t \in [0, 2\pi]$$

verifica que $\psi(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, 2\pi]$. Luego

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \psi(t) dt &= \int_0^{2\pi} (|f(a)| - |f(a + re^{it})|) dt \\ &= 2\pi \left(|f(a)| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Pero como $\psi(t) \geq 0$, entonces $\int_0^{2\pi} \psi(t) dt \geq 0$, luego se tiene que $\psi(t) = 0$, c.t.p. $t \in [0, 2\pi]$. Hemos probado así que $|f(a)| = |f(a + re^{it})|$, c.t.p. $t \in [0, 2\pi]$, pero esto además es válido para todo $r \in]0, \delta[$, entonces

$$|f(z)| = |f(a)|, \quad \forall z \in D(a, \delta)$$

Así pues, la restricción de f al dominio $D(a, \delta)$ es holomorfa y tiene módulo constante, luego es constante. Por el principio de identidad, como $D(a, \delta)$ tiene puntos de acumulación en Ω , concluimos que f es constante en Ω como se quería demostrar. ■

Para aprovechar el teorema anterior, es natural ponerse en una situación que asegure la existencia de un máximo, como se hace a continuación.

Proposición 1.8. *Sea Ω un dominio acotado y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω . Entonces $\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial\Omega\}$.*

Demostración. Observar que ambos máximos existen, pues $\overline{\Omega}$ y $\partial\Omega$ son compactos. Dado $a \in \overline{\Omega}$ tal que $|f(a)| = \max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\}$, caben dos posibilidades.

Si $a \in \partial\Omega$, la igualdad buscada es evidente. En otro caso tenemos $a \in \Omega$ y podemos aplicar el teorema anterior a la restricción de f a Ω , cuyo módulo tiene un máximo absoluto en a , obteniendo que f es constante en Ω . Por continuidad, f es constante en $\overline{\Omega}$ y la igualdad buscada vuelve a ser evidente. ■

Este resultado establece que en un compacto, la función f con las hipótesis del enunciado anterior alcanza su máximo en la frontera.

Ahora probaremos un resultado técnico sobre sucesiones de funciones holomorfas.

Proposición 1.9. *Sea Ω un dominio acotado y, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $f_n : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω . Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\partial\Omega$, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω .*

Demostración. Por hipótesis, $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $\partial\Omega$, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $p, q \geq m$ se tiene $\max\{|f_p(z) - f_q(z)| : z \in \partial\Omega\} < \epsilon$. Entonces, para $p, q \geq m$, podemos aplicar el resultado anterior a la función $f_p - f_q$, obteniendo que $\max\{|f_p(z) - f_q(z)| : z \in \overline{\Omega}\} < \epsilon$. Por tanto, $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $\overline{\Omega}$, luego converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$, que es continua, pues la convergencia uniforme preserva la continuidad. Como se tiene convergencia uniforme en todo subconjunto compacto de Ω , el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. ■

Capítulo 2:

Teorema de la representación de Riemann

Empezamos este capítulo con el Lema de Schwarz el cual nos permite determinar los automorfismos conformes en el disco unidad.

A continuación se probará el Teorema de Riemann, teniendo en cuenta los resultados previos.

Después se estudiará el espacio de las funciones holomorfas en donde obtenemos resultados relacionados con la convergencia uniforme sobre compactos de sucesiones de funciones holomorfas.

2.1 Lema de Schwarz

En esta sección empezamos a preparar el camino para demostrar al teorema de Riemann. Se estudiará el Lema de Schwarz y los automorfismos del disco unidad, herramientas importantes de las que se harán uso para conseguir el objetivo central de este trabajo: Teorema de la Representación de Riemann.

Lema 2.1. (Schwarz). Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ verificando que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D(0, 1)$. Entonces:

a) $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D(0, 1)$

b) $|f'(0)| \leq 1$

Además, si existe $a \in D(0, 1)$ con $a \neq 0$ para el cual se da la igualdad en a) o bien si $|f'(0)| = 1$, entonces f es un giro de $D(0, 1)$, es decir $f(z) = ze^{i\alpha}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración. Definamos $g : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ como:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \in D(0, 1) \setminus \{0\} \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

Puesto que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - 0}{z - 0} = f'(0) = g(0)$$

Tenemos que g es continua en 0.

Como f es holomorfa entonces su desarrollo en serie de Maclaurin es:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \dots$$

como $f(0) = 0$ por hipótesis, se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \dots \\ \frac{f(z)}{z} &= \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}z + \frac{f'''(0)}{3!}z^2 + \dots \end{aligned}$$

En consecuencia observando el lado derecho de la igualdad anterior se deduce que: $\frac{f(z)}{z}$ es holomorfa en $D(0, 1)$. Dado que por hipótesis $|f(z)| < 1$, tenemos

$$\text{si } |z| = r \quad (0 < r < 1) \Rightarrow \left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{r}$$

Aplicando el principio del módulo máximo, la desigualdad anterior es también válida para $|z| \leq r$. Sea ahora $0 \neq z \in D(0, 1)$ fijo, entonces

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{r}, \forall r \geq |z|$$

Luego

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow |f(z)| \leq |z|,$$

y si $z = 0$ la última desigualdad se cumple trivialmente por la hipótesis $f(0) = 0$.

Por otro lado, $|g(z)| = |f'(0)| \leq 1$. Se ha probado así las condiciones *a*) y *b*) del enunciado. Si se da la igualdad en *a*) para algún $z_0 \in D(0, 1) \setminus \{0\}$, tenemos que $|f(z_0)| = |z_0|$, es decir, $|g(z_0)| = 1$ y $|g|$ alcanza el máximo en un punto interior. Por el principio del módulo máximo, g es constante en $D(0, 1)$ y deberá ser $g(z) = \lambda$ con $|\lambda| = 1$ y, por tanto, $f(z) = \lambda z$ para todo $z \in D(0, 1)$ y f es un giro.

En el caso de que $|f'(0)| = 1$, se procede de forma análoga al caso anterior para obtener que f es un giro. ■

A continuación determinamos los automorfismos del disco unidad.

Proposición 2.1. *Si $f : D(0, 1) \longrightarrow D(0, 1)$ en una aplicación, entonces f es un isomorfismo conforme si, y solo si, existen $a \in D(0, 1)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$f(z) = e^{i\alpha} \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right)$$

para todo $z \in D(0, 1)$.

Demostración. Por el ejemplo 1.14 se tiene la condición suficiente, por lo cual solo nos resta verificar la condición necesaria.

Si $f(0) = 0$, aplicando el Lema de Schwarz a f y f^{-1} se obtiene que $|f(z)| \leq |z|$ y $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ para todo $z, w \in D(0, 1)$.

Si en la segunda desigualdad sustituimos $w = f(z)$ resulta $|f(z)| \geq |z|$, luego $|f(z)| = |z|$ para todo $z \in D(0, 1)$, y con la segunda parte del Lema de Schwarz se concluye que f es de la forma $f(z) = e^{i\alpha}z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto termina la prueba en el caso $a = f^{-1}(0) = 0$.

Cuando $a = f^{-1}(0) \neq 0$ podemos considerar el isomorfismo conforme $T : D(0, 1) \longrightarrow D(0, 1)$ definido por:

$$T(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

para todo $z \in D(0, 1)$. Como $f \circ T^{-1} : D(0, 1) \longrightarrow D(0, 1)$ es un isomorfismo conforme que cumple $(f \circ T^{-1})(0) = f(T^{-1}(0)) = f(a) = 0$. Por lo demostrado en el caso previo $(f \circ T^{-1})(w) = e^{i\alpha}w$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Sustituyendo $w = T(z)$ con $z \in D(0, 1)$ se obtiene $(f \circ T^{-1})(T(z)) = e^{i\alpha}T(z)$, luego $f(z) = e^{i\alpha}T(z)$. ■

Como consecuencia de este resultado también determinamos los automorfismos del semiplano superior $P = \{z : \text{Im}z > 0\}$

Proposición 2.2. *Si $f : P \rightarrow P$ es una aplicación, entonces f es un isomorfismo conforme si, y sólo si, es de la forma:*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0, \quad \text{para todo } z \in P$$

Demostración. Toda transformación de Möbius f que verifique $f(P) = P$ debe cumplir $f(\partial P) = \partial P$, pues, supongamos que $f(\partial P) \neq \partial P$, entonces $f(\partial P) \subset P$. Como f envía rectas en rectas, entonces existe $L \subset P$ tal que $L = f(\partial P)$, por la biyección de f , se tiene que existe un único $L^* \subset P$ con $f(L^*) = L = f(\partial P)$. De donde $L^* = \partial P$, lo que es una contradicción. Por lo tanto f también preserva la recta real extendida, entonces considerando $z_1 = f^{-1}(0)$, $z_2 = f^{-1}(1)$, $z_3 = f^{-1}(\infty)$, que pertenecen a la recta real y usando la fórmula para la razón doble $f(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$, se obtiene:

$$f(z) = \frac{az + d}{cz + d}$$

en la que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Por otra parte evaluando en $z = i$, se tiene

$$f(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{ai + b}{ci + d} \cdot \frac{d - ci}{d - ci} = \frac{ac + bd + i(ad - bc)}{(c)^2 + (d)^2}$$

como $f(i) \in P$, entonces $ad - bc > 0$.

Si f es de esta forma deja invariante la recta real extendida \mathbb{R}_∞ y, por razones de conexión, $f(P)$ debe ser uno de los semiplanos $P = \{z : \text{Im}z > 0\}$, $-P = \{z : \text{Im}z < 0\}$. Ahora bien, con la condición

$$\text{Im}f(i) = \frac{ad - bc}{d^2 + c^2} > 0$$

se concluye que $f(P) = P$.

Solo falta demostrar que todo isomorfismo conforme $f : P \rightarrow P$ viene dado por una transformación de Möbius. Mediante una transformación de Möbius S podemos conseguir un isomorfismo conforme del plano P en el disco $D(0, 1)$. Entonces $S \circ f \circ S^{-1}$ es un automorfismo conforme del disco unidad $D(0, 1)$ y según la proposición 2.1 existe una única transformación de Möbius T tal que $S \circ f \circ S^{-1}(w) = T(w)$ para todo $w \in D(0, 1)$.

Para cada $z \in P$ es $w = S(z) \in D(0, 1)$ y sustituyendo $(S \circ f \circ S^{-1})(S(z)) = S(f(z)) = T(S(z))$, luego $f(z) = (S^{-1} \circ T \circ S)(z)$ se puede expresar mediante una transformación de Möbius.

■

El siguiente resultado, que se utilizará en la demostración del teorema de Riemann, también es una consecuencia del lema de Schwarz.

Lema 2.2. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega) \subset D(0, 1)$ y sea $a \in \Omega$. La condición: $0 < |f'(a)| = \max \{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset D(0, 1)\}$. Implica que $f(a) = 0$.

Demostración. Sea:

$$T(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

para todo $z \in \Omega$, donde $b = f(a) \in D(0, 1)$. Se tiene $T(D(0, 1)) \subset D(0, 1)$, $g = T \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(\Omega) \subset D(0, 1)$. Según la hipótesis

$$|f'(a)| \geq |g'(a)| = |T'(f(a)) \cdot f'(a)| = |T'(b) \cdot f'(a)| = \frac{|f'(a)|}{1 - |b|^2}$$

Puesto que $0 < |f'(a)|$, se cumple que $1 - |b|^2 \geq 1$. Luego $f(a) = b = 0$

■

El siguiente lema es una consecuencia importante que se usará en la demostración del teorema de Riemann.

Lema 2.3. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ tal que $f(D(0, 1)) \subset D(0, 1)$. Entonces para cada $a \in D(0, 1)$ se cumple:

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

y si en algún $a \in D(0, 1)$, se cumple la igualdad entonces f es un automorfismo conforme de $D(0, 1)$. En particular, si f no es inyectiva se cumple $|f'(0)| \leq 1$.

Demostración. Consideremos el automorfismo conforme de $D(0, 1)$ dado por la transformación de Möbius:

$$T_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

para todo $z \in D(0, 1)$, cuyo inverso es $T_{-a} = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$. Si $b = f(a)$, la función:

$$\varphi = T_b \circ f \circ T_{-a} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$$

cumple:

$$\varphi(0) = T_b(f(T_{-a}(0)))$$

$$\varphi(0) = T_b(f(a))$$

$$\varphi(0) = T_b(b) = 0$$

cumple $\varphi(0) = 0$ y, aplicando el lema de Schwarz, se obtiene que $|\varphi'(0)| \leq 1$ que equivale a:

$$|T'_b(b)f'(a)(T_{-a})'(0)| \leq 1$$

es decir:

$$\left| \frac{1}{1-|b|^2} \cdot f'(a) \cdot (1-|a|^2) \right| \leq 1$$

$$|f'(a)| \leq \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$$

La igualdad se cumple si, y sólo si, $|\varphi'(0)| = 1$ y esto equivale, en virtud del lema de Schwarz, a que φ es de la forma $\varphi(z) = \mu z$ con $|\mu| = 1$. Luego, en este caso, $f = T_{-b} \circ \varphi \circ T_a$ es un automorfismo conforme de $D(0, 1)$.

Con $a = 0$ se obtiene $|f'(0)| \leq 1 - |b|^2 \leq 1$, luego la condición $|f'(0)| = 1$ implica que $f(0) = b = 0$ y esto lleva consigo, según el lema de Schwarz, que f es un giro alrededor de 0. Por lo tanto, si f no es inyectiva debe verificarse que $|f'(0)| < 1$. ■

Como otra aplicación del Lema de Schwarz enunciamos la siguiente proposición, que se demostrará más adelante, esta proposición muestra la idea esencial para la prueba del teorema de Riemann.

Proposición 2.3. *Si $f : \Omega \longrightarrow D(0, 1)$ es un isomorfismo conforme y $a = f^{-1}(0)$ entonces se verifica:*

$$|f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset D(0, 1), g(a) = 0\}$$

El teorema de Riemann afirma que si Ω es un dominio de \mathbb{C} distinto de \mathbb{C} y $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo, entonces existe un isomorfismo conforme $f : \Omega \longrightarrow D(0, 1)$.

2.2 El espacio de las funciones Holomorfas

Para la demostración del teorema de Riemann se tendrán en cuenta varios resultados relacionados con la convergencia uniforme sobre compactos de sucesiones de funciones holomorfas que se estudiarán en esta sección.

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, denotamos por $C(\Omega)$ el conjunto formado por todas las funciones complejas continuas en Ω .

Así mismo, dados $f \in C(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ y un conjunto compacto $K \subset \Omega$, definimos el conjunto

$$V(f, K, \varepsilon) = \{g \in C(\Omega) : |g(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K\}$$

Se quiere ahora definir una topología en $C(\Omega)$ de manera que sus sucesiones convergentes son las mismas que convergen uniformemente sobre cada compacto de Ω .

Definición 2.1. Diremos que un conjunto $A \subset C(\Omega)$ es abierto, es decir $A \in \tau_K$, si para toda $f \in A$ existe un conjunto $V(f, K, \varepsilon) \in \mathcal{B}_f$ tal que $V(f, K, \varepsilon) \subset A$.

Proposición 2.4. *Existe una única topología τ_K en $C(\Omega)$ tal que para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, la familia de conjuntos:*

$$\mathcal{B}_f = \{V(f, K, \varepsilon) : K \subset \Omega \text{ compacto}, \varepsilon > 0\}$$

es una base de entornos abiertos de f .

Demostración. Ahora se comprobará que la familia τ_K de subconjuntos de $C(\Omega)$ es una topología.

Claramente \emptyset y $C(\Omega)$ están en τ_K .

Sea una familia arbitraria $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda \subset \tau_K\}$. Consideremos $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$. Dado $f \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$, existirá $\lambda \in \Lambda$ tal que $f \in F_\lambda$.

Así, existen K compacto y $\varepsilon > 0$ tales que

$$V(f, K, \varepsilon) \subset F_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda,$$

Tomando extremos:

$$V(f, K, \varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

y en consecuencia, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \tau_K$.

Sean $F_1, F_2 \in \tau_K$ y sea $f \in F_1 \cap F_2$. Por definición, existen conjuntos compactos K_1, K_2 y números positivos $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tales que $V(f, K_1, \varepsilon_1) \subset F_1$ y $V(f, K_2, \varepsilon_2)$. Tomando $K = K_1 \cup K_2$ y $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, tenemos que

$$V(f, K, \varepsilon) \subset V(f, K_i, \varepsilon_i), i = 1, 2 \Rightarrow V(f, K, \varepsilon) \subset F_1 \cap F_2.$$

Entonces $F_1 \cap F_2 \in \tau_K$. Por lo tanto τ_K es una topología

Resta ver que la familia \mathcal{B}_f es una base de la topología τ_K . Para ello bastará ver que los conjuntos $V(f, K, \varepsilon)$ son abiertos. Dados $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $K \subset \Omega$ compacto y $\varepsilon > 0$, sea $g \in V(f, K, \varepsilon)$, y definamos $\rho = \max\{|f(z) - g(z)| : z \in K\}$. Es claro que $0 \leq \rho < \varepsilon$. Comprobemos que $V(f, K, \varepsilon - \rho) \subset V(f, K, \varepsilon)$. En efecto

$$\begin{aligned} h \in V(f, K, \varepsilon - \rho) &\Rightarrow |h(z) - f(z)| < \varepsilon - \rho, \text{ para todo } z \in K \\ &\Rightarrow |h(z) - f(z)| \leq |h(z) - g(z)| + |g(z) - f(z)| \\ &\Rightarrow |h(z) - f(z)| < \varepsilon - \rho + \rho = \varepsilon, \text{ para todo } z \in K \\ &\Rightarrow h \in V(f, K, \varepsilon) \end{aligned}$$

Por tanto $h \in V(f, K, \varepsilon)$ es conjunto abierto.

Por definición de convergencia en una sucesión de puntos en un espacio topológico, una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas en Ω converge a $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ en la topología τ_K , si para cada entorno $V(f, K, \varepsilon)$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $f_n \in V(f, K, \varepsilon)$. Equivalentemente, para cada compacto $K \subset \Omega$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$, esto es, $\{f_n\}$ converge a f uniformemente sobre compactos de Ω . Por tanto \mathcal{B}_f es una base para la topología τ_K . ■

Definición 2.2. La topología τ_K , considerada, se llama topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

Como subespacio de $C(\Omega)$, el conjunto $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en el abierto Ω hereda la topología τ_K .

Definición 2.3. Se dice que $\{K_n\}$ es una sucesión exhaustiva de compactos de Ω , si para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset \Omega$ es un compacto, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ y $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Ejemplo 2.1. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$, definimos los conjuntos

$$K_n = \{z \in \Omega : |z| \leq n \text{ y } d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\},$$

donde d denota la distancia euclídea en \mathbb{C} . Se obtiene que los conjuntos K_n son compactos, además satisfacen $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset \Omega$, y su unión es todo el abierto Ω .

Claramente si $K \subset K_n$ y $\frac{1}{n} < \varepsilon$, entonces $V(f, K_n, \frac{1}{n}) \subset V(f, K, \varepsilon)$, para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, luego los conjuntos $V(f, K_n, \frac{1}{n})$ forman una base numerable de entornos de f .

Ahora vamos a probar que la topología de la convergencia uniforme sobre compactos puede definirse por medio de una distancia, es decir, se trata de una topología metrizable.

Proposición 2.5. Sean Ω un abierto de \mathbb{C} y $\{K_n\}$ una sucesión exhaustiva de compactos de Ω . Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, definimos

$$\varphi_n(f) = \max\{|f(z)| : z \in K_n\}$$

Entonces la aplicación $d : \mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varphi_n(f - g)}{1 + \varphi_n(f - g)}, \quad (f, g \in \mathcal{C}(\Omega))$$

es una distancia en $\mathcal{C}(\Omega)$.

Demostración. En efecto,

- i) Claramente $d(f, g) \geq 0$. Si $d(f, g) = 0$, entonces $\varphi_n(f - g) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así sobre cada compacto K_n , es $f = g$. Y así, coincidirán en todo el abierto.
- ii) Dado que $\varphi_n(f - g) = \varphi_n(g - f)$, entonces la simetría es evidente, esto es, $d(f, g) = d(g, f)$.

Para demostrar la desigualdad triangular, observar que: Para reales no negativos r, s, t tales que $r \leq s + t$, entonces

$$\begin{aligned} \text{a. } & \frac{r}{r+1} \leq \frac{s+t}{1+s+t} \\ \text{b. } & \frac{s+t}{1+s+t} \leq \frac{s}{s+1} + \frac{t}{t+1} \end{aligned}$$

En efecto,

a. Como $r \leq s + t$, entonces

$$\begin{aligned} r + rs + rt & \leq s + t + rs + rt \\ r(1 + s + t) & \leq (1 + r)(s + t) \\ \frac{r}{1 + r} & \leq \frac{s + t}{1 + s + t} \end{aligned}$$

b. Dado que $s + 1 > 1$ y $t + 1 > 1$, entonces

$$s + t + 1 > s + 1$$

$$s + t + 1 > t + 1$$

Invirtiéndose, se tiene $\frac{1}{s+t+1} < \frac{1}{s+1}$ y $\frac{1}{s+t+1} < \frac{1}{t+1}$, multiplicando por s y t respectivamente, entonces: $\frac{s}{s+t+1} < \frac{s}{s+1}$ y $\frac{t}{s+t+1} < \frac{t}{t+1}$ y sumando estas dos últimas desigualdades, tenemos

$$\frac{s+t}{s+t+1} < \frac{s}{s+1} + \frac{t}{t+1}$$

iii) Para funciones f, g, h continuas en Ω , por la desigualdad triangular para $|\cdot|$ tenemos que

$$\varphi_n(f - g) \leq \varphi_n(f - h) + \varphi_n(h - g)$$

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varphi_n(f - g)}{1 + \varphi_n(f - g)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varphi_n(f - h) + \varphi_n(h - g)}{1 + \varphi_n(f - h) + \varphi_n(h - g)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varphi_n(f - h)}{1 + \varphi_n(f - h)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varphi_n(h - g)}{1 + \varphi_n(h - g)} \\ &= d(f, h) + d(h, g) \end{aligned}$$



De (i), (ii) y (iii) se concluye que “ d ” es una distancia.

Lema 2.4. Se tiene

i) Dados un compacto $K \subset \Omega$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f, g \in \mathcal{C}(\Omega), d(f, g) < \delta \Rightarrow g \in V(f, K, \varepsilon)$$

ii) Dado $\delta > 0$ existen un compacto $K \subset \Omega$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$f, g \in \mathcal{C}(\Omega), g \in V(f, K, \varepsilon) \Rightarrow d(f, g) < \delta$$

Como consecuencia, la topología de la convergencia uniforme sobre compactos es metrizable.

Demostración. En efecto,

i) Para el compacto dado, existirá $m \in \mathbb{N}$ en la sucesión exhaustiva de compactos (K_n) en el que

$$K \subset \overset{\circ}{K}_m \subset K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}$$

Tomemos $\delta > 0$ verificando $1 - 2^m \delta > 0$ y $\frac{2^m \cdot \delta}{1 - 2^m \delta} < \varepsilon$. Entonces si $d(f, g) < \delta$, se tiene que

$$\frac{\varphi_m(f - g)}{1 + \varphi_m(f - g)} < 2^m \cdot d(f, g) < 2^m \cdot \delta$$

Esto es debido a que,

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varphi_n(f - g)}{1 + \varphi_n(f - g)} > \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varphi_n(f - g)}{1 + \varphi_n(f - g)}$$

tomando extremos, se tiene la desigualdad anterior.

Y por tanto,

$$\varphi_m(f - g) = \frac{\frac{\varphi_m(f - g)}{1 + \varphi_m(f - g)}}{1 - \frac{\varphi_m(f - g)}{1 + \varphi_m(f - g)}} < \frac{2^m \delta}{1 - 2^m \delta} < \varepsilon$$

En consecuencia, $g \in V(f, K, \varepsilon)$

ii) Dados $\delta > 0$, elegimos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \frac{\delta}{2}$. Tomemos $K = K_m$ y $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$.

Entonces para $g \in V(f, K, \varepsilon)$, tenemos que $\varphi_m(f - g) < \frac{\delta}{2}$. Deducimos

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varphi_n(f - g)}{1 + \varphi_n(f - g)} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varphi_n(f - g)}{1 + \varphi_n(f - g)} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varphi_n(f - g)}{1 + \varphi_n(f - g)} \\ &\leq \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2^m} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

Hemos probado que cada entorno básico de un punto en la topología de la convergencia uniforme en compactos contiene un entorno básico de dicho punto en la topología definida por la distancia y recíprocamente, por tanto ambas coinciden. ■

Definición 2.4. Una familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ es equicontinua en un punto $z_0 \in \Omega$ cuando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $|z - z_0| < \delta$:

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

para todo $z \in D(a, r)$ y toda $f \in \mathcal{F}$

Se dice que \mathcal{F} es equicontinua en Ω cuando es equicontinua en cada punto de Ω .

Por otro lado, recordemos la siguiente definición.

Definición 2.5. Sea $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}(\Omega)$ es relativamente compacta si cualquier sucesión de puntos de \mathcal{F} tiene una subsucesión convergente en $\mathbb{C}(\Omega)$; equivalentemente, $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto.

Teorema 2.1. (Ascoli-Arzelá) Una familia \mathcal{F} de $C(\Omega, E)$ es relativamente compacta para la topología τ_k si, y sólo si, es puntualmente acotado y equicontinua.

Demostración. Ver [6]. ■

Definición 2.6. Una familia \mathcal{F} de $\mathcal{H}(\Omega)$ se dice que es normal cuando de cada sucesión $\{f_n\}$ de \mathcal{F} se puede extraer una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos o, equivalentemente, si \mathcal{F} es un subconjunto relativamente compacto de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Con el fin de caracterizar las familias normales, para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $K \subset \Omega$ compacto, se introduce la norma:

$$\|f\|_K = \max\{|f(z)| : z \in K\}$$

.

Definición 2.7. Una familia \mathcal{F} de $\mathcal{H}(\Omega)$ se dice que es acotada cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ el conjunto $\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\}$ está acotada, es decir, cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C_K > 0$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$ y cada $z \in K$ se cumple $|f(z)| \leq C_K$.

Demostraremos a continuación el teorema de Montel, que usaremos en la demostración del teorema de Riemann.

Teorema 2.2. (Montel) Una familia $\mathcal{F} \in \mathcal{H}(\Omega)$ es normal si, y sólo si, está acotada.

Demostración. Supongamos que \mathcal{F} es normal pero no acotada. Entonces existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que:

$$\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} = +\infty$$

es decir, existe una sucesión $\{f_n\}$ en \mathcal{F} tal que $\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n$.

Como \mathcal{F} es normal, se tiene una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k} \rightarrow f$. Pero esto implica que $\sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Si $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in K$,

$$n_k \leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + M$$

Luego el lado derecho converge a M , lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que \mathcal{F} está acotada. Usaremos el teorema de Ascoli-Arzelá para demostrar que \mathcal{F} es normal. Es claro que \mathcal{F} es relativamente compacto pues basta utilizar la condición de que \mathcal{F} es acotado usando el compacto $K = z$. Debemos mostrar pues que \mathcal{F} es equicontinua en cada punto de Ω . Dado $a \in \Omega$, elegimos $r > 0$ de modo que $K = \overline{D(a, r)} \subset \Omega$. Como \mathcal{F} se supone acotada, $\sup\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\} = M < +\infty$. Si

$|z - a| < \frac{r}{2}$, usando la fórmula integral de Cauchy para la circunferencia: $C(t) = a + re^{it}$, se tiene

$$f(z) - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{f(w)}{w - z} - \frac{f(w)}{w - a} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)(z - a)}{(w - z)(w - a)} dw$$

Entonces

$$|f(z) - f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)(z - a)}{(w - z)(w - a)} dw \right|$$

Como $z \in D(a, \frac{r}{2})$, para $w \in C(a, r)$ se tiene

$$\begin{aligned} |(w - z)(w - a)| &= |((w - a) - (z - a))(w - a)| \\ &= |(w - a) - (z - a)|r \\ &\geq (|w - a| - |z - a|)r \\ &\geq \frac{r^2}{2} \end{aligned}$$

Luego, como $|f(w)| \leq M$

$$\left| \frac{f(w)(z - a)}{(w - z)(w - a)} \right| \leq \frac{M|z - a|}{\frac{r^2}{2}} = \frac{2M}{r^2}|z - a|$$

Se obtiene así la desigualdad

$$|f(z) - f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{2M}{r^2}|z - a| dw = \frac{2M}{2\pi r^2}|z - a|2\pi r = \frac{2M}{r}|z - a|$$

Esta desigualdad es válida para cada $z \in D(a, \frac{r}{2})$ y cada $f \in \mathcal{F}$ y esto implica que la familia \mathcal{F} es equicontinua en a . ■

Completamos el análisis sobre sucesiones convergentes de funciones holomorfas demostrando el Teorema de Hurwitz, el cual es una consecuencia del Teorema de Rouché. A partir del Teorema de Hurwitz, deducimos el corolario (2.1) y (2.2) que son claves para demostrar el Teorema de Riemann.

Una pregunta natural relacionada con la convergencia uniforme sobre compactos es la siguiente: si $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre compactos en $\mathcal{H}(\Omega)$ hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, ¿qué propiedades de las funciones f_n se transmiten al límite?. El teorema de Hurwitz y el corolario (2.1) proporcionan respuestas cuando la propiedad considerada en las funciones f_n es la inyectividad o la ausencia de ceros.

Teorema 2.3. (Hurwitz) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a, r)}$ un disco cerrado tal que $f(z) \neq 0$ cuando $|z - a| = r$. Entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m$, las funciones f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(a, r)$ contados según sus multiplicidades.

Demostración. Llamemos $\varepsilon = \min\{|f(z)| : z \in C(a, r)\} > 0$. Existe entonces cierto n_ε tal que $n \geq n_\varepsilon$, se cumple $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|$ para todo $z \in C(a, r)$.

Podemos aplicar entonces el Teorema de Rouché. Como ninguna de las funciones tiene polos, deducimos de dicho teorema que f_n y $f(z)$ tiene el mismo número de ceros en $D(a, r)$ contados según sus multiplicidades para todo $n > n_\varepsilon$, como queríamos probar. ■

Corolario 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que convergen uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f_n no se anula en Ω para ningún $n \in \mathbb{N}$, entonces, o bien f es idénticamente nula, o bien f no se anula en Ω .

Demostración. Supongamos que f no es idénticamente nula. Entonces, si existiera $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$, f tendría un cero aislado y por tanto existiría cierto disco $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$, tal que f no se anula en $\overline{D^*(a, r)}$. En particular, f no se anula en $C(a, r)$. Aplicando el Teorema de Hurwitz, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que f_m y f tienen el mismo número de ceros en $D(a, r)$, lo cuál es absurdo ya que f_m no se anula por hipótesis y f sí lo hace. ■

Corolario 2.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión de funciones inyectivas en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces bien f es constante, o bien f es inyectiva.

Demostración. Supongamos que f no es constante. Fijado $a \in \Omega$, la sucesión de funciones $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$ no se anula en $\Omega \setminus \{a\}$ por la inyectividad de las funciones $\{f_n\}$.

Podemos aplicar por tanto el corolario anterior para concluir que la función $g(z) = f(z) - f(a)$ no se anula en $\Omega \setminus \{a\}$, pues en caso contrario sería idénticamente nula y por tanto f sería constante, lo cual hemos descartado.

Concluimos entonces que $f(z) \neq f(a)$ para cada $z \neq a$. Como esto vale para todo $a \in \Omega$, concluimos que f es inyectiva. ■

2.3 El Teorema de Riemann

En esta sección demostraremos el Teorema de Riemann (también llamado teorema fundamental de la representación conforme) según el cual para todo dominio Ω de \mathbb{C} distinto de \mathbb{C} tal que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo existe un isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow D(0, 1)$.

Por último demostraremos un teorema que caracteriza a los abiertos simplemente conexos como consecuencia del Teorema de Riemann. Primero recordemos el siguiente teorema que nos permitirá disponer de raíces cuadradas de funciones holomorfas.

Teorema 2.4. *Las siguientes propiedades de un dominio Ω de \mathbb{C} son equivalentes*

- a. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
- b. Cada ciclo regular a trozos Γ en Ω , y cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se cumple $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.
- c. Cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ tiene logaritmo holomorfo, es decir, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$.

Demostración. Ver[7]. ■

Sea Ω un dominio de \mathbb{C} y supongamos que cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ posee un logaritmo holomorfo en Ω , entonces tiene raíz cuadrada. Dichos dominios tienen la siguiente propiedad de la raíz cuadrada denotada por $[RC]$

$[RC]$: para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$.

Por lo demostrado en el Lema 1.1. se tiene que si f es una función holomorfa y no nula

en Ω y g es un logaritmo holomorfa de f en Ω , entonces la función $z \rightarrow e^{\frac{g(z)}{2}}$ es una raíz cuadrada holomorfa de f en Ω , se harán uso de los siguientes lemas para la demostración del Teorema de Riemann.

Lema 2.5. Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ abierto conexo con la propiedad $[RC]$. Entonces existe una función inyectiva $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset D(0, 1)$.

Demostración. La hipótesis $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ permite elegir un punto $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ con el que obtenemos la función holomorfa $z - b$ que no se anula en Ω . Según la propiedad $[RC]$ existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $(\varphi(z))^2 = z - b$ para todo $z \in \Omega$. Debido a que φ^2 es inyectiva entonces $(\varphi^2)' = 2\varphi\varphi' \neq 0$, como $\varphi \neq 0$, entonces $\varphi' \neq 0$ y por el teorema de la función inversa φ es inyectiva y, por lo tanto, no es constante.

Como Ω es conexo, el teorema de la aplicación abierta permite afirmar que la imagen $\varphi(\Omega)$ es abierta y, por lo tanto, contiene algún disco $D(a, r) \subset \varphi(\Omega)$ para $r > 0$ y $a \in \mathbb{C}$. Observar que la condición $0 \notin \varphi(\Omega)$ implica que $0 < r \leq |a|$.

A continuación verificamos que $D(-a, r) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$. Razonamos por reducción al absurdo suponiendo que $\varphi(z_1) \in D(-a, r)$ para algún $z_1 \in \Omega$. En este caso $-\varphi(z_1) \in D(a, r) \subset \varphi(\Omega)$ luego existe $z_2 \in \Omega$ tal que $-\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Elevando al cuadrado se obtiene que $z_1 = z_2$, al ser φ^2 inyectiva.

Como φ es inyectiva y $z_1 = z_2$, entonces $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Sustituimos y se tiene que $\varphi(z_1) = -\varphi(z_1)$, es decir, $\varphi(z_1) = 0$. Por lo tanto, $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) = 0$, lo que contradice la condición $0 \notin \varphi(\Omega)$.

La propiedad $D(-a, r) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$ nos asegura que $|a + \varphi(z)| > r$ para todo $z \in \Omega$. Entonces con $0 < \rho < r$ podemos definir la función:

$$f(z) = \frac{\rho}{a + \varphi(z)}$$

para todo $z \in \Omega$.

Es claro que la función f es holomorfa pues φ es holomorfa además f es inyectiva, pues si $f(z_1) = f(z_2)$, entonces $\frac{\rho}{a + \varphi(z_1)} = \frac{\rho}{a + \varphi(z_2)}$, de donde $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ y como

φ es inyectiva entonces $z_1 = z_2$.

Además

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{\rho}{a + \varphi(z)} \right| \\ &\leq \frac{|\rho|}{r} \\ &< \frac{r}{r} = 1 \end{aligned}$$

para todo $z \in \Omega$, de donde $f(\Omega)$ está contenida en el disco unidad. ■

Una vez probada que la familia:

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega), f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0, 1)\}$$

es no vacía, probaremos que existe una función $h \in \mathcal{F}$ tal que $|h'(a)| \geq |f'(a)|$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Lema 2.6. Sea Ω un dominio de \mathbb{C} distinto de \mathbb{C} con la propiedad $[RC]$ y:

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega), f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0, 1)\}$$

entonces, dado $a \in \Omega$, existe $h \in \mathcal{F}$ que verifica:

$$|h'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \mathcal{F}\}$$

Demostración. La familia \mathcal{F} es no vacía (en virtud del lema 2.5) y acotada, según el teorema de Montel, es normal. Esto significa que $\overline{\mathcal{F}}$ es un conjunto compacto en $\mathcal{H}(\Omega)$. La aplicación:

$$\phi_a : \overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ ; \phi_a(f) = |f'(a)|$$

es continua, toma valores reales y está definida en un compacto por lo que tiene que alcanzar un máximo absoluto, es decir, existe $h \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que:

$$\phi_a(h) = |h'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \overline{\mathcal{F}}\}$$

Ahora probaremos que $h \in \mathcal{F}$. Como la topología τ_k es metrizable y $h \in \overline{\mathcal{F}}$, existe un sucesión $\{h_n\}$ de \mathcal{F} que converge uniformemente sobre compactos hacia h .

Cada h_n es inyectiva y según el corolario 2.2 podemos afirmar que, o bien h es inyectiva,

o bien h es constante. La segunda alternativa no se puede dar porque en ese caso para todo $f \in \mathcal{F}$ sería $f'(a) = 0$ y esto es imposible porque f es inyectiva.

Por otra parte, como las funciones h_n toman valores en $D(0, 1)$, es decir, $|h_n(z)| < 1$ para cada $z \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $|h(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$.

Como h no es constante (por que es inyectiva) el teorema de la aplicación abierta permite concluir que $|h(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega$, es decir, $h(z) \in D(0, 1)$ para cada $z \in \Omega$, o lo que es lo mismo, $h(\Omega) \subset D(0, 1)$.

Hemos demostrado que h debe ser inyectiva y que $h(\Omega) \subset D(0, 1)$. Por tanto, $h \in \mathcal{F}$. ■

Ahora demostraremos que la aplicación h del lema 2.5 es sobreyectiva.

De esta manera habremos encontrado una biyección conforme entre Ω y $D(0, 1)$ y por tanto el isomorfismo conforme buscado.

Teorema 2.5. (*Versión preliminar del teorema de Riemann*). *Todo abierto conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ con la propiedad $[RC]$ es isomorfo al disco $D(0, 1)$*

Demostración. En virtud de los lemas 2.5 y 2.6, fijado un punto $a \in \Omega$, la familia

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega), f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0, 1)\}$$

es no vacía y $h \in \mathcal{F}$ que cumple $|h'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \mathcal{F}\}$. Demostraremos que $h(\Omega) = D(0, 1)$.

En efecto, suponiendo que h no es sobreyectiva, esto es, existe $b \in D(0, 1) \setminus h(\Omega)$ en ese caso podemos considerar el isomorfismo conforme $T_b : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ definido mediante la transformación de Möbius:

$$T_b(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

cuyo transformación inversa es T_{-b} . La composición $T_b \circ h : \Omega \rightarrow D(0, 1)$, además es inyectiva, pues h lo es y $T_b \circ h \in \mathcal{H}(\Omega)$, luego $T_b \circ h \in \mathcal{F}$.

Como $b \notin h(\Omega)$, entonces $0 \notin T_b \circ h(\Omega)$, y según la hipótesis $[RC]$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = T_b \circ h$. Observar que g es inyectiva (porque g^2 lo es) y, por lo tanto, $g \in \mathcal{F}$.

Con $c = g(a)$ definimos el isomorfismo conforme $T_c : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$:

$$T_c(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

cuyo inverso es T_{-c} y $T_c(c) = 0$. Utilizando la función $p : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$, definida como $p(z) = z^2$, Así definidas, tenemos $p \circ g = T_b \circ h$, es decir $h = T_{-b} \circ p \circ g$. Podemos escribir $h = (T_{-b} \circ p \circ T_{-c}) \circ (T_c \circ g) = F \circ h_1$, observar que $h_1 \in \mathcal{F}$, donde $F = T_{-b} \circ p \circ T_{-c}$ y $h_1 = T_c \circ g$. Como $F : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ no es inyectiva (porque $p(z) = z^2$ no lo es), con el lema 2.3 se obtiene que $|F'(0)| < 1$, entonces, usando la regla de la cadena se tiene que:

$$|h'(a)| = |F'(h_1(a)) \cdot h_1'(a)| = |F'(0) \cdot h_1'(a)| < |h_1'(a)|$$

que entra en contradicción con la hipótesis que $|h'(a)|$ maximice la derivada. Esto concluye la prueba de que h es sobreyectiva y por tanto el teorema ha sido probado. ■

Ahora con todos los ingredientes listos ha llegado la hora de enunciar y demostrar el teorema que nombre a este trabajo.

Teorema 2.6. *Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ abierto conexo, con $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ conexo. Entonces para cada $a \in \Omega$ existe un único isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ que cumple $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.*

Demostración. Comenzaremos demostrando la existencia. Según el teorema 2.3 cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ tiene un logaritmo holomorfo y, por lo tanto, una raíz cuadrada holomorfa, de modo que se cumpla la propiedad [RC]. El isomorfismo conforme $h : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ obtenido en la demostración del teorema 2.5 cumple:

$$|h'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \mathcal{H}(\Omega), f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0, 1)\}$$

Como consecuencia del lema 2.2, $h(a) = 0$.

Por otra parte de la definición:

$$|h'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \mathcal{H}(\Omega), f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0, 1)\} \quad (2.1)$$

De (2.1) se sigue que $h'(a) \in \mathbb{C}$, luego podemos escribir $h'(a) = re^{i\alpha}$ para $r > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Definamos $f(z) = e^{-i\alpha}h(z)$

$$\text{i) } f(a) = e^{-i\alpha}h(a) = e^{-i\alpha} \cdot 0 = 0$$

$$\text{ii) } f'(z) = e^{-i\alpha}h'(a)$$

$$f'(a) = e^{-i\alpha} h'(a) = e^{i\alpha} r e^{i\alpha} = r > 0$$

De (i) y (ii) se sigue que f así definida cumple la conclusión del teorema.

Pasamos ahora a demostrar la unicidad. Si $g : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ es otro isomorfismo conforme que verifica $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$, podemos considerar el automorfismo conforme $\varphi = f \circ g^{-1} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ tal que $\varphi(0) = f(g^{-1}(0)) = f(a) = 0$.

De la proposición 2.1. se sigue que φ es de la forma $\varphi(z) = \mu z$ con $|\mu| = 1$, y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \mu &= \varphi'(0) = f'(g^{-1}(0)) \cdot (g^{-1})'(0) \\ &= f'(a) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} \\ &= f'(a) \cdot \frac{1}{g'(a)} = 1 \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que por ser ambos isomorfismos conformes, los dos maximizan la deriva en a y por tanto $|f'(a)| = |g'(a)|$. Además, como ambos son reales positivos, $f'(a) = g'(a)$. Luego $\mu = (f \circ g^{-1})'(0) = 1$, se sigue que $\varphi(z) = z$, de donde $\phi(z) = (f \circ g^{-1})(z) = z$, para cada $z \in D(0, 1)$ o equivalentemente, que $f = g$. Concluye así la prueba de la unicidad y por tanto del teorema. ■

El siguiente teorema nos permitirá caracterizar a los abiertos simplemente conexos.

Teorema 2.7. *Las siguientes propiedades de un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ son equivalentes*

- a) Ω es homeomorfo al disco unidad $D(0, 1)$.
- b) Ω es simplemente conexo.
- c) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.

Demostración. a) \Rightarrow b) Sea $\Psi : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ un homeomorfismo. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado en Ω , entonces debemos probar que γ es Ω -homotópico a un camino constante. Definamos:

$$\begin{aligned} H &: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega \\ H(s, t) &= \Psi^{-1}(s\Psi(\gamma(t))) \end{aligned}$$

Entonces H así definida es continua; además cumple que $H(0, t) = \Psi^{-1}(0)$ es una curva constante; además $H(1, t) = \gamma(t)$ y $H(s, 0) = \Psi^{-1}(s\Psi(\gamma(0))) = \Psi^{-1}(s\Psi(\gamma(1))) = H(s, 1)$ porque $\gamma(0) = \gamma(1)$. Entonces, γ es Ω -homotópica a una curva constante. Por lo tanto, Ω es simplemente conexo. $b) \Rightarrow c)$ Ver [7].

$c) \Rightarrow a)$ Cuando $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, entonces por el Teorema de Riemann, Ω es conformemente equivalente al disco unidad $D(0, 1)$ y por tanto Ω es homeomorfo al disco unidad $D(0, 1)$. Por otra parte si $\Omega = \mathbb{C}$, considerando el homeomorfismo $\phi : \mathbb{C} \rightarrow D(0, 1)$ definida como $\phi(z) = \frac{z}{1 + |z|}$, la cual es biyectiva con inversa $\phi^{-1} = \frac{z}{1 - |z|}$, se observa que ϕ y ϕ^{-1} son continuas. ■

Una pregunta natural y además importante (por cuestiones relacionadas con la solución del problema de Dirichlet que veremos en el próximo capítulo) es la de si la aplicación de Riemann puede extenderse a la frontera de Ω con continuidad e inyectividad. En general la respuesta a esta pregunta es negativa, pero si suponemos que Ω es acotado y su borde $\partial\Omega$ es una curva cerrada simple, entonces es positiva. El Teorema de Carathéodory nos da la respuesta a esta pregunta.

Teorema 2.8 (Carathéodory). *Sean Ω abierto acotado de \mathbb{C} y $f : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ isomorfismo conforme. Entonces f puede extenderse a un homeomorfismo entre $\overline{\Omega}$ y $\overline{D(0, 1)}$ si y sólo si Ω es una curva cerrada simple.*

Demostración. Ver [1], [7]. ■

2.4 Equivalencia con el problema de Dirichlet

En esta sección probaremos la equivalencia del problema de Dirichlet con el Teorema de Riemann, en el sentido de que a partir de la solución de problema de Dirichlet en un abierto podemos construir explícitamente el isomorfismo conforme que lo envía al disco unidad, y recíproamente, si conocemos este isomorfismo conforme podemos resolver el problema de Dirichlet para el disco.

Para ello necesitamos tener algunos resultados sobre funciones armónicas y sus propiedades.

Definición 2.8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^2 en Ω . Se dice que u es armónica cuando

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

para todo $(x, y) \in \Omega$.

Observación 2.1. Esta ecuación, una de las más famosas en las matemáticas aplicadas, se conoce como la ecuación de Laplace con dos variables. La suma $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ de las derivadas de segundo orden (2,2) se denota por Δu y se llama laplaciano de u . Entonces la ecuación de Laplace se abrevia como $\Delta u = 0$.

Al conjunto de las funciones armónicas la denotaremos por $A(\Omega)$.

Proposición 2.6. Sea la función compleja $f = u + iv$ holomorfa en un dominio Ω de \mathbb{C} . Entonces las funciones $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son funciones armónicas en Ω .

Demostración. Por la fórmula integral de Cauchy, sabemos que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, luego en particular, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Además por ser f holomorfa entonces verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Derivando estas igualdades con respecto a x y con respecto a y respectivamente, se obtiene, $u_{xx} = v_{yx}$ y $u_{yy} = -v_{xy}$. Como $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, las derivadas parciales cruzadas v_{yx}

y v_{xy} son iguales, es decir $v_{xy} = v_{yx}$. Por tanto, sumando: $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$, de donde $\Delta u = 0$.

De manera análoga, se obtiene que v es armónica. ■

Introduciremos a continuación el concepto de armónico conjugado, que nos será de gran utilidad más adelante.

Definición 2.9. Sea $u \in A(\Omega)$. Si existe $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa, se dice que v es una función armónica conjugada de u en Ω .

Proposición 2.7. Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $u \in A(\Omega)$, si v_1 y v_2 son dos funciones armónicas conjugadas de u , entonces $v_1 - v_2$ es constante.

Demostración. Por definición de armónica conjugada, las funciones $u + iv_1$ y $u + iv_2$ son ambas holomorfas y por tanto su diferencia también lo será. Pero $i(v_1 - v_2)(\Omega)$ es constante o abierto por el Teorema de la aplicación abierta. No puede ser abierta pues está contenido en la recta $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$, luego $v_1 - v_2$ es constante. ■

El siguiente ejemplo nos muestra que no toda función armónica posee un armónico conjugado.

Ejemplo 2.2. La función $\log|z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pues es localmente la parte real de cualquier determinación holomorfa de $\log(z)$. Debemos observar que para una función sea armónica es suficiente con que lo sea localmente.

Se demuestra que $\log|z|$ no tiene armónica conjugada en Ω (ver [6]).

Es lógico buscar entonces alguna condición que nos garantice la existencia de armónicas conjugadas. Recordemos primero que un abierto Ω es simplemente conexo si $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo, o equivalentemente si toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene una primitiva holomorfa en Ω .

Proposición 2.8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces toda función armónica u tiene una función armónica conjugada en Ω .

Demostración. Sea $u \in A(\Omega)$. Entonces la función $f = u_x - iu_y$ es holomorfa en Ω , por un lado u es de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ pues u es de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$ ya que es armónica y por otro lado, cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann pues $u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y$ por ser u armónica y $(u_x)_y = u_{xy} = u_{yx} = (u_y)_x$ por la igualdad de las derivadas cruzadas que sigue de que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Por ser Ω simplemente conexo, se deduce la existencia de una función holomorfa $F = U + iV$ tal que $F' = f = U_x - iU_y$. Aplicando a F las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos que $U_x - iU_y = u_x - iu_y$, es decir, $(U - u)_x = 0$ y $(U - u)_y = 0$. Dicho de otro modo, $U = u + k$ en Ω , donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

Definiendo finalmente $g = F - k$ se tiene que $Re\,g = Re(F - k) = u + k - k = u$, $Im\,g = Im(F) = V$. Por tanto V es la armónica conjugada de u . ■

El siguiente resultado será de gran utilidad en la demostración del problema de Dirichlet.

Proposición 2.9. Sean $\Omega_1, \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ abiertos, $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $u \in \mathcal{A}(\Omega_2)$. Entonces, $u \circ f \in \mathcal{A}(\Omega_1)$. Es decir, la composición de una función holomorfa con una función armónica es una función armónica.

Demostración. Veremos que $u \circ f$ es armónica en $D(a; \delta)$ para cada $a \in \Omega$. Fijemos a y sea $b = f(a)$ y $r > 0$ tal que $D(b; r) \subset \Omega_2$. Como u es armónica, existe $g \in \mathcal{H}(D(b; r))$ tal que $Re\,g(z) = u(z)$. Aplicando ahora la continuidad de f , existe $\delta > 0$ tal que $f(D(a; \delta)) \subset D(b; r)$. Concluimos entonces que $g \circ f|_{D(a; \delta)} \in \mathcal{H}(D(a; \delta))$ y además $Re(g \circ f|_{D(a; \delta)}) = u \circ f|_{D(a; \delta)}$, con lo cual $u \circ f$ es armónica. ■

Ahora se enuncia el problema de Dirichlet.

El problema de Dirichlet. Dado Ω un abierto del plano complejo, y dada una función continua $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ¿existe una función $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide con φ en $\partial\Omega$ y es armónica en el interior de Ω ?

Este problema tiene solución cuando Ω es abierto simplemente conexo, acotado y su frontera es una curva cerrada simple.

Veamos ahora como la solución al problema de Dirichlet implica el teorema de la representación conforme de Riemann.

2.4.1 Del problema de Dirichlet al Teorema de Riemann

Suponemos ahora que disponemos de la solución del problema de Dirichlet para un abierto simplemente conexo en Ω , cuya frontera es una curva cerrada simple.

Teorema 2.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, acotado y cuya frontera es una curva cerrada simple, entonces existe un isomorfismo conforme entre Ω y el disco unitario.*

Demostración. Fijamos un punto z_0 en Ω y consideremos la solución al problema de Dirichlet $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ con condición de frontera

$$u(z) = \log |z - z_0|, \quad \text{para todo } z \in \partial\Omega$$

La función $g(z) = u(z) + \log \frac{1}{|z - z_0|}$ es armónica en $\Omega \setminus \{z_0\}$, ya que, u siempre lo es por ser solución del problema de Dirichlet y $\log \frac{1}{|z - z_0|}$ lo es para $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Se tiene además que $g(z)$ tiende a cero en $\partial\Omega$, pues $u(z) = \log |z - z_0|$ en la frontera de Ω por ser la condición de frontera tomada, la función $g(z) > 0$ ya que si existiera cierto $w \in \Omega \setminus \{z_0\}$ tal que $g(w) = 0$, entonces $g = 0$ sería constante, lo cual sería un absurdo.

Por otro lado si $g(z) < 0$, entonces esta función tendría un mínimo, es decir existen $a \in \Omega \setminus \{z_0\}$ y $\rho > 0$ de forma que $D(a, \rho) \subset \Omega \setminus \{z_0\}$ y $0 < |g(a)| \leq |g(z)|$ para $z \in D(a, \rho)$. Definimos $h : D(a, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ como $h(z) = \frac{1}{g(z)}$. Es evidente que $h \in \mathcal{H}(D(a, \rho))$, puesto que $g(z) \neq 0$ para $z \in D(a, \rho)$. Además el módulo de h tiene un máximo absoluto en $D(a, \rho)$, porque

$$|h(z_0)| = \frac{1}{|g(z_0)|} \geq \frac{1}{|g(z)|} = h(z), \quad z \in D(a, \rho)$$

Por el principio del módulo máximo h es constante en $D(a, \rho)$, luego también lo es g . Por el principio de identidad se sigue que g es constante en $\Omega \setminus \{z_0\}$, la cual nuevamente sería un absurdo. Por lo tanto $g(z) > 0$. Definamos ahora la función:

$$f_{z_0}(z) = e^{-[g(z)+i\widehat{g}(z)]}$$

Veamos primero que esta función está bien definida. En efecto, sabemos que

$$u(z) = g(z) - \log \frac{1}{|z - z_0|}$$

la cual es armónica, como Ω es simplemente conexo, existe entonces su armónica conjugada, es decir, existe $\widehat{u}(z) \in \mathcal{A}(\Omega)$ tal que $u(z) + i\widehat{u}(z)$ es holomorfa.

Además, como $\arg \frac{1}{z - z_0}$ es la armónica conjugada de $\log \frac{1}{|z - z_0|}$, deducimos que la función

$$\widehat{g}(z) = \widehat{u}(z) + \arg \left(\frac{1}{z - z_0} \right)$$

es una armónica conjugada de $g(z)$ en $\Omega \setminus \{z_0\}$. Esta función es una función multivaluada con ramas separadas entre sí por múltiplos de 2π (debido a la función argumento), lo cual supone un problema. Sin embargo, esto se soluciona con la exponencial, que tiene periodo $2\pi i$, ya que

$$\begin{aligned} f_{z_0}(z) &= e^{-[g(z)+i\widehat{g}(z)]} \\ &= e^{-[u(z)+\log \frac{1}{|z-z_0|} + i\widehat{u}(z) + i\arg(\frac{1}{|z-z_0|})]} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$= e^{-[u(z)+i\widehat{u}(z)]} e^{-[\log \frac{1}{|z-z_0|} + i\arg(\frac{1}{z-z_0})]} \quad (2.4)$$

$$= e^{-[u(z)+i\widehat{u}(z)]} e^{-\log \frac{1}{z-z_0}} \quad (2.5)$$

$$= (z - z_0) e^{-[u(z)+i\widehat{u}(z)]} \quad (2.6)$$

Por lo tanto, $f_{z_0}(z)$ está bien definido.

Se debe observar también que el exponente $-(g(z) + i\widehat{g}(z)) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ por construcción y por tanto $f_{z_0}(z)$ es también holomorfa en este conjunto. Además $f_{z_0}(z_0) = 0$, f es además continua en Ω y por tanto $f_{z_0}(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se tiene que $f_{z_0}(z_0)$ es un cero simple y además no se anula en más puntos de Ω .

Recordemos que $g(z) > 0$, esto nos garantiza que

$$|f_{z_0}(z)| = e^{-g(z)} < 1$$

es decir, la imagen de $f_{z_0}(z)$ está contenida en el disco unidad.

Solo queda probar que esta función es efectivamente una biyección.

Probaremos en primer lugar que f es inyectiva.

En efecto, usando el hecho que $|f'| = 0 \Leftrightarrow f' = 0$. Si demostramos que $|f'| \neq 0 \Rightarrow f' \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es inyectiva. Se tiene que:

$$f_{z_0}(z) = e^{-[g(z)+i\widehat{g}(z)]}$$

Entonces,

$$f'_{z_0}(z) = -[g'(z) + i\widehat{g}'(z)]e^{-[g(z)+i\widehat{g}(z)]}$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} |f'_{z_0}(z)| &= |-[g'(z) + i\widehat{g}'(z)]e^{-[g(z)+i\widehat{g}(z)]}| \\ |f'_{z_0}(z)| &= |g'(z) + i\widehat{g}'(z)||e^{-g(z)}| \end{aligned}$$

Supongamos que $|f'_{z_0}(z)| = 0$.

Puesto que: $e^{-g(z)} > 0, \forall z \in \Omega$, se tiene que:

$|f'_{z_0}(z)| = 0 \iff g'(z) + i\widehat{g}'(z) = 0 \iff g'(z) = -i\widehat{g}'(z)$, lo cual es un absurdo.

De donde se sigue que $|f'_{z_0}(z)| \neq 0 \implies f'_{z_0}(z) \neq 0$.

Por lo tanto, $f_{z_0}(z)$ es inyectiva.

Ahora probaremos que f es sobreyectiva, la demostración se hará por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existe $b \in D(0, 1)$ tal que $b \notin f_{z_0}(\Omega)$.

Consideremos la función $S_b \circ f_{z_0} : \Omega \longrightarrow D(0, 1) \setminus \{0\}$, donde S_b es el isomorfismo usual del disco unidad en sí mismo que envía b al cero, esta función cumple que $|S_b \circ f_{z_0}| = 1$ para cada $z \in \partial\Omega$, ya que por definición $f_{z_0}(z)$ transforma puntos de $\partial\Omega$ en puntos de la frontera del disco, pues si $z \in \partial\Omega$ entonces $g(z) = 0$ luego $|f_{z_0}| = 1$; además S_b transforma puntos de la frontera del disco en puntos de la frontera del disco. Entonces, por principio del módulo máximo, $|S_b \circ f_{z_0}(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$.

Análogamente, la función $(S_b \circ f_{z_0})^{-1} : D(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \Omega$ cumple de igual manera que $|(S_b \circ f_{z_0}(z))^{-1}| = 1$ para los puntos de frontera y por tanto $|(S_b \circ f_{z_0}(z))^{-1}| \leq 1$

para todo $z \in \Omega$, es decir, $|S_b \circ f_{z_0}(z)| \geq 1$ para todo $z \in \Omega$. Concluimos, teniendo en cuenta ambas desigualdades, que $|S_b \circ f_{z_0}(z)| = 1$ para todo $z \in \Omega$. En particular, $1 = |S_b \circ f_{z_0}(z_0)| = |S_b(0)| = |-b| = |b|$, lo cual es absurdo pues se tendría que $b \in C(0, 1)$. Por tanto, $f_{z_0}(z)$ es sobreyectiva, lo cual finaliza la demostración del teorema. ■

2.4.2 Del Teorema de Riemann al problema de Dirichlet

Supongamos que disponemos del Teorema de Riemann, el cual nos garantiza la existencia de un isomorfismo conforme $f : \Omega \rightarrow D(0, 1)$, donde Ω es simplemente conexo, acotado y su borde $\partial\Omega$ es una curva cerrada simple.

Antes de demostrar el resultado de esta sección, solucionaremos el problema de Dirichlet para el disco unitario a través del núcleo de Poisson.

Fórmula Integral de Poisson

Sea $C_0 = C(0, 1)$ la circunferencia de radio 1 orientada positivamente y centrada en el origen. Sea f una función holomorfa dentro y sobre C_0 . La fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)}{s - z} ds \quad (2.7)$$

expresa el valor de f en cualquier punto interior a C_0 en términos de los valores de f en los puntos s de C_0 . De (2.7) vamos a obtener una fórmula correspondiente para la parte real de f , y luego usarla para resolver el problema de Dirichlet para el disco limitado por C_0 . Escribiendo $z = re^{i\theta}$, con $0 < r < 1$. El inverso del punto no nulo z con respecto al círculo es el punto z_1 que está en el mismo rayo que z y satisface la condición $|z||z_1| = 1$; así pues, si s es un punto de C_0 ,

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1|e^{i\theta} = \frac{|z_1||z|}{|z|}e^{i\theta} = \frac{1}{r}e^{i\theta} = \frac{1}{r^2}re^{i\theta} \\ &= \frac{1}{r^2}z = \frac{1}{z\bar{z}} \cdot z = \frac{1}{\bar{z}} \cdot z \cdot z_1 = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{s\bar{s}}{\bar{z}} \\ \implies z_1 &= \frac{1}{r}e^{i\theta} = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{s\bar{s}}{\bar{z}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como z_1 es exterior al círculo $C(0, 1)$, se sigue del teorema de Cauchy-Goursat que el valor de la integral en (2.7) es cero cuando z se sustituye por z_1 en el integrando. Por tanto,

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \left(\frac{1}{s-z} - \frac{1}{s-z_1} \right) f(s) ds$$

y usando la representación paramétrica $s = e^{i\phi}$ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) para C_0 , podemos escribir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{s}{s-z} - \frac{s}{s-z_1} \right) f(s) d\phi$$

donde, por conveniencia, retenemos s en vez de escribir $e^{i\theta}$.

Notar, que la vista de la última de las expresiones (2.8) para z_1 , el factor que va entre paréntesis aquí se puede poner como

$$\frac{s}{s-z} - \frac{1}{1-\bar{s}} = \frac{s}{s-z} + \frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}} = \frac{1-r^2}{|s-z|^2} \quad (2.9)$$

En consecuencia, una forma alternativa para la fórmula integral de Cauchy es

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\phi})}{|s-z|^2} d\phi \quad (2.10)$$

cuando $0 < r < 1$. Esta forma sigue siendo válida para $r = 0$; en este caso se reduce directamente a

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\phi}) d\phi,$$

que no es sino la forma paramétrica de la ecuación (2.7) con $z = 0$.

La cantidad $|s-z|$ es la distancia entre los puntos s y z , y la ley del coseno permite escribir

$$|s-z|^2 = 1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2 \quad (2.11)$$

Luego, si u es la parte real de la función holomorfa f , deducimos de (2.10) que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2 u(1, \phi)}{1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi, \quad (r < r_0) \quad (2.12)$$

Esta es la fórmula integral de Poisson para la función armónica u en el disco abierto acotado por el círculo $C(0, 1)$.

El núcleo de la transformación es, salvo un factor $\frac{1}{2\pi}$, la función real

$$P(1, r, \phi - \theta) = \frac{1-r^2}{1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2}, \quad (2.13)$$

que se conoce como núcleo de Poisson. Debido a la ecuación (2.11) podemos escribir también

$$P(1, r, \phi - \theta) = \frac{1 - r^2}{|s - z|^2} \quad (2.14)$$

y, como $r < 1$, P es claramente una función positiva. Además, puesto que $\frac{\bar{z}}{(\bar{s} - \bar{z})}$ y su complejo conjugado $\frac{z}{s - z}$ tiene la misma parte real, vemos en (2.9) que

$$P(1, r, \phi - \theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{s}{s - z} + \frac{z}{s - z} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{s + z}{s - z} \right) \quad (2.15)$$

pues,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{s + re^{i\theta}}{s - re^{i\theta}} \right) &= \operatorname{Re} \frac{(s + re^{i\theta})(\bar{s} - re^{-i\theta})}{(s - re^{i\theta})(\bar{s} - re^{-i\theta})} = \frac{\operatorname{Re} (|s|^2 - sre^{-i\theta} + \bar{s}re^{i\theta} - r^2)}{|s - re^{i\theta}|^2} \\ &= \frac{|s|^2 - r^2}{|s - re^{i\theta}|^2} = \frac{1 - r^2}{|s - z|^2} \end{aligned}$$

Usando la forma polar para el Laplaciano, se demuestra que $P(1, r, \phi - \theta)$ es una función armónica de r y θ interior a C , pues se tiene

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{2r^2 \cos(\phi - \theta) - 4r + 2 \cos(\phi - \theta)}{(1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2)^2} \\ P_{rr} &= \frac{12r^2 - 4r^3 \cos(\phi - \theta) - 12r \cos(\phi - \theta) + 8 \cos^2(\phi - \theta) - 4}{(1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2)^3} \\ P_{\theta\theta} &= \frac{8r^2 - 4r^2 \cos^2(\phi - \theta) - 2r \cos(\phi - \theta) - 8r^4 + 4r^4 \cos^2(\phi - \theta) + 2r^5 \cos(\phi - \theta)}{(1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2)^3} \end{aligned}$$

de donde al reemplazar en el laplaciano en su forma polar, se tiene:

$$P_{rr} + \frac{1}{r} P_r + \frac{1}{r^2} P_{\theta\theta} = 0$$

por lo tanto, $P(1, r, \phi - \theta)$ es armónica.

Además cumple que

$$P(1, r, \phi - \theta) = P(1, r, \theta - \phi) = P(1, r, \phi - \theta + 2\pi) = P(r, -\theta) = P(r, \theta + 2\pi)$$

ya que $r \in [0, 1)$ y $\cos(\phi - \theta) = \cos(\theta - \phi) = \cos(\phi - \theta + 2\pi)$, esto es $P(1, r, \phi - \theta)$ es una función periódica par de $\phi - \theta$, con periodo 2π , y su valor es 1 cuando $r = 1$. La

fórmula integral de Poisson (2.12) se puede escribir ahora

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(1, r, \phi - \theta) u(e^{i\phi}) d\phi, \quad r < 1 \quad (2.16)$$

Para la función constante $u(x, y) = 1$, se tiene

$$1 = u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(1, r, \phi - \theta) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(1, r, \theta - \phi) d\phi \quad (2.17)$$

Además, dado $\alpha \in (0, \pi)$, $\cos(\alpha) \neq 1$ se tiene

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P(1, r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha) + r^2} = \frac{0}{2 - 2\cos\alpha} = 0 \quad (2.18)$$

De esta manera, nos dispondremos a solucionar el problema de Dirichlet para el disco unidad, usando el núcleo de Poisson.

Teorema 2.10. (*Solución del Problema de Dirichlet para $D(0, 1)$*). Dada una función continua $\varphi : C(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, la función $u : \overline{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\phi} + z}{e^{i\phi} - z} \right) \varphi(e^{i\phi}) d\phi, \quad |z| < 1$$

$$u(z) = \varphi(z) \quad \text{para } z \in C(0, 1)$$

es armónica en $D(0, 1)$, continua en $\overline{D}(0, 1)$, coincide con φ en $C(0, 1)$ y es la única función que cumple estas condiciones.

Demostración. Para probar que u es armónica observamos que por ser φ una función que toma valores reales podemos escribir para $|z| < 1$

$$u(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\phi} + z}{e^{i\phi} - z} \varphi(e^{i\phi}) d\phi \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{w + z}{w - z} \frac{\varphi(w)}{w} dw \right)$$

entonces para probar que u es armónica en $D(0, 1)$ bastará probar que la función

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{w + z}{w - z} \frac{\varphi(w)}{w} dw$$

es holomorfa en $D(0, 1)$. En efecto

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{\varphi(w)}{w - z} dw + \frac{z}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{\frac{\varphi(w)}{w}}{w - z} dw, \quad (|z| < 1)$$

la primera de las integrales es un número complejo, la segunda es holomorfa por ser del tipo Cauchy.

Probaremos ahora que $\lim_{z \rightarrow 1} u(z) = \varphi(1)$. En virtud de la fórmula de Poisson con $u(z) = 1$, se verifica que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(1, r, \phi - \theta) d\phi = 1$$

Podemos, por tanto, escribir para $|z| < 1$

$$u(re^{i\theta}) - \varphi(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \phi - \theta) [\varphi(e^{i\phi}) - \varphi(1)] d\phi$$

Ahora observemos que, al ser φ continua, existe un número positivo lo suficientemente pequeño α tal que

$$|\varphi(e^{i\phi}) - \varphi(1)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } |\phi| \leq \alpha \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} |u(re^{i\theta}) - \varphi(1)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} |\varphi(e^{i\phi}) - \varphi(1)| d\phi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} |\varphi(e^{i\phi}) - \varphi(1)| d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |\phi| \leq \pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} |\varphi(e^{i\phi}) - \varphi(1)| d\phi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |\phi| \leq \pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} |\varphi(e^{i\phi}) - \varphi(1)| d\phi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |\phi| \leq \pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} |\varphi(e^{i\phi}) - \varphi(1)| d\phi \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha \leq |\phi| \leq \pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} |\varphi(e^{i\phi}) - \varphi(1)| d\phi \end{aligned}$$

Sea $M > 0$ tal que $|\varphi(z)| \leq M$ para todo $z \in C(0, 1)$. Por otro lado de (2.18) podemos tener r suficientemente cercano a 1 como para que $|P(1, r, \phi)| < \frac{\varepsilon}{4M}$ si $\delta < |\phi| < \pi$. De esta manera.

$$\begin{aligned} |u(re^{i\theta}) - \varphi(1)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{2\pi} \int_{\alpha \leq |\phi| \leq \pi} P(1, r, \phi) d\phi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{4M} (2\pi) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$< \varepsilon$$

Sea ahora $z_0 = e^{i\gamma}$ un punto cualquiera de la circunferencia $C(0, 1)$. Teniendo en cuenta la periodicidad de la función que se integra, para $|z| < 1$ tenemos

$$\begin{aligned} u(z_0, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\phi} + ze^{i\gamma}}{e^{i\phi} - ze^{i\gamma}} \right) \varphi(e^{i\phi}) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(\phi-\gamma)} + z}{e^{i(\phi-\gamma)} - z} \right) \varphi(e^{i\phi}) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-\gamma}^{\pi-\gamma} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\phi} + z}{e^{i\phi} - z} \right) \varphi(e^{i(\phi+\gamma)}) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\phi} + z}{e^{i\phi} - z} \right) \varphi(z_0 e^{i\phi}) d\phi \end{aligned}$$

consideremos la función $h : C(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(z) = \varphi(z_0 z)$ para todo $z \in C(0, 1)$.

Y sea $\hat{h} : \overline{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} \hat{h}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\phi} + z}{e^{i\phi} - z} \right) h(e^{i\phi}) d\phi, \quad |z| < 1 \\ \hat{h}(z) &= h(z) \quad \text{para } z \in C(0, 1) \end{aligned}$$

Según acabamos de probar se tiene que $\hat{h}(z) = u(z_0 z)$ para todo $z \in D(0, 1)$. En virtud de lo antes visto, la función \hat{h} es continua en $z = 1$, luego:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ |z| < 1}} u(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} u(z_0 z) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \hat{h}(z) = h(1) = \varphi(z_0)$$

Lo que prueba que u es continua en z_0 .

Por tanto u es solución del Problema de Dirichlet para el disco unidad. ■

Resolveremos de esta manera el problema de Dirichlet para el abierto Ω simplemente conexo, acotado y cuya frontera es una curva cerrada simple, es decir, dada una función $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua, nuestro objetivo es encontrar una función $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ armónica en Ω y que en $\partial\Omega$ coincida con φ . Disponemos por otro lado de la solución al problema de Dirichlet en el disco unidad mediante el núcleo de Poisson. Tomaremos como condición de contorno a $\Psi = \varphi \circ f^{-1}$, donde f es el isomorfismo conforme cuya existencia está garantizada por el Teorema de Riemann y llamaremos v a dicha solución. Es decir:

- $v : \overline{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.
- $v|_{D(0,1)}$ es armónica.
- $v|_{\partial\Omega} = \Psi$.

En estas condiciones, enunciamos el siguiente teorema

Teorema 2.11. (*Solución al problema de Dirichlet*) Sea Ω un abierto simplemente conexo, acotado y cuya frontera es una curva cerrada simple y $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $u = v \circ f$ es la solución al problema de Dirichlet en Ω , donde $f : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ es un isomorfismo conforme y v es la solución al problema de Dirichlet en el disco unidad con condición de contorno $\Psi = \varphi \circ f^{-1}$.

Demostración. Veamos que la función $u = v \circ f$ es la solución al problema de Dirichlet en Ω .

- Es continua en $\overline{\Omega}$ por ser composición de funciones continuas.
- Es armónica en Ω por ser composición de una función holomorfa con una armónica.
- Como $\partial\Omega$ es una curva cerrada simple y acotada, podemos extender el isomorfismo conforme a la frontera por el Teorema de extensión de Caratheódory. Entonces, dado $a \in \partial\Omega$ y $b = f(a) \in C(0, 1)$, tenemos que $u(a) = v(f(a)) = v(b) = \Psi(b) = \varphi(f^{-1}(b)) = \varphi(f^{-1}(f(a))) = \varphi(a)$.

Por lo tanto se ha demostrado la equivalencia del problema de Dirichlet con el Teorema de Riemann. ■

Capítulo 3:

Aplicaciones

En el capítulo anterior vimos que si la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en un dominio Ω , entonces la parte real e imaginaria de f son armónicas, es decir, tanto u como v tienen segundas derivadas parciales continuas y satisfacen la ecuación de Laplace en Ω ;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

Por el contrario, si sabemos que una función $u(x, y)$ es armónica en Ω , podemos encontrar una única (excepto por una constante aditiva) armónica conjugada $v(x, y)$ y construir una función $f(z)$ que es holomorfa en Ω .

En las ciencias físicas e ingeniería, la ecuación de Laplace se encuentra con frecuencia como un modelo matemático de un fenómeno independiente del tiempo, y en ese contexto, el problema que enfrentamos es resolver la ecuación dada sujeta a ciertas condiciones de la física llamadas condiciones de frontera. Debido a la relación que se presenta en (1), las funciones conformes son la fuente de un gran número de soluciones de la ecuación de Laplace, y podemos ser capaces de encontrar una que se ajuste al problema en cuestión. Comenzamos esta sección demostrando que las curvas de nivel de la parte real e imaginaria de una función holomorfa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ son dos familias ortogonales de curvas.

Definición 3.1. Dado Ω un dominio de \mathbb{C} , y sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función holomorfa en Ω . Las ecuaciones

$$u(x, y) = c_1 \quad y \quad v(x, y) = c_2 \quad , \quad (3.2)$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias, se llaman curvas de nivel de u y v , respectivamente.

Proposición 3.1. *Dado Ω un dominio de \mathbb{C} y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función holomorfa y conforme en $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces las curvas de nivel de u y v son familias ortogonales.*

Demostración. Debemos demostrar que cada curva de una familia es ortogonal a cada curva de la otra familia. Más precisamente, en un punto de intersección $z_0 = x_0 + iy_0$, donde por hipótesis $f'(z_0) \neq 0$, la recta tangente L_1 a la curva de nivel $u(x, y) = u_0$ y la recta tangente L_2 a la curva de nivel $v(x, y) = v_0$ son perpendiculares.

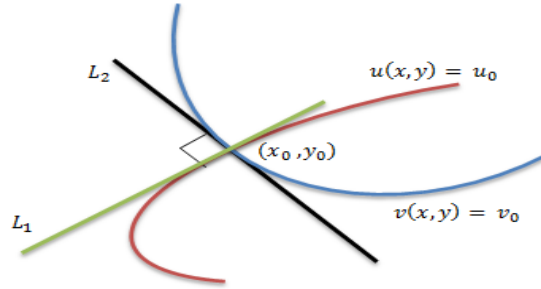


Figura 3.1: Las tangentes L_1 y L_2 en el punto de intersección z_0 son perpendiculares.

Los números u_0 y v_0 se definen evaluando a u y v en z_0 , es decir, $c_1 = u(x_0, y_0) = u_0$ y $c_2 = v(x_0, y_0) = v_0$. Para probar que L_1 y L_2 son perpendiculares en z_0 , demostraremos que la pendiente de una tangente es el recíproco negativo de la pendiente de la otra, probando que el producto de las dos pendientes es -1. Comenzamos por derivar a $u(x, y) = u_0$ y $v(x, y) = v_0$ respecto a x utilizando la regla de la cadena de la derivación parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Entonces resolvamos cada una de las ecuaciones anteriores para $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{array}{cc} \text{pendiente de una curva tangente } u(x,y)=u_0 & \text{pendiente de una curva tangente } v(x,y)=v_0 \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} & , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial v / \partial x}{\partial v / \partial y} \end{array} \quad (3.3)$$

En (x_0, y_0) vemos de (3.3), las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ y de $f'(z_0) \neq 0$, que el producto de las dos funciones pendientes es

$$\left(-\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right) \left(-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}\right) = \left(\frac{\partial v/\partial y}{\partial v/\partial x}\right) \left(-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}\right) = -1 \quad (3.4)$$

■

Ejemplo 3.1. Sea $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, identificamos $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Para esta función, las familias de las curvas de nivel $x^2 - y^2 = c_1$ y $2xy = c_2$ son dos familias de hipérbolas. Sabemos que f es holomorfa y $f'(z) \neq 0$ para $z \neq 0$, por lo tanto estas familias son ortogonales. Sea $z_0 = 2 + i$, por ejemplo, encontramos $2^2 - 1^2 = 3 = c_1$ y $2(2) = 4 = c_2$ y dos curvas ortogonales correspondientes $x^2 - y^2 = 3$ en rojo y $xy = 4$ en negro. En la parte (a) de la imagen se ve que $x^2 - y^2 = 3$ y $xy = 4$ son ortogonales en $z_0 = 2 + i$ (y en $-2 - i$, por simetría de las curvas), en la parte (b) las dos familias están sobrepuestas en el mismo eje de coordenadas, las curvas de la familia $x^2 - y^2 = c_1$ están dibujadas a color rojo mientras que las curvas de la familia $2xy = c_2$ están en negro.

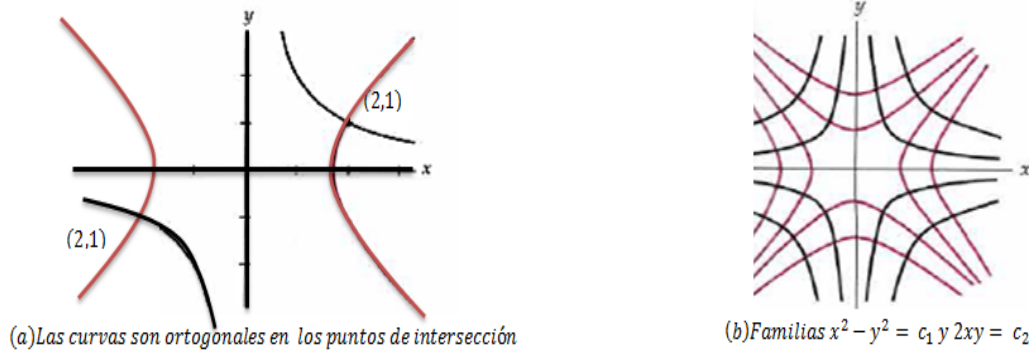


Figura 3.2: Familias ortogonales.

Definición 3.2. Sea Ω un dominio de \mathbb{C} y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar holomorfa, entonces el gradiente de f , se define como el vector:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j \quad (3.5)$$

Observación 3.1. El vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ en un punto (x_0, y_0) es perpendicular a la curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por ese punto, es decir, a la curva de nivel $f(x, y) = c_0$, donde $c_0 = f(x_0, y_0)$.

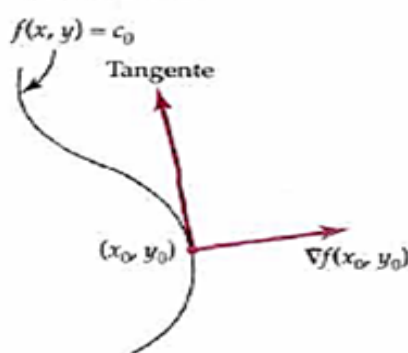


Figura 3.3: El gradiente es perpendicular a la curva de nivel en (x_0, y_0) .

Definición 3.3. Un campo vectorial sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una función con valores vectoriales

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

$$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$$

De particular importancia en ciencia son los campos vectoriales que se pueden escribir como el gradiente de alguna función escalar ϕ con segundas derivadas parciales continuas. En otras palabras donde el campo $F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ es igual a

$$F(x, y) = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}i + \frac{\partial \phi}{\partial y}j$$

por lo que $P(x, y) = \partial \phi / \partial x$ y $Q(x, y) = \partial \phi / \partial y$. A la función ϕ se le conoce como función de potencial o simplemente potencial de F .

Los campos gradiente se presentan en forma natural en el estudio de la electricidad y el magnetismo, de flujo de fluidos, en gravitación, y en las temperaturas de estado estable. En un campo gradiente de fuerza, tal como un campo gravitacional, el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula que se mueve de la posición A a la posición B es igual

en todas las trayectorias entre estos puntos. Además, el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de una trayectoria cerrada es cero, en otras palabras, la ley de la conservación de la energía mecánica es: energía cinética + energía potencial = constante. Por esta razón, los campos gradiente también se conocen como campos conservativos.

En el estudio de la electrostática la intensidad del campo eléctrico F debido a un conjunto de cargas estacionarias es una región del plano está dada por $F(x, y) = -\nabla \phi$, donde la función de valor real $\phi(x, y)$ se denomina potencial electrostático. La ley de Gauss establece que la divergencia del campo F , es decir, $\nabla \cdot F = P_x + Q_y$ es proporcional a la densidad de carga ρ , donde ρ es una función escalar. Si la región del plano está libre de cargas, entonces, la divergencia de F es cero. Puesto que $F = -\nabla \phi$, si $\nabla \cdot F = 0$, entonces

$$\nabla \cdot F = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} i - \frac{\partial \phi}{\partial y} j \right) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

o $\nabla^2 \phi = 0$. En otras palabras, la ecuación de la función de potencial ϕ satisface la ecuación de Laplace y es, por tanto, armónica en Ω simplemente conexo de \mathbb{C} .

Potencial Complejo. Si una función de potencial $\phi(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace en $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo, es armónica, y sabemos que existe una función armónica conjugada $\psi(x, y)$, definida en Ω tal que la función compleja

$$g(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

es un isomorfismo conforme. La función $g(z)$ se llama potencial complejo correspondiente al potencial real ϕ . Como hemos visto, las curvas de nivel de ϕ y ψ son familias ortogonales. Las curvas de nivel de ϕ , $\phi(x, y) = c_1$, se llaman curvas equipotenciales, es decir, curvas a lo largo de las cuales el potencial es constante. En el caso en el que ϕ represente un potencial electrostático, la intensidad de campo eléctrico F se debe dirigir a lo largo de la familia de curvas ortogonales a las curvas equipotenciales porque la fuerza del campo es el gradiente del potencial ϕ , $F(x, y) = -\nabla \phi$ y como sabemos también que el vector gradiente en un punto (x_0, y_0) es perpendicular a una curva de nivel de ϕ en (x_0, y_0) . Por esta razón, las curvas de nivel $\psi(x, y) = c_2$, que son ortogonales a $\phi(x, y) = c_1$, se llaman líneas de fuerza y son las trayectorias a lo largo de las que una

partícula cargada se mueve en el campo electrostático.

Ahora resolveremos un problema relacionado al cálculo del potencial complejo usando el núcleo de Poisson.

Ejemplo 3.2. Sea $V(re^{i\theta})$ el potencial en el interior de un largo cilindro hueco, partido longitudinalmente en dos mitades iguales, cuando $V = 1$ en una parte de ellas y $V = 0$ en la otra. Además se sabe que $\varphi(e^{i\phi}) = 0$ cuando $0 < \phi < \pi$ y $\varphi(e^{i\phi}) = 1$ cuando $\pi < \phi < 2\pi$.

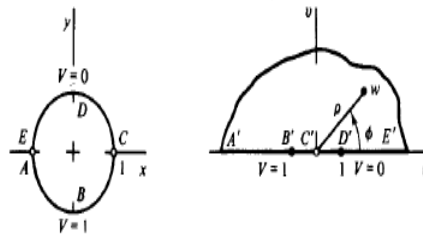


Figura 3.4: Potencial complejo en un cilindro hueco.

En efecto, de la fórmula integral de Poisson

$$V(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} P(1, r, \phi - \theta) d\phi$$

donde

$$P(1, r, \phi - \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2}$$

Una primitiva de $P(1, r, \phi - \theta)$ es

$$\int P(1, r, \psi) d\psi = 2 \arctan \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \frac{\psi}{2} \right)$$

siendo el integrando la derivada con respecto a ψ de la función de la derecha. Por tanto, se desprende

$$\pi V(re^{i\theta}) = \arctan \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \frac{2\pi - \theta}{2} \right) - \arctan \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \frac{\pi - \theta}{2} \right)$$

Tras simplificar la expresión de $\tan[\pi V(re^{i\theta})]$ obtenida de esta última ecuación, encontramos que

$$V(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{1 - r^2}{2r \sin \theta} \right)$$

expresando en coordenadas rectangulares esta última función, se tiene

$$V = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y} \right)$$

La función V es la función potencial para el espacio encerrado por los electrodos cilíndricos, pues es armónica dentro del círculo.

Las curvas equipotenciales $V(x, y) = c_1$ ($0 < c_1 < 1$) en la región circular son arcos de los círculos

$$x^2 + (y + \tan(\pi c_1))^2 = \sec^2(\pi c_1).$$

Una armónica conjugada U de V es

$$U = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1 - z}{1 + z} \right|$$

A continuación veremos un problema aplicado a la transferencia de calor donde haremos uso del mapeo conforme para su solución.

Ejemplo 3.3. Transferencia de Calor. Para un problema de transferencia de calor las curvas de nivel de una función armónica corresponden a las isotermas, y una derivada normal cero corresponde al aislamiento térmico. Para ilustrar estas ideas, consideramos el problema simple de transferencia de calor en estado estacionario que se muestra esquemáticamente en la figura 3.5

Se tiene una tubería cilíndrica con cavidad cilíndrica descentrada por la que pasa el vapor a 100° C. La temperatura exterior de la tubería es de 0° C. El radio del círculo interior es $\frac{3}{10}$ del radio de círculo exterior, así que si elegimos el radio exterior como unidad de longitud, el problema puede ser formulado como el de encontrar una función armónica $T(u, v)$ tal que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

En la región entre los círculos $|z| = 1$ y $|z - 0,3| = 0,3$ y $T = 0$ sobre $|z| = 1$ y $T = 100$ sobre $|z - 0,3| = 0,3$.

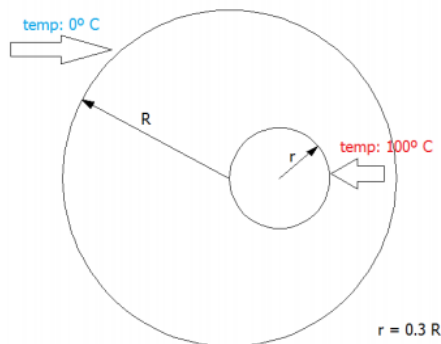


Figura 3.5: Diagrama esquemático del problema de transferencia de calor.

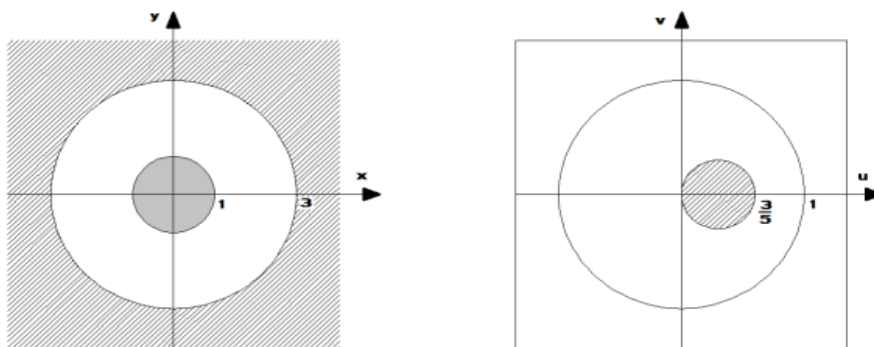


Figura 3.6: Mapeo $w = \frac{(z-3)}{(3z-1)}$.

El mapeo

$$w = \frac{z-3}{3z-1}$$

transforma el círculo $|z| = 1$ en el círculo $|w| = 1$ y el círculo $|z - 0,3| = 0,3$ en el círculo $|w| = 3$ como se muestra en la figura 3.6.

Así el problema es transformado en un problema de simetría axial en el plano w que consiste en encontrar una función armónica $T(u, v) = 100$ en $|w| = 1$ y $T(u, v) = 0$ en $|w| = 3$. Las funciones armónicas con tal simetría axial tienen la forma general:

$$T(u, v) = A \ln(u^2 + v^2) + B$$

donde A y B son constantes.

Aquí requerimos, que $T(u, v) = 100$ en $u^2 + v^2 = 1$ y $T(u, v) = 0$ en $u^2 + v^2 = 9$. Así

$B = 100$ y $A = -100\ln(9)$, y la solución en el plano w es

$$T(u, v) = \frac{100\ln[1 - \ln(u^2 + v^2)]}{\ln(9)}.$$

Necesitamos ahora la solución en el plano z que en general significa que tenemos que obtener u y v en términos de x y y . Aquí, sin embargo, es un poco menos trabajoso ya que $u^2 + v^2 = |w|^2$ y

$$|w|^2 = \left| \frac{z-3}{3z-1} \right|^2 = \frac{|z-3|^2}{|3z-1|^2} = \frac{(x-3)^2 + y^2}{(3x-1)^2 + 9y^2}$$

De esta manera, se tiene

$$T(u, v) = \frac{100}{\ln(9)}(1 - \ln[(x-3)^2 + y^2] - \ln[(3x-1)^2 + 9y^2]).$$

De donde hemos obtenido así la solución al problema en las coordenadas de x e y .

Conclusiones

- Se obtuvo de manera explícita los primeros automorfismos conformes del disco unidad en sí mismo mediante el Lema de Schwarz.
- Se determinó que para un abierto simplemente conexo del plano complejo Ω , existe el isomorfismo conforme entre Ω y $D(0, 1)$.
- Se demostró la equivalencia del problema de Dirichlet con el Teorema de Riemann.
- Las aplicaciones conformes nos brindan un método alternativo para la solución de problemas físicos con condición de frontera, estas aplicaciones son de gran utilidad en el cálculo de potencial, transferencia de calor, etc.

Bibliografía

- [1] Azagra Rueda, D. (2017) Introducción al análisis de funciones de una variable compleja. Madrid, España: Departamento de Análisis Matemático. Universidad Complutense de Madrid.
- [2] Churchill, R.V, Brown, J.W.. (1992) Variable Compleja y Aplicaciones. España: McGraw-Hill.
- [3] De Amo, Enrique. (2008-2009) Comportamiento local de una función holomorfa. Teoremas de la aplicación abierta y de la función inversa. Facultad de Ciencias Experimentales. Universidad de Almería.
- [4] González Fernández, I. (2014) Estudio de las aplicaciones conformes en el plano complejo. Universidad de Almería.
- [5] Marcos Solera, D. (2015) El teorema de la aplicación de Riemann. Universidad Autónoma de Madrid.
- [6] Marín A, J.M. (2014). Teoría de funciones de variable compleja. La Habana, Cuba: Universitaria.
- [7] Marín García, J.J. (2013) El teorema de la representación conforme de Riemann. Universidad de Murcia.
- [8] Pérez G, F.J.. (2004). Curso de Análisis Complejo. Granada, España: Departamento de Análisis Matemático.
- [9] Spiegel, M.R, Lipschutz, S, Schiller, J.J, Spellman, D.. (2009). Variable Compleja. México: McGraw-Hill.

-
- [10] Villa Salvador, Gabriel D. (1989) Introducción a funciones analíticas y transformaciones conformes. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
-