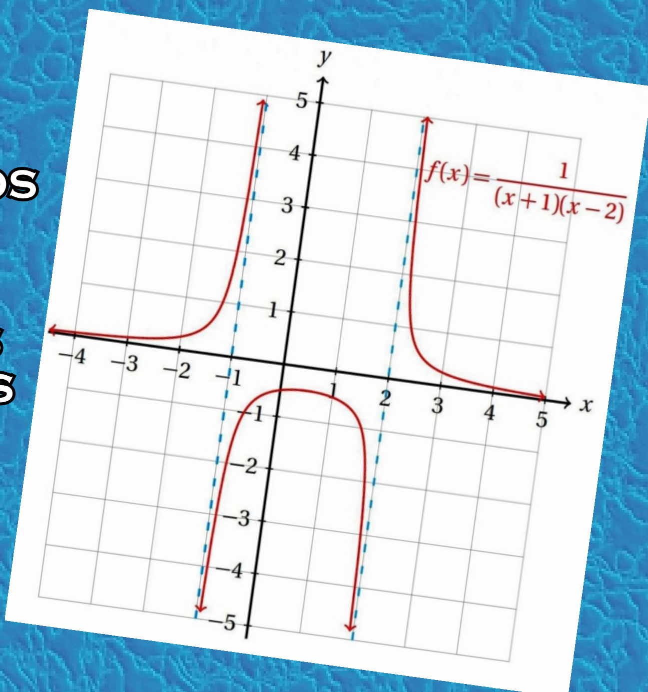
MATEMÁTICA BÁSICA

Teoría y Práctica

CONJUNTOS

SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

RELACIONES Y FUNCIONES



EDITORIAL UNIVERSITARIA
UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
LAMBAYEQUE

Dr. César A. Ahumada Abanto

MATEMÁTICA BÁSICA

Teoría y Práctica

- **CONJUNTOS**
- **SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES**
- **RELACIONES Y FUNCIONES**

Dr. César A. Ahumada Abanto

EDITORIAL UNIVERSITARIA
UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

MATEMATICA BÁSICA - Teoria y Prática

Autor:
César Augusto Ahumada Abanto

Editado por:

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo
Dirección Editorial Universitaria
Calle Juan XXIII N° 391 – Lambayeque
Teléfono: 074 – 282081
www.unprg.edu.pe
Lambayeque, Perú
fondoeditorial@unprg.edu.pe

Primera Edición Digital: Julio del 2022

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2022-06669

ISBN: 978-9972-55-028-7

Publicación sometida a evaluación por pares académicos (Peer Review Double Blinded)

PRÓLOGO

El presente texto MATEMÁTICA BÁSICA constituye un esfuerzo por definir una teoría básica y presentar una serie de ejercicios de una manera precisa y comprensible porque creo que los estudiantes aprenden mejor cuando los procedimientos son expuestos tan claramente como sea posible.

En el Capítulo 1 se presenta la teoría de los Conjuntos reforzando con la solución de ejercicios y dejando una lista de ejercicios propuestos para el afianzamiento de estos contenidos.

En el Capítulo 2 se desarrolla la teoría de los Números Reales dando énfasis a los distintos tipos de ecuaciones e inecuaciones y sus métodos de solución, así como la solución de una serie de ejercicios resueltos que reforzarán los conocimientos adquiridos por los estudiantes, culminando con una lista de ejercicios propuestos que permitan afianzar y consolidar su aprendizaje.

En el Capítulo 3 se desarrolla la teoría de las Relaciones y Funciones, los tipos de gráficos que estas presentan, así como la solución de una serie de ejercicios resueltos que reforzarán los conocimientos adquiridos por los estudiantes, culminando con una lista de ejercicios propuestos que permitan afianzar y consolidar su aprendizaje.

Agradezco por anticipado a las personas que con sus sugerencias y recomendaciones permitan el mejoramiento de la presente obra, la misma que se realiza con fines de enseñanza universitaria.

El Autor.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: CONJUNTOS

CAPÍTULO 2: SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

CAPÍTULO 3: RELACIONES Y FUNCIONES

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS

CONJUNTOS

BREVE HISTORIA

El concepto de conjunto tiene una enorme importancia para la matemática moderna, porque la mayor parte de los conceptos matemáticos están en términos de conjuntos.
El primero que con clara conciencia hizo del concepto conjunto objeto de investigación matemática, fue Bernardo Bolzano (1781- 1848), sacerdote y filósofo checo. En 1848 escribió un tratado que lo tituló "Las Paradojas del Infinito": en este tratado Bolzano desarrolló algunos conceptos y principios que posteriormente se convirtieron en el fundamento de la "Teoría de conjuntos" el cual fue creado especialmente para explicar con exactitud los conceptos de infinitos y continuidad para el cálculo infinitesimal.
El Matemático alemán Carlos Weierstrass (1815 – 1897) fue el primero que fundamento estos términos, basado en un conjunto de puntos sobre la recta.
Sin embargo, el verdadero creador de la Teoría de conjuntos, fue Jorge Cantor (1834 – 1918), filósofo y matemático alemán que necesitó 10 años para terminar su Teoría de Conjuntos, la cual en un comienzo fue rechazada por todos los matemáticos de su tiempo, pero con el correr de los años aparecieron matemáticos que reconocieron la gran "importancia de la teoría de conjuntos" la cual constituye el cimiento de toda la matemática.

CONCEPTO PRIMITIVO

Hablamos de un concepto primitivo, cuando este concepto se admite sin definición, como por ejemplo los términos: elemento, pertenencia y conjunto.

CONJUNTO

Es necesario que tengamos en claro que el concepto de conjunto es un "concepto primitivo", esto hace que sea imposible definirlo, lo que podemos tener es una idea intuitiva de ello. Conjunto es una agrupación, colección, lista de objetos bien definida, los objetos deben estar descritos lo suficientemente claro como para que no haya ninguna duda que si pertenece o no al conjunto es decir que cada objeto pueda distinguirse de los demás.

Observación 1.

Como sinónimo de la palabra conjunto también encontraremos a la palabra colección.

Observación 2.

A los conjuntos los representamos por las letras : A, B, C, D, ... y a los elementos por las letras: a, b, c, d, ...

Ejemplos

- El conjunto de los planetas de nuestro sistema solar
- El conjunto de los números enteros
- El conjunto de estudiantes del primer ciclo de la escuela de Ingeniería de Sistemas de la Universidad de Huacho.

RELACIÓN DE PERTENENCIA

La relación de pertenencia es un concepto primitivo, y decimos que un elemento pertenece a un conjunto cuando este se encuentra dentro del mismo, de no ser así decimos que no pertenece.

NOTACIÓN

"$x \in A$" se lee "x pertenece a A" o "x es elemento de A".

"$x \notin A$" se lee "x no pertenece a A" o "x no es elemento de A".

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Un conjunto queda bien definido, si dado un elemento cualquiera del conjunto es posible reconocer siempre si tal elemento está o no en el conjunto.
Hay dos procedimientos para determinar un conjunto;

a) Determinación por extensión

Consiste en enunciar, listar o enumerar separadamente los elementos que forman el conjunto, los elementos del conjunto siempre van entre llaves.

Ejemplo

A = {a, e, i, o, u}

B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

C = {2, 4, 6, 8, 10, ...}

D = {a, b, c, d, e, f, ...}

b) Determinación por comprensión

Consiste en enunciar una característica común que poseen todos los elementos del conjunto y que solo ellos poseen, se escribe entre llaves. Para lo cual utilizaremos una variable para denominar a cualquiera de ellos que queremos referirnos y escribiremos:

x / x .... a la variable x le llamaremos elemento genérico, la raya oblicua se lee "tal que" y en los puntos suspensivos enunciamos la propiedad común entre sus elementos.

Ejemplo

A = { x / x es una vocal }

B = { x / x es un número natural }

C = { x / x es un número natural par }

RELACIÓN DE IGUALDAD

Esta relación lo pueden gozar los elementos o los conjuntos y se indica por el símbolo “=”, se lee igual.

Propiedades de la igualdad

1. **A = A** todo conjunto es igual a sí mismo ....Prop. Reflexiva (1)
2. Si **A = B** entonces **B = A** .... Prop. Simétrica. (2)
3. Si **A = B** y **B = C** entonces **A = C** ....Prop. Transitiva. (3)

RELACIÓN DE INCLUSIÓN ($A \subset B$)

La relación de inclusión se da entre conjuntos y decimos que: A está incluido o contenido en B si todo elemento de A está en B

Simbólicamente

$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \Leftrightarrow \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{B}$ .... (4)

Observación1.

La negación de la relación $A \subset B$ se denota por $A \not\subset B$ y se lee A no está incluido en B.

Simbólicamente

$\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B} \Leftrightarrow \exists\ \mathbf{x} \in \mathbf{A} \ / \ \mathbf{x} \notin \mathbf{B}$ .... (5)

Observación 2.

Si el conjunto A está en el conjunto B, pero existe al menos un elemento de B que no pertenece a A, se dice que el conjunto A es **subconjunto propio** o una parte propia de B.

Ejemplo

Si A es el conjunto de todas las mujeres y B el conjunto de todos los seres humanos, diremos que A es parte propia de B.

Propiedades de la inclusión

1. **Reflexiva**

   Todo conjunto es parte de sí mismo. En efecto, si A es un conjunto, la implicación:

   $\forall$ **x : x** $\in$ **A** $\Rightarrow$ **x** $\in$ **A es verdadera**

   Es decir, **A** $\subset$ **A**

2. **Transitiva**

   Si un conjunto está dentro de otro y éste dentro de un tercero, entonces el primero está contenido en el tercero.

   Si **A** $\subset$ **B** y **B** $\subset$ **C** entonces **A** $\subset$ **C**

3. **Antisimétrica**

   Si un conjunto es parte de otro y éste es parte del primero entonces son iguales.

   Si **A** $\subset$ **B** y **B** $\subset$ **A** entonces **A = B**

RELACIÓN DE IGUALDAD ENTRE CONJUNTOS (A = B)

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Simbólicamente

$$\mathbf{A = B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A)} \quad \text{..........} (6)$$

Observación

La negación de la relación $A = B$ se denota con $A \neq B$, y significa que existe por lo menos un elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$ o que existe por lo menos un elemento $x \in B$ tal que $x \notin A$.

Simbólicamente

$$\mathbf{A \neq B \iff (A \not\subset B) \vee (B \not\subset A)} \quad \text{..........} (7)$$

CLASES DE CONJUNTOS

a) Conjunto universal

Llamado también universo, es el conjunto de todos los elementos que pueden ser considerados en un asunto particular. Todos los conjuntos son subconjuntos de un conjunto determinado. Este conjunto se llama conjunto Universal, denotado por U.

Ejemplos

- Dados los conjuntos N, Z, Q, I, R y C; el universo es el conjunto de los números complejos.

b) Conjunto unitario

Es el conjunto que consta de un único elemento

Ejemplos

- A = { 3 }
- B = { x / x^2 = 16 , x $\in$ N }
- C = { 5 , 5 }

c) Conjunto finito

Un conjunto es finito cuando al empezar el conteo de cada uno de sus elementos es posible llegar al último, es decir alguna vez debo terminar el proceso de conteo, en otras palabras, se puede determinar el número de elementos del conjunto

Ejemplos

- A = { x / x es una hoja de un determinado árbol }
- B = { x / x es un número par menor que 100 }
- C = { x / x es un habitante del Perú }

d) Conjunto infinito

Un conjunto es infinito cuando no es finito, o cuando no es posible enumerar cada uno de sus elementos.

Ejemplos

- A = { x / x es un número entero }
- B = { x / x es un punto del plano }

e) Conjunto de conjuntos

Cuando sus elementos son conjuntos.

Ejemplos

- A = { {0} , { 1,2} , {1,3 } }
- B = { ϕ }
- C = { {a} , {b} , {c} , {d} }
- D = { {1,2} , {1,3} , 4 } No es un conjunto de conjuntos por que el elemento 4 no es un conjunto.

f) Conjuntos disjuntos

Sean A y B dos conjuntos dados, decimos que A y B son disjuntos si ningún elemento del conjunto A está en B y si ningún elemento de B está en el conjunto A, caso contrario dichos conjuntos son no disjuntos.

Ejemplos

- A = { x / x es un número entero }
- B = { x / x es un punto del plano }

A y B son disjuntos.

- C = { x / x = $\sqrt{n}$, x $\in N$ }
- D = { x / x = 6 }

C y D son no disjuntos tienen al elemento 6 como elemento común

g) Conjuntos comparables

Sean A y B dos conjuntos dados, decimos que A y B son comparables si todos los elementos de A están en B o si todos los elementos de B están en A, es decir: A $\subset$ B o B $\subset$ A.
Dos conjuntos se dicen que son no comparables sí $A \not\subset B \vee B \not\subset A$.

Ejemplos

- A = { 2, 3, 4, 5, 6 }
- B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

A y B son comparables: A $\subset$ B.

- C = { a, b, c}
- D = { b}

C y D son comparables: D $\subset$ C

h) Conjunto potencia

Se define conjunto potencia de A o conjunto de partes de A, al conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto A, se indica por: P(A).

Simbólicamente

P(A) = { X / X $\subset$ A)

X $\in$ P(A) $\Leftrightarrow$ X $\subset$ A .... (8)

Ejemplos

- A = { 1 , 2 , 3 }

P (A) tendrá 2^n elementos es decir ocho elementos:

P(A) = { Ø, {1} , {2} , { 3} ,{1, 2}, {1 , 3} , {2 , 3} , { 1,2,3} }

- $B = \{ \emptyset , \{ \emptyset \} \}$

P(B) tendrá 2^n elementos es decir cuatro elementos:

$P(B) = \{ \emptyset , \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{ \emptyset, \{\emptyset\}\} \}$

i) Conjuntos vacíos

Es aquel conjunto sin elementos y se representa por la letra griega $\emptyset$ o por $A = \{ \}$.

Simbólicamente

$\emptyset = \{ x \in U / x \neq x \}$ .... (9)

Ejemplos

- $A = \{ x / x^2 \neq 25 , x \in N \}$
- $E = \{ \emptyset \}$ no es el conjunto vacío porque E tiene un elemento

Observación 1.

Consideraremos al conjunto nulo $\emptyset$ como el conjunto contenido en cualquier conjunto, inclusive en el mismo.

$$\emptyset \subset A, \forall A$$

Observación 2.

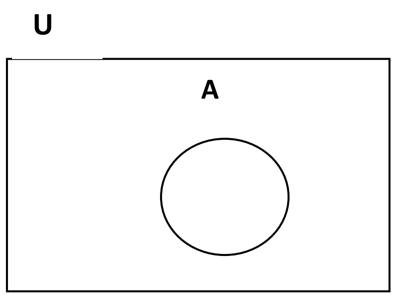
El conjunto nulo está contenido en todo conjunto, es decir que el conjunto nulo es parte propia de todo conjunto no vacío.

Observación 3.

El conjunto nulo o vacío es disjunto con cualquier otro conjunto, inclusive con el mismo, pues no existe elemento que pertenezca a la vez al conjunto nulo y a otro conjunto.

Diagramas de VENN – EULER

Los diagramas entre conjuntos podemos ilustrarlos utilizando los diagramas de Venn - Euler que se representan por áreas planas.



OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

UNIÓN DE CONJUNTOS (A U B)

La unión de A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos.

Simbólicamente

$\mathbf{A \cup B = \{ x \;/\; x \in A \quad v \quad x \in B \}}$

Es decir: $\mathbf{x \in (A \cup B) \iff (x \in A \quad v \quad x \in B)}$..........(10)

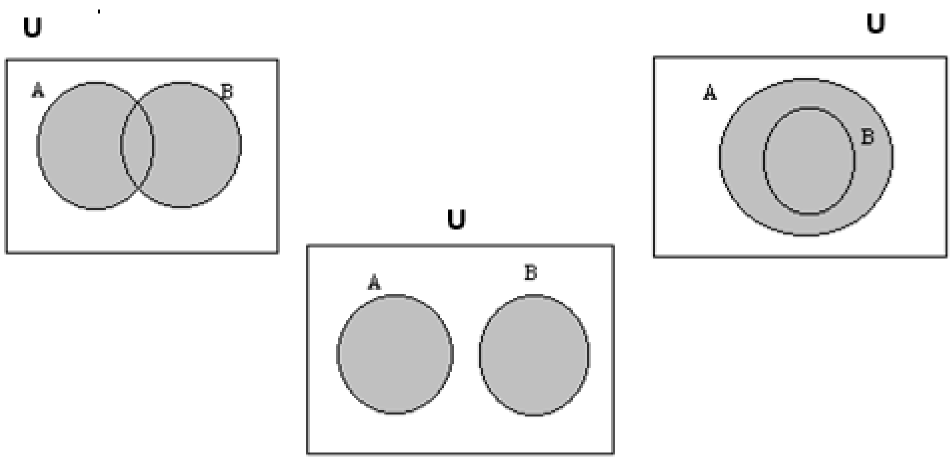
Observación 1.

La negación es de la forma:

$x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow (x \notin A \;\wedge\; x \notin B)$ ....(11)

Observación 2.

La representación gráfica de la unión es:



Observación 3.

La generalización de la reunión de conjuntos es de la siguiente forma:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \cup A_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ x \,/\, x \in A_i \;,\; 1 \leq i \leq n,\; i \in \mathbb{N} \}$$

Ejemplo: $\bigcup_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS ($A \cap B$)

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que son comunes a ambos.

Simbólicamente

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \;\wedge\; x \in B \}$$

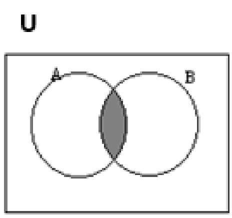
Es decir: $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \;\wedge\; x \in B)$ ....(12)

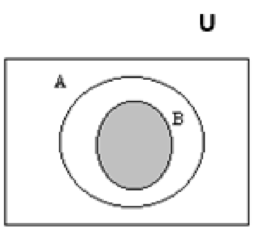
Observación 1.

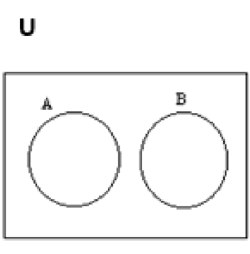
La negación es de la forma:

$x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow (x \notin A \;\wedge\; x \notin B)$ ....(13)

Observación 2. La representación gráfica de la intersección es:







Observación 3.

La generalización de la intersección de conjuntos es:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \;=\; A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \;=\; \{\, x \,/\, x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge x \in A_3 \wedge \ldots\ldots \wedge x \in A_n \,\}$$

Ejemplo: $\bigcap_{i=1}^{4} A_i \;=\; A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS (A – B)

La diferencia “A – B” se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, pero no pertenecen a B, y se lee “A menos B” .

Simbólicamente

$$\mathbf{A - B = \{\, x \,/\, x \in A \wedge x \notin B \,\}}$$

Es decir: $\mathbf{x \in (A - B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)}$ ....(14)

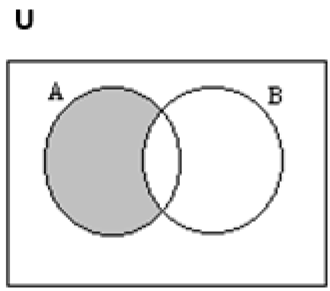
Observación 1.

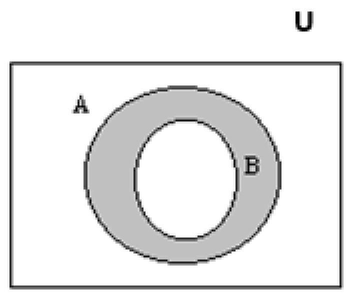
La negación es de la forma:

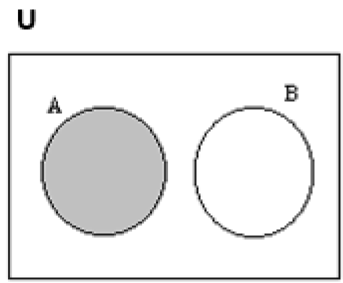
$\mathbf{x \notin (A - B) \Leftrightarrow (x \notin A \;\; v \;\; x \in B)}$ ....(15)

Observación 2.

La representación gráfica de la diferencia es:







COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO (CA , A´)

Sea $A \subset U$, donde U es el conjunto Universal definimos al complemento de A como el conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A.

Simbólicamente

$\mathbf{A' = \{ x \in U \ / \ x \notin A \}}$

Es decir: $\mathbf{x \in A' \Leftrightarrow x \notin A}$ ....(16)

Observación 1.

La negación es de la forma:

$\mathbf{x \in A' \ v \ x \in A \Leftrightarrow x \in U}$ ....(17)

Observación 2.

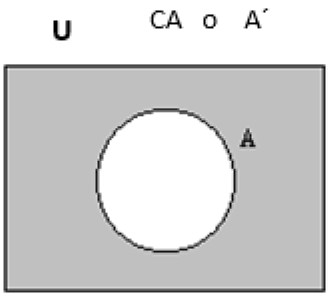
$\mathbf{x} \in \mathbf{A'} \quad \wedge \quad \mathbf{x} \in \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \in \emptyset$ ....(18)

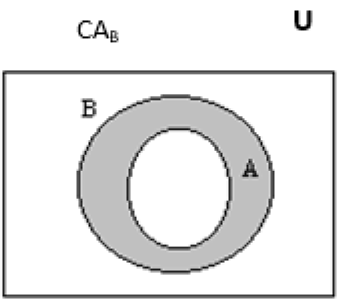
Observación 3.

La negación es de la forma:

$\mathbf{x} \notin \mathbf{A'} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \in \mathbf{A}$ ....(19)

La representación gráfica del complemento es:





DIFERENCIA SIMÉTRICA ($A \ \Delta \ B$)

Se define la diferencia simétrica de A y B como los elementos que están en la unión de A y B pero que no están en la intersección de A y B.

Simbólicamente

$\mathbf{A \ \Delta \ B = (A - B) \cup (B - A)}$ .... (20)

$\mathbf{A \ \Delta \ B = (A \cup B) - (A \cap B)}$ ....(21)

Es decir:

$$x \in (A \,\Delta\, B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \text{..........(22)}$$

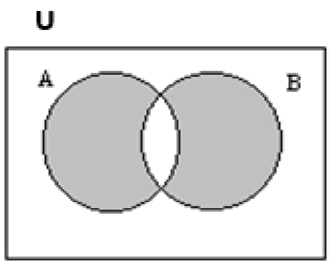
Observación 1.

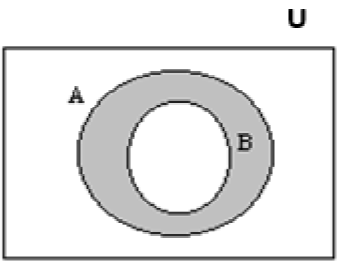
La negación es de la forma:

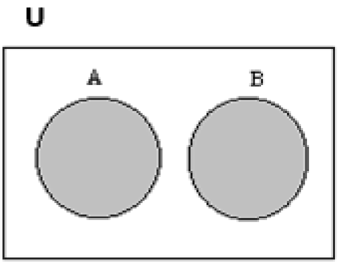
$$x \notin (A \,\Delta\, B) \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin B) \text{...........(23)}$$

Observación 2.

La representación gráfica de **(A Δ B)** es:







PRODUCTO CARTESIANO (A x B)

Dados A y B, se define el producto cartesiano de A y B como el conjunto formado por todos los pares ordenados (a, b), tal que $a \in A \wedge b \in B$.

Simbólicamente

$$\mathbf{A \times B = \{ (x , y) / \; x \in A \;\; \wedge \;\; y \in B \; \}}$$

Es decir:

$(\mathbf{x, y}) \in \;\; \mathbf{A \; x\, B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \in \mathbf{A} \;\; \wedge \;\; \mathbf{y} \in \mathbf{B}$ ....(24)

Observación 1.

La negación es de la forma:

$(\mathbf{x, y}) \notin (\mathbf{A \; x\, B}) \;\; \Leftrightarrow \;\; \mathbf{x} \notin \mathbf{A} \;\; \vee \;\; \mathbf{y} \notin \mathbf{B}$ ....(25)

PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

Una partición de un conjunto A, es un conjunto de subconjuntos o partes de A, llamadas **clases** que cumplen las siguientes propiedades:

1) Dos clases de la partición son siempre disjuntas
2) La reunión de las clases es el conjunto A
3) Cada clase está incluida en A
4) Ninguna clase es vacía

Ejemplo

Dado A = { 1, 2, 3 ,4 ,5 }

Se pueden tener particiones como las siguientes:

$P_1(A) = \{ \{1,2\} , \{3,4\} , \{5,6\} \}$

$P_2(A) = \{ \{1, 2, 3\} , \{4, 5, 6\} \}$

DEMOSTRACIONES DE EQUIVALENCIAS (utilizando las representaciones simbólicas de las definiciones)

1. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

$(A \cap B)' = A' \cup B' \Leftrightarrow (A \cap B)' \subset (A' \cup B')$ y $(A' \cup B') \subset (A \cap B)'$.***Por 6***

a) $(A \cap B)' \subset (A' \cup B')$

1) Demostraremos que:

$\forall x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \in (A' \cup B')$ ... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \notin (A \cap B)$ ... ***Por 16***

3) $x \notin A \quad v \quad x \notin B$ ...***Por 13***

4) $x \in A' \quad v \quad x \in B'$ ... ***Por 16***

5) $x \in (A' \cup B')$ ... ***Por 10***

l.q.q.d

b) $(A' \cup B') \subset (A \cap B)'$

1) Demostraremos que :

$\forall x \in (A' \cup B') \Rightarrow x \in (A \cap B)'$ ... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A' \cup B') \Rightarrow x \in A' \ v \ x \in B'$ .... ***Por 10***

3) $x \notin A \quad v \quad x \notin B$ .... ***Por 16***

4) $x \notin (A \cap B)$ .... ***Por 13***

5) $x \in (A \cap B)'$ .... ***Por 16***

l.q.q.d

$\therefore$ De a) y b) tenemos que: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

2. $(A \cup B)' = (A' \cap B')$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

$(A \cup B)' = (A' \cap B') \Leftrightarrow (A \cup B)' \subset (A' \cap B')$ **y** $(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$

...***Por 6***

a) $(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$

1) Demostraremos que :

$\forall x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \in (A' \cap B')$ .... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B)$ .... ***Por 16***

3) $x \notin A \wedge x \notin B$ .... ***Por 11***

4) $x \in A' \wedge x \in B'$ .... ***Por 16***

5) $x \in (A' \cap B')$ ....***Por 12***

l.q.q.d

b) $(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$

1) Demostraremos que:

$\forall x \in (A' \cap B')' \Rightarrow x \in (A \cup B)'$ .... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A' \cap B') \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B'$ ...... ***Por 12***

3) $x \notin A \wedge x \notin B$ .... ***Por 16***

4) $x \notin (A \cup B)$ .... ***Por 11***

5) $x \in (A \cup B)'$ .... ***Por 16***

l.q.q.d

$\therefore$ De a) y b) tenemos que $(A \cup B)' = (A' \cap B')$

3. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión.

a) $(A \times B) \cap (C \times D) \subset (A \cap C) \times (B \cap D)$

1) Demostraremos que:

$\forall (x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Rightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ ...***Por 4***

2) Sea $(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \wedge (x,y) \in (C \times D)$

.........***Por 12***

3) $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D)$ .... ***Por 24***

4) $(x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D)$ ...... ***P.Asoc***

5) $x \in (A \cap C) \wedge y \in (B \cap D)$ .... ***Por 12***

6) $(x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ .... ***Por 24***

l.q.q.d

b) $(A \cap C) \times (B \cap D) \subset (A \cap C) \times (B \cap D)$

1) Demostraremos que:

$\forall (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$ ....***Por 4***

2) Sea $(x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \Rightarrow x \in (A \cap C) \wedge y \in (B \cap D)$

.....***Por 24***

3) $(x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D)$ ...... ***Por 12***

4) $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D)$ ..... ***P. Asoc***

5) $(x,y) \in (A \times B) \wedge (x,y) \in (C \times D)$ .... ***Por 24***

6) $(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$ ....***Por 12***

l.q.q.d

$\therefore$ De a) y b) tenemos que:

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión.

a) $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$

1) Demostraremos que:

$\forall (x,y) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ .....***Por 4***

2) Sea $(x,y) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C)$ ..... ***Por 24***

3) $x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C$ ...... ***Por 12***

4) $x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C$ .....**$p \wedge p \equiv p$**

5) $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$ ..... ***P.Asoc***

6) $(x,y) \in (A \times B) \wedge (A \times C)$ .... ***Por 24***

7) $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ .... ***Por 12***

l.q.q.d

b) $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$

1) Demostraremos que :

$\forall (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times (B \cap C)$ ....***Por 4***

2) Sea $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \wedge (x,y) \in (A \times C)$ ....***Por 12***

3) $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$. .... ***Por 24***

4) $(x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C)$ .... ***P.Asoc***

5) $x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$ ...... $\mathbf{p \wedge p \equiv p}$

6) $x \in A \wedge y \in (B \cap C)$ ...... ***Por 12***

7) $(x,y) \in A \times (B \cap C)$ .... ***Por 24***

l.q.q.d

$\therefore$ De a) y b) tenemos que: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

5. $\mathbf{A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)}$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

a) $\mathbf{A - (B - C) \subset (A - B) \cup (A \cap C)}$ ....***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall x \in A - (B - C) \Rightarrow x \in (A - B) \cup (A \cap C)$ ...... ***Por 4***

2) Sea $x \in A - (B - C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B - C)$ ......***Por 14***

3) $x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)$ ......***Por 15***

4) $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ .....***P.Distri***

5) $x \in (A - B) \vee x \in (A \cap C)$ ..... ***Por 14-12***

6) $x \in (A - B) \cup (A \cap C)$ ...... ***Por 10***

l.q.q.d

b) $\mathbf{(A-B)\ U\ (A \cap C) \subset A-(B-C)}$ .....***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall\ x \in (A-B)\ U\ (A \cap C) \Rightarrow x \in A-(B-C)$ ..... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A-B)\ U\ (A \cap C) \Rightarrow x \in (A-B)\ v\ (A \cap C)$ ... ***Por 10***

3) $(x \in A \wedge x \notin B)\ v\ (x \in A \wedge x \in C)$ .... ***Por 14-12***

4) $x \in A \wedge (x \notin B\ v\ x \in C)$ .... ***Prop.Distri***

5) $x \in A \wedge x \notin (B-C)$ .... ***Por 15***

6) $x \in A-(B-C)$ .... ***Por 14***

l.q.q.d

$\therefore$ De a) y b) tenemos que: $A-(B-C) = (A-B)\ U\ (A \cap C)$

6. $\mathbf{(A-B)-C = A-(B\ U\ C)}$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

a) $\mathbf{(A-B)-C \subset A-(B\ U\ C)}$ ....***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall\ x \in (A-B)-C \Rightarrow x \in A-(B\ U\ C)$ .... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A-B)-C \Rightarrow x \in (A-B) \wedge x \notin C$ ..... ***Por 14***

3) $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$ .... ***Por 14***

4) $(x \in A \wedge x \notin (B \cup C))$ ...... ***Por 11***

5) $x \in A - (B \cup C)$ .... ***Por 14***

b) $\mathbf{A - (B \cup C) \subset (A - B) - C}$ .....***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall x \in A - (B \cup C) \Rightarrow x \in (A - B) - C$ .....***Por 4***

2) Sea $x \in A - (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$ ..... ***Por 14***

3) $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$ ..... ***Por 11***

4) $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$ ..... ***Prop.Asoc***

5) $x \in (A - B) \wedge x \notin C$ ***...... Por 14***

6) $x \in (A - B) - C$ .... ***Por 14***

$\therefore$ De a) y b) tenemos que: $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

7. $\mathbf{A - B = A \cap B'}$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

$A - B = A - B' \Leftrightarrow (A - B) \subset (A \cap B')$ y $(A \cap B') \subset (A - B)$ ....***Por 6***

a) $\mathbf{A - B \subset A \cap B'}$

1) Demostraremos que:

$\forall x \in (A - B) \Rightarrow x \in (A \cap B')$ .....***Por 4***

2) Sea $x \in (A - B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$ .... ***Por 14***

3) $x \in A \wedge x \in B'$ .... ***Por 16***

4) $x \in (A \cap B')$ .... ***Por 12***

l.q.q.d

b) $A \cap B' \subset A - B$

1) Demostraremos que:

$\forall x \in (A \cap B') \Rightarrow x \in (A - B)$ .... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A \cap B') \Rightarrow x \in A \wedge x \in B'$ .... ***Por 12***

3) $x \in A \wedge x \notin B$ ...... ***Por 16***

4) $x \in (A - B)$ .... ***Por 14***

$\therefore$ De a) y b) tenemos que $A - B = A \cap B'$

8. $A \cup A = A$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

$A \cup A = A \Leftrightarrow (A \cup A) \subset A$ y $A \subset (A \cup A)$ ......***Por 6***

a) $(A \cup A) \subset A$

1) Demostraremos que:

$\forall x \in (A \cup A) \Rightarrow x \in A$ ...... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A \cup A) \Rightarrow x \in A \lor x \in A$ .... ***Por 10***

3) Hagamos $p \equiv x \in A$ y por lógica tenemos: $\mathbf{p \lor p \equiv P}$

4) luego $x \in A \lor x \in A \Rightarrow x \in A$ ....***Por paso 3***

l.q.q.d

b) $\mathbf{A \subset (A \cup A)}$

1) Demostraremos que:

$\forall x \in A \Rightarrow x \in (A \cup A)$ ...... ***Por 4***

2) Sea $x \in A \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \lor \underbrace{x \in A}_{p}$ ....***Por propiedad Idempot. de V***

3) $x \in (A \cup A)$ .... ***Por 10***

$\therefore$ De a) y b) tenemos que: $A \cup A = A$

9. $\mathbf{A \subset A}$

Demostración

1) Demostraremos que: $\forall x \in A \Rightarrow x \in A$ ..... ***Por 4***

2) Sea $x \in A$; haciendo $p \equiv x \in A$ y por una verdad lógica tenemos que $p \Rightarrow p$ para cualquier proposición p.

3) $\forall x \in A \Rightarrow x \in A$ ....***Por paso 2***

l.q.q.d

10. $\mathbf{A \cap U = A}$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

$A \cap U = A \Leftrightarrow (A \cap U) \subset A$ y $A \subset (A \cap U)$ .....***Por 6***

a) $\mathbf{(A \cap U) \subset A}$

1) Demostraremos que:

$\forall x \in (A \cap U) \Rightarrow x \in A$ .... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A \cap U) \Rightarrow x \in A \wedge x \in U$ .... ***Por 12***

3) haciendo $p \equiv x \in A$ y siendo $x \in U$ una

tautología tenemos que: $p \wedge V \equiv p$ ....***Ley lógica***

4) $x \in A$ ....***Por paso 3***

l.q.q.d

b) $\mathbf{A \subset (A \cap U)}$

Demostración análoga

$\therefore$ De a) y b) tenemos que $A \cap U = A$

11. **CONJUNTO VACÍO** (Es aquel conjunto que no tiene elementos)

Realizaremos la demostración por el absurdo

Demostración

1) Supongamos que existe $x \in \emptyset$ . ...**Hipótesis auxiliar**

2) Si $x \in \emptyset \Rightarrow x \neq x$ ....**Por 9**

3) $x = x$ propiedad reflexiva ....***Por 1***

4) Existe contradicción del paso 2) con el paso 3), esto resulta de haber supuesto que existe $x \in \emptyset$

5) $\therefore\ x \notin \emptyset$

l.q.q.d

12. $\emptyset \subset$ **A**

Demostración

1) Demostraremos que:

$\forall\ x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ ......***Por 4***

2) Sea $x \in \emptyset \Rightarrow x \neq x$ lo que es falso por la aceptación de la propiedad reflexiva que dice que $x = x$.

3) Haciendo $x \in A \equiv p$ tenemos que $F \Rightarrow p \equiv V$ (es una tautología para todo p.

4) $\forall x$; si $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ ......***Por paso 2) y 3)***

l.q.q.d

13. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

a) $(A - B) \times C \subset (A \times C) - (B \times C)$ ......***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall\ (x,y) \in (A - B) \times C \Rightarrow (x,y) \in (A \times C) - (B \times C)$ .....***Por 4***

2) Sea $(x,y) \in (A - B) \times C \Rightarrow x \in (A - B) \wedge y \in C$ ..... ***Por 24***

3) $x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C$ .... ***Por 14***

4) $(x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C) \vee \emptyset$ ..... ***p v ∅ ≡ p***

5) $(x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C)$ .... ***Ley lógic.***

6) $(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C)$ .... ***Prop. Distrib***
$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$

7) $(x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \notin (B \times C)$ .... ***Por 24-25***

8) $(x,y) \in (A \times C) - (B \times C)$ ....***Por 14***

l.q.q.d

b) $(A \times C) - (B \times C) \subset (A - B) \times C$ ....***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall\ (x,y) \in (A \times C) - (B \times C) \Rightarrow (x,y) \in (A - B) \times C$ ....***Por 4***

2) Sea $(x,y) \in (A \times C) - (B \times C) \Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \notin (B \times C)$ ....***Por 14***

3) $(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C)$ .... ***Por 24-25***

4) $(x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C)$ ... ***Prop. Distrib***

5) $(x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee \emptyset$ ...... ***Leyes lógic***

6) $(x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B)$ .... ***p v Ø ≡ p***

7) $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C$ .....***Prop.Asoc.Conmut***

8) $x \in (A - B) \wedge y \in C$ ....***Por 14***

9) $(x,y) \in (A - B) \times C$ ....***Por 24***

l.q.q.d

$\therefore$ De a) y b) tenemos que: $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

14. (A – B) U B = A U B

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

a) (A – B) U B ⊂ A U B ....***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall x \in (A - B) - C \Rightarrow x \in A - (B \cup C)$ ...... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A - B) \cup B \Rightarrow x \in (A - B) \vee x \in B$ .... ***Por 10***

3) $(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B$ .... ***Por 14***

4) $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B)$ ...***Prop.Distrib***

5) $x \in (A \cup B) \wedge (x \in B' \vee x \in B)$ .... ***Por 10-16***

6) $x \in (A \cup B) \wedge x \in U$ .... ***Por 17***

7) $x \in \{(A \cup B) \cap U\}$ .... ***Por 12***

8) $x \in (A \cup B)$ ....***Ejercicio 10***

l.q.q.d

b) $(A \cup B) \subset (A - B) \cup B$ .... ***Por 6***

1) Demostraremos que :

$\forall x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in [(A - B) \cup B]$ .... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ .... ***Por 10***

3) $(x \in A \vee x \in B) \wedge x \in U$ .... ***Ley lógica***

4) $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \notin B \vee x \in B)$ ***Análog. ejerc. anter***

5) $(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B$ .... ***Prop.Distrib***

6) $x \in (A - B) \vee x \in B$ .... ***Por 14***

7) $x \in (A - B) \cup B$ .... ***Por 10***

$\therefore$ De a) y b) tenemos que: $(A - B) \cup B = A \cup B$

15) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

a) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ ......***Por 6***

1) Demostraremos que :

$\forall x \in (A \cap B) \cup (A \cap B') \Rightarrow x \in A$ ...... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A \cap B) \cup (A \cap B') \Rightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap B')$ ..... ***Por 10***

3) $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B')$ ..... ***Por 12***

4) $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in B')$ .. ***Prop. Distrib.***

5) $x \in A \wedge x \in U$ ...... ***Por 17***

6) $x \in (A \cap U)$ .... ***Por 12***

7) $x \in A$ ...***Ejercicio 10***

l.q.q.d

b) $A \subset (A \cap B) \cup (A \cap B')$ .... P***or 6***

1) Demostraremos que:

$\forall x \in A \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap B')$ .... ***Por 4***

2) Sea $x \in A \Rightarrow x \in (A \cap U)$ ......***Ejerc. 10***

3) $x \in A \wedge x \in U$ .... ***Por 12***

4) $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in B')$ .... ***Por 17***

5) $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B')$ ...***Prop.Distrib***

6) $x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap B')$ .... ***Por. 12***

7) $x \in (A \cap B) \cup (A \cap B')$ .... ***Por 10***

l.q.q.d

$\therefore$ De a) y b) tenemos que $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

16) $\mathbf{A - (A - B) = A \cap B}$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

a) $\mathbf{A - (A - B) \subset A \cap B}$ ....***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall x \in A - (A - B) \Rightarrow x \in A \cap B$ .... ***Por 4***

2) Sea $x \in A - (A - B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (A - B)$ ...... ***Por 14***

3) $x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)$ .... ***Por 15***

4) $(x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$ .... ***Prop.Dist***

5) $(x \in A \wedge x \in A') \vee (x \in A \wedge x \in B)$ ...... ***Por 16***

6) $x \in \emptyset$ v $x \in (A \cap B)$ ..... ***Por 12-18***

7) $x \in \emptyset$ es falso por ejercicio (11) y sea $x \in (A \cap B)$ igual a **p** y

por lógica **F v p** $\equiv$ **p**

8) $x \in (A \cap B)$ .....***Por paso 7***

l.q.q.d

b) $\mathbf{A \cap B \subset A - (A - B)}$ ....***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall x \in (A \cap B) \Longrightarrow x \in A - (A - B)$ ...... ***Por 4***

2) Sea $x \in (A \cap B) \equiv p$ y por **F v p** $\equiv$ **p** tenemos:

3) $x \in \emptyset$ v $x \in (A \cap B)$ .... ***Por paso 2***

4) $(x \in A \wedge x \in A')$ v $(x \in A \wedge x \in B)$ ......***Por 18-12***

5) $(x \in A \wedge x \notin A)$ v $(x \in A \wedge x \in B)$ ......***Por 16***

6) $x \in A \wedge (x \notin A$ v $x \in B)$ .... ***Prop.Dist***

7) $x \in A \wedge x \notin (A - B)$ .... ***Por 15***

8) $x \in A - (A - B)$ .... ***Por 14***

l.q.q.d

$\therefore$ De a) y b) tenemos que: $A - (A - B) = A \cap B$

17) $A \cup (A \cap B) = A$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

a) $A \cup (A \cap B) \subset A$ ....***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall x \in A \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A$ .... ***Por 4***

2) Sea $x \in A \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A \vee x \in (A \cap B)$ ...... ***Por 10***

3) $x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)$ .... ***Por 12***

4) Haciendo $p \equiv x \in A$; $q \equiv x \in B$ tenemos por

lógica: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$x \in A$ .....***Por paso 3-4***

l.q.q.d

b) $A \subset A \cup (A \cap B)$ ....**Por 6**

1) Demostraremos que:

$\forall x \in A \Rightarrow x \in A \cup (A \cap B)$ .... ***Por 4***

2) Sea $x \in A$ y haciendo $\mathbf{p \equiv x \in A}$ tenemos que por las leyes

de la lógica: $\mathbf{p \vee (p \wedge q) \equiv p}$

3) $x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)$ ... ***Por paso 2***

4) $x \in A \ \vee \ x \in (A \cap B)$ .... ***Por 12***

5) $x \in A \cup (A \cap B)$ ....***Por 10***

l.q.q.d

$\therefore$ De a) y b) tenemos que $A \cup (A \cap B) = A$

18) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

Demostración

Realizaremos la demostración por doble inclusión

a) $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$ ....***Por 6***

1) Demostraremos que:

2) $\forall X \in P(A \cap B) \Rightarrow X \in P(A) \cap P(B)$ .... ***Por 4***

2) Sea $X \in P(A \cap B) \Rightarrow X \subset (A \cap B)$ .... **Por 8**

3) $X \subset A \ \wedge \ X \subset B$ ...... ***Por 12***

4) $X \in P(A) \ \wedge \ X \in P(B)$ ....***Por 8***

5) $X \in P(A) \cap P(B)$ ....***Por 12***

l.q.q.d

b) $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$ ....***Por 6***

1) Demostraremos que:

$\forall\ X \in P(A) \cap P(B) \Rightarrow X \in P(A \cap B)$ ...... ***Por 4***

2) Sea $X \in P(A) \cap P(B) \Rightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B)$ .... ***Por 12***

3) $X \subset A \quad \wedge \quad X \subset B$ .... ***Por 8***

4) $X \subset (A \cap B)$ ....***Por 12***

5) $X \in P(A \cap B)$ ....***Por 8***

l.q.q.d

$\therefore$ De a) y b) tenemos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

19) $\mathbf{P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)}$

Demostración

Realizaremos la demostración según la definición 4

1) Demostraremos que:

$\forall\ X \in P(A) \cup P(B) \Rightarrow X \in P(A \cup B)$ ..... ***Por 4***

2) Sea $X \in P(A) \cup P(B) \Rightarrow X \in P(A) \vee X \in P(B)$ ... ***Por 10***

3) $X \subset A \vee X \subset B$ ...... ***Por 8***

4) $X \subset (A \cup B)$ ..... ***Por 10***

5) $X \in P(A \cup B)$ .... ***Por 8***

l.q.q.d

20) $\mathbf{P(A \cup B) \not\subset P(A) \cup P(B)}$

Demostración

1) Demostraremos que existe:

$X \in P(A \cup B)$ tal que $X \notin P(A) \cup P(B)$

2) Sea $A = \{3\}$; $B = \{4\}$;

$P(A) = \{\emptyset, \{3\}\}$; $P(B) = \{\emptyset, \{4\}\}$

Por otro lado tenemos que $A \cup B = \{3, 4\}$ y

$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$ ....**(*)**

Y hallando $P(A) \cup P(B)$ tenemos :

$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}\}$..............**(* *)**

3) del paso 2 vemos que existe un $X = \{3, 4\}$ que pertenece a P (A U B) y **no pertenece** a $P(A) \cup P(B)$

4) $P(A \cup B) \not\subset P(A) \cup P(B)$ por el ejemplo dado en el paso 2.

LEYES QUE RIGEN EL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

I. PARA LA UNIÓN

1.1 $A \cup A = A$

1.2 $A \cup \emptyset = A$

1.3 $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$

1.4 $A \cup B = B \cup A$

1.5 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

II. PARA LA INTERSECCIÓN

2.1 $A \cap A = A$

2.2 $A \cap \emptyset = \emptyset$

2.3 $A \cap \mathrm{U} = A$

2.4 $A \cap B = B \cap A$

2.5 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2.6 $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

III. PARA LA INTERSECCIÓN Y LA UNIÓN

3.1 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3.2 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3.3 $A \cap (A \cup B) = A$

3.4 $A \cup (A \cap B) = A$

3.5 $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

3.6 $A' \cap (A \cup B) = A' \cap B$

3.7 $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

3.8 $A' \cup (A \cap B) = A' \cup B$

IV. PARA LA DIFERENCIA

4.1 $A - A = \emptyset$

4.2 $A - \emptyset = A$

4.3 $\emptyset - A = \emptyset$

4.4 $(A - B) \subset A$

4.5 $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$

4.6 $B \cap (A - B) = \emptyset$

4.7 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

4.8 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

4.9 $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

4.10 $(A - B) - C = (A - C) - B$

V. PARA EL COMPLEMENTO

5.1 $A \cup A' = U$

5.2 $A \cap A' = \emptyset$

5.3 $U' = \emptyset$ y $\emptyset' = U$

5.4 $(A')' = A$

5.5 $A - B = A \cap B'$

5.6 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ **leyes de D´ Morgan**

5.7 $A \cap B)' = A' \cup B'$ **leyes de D´ Morgan**

VI. PARA LA DIFERENCIA SIMÉTRICA

6.1 $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

6.2 $A \Delta B = (A \cup B) - (B \cap A)$

6.3 $A \Delta A = \emptyset$

6.4 $A \Delta \emptyset = A$

6.5 $A \Delta B = B \Delta A$

6.6 $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

6.7 $(A \Delta B) \cap CA = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

6.8 $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

1. **Simplificar**

$$[(A' \cap B') \cup (A \cup B)] \cap \{A \cup [B \cap (A - B)]\}$$

1) $[(A \cup B)' \cup (A \cup B)] \cap \{A \cup [B \cap (A \cap B')]\}$ .....**ley 5.7-5.6**

2) $U \cap \{(A \cup B) \cap [A \cup (A \cap B')]\}$ ....**ley 5.1-3.1**

3) $(A \cup B) \cap [A \cup (A \cap B')]$ ......**ley 2. 3**

4) $(A \cup B) \cap A$ ....**ley 3.4**

5) A ....**ley 3. 3**

1. Demostrar que : $(A \cup B) - (A \Delta B) = A \cap B$

1) $(A \cup B) \cap (A \Delta B)'$ ......**ley. 5.6**

2) $(A \cup B) \cap [(A \cup B) - (A \cap B)]'$ ....**ley . 6.2**

3) $(A \cup B) \cap [(A \cup B) \cap (A \cap B)']'$ .....**Ley. 5.6**

4) $(A \cup B) \cap [(A \cup B)' \cup (A \cap B)]$ .....**ley. 5. 8-5.5**

5) $(A \cup B) \cap (A \cap B)$ ....**ley. 3.7**

6) $[(A \cup B) \cap A] \cap B$ ....**ley. 2. 5**

7) $A \cap B$ .... **ley. 3. 3**

3. Simplificar

$$\{[(A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C)] \cup C\} \cap \{[(A \cup B) \cup (B \,\Delta\, C)] \cup (A \cup B \cup C)\}$$

1) $\{[(A \,\Delta\, B) \cap C] \cup C\} \cap \{[(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)] \cup (A \cup B \cup C)\}$

..... **ley. 6.7-6.8**

2) $C \cap \{[(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)'] \cup (A \cup B \cup C)\}$ ...**ley. 3.4-5.6**

3) $C \cap (A \cup B \cup C)$ ......**ley. 3.4**

4) $C \cap [C \cup (A \cup B)]$ ....**ley . 1.5**

5) C ....**ley. 3.3**

4. Demostrar que si $B \subset A$ entonces se cumple que:

$$(B \cap C) \cup (B - C) \cup (B - A) = B - A'$$

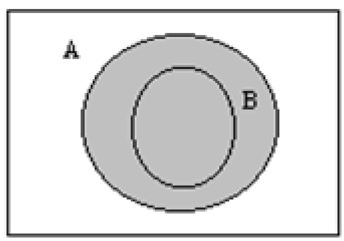
De la hipótesis observamos que:

$\cup$

$$B = B \cap A$$

Y

$$B \cap A' = \emptyset$$



1) $[(B \cap C) \cup (B \cap C')] \cup (B \cap A')$ ....**ley. 5. 6**

2) $[(B \cap C) \cup (B \cap C')] \cup \emptyset$ .... **hipótesis**

3) $[B \cap (C \cup C')] \cup \emptyset$ ....**ley. 3.1**

4) $B \cap U$ ......**ley. 5.1-1.2**

5) B ....**ley. 2. 3**

6) $B \cap A$ .... **hipótesis**

7) $B - A'$ ....**ley. 5. 6**

l.q.q.d

5. Simplificar: $(B \cap A') \cup (D \cap A') \cup A \cup (B \,\Delta\, D)$

1) $[A' \cap (B \cup D)] \cup A \cup (B \,\Delta\, D)$ .... ley**. 3.2**

2) $[A \cup (B \cup D)] \cup [(B \cup D) - (B \cap D)]$. ....ley**. 3.5-6.2**

3) $[A \cup (B \cup D)] \cup [(B \cup D) \cap (B \cap D)']$ ......**ley. 5.6**

4) $A \cup \{(B \cup D) \cup [(B \cup D) \cap (B \cap D)']\}$ .....**ley. 1.5**

5) $A \cup B \cup D$ ......**ley . 3.4**

6. Demostrar que: $[A - (B - D)]' \cap [A' \,\Delta\, (B - D)]' = B \cap (A \cup D)'$

1) $[A' \cup (B - D)] \cap \{[A' \cup (B - D)] \cap [A' \cap (B - D)]'\}'$

..... **ley. 5.6 - 5.5 - 6.2 - 5.7**

2) $[A' \cup (B - D)] \cap \{[A' \cup (B - D)]' \cup [A' \cap (B - D)]\}$ ...**ley. 5.8-5.5**

3) $[A' \cup (B - D)] \cap [A' \cap (B - D)]$ ....**ley. 3.7**

4) $A' \cap (B - D)$ .....**ley. 2.5 - 3.3**

5) $B \cap (A' \cap D')$ .....**ley. 5.6-5.5**

6) $B \cap (A \cup D)'$ ....**ley. 5.8**

l.q.q.d

7. Demostrar que: $\{A - [C \cup (C - B')]\} \cup \{[C \cup (C - B')] - A'\} = A$

1) $\{A - [C \cup (C \cap B)]\} \cup \{[C \cup (C \cap B')] - A'$ **..... ley. 5.6 - 5.5**

2) $(A - C) \cup (C - A')$ ......**ley. 3.4**

3) $A \cap (C \cup C')$ ..... **ley.5.6 - 5.5 - 3.2**

4) $A \cap U$ ......**ley . 5.1**

5) A ....**ley . 2.3**

l.q.q.d

8. Demostrar que: $[(A \cap B) \cup C']' \cup (B \cap C) = C$

1) $[(A \cap B)' \cap C] \cup (B \cap C)$ .....**ley. 5.7-5.5**

2) $C \cap [(A \cap B)' \cup B]$ .... **ley. 3.2**

3) $C \cap [(A' \cup (B \cup B')]$ ...**ley. 5.8 - 1.5**

4) $C \cap U$ ...**ley. 5.1 - 1.3**

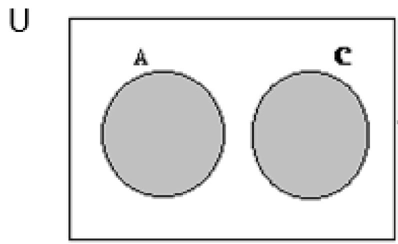
5) C

l.q.q.d

9. Demostrar que si $C \subset A'$ entonces se cumple que:

$$\{ [(C \cup B) \cap A] \cup C' \} \cap B = B \cap C'$$

Demostración De la hipótesis observamos que:



Si $C \subset A'$ se tiene:

$C \cap A = \emptyset$

1) $\{ [(C \cup B) \cap A] \cup C' \} \cap B$

2) $[(C \cap A) \cup (A \cap B) \cup C'] \cap B$ ......**ley. 3.2**

3) $[\emptyset \cup (A \cap B) \cup C'] \cap B$ .... **Hipótesis**

4) $[(A \cap B) \cap B] \cup (C' \cap B)$ **ley.1.2- 3.2**

5) $B \cap (A \cup C')$ ....**ley. 2.1-3.2**

6) $B \cap C'$ ....**Hipótesis**

l.q.q.d

10. Simplificar

$$\{ [C \cup (B - A')] \cap [B - (C \cup A)']' \} \cup B$$

1) $\{ [C \cup (B \cap A)] \cup B \} \cap \{[B \cap (C \cup A)]' \cup B\}$ ...**Prop. 5.6-5.5 - 3.1**

2) $(C \cup B) \cap [(B' \cup B) \cup (C \cup A)'$ ... **Prop. 1.5-3.4**

3) $(C \cup B) \cap [U \cup (C \cup A)']$ **Prop.5.1**

4) $(C \cup B) \cap U$ ....**ley . 1.3**

5) $C \cup B$ ....**ley. 2.3**

11. Simplificar : $\{[(A \cup B') \cap (A \cap B)] \cup (A \cap B')\} \cup (C - A)$

1) $\{\{[(A \cup B') \cap A] \cap B\} \cup (A \cap B')\} \cup (C \cap A')$ .....**ley. 2.5 - 5.6**

2) $[(A \cap B) \cup (A \cap B')] \cup (C \cap A')$ .... **ley. 3.**

3) $[A \cap (B \cup B')] \cup (C \cap A')$ **ley.3.2**

4) $(A \cap U) \cup (C \cap A')$ **ley.5.1**

5) $A \cup (C \cap A')$ ....**ley .2. 3**

6) $A \cup C$ ....**ley . 3.5**

12. Demostrar que: $(B \cap C) \cup (B - C) \cup (B - A) = B$

Demostración

1) $(B \cap C) \cup (B \cap C') \cup (B \cap A')$ ....**ley. 5.6**

2) $[B \cap (C \cup C')] \cup (B \cap A')$ ....**ley. 3.2**

3) $(B \cap U) \cup (B \cap A')$ ....**ley. 5.1**

4) $B \cup (B \cap A')$ ....**ley. 2.3**

5) B ....**ley. 3 4**

EJERCICIOS PROPUESTOS

Simplificar

1. $[(C - A) \cup A'] - [(B \cup A') - (B \cap A)]$ **Rpta.** $\emptyset$

2. $\{(A' \cup B') \cap [(A \cup B) - A]\}'$ **Rpta.** U

3. $\{[(A - B) - A]' \cap A\} \,\Delta\, [(A \cup C) - (A - C')']$ **Rpta.** $A \cap C'$

4. $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, (A \cap B)$ **Rpta.** $A \cup B$

5. $\{[(A - B') \cup (B' - A)] - B\} \cup \{B - [(A \cap B) \cup (A \cup B)']\}$ **Rpta.** $A \cap C'$

6. $[A - (B \,\Delta\, C)] \cap [(B - A) \,\Delta\, C]$ **Rpta.** $A \cap B \cap C$

7. $[A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)] \,\Delta\, (C \,\Delta\, B')$ **Rpta.** A'

Demostrar que:

8. $A \cup B \equiv \{B' - [(A' - B)' - B]\}'$

9. $\{[A \cap (C \cup D \cup B)]' \,\Delta\, (A \cap B)'\} - D \equiv (A - C') - (B' - D)'$

CAPÍTULO 2

EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

Diremos Sistema de Números Reales a un Conjunto R, provisto de dos operaciones adición (+) y multiplicación (.) (llamadas leyes de composición interna) y una relación de orden denotada por " < "

Tal que se cumplen los siguientes axiomas como:

+ : R x R $\longrightarrow$ R

(a, b) $\longrightarrow$ + (a, b) = a + b

1. Cerradura
2. Conmutativa
3. Asociativa
4. Elemento de identidad
5. Elemento inverso

. : R x R $\longrightarrow$ R

(a, b) $\longrightarrow$. (a, b) = a . b

1. Cerradura
2. Conmutativa
3. Asociativa
4. Identidad multiplicativa
5. Inverso multiplicativo

Axiomas para la relación de orden " < "

1. Ley de la tricotomía
2. Si $a < b$ y $b < c \rightarrow a < c$
3. Si $a < b$ y $c \in R \rightarrow a + c < b + c$
4. Si $a < b$ y $c > 0 \rightarrow a.c < b.c$

Axiomas para la igualdad:

1. Dicotomía
2. Reflexiva
3. Simétrica
4. Transitiva
5. Unicidad de la suma
6. Unicidad de la multiplicación

Axiomas del Supremo

Todo subconjunto de números reales acotado superiormente tiene un supremo

Y otros Axiomas y Teoremas que se cumplen en R

DESIGUALDADES

Decimos "desigualdad" a la expresión donde un número es mayor o menor que otro. (7 < 8)

INECUACIONES

La inecuación es una desigualdad donde hay una o más cantidades desconocidas a la cual llamaremos incógnita y que se cumple o verifica para algunos valores de la incógnita o incógnitas.

Ejemplo:

La desigualdad $2\mathbf{x} - 7 < \mathbf{x} + 1$, es una inecuación porque tiene una incógnita "x" que se verifica para valores menores que 8.

Intervalos

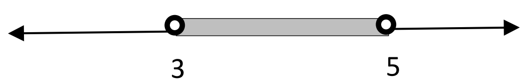
Son sub conjuntos de números reales que se utilizan para expresar la solución de las inecuaciones.

Tipos de Intervalos

a) **Intervalo Cerrado:**

$$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \ / \ \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

Ejemplo: $3 \leq x \leq 5$



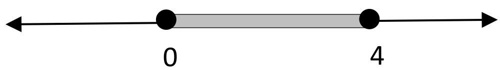
x ∈ $[3,\ 5]$

b) **Intervalo Abierto:**

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle = \{\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{R}\ \ /\ \ \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\ \}$$

Ejemplo: $0 < x < 4$

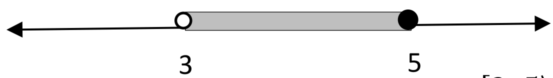
x $\in \langle 0,\ 4\rangle$



c) Intervalo Cerrado en a y Abierto en b:

$$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle = \{\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{R}\,/\ \ \boldsymbol{a}\ \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\ \}$$

Ejemplo: $3 \leq x < 5$



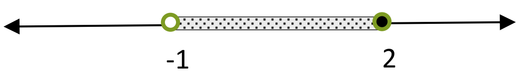
x $\in [3,\ 5\rangle$

d) Intervalo Abierto en a y Cerrado en b

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{R}\,/\,\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x}\ \leq \boldsymbol{b}\ \}$$

Ejemplo $-1 < \mathrm{x} \leq \mathbf{2}$

x $\in \langle -1, 2]$



e) Intervalos Infinitos

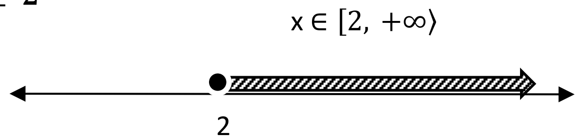
$$\langle \boldsymbol{a},\ +\infty\rangle = \{\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{R}\,/\ \ \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}\ \}$$

Ejemplo x > **2**

x $\in \langle \mathbf{2},\ +\infty\rangle$

$[\boldsymbol{a},\ +\infty\rangle = \{\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{R}\ /\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\ \}$

Ejemplo $\quad x\ \geq\ \mathbf{2}$

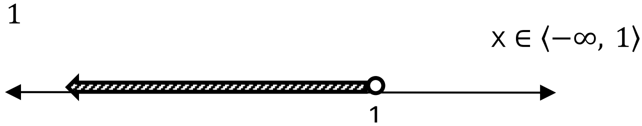


$\langle -\infty,\ \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{R}\ /\ \boldsymbol{x}\ \leq \boldsymbol{b}\ \ \}$

Ejemplo $\quad x \leq\ \ 0$

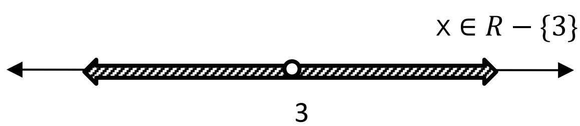
$\langle -\infty,\ \boldsymbol{b}\rangle = \{\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{R}\ \ /\ \ \ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\ \ \}$

Ejemplo $\quad x < 1$



$\langle -\infty,\ +\infty\rangle = \{\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{R}\ \ \}$

$\langle -\infty,\ \boldsymbol{a}\rangle\ \ \mathrm{U}\ \ \langle \boldsymbol{b},\ +\infty\rangle = \{\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{R}\ /\ \ \boldsymbol{x}\ \neq \boldsymbol{a}\}$



Ejemplo 1. ***Demostrar que:*** **Si** $\boldsymbol{x \in [2,\ 4]}$ $\boldsymbol{entonces}$ $\boldsymbol{2x+3 \in [7,\ 11]}$

$$\boldsymbol{x} \in [\mathbf{2},\ \mathbf{4}] \quad \Rightarrow \quad 2 \le x \le 4, \quad multiplicando\ por\ 2$$

$$4 \le 2x \le 8\ ,\ sumando\ 3$$

$$7 \le 2x+3 \le 11$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{Si\ \ x} \in [\mathbf{2},\ \mathbf{4}] \ \ \boldsymbol{entonces} \quad \boldsymbol{2x+3} \ \in \ [\mathbf{7},\ \mathbf{11}]$$

Ejemplo 2. ***Demostrar que:*** **Si** **2x – 6** $\in \langle \mathbf{-4},\ \mathbf{4} \rangle$ $\boldsymbol{entonces}$ $\boldsymbol{x} \in \langle \mathbf{1},\ \mathbf{5} \rangle$

Para el lector

Propiedades de las Inecuaciones

1. $a\,.\,b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0$

2.- $\boldsymbol{a^2 = b} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{b}$

3.- $\boldsymbol{a^2 = b^2} \Leftrightarrow a = \pm\, b$

4.- $\boldsymbol{a < b} \Leftrightarrow \boldsymbol{-a > -b}$

5.- $\boldsymbol{a^2 \ge 0}\ ,\ \forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$

6.- **si** $\boldsymbol{a < 0} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{a} < 0}$

7.- **si** $\boldsymbol{a > 0} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{a} > 0}$

8.- $\boldsymbol{a^2 < b^2} \Longrightarrow \boldsymbol{a^2 - b^2} < 0 \Longrightarrow (a-b)(a+b) < 0$

9.- $\boldsymbol{a < b} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{b} < \frac{1}{a}}$ **,** $a\ \ y\ \ b\ tienen\ el\ mismo\ signo$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Consideremos: a.x + b > 0 ; **(≥ 0 ; < 0 ; ≤ 0)** con a ≠ 0 , $a,\ b \in R$

Ejemplo:

2x – 3 < x – 1 ≥ 0

Para resolver la inecuación procedemos de la siguiente manera:

a) 2x – 3 < x – 1 **b) x – 1 ≥ 0**

La solución final es la Sol. a) ∩ Sol. b)

Observación

Si **x + 3 > x + 2 ,** En estos casos cuando desaparece la variable o mejor dicho la incógnita evaluamos la desigualdad que queda si esta desigualdad fuera **VERDADERA** la solución de la Inecuación son los Reales caso contrario si la desigualdad es **FALSA** la solución es el vacío

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son de la forma siguiente:

$$x^2 + bx + c \ > 0 \ ; (\geq 0 \ ; < 0 \ ; \ \leq 0) \quad \text{con } a \neq 0,\ a,\ b,\ c\ \in R.$$

Para analizar la solución de estas inecuaciones, veamos la solución del trinomio:

$ax^2 + bx + c = 0$

Se presentan tres casos donde $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ tal que $\triangle = b^2 - 4ac$ de acuerdo a la discriminante tenemos:

1. Si $\triangle > 0$, Existen dos raíces reales r_1 y r_2 diferentes, es decir $r_1 \neq r_2$

2. Si $\triangle = 0$, Existen dos raíces reales r_1 y r_2 iguales, es decir $r_1 = r_2$

3. Si $\triangle < 0$, No existen raíces reales, es decir $r_1 = \alpha + \beta i$ y $r_2 = \alpha - \beta i \in \mathbb{C}$

MÉTODOS PARA RESOLVER UNA INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

I. Métodos de los Puntos Críticos

II. Completando Cuadrados y usando las siguientes proposiciones:

a) $a^2 < b \iff -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

b) $a^2 > b \iff a > \sqrt{b} \lor a < -\sqrt{b}$

III. Aplicando la regla de los signos para la multiplicación, según sea el caso:

a) $a.b > 0 \iff [a > 0 \land b > 0] \lor [a < 0 \land b < 0]$

b) $a.b < 0 \iff [a > 0 \land b < 0] \lor [a < 0 \land b > 0]$

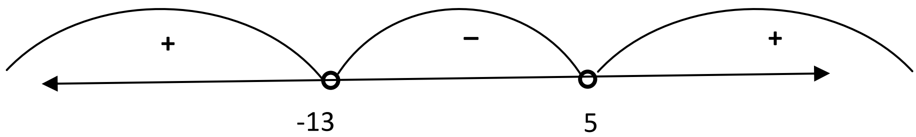
I.- Método de los Puntos Críticos

Ejemplo 1: $\boldsymbol{x^2 + 8x - 65 < 0}$

1. Se factoriza por cualquier método: $(x + 13)(x - 5) < 0$
2. Luego se hallan las raíces haciendo cada factor igual a cero:

$x = -13 \quad \land \quad x = 5$

2. Se ubican estos valores en la recta real, se coloca el signo “mas” y “menos” alternadamente empezando por la derecha como se observa en el gráfico:
3.

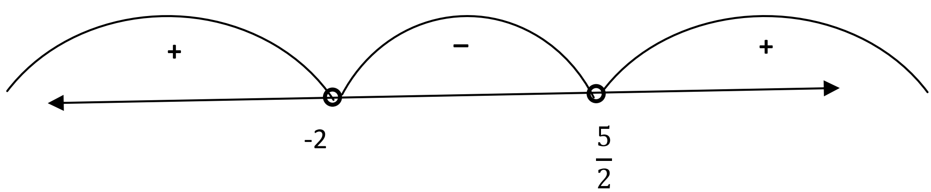


4. Para dar la solución se va a considerar el intervalo donde se ha colocado el signo menos (esto por la desigualdad menor. Si fuera la desigualdad mayor tomaríamos los intervalos donde se ha colocado el signo mas):

$$\therefore Conj.\ Sol\ \ x \in \langle -13,\ 5\rangle$$

Ejemplo 2: $\boldsymbol{2x^2 - x - 10 > 0}$

1. $(x+2)(2x-5) > 0$
2. $x = -2 \quad \wedge \quad x = \frac{5}{2}$
3.



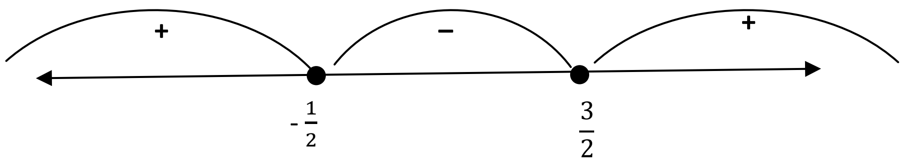
4. Conj. Sol. $x \in \langle -\infty, \ -2\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, \ +\infty \right\rangle$

Ejemplo 3: $\mathbf{4x^2 - 4x - 3 \leq 0}$

1. $(2x-3)(2x+1) \leq 0$

2. $x = \frac{3}{2} \quad \wedge \quad x = -\frac{1}{2}$

3.



4. Conj. Sol. $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

II.- Completando Cuadrados y usando las siguientes proposiciones:

a) $a^2 < b \iff -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$, si b > 0

b) $a^2 > b \iff a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}$, si b ≥ 0

Ejemplo 1: $\mathbf{x^2 + 8x - 65 < 0}$

1.- Completamos cuadrados tenemos: $(x+4)^2 < 81$

2.- Usando: $\boldsymbol{a^2 < b \iff -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}}$

$$-9 < x + 4 < 9 \quad \Rightarrow \quad -13 < x < 5$$

$$\therefore \ Conj.\ Sol. \quad x \in \langle -13,\ 5 \rangle$$

Observación

Al completar cuadrados se pueden presentar los siguientes casos que pueden ser resueltos de inmediato:

1.- $(x-3)^2 > -2$ .... $\boldsymbol{x \in R}$

2.- $(x-3)^2 < -2$ .... $\boldsymbol{x \in \emptyset}$

3.- $(x-3)^2 > 0$ .... $\boldsymbol{x \in R - \{3\}}$

4.- $(x-3)^2 \geq 0$ .... $\boldsymbol{x \in R}$

5.- $(x-3)^2 < 0$ .... $\boldsymbol{x \in \emptyset}$

6.- $(x-3)^2 \leq 0$ .... $\boldsymbol{x = \{3\}}$

III.-Aplicando la regla de los signos, según sea el caso:

a) $a.b > 0 \iff [a > 0 \wedge b > 0] \vee [a < 0 \wedge b < 0]$

b) $a.b < 0 \iff [a > 0 \wedge b < 0] \vee [a < 0 \wedge b > 0]$

Ejemplo 1: $\boldsymbol{2x^2 - x - 10 > 0}$

1.- $(x+2)(2x-5) > 0$

2.- $aplicaremos$:

a) $a.b > 0 \iff [a > 0 \wedge b > 0] \vee [a < 0 \wedge b < 0]$

$\iff [x+2 > 0 \wedge 2x-5 > 0] \vee [x+2 < 0 \wedge 2x-5 < 0]$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\, \mathrm{x} > -2 \quad \wedge \quad x > \frac{5}{2} \,\right] \quad \vee \quad \left[\, \mathrm{x} < -2 \quad \wedge \quad x < \frac{5}{2} \,\right]$$

3.- Interceptando y uniendo los intervalos:

Conj. Sol. $x \in \langle -\infty, \ -2\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, \ +\infty \right\rangle$

Inecuaciones con Factores Cuadráticos Irreducibles

Una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$, con coeficientes reales es irreducible si $\triangle = b^2 - 4ac$ es negativo. ($\triangle < 0$)

Nota.

La expresión cuadrática será remplazada por la **unidad** en caso que haya más factores se seguirá trabajando con el resto, si fuera el único factor veremos si la expresión es verdadera la solución son los reales caso contrario la solución será el vacío.

Ejemplos:

1. $\boldsymbol{x^2 + 4x + 5 > 0}$
2. $\boldsymbol{x^2 + 3x + 4 < 0}$
3. $\boldsymbol{2x^2 - 3x + 2 > 0}$

Ejemplo: **Resolver**: $\frac{\boldsymbol{x^2 - x - 12}}{\boldsymbol{x^2 - 2x + 3}} < 0;$

En la expresión $\boldsymbol{x^2 - 2x + 3}$ su **Δ < 0**

Solamente nos queda: $\boldsymbol{x^2 - x - 12} < 0$

Factorizando (x – 4)(x+ 3) < 0

$\therefore$ Conj. Sol. $x \in \langle -3, \ 4\rangle$

INECUACIONES POLINÓMICAS (Método de los Puntos Críticos)

Caso I – Las raíces del Polinomio P(x) son de multiplicidad Impar:

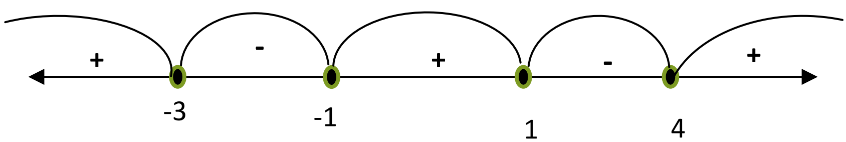
Pasos a seguir:

1. Se coloca el signo "+" y "-" alternadamente de derecha a izquierda.

2. Si P(x) > 0, la solución serán los intervalos donde se asigna el signo "+"

3. Si P(x) < 0, la solución serán los intervalos donde se asigna el signo "-"

1.- Resolver $(x+3)(x+1)(x-1)(x-4) \geq 0$

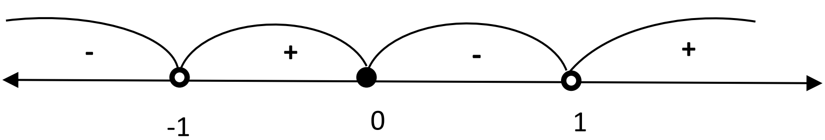


Conj. Sol. x ∈ ⟨−∞ , 3] U [-1, 1] U [4, +∞⟩

2.- Resolver $x \geq \frac{1}{x}$

$$x - \frac{1}{x} \geq 0 \rightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0$$

$\frac{(x-1)(x+1)}{x} \geq 0$ **x = 1 ; x = -1 ; x = 0**

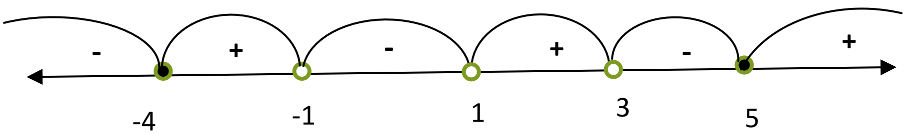


Conj. Sol. x ∈ [-1, 0⟩ U [1, +∞⟩

3.- Resolver $\frac{x^2-x-20}{x^3-3x^2-x+3} \leq 0$

Factorizando tenemos: $$\frac{(x+4)(x-5)}{(x+1)(x-1)(x-3)} \leq 0$$

$x = -4$; $x = -1$, ; $x = 1$; $x = 3$, $x = 5$



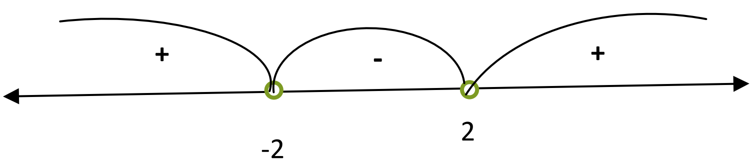
Conj. Sol. $x \in \langle -\infty , 4] \cup \langle -1, 1\rangle \cup \langle 3 , 5]$

4.- Resolver $(4-x^2)(x^2+4)(x-2)^2 < 0$

$$-(x^2-4)(x^2+4)(x-2)^2 < 0$$

$(x^2+4) = 1$ por ser $\Delta < 0$ $\rightarrow$ $(x+2)(x-2)^3 > 0$

$x = -2$; $x = 2$

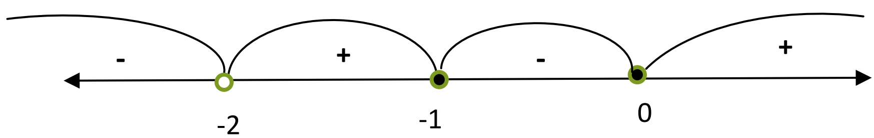


Conj. Sol. $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$

5.- Resolver $\frac{(1-x)(x+x^2)}{x^2+x-2} \geq 0$

$$\frac{-(x-1)x(x+1)}{(x+2)(x-1)} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(x-1)x(x+1)}{(x+2)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{x(x+1)}{(x+2)} \leq 0 \; ; \quad x \neq 1 \quad \rightarrow \quad x = -2 \; ; \; x = -1 \; ; \; x = 0$$



Conj. Sol. $x \in \langle -\infty, \; -2\rangle$ U [-1, 0]

Caso II – Las raíces del polinomio P(x) son de multiplicidad par e impar:

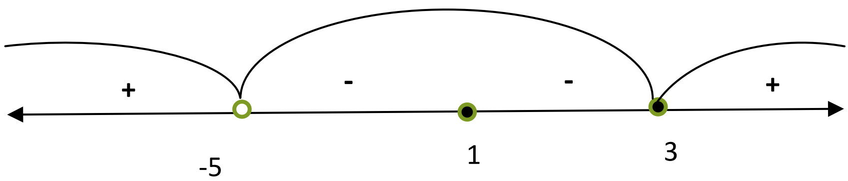
Pasos a seguir:

1. Se inicia con el signo "+" de derecha a izquierda, si la raíz siguiente es de multiplicidad **par** se vuelve a repetir el signo colocado anteriormente caso contrario se alterna con el otro signo y así sucesivamente.

2. Se toman los intervalos según las desigualdades como en el **caso I**

3. Cuando hay intervalos largos hay que analizar los puntos que se encuentra en el interior de ese intervalo, para agregarlos o retíralos del resultado final.

1.- Resolver: $\dfrac{(x-1)^2(x-3)}{x+5} \geq 0$



Conj. Sol. $x \in \langle -\infty\,, \; -5\rangle \cup [3, +\infty\rangle \cup \{1\}$

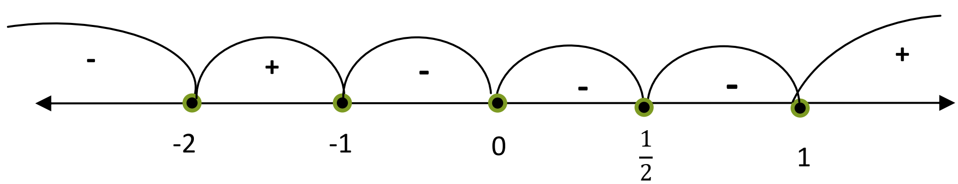
2.- Resolver $\mathbf{3(2x-1)x^2(x^2-1)(2-3x-2x^2) \leq 0}$

$$-3(2x-1)x^2(x-1)(x+1)(2x^2+3x-2) \leq 0$$

$$3(2x-1)x^2(x-1)(x+1)(2x-1)(x+2) \geq 0$$

$$(2x-1)^2(x+2)x^2(x-1)(x+1) \geq 0$$

$$x=-2; \quad x=-1; \quad x=0\,; \quad x=\frac{1}{2}; \quad x=1$$



Conj. Sol. $x \in [-2, -1] \cup [1, +\infty\rangle \cup \{0, \frac{1}{2}\}$

3.- Resolver $$\frac{(x^2-2x+2)^3(1-x)^5(x+2)^2}{x^2(x^2+5x+4)} \geq 0$$

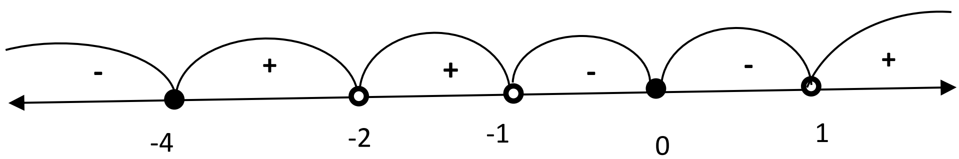
observe que:

$$x^2 - 2x + 2 \implies \triangle < 0$$

$$\frac{-(x-1)^5(x+2)^2}{x^2(x+1)(x+4)} \geq 0$$ considerando el signo " – "

$$\frac{(x-1)(x+2)^2}{x^2(x+1)(x+4)} \leq 0 \quad ;$$

$$x = -4; \quad x = -2; \quad x = -1; \quad x = 0, \quad x = 1$$



Conj. Sol. $x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle -1, 1] \cup \{-2\} - \{0\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $(x^2 - 1)(x^2 + 9)(x + 4)(x - 5) > 0$

2. $x^4 < x^2$

2.- $\frac{x-2}{x+3} \leq \frac{x+1}{x}$

3. $(3 - x)^3(x^2 - 1)^2(1 - x)^5 x > 0$

4. $\frac{(x^2 + x - 6)(x^2 - x - 6)}{(x^2 - 4)(x^2 - 2)} > 0$

5. $\frac{(x^2 + 5)(x + 1)(x - 2)^2}{(x - 2)(x + 1)(x - 3)} \geq 0$

6. $\frac{(x^2 - 5)(x^2 + 7)}{(x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 2)} \geq 0$

7. $\frac{x^2 - 2x}{x - 4} \leq \frac{x + 8}{2}$

8. $\frac{(x + 2)(x^2 - 1)(x + 3)^2}{(x + 3)^8(x - 5)x^8} \geq 0$

9. $\frac{(x^3 - 8)(x^2 - 9)^2(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)(x - 1)} \leq 0$

10. $x(2x + 1)(x - 2)(2x - 3) > 63$

ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Definición del Valor Absoluto

$$|P(x)| = \begin{cases} P(x)\,, & si\ P(x) \geq 0 \\ -P(x) & si\ P(x) < 0 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2\,, & si\ x-2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2 \\ -(x-2), & si\ x-2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 2 \end{cases}$$

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1\,, & si\ x^2-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle \\ -(x^2-1) & si\ x^2-1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -1,\ 1\rangle \end{cases}$$

Propiedades

1. $|x| \geq 0,\ \forall\, x \in R\,,\ |x| = 0 \iff x = 0$
2. $|x.y| = |x||y|$
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
4. $|x| = |-x|$
5. $|x-y| = |y-x|$

6.- $|x+y| \leq |x| + |y|$

7. $|x - y| \geq \left||x| - |y|\right|$

8. $|x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2$

9. $|x^2| = x^2$

10. $|x| \geq x \wedge |x| \geq -x$

11. $|x| = |y| \iff x = y \vee x = -y$

12. $|x| + |y| = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$

13. $a < x < b \Rightarrow 0 \leq |x| < \max\{|a||b|\}$

14. $\sqrt[n]{x^n} = |x| \ si \ n \ es \ par$

15. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \ si \ n \ es \ par$

16. $\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \ si \ n \ es \ impar$

17. $|a| < |b| \iff a^2 < b^2$

18. $|x| = \mathrm{b} \iff [b \geq 0 \wedge (x = b \vee x = -b)]$

19. $|x| \leq \mathrm{b} \iff [b \geq 0 \wedge (-b \leq x \leq b)]$

20. $|x| < \mathrm{b} \iff [b > 0 \wedge (-b < x < b)]$

21. $|x| \geq \mathrm{b} \iff x \geq b \vee x \leq -b$

22. $|x| > \mathrm{b} \iff x > b \vee x < -b$

Y otras mas ....

1. Resolver la ecuación $|2x+2| = 6x - 18$

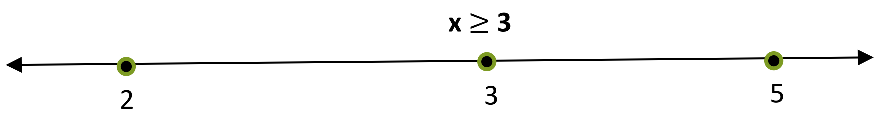
Solución

Aplicando : $|x| = \mathrm{b} \Leftrightarrow [\, b \geq 0 \;\wedge\; (x = b \vee x = -b)\,]$

$$|2x+2| = 6x - 18 \quad \Leftrightarrow$$

$$6x - 18 \geq 0 \;\wedge\; (2x+2 = 6x - 18 \quad \vee \quad 2x+2 = -6x + 18\,)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x \geq 3 \;\wedge\; (x = 5 \quad \vee \quad x = 2\,)}$$



La solución sería $x = \{\, 5\}$

2. Resolver la ecuación $\left|x^2 + 6x + 1\right| = 2x + 6$

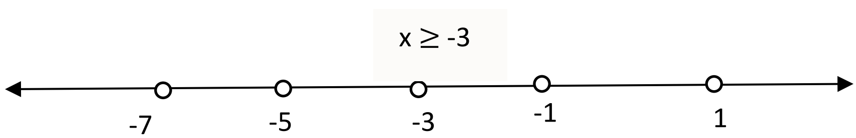
Solución

$|x^2 + 6x + 1| = 2x + 6$ desarrollando tenemos:

$$2x + 6 \geq 0 \;\wedge\; (x^2 + 6x + 1 = 2x + 6 \quad \vee \quad x^2 + 6x + 1 = -2x - 6)$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq -3 \;\wedge\; (x^2 + 4x - 5 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 8x + 7 = 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq -3 \;\wedge\; (x = \{1, -5\} \quad \vee \quad x = \{-1, -7\}$$



La solución de la ecuación sería $x = \{-1,\, 1\}$

3. Hallar el valor de la expresión $\dfrac{|4x+7| - |x-7|}{x}$ **si** $x \in \langle 2,\ 5\rangle$

Solución

Considerando la definición de $|4x+7|$ y $|x-7|$ tenemos:

$$|4x+7| = \begin{cases} 4x+7\,, & si\ \ x \geq -\dfrac{7}{4} \\ -4x-7 & si\ \ x < -\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

$$|x-7| = \begin{cases} x-7\,, & si\ \ x \geq 7 \\ -x+7 & si\ \ x < 7 \end{cases}$$

Ahora $x \in \langle 2,\ 5\rangle \Leftrightarrow \dfrac{|4x+7| - |x-7|}{x} = \dfrac{4x+7-(-x+7)}{x} =$

$\dfrac{5x}{x} = 5$ $\quad\therefore$ si $x \in \langle 2,\ 5\rangle \Rightarrow \dfrac{|4x+7| - |x-7|}{x} = 5$

4. Hallar el valor de la expresión $\dfrac{|5x+4| - |4+3x|}{x}$ **si** $x \in \langle 0,\ 3\rangle$

Solución

Considerando la definición de $|5x+4|$ y $|3x+4|$ tenemos:

$$|5x+4| = \begin{cases} 5x+4\,, & si\ \ x \geq -\dfrac{4}{5} \\ -5x-4 & si\ \ x < -\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$|3x+4| = \begin{cases} 3x+4\,, & si\ \ x \geq -\dfrac{4}{3} \\ -(3x+4), & si\ \ x < -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Ahora $x \in \langle \mathbf{0},\ \mathbf{3} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{5x} + \mathbf{4}| = \mathbf{5x} + \mathbf{4}$ y $|\mathbf{4} + \mathbf{3x}| = 4 + 3x$

como $x \in \langle 0,\ 3 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|5x + 4| - |4 + 3x|}{x} =$

$$\frac{5x + 4 - (4 + 3x)}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

$\therefore$ si $x \in \langle 0,\ 3 \rangle \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|5x + 4| - |4 + 3x|}{x} = 2$

5. Hallar el valor de la expresión $\dfrac{|\mathbf{5x} - \mathbf{20}| - |\mathbf{3x} - \mathbf{20}|}{\boldsymbol{x}}$ **si** $\boldsymbol{x} \in \langle -\mathbf{3},\ -\mathbf{2} \rangle$

Solución

Considerando la definición de $|5x - 20|$ y $|3x - 20|$ tenemos:

$$|5x - 20| = \begin{cases} 5x - 20\,, & si\ \ x \geq 4 \\ -5x + 20 & si\ \ x < 4 \end{cases}$$

$$|3x - 20| = \begin{cases} 3x - 20\,, & si\ \ x \geq \dfrac{20}{3} \\ 20 - 3x & si\ \ x < \dfrac{20}{3} \end{cases}$$

Ahora $x \in \langle -3,\ -2 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad |5x - 20| = 20 - 5x$ y

$|3x - 20| = 20 - 3\mathrm{x}$

como $x \in \langle \mathbf{-3},\ \mathbf{-2}\rangle \iff \dfrac{|5x - 20| - |3x - 20|}{x} =$

$\dfrac{20 - 5x - (20 - 3x)}{x} = \dfrac{-2x}{x} = -2$

$\therefore$ si $x \in \langle -3,\ -2\rangle \Rightarrow \dfrac{|5x - 20| - |3x - 20|}{x} = -2$

6. Resolver la inecuación $\left|\dfrac{\mathbf{2x-5}}{\mathbf{x-6}}\right| < \mathbf{3}$

Solución

Aplicando: $|x| < \mathrm{b} \iff [\, b > 0 \ \wedge\ (b < x < -b)\,]$

$$\left|\frac{2x-5}{x-6}\right| < 3 \iff -3 < \frac{2x-5}{x-6} < 3$$

$$\iff \frac{2x-5}{x-6} > -3 \quad \wedge \quad \frac{2x-5}{x-6} < 3$$

$$\iff \frac{5x-23}{x-6} > 0 \quad \wedge \quad \frac{x-13}{x-6} > 0$$

$$\iff x \in \left\langle -\infty,\ \frac{23}{5}\right\rangle \cup \langle 6, +\infty\rangle \quad \wedge \quad x \in \langle -\infty,\ 6\rangle \cup \langle 13, +\infty\rangle$$

$$\therefore \quad x \in \left\langle -\infty,\ \frac{23}{5}\right\rangle \cup \langle 13,\ +\infty\rangle$$

7. Hallar el menor de los números M tales que: $\left|\frac{x-9}{x-6}\right| \leq M$, **si** $x \in [2,\ 5]$

Solución

$\frac{x-9}{x-6} = 1 - \frac{3}{x-6}$ Ahora como $x \in [2,\ 5] \Rightarrow 2 \leq x \leq 5$

$\Rightarrow \quad -4 \leq x - 6 \leq -1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{1}{x-6} \leq -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{x-6} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} \leq -\frac{3}{x-6} \leq 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} + 1 \leq 1 - \frac{3}{x-6} \leq 3 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{4} \leq \frac{x-9}{x-6} \leq 4$$

$$\Rightarrow \quad -4 \leq \frac{7}{4} \leq \frac{x-9}{x-6} \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x-9}{x-6}\right| \leq 4$$

$$\therefore \ M = 4$$

8. Hallar el mayor número M de tal manera que: $\frac{|x^2 + 6x + 14|}{x^3 + 27} \geq M$, **si** $x \in [-2,\ 2]$

Solución $\quad x^2 + 6x + 14 = (x+3)^2 + 5 \qquad$ Ahora como:

$x \in [-2,\ 2] \quad \Rightarrow \quad -2 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq x + 3 \leq 5$

$\Rightarrow \quad 1 \leq (x+3)^2 \leq 25 \quad \Rightarrow \quad 6 \leq (x+3)^2 + 5 \leq 30$

$\Rightarrow \quad 6 \leq |x^2 + 6x + 14| \leq 30$ ------------------- (a) como $x \in [-2,\ 2] \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -8 \leq x^3 \leq 8$

$\Rightarrow 19 \leq x^3 + 27 \leq 35 \Rightarrow \frac{1}{35} \leq \frac{1}{x^3 + 27} \leq \frac{1}{19}$ ………………. (b)

de (a) y (b) $\frac{6}{35} \leq \frac{|x^2 + 6x + 14|}{x^3 + 27} \leq \frac{30}{19} \Rightarrow$

$$\therefore\ M = \frac{6}{35}$$

9. $\boldsymbol{Encontrar\ el\ menor\ M}$: **tal que** $\boldsymbol{x - x^2 \leq M}$

partiendo de: $2x - x^2$

$$2x - x^2 = -(x^2 - 2x) - 1 + 1$$

$$2x - x^2 = -(x - 1)^2 + 1 \quad ;$$

Por propiedad: $\forall\, a \in R,\ \ a^2 \geq 0$

entonces $(x - 1)^2 \geq 0$

$-(x - 1)^2 \leq 0 \qquad -(x - 1)^2 + 1 \leq 1$

$\therefore$ M = 1

10. **Encontrar el menor M tal que:** $\boldsymbol{2 - x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \leq M}$

Haciendo $x^{\frac{1}{3}}$ = y tenemos: $2 - y^2 - y \leq M$

$$\boldsymbol{2 - y^2 - y = -\left(y^2 + y + \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4} + 2}$$

$$\boldsymbol{-\left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4}}$$

Por propiedad: $\forall\, a \in R,\ \ a^2 \geq 0;$ entonces

$$\boldsymbol{\left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -\left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4} \leq \tfrac{9}{4}}$$

$$\therefore\ \mathbf{M} = \boldsymbol{\tfrac{9}{4}}$$

Hallar el valor de las siguientes expresiones

1) $\dfrac{|12 + 5x| - |12 - 4x|}{x} \quad si \quad x \in \langle 1,\ 3 \rangle$

2) $\dfrac{|7x + 10| - |5x - 10|}{x} \quad si \quad x \in \langle 0,\ 1 \rangle$

3) $\dfrac{|9x + 8| - |2x - 8|}{x} \quad si \quad x \in \langle 1,\ 2 \rangle$

4) $\dfrac{|2x + 3| - |3 - x|}{x} \quad si \quad x \in \langle 0,\ 1 \rangle$

5) $\dfrac{|5x - 20| - |3x - 20|}{x} \quad si \quad x \in \langle -3,\ -2 \rangle$

Encontrar el menor número M, tal que $\forall x \in R$ se cumple:

1.- $2 - x^2 \leq M$

2.- $1 - 4x - x^2 \leq M$

3.- $2 - x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \leq M$

4.- $2x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}} \leq M$

5.- $1 + 6\mathrm{x} - x^2 \leq M$

Encontrar el número mayor M, tal que $\forall x \in R$ se cumple:

1.- $M \leq 3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$

2.- $M \leq x^{\frac{2}{5}} - x^{\frac{1}{5}} - 2$

3.- $M \leq 9x^2 - 48x - 36$

4.- $M \leq 5x^2 - 20x + 16$

5.- $Si\ \ 2x + 3 \in [7,\ 11]$, encontrar M,

tal que se cumple: $\frac{x+5}{x-7} \leq M$

6.- $Si\ \ x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, encontrar el mayor valor M,

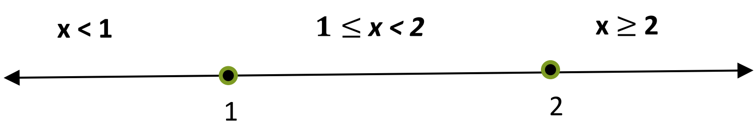
tal que se cumple: M $\leq \frac{x+2}{x-2}$

INECUACIONES CON DOS O MÁS VALORES ABSOLUTOS

Ejemplo 1 : $|x-2|+3|x-1|<4$

1. Desarrollamos los valores absolutos según su definición y colocamos los puntos críticos de quiebre en la recta

$$|x-2| = \begin{cases} x-2\,, & si\;\; x \geq 2 \\ -(x-2) & si\;\; x<2 \end{cases}$$



2. Analizamos el comportamiento de los valores absolutos dentro de los intervalos de la recta real.

a) x < 1

$$-(x-2)+3(-(x-1))<4$$

$$x > \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x \in \left\langle \frac{1}{4},\, 1 \right\rangle$$

b) **1 ≤ x < 2**

$$-(x-2)+3(x-1)<4$$

$$x < \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad x \in [\,1,\, 2\rangle$$

***c*)** **x ≥ 2**

$$(x-2)+3(x-1)<4$$

$$x<\frac{9}{4} \qquad \rightarrow \qquad x \in \left[\,2, \frac{9}{4}\right\rangle$$

3.- La solución es la unión de las soluciones de a) , b) y c):

Conj. Soluc. $x \in \left\langle \frac{1}{4}, 1 \right\rangle \cup [\,1, 2\rangle \cup \left[\,2, \frac{9}{4}\right\rangle$

$$\therefore\ x \in \left\langle \frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right\rangle$$

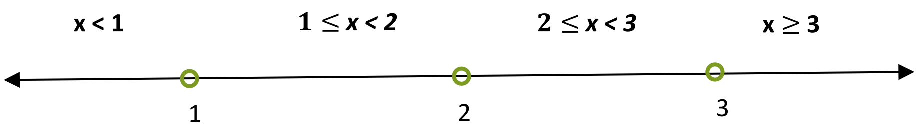
Ejemplo 2: $|x-1|-|x-2|<|x-3|$

1. Desarrollamos los valores absolutos según su definición y colocamos los puntos críticos de quiebre en la recta.

$$\boxed{|\mathbf{x}-\mathbf{1}| = \begin{cases} \mathbf{x}-\mathbf{1}, & \mathbf{si}\ \mathbf{x} \geq \mathbf{1} \\ -(\mathbf{x}-\mathbf{1}) & \mathbf{si}\ \mathbf{x} < \mathbf{1} \end{cases}}$$

$$\boxed{|\mathbf{x}-\mathbf{2}| = \begin{cases} \mathbf{x}-\mathbf{2}, & \mathbf{si}\ \mathbf{x} \geq \mathbf{2} \\ -(\mathbf{x}-\mathbf{2}) & \mathbf{si}\ \mathbf{x} < \mathbf{2} \end{cases}}$$

$$\boxed{|\mathbf{x}-\mathbf{3}| = \begin{cases} \mathbf{x}-\mathbf{3}, & \mathbf{si}\ \mathbf{x} \geq \mathbf{3} \\ -(\mathbf{x}-\mathbf{3}) & \mathbf{si}\ \mathbf{x} < \mathbf{3} \end{cases}}$$



2. Analizamos el comportamiento de los valores absolutos dentro de los intervalos de la recta real.

a) x < 1

$$-(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})-(-(\boldsymbol{x}-\mathbf{2}))<-(x-3)$$

$$x < \ 4 \qquad \rightarrow \qquad x \in \ \langle \ -\infty,\ 1\ \rangle$$

$\boldsymbol{b})$ **$\mathbf{1} \leq$ *x* < *2***

$$(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})-(-(\boldsymbol{x}-\mathbf{2}))<-(x-3)$$

$$x < \ 2 \qquad \rightarrow \qquad x \in [\,1,\,2\rangle$$

$\boldsymbol{c})$ **$\mathbf{2} \leq$ *x* < *3***

$$(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})-(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})<-(x-3)$$

$$x < \ 2 \qquad \rightarrow \qquad x \in \ \emptyset$$

d) x ≥ 3

$$(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})-(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})<x-3$$

$$x > 4 \qquad \rightarrow \qquad x \in \ \langle\, 4,\ +\infty\rangle$$

3.- La solución es la unión de las soluciones de a), b), c) y d) :

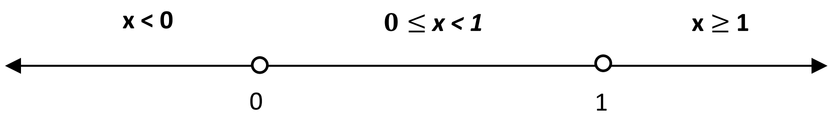
Conj. Sol. $x \in \ \langle \ -\infty,\ 2\ \rangle \cup \ \langle\, 4,\ +\infty\rangle$

Ejemplo 3: $\dfrac{|x-1|-|x|}{1-|x|} \geq 0$

1. Desarrollamos los valores absolutos según su definición y colocamos los puntos críticos de quiebre en la recta.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & si\ \ x \geq 1 \\ -(x-1) & si\ \ x < 1 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & si\ \ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}$$



2. Analizamos el comportamiento de los valores absolutos dentro de los intervalos de la recta real.

a) x < 0

$$\frac{-(x-1)+x}{(x+1)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{(x+1)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x+1 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad x \in \langle -1,\ 0 \rangle$$

b) 0 ≤ x < 1

$$\frac{-(x-1)-x}{1-x} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2x-1}{x-1} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right]$$

c) x ≥ 1

$$\frac{(x-1)-x}{1-x} \geq 0$$

$$\frac{1}{x-1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x-1>0 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle 1, \ +\infty \rangle$$

3. La solución es la unión de las soluciones de a) , b) y c) :

$$\text{Conj. Sol. } \ x \in \ \left\langle -1, \tfrac{1}{2} \right] \cup \ \langle 1, \ +\infty \rangle$$

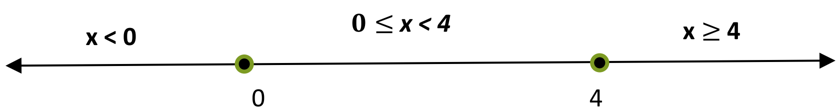
Ejemplo 4: $\boldsymbol{\big||3x-12|-6\big| + |x| - 3 < 0}$

Reescribiendo tenemos: $\boldsymbol{3\big||x-4|-2\big| + |x| - 3 < 0}$

1. Desarrollamos los valores absolutos según su definición y colocamos los puntos críticos de quiebre en la recta.

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & si \ x \geq 4 \\ -(x-4) & si \ x < 4 \end{cases}$$

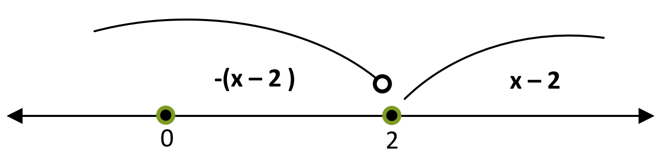
$$|x| = \begin{cases} x, & si \ x \geq 0 \\ -x & si \ x < 0 \end{cases}$$



2. Analizamos el comportamiento de los valores absolutos dentro de los intervalos de la recta real.

a) x < 0

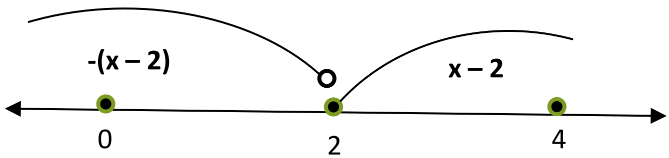
$$3\big|(-(x-4))-2\big| - x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad 3|x-2| - x - 3 < 0$$



$$3(-(x - 2)) - x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x \in \emptyset$$

b) $\mathbf{0 \leq x < 4}$

$$3\left|\left(-(x-4)\right) - 2\right| + x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad 3|x - 2| + x - 3 < 0$$



b.1) $\mathbf{0 \leq x < 2}$

$$3(-(x - 2)) + x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x \in \left\langle \frac{3}{2},\ 2 \right\rangle$$

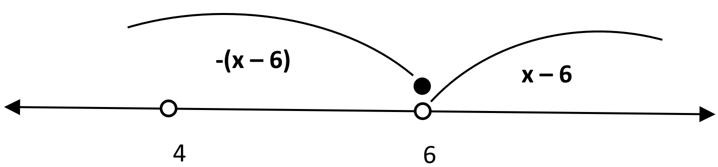
b.2) $\mathbf{2 \leq x < 4}$

$$3(x - 2) + x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad x \in \left[2,\ \frac{9}{4}\right\rangle$$

De b.1) y b.2) tenemos que : $x \in \left\langle \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right\rangle$

c) $\mathbf{x \geq 4}$

$$3|x - 4 - 2| + x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad 3|x - 6| + x - 3 < 0$$



$\mathbf{c.1)}\quad \mathbf{4 \leq x < 6}$

$3(-(x-6)) + x - 3 < 0 \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{15}{2} \quad \Longrightarrow \quad x \in \emptyset$

$\mathbf{c.2)}\quad \mathbf{x \geq 6}$

$3(x-6) + x - 3 < 0 \quad \Longrightarrow \quad x < \frac{21}{4} \quad \Longrightarrow \quad x \in \emptyset$

3. La solución es la unión de las soluciones de a), b) y c):

$$\text{Conj. Sol. } x \in \left\langle \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right\rangle$$

Ejemplo 5: $\left|\dfrac{\boldsymbol{x-3}}{\boldsymbol{x^2-4x+8}}\right| \leq \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{|x-3|}}$

$$\frac{|x-3|}{x^2-4x+8} \leq \frac{1}{|x-3|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|x-3|^2 - (x^2-4x+8)}{(x^2-4x+8)|x-3|} \leq 0$$

Analizando la expresión cuadrática

$$x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 > 0 \ ; \quad \forall x \in R$$

$$\frac{-2x+1}{|x-3|} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(2x-1)}{|x-3|} \geq 0$$

$$|x-3| > 0 \quad \wedge \quad 2x-1 \geq 0$$

$$x \in R - \{3\} \quad \cap \quad x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle \qquad \therefore$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle - \{3\}$$

Ejemplo 6: $\left| \dfrac{1}{|x+2|} \right| < \left| \dfrac{x}{|x^2+4x+4|} \right|$

$$\frac{1}{|x+2|} < \frac{|x|}{(x+2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x+2|} - \frac{|x|}{(x+2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x+2|-|x|}{(x+2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2 > 0 \quad \wedge \quad |x+2| - |x| < 0$$

$$\in \ R - \{-2\} \quad \wedge \quad |x+2| < |x| \longrightarrow (x+2)^2 < x^2$$

$$x \in R - \{-2\} \quad \wedge \quad 4(x+1) < 0$$

$$x \in R - \{-2\} \quad \wedge \quad x \in \langle -\infty, -1 \rangle$$

$$\therefore \quad x \in \langle -\infty, -1 \rangle - \{-2\}$$

Ejercicios propuestos

1. $\dfrac{|x-1|-x}{|x+1|} \leq \dfrac{1+|x|}{2}$

2. $2|x+1| - 3|x-2| + |x-5| \geq x+2$

3. $|x-1|^2 - |x-1| - 3 \leq 0$

4. $|x+6| > |x+9| + |x-2|$

5. $|x+1| - 2|x| + 3|x-2| < 6$

6. $\left(\sqrt{|x-1|-3} - \sqrt{5-|x-4|}\right)\left(\sqrt{|x-1|-3} + \sqrt{5-|x-4|}\right) \leq |x| - 6$

7. $(|x|-1)(2x+1)(|x|+3) \geq 0$

8. $|\, 2|x-1| + x^2 + 9 \,| \leq |\, |x-2| + |x^2+9| \,|$

9. $\dfrac{|4-x| + |2x+3|}{|x-1|-1} \leq 2$

10.- $\dfrac{2 - |x - x^2|}{2-|x|} \leq 1$

INECUACIONES EXPONENCIALES

Las Inecuaciones exponenciales con una incógnita son de la forma:

$$\boldsymbol{a^{f(x)} > a^{g(x)}} \quad \vee \quad \boldsymbol{a^{f(x)} < a^{g(x)}} \quad ;\, donde\; a \in R,\;\; a \neq 1$$

Se consideran dos casos:

1° Caso: Si $\boldsymbol{a > 1}$, $tenemos$:

Si $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \; > \; g(x)$

Si $\quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \; < \; g(x)$

2° Caso: Si $\boldsymbol{0 < a < 1}$, $tenemos$:

Si $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \; < \; g(x)$

Si $\quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \; > \; g(x)$

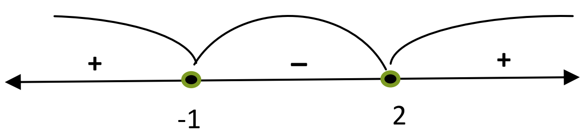
Ejemplo 1: $\quad \boldsymbol{2^{x+2} \leq 2^{x^2}}$

Aplicando: $\quad \boldsymbol{a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)}$

$$x + 2 \leq x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$(x - 2)(x + 1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \;\; ; \;\; x = 2$$

Por el método de los puntos críticos:



$$x \in \langle -\infty, \; -1] \cup [2, \; +\infty\rangle$$

Ejemplo 2: $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x-1} > 9^{3-x}$

$$3^{-3(2x-1)} > 3^{6-2x}$$

Aplicando: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

$$-3(2x-1) > 6-2 \quad \Longrightarrow \quad x < -\frac{3}{4}$$

$$x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{4} \right\rangle$$

Ejemplo 3: $\left[(0,2)^{\frac{2x+1}{5}}\right]^{\frac{1}{2}} > \left[(0,0016)^{\frac{2x-2}{5}}\right]^{\frac{1}{3}}$

$$(0,2)^{\frac{2x+1}{10}} > (0,2)^{\frac{8x-8}{15}}$$

Aplicando: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

$$\frac{2x+1}{10} < \frac{8x-8}{15} \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{19}{10}$$

$$\therefore \quad x \in \left\langle \frac{19}{10}, +\infty \right\rangle$$

Ejemplo 4: $\sqrt{9^{x(x+1)}.3^{-2x^2+x}} > \sqrt[4]{3}$

$$3^{\frac{2x^2+2x-2x^2+x}{2}} > 3^{\frac{1}{4}}$$

Aplicando: $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) > g(x)$

$$\frac{3x}{2} > \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{1}{6}$$

$$x \in \left\langle \frac{1}{6} \, , \; +\infty \right\rangle$$

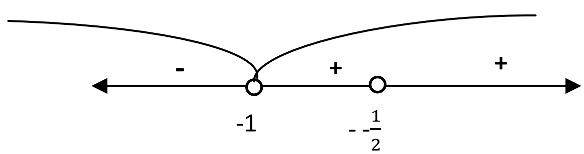
Ejemplo 5: $\quad \dfrac{\mathbf{2^{2x-3}.2^{4-x}}}{\mathbf{2^{5x-1}}} < \sqrt[x+1]{\mathbf{2^{2x+3}}}$

$$2^{2x-3+4-x-5x+1} < 2^{\frac{2x+3}{x+1}}$$

Aplicando: $\quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x)$

$$-4x + 2 < \frac{2x+3}{x+1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4x^2+4x+1}{x+1} > 0$$

$$\frac{(2x+1)^2}{x+1} > 0 \qquad x = -1 \;\; ; \quad x = -\frac{1}{2}$$



$$x \in \langle -1 \, , \; +\infty \rangle - \{- \tfrac{1}{2}\}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $\dfrac{2^{2x-3} . 2^{4-x}}{2^{5x-1}} < \sqrt[x+1]{2^{2x+3}}$

2. $9^{(x-1)^2} > \dfrac{9^{3-x}}{9^{x+3} . 3}$

3. $\sqrt[x+1]{8^{x+3}} < \sqrt[x-1]{32^{2x+5}}$

4. $\sqrt{81^{x+15}} < \sqrt{243^{x-10}}$

5. $\dfrac{729^{x^2} . 243^x}{81^{2x}} > \dfrac{243^6 . 27^{5x-6}}{27^{4x}}$

6. $\sqrt[x-2]{(0{,}008)^{x-1}} \geq \sqrt[x-1]{(0{,}04)^{x+3}}$

7. $\sqrt[3]{(0{,}00032)^{5x-2}} < \sqrt{(0{,}2)^{\frac{2x+1}{2}}}$

INECUACIONES LOGARÍTMICAS

Definición de Logaritmo:

$$\boxed{\boldsymbol{log_b\, N = x \quad \Leftrightarrow \quad N = b^x \,,\, N > 0 \ \wedge \ b > 0}}$$

Propiedades

1) $log_b\, A.\, B = log_b\, A.\, log_b\, B$

2) $\frac{log_b\, A}{log_b\, B} = \frac{log_b\, A}{log_b\, B}$

3) $log_b\, A^n = n.log_b\, A$

4) $log_b\, \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\, .log_b\, A$

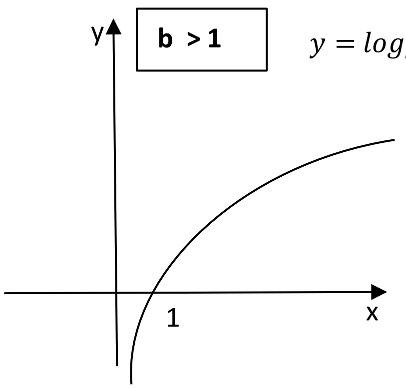
5) $log_b\, 1 = 0$

6) $log_b\, b = 1$

7) $log_a\, N = \frac{log_b\, N}{log_b\, a}$

Observemos la gráfica del logaritmo

$\boldsymbol{y = log_b x}$, $donde\ \ b > 0 \quad y \quad b \neq 1$ (sólo tienen logaritmos los números positivos)

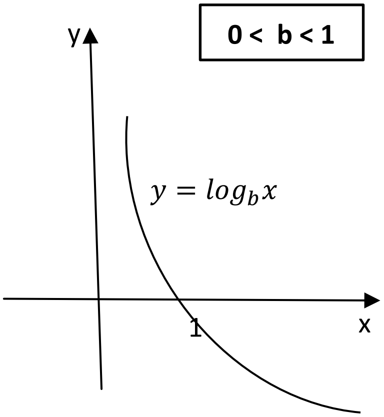


$y = log_b x$

Observe cuando la base b > 1

- ∀ x > 1, su logaritmo es positivo.
- Para 0 < x < 1 su logaritmo es negativo.

0 < b < 1



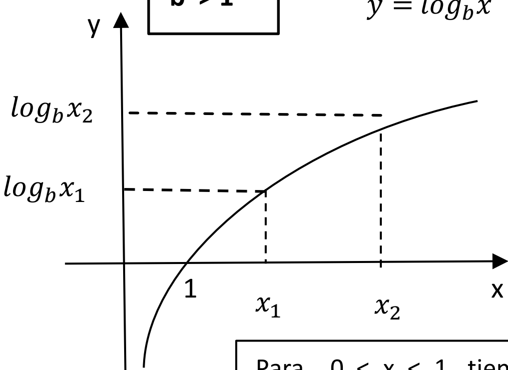
Observe cuando la base 0 < b < 1

- ∀ x > 1 su logaritmo es negativo.
- Para 0 < x < 1 su logaritmo es positivo.

$\boldsymbol{y = log_b x}$, $donde\ b > 0\ \ y\ \ b \neq 1$ (sólo tienen logaritmos los números positivos)

b > 1

$y = log_b x$



Observe cuando la base b > 1

Los números "x" mayores que 1 tienen logaritmo positivo

Para 0 < x < 1, tienen logaritmo negativo, es decir para cualquier $x_1\ y\ \ x_2\ \in R^+$ se tiene:

Si b > 1 y $x_1 < x_2 \Leftrightarrow log_b\, x_1 < log_b\, x_2$

De donde deducimos las relaciones siguientes:

Si x > 0, b > 1; N ∈ R entonces:

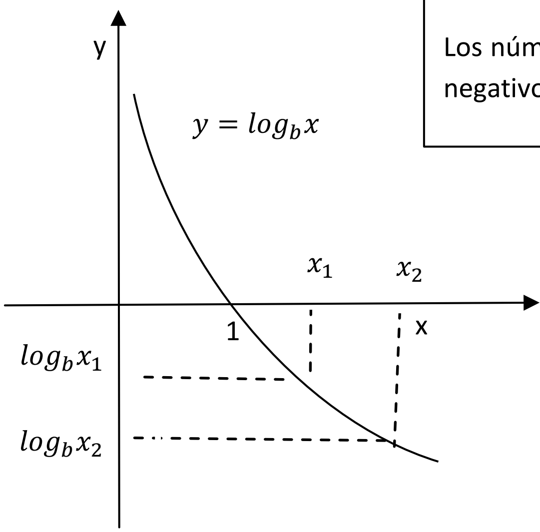
a) $log_b x > \mathrm{N} \Leftrightarrow x > b^N$

b) $log_b x < \mathrm{N} \Leftrightarrow x < b^N$

$\boldsymbol{y = log_b x}$, $donde\ \ b > 0 \quad y \quad b \neq 1$

Observe cuando la base 0 < b < 1

Los números "x > 1" tienen logaritmo negativo.



Los números 0 < x < 1, tienen logaritmo positivo, es decir para cualquier $x_1 \ \ y \ \ x_2 \ \ \in R^+$ se tiene:

Si 0 < b < 1 y $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow log_b\, x_1 > log_b\, x_2$

De donde deducimos las relaciones siguientes:

Si x > 0, 0 < b < 1; N ∈ R , entonces:

a) $log_b\, x > \mathrm{N} \Leftrightarrow 0 < x < b^N$

b) $log_b\, x < \mathrm{N} \Leftrightarrow x > b^N$

Observe que:

Si b > 1

1. $log_b\, a < log_b\, c \iff$ (a > 0) ∧ (c > 0) ∧ (a < c)

2. $log_b\, a > log_b\, c \iff$ (a > 0) ∧ (c > 0) ∧ (a > c)

3. $log_b\, x <$ N $\iff$ (x > 0) ∧ ($x < b^N$)

4. $log_b\, x >$ N $\iff$ (x > 0) ∧ ($x > b^N$)

Si 0 < b < 1

1. $log_b\, a < log_b\, c \iff$ (a > 0) ∧ (c > 0) ∧ (a > c)

2. $log_b\, a > log_b\, c \iff$ (a > 0) ∧ (c > 0) ∧ (a < c)

3.- $log_b\, x <$ N $\iff$ (x > 0) ∧ ($x > b^N$)

4. $log_b\, x >$ N $\iff$ (x > 0) ∧ ($x < b^N$)

1) Resolver: $\boldsymbol{log_2\,(2x+4) > log_2\,(5x+3)}$

1.- $2x + 4 > 0 \quad \wedge \quad 5x + 3 > 0$

2.- $x \in \langle -2,\ +\infty \rangle \quad \wedge \quad x \in \left\langle -\frac{3}{5},\ +\infty \right\rangle \quad \Rightarrow$

$x \in \left\langle -\frac{3}{5},\ +\infty \right\rangle$ **solución universal**

3.- Como la base es 2 es decir la base b > 1 ; entonces:

$log_2\,(2x+4) > log_2\,(5x+3) \iff (2x+4) > (5x+3)$

$$\Rightarrow \quad x \in \left\langle -\infty, \ \frac{1}{3} \right\rangle$$

4.- interceptando las soluciones tenemos: $\left\langle -\frac{3}{5}, \ +\infty \right\rangle \cap \left\langle -\infty, \ \frac{1}{3} \right\rangle$

$\therefore$ **Conj. Sol.** $x \in \left\langle -\frac{3}{5}, \ \frac{1}{3} \right\rangle$

2) Resolver: $\boldsymbol{log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -2}$

1. $2x + 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left\langle -\frac{5}{2}, \ +\infty \right\rangle$ solución universal

2. Como la base es $\frac{1}{3}$ es decir la base 0 < b < 1 ; entonces:

$$log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -2 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+5) > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$2x + 5 > 9 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle 2 \ , \ +\infty \rangle$$

3. Interceptando las soluciones tenemos: $\left\langle -\frac{5}{2}, \ +\infty \right\rangle \cap \langle 2 \ , \ +\infty \rangle$

$\therefore$ **Conj. Sol.** $x \in \langle 2 \ , \ +\infty \rangle$

3) Resolver: $\boldsymbol{log_x\left(\frac{x+15}{x-1}\right) > 1}$

1.- El $log_b\, a$ esta bien definido si $b > 0 \ y \ b \neq 1, \ \ con \ a > 0$

entonces: $\quad \mathrm{x} > 0 \quad y \quad x \neq 1 \quad y \quad \frac{x+15}{x-1} > 0$

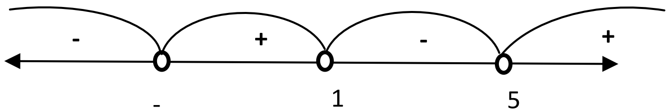
$$x \in \langle 0 \ , \ +\infty \rangle - \{1\} \quad \wedge \quad x \in [\,\langle -\infty \ , \ -15 \rangle \ \mathrm{U} \ \langle 1 \ , \ +\infty \rangle\,]$$

$$\Rightarrow \quad x \in \langle 1 \ , \ +\infty \rangle$$

2.- Como la base es mayor que uno. (b ∈ ⟨1 , + ∞⟩) ; entonces:

$$log_x\left(\frac{x+15}{x-1}\right) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+15}{x-1} > (x)^1$$

$$\frac{x^2-2x-15}{x-1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-5)(x+3)}{x-1} < 0$$



$$x \in [\langle -\infty, -3\rangle \text{ U } \langle 1 , 5\rangle]$$

3.- Interceptando las soluciones tenemos:

$$x \in \langle 1 , +\infty\rangle \quad \wedge \quad x \in [\langle -\infty, -3\rangle \text{ U } \langle 1 , 5\rangle]$$

∴ **Conj. Sol**. $x \in \langle 1 , 5\rangle$

4) Resolver: $\boldsymbol{log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2 - 3x + 5\right) < log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 + 2x + 1\right)}$

1.- En este caso $0 < b < 1$

$$2x^2 - 3x + 5 > 0 \quad \wedge \quad x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \wedge \quad 2x^2 - 3x + 5 > x^2 + 2x + 1$$

$$\triangle < 0 \Rightarrow 1 > 0 \quad \wedge \quad (x+1)^2 > 0 \quad \wedge \quad x^2 - 5x + 4 > 0$$

$$x \in R \quad \wedge \quad x \in R - \{-1\} \quad \wedge \quad x \in \langle -\infty, 1\rangle \text{ U } \langle 4, +\infty\rangle$$

2.- Interceptando las soluciones tenemos:

$$x \in \langle -\infty, 1\rangle \ U \ \langle 4, +\infty\rangle - \{-1\}$$

∴ **Conj. Sol.** $x \in \langle -\infty, -1\rangle \text{ U } \langle -1, 1\rangle \text{ U } \langle 4, +\infty\rangle$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) $log_{\frac{1}{2}} |2x - 3| > -3$

2) $log_2 (x - 3\sqrt{x + 1} + 3) < 1$

3) $log_{\frac{1}{3}} (2x + 6) < -2$

4) $log_{(x - 4)} (3 - x) < 2$

5) $log_x \left(\frac{x + 3}{x - 1}\right) > 1$

6) $log_2 |3 - 4x| > 3$

7) $log_{\frac{25 - x^2}{16}} \left(\frac{24 - 2x - x^2}{14}\right) > 1$

8) $log_{\frac{1}{2}} |2x - 3| > -3$

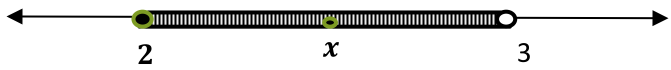
INECUACIONES CON MÁXIMO ENTERO

El $[\![x]\!]$ (Mayor Entero) es el mayor de todos los enteros menores o iguales a x, es decir:

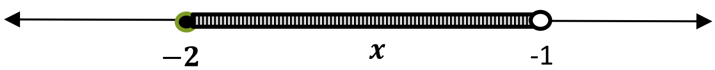
$$\boxed{[\![x]\!] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq x < n+1, \quad n \in Z}$$

Ejemplo

Para cualquier valor x entre 2 y 3 incluyendo a 2, su mayor entero es 2.



Para cualquier valor x entre -2 y -1 incluyendo a -1, su mayor entero es -2



Propiedades del Mayor Entero

1.- $[\![x]\!] \in Z, \quad por\ definición$

2.- $[\![x]\!] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq x < n+1, \ n \in Z$

3.- $[\![x]\!] = x \quad \Leftrightarrow \quad x \in Z$

4.- $\forall\, x \in R, \quad [\![x]\!] \leq x, \quad por\ definición$

5.- $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1 \,, \forall\, x \in R$

6.- $0 \leq x - [\![x]\!] < 1 \,, \forall\, x \in R$

7.- $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!] \,, \forall\, x \in R$

8.- $[\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n\,, \quad n \in Z$

9.- $[\![x]\!] \le n \;\Leftrightarrow\; x < n+1, \quad n \in Z$

10.- $[\![x]\!] < n \;\Leftrightarrow\; x < n\,, \quad n \in Z$

11.- $[\![x]\!] \ge n \;\Leftrightarrow\; x \ge n\,, \quad n \in Z,\; x \in R$

12.- $[\![x]\!] > n \;\Leftrightarrow\; x \ge n+1\,, \quad n \in Z$

13.- $\forall\, x,\, y \in R,\; si\;\; x \le y \;\Leftrightarrow\; [\![x]\!] \le [\![y]\!]$

14.- $[\![x+y]\!] \le [\![x]\!] + [\![y]\!]$

15.- Si $n \in z^{+} \Longrightarrow\; [\![nx]\!] \ge n[\![x]\!]$

16.- Si $x \in R,\; n \in z^{+} \Longrightarrow \left[\!\!\left[\frac{[\![x]\!]}{n}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\!\right]$

17.- $Si\, a\,,\; b\; \in Z,\;\; x \in R\;\; se\; cumple$:

a) $a \le [\![x]\!] \le b \;\Longrightarrow\; a \le x < b+1$

b) $a < [\![x]\!] < b \;\Longrightarrow\; a+1 < x < b$

c) $a \le [\![x]\!] < b \;\Longrightarrow\; a \le x < b$

Ejemplo 1. $\boldsymbol{[\![3x+1]\!] = 2}$

Aplicando la definición: $[\![x]\!] = n \;\Leftrightarrow\; n \le x < n+1 \quad ; \quad n \in Z$

$$[\![3x+1]\!] = 2 \;\Rightarrow\; 2 \le 3x+1 < 3 \;\Longrightarrow\; \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3}$$

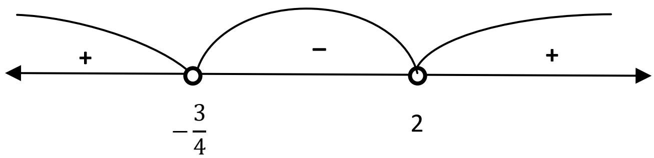
$$x \in \left[\frac{1}{3},\; \frac{2}{3}\right\rangle$$

Ejemplo 2. $[\![\mathbf{4x^2 - 5x - 4}]\!] \leq \mathbf{1}$

Aplicando: $[\![x]\!] \leq n \Leftrightarrow x < n + 1$

$$4x^2 - 5x - 4 < 2 \quad \Longrightarrow \quad (4x + 3)(x - 2) < 0$$

$x = -\frac{3}{4}$, $x = 2$



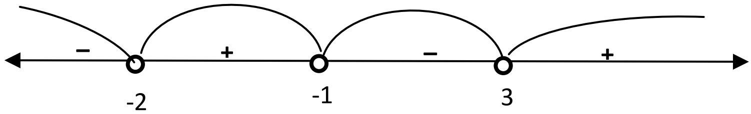
$$x \in \left\langle -\frac{3}{4} \ , 2 \right\rangle$$

Ejemplo 3. $\left[\!\!\left[\frac{\boldsymbol{x^2+1}}{\boldsymbol{x+2}}\right]\!\!\right] < \mathbf{2}$

Aplicando: $[\![x]\!] < n \Leftrightarrow x < n$

$$\frac{\boldsymbol{x^2+1}}{\boldsymbol{x+2}} < \mathbf{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\boldsymbol{x^2 - 2x - 3}}{\boldsymbol{x+2}} < \mathbf{0}$$

$$\frac{\boldsymbol{(x-3)(x+1)}}{\boldsymbol{x+2}} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{x} = -2 \ ; \ \mathrm{x} = -1 \ ; \ \mathrm{x} = 3$$



$$x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, 3\rangle$$

Ejemplo 4. $\left[\!\left[\frac{|x| - 2}{3} \right]\!\right] \geq 5$

Aplicando: $[\![x]\!] \geq n \iff x \geq n\,, \quad n \in Z,\ x \in R$

$$\frac{|x| - 2}{3} \geq 5 \quad \Rightarrow \quad |x| \geq 17$$

Aplicando: $|a| \geq b \iff a \geq b \ \vee \ a \leq -b$

$$|x| \geq 17 \quad \iff \quad x \geq 17 \quad \vee \quad x \leq -17$$

$$x \in \langle -\infty\,, -17] \cup [17,\ +\infty\rangle$$

Ejemplo 5. $[\![\,[\![x - 1]\!] - 2\,]\!] < 7$

Aplicando: $[\![x + n]\!] = [\![x]\!] + n\,, \quad n \in Z$

$$[\![\,[\![x - 1]\!] - 2\,]\!] < 7 \quad \Rightarrow \quad [\![\,[\![x]\!] - 3\,]\!] < 7$$

$$[\![\,[\![x]\!]\,]\!] - 3 < 7 \quad \Rightarrow \quad [\![\,[\![x]\!]\,]\!] < 10$$

Aplicando: $[\![\,[\![x]\!]\,]\!] = [\![x]\!]\,, \quad \forall\, x \in R$

$[\![x]\!] < 10$ Aplicando:

$$[\![x]\!] < n \iff x < n$$

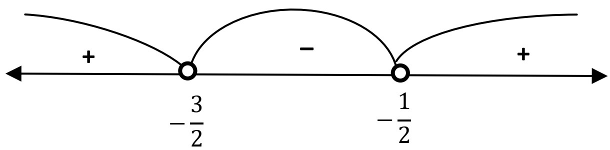
$$x < 10 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -\infty,\ 10\rangle$$

Ejemplo 6. $\left[\!\left[\dfrac{\mathbf{2x-1}}{\mathbf{2x+1}}\right]\!\right] \le \mathbf{1}$

Aplicando $[\![x]\!] \le n \Leftrightarrow x < n+1$

$$\frac{2x-1}{2x+1} < 1+1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-2x-3}{2x+1} < 0$$

$$\frac{2x+3}{2x+1} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x = -\frac{3}{2}} \;\; \boldsymbol{;}\Rightarrow \qquad \boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$$



$$x \in \left\langle -\infty \;, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \left\langle -\frac{3}{2} \,,\; -\infty \right\rangle$$

Ejemplo 7. $[\![\,\mathbf{5x}]\!] = \mathbf{3x+2}$

por definición $\quad 3x+2 = n, \quad n \in Z \;\; \wedge \;\; 3x+2 \le 5x < (3x+2)+1$

$$x = \frac{n-2}{3} \qquad \wedge \qquad 3x+2 \le 5x \qquad \wedge \qquad 5x < (3x+2)+1$$

$$x = \frac{n-2}{3} \qquad \wedge \qquad x \ge 1 \qquad \wedge \qquad x < \frac{3}{2}$$

$$1 \le x < \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 1 \le \frac{n-2}{3} < \frac{3}{2}$$

$$5 \le n < \frac{13}{2} \quad , \quad \text{con} \;\; n \in Z$$

$\therefore \qquad n = 5 \;\; y \;\; n = 6 \qquad$ como $\quad x = \dfrac{n-2}{3} \quad$ tendremos que:

Conj. Sol. $\qquad x = \left\{ 1 \,,\, \mathbf{\dfrac{4}{3}} \right\}$

Ejemplo 8. $[\![\, \mathbf{3x-1}]\!] = \mathbf{5x+7}$

por definición $5x+7=n,\ n\in Z \quad \wedge \quad 5x+7 \le 3x-1 < (5x+7)+1$

$$x=\frac{n-7}{5} \quad \wedge \quad \mathbf{5x+7 \le 3x-1} \quad \wedge \quad \mathbf{3x-1<(5x+7)+1}$$

$$x=\frac{n-7}{5} \qquad \wedge \qquad x \le -4 \quad \wedge \quad x > -\frac{9}{2}$$

$$-\frac{9}{2} < x \le -4 \quad \Rightarrow \quad -\frac{9}{2} < \frac{n-7}{5} \le -4$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{31}{2} < n \le -13, \quad \text{con} \quad n \in Z$$

$\therefore \qquad n = -15 \ ; \ n=-14 \ y \quad n=-13$ como $x=\frac{n-7}{5}$

tendremos que:

Conj. Sol. $\quad x = \{ -4, \ -\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{5}}, \ -\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{5}} \}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) $[\![x^2-2x]\!]=-1$

2) $[\![2x-3]\!]=4x-9$

3) $\left[\!\!\left[\frac{5-|x|}{x-2} \right]\!\!\right] \ge 3$

4) $|[\![-x]\!]-1|<2$

5) $\frac{[\![-x]\!]-2}{6-[\![-x]\!]} \ge 0$

6) $[\![x^2-3x]\!]>-3$

7) $\left[\!\!\left[\frac{|x|-1}{5} \right]\!\!\right] \ge 4$

8) $[\![\sqrt{x-2}\,]\!]<2$

INECUACIONES CON RADICALES

Teoremas – Propiedades

1) $\sqrt{a} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \quad ; \quad \sqrt{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$

2) $\sqrt{a} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

3) Si $b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad [\, \sqrt{a} > b \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \ \wedge \ a > b^2 \,]$

4) Si $b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad [\, \sqrt{a} < b \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \ \wedge \ a < b^2 \,]$

5) Si $b < 0 \quad \Rightarrow \quad [\, \sqrt{a} > b \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \,]$

6) $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a \leq b$

7) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a < b$

8) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \ \wedge \ b = 0$

9) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \ \wedge \ b \geq 0$

10) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq k, \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \ \wedge \ b \geq 0 \ \wedge \ [a \geq (k - \sqrt{b})^2]$

11) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \ \wedge \ b = 0$

1) Resolver $\sqrt{x+3} > -1$

utilizando: Si $b < 0 \Rightarrow [\, \sqrt{a} > b \ \Leftrightarrow \ a \geq 0 \,]$ tenemos:

como $b = -1 < 0$, entonces:

$\sqrt{x+3} > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 \geq 0 \quad \therefore \ x \in [-3, +\infty\rangle$

2) Resolver: $\sqrt{\boldsymbol{x+5}} > \mathbf{0}$

utilizando: Si b ≥ 0 ⇒ [$\sqrt{a}$ > b ⇔ $a \geq 0 \ \wedge \ a > b^2$] tenemos:

como b = 0 , entonces:

$$\sqrt{x+5} > 0 \Leftrightarrow x+5 \geq 0 \quad \wedge \quad x+5 > 0$$

$$\therefore \ x \in [-5, +\infty\rangle$$

3) Resolver: $\sqrt{\boldsymbol{x-3}} \leq \mathbf{0}$

utilizando: $\sqrt{a} \leq 0 \Rightarrow a = 0$ tenemos:

$$\sqrt{x-3} \leq 0 \Rightarrow \mathrm{x} - 3 = 0$$

$$\therefore \ x = \{3\}$$

4) Resolver: $\sqrt{\boldsymbol{x+1}} \geq \mathbf{0}$

utilizando: $\sqrt{a} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$ tenemos:

$$\sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 0$$

$$\therefore \ x \in [1, +\infty\rangle$$

5) Resolver: $\sqrt{\boldsymbol{x-4}} < \mathbf{0}$

es un absurdo $\therefore \ x \in \emptyset$

6) Resolver: 6) $\boldsymbol{\sqrt{x+3} \ \geq \ -1}$

utilizando: $\sqrt{a} \geq 0 \iff a \geq 0$ tenemos:

$$\sqrt{x+3} \geq -1 \quad \Rightarrow \quad x+3 \geq 0$$

$$\therefore \ x \in [-3, +\infty\rangle$$

7) Resolver: $\boldsymbol{0 \leq \sqrt{x-1} \ \leq \ \sqrt{x+2}}$

utilizando: 6) $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \iff 0 \leq a \leq b$ **,** tenemos:

$$\sqrt{x-1} \ \leq \sqrt{x+2} \quad \Rightarrow \quad x-1 \geq 0 \ \wedge \ x+2 \geq 0 \ \wedge \ x-1 \leq x-2$$

$$x \in [1, +\infty\rangle \ \cap \ x \in [-2, +\infty\rangle \ \cap \ x \in \emptyset$$

$$\therefore \ x \in \emptyset$$

8) Resolver: $\boldsymbol{\sqrt{x+5} \ + \sqrt{x} \ < \ 5}$

Utilizando $\mathbf{10.1}$:

$\sqrt{a} + \sqrt{b} < k \iff a \geq 0 \ \wedge \ b \geq 0 \ \wedge \ [a < (k - \sqrt{b}\,)^2\,]$, tenemos:

$$x+5 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x+5} \ < (5 - \sqrt{x}\,)^2$$

$$x \geq -5 \quad \wedge \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x} \ < 2$$

$$x \geq -5 \quad \wedge \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x} \ < 2$$

(Si b $\geq$ 0 $\Rightarrow$ [$\sqrt{a}$ < b $\iff$ $a \geq 0 \ \wedge \ a < b^2$])

$$\sqrt{x} \ < 2 \iff x \geq 0 \ \wedge \ x < 4 \ \Rightarrow \ x \in [0, \ 4\rangle$$

$$x \in [-5, +\infty\rangle \quad \wedge \quad x \in [0, +\infty\rangle \quad \wedge \quad x \in [0,\ 4\rangle$$

$$\therefore\ x \in\ [0,\ 4\rangle$$

Para casos generales

I. Si n es impar

a) $\dfrac{P(x)\sqrt[n]{Q(x)}}{R(x)} \geq 0 \iff \dfrac{P(x)Q(x)}{R(x)} \geq 0$

b) $\dfrac{P(x)}{R(x)\sqrt[n]{Q(x)}} \leq 0 \iff \dfrac{P(x)}{R(x)Q(x)} \leq 0$

c) $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \iff P(x) \leq Q(x)$

II. Si n es PAR

a) $P(x)\sqrt[n]{Q(x)} \geq 0 \iff P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0$

b) $P(x)\sqrt[n]{Q(x)} \leq 0 \iff P(x) \leq 0 \wedge Q(x) \geq 0$

c) $\dfrac{P(x)}{R(x)\sqrt[n]{Q(x)}} \leq 0 \iff Q(x) > 0 \wedge \dfrac{P(x)}{R(x)} \leq 0$

d) $\dfrac{P(x)}{R(x)\sqrt[n]{Q(x)}} \geq 0 \iff Q(x) > 0 \wedge \dfrac{P(x)}{R(x)} \geq 0$

1. $\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \ \wedge \ [\,Q(x) > 0 \quad \wedge \quad P(x) < Q(x)^2$

2. $\sqrt{P(x)} \leq \mathrm{Q(x)} \quad \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \ \wedge \ [\,Q(x) \geq 0 \quad \wedge \quad P(x) \leq Q(x)^2]$

3. $\sqrt{P(x)} > Q(x) \quad \Leftrightarrow$

   $[\,P(x) \geq 0 \ \wedge \ Q(x) < 0] \ \vee [\,P(x) \geq 0 \ \wedge \ Q(x) \geq 0 \ \wedge \ P(x) > Q(x)^2\,)]$

4. $\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow$

5. $[\,P(x) \geq 0 \ \wedge \ Q(x) < 0] \ \vee \ [\,\mathrm{P(x)} \geq 0 \ \wedge \ Q(x) \geq 0 \ \wedge \ P(x) \geq Q(x)^2]$

9) Resolver: $\boldsymbol{3\sqrt{x+1} > x - 3}$

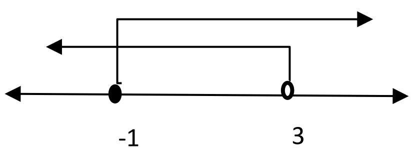
Aplicando: $\sqrt{P(x)} > Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad [P(x) \geq 0 \ \wedge Q(x) < 0] \ \vee [\,P(x) \geq 0$

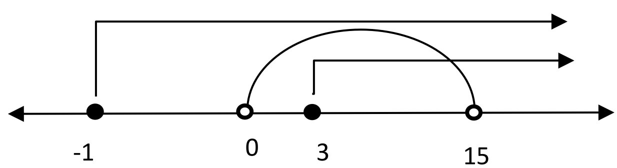
$\wedge \ Q(x) \geq 0 \ \wedge \ P(x) > Q(x)^2\,)\,]$

$\Leftrightarrow [\,x+1 \geq 0 \ \wedge \ x - 3 < 0\,] \ \vee [\,x+1 \geq 0 \ \wedge \ x - 3 \geq 0 \ \wedge \ 9(x+$

$1) > (x-3)^2\,)]$

$\Leftrightarrow [\,x \geq -1 \ \wedge \ x < 3] \quad \vee \quad [\,x \geq -1 \ \wedge \ x \geq 3 \ \wedge \ x(x-15) < 0\,]$





$\Leftrightarrow \qquad x \in [-1,\ 3\rangle \ \cup \ x \in [3,\ 15\rangle \qquad \therefore \quad x \in [-1,\ 15\rangle$

10) Resolver $\mathbf{x - 3\sqrt{x + 1} + 3 > 0}$

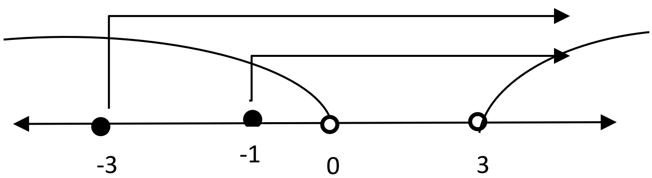
Ordenando tenemos: $3\sqrt{x + 1} < x + 3$

Aplicando:

$\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge [\,Q(x) > 0 \wedge P(x) < Q(x)^2$

$\Leftrightarrow x + 1 \geq 0 \wedge x + 3 \geq 0 \wedge 9(x+1) < (x+3)^2\,)\,]$

$\Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x \geq -3 \wedge x(x-3) > 0\,]$



$\therefore\ x \in [-1,\ 0\rangle \cup x \in \langle 3,\ +\infty\rangle$

11) Resolver: $\sqrt{\boldsymbol{x^2 - 14x + 13}} \geq \boldsymbol{x - 3}$

Aplicando: $\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow [P(x) \geq 0 \wedge Q(x) < 0] \vee [\,P(x) \geq 0$

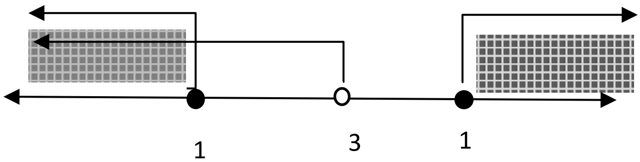
$\wedge\ Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \geq Q(x)^2\ ]$

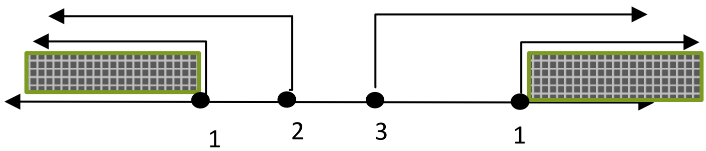
$\Leftrightarrow [x^2 - 14x + 13 \geq 0 \wedge x - 3 < 0\,] \vee [x^2 - 4x + 13 \geq 0 \wedge$

$x - 3 \geq 0 \wedge x^2 - 14x + 13 \geq (x-3)^2)]$

$\Leftrightarrow [(x-1)(x-13) \geq 0 \wedge x < 3\,] \vee [(x-1)(x-13) \geq 0$

$\wedge\ x \geq 3 \wedge x \leq 2]$





$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 1] \vee x \in \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \therefore \; x \in \langle -\infty, 1]$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) $\sqrt{x^2 - x - 12} \leq \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

2) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 4}} + \sqrt{x^2 - 2x - 4} > 2$

3) $\sqrt{2x + 6} > x + 1$

4) $\sqrt{\sqrt{x + 10} + \sqrt{3 - x}} > -5$

5) $\sqrt{x^2 - 2x - 15} > x + 1$

6) $\sqrt{x^2 - x - 2} < 5 - x$

7) $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x - 2} > 3$

8) $\sqrt{2x - 9} \leq 3 - x$

9) $\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{x + 1}$

CAPÍTULO 3

RELACIONES Y FUNCIONES

RELACIONES

PARES ORDENADOS

Llamaremos par ordenado a un conjunto ordenado de dos elementos “a” y “b” al cual indicaremos por (a, b) donde “a” es la primera componente y “b” la segunda componente.

IGUALDAD DE PARES ORDENADOS

Dado dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si sus respectivas componentes lo son, es decir:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \quad y \quad b = d$$

PRODUCTO CARTESIANO A X B

Dado dos conjuntos no vacíos A y B definimos el producto cartesiano A x B como el conjunto de pares ordenados (a, b) tales que su primera componente está en A y su segunda componente está en B.

Es decir: $A \times B = \{ (a, b) / a \in A \ \ y \ \ b \in B \}$

Ejemplo

Si $A = \{ 1, 2 \}$ $B = \{ a, b \}$ $C = \{ 3, 4 \}$

$A \times B = \{ (1, a),(1, b),(2, a),(2, b) \}$

$B \times C = \{ (a, 3),(a, 4),(b, 3),(b, 4) \}$

Observe que $B \times A = \{ (a, 1),(a, 2),(b, 1),(b, 2) \}$

De tal forma que podemos decir que:

$$A \times B \neq B \times A$$

A	B	A x B
1	a	(1, a)
	b	(1, b)
2	a	(2, a)
	b	(2, b)

Total: **2** **x** **2** **=** 4 elementos en A x B

El concepto de producto cartesiano se puede ampliar a más de 2 conjuntos no nulos: A x B x C = { (a, b, c) / a ∈ A , b ∈ B y c ∈ C }

A	B	C	A x B x C
1	a	**3**	(1, a, 3)
		4	(1, a, 4)
	b	3	(1, b, 3)
		4	(1, b, 4)
2	a	3	(2, a, 3)
		4	(2, a, 4)
	b	3	(2, b, 3)
		4	(2, b, 4)

Total: **2** **x** **2** **x** **2** **=** **8 elementos en A x B x C**

Observación

Consideremos A = B = R, entonces A x B = R^2 , donde R es el conjunto de los números reales y R^2 son los puntos que conforman el plano cartesiano.

Del conjunto producto de dos o más conjuntos podemos extraer diversos subconjuntos los cuales por sí solos constituyen un nuevo conjunto llamado relación.

RELACIÓN

Dado dos conjuntos A y B no vacíos, llamamos relación a todo subconjunto R del producto cartesiano de A x B, esto es:

R es una relación de A en B $\iff$ R $\subset$ A x B

R también es llamada relación binaria.

Ejemplo 1.

Si A = { 1, 2, 3 } ; B = { 2, 3, 5} ; Hallar R de A en B definida por " a + b < 5"

A x B = {(1, 2),(1, 3),(1, 5),(2, 2),(2, 3),(2, 5),(3, 2),(3, 3),(3, 5)}

R = {(1, 2),(1, 3),(2, 2)}.

Ejemplo 2.

Si A = { 0, 1,-1, 2, -2} ; determinar R = { (x, y) $\in$ A^2 / cos x = y }

R = { (0, 1)}

Observación.

Una relación R es ternaria cuando R es subconjunto del conjunto producto de tres conjuntos, esto es:

R $\subset$ A x B x C, los elementos de R son ternas de la forma (a, b, c).

TIPOS DE RELACIONES

Las relaciones binarias tienen las siguientes propiedades:

RELACIONES REFLEXIVAS

Una relación R sobre A es reflexiva si para todo elemento en A, a está en relación consigo mismo.

$$\text{R es reflexiva} \iff \forall \quad a \in A, \quad a\,R\,a$$

Ejemplo.

Si A = { 3, 4, 5 } determinar si son reflexivas las siguientes relaciones

R_1 = { (3, 3),(3, 4),(3, 5),(4, 3),(4, 4),(4, 5) } No, porque $5 \in A$ y $(5, 5) \notin R_1$

R_2 = { (3, 4),(3, 5),(4, 4),(5, 5) } No

R_3 = { (3, 3),(4, 4),(5, 5) } Si

R_4 = { (3, 3),(5, 5) } No

R_5 = { (3, 3) } No

Observación

Una relación R es no reflexiva $\iff \exists \; a \in A \;/\; (a, a) \notin R$

Es decir, R es no reflexiva si existe al menos un elemento de A que no esté relacionado consigo mismo.

RELACIONES SIMÉTRICAS

Una relación R en A es simétrica si el par (a, b) pertenece a la relación entonces el par (b, a) debe pertenecer a la relación.

$$\text{R es simétrica} \iff \forall\, a, b \in A, \ \text{Si} \quad a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$$

Ejemplo.

Si A = { 1, 2, 3, 4, 5 } determinar si son simétricas las siguientes relaciones

R_1 = { (1, 2),(3, 4),(2, 1),(4, 3),(5, 5) } Si

R_2 = { (1, 1),(2, 2),(3, 3),(4, 5),(5, 4),(3, 1) } No

R_3 = { (3, 3),(4, 4),(5, 5) } Si

R_4 = { (1, 5) } No, porque falta el (5, 1)

Observación

Una relación R es no simétrica ⟺ ∃ a, b ∈ A / (a, b) ∈ R y (b, a) ∉ R

R es no reflexiva si existe al menos un elemento de A que no esté relacionado consigo mismo.

RELACIONES TRANSITIVAS

Una relación R en A es transitiva si el par (a, b) pertenece a la relación y el par (b, c) pertenece a la relación, entonces el par (a, c) debe pertenecer a la relación.

R es transitiva ⟺ a R b y b R c ⇒ a R c

Ejemplo.

Si A = { 1, 3, 7, 9 } determinar si son transitivas las siguientes relaciones

R_1 = { (7, 1),(3, 3),(1, 3),(7, 3) } Si

R_2 = { (7, 1),(3, 3),(1, 3) } No porque falta el par (7, 3)

R_3 = { (3, 3),(7, 7),(9, 9) } Si

R_4 = { (1, 1) } Si

RELACIONES ANTISIMÉTRICAS

Una relación R en A es antisimétrica si el par (a, b) pertenece a la relación entonces el par (b, a) no debe pertenecer a la relación.

R es antisimétrica ⟺ ∀ a, b ∈ A, Si a R b y b R a ⇒ a = b

Ejemplo.

Si A = { 1, 2, 4, 6 } determinar si son antisimétricas las siguientes relaciones:

R_1 = { (1, 2),(2, 1),(1, 4),(4, 6) } No

R_2 = { (1, 1),(2, 2),(1, 2) } Si

R_3 = { (1, 4),(2, 6),(4, 6) } Si

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación R definida en A es de Equivalencia si cumple las tres condiciones:

a) Reflexiva: $\forall$ a $\in$ A, a R a.
b) Simétrica: Si a R b $\Rightarrow$ b R a.
c) Transitiva: Si a R b y b R c $\Rightarrow$ a R c

Ejemplo.

Si A = { 2, 4, 6, 8 }, determinar si son de equivalencia las siguientes relaciones:

R_1 = { (2, 2),(4, 4),(6, 6),(8, 8) } Si

R_2 = { (2, 2),(4, 4),(6, 6),(8, 8),(2,4),(4, 2),(2, 8),(8, 2) } No

R_3 = { (2, 2),(2, 4),(4, 4),(6, 6) } No

R_4 = { (2, 2),(4, 6),(6, 4),(4, 4),(6, 6),(4, 8),(8, 4),(8, 8) } Si

RELACIONES DE ORDEN

Una relación R en A es de orden si satisface las tres condiciones:

a) Reflexiva: $\forall$ a $\in$ A, a R a.
b) Antisimétrica: Si a R b y b R a $\Rightarrow$ a = b
c) Transitiva: Si a R b y b R c $\Rightarrow$ a R c

Ejemplo.

Si A = { 2, 4, 6 } determinar si son de orden las siguientes relaciones:

R_1 = { (2, 2),(4, 4),(6, 6) } Si

R_2 = { (2, 2),(2, 4),(4, 4),(4, 2),(6, 6) } No

R_3 = { (2, 2),(2, 6),(4, 4),(6, 4),(2, 4),(6, 6) } Si

R_4 = { (2, 2),(4, 4),(6, 6),(2, 6),(6, 4)} No

DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN

Sea R una relación definida de A en B, llamamos **dominio** al conjunto de las primeras componentes de los pares ordenados de R.

$$\text{Dom (R)} = \{ x \in A \,/\, (x, y) \in R \} ; \qquad D_R \subset A,$$

Llamamos **Rango** de una relación al conjunto de las segundas componentes de los pares ordenados de R.

$$\text{Rang (R)} = \{ y \in B \,/\, (x, y) \in R \} ; \qquad R_R \subset B,$$

Observación

Es decir: $x \in D_R \iff \exists\, y \in B \,/\, (x, y) \in R$

$y \in R_R \iff \exists\, x \in A \,/\, (x, y) \in R$

PROPIEDADES DEL DOMINIO Y RANGO

Sean R_1 y R_2 dos relaciones definidas de A en B, se cumple:

1. Dom ($R_1 \cup R_2$) = Dom (R_1) $\cup$ Dom (R_2).
2. Dom ($R_1 \cap R_2$) $\subset$ Dom (R_1) $\cap$ Dom (R_2).
3. Dom ($R_1 - R_2$) $\supset$ Dom (R_1) - Dom (R_2).
4. Rang ($R_1 \cup R_2$) = Rang (R_1) $\cup$ Rang (R_2).
5. Rang ($R_1 \cap R_2$) $\subset$ Rang (R_1) $\cap$ Rang (R_2).
6. Rang ($R_1 - R_2$) $\supset$ Rang (R_1) - Rang (R_2).

Observación

1. Para encontrar el rango se despeja "x" en función de "y".
2. Para encontrar el dominio se despeja "y" en función de "x".
3. Si la expresión es fraccionaria simple (sin radicales) el denominador debe ser diferente de cero (se sacan los valores de las variables que lo hacen cero).
4. Si hay raíces de índice par en el numerador se hace la cantidad sub-radical mayor o igual a cero y si hay en el denominador se hace mayor que cero.
5. Si hay raíces impares en el denominador se hace la cantidad sub-radical diferente de cero.

Ejemplo 1.

Hallar el dominio y rango de: **R = { (x, y) ∈ R^2/ x(y – 4) = 2 }**

Dominio: Despejando " y" en función de "x" tenemos:

y = $\frac{2}{x}$ + 4, x $\neq$ 0 de lo cual Dom (R) = R – { 0 }

Rango: Despejando " x" en función de "y" tenemos:

x = $\frac{2}{y-4}$, y – 4 $\neq$ 0 de lo cual Rang (R) = R – { 4 }

Ejemplo 2.

Hallar el dominio y rango de: **R = { (x, y) ∈ R^2/ x^2y – y = 3 }**

Dominio: Despejando " y" en función de "x" tenemos:

y = $\frac{3}{x^2-1}$, $\boldsymbol{x^2}$ **- 1** $\neq$ 0 de lo cual Dom (R) = R – { -1, 1 }

Rango: Despejando " x" en función de "y" tenemos:

x = $\pm\sqrt{\frac{y+3}{y}}$, $\frac{y+3}{y} \geq 0$ de lo cual Rang (R) = $\langle -\infty, -3] \cup \langle 0, +\infty\rangle$

Ejemplo 3. **Hallar el dominio y rango de: R = { (x, y) ∈ $\boldsymbol{R^2}$/ y = $\boldsymbol{\frac{5}{\sqrt[3]{x-8}}}$ }**

Dominio: Despejando " y" en función de "x" tenemos:

x – 8 ≠ 0, entonces Dom (R) = R – { 8 }

Rango: Despejando " x" en función de "y" tenemos:

$\sqrt[3]{x-8} = \frac{5}{y}$, x = $\frac{125}{y^3} + 8$, y ≠ 0, de lo cual Rang (R) = R – { 0 }

RELACIÓN INVERSA

Sea R una relación cualquiera tal que R ⊂ A x B, definimos la relación inversa de R denotada por R^{-1}, de la siguiente manera:

R^{-1} = { (y, x) ∈ B x A / (x, y) ∈ R } es decir (y, x) ∈ R^{-1} ⟺ (x, y) ∈ R

Donde se cumple que: Dom (R) = Rang (R^{-1})

Rang (R) = Dom (R^{-1})

Observación

Nótese que la primera y segunda componente de los pares ordenados de R pasan a ser segunda y primera componente respectivamente de los pares ordenados de R^{-1}.

Ejemplo 1.

Si R = { (1, 3),(2, 5),(4, 7),(3, 6) } entonces: R^{-1} = { (3, 1),(5, 2),(7, 4),(6, 3)}

Si S = { (x, y) ∈ R x R / $\sqrt{x^2 - y}$ = 1 } entonces:

S^{-1} = { (y, x) ∈ R x R / $\sqrt{y^2 - x}$ = 1}

COMPOSICIÓN DE RELACIONES

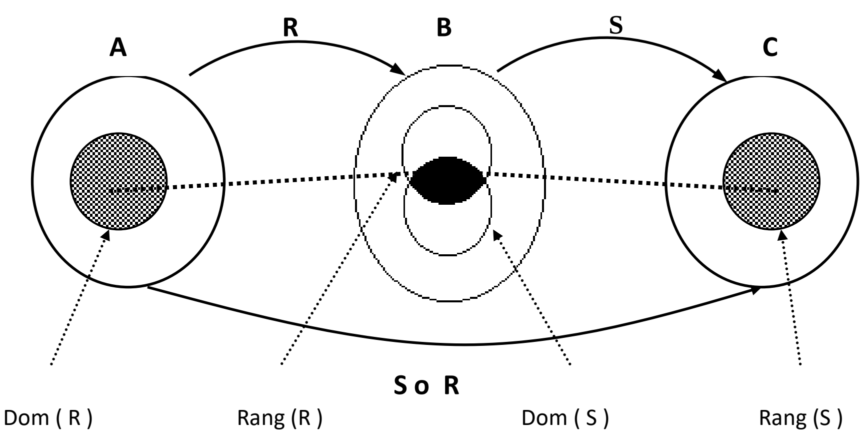
Sean R : A ⟶ B y S: B ⟶ C dos relaciones definidas:

R = { (x, y) ∈ A x B / x ∈ A ∧ y ∈ B } y S = { (y, z) ∈ B x C / y ∈ B ∧ z ∈ C }

La relación compuesta de R y S denotada por "S o R", se define de la siguiente manera:

S o R = {(x, z) ∈ A x C / ∃ y ∈ B, (x, y) ∈ R ∧ (y, z) ∈ S }

Se lee: " **R compuesta con S**"



Observación.

1. S o R existe si y sólo si Rang (R) ∩ Dom (S) ≠ ∅
2. S o R ≠ R o S
3. S o (R o T) = (S o R) o T

Ejemplo

Sean A = { 1, 2, 3, 4 } ; B = { 1, 2, 4, 6, 8, 9 } ; C = { 1, 2, 3, 5, 7 } Definimos las relaciones:

R = {(1, 2), (1, 4), (3, 4), (4, 6)} definida de A en B

S = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 7), (4, 1)} definida de B en C

a) **Hallar S o R**

Tenemos que para "S o R" existe si Rang (R) ∩ Dom (S) ≠ ∅

Rang (R) = { 2, 4, 6 } ; Dom (S) = { 1, 2, 4 }

Rang (R) ∩ Dom (S) = {2, 4} ≠ ∅ ;

S o R = { (1, 3), (1, 7), (1, 1), (3, 7), (3, 1)}

b) **Hallar R o S**

Tenemos que para "R o S" existe si Rang (S) ∩ Dom (R) ≠ ∅

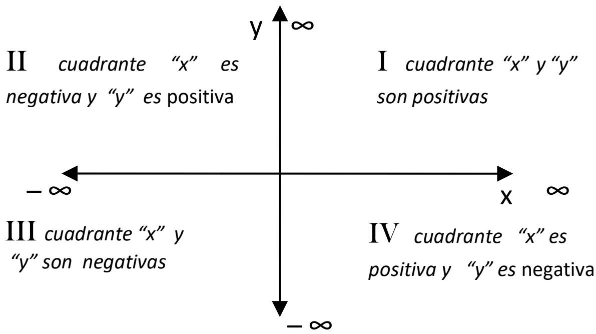
Rang (S) = { 1, 2, 3, 7 } ; Dom (R) = { 1, 3, 4 }

Rang (S) ∩ Dom (R) = {1, 3} ≠ ∅ ;

R o S = {(1, 4), (2, 4), (4, 2), (4, 4)}

GRÁFICAS DE RELACIONES DEFINIDAS DE R EN R

Se llama gráfica de una relación definida de R en R (dominio en los reales y rango en los reales) al conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la relación, esta puede ser una línea recta, curva o una región del plano extraídos del producto cartesiano $R^2 = \{(x, y) / x \in R \;\wedge\; y \in R\}$.



En este sentido las relaciones definidas en el plano cartesiano pueden presentarse de la siguiente manera:

$E(x, y) = 0$; $E(x, y) > 0$; $E(x, y) < 0$; $E(x, y) \geq 0$; $E(x, y) \leq 0$

Gráficas de algunas relaciones importantes.

I. LA RECTA: $Ax + By + C = 0$

La recta puede definirse si se conocemos dos de sus puntos, un punto y su pendiente, etc.

Forma general de la ecuación de la recta: $Ax + By + C = 0$.

Tiene como pendiente: $\mathbf{m = -\frac{A}{B}}$

Forma punto pendiente. La recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y pendiente "m", tiene como escuación:

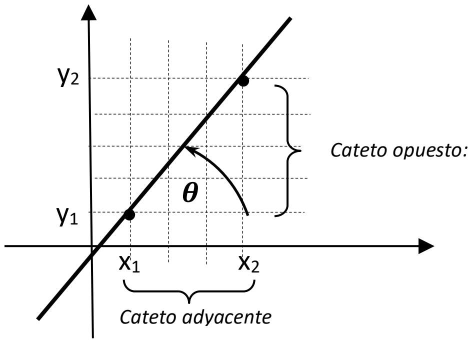
$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

Forma pendiente – Ordenada en el origen. La recta de pendiente "m" y que atraviesa el eje "y" en el punto (0, b), siendo b la ordenada en el origen es: y = **m**x + b

Forma cartesiana. La recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, tiene por ecuación:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Observación 1.



Tenemos que la pendiente m = tg θ

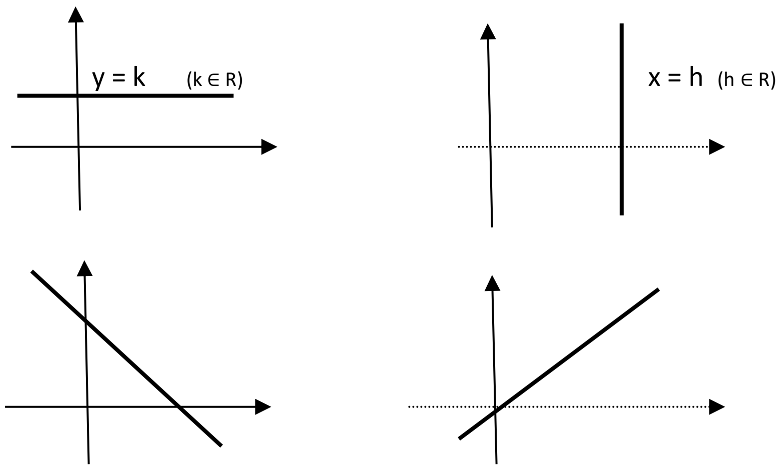
y la tg θ = $\frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente}$ por lo tanto la pendiente queda definida:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observación 2.

- Si $\boldsymbol{m}$ **> 0**, la inclinación es a la derecha.
- Si $\boldsymbol{m} < \mathbf{0}$, la inclinación es a la izquierda.
- Si $\boldsymbol{m}$ **= 0**, la recta es horizontal.
- Si $\boldsymbol{m}$ no existe, la recta es vertical.

Las formas de las rectas pueden ser:



$y = \mathbf{m}x + b$ (m negativa) $y = \mathbf{m}x + b$ (m positiva)

Observación 3.

Sean L_1 y L_2 dos rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, decimos que:

- $L_1 // L_2$ (L_1 es paralela con L_2) si $m_1 = m_2$ (sus pendientes son iguales)
- $L_1 \perp L_2$ (L_1 es perpendicular con L_2) si $m_1 . m_2 = -1$ (el producto de sus pendientes es -1)

Ejemplo 1.

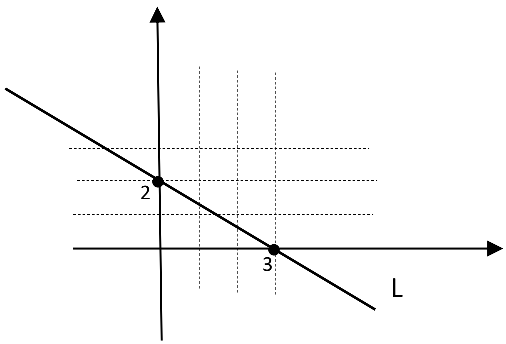
Graficar la recta: $2x + 3y = 6$.

Solución:

Para graficar se halla dos puntos en el plano dando valores a "x" o a "y" y despejando la otra variable:

Si $x = 0$ entonces $y = 2$, tenemos el punto P (0, 2).

Si $x = 3$ entonces $y = 0$, tenemos el punto Q (3, 0).



Dom (L) = R

Rang (L) = R

Ejemplo 2.

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2, 1) y Q(-3, -1).

Solución:

Hallamos la pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, entendiendo que podría ser $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ o viceversa.

$$m = \frac{-1-1}{-3-2}, \quad m = \frac{2}{5}$$

Reemplazando cualquiera de los puntos P o Q en $y - y_1 = m.(x - x_1)$

Tenemos la ecuación de la recta $2x - 5y + 1 = 0$

Ejemplo 3:

Hallar la pendiente de las rectas: L_1 : $y = -3x + 1$; y L_2 : $y = 2x + 3$

Solución:

Si observamos la ecuación y = **m**x + b; tenemos que: $m_1 = -3$ y $m_2 = 2$

Ejemplo 4.

Dadas las rectas L_1: $3x - 5y + 9 = 0$, L_2: $4x + 7y - 28 = 0$ y L_3: $2x + 3y + 1 = 0$. Hallar la ecuación de la recta L que pasa por el punto de intersección de L_1 y L_2 y es paralela a L_3.

Solución:

Tenemos que para hallar el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} 3x - 5y + 9 = 0 \quad (-4) & \qquad -12x + 20y = 36 \\ 4x + 7y - 28 = 0 \ (3) & \qquad 12x + 21y = 84 \end{array}$$

Resolviendo tenemos $y = \frac{120}{41}$

Reemplazando "y" en cualquiera de las ecuaciones hallamos $x = \frac{77}{41}$, por lo tanto el punto de intersección es $P(\frac{77}{41}, \frac{120}{41})$.

Del enunciado del problema tenemos que la recta a hallar es paralela a la recta $2x + 3y + 1 = 0$. Es decir, tienen igual pendiente, por lo cual $m = -\frac{2}{3}$

Reemplazando en: $y - y_1 = m.(x - x_1)$;

$y - \frac{120}{41} = -\frac{2}{3}(x - \frac{77}{41})$, despejando tenemos:

La ecuación de la recta solicitada $82x + 123y = 514$

Observación 3.

Si se establece la relación con las desigualdades: $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, los gráficos generan regiones del plano.

Ejemplo 1.

Graficar: $\mathbf{y \leq x}$

Solución:

1. En primer lugar graficamos y= x.
2. Luego tomamos o escogemos un punto que estemos seguros a que región corresponde.
3. Remplazamos el punto en la inecuación, si la proposición es verdadera corresponde el gráfico a la región escogida de no ser verdadera corresponde a la región no escogida.
4. Si inecuación es " $\geq$ " o "$\leq$ " el gráfico toma la línea, si la inecuación es " > " o " < " la línea se grafica punteada.

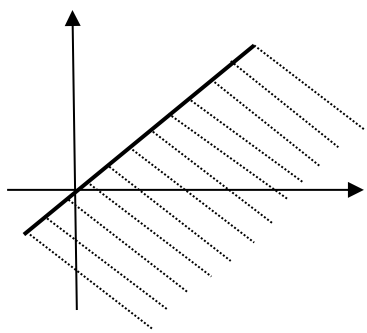
Tenemos: **y = x**

Para graficar una recta que no sea vertical u horizontal necesitamos dos puntos:

Si x = 0 entonces y = 0, tenemos el punto P(0, 0)
Si x = 3 entonces y = 3, tenemos el punto Q(3, 3)

Luego de graficar la recta escogemos por decir el punto (0, 7) un punto que se encuentra sobre la recta al reemplazar en la desigualdad original tenemos $7 \leq 0$ (Falso) entonces tomamos la región contraria, es decir la que se encuentra bajo la recta.

Dom (R) = R y Rang (R) = R

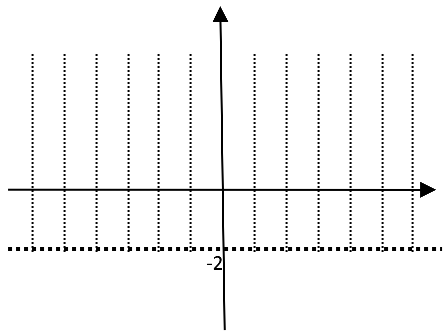


Ejemplo 2.

Graficar: y > -2

Solución:

Tenemos y = -2



Luego de graficar la recta vemos que los puntos que cumplen con la desigualdad son los que están por encima de la recta.

Dom (R) = R y Rang (R) = $]-2, +\infty[$

II. LA CIRCUNFERENCIA $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

La gráfica de esta relación es una circunferencia que queda completamente determinada cuando se conoce su centro y su radio.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ circunferencia con centro en (h, k) y radio r

Observación 1.

En la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ completamos cuadrados y tenemos:

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Se tiene una Circunferencia con centro en el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y de

radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la circunferencia es real.

Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la circunferencia es imaginaria.

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, el radio es cero y la ecuación representa un punto.

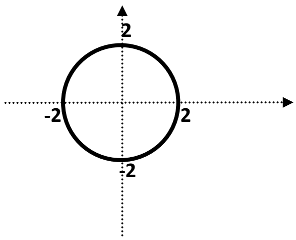
Ejemplo 1.

Graficar: $x^2 + y^2 = 4$

Solución:

$r = 2$

$C(0, 0)$



Dom = [- 2, 2]

Rang = [- 2, 2]

Ejemplo 2.

Graficar: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 \leq 0$

Solución:

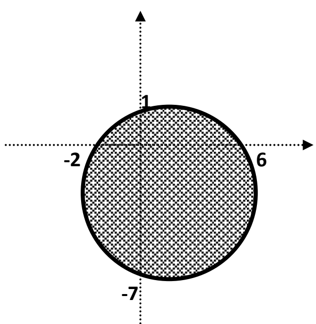
Completando cuadrados tenemos: $(x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 16$

Como vemos que es una desigualdad, luego de graficar la circunferencia ubicamos un punto en este caso podría ser el centro (que se encuentra dentro de la circunferencia) y lo reemplazamos en la desigualdad.

Observamos que queda $0 \leq 16$ (lo cual es verdadero) por lo tanto se sombrea la parte de adentro y por ser " $\leq$ " la línea es cerrada.

$r = 4$

$C(2, -3)$



Dom = [-2, 6]

Rang = [-7, 1]

Ejercicios para el lector

1. Graficar: $\{x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 \leq 0\} \cap \{y < x\}$.
2. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: (5, 3), (6, 2) y (3, -1), determinar su dominio y rango.

   (Rpta: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$)

3. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: (2, 3) y (-1, 1) y cuyo centro está situado en la recta $x - 3y - 11 = 0$, su dominio y rango.

   (Rpta: $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$)

III. LA ELIPSE: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$; ($A \neq B \neq 0$ y de igual signo)

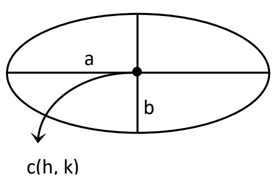
La gráfica de esta relación determina una elipse, que completando cuadrados se obtiene:

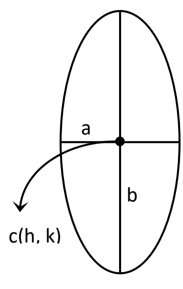
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, Elipse con centro en (h, k) con ejes 2a y 2b

Observación

Si el número mayor se encuentra bajo "**x**" (a > b) la elipse tiene el eje mayor paralelo al eje x, si el número mayor se encuentra bajo "**y**" (a < b) la elipse tiene el eje mayor paralelo al eje y.

Es decir: si a > b si a < b





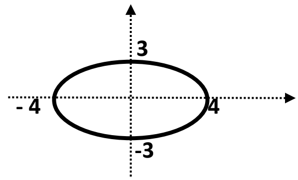
Ejemplo 1:

Graficar: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Solución:

Centro de la elipse c(0, 0)

a = 4 b = 3



Como a > b su eje mayor 2a es paralelo al eje "x"

Ejemplo 2.

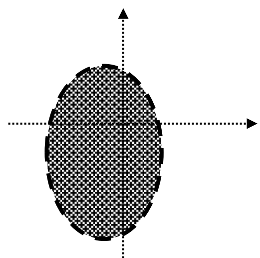
Graficar: $25x^2 + 9y^2 + 50x + 36y < 164$

Solución: Completando cuadrados tenemos: $25(x+1)^2 + 9(y+2)^2 < 225$

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} < 1$$

El gráfico es una elipse con centro en c (-1, -2), con a = 3 y b = 5 (a < b - eje paralelo al eje "y").

Pero en este caso por ser una desigualdad se trata de una región, para saber cuál es sí la parte de adentro o la de afuera tomamos un punto que estemos seguros de su ubicación es decir si fuera o dentro de la elipse, en este caso tomaremos el centro de la elipse (-1, -2) y al remplazar en la desigualdad tenemos $0 \leq 1$ (verdadero) por lo cual tomamos la región de adentro.



Dom =]-4, 2[

Rang =]-7, 3[

Ejercicio para el lector

Graficar: $\{ 4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 16 \leq 0 \} \cap \{ x^2 + y^2 \leq 9 \}$

IV. LA HIPÉRBOLA: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + F = 0$; (A , B $\neq$ 0 y de igual signo)

La gráfica de esta relación determina una hipérbola, que completando cuadrados se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \vee \qquad \frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$$

Hipérbola con centro en c(h, k)

Observación 1.

Si la variable **"x"** está precedida por el signo más los brazos de la hipérbola se abren paralelamente al eje **x**, si la variable **"y"** está precedida por el signo más los brazos de la hipérbola se abren paralelamente al eje **y**.

Observación 2.

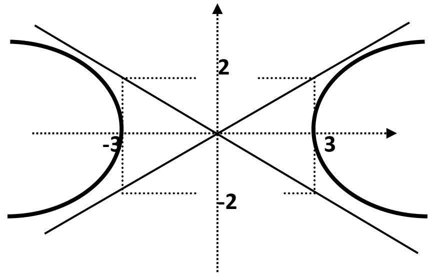
Para hacer la gráfica ubicamos el punto centro, luego avanzamos a unidades en dirección del eje **x** (derecha e izquierda) y **b** unidades en dirección del eje **y** (arriba y abajo), trazamos el rectángulo y sus rectas diagonales que serán las asíntotas de la hipérbola, luego proceder según la observación 1.

Ejemplo 1.

Graficar: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

Solución:

Hipérbola con centro en c(0, 0) a = 3 y b = 2, como **x** está en la parte positiva los brazos de la hipérbola se abren paralelamente al eje x, luego procedemos según la observación 2.

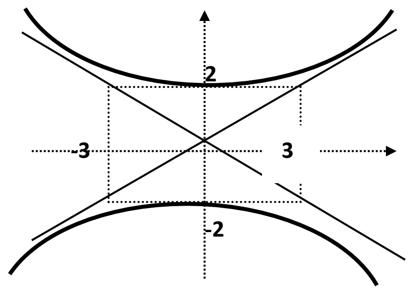


Ejemplo 2.

Graficar: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

Solución:

Hipérbola con centro en c(0, 0) a = 3 y b = 2, como **y** está en la parte positiva los brazos de la hipérbola se abren paralelamente al eje y, luego procedemos según la observación 2.



Ejercicios para el lector

Graficar: $9y^2 - 16x^2 - 64x - 18y - 199 \leq 0$

Graficar: $\dfrac{(x+1)^2}{4} - (y-3)^2 = 1$

V. LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA: $(x-h)(y-k) = \pm \dfrac{a^2}{2}$

La gráfica de esta relación determina una hipérbola de centro en el punto (h, k) y tiene como asíntotas a las rectas x = h, y = k.

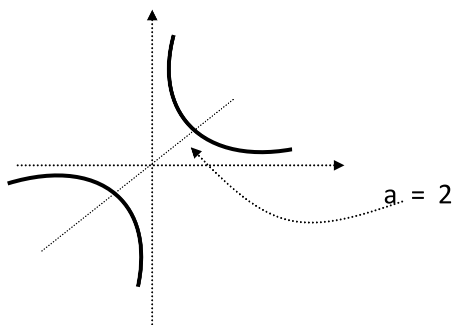
Ejemplo 1.

Graficar: **x y = 2**

Solución:

Tiene como asíntotas:

x = 0 ; y = 0



Tenemos que $\dfrac{a^2}{2} = 2$ por lo tanto a = 2

Ejemplo 2.

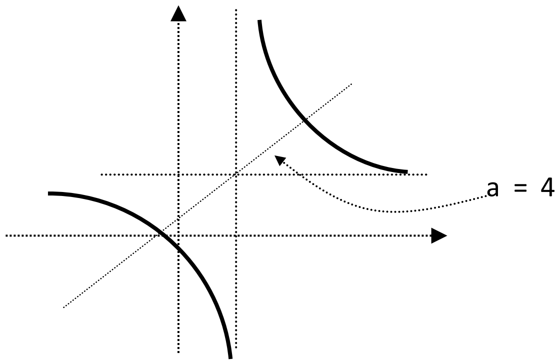
Graficar: $\mathbf{x\,y - 2x - 2y - 4 = 0}$

Solución: Factorizando: $(x - 2)(y - 2) = 8$

Tenemos que: $\dfrac{a^2}{2} = 8$ por lo tanto $a = 4$

Tiene como asíntotas:

Las rectas $x = 2$; $y = 2$



VI. LA PARÁBOLA:

a) $\mathbf{y = a\,x^2 + b\,x + c}$ **;** Completando cuadrados tenemos:

$(x - h)^2 = \mathbf{r}\,(y - k)$, la gráfica de esta relación determina una parábola con vértice en el punto (h, k). Si **r** > 0 la parábola se abre hacia arriba, si **r** < 0 se abre hacia abajo.

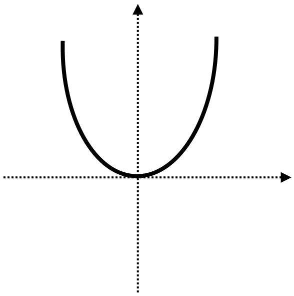
b) $\mathbf{x = a\,y^2 + b\,y + c}$ **;** Completando cuadrados tenemos:

$(y - k)^2 = \mathbf{r}\,(x - h)$, la gráfica de esta relación determina una parábola con vértice en el punto (h, k). Si **r > 0** la parábola se abre hacia la derecha, si **r** < 0 se abre hacia la izquierda.

Ejemplo 1.

Graficar

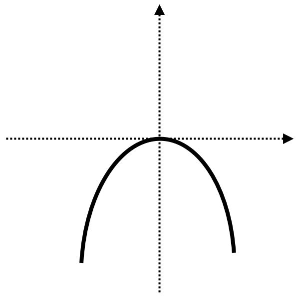
$x^2 = y$



Parábola con vértice en (0, 0)

Dom = $\mathbb{R}$ y Rang = $[0, +\infty[$

$x^2 = -y$



Parábola con vértice en (0, 0)

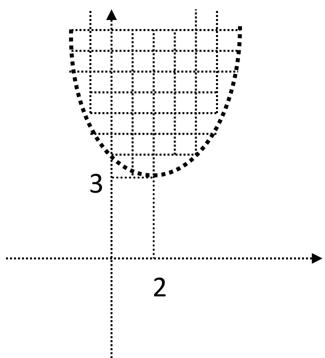
Dom = $\mathbb{R}$ y Rang = $]-\infty, 0]$

Ejemplo 2.

Graficar: $x^2 - 4x - 8y + 28 < 0$

Solución: Completando cuadrados tenemos: $(x-2)^2 < 8(y-3)$

Parábola con vértice V(2, 3) y se abre hacia arriba (r es positivo). Como es una desigualdad se trata de una región, por lo cual tomamos un punto del cual estamos seguros de su posición es decir dentro de los brazos de la parábola o fuera de ella, en este caso tomemos el punto (0,0) que está en la parte de afuera de la parábola y reemplazamos en la desigualdad: $(0-2)^2 < 8(0-3)$ tenemos que $4 < -24$ (falso) por lo cual tomamos la región del plano que está dentro de los brazos de la parábola.



Ejercicios para el lector

Graficar:
a) $x > y^2$

b) $x \geq -y^2$

c) $y^2 - 4y + 4x + 8 < 0$

VII. EL VALOR ABSOLUTO:

a) $y - k = r\,|x - h|$ valor absoluto con vértice en v (h, k)

Si **r** es positivo la gráfica del valor absoluto se abre hacia arriba, si **r** es negativa se abre hacia abajo.

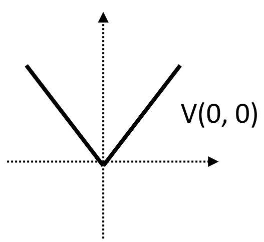
b) $x - h = r\,|y - k|$ valor absoluto con vértice en v (h, k)

Si **r** es positivo la gráfica del valor absoluto se abre hacia la derecha.
Si **r** es negativa se abre hacia la izquierda.

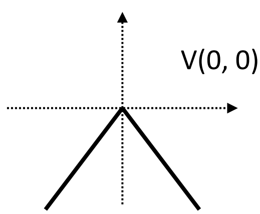
Ejemplo 1.

Graficar:

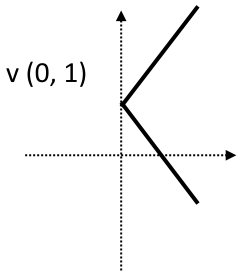
1) $y = |x|$



2) $y = -|x|$

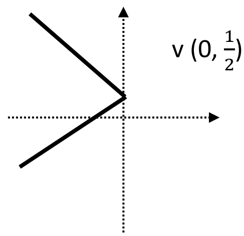


3) $x = |y-1|$



4) $x = -|4y-2|$

$x = -4\left|y - \frac{1}{2}\right|$



Nota: para un gráfico más preciso bastará remplazar un valor para **x** y obtener el correspondiente **y**.

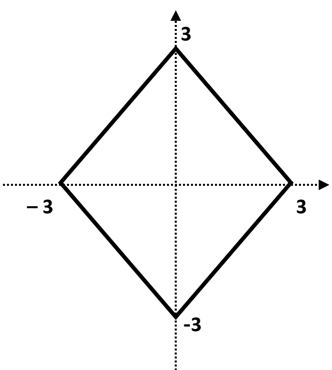
VIII. SUMA Y DIFERENCIA DE VALORES ABSOLUTOS

Caso 1. $|x-h| + |y-k| = a$

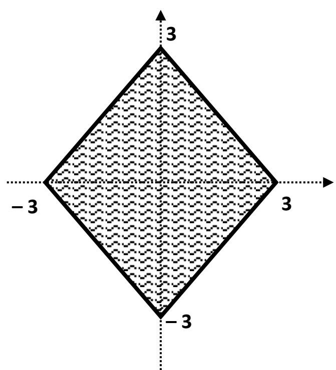
El gráfico de esta relación tiene la forma de rombo, para obtenerlo bastará con ubicar el punto **(h, k)** y luego avanzar **"a"** unidades hacia arriba, abajo, derecha e izquierda, y luego unir los cuatro puntos.

Ejemplo

Graficar: $|x| + |y| = 3$



$|x| + |y| \leq 3$



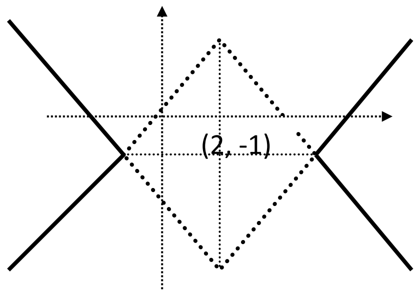
Caso 2. $|x-h| - |y-k| = a \quad \vee \quad |y-k| - |x-h| = a$

Se procede como en el caso anterior y el rombo nos va a servir para prolongar las líneas del valor absoluto, si el valor absoluto que contiene a **x** está en la parte positiva se prolongará a la derecha e izquierda, si el valor absoluto que contiene a **y** está en la parte positiva se prolongará hacia arriba y abajo.

Ejemplo

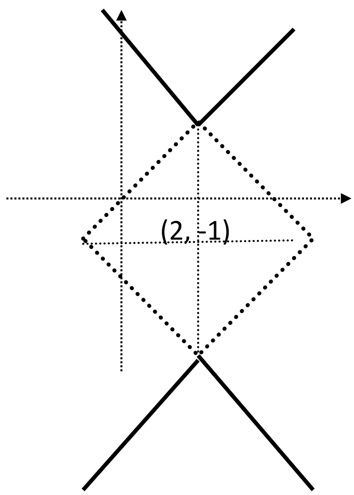
Graficar:

$|x-2| - |y+1| = 3$



Graficar:

$|y+1| - |x-2| = 3$



IX. LA RAÍZ CUADRADA:

Caso 1. $\quad$ **y − k = r** $\sqrt{x-h}$ $\quad$ con punto de inicio en p(h, k)

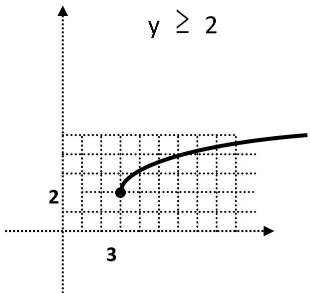
Ejemplo.

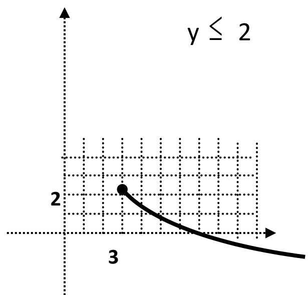
Graficar: $\quad$ **y − 2 =** $\sqrt{x-3}$ $\quad\quad$ **y − 2 = −** $\sqrt{x-3}$

p(3, 2) ; x $\geq$ 3 $\quad\quad$ p(3, 2) ; x $\geq$ 3

$y - 2 \geq 0$ $\quad\quad$ $y - 2 \leq 0$

y $\geq$ 2 $\quad\quad$ y $\leq$ 2





Nota: si r es positivo será hacia arriba, caso contrario será hacia abajo, para mayor exactitud una vez ubicado el punto de inicio establecer el dominio y rango de la relación.

Graficar: $\quad$ **y − 2 =** $\sqrt{-(x-3)}$

Punto de inicio p(3, 2)
Para hallar el dominio:

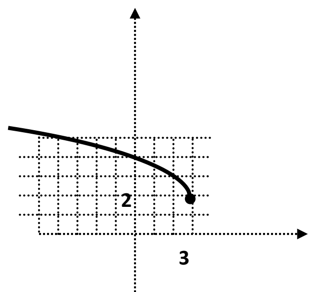
$-(x-3) \geq 0$

$(x-3) \leq \mathbf{0}$

$x \leq 3$

Para hallar el rango:

$y - 2 \geq 0$



Graficar: $y - 2 = -\sqrt{-(x-3)}$

Punto de inicio p(3, 2)

Para hallar el dominio:

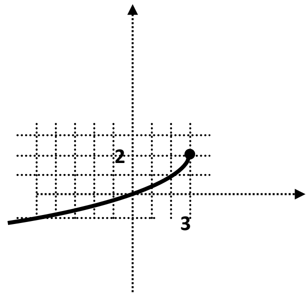
$-(x-3) \geq 0$

$(x-3) \leq 0$

$x \leq 3$

Para hallar el rango:

$y - 2 \leq 0$



Caso 2. $x - h = r\sqrt{y-k}$ con punto de inicio en p(h, k)

Graficar: $x - 3 = \sqrt{y-2}$

Punto de inicio p(3, 2)

Para hallar el dominio:

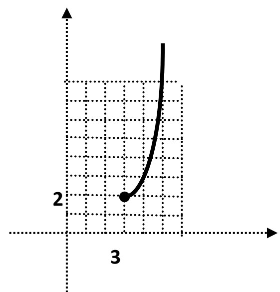
$x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

Para hallar el rango:

$y - 2 \geq 0$

$y \geq 2$



Ejercicios para el lector:

Graficar:

1) $x - 3 = -\sqrt{y-2}$

2) $x - 3 = \sqrt{-(y-2)}$

3) $x - 3 = -\sqrt{-(y-2)}$

X. EL MAYOR ENTERO:

y = $[\![x]\!]$ **,** llamada relación mayor entero o máximo entero

Por definición del mayor entero: $[\![x]\!]$ **= n** $\Leftrightarrow$ **n ≤ x < n + 1 ; (n ∈ Z)**

Ejemplo 1.

Graficar: **y** = $[\![x]\!]$

Solución:

Para hacer el gráfico escogemos un intervalo pequeño luego según la gráfica se puede generalizar.

Escojamos $x \in [-2, 2\rangle$ y luego generalizamos el gráfico

$-2 \leq x < -1$ .... $[\![x]\!] = -2$ .... $y = -2$

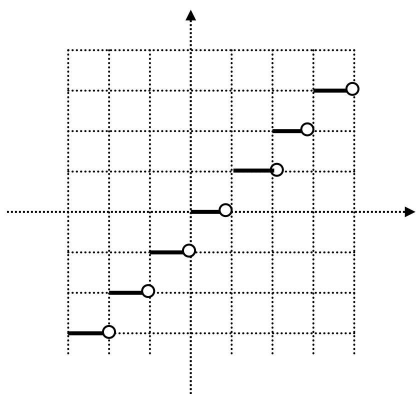
$-1 \leq x < 0$ ...... $[\![x]\!] = -1$ .... $y = -1$

$0 \leq x < 1$ .... $[\![x]\!] = 0$ .... $y = 0$

$1 \leq x < 2$ .... $[\![x]\!] = 1$ .... $y = 1$

Dom(R) = R

Rang (R) = Z



Ejemplo 2.

Graficar: $\mathbf{y = [\![x+1]\!] + 1}$

Solución: Escojamos $x \in [-3,\ 2\rangle$ y luego generalizamos el gráfico:

$-3 \leq x < -2$ ...... $-2 \leq x + 1 < -1$ .... $[\![x+1]\!] = -2$ ..... $y = -1$

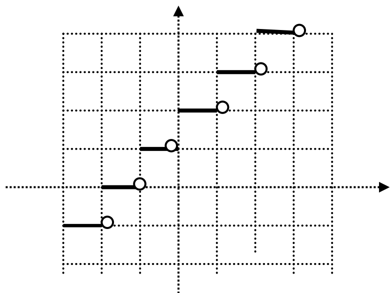
$-2 \leq x < -1$ ...... $-1 \leq x + 1 < 0$ .... $[\![x+1]\!] = -1$ ...... $y = 0$

$-1 \leq x < 0$ .... $0 \leq x + 1 < 1$ .... $[\![x+1]\!] = 0$ ...... $y = 1$

$0 \leq x < 1$ .... $1 \leq x + 1 < 2$ .... $[\![x+1]\!] = 1$ ...... $y = 2$

$1 \leq x < 2$ .... $2 \leq x + 1 < 3$ .... $[\![x+1]\!] = 2$ ...... $y = 3$

Dom(R) = R
Rang (R) = Z



Ejemplo 3:

Graficar: $\mathbf{x = [\![y+3]\!] - 4}$

Solución: Escojamos $y \in [-3,\ 2\rangle$ y luego generalizamos el gráfico:

$-3 \leq y < -2$ ..... $0 \leq y + 3 < 1$ .... $[\![y+3]\!] = 0$ ...... $x = -4$

$-2 \leq y < -1$ ..... $1 \leq y + 3 < 2$ .... $[\![y+3]\!] = 1$ ...... $x = -3$

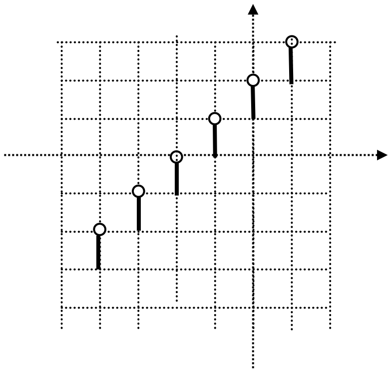
$-1 \leq y < 0$ ..... $2 \leq y + 3 < 3$ .... $[\![y+3]\!] = 2$ ..... $x = -2$

$0 \leq y < 1$ ..... $3 \leq y + 3 < 4$ .... $[\![y+3]\!] = 3$ ...... $x = -1$

$1 \leq y < 2$ ...... $4 \leq y + 3 < 5$ .... $[\![y+3]\!] = 4$ ...... $x = 0$

Dom(R) = Z

Rang (R) = R



Ejemplo 4.

Graficar: $[\![x+1]\!] + [\![y+3]\!] = 2$

Solución:

Escojamos un intervalo de **x** para poder hallar el respectivo intervalo de y, luego generalizamos el gráfico.

Sea x $\in [-2,\ 2\rangle$

$-2 \leq x < -1$ .... $[\![x+1]\!] = -1$ .... $-1 + [\![y+3]\!] = 2$

$-1 \leq x < 0$ .... $[\![x+1]\!] = 0$ .... $0 + [\![y+3]\!] = 2$

$0 \leq x < 1$............ $[\![x+1]\!] = 1$ .... $1 + [\![y+3]\!] = 2$

$1 \leq x < 2$ .... $[\![x+1]\!] = 2$ .... $2 + [\![y+3]\!] = 2$

Continuamos en busca del correspondiente intervalo de **y**

$[\![y+3]\!] = 3$............$3 \leq y + 3 < 4$ .... $0 \leq y < 1$

$[\![y+3]\!] = 2$............$2 \leq y + 3 < 3$ .... $-1 \leq y < 0$

$[\![y+3]\!] = 1$............$1 \leq y + 3 < 2$ .... $-2 \leq y < -1$

$[\![y+3]\!] = 0$............$0 \leq y + 3 < 1$ .... $-3 \leq y < -2$

El gráfico queda como ejercicio.

DISCUSIÓN DE GRÁFICAS DE RELACIONES DE LA FORMA E (x, y) = 0

La discusión de la Ecuación E (x, y) = 0 consiste en:

1. Hallar las intersecciones con el eje "x" y con el eje "y".
2. Hallar las simetrías con respecto al eje "x", al eje "y" y al origen.
3. Hallar el dominio y el rango de la relación.
4. Hallar las asíntotas
5. Tabular el número suficiente de puntos para luego graficar.

Ejemplo 1.

Discutir la gráfica de: $\mathbf{x^2 y - 4y - x = 0}$

Solución:

1. Hallando los intersectos

a) Con el eje x : hacemos $y = 0$ y tenemos el punto $P_1(0, 0)$.
b) Con el eje y : hacemos $x = 0$ y tenemos el punto $P_2(0, 0)$.

2. Hallando las simetrías

a) Simetrías con respecto al eje x

Si E (x, y) no cambia al sustituir y por $-y$ entonces es simétrica con respecto al eje x: **E (x, y) = E (x, –y)**

$x^2(-y) - 4(-y) - x = 0$ ....//......... $x^2 y - 4y + x = 0$

$\therefore$ **E (x, y)** $\neq$ **E (x, –y)** no hay simetría

b) Simetrías con respecto al eje y

Si E (x, y) no cambia al sustituir x por $-x$ entonces es simétrica con respecto al eje y: **E (x, y) = E (– x, y)**

$(-x)^2 y - 4y - (-x) = 0$ ......//......... $x^2 y - 4y + x = 0$

$\therefore$ **E (x, y)** $\neq$ **E (–x, y) ,** no hay simetría.

c) Simetrías con respecto al origen

Si E (x, y) no cambia al sustituir x por $-x \wedge$ y por $-y$ entonces es simétrica con respecto al origen: **E (x, y) = E (–x, – y)**

$$(-x)^2(-y) - 4(-y) - (-x) = 0 \;......//......\; x^2 y - 4y - x = 0$$

$\therefore$ **E (x, y) = E (– x, – y)** existe simetría respecto al origen.

3. Hallando el dominio y el rango

a) Para hallar el dominio despejamos y en función de x.

$$X^2 y - 4y - x = 0.....//.......\quad y(x^2 - 4) = x$$

$$y = \frac{x}{x^2-4} \quad \text{para que } y \in R \Longrightarrow x \in R - \{-2, 2\}$$

b) Para hallar el rango despejamos x en función de y.

$$X^2 y - 4y - x = 0 \;......//.......\; y x^2 - x - 4y = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16y^2}}{2y} \quad \text{para que } x \in R \Longrightarrow 1 + 16y^2 \geq 0 \;\wedge\; y \neq 0 \quad \therefore$$

$$y \in R - \{0\}$$

4. Hallando las asíntotas

a) Asíntota vertical

$y = \dfrac{x}{x^2-4}$ haciendo $x^2 - 4 = 0$, tenemos:

Las rectas: $x = 2 \;\wedge\; x = -2$ (son asíntotas verticales)

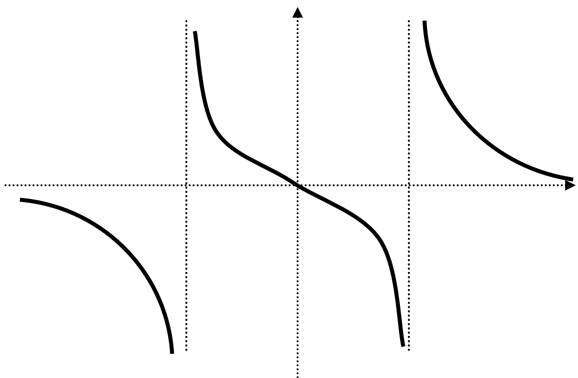
b) Asíntota horizontal.

X = $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+16y^2}}{2y}$ igualando a cero el denominador tenemos:

La recta y = 0 (es una asíntota horizontal)

Tabulación y gráfica

x	− 4	− 3	− 1	0	1	3	4
y	$-1/3$	$-3/5$	$1/3$	0	$-1/3$	$3/5$	$1/3$



Ejemplo 2.

Discutir la gráfica de: $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$

Solución:

1. Hallando los intersectos

a) Con el eje x: hacemos y = 0 y tenemos el punto $P_1(0, 0)$.
b) Con el eje y: hacemos x = 0 y tenemos el punto $P_2(0, 0)$.

2. Hallando las simetrías

a) Simetrías con respecto al eje x

Si E (x, y) no cambia al sustituir y por $-y$ entonces es simétrica con respecto al eje x: **E (x, y) = E (x, –y)**

$$x^3 + x(-y)^2 - (-y)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots // \ldots\ldots\ldots x^3 + xy^2 - y^2 = 0$$

$\therefore$ **E (x, y) = E (x, –y)** existe simetría con el eje x

b) Simetrías con respecto al eje y

Si E (x, y) no cambia al sustituir x por $-x$ entonces es simétrica con respecto al eje y: **E (x, y) = E (– x, y)**

$$(-x)^3 + (-x)y^2 - y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots // \ldots\ldots\ldots -x^3 - xy^2 - y^2 = 0$$

$\therefore$ **E (x, y) $\neq$ E (–x, y),** no hay simetría.

c) Simetrías con respecto al origen

Si E (x, y) no cambia al sustituir x por $-x$ $\wedge$ y por $-y$ entonces es simétrica con respecto al origen: **E (x, y) = E (–x,– y)**

$$(-x)^3 + (-x)(-y)^2 - (-y)^2 = 0 \ldots\ldots // \ldots\ldots x^3 + xy^2 + y^2 = 0$$

$\therefore$ **E (x, y) $\neq$ E (– x, – y)** No existe simetría respecto al origen.

3. Hallando el dominio y el rango

a) Para hallar el dominio despejamos y en función de x.

$$x^3 + xy^2 - y^2 = 0 \ldots\ldots // \ldots\ldots y^2 (x - 1) = -x^3$$

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad \text{para que} \quad y \in R \implies \frac{x}{1-x} \geq 0$$

$$\frac{x}{x-1} \leq 0 \implies x \in [0, 1\rangle$$

b) Para hallar el rango despejamos x en función de y.

$x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ vemos que si $x \in [0, 1\rangle$ entonces $y \in R$

4. Hallando las asíntotas

a) Asíntota vertical

En $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

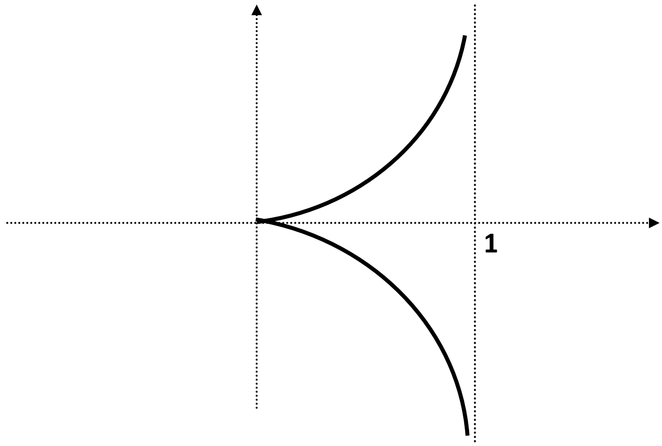
Haciendo : $1 - x = 0 \implies x = 1$ es una asíntota vertical

b) Asíntota horizontal.

Observe que $y \in R$ por lo cual no tiene asíntota horizontal

5. Tabulación y gráfica

x	0	0.3	0.5	0.7	1
y	0	$\pm$0.3	$\pm$0.5	$\pm$1.6	$\pm\infty$



Ejemplo 3.

Discutir la gráfica de: $\mathbf{x^2y - 9y - 3x^2 = 0}$

Solución:

1. **Hallando los intersectos**

   a) **Con el eje x:** hacemos $y = 0$ y tenemos el punto $P_1(0, 0)$.

   b) **Con el eje y:** hacemos $x = 0$ y tenemos el punto $P_2(0, 0)$.

2. **Hallando las simetrías**

   a) **Simetrías con respecto al eje x**

   Si E (x,y) no cambia al sustituir y por $-y$ entonces es simétrica con respecto al eje x. $\mathbf{E(x, y) = E(x, -y)}$

   $$x^2(-y) - 9(-y) - 3x^2 = 0 ....//..... -x^2y + 9y - 3x^2 = 0$$

   $\therefore$ $\mathbf{E(x, y) \neq E(x, -y)}$ no existe simetría con el eje x

b) Simetrías con respecto al eje y

Si E (x, y) no cambia al sustituir x por – x entonces es simétrica con respecto al eje y: **E (x, y) = E (– x, y)**

$$(-x)^2\,y - 9y - 3(-x)^2 .... // .... x^2y - 9y - 3x^2 = 0$$

$\therefore$ **E (x, y) = E (– x, y),** existe simetría con el eje y

c) Simetrías con respecto al origen

Si E(x, y) no cambia al sustituir x por – x $\wedge$ y por – y entonces es simétrica con respecto al origen: **E (x, y) = E (–x,– y)**

$$(-x)^2\,(-y) - 9(-y) - 3(-x)^2 ...... // ...... x^2y - 9y + 3x^2 = 0$$

$\therefore$ **E (x, y) $\neq$ E (– x, – y)** No existe simetría respecto al origen.

3. Hallando el dominio y el rango

a) Para hallar el dominio despejamos y en función de x.

$$x^2y - 9y - 3x^2 = 0 ..... // .... \quad y\,(x^2 - 9) = 3x^2$$

$$y = \frac{3x^2}{x^2 - 9} \qquad \text{para que} \quad y \in R \Longrightarrow x \in R - \{-3, 3\}$$

b) Para hallar el rango despejamos x en función de y.

$$x^2\,(y - 3) = 9y ...... // .... \quad x = \pm 3\sqrt{\frac{y}{y-3}}$$

Entonces $\exists x$, si $\dfrac{y}{y-3} \geq 0$ ....//.... $y \in \langle -\infty, 0] \cup \langle 3, \infty \rangle$

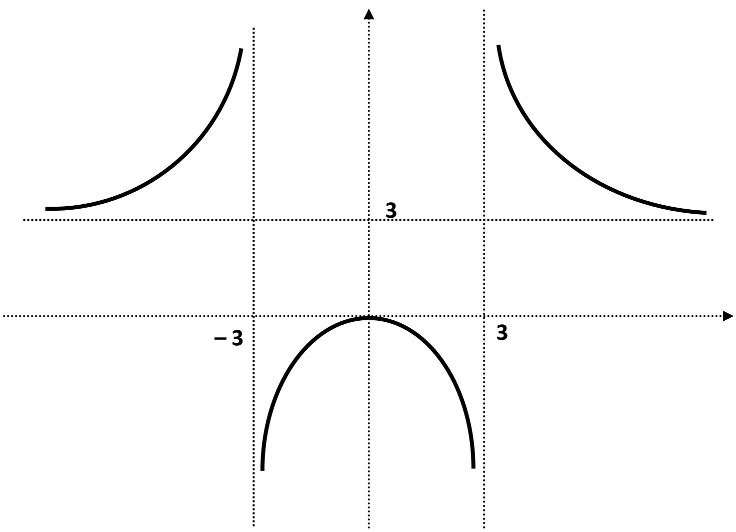
4. Hallando las asíntotas

a) Asíntota vertical: $x = \pm 3$

b) Asíntota horizontal: $y = 3$

5. Tabulación y gráfica

x	0	1	-1	4	-4
y	0	$-3/8$	$-3/8$	$48/7$	$48/7$



FUNCIONES

Las funciones son la llave del análisis matemático y la herramienta principal de la descripción matemática del mundo, el reconocimiento de las relaciones de las variables que describen una situación. Por ejemplo, el interés que se abona por una inversión depende del tiempo que permanezca esta. Las ventas de un producto dependen de su costo. La distancia recorrida por un móvil dependerá de la velocidad y el tiempo transcurrido, también tal relación puede ser una fórmula que exprese a una variable en función de otra. Donde podemos decir que existe una variable dependiente y otra o otras variables independientes.

Ejemplo

El volumen de la esfera: $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$ donde V es la variable dependiente y r es la variable independiente.

Observe que entendemos por función donde la variable dependiente obtiene un sólo valor al ingresar el valor de la variable independiente

Leonhard Euler (Suiza, 1707 – San Petersburgo, 1783)

Matemático suizo, fue la figura más dominante en el siglo XVIII y uno de los más prolíficos matemáticos que han existido, fue también astrónomo, físico, botánico, químico y experto en lenguas orientales. Fue el primer científico en dar en su obra el concepto de función matemática, una notación que ofrecía mayor comodidad frente a los métodos del cálculo infinitesimal. Sus obras y artículos completan 70 volúmenes. Su texto introductorio de álgebra, escrito originalmente en alemán, todavía se lee en su traducción al inglés.

FUNCIÓN

Definición 1.

Dado los conjuntos A y B, se llama función de A en B ($f : A \longrightarrow B$) a toda correspondencia "f" que asocia a cada elemento $x \in A$ con un único elemento $y \in B$.

Definición 2:

Se entiende por función en A, con valores en B a un subconjunto $G_f \subset A \times B$, que satisface las siguientes condiciones:

1) $\forall\, x \in Dom,\ \exists y \in B \,/\, (x, y) \in G_f$

2) Si $(x, y) \in G_f$ y $(x, z) \in G_f \Rightarrow y = z$

Aplicación de A en B

Una función se llama aplicación de A en B sí y sólo sí Dom (f) = A

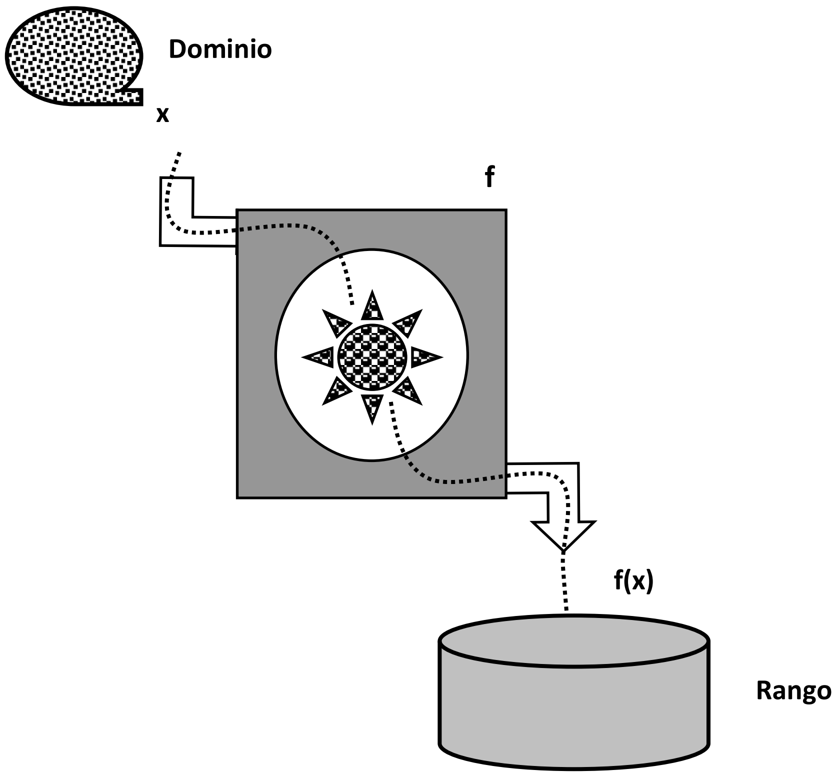
Es decir: Un subconjunto $f \subset A \times B$ es una aplicación de A en B sí y sólo sí

$$\forall\, x \in A,\ \exists!\ y \in B \,/\, (x, y) \in f.$$

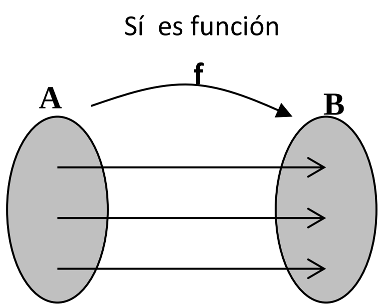
Observación

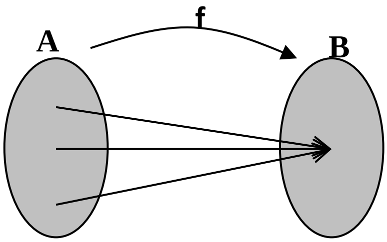
Para un mejor entendimiento del concepto de función, podemos imaginar a una función **f** como una máquina que procesa los **x** que recibe y los convierte en **f(x),** de tal forma que a cada **x** lo transforma en único **f(x).**

Comparativamente podemos decir que si **x** es un pedazo de materia prima y **f** la máquina que la transforma, entonces no puede transformarla en dos cosas diferentes.

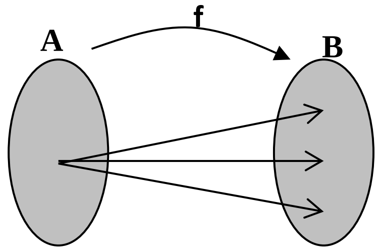


Ejemplos de funciones



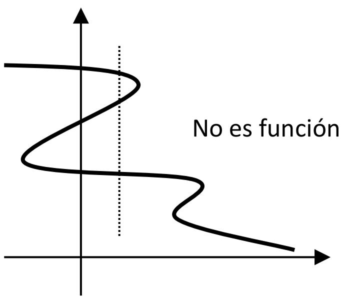


Sí es función

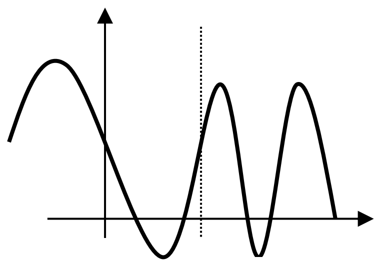


No es función

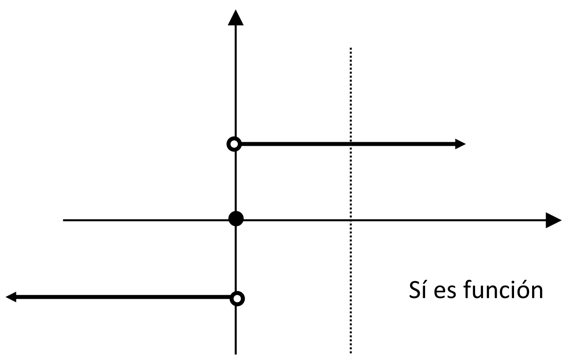
En una gráfica para saber si es función o no, bastará con trazar una línea vertical y si esta corta en un solo punto a la gráfica entonces sí es función, pero si corta en más de un punto entonces no será función.



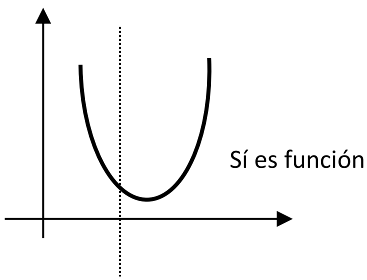
No es función

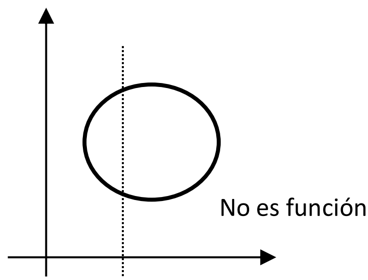


Sí es función



Sí es función





DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Dominio

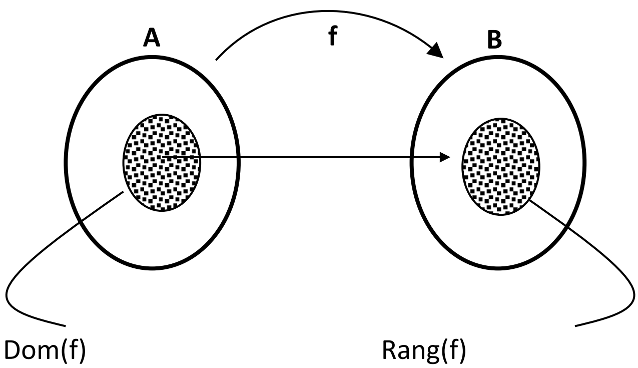
El dominio de f $\subset$ A x B está dado por todas las primeras componentes de los elementos de f (pares ordenados).

$$\text{Dom}(f) = \{ x \in A \,/\, \exists\, y \in B ,\; y = f(x) \} \subset A$$

Rango

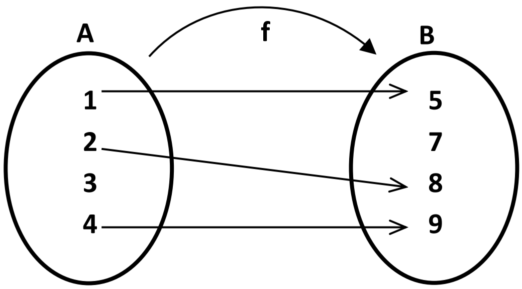
Está dado por el conjunto de las segundas componentes de los elementos de f (pares ordenados). no siempre es todo B.

$$\text{Rang}(f) = \{ y \in B \,/\, \exists\, x \in A ,\; y = f(x) \} \subset B$$



Ejemplo 1.

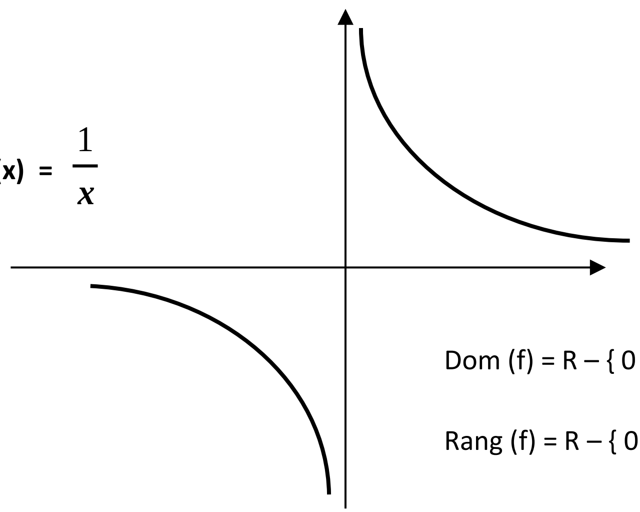
f = { (1, 5), (2, 8), (4, 9) }



Dom(f) = {1, 2 ,4 } Rang (f) = { 5, 8 ,9 }

Ejemplo 2.

f (x) = $\frac{1}{x}$



Dom (f) = R – { 0 }

Rang (f) = R – { 0 }

FUNCIONES ESPECIALES

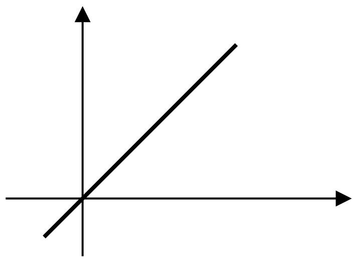
FUNCIÓN LINEAL

Es aquella función definida de la siguiente manera:

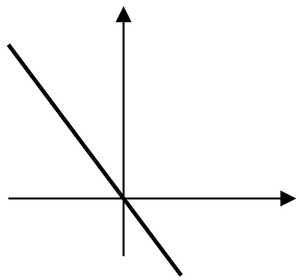
$$\boxed{f(x) = mx + b}$$

Donde b y m son constantes y $m \neq 0$, su gráfica es una recta cuya pendiente es m = tg θ y su ordenada en el origen es b.

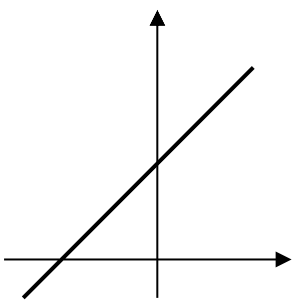
En esta función el dominio y el rango son los Reales.



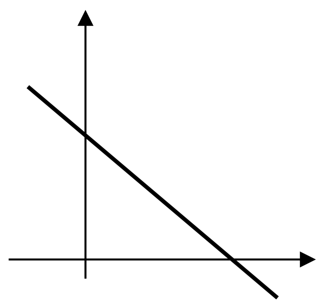
f (x) = mx, m > 0



f (x) = mx, m < 0



f (x) = mx + b, m > 0



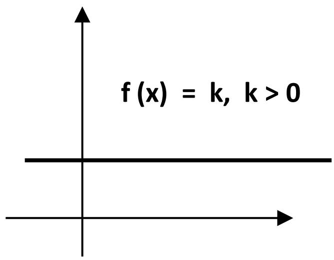
f (x) = mx + b, m < 0

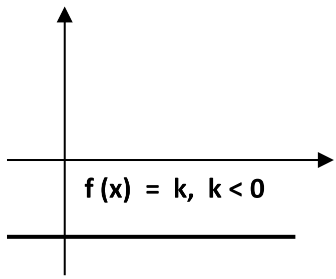
FUNCIÓN CONSTANTE

Es aquella función definida por:

$$\boxed{f(x) = k\,, \quad k \in R}$$

Su gráfica es una recta paralela al eje "x", su pendiente es cero, por ello la recta es horizontal, con dominio en los reales y rango = k.



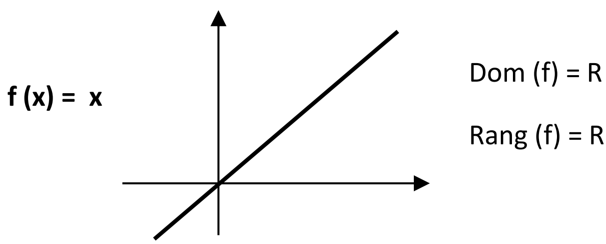


FUNCIÓN IDENTIDAD

Es aquella función definida por:

$$\boxed{f(x) = x}$$

Su gráfica es una recta que pasa por el origen. (formando un ángulo de 45° , su pendiente es uno)



FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

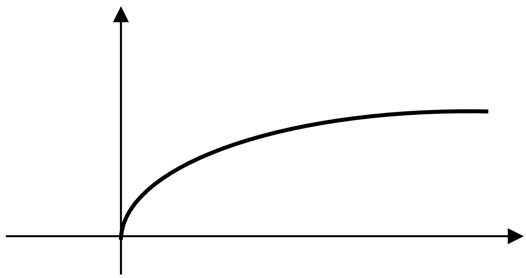
Es aquella función definida por:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$$

Su gráfica es parte de una parábola tal que $x \geq 0$ y $f(x) \geq 0$

Dom(f) = $[0, \infty\rangle$

Rang(f) = $[0, \infty\rangle$

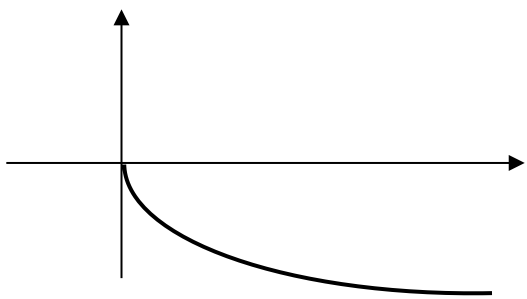


Ejemplo 1. $f(x) = -\sqrt{x}$

Su gráfica es parte de una parábola tal que $x \geq 0$ y $f(x) \leq 0$

Dom(f) = $[0, \infty\rangle$

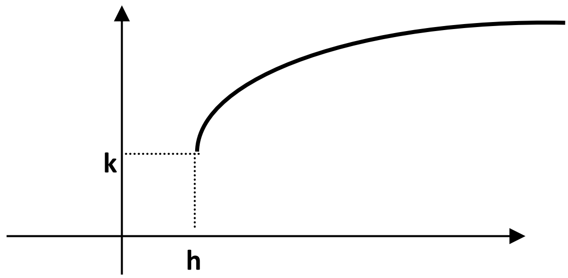
Rang(f) = $\langle -\infty, 0]$



Ejemplo 2. $f(x) = \sqrt{x-h}+k$

Dom(f) = [h, ∞⟩

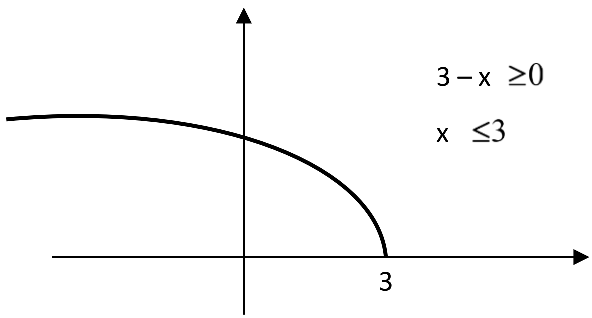
Rang(f) = [k, ∞⟩



Ejemplo 3. $f(x) = \sqrt{3-x}$

Dom(f) = ⟨−∞, 3]

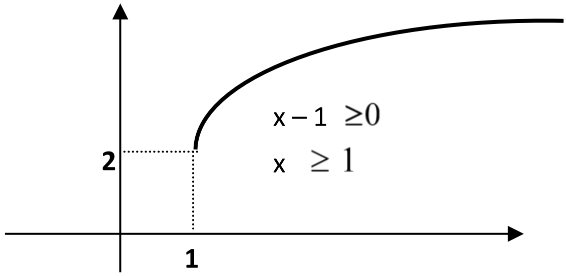
Rang(f) = [0, ∞⟩



Ejemplo 4. $f(x) = \sqrt{x-1}+2$

Dom(f) = [1, ∞⟩

Rang(f) = [2, ∞⟩

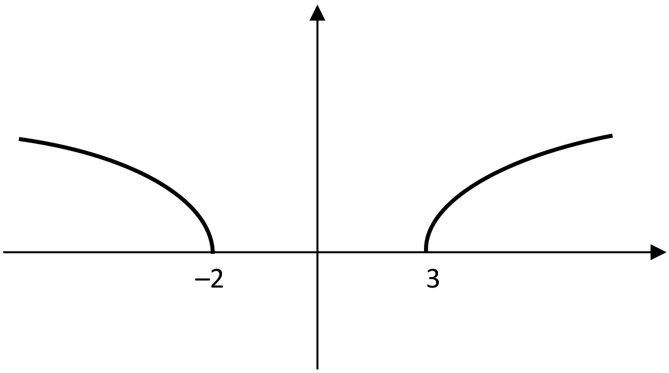


Ejemplo 5. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

$x^2 - x - 6 \geq 0$

$(x - 3)(x + 2) \geq 0$

$x \in \langle -\infty, -2] \cup [3, \infty\rangle$



FUNCIÓN CUADRÁTICA

Es aquella función definida por:

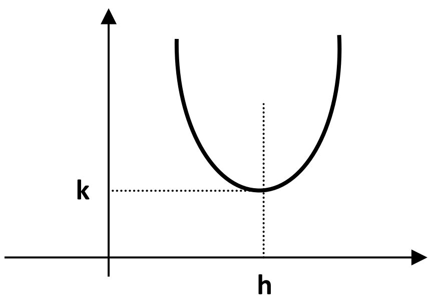
$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Donde a y b son constantes y $a \neq 0$, su gráfica es una parábola simétrica a la recta vertical $x = h$, llamada eje de simetría.

La parábola es abierta hacia arriba si $a > 0$ y abierta hacia abajo si $a < 0$.

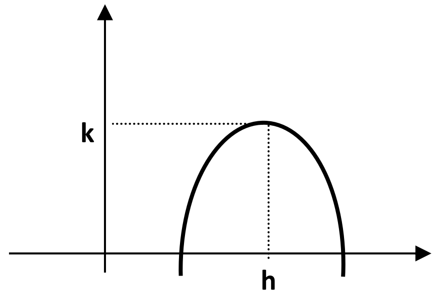
$f(x) = ax^2 + bx + c$

con $a > 0$



$f(x) = ax^2 + bx + c$

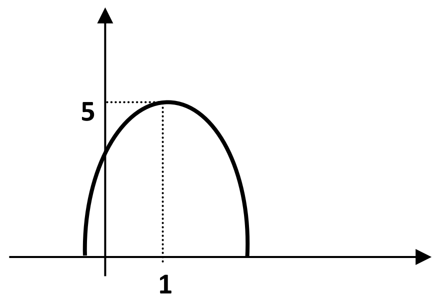
con $a < 0$



Ejemplo 1. $\mathbf{f(x) = -3x^2 + 6x + 2}$

$f(x) = -3(x-1)^2 + 5$

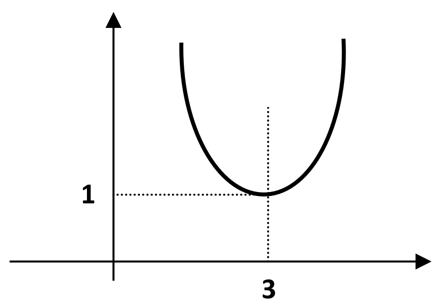
Vértice $(1, 5)$; $a = -3 < 0$



Ejemplo 2. $\mathbf{f(x) = x^2 - 6x + 10}$

$f(x) = (x-3)^2 + 1$

Vértice $(3, 1)$; $a = 1 > 0$



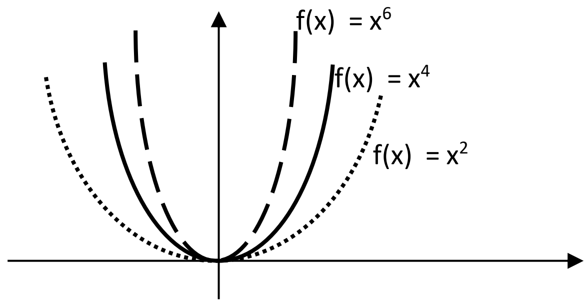
FUNCIONES POLINÓMICAS

Es aquella función definida por :

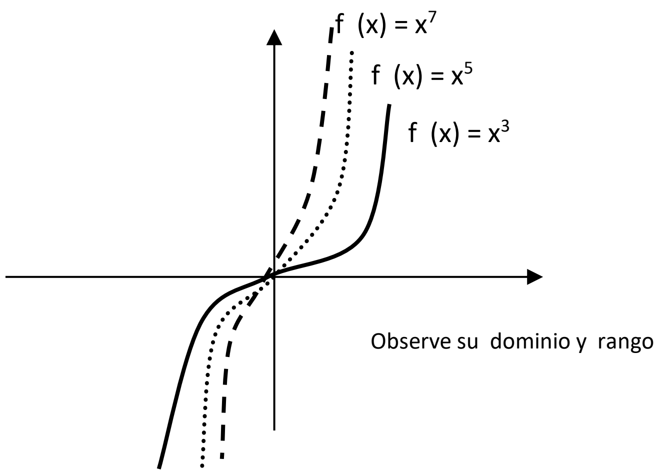
$$\boxed{f(x) = a_0x^{n} + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n, \; n \in Z^{+}}$$

Donde $a_0 \neq 0$ y n pertenece a los enteros positivos, a las funciones polinómicas podemos subdividirlas en:

a) Funciones polinómicas de grado par



b) Funciones polinómicas de grado impar

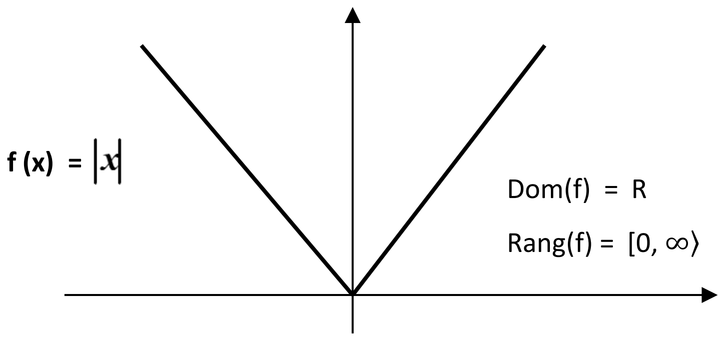


FUNCIÓN DE VALOR ABSOLUTO

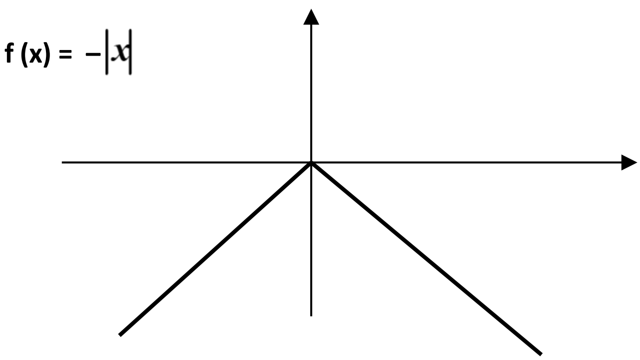
Es aquella función definida por:

$$\mathbf{f\,(x)} = |x| = \begin{cases} \mathbf{x}, & \mathbf{si}\ \ \mathbf{x} \geq 0 \\ \mathbf{-x}, & \mathbf{si}\ \ \mathbf{x < 0} \end{cases}$$

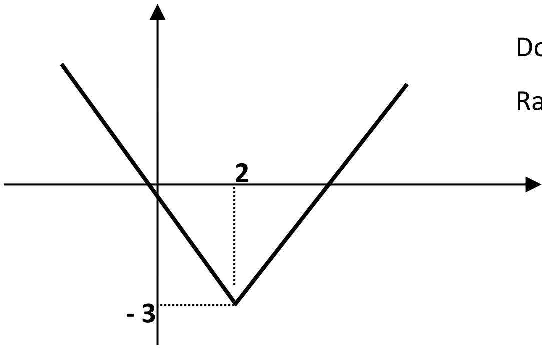
veamos su grafica:



Determine el dominio y el rango



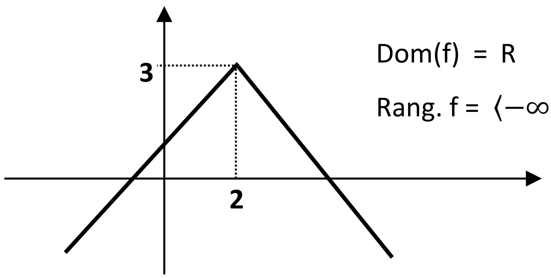
Ejemplo 1: f (x) = $|x-2| - 3$



Dom(f) = R

Rang(f) = [-3, ∞⟩

Ejemplo 2: f (x) = $-|x-2| + 3$



Dom(f) = R

Rang. f = ⟨−∞, 3]

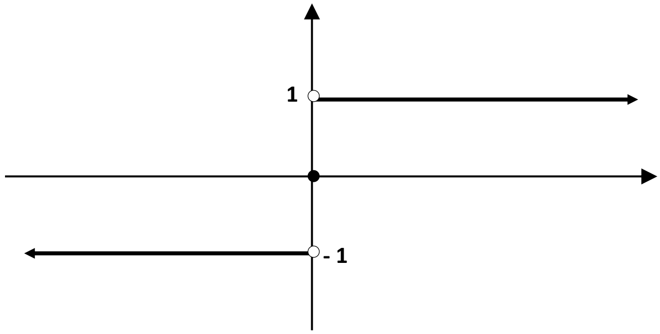
FUNCIÓN SIGNO

Es aquella función definida por:

$$\textbf{Sgn (x)} = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

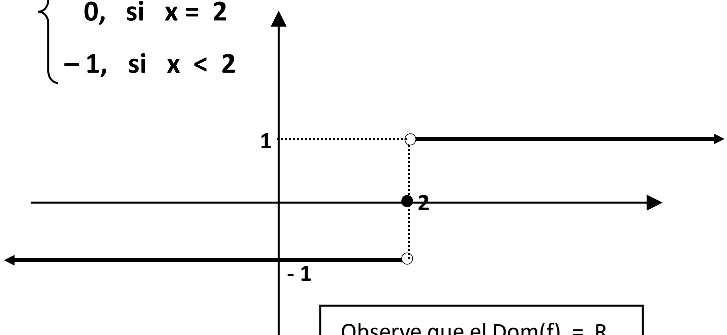
Función que tiene como Dominio = R y Rango = {-1, 0, 1}

f(x) = Sgn (x)



Ejemplo 1. **f (x) = Sgn (x – 2)**

$$\text{Sgn}(x-2) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 2 \\ 0, & \text{si } x = 2 \\ -1, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$



Observe que el Dom(f) = R
y Rango (f) = { - 1 , 0 , 1 }

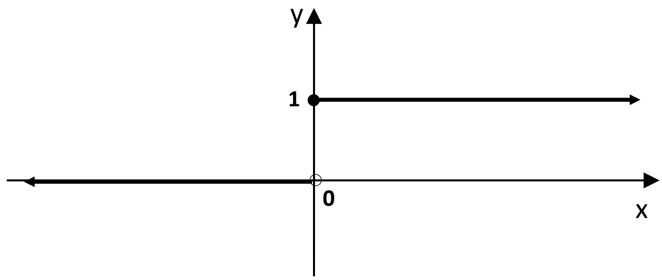
FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

Es aquella función denotada por μ **(x)** y definida por:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

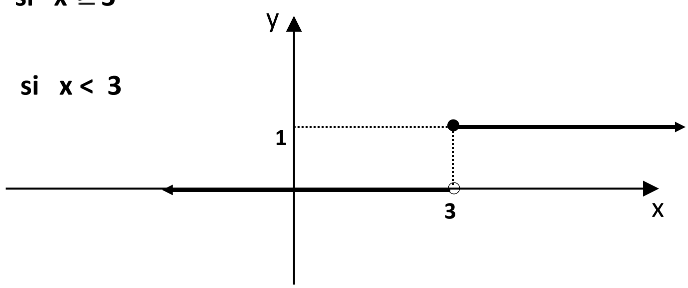
Función que tiene como
Dominio = R y Rango = {0, 1}

Graficar $f(x) = \mu(x)$



$f(x) = \mu(x-3)$

$$\mu(x-3) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 3 \\ 0, & \text{si } x < 3 \end{cases}$$



FUNCIÓN MAYOR ENTERO

Es aquella función definida por:

$$\boxed{f(x) = [\![x]\!]}$$

La función mayor entero tiene como dominio los reales y como rango los enteros

Por definición del mayor entero: $[\![x]\!] = n \iff n \leq x < n+1 \; ; \; n \in Z$

Observación.

Si $x \in R$, $[\![x]\!]$ = máx { $n \in Z$ / $x \geq n$ }.

Si $[\![x]\!] = n \iff n \leq x < n+1$; $n \in Z$

$[\![x]\!] = n \iff x \in [\,n\,, n+1\rangle$

Si $x \in [\,-2\,, -1\rangle$ entonces $[\![x]\!] = -2$

Es decir: Si $x = -2$ entonces $[\![x]\!] = -2$;

Si $x = -1.9$ entonces $[\![x]\!] = -2$;

Si $x = -2.5$ entonces $[\![x]\!] = -3$;

Algunas propiedades de la función mayor entero

1. $[\![x]\!] = x \iff x \in Z$.
2. $[\![\,[\![x]\!]\,]\!] = [\![x]\!]$, $\forall\ x \in R$
3. $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1 \quad \forall\ x \in R$.
4. $\forall\ x \in R$, $[\![x]\!] \leq x$
5. $\forall\ x \in R$, $0 \leq x - [\![x]\!] < 1$
6. $[\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n$, $n \in Z$.
7. $[\![x]\!] \leq n \iff x < n+1$, $n \in Z$.
8. $[\![x]\!] < n \iff x < n$, $n \in Z$.
9. $[\![x]\!] \geq n \iff x \geq n$, $n \in Z$, $x \in R$.
10. $[\![x]\!] > n \iff x \geq n+1$, $n \in Z$, $x \in R$.
11. $\forall\ x, y \in R$, si $x \leq y \iff [\![x]\!] \leq [\![y]\!]$

Ejemplo 1.

Graficar: $f(x) = [\![x]\!]$

Solución:

Escojamos $x \in [-2,\ 2\rangle$ y luego generalizamos el gráfico

$-2 \leq x < -1$ .... $[\![x]\!] = -2$ .... $y = -2$

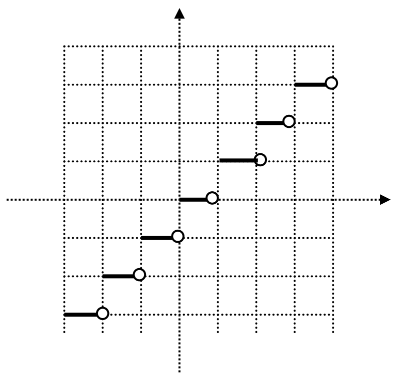
$-1 \leq x < 0$ ...... $[\![x]\!] = -1$ .... $y = -1$

$0 \leq x < 1$ .... $[\![x]\!] = 0$ .... $y = 0$

$1 \leq x < 2$ .... $[\![x]\!] = 1$ .... $y = 1$

Dom(R) = R

Rang (R) = Z



Observamos que el gráfico de la función mayor entero o máximo entero no mayor que x es la unión de los segmentos de recta semi-abiertos que se prolongan con dominio en los reales.

Ejemplo 2.

Graficar $f(x) = \left[\!\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\!\right]$ **, con** $x \in [-4, 5\rangle$

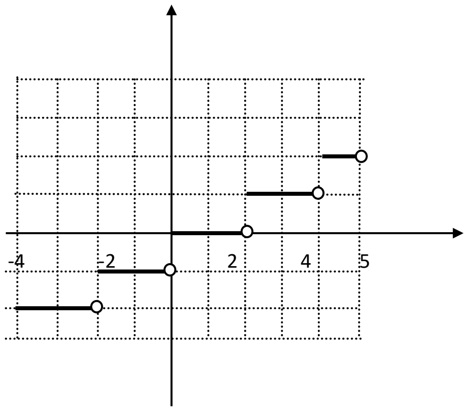
Solución:

Tenemos que $\left[\!\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\!\right] = n \iff n \leq \frac{x}{2} < n + 1$

$2n \leq x < 2(n + 1)$, dando valores a n tenemos:

$$f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -4 \leq x < -2 \\ -1 & \text{si} \quad -2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si} \quad 4 \leq x < 5 \end{cases}$$

Rang (f) = {-2, -1, 0, 1, 2}



FUNCIONES SECCIONADAS

Son aquellas que tienen distintos comportamientos dependiendo de los valores del dominio, es decir tiene más de una regla de correspondencia:

De tal forma que: $A \cap B \cap C \cap .... \cap Z \neq \emptyset$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \ , \ \text{Si} \ x \in A \\ f_2(x) \ , \ \text{Si} \ x \in B \\ f_3(x) \ , \ \text{Si} \ x \in C \\ \ . \\ \\ f_n(x) \ , \ \text{Si} \ x \in Z \end{cases}$$

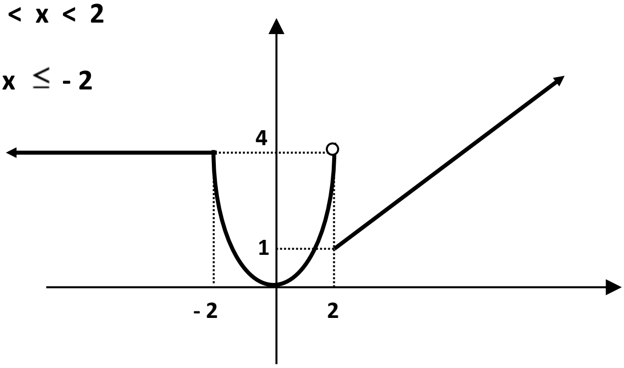
y el gráfico de la función es la unión de todos los gráficos parciales.

El Dom **(f)** = Dom (f_1) $\bigcup$ Dom (f_2) $\bigcup$ Dom (f_3) $\bigcup$ .... $\bigcup$ Dom (f_n)

El Rang **(f)** = Rang (f_1) $\bigcap$ Rang (f_2) $\bigcap$ Ran g(f_3) $\bigcap$ .... $\bigcap$ Rang (f_n)

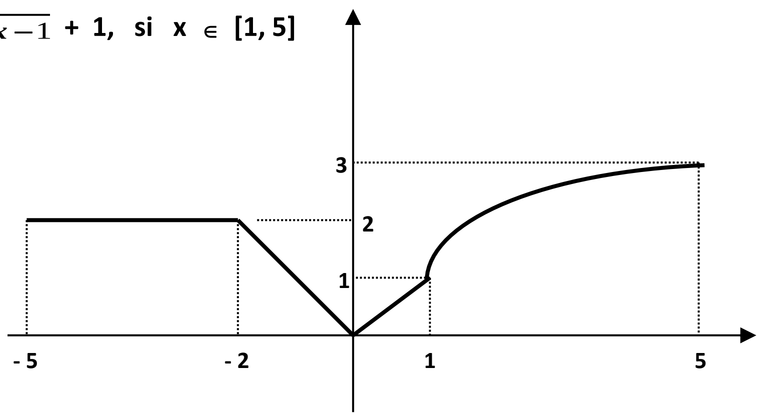
Ejemplo 1.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x \geq 2 \\ x^2, & \text{si } -2 < x < 2 \\ 4, & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$



Ejemplo 2.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in [-5, -2\rangle \\ |x|, & \text{si } x \in [-2, 1\rangle \\ \sqrt{x-1} + 1, & \text{si } x \in [1, 5] \end{cases}$$



ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Una función f decimos que está bien definida cuando se indica su dominio y su regla de correspondencia, consideremos la función **f** : $R \longrightarrow R$ y la función **g** : $R \longrightarrow R$, tal que: $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, entonces:

a) Igualdad de funciones

Las funciones f y g son iguales si se cumple que:

1) Dom (f) = Dom (g)

2) $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in D_f = D_g$

Observe que: $f(x) = x^2$, $x \in [0, 15]$ y $g(x) = x^2$, $x \in R$ No son iguales por incumplir la parte 1).

b) Suma de funciones

Si f y g son dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente, entonces la suma de f y g denotada por **"f + g"**, se define:

1) $\text{Dom}(f+g) = D_f \cap D_g$

2) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\, x \in D_f \cap D_g$

c) Diferencia de funciones

Si f y g son dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente, entonces la diferencia de f y g denotada por **"f – g"**, se define:

1) $\text{Dom}(f-g) = D_f \cap D_g$

2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $\forall\, x \in D_f \cap D_g$

d) Multiplicación de funciones

Si f y g son dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente, entonces la multiplicación de f y g denotada por **"f . g"**, se define:

1) Dom. (f **.** g) = $D_f \cap D_g$

2) (f **.** g)(x) = f (x) **.** g (x) , $\forall x \in D_f \cap D_g$

e) **Cociente de funciones**

Si f y g son dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente, entonces el cociente de f y g denotada por " $\frac{f}{g}$ ", se define:

1) Dom($\frac{f}{g}$) = $D_f \cap D_g - \{ x \in D_g \ / \ g(x) = 0 \}$

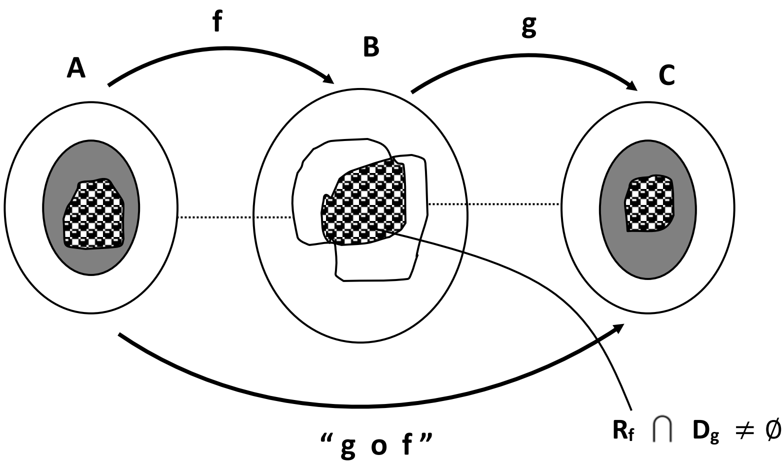
2) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)$

f) **Composición de funciones**

Dada las funciones f y g , tales que: **f** : A ⟶ B ; **g** : B ⟶ C y que: Rang(f) $\cap$ Dom(g) $\neq \emptyset$ (requisito para que exista la composición). Entonces la función compuesta **" g o f "** (se lee f compuesta con g) es aquella función definida por:

1) Dom (g o f) = $\{ x \ / \ x \in D_f \ \wedge \ f(x) \in D_g \}$

2) (g o f) (x) = g (f (x))



Observación

1) $D_{g\,o\,f} \subseteq D_f \subseteq A$

2) $R_{g\,o\,f} \subseteq R_g \subseteq C$

3) $g \; o \; f \neq f \; o \; g$

4) Si $R_f \cap D_g = \emptyset$ la composición **“g o f”** No existe

FUNCIONES: INYECTIVAS, SURYECTIVAS, BIYECTIVAS

FUNCIÓN INYECTIVA

La función $f: A \longrightarrow B$ decimos que es inyectiva o univalente si a cada elemento del rango le corresponde un solo elemento del dominio.
f es inyectiva si $\forall \; x_1, \; x_2 \in A$ se cumple :

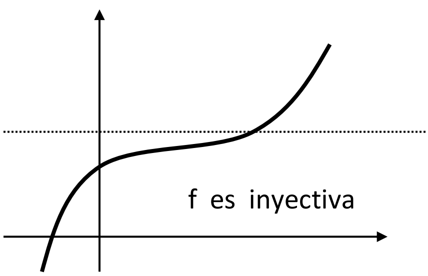
$$\text{Si} \quad f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$$

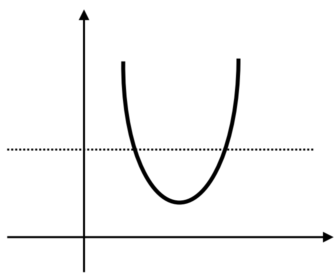
ó

$$\text{Si} \quad x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Observación 1.

Gráficamente podemos determinar si la función f es inyectiva, si trazamos una perpendicular al eje **“y”** , y si la recta corta a f en dos o más puntos decimos que f no es inyectiva, si la recta perpendicular corta a f en un solo punto es inyectiva.





f no es inyectiva

Observación 2.

Inyectividad de funciones seccionadas:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} f_1(x), \text{ Si } x \in \text{Dom}(f_1) \\ f_2(x), \text{ Si } x \in \text{Dom}(f_2) \\ f_3(x), \text{ Si } x \in \text{Dom}(f_3) \\ \cdot \\ f_n(x), \text{ Si } x \in \text{Dom}(f_3) \end{cases}$$

Donde: $\mathbf{f} = f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup \ldots\ldots \cup f_n$

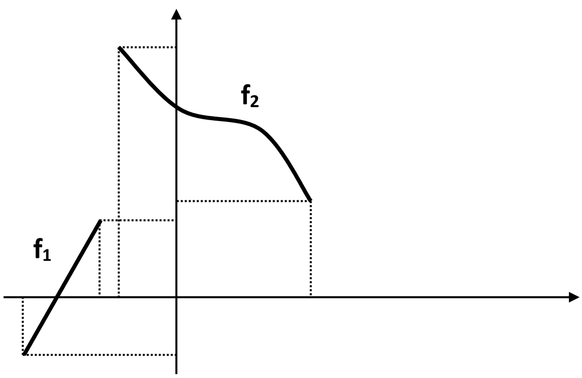
y **Dom.(f)** $= \text{Dom}(f_1) \cup \text{Dom}(f_2) \cup \text{Dom}(f_3) \cup \ldots\ldots \cup \text{Dom}(f_n)$

Entonces la función **f** es inyectiva sí y sólo sí:

1) Las funciones parciales: f_1, f_2, f_3, ... f_n son inyectivas

2) $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) \cap \text{Ran}(f_3) \cap \ldots\ldots \cap \text{Ran}(f_n) = \emptyset$

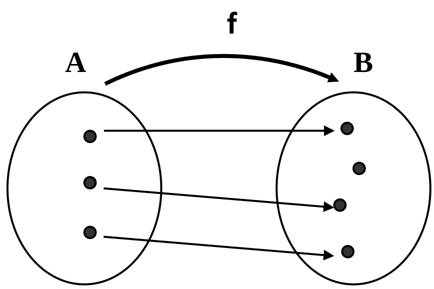
Es decir los rangos parciales deben ser disjuntos entre sí.



FUNCIÓN SOBREYECTIVA O SURYECTIVA

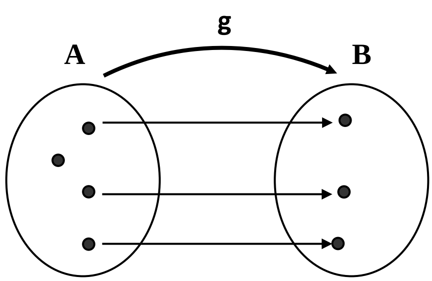
Sea $f: A \longrightarrow B$ decimos que la función f es sobreyectiva sí y sólo sí $\forall\, y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, (f es sobreyectiva cuando el rango o imagen coincide con B).

$$\textbf{f es sobreyectiva} = \begin{cases} \forall\, y \in B,\ \exists x \in A \ / \ y = f(x) \quad \text{ó} \\ \text{Rang}(f) = B \end{cases}$$



Rang (f) $\neq$ B

No es sobreyectiva



Ran (g) = B

Es sobreyectiva

FUNCIÓN BIYECTIVA

La función f: A $\longrightarrow$ B es biyectiva sí a la vez es inyectiva y sobreyectiva.

$$\textbf{f es biyectiva} = \begin{cases} \forall\, y \in B,\ \exists!\ x \in A\ /\ y = f(x) \\ \text{Ran } (f) = B \end{cases}$$

Ejemplo

Determinar si la función f: R $\longrightarrow$ R, definida por: f (x) = mx + n; m $\neq$ 0, es biyectiva.

Solución:

Para que f sea biyectiva debe ser inyectiva y sobreyectiva.

a) Probemos que sea inyectiva

f es inyectiva $\Leftrightarrow$ f (a) = f (b) entonces a = b

$$ma + n = mb + n$$
$$ma = mb, \quad \text{como } m \neq 0$$
$$a = b \qquad \therefore \text{ f es inyectiva}$$

b) Probemos que sea sobreyectiva

f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ Ran (f) = B

En este caso vemos f : R $\longrightarrow$ R, por lo cual B = R y calculando el rango de f tenemos:

$x = \dfrac{y-n}{m}$, m $\neq$ 0, por lo cual x es real $\forall$ y $\in$ R

$$\therefore \text{ Ran (f) = R.}$$

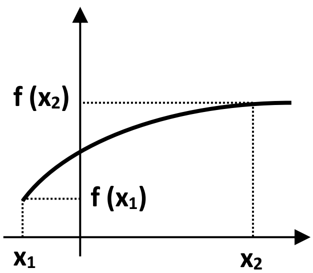
De a) y b) f es biyectiva.

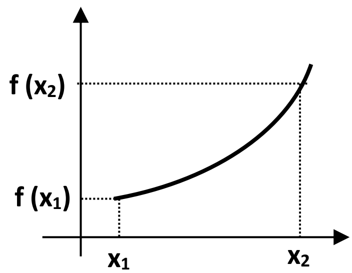
FUNCIONES CRECIENTES, DECRECIENTES

FUNCIONES CRECIENTES

La función f se llama creciente si para todo x_1 , $x_2 \in D_f$ se tiene que:

$$\text{Si} \quad \mathbf{x_1 < x_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$$

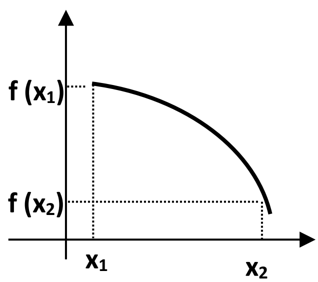


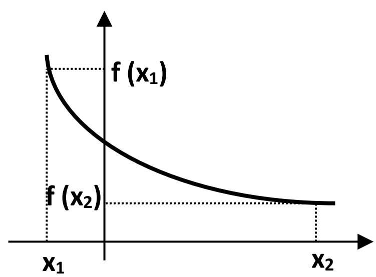


FUNCIONES DECRECIENTES

La función f se llama decreciente si para todo x_1 , $x_2 \in D_f$ se tiene que:

$$\text{Si} \quad \mathbf{x_1 < x_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$$





FUNCIÓN MONÓTONA

La función f es monótona si f es creciente o decreciente.

Observación 1.

Si una función es creciente entonces es inyectiva.

Observación 2.

Si una función es decreciente entonces es inyectiva.

FUNCIÓN INVERSA

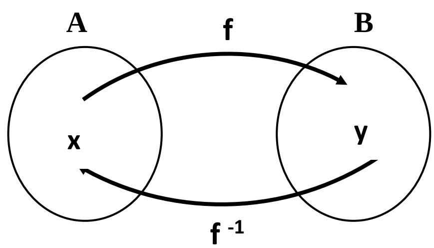
Consideremos la función: $f(x) = \{ (x, f(x)) \ / \ x \in D_f \}$

Entonces existe la inversa de f sí y sólo sí f es inyectiva.

A la función inversa denotaremos por $\mathbf{f^{-1}}$ la cual definimos como:

$$\mathbf{f^{-1}}(x) = \{ (f(x), x) \ / \ x \in D_f \}$$

Donde $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Ran}(f)$ y $\mathrm{Ran}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f)$



Observación 1.

Si $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$, entonces:

a) $f^{-1}[f(x)] = x, \quad \forall x \in A = \mathrm{Dom}(f)$

b) $f[f^{-1}(x)] = y, \quad \forall y \in B = \mathrm{Ran}(f)$

Observación 2.

Toda función tiene inversa, pero no toda inversa es una función

FUNCIÓN PERIÓDICA, PAR E IMPAR

FUNCIÓN PERIÓDICA

Sea una función $f: A \longrightarrow B$, decimos que f es una función periódica si existe un número real $T \neq 0$, tal que $\forall x \in D_f$ tenemos:

1) $x + T \in D_f$

2) $f(x+T) = f(x)$

El mínimo número positivo T se denomina período de f

Ejemplo

Sea $f(x) = [\![x]\!] - x$, $x \in R$, averiguar si es periódica.

Solución:

1) $x + T \in D_f$

2) $f(x + T) = [\![x+T]\!] - x - T$

$f(x + T) = [\![x]\!] + T - x - T$

$f(x + T) = [\![x]\!] - x$, observe que esto ocurre para $T \in Z$.

Como $T \neq 0$, entonces $T = 1$ (que es el mínimo entero positivo),

Luego el período de f es 1.

FUNCIÓN PAR

f es par si $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ y además:

$$f(x) = f(-x)$$

FUNCIÓN IMPAR

f es impar si $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ y además:

$$f(-x) = -f(x)$$

Ejemplo

Analizar: $\mathbf{f(x) = -x^3 + x}$

Solución:

Veamos si f es par, debe cumplir: $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = -(-x)^3 + (-x)$$

$$f(-x) = x^3 - x$$

$$\therefore\ f(x) \neq f(-x) \quad (\text{ f no es par })$$

Veamos si f es impar, debe cumplir: $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = -(-x)^3 + (-x)$$

$$f(-x) = x^3 - x$$

$$-f(x) = x^3 - x$$

$$\therefore\ f(-x) = -f(x) \quad (\text{ f es impar })$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1.- FUNCIÓN SENO

Definimos la función seno de la siguiente forma:

f = { (x, y) ∈ R x R/ f(x) = sen x }

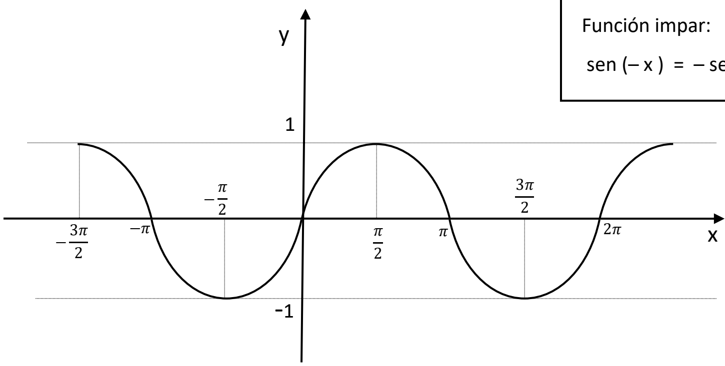
Dom f = R

Rang f = [-1, 1]

Período = 2π rad

Función impar:

sen (– x) = – sen x



2.- FUNCIÓN COSENO

Definimos la función coseno de la siguiente forma:

f = { (x, y) ∈ R x R/ f(x) = cos x }

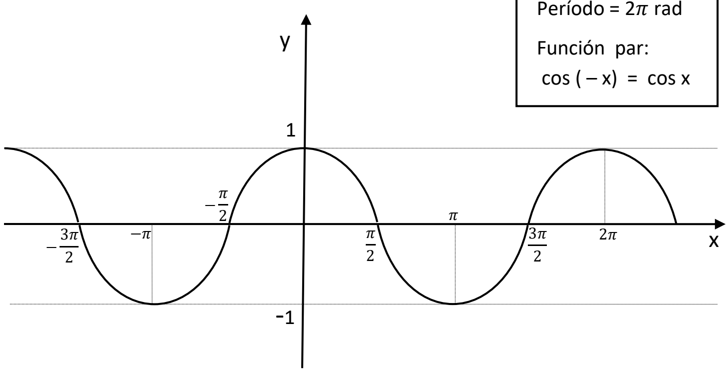
Dom f = R

Rang f = [-1, 1]

Período = 2π rad

Función par:

cos (– x) = cos x

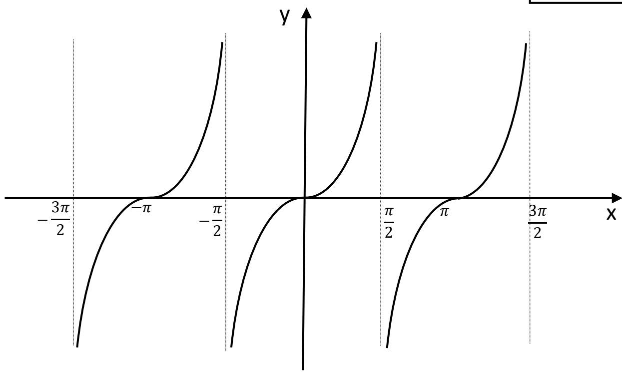


3.- FUNCIÓN TANGENTE

Definimos la función tangente de la siguiente forma:

f = { (x, y) ∈ R x R/ f(x) = tg x }

Dom f = x ∈ R/ x ≠ $\frac{\pi}{2} + k\pi$, k ∈ Z
Rang f = R
Período = π rad
Función impar: tg (–x) = – tg x

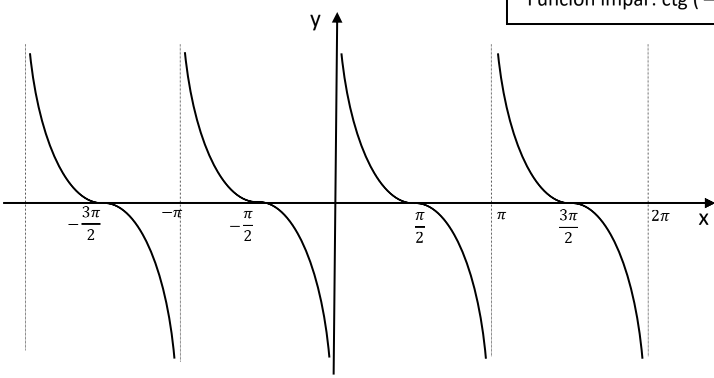


4.- FUNCIÓN COTANGENTE

Definimos la función cotangente de la siguiente forma:

f = { (x, y) ∈ R x R/ f(x) =ctg x }

Dom f = x ∈ R/ x ≠ $k\pi$, k ∈ Z
Rang f = R
Período = π rad
Función impar: ctg (–x) = – ctg x

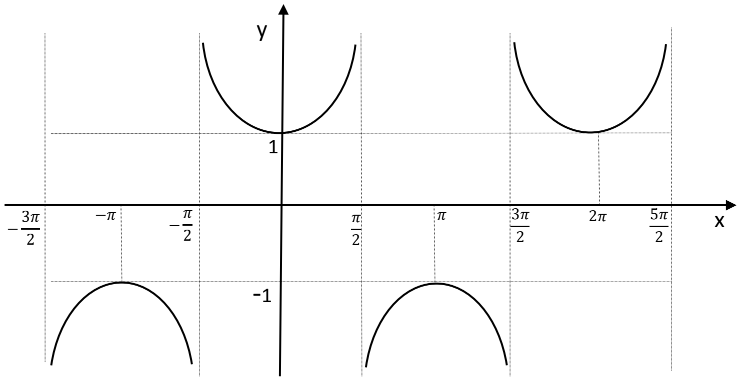


5.- FUNCIÓN SECANTE

Definimos la función secante de la siguiente forma:

f = { (x, y) ∈ R x R/ f(x) = sec x }

Dom f = x ∈ R/ x ≠ $\frac{\pi}{2} + k\pi$, k ∈ Z
Rang f = $\langle -\infty, -1] \ \cup \ [1, \infty \rangle$
Período = 2π rad
Función par: sec (–x) = sec x

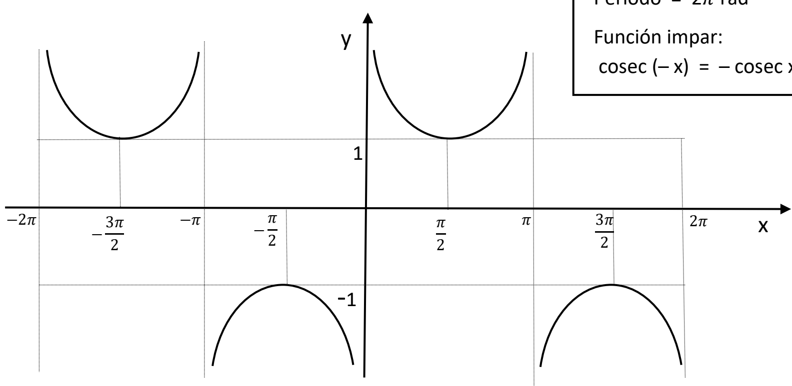


6.- FUNCIÓN COSECANTE

Definimos la función cosecante de la siguiente forma:

f = { (x, y) ∈ R x R/ f(x) = cosec x }

Dom f = x ∈ R/ x ≠ $k\pi$, k ∈ Z
Rang f = $\langle -\infty, -1] \ \cup \ [1, \infty \rangle$
Período = 2π rad
Función impar:
cosec (– x) = – cosec x



EJERCICIOS RESUELTOS I

1) Sea $f(x+3) = x^2 - 1$, determinar :

a) $\dfrac{f(a+2)-f(1)}{a-3}$, a $\neq$ 3 b) $\dfrac{f(a+2)-f(2)}{a-2}$, a $\neq$ 2

Solución:

$f(x+3) = x^2 - 1$

$f(x+3) = (x+3)^2 - 6(x+3) + 8$

sea $z = x+3$, $f(z) = z^2 - 6z + 8$

$f(a+2) = (a+2)^2 - 6(a+2) + 8$

$f(a+2) = a^2 - 2a$

$f(1) = 1^2 - 6(1) + 8 = 3$

$f(1) = 3$, $f(2) = 0$

$$\frac{f(a+2)-f(1)}{a-3} = \frac{a^2-2a-3}{a-3}, a \neq 3$$

$$\therefore \frac{f(a+2)-f(1)}{a-3} = a+1$$

$$\frac{f(a+2)-f(1)}{a-3} = \frac{a^2-2a}{a-2}, a \neq 2 = a$$

$$\therefore \frac{f(a+2)-f(2)}{a-2} = a$$

2) **Si $f(2x-1) = 4x^2 - 4x + 5$, Hallar $f(x)$**

Solución:

$f(2x-1) = (2x)^2 - 2(2x) + 1 + 4$

$f(2x-1) = (2x-1)^2 + 4$

$f(z) = z^2 + 4$

$\therefore\ f(x) = x^2 + 4$

3) **Si $f(x) = ax^2 - bx + c$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 8$**

$f(-1) + f(\frac{1}{2}) = \frac{15}{4}$, Hallar $f(5)$

Solución:

$f(-1) = a - b + c = 0$

$f(1) = a + b + c = 8$

$a + c = 4$ .... (*)

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(a) + \frac{1}{2}(b) + c$

De $f(-1) + f(\frac{1}{2}) = a - b + c = \frac{15}{4}$

Tenemos que: $5a - 2b + 8c = 15$ y de:

$a + b + c = 8$ con $5a - 2b + 8c = 15$

$7a + 10c = 31$ ....(**)

de (*) y (* *) hallamos que $c = 1$, $a = 3$ y $b = 4$

$\Rightarrow f(5) = 3(5)^2 + 4(5) + 1 = 96$

$\therefore\ f(5) = 96$

Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

4) **f (x) =** $\sqrt{x^2 - 4x + 3}$

Solución:

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$(x - 3)(x - 2) \geq 0$, Utilizando el método de los puntos críticos tenemos que:

$\therefore \quad x \in \langle -\infty, 1] \cup [3, \infty\rangle$

5) **f (x) =** $\sqrt{\dfrac{x}{4 - x^2}}$

Solución:

$\dfrac{x}{4 - x^2} \geq 0 \quad , \qquad \dfrac{x}{(x-2)(x+2)} \leq 0$,

$\therefore \quad x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup [0, 2\rangle$

6) **f (x) =** $\sqrt{\dfrac{2x^2 - x - 1}{x(x+3)}}$

Solución:

$\dfrac{2x^2 - x - 1}{x(x+3)} \geq 0, \qquad \dfrac{(2x+1)(x-1)}{x(x+3)} \geq 0$

$\therefore x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup [-\frac{1}{2}, 0\rangle \cup [1, \infty\rangle$

7) **f (x) =** $\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$

Solución:

Debe cumplirse que: $x - |x| > 0$

$|x| - x < 0$

Considerando la definición del valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Si $x < 0$

$-x - x < 0$

$-2x < 0$

$x > 0$, $\therefore\ x \in \phi$

b) Si $x \geq 0$

$x - x < 0$

$0 < 0$ $\therefore\ x \in \phi$

De a) y b) $x \in \emptyset$

8) **f (x) =** $\sqrt{1-|x|}$

Solución:

$1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| - 1 \leq 0$

$|x| \leq \mathbf{1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$\therefore\ x \in [-1, 1]$

9) **f(x) =** $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{x+1}}}$

Solución:

a) $\dfrac{x-2}{x+2}\geq 0$ por el método de los puntos críticos tenemos:

$\therefore x \in \langle -\infty, -2\,\rangle \cup [2\,,\infty\rangle$

b) $\dfrac{1-x}{\sqrt{x+1}}\geq 0$

Tenemos: $\dfrac{a}{b}\geq 0$ por inspección $b > 0$ y la única alternativa posible es que $a \geq 0$

1) $\sqrt{x+1} > 0$ y **2)** $1-x \geq 0$

$x + 1 > 0$ $x-1\leq 0$

$x > -1$ $x \leq 1$

De la intersección de 1) y 2) $x \in \langle -1\,, 1]$

$\therefore$ De a) $\cap$ b) $x \in \phi$

10) **f(x) =** $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$

Solución:

a) $x-1\geq 0$

$x \geq 1$ tenemos que $x \in [\,-1,\ \infty\rangle$

b) $1-x\geq 0$

$x-1\leq 0$, $x \leq 1$ tenemos que: $x \in \langle -\infty, 1]$.

c) $x^2 + 1 \geq 0$, tenemos que: $x \in R$

De a), b) y c) $\therefore$ $x = \{1\}$

11) **f(x) =** $\sqrt{1 - \sqrt{4 - x^2}}$

Solución:

$$1 - \sqrt{4 - x^2} \geq 0$$

$\sqrt{4 - x^2} \leq 1$ *Haciendo uso de la siguiente fórmula*

$$\sqrt{a} \leq b \iff a \geq 0 \wedge (b \geq 0 \wedge a \leq b^2)$$

$$4 - x^2 \geq 0 \wedge (1 \geq 0 \wedge 4 - x^2 \leq 1)$$

$$x^2 - 4 \leq 0 \wedge (R \wedge x^2 - 3 \geq 0)$$

Tenemos que $x \in [-2, 2] \wedge R \wedge \langle -\infty, -\sqrt{3}\,] \cup [\sqrt{3}, \infty\rangle$

De la intersección $\therefore$ $x \in \left[-2, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\right]$

12) **f(x) =** $\sqrt[4]{x^2 + 4x - 12} + \dfrac{3x^2}{\sqrt[4]{x + 20 - x^2}}$

Solución:

a) $x^2 + 4x - 12 \geq 0$ por lo cual $x \in \langle -\infty, -6] \cup [2, \infty\rangle$

b) $x + 20 - x^2 > 0$, ordenando tenemos que:

$x^2 - x - 20 < 0$ de lo cual $x \in \langle -4, 5\rangle$

De a), b) $\therefore$ $x \in [2, 5\rangle$

13) **f(x)** = $\boldsymbol{sen\ x} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{sgn(x)}}$

Solución:

Dominio de la función ***sen x*** = R

$$\textbf{Sgn (x)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \textbf{si } \mathbf{x > 0} \\ \mathbf{0}, & \textbf{si } \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{-1}, & \textbf{si } \mathbf{x < 0} \end{cases}$$

Sgn (x) $\neq$ 0 por estar en el denominador.

$\therefore$ x $\in$ R – {0}

14) **f(x)** = $\sqrt[8]{x^4 - 16} - \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x + 1}}{\sqrt{|x+3| - 2Sgn(x^4 - 16)}}$

Solución:

a) $X^4 - 16 \geq 0$ factorizando tenemos que:

$(x-2)(x+2)(x^2+4) \geq 0$ de lo cual x $\in \langle -\infty, -2] \cup [2, \infty\rangle$

b) $|x+3| - 2Sgn(x^4 - 16) > 0$

$$\text{Sgn } (x^4 - 16) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \\ 0, & \text{si } x = \{-2,2\} \\ -1, & \text{si } x \in \langle -2, 2\rangle \end{cases}$$

1) *Analizando cuando* x $\in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$

$|x+3| - 2 > 0$

$|x+3| > 2$ entonces x $\in \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle -1, \infty\rangle$

Interceptando tenemos: x $\in \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$

2) *Analizando cuando* $x = \{-2, 2\}$

$|x+3| - 2(0) > 0$

$|x+3| > 0$ entonces $x \in R - \{3\}$

Interceptando tenemos: $x = \{-2, 2\}$

3) *Analizando cuando* $x \in \langle -2, 2\rangle$

$|x+3| - 2(-1) > 0$

$|x+3| > -2$ entonces $x \in R$

Interceptando tenemos: $x \in \langle -2, 2\rangle$

Uniendo los resultados de **1), 2)** y **3)** tenemos la solución de **b):**

$$x \in \langle -\infty, -5\rangle \cup [-2, \infty\rangle.$$

De interceptar a) y b) hallamos el conjunto solución final:

$$\therefore \quad x \in \langle -\infty, -5\rangle \cup [2, \infty\rangle. \cup \{-2\}$$

15) **f(x)** $= \sqrt[4]{x^2 - 16} + \dfrac{\sqrt[6]{x^2 + x - 12Sgn(x^2+12)}}{\sqrt{|x+3| - Sgn(x^4 - 16)}}$

Solución:

a) $X^2 - 16 \geq 0$ factorizando tenemos que:

$(x-4)(x+4) \geq 0$ de lo cual $x \in \langle -\infty, -4] \cup [4, \infty\rangle$

b) $x^2 + x - 12Sgn(x^2 + 12) \geq 0$

$$Sgn(x^2+12) = \begin{cases} 1, & \text{si } x^2 + 12 > 0 \quad (V) \quad ..... \quad x \in R \\ 0, & \text{si } x^2 + 12 = 0 \quad (F) \quad ..... \quad x \in \emptyset \\ -1, & \text{si } x^2 + 12 < 0 \quad (F) \quad ..... \quad x \in \emptyset \end{cases}$$

Reemplazando en b) tenemos $x^2 + x - 12(1) \geq 0$

De lo cual $x \in \langle -\infty, -4] \cup [3, \infty\rangle$.

c) $|x+3| - Sgn(x^4 - 16) > 0$

$$Sgn(x^4 - 16) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \\ 0, & \text{si } x = \{-2, 2\} \\ -1, & \text{si } x \in \langle -2, 2\rangle \end{cases}$$

1) *Analizando cuando* $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$

$|x+3| - 1 > 0$

$|x+3| > 1$ entonces $x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle -2, \infty\rangle$

Interceptando tenemos: $x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$

2) *Analizando cuando* $x = \{-2, 2\}$

$|x+3| - (0) > 0$

$|x+3| > 0$ entonces $x \in R - \{3\}$

Interceptando tenemos: $x = \{-2, 2\}$

3) *Analizando cuando* $x \in \langle -2, 2\rangle$

$|x+3| - (-1) > 0$

$|x+3| > -1$ entonces $x \in R$

Interceptando tenemos: $x \in \langle -2, 2\rangle$

Uniendo los resultados de **1), 2)** y **3)** tenemos la solución de **c):**

$$x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup [-2, \infty\rangle$$

De interceptar **a), b)** y **c)** hallamos el conjunto solución final:

$$\therefore \quad x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup [4, \infty\rangle$$

16) **f(x) =** $\sqrt{\dfrac{3}{|x-2|^2-|6-3x|+\frac{5}{4}}}$

Solución:

$\dfrac{3}{|x-2|^2-|6-3x|+\frac{5}{4}} \geq 0$ Entonces $|x-2|^2-3|x-2|+\frac{5}{4}>0$

Haciendo $|x-2| = y$ tenemos $y^2-3y+\frac{5}{4}>0$

$(2y-1)(2y-5)>0;$ $\quad y \in \langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle \frac{5}{2}, \infty\rangle$

$$|x-2| \in \langle -\infty, \tfrac{1}{2}\rangle \cup \langle \tfrac{5}{2}, \infty\rangle$$

$$|x-2| < \tfrac{1}{2} \quad \vee \quad |x-2| > \tfrac{5}{2}$$

$-\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2} \quad \vee \quad \{ x-2 > \frac{5}{2} \quad \vee \quad x-2 < \frac{-5}{2} \}$

$x \in \langle \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle \quad \vee \quad \{ x \in \langle \frac{9}{2}, \infty\rangle \quad \vee \quad x \in \langle -\infty, -\frac{1}{2}\rangle \}$

$\therefore \quad x \in \langle -\infty, -\frac{1}{2}\rangle \cup \langle \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle \cup \langle \frac{9}{2}, \infty\rangle$

17) **f(x) =** $\sqrt{-x} - \dfrac{1}{\sqrt{x+25}}$ **Hallar el rango**

Solución:

Primero hallamos el dominio de f: $-x \geq 0 \quad \wedge \quad x+25 > 0;$ $\quad x \in \langle -25, 0]$

Calculando el rango a partir del dominio $-25 < x \leq 0,$ $\quad 0 < x+25 \leq 25$

$0 < \sqrt{x+25} \leq 5,$ $\quad 0 < \frac{1}{\sqrt{x+25}} \leq \frac{1}{5}$ entonces $-\frac{1}{5} \leq -\frac{1}{\sqrt{x+25}} < 0$ ....(*)

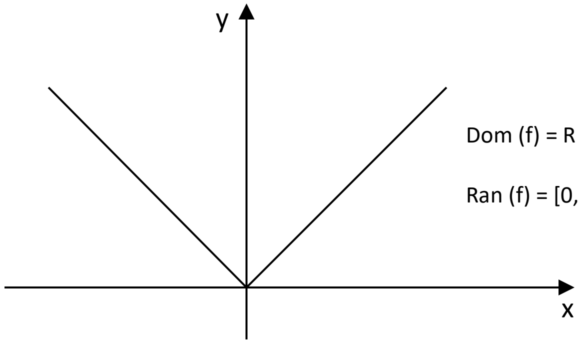
Ahora de $0 \leq -x < 25$ tenemos también que: $0 \leq \sqrt{-x} < 5,$ ......(**)

Sumando (*) y (**) $\quad -\frac{1}{5} \leq \sqrt{-x} - \frac{1}{\sqrt{x+25}} < 5$

$\therefore \quad y \in \left[-\frac{1}{5}, 5\right\rangle$

Esbozar las gráficas de las siguientes funciones:

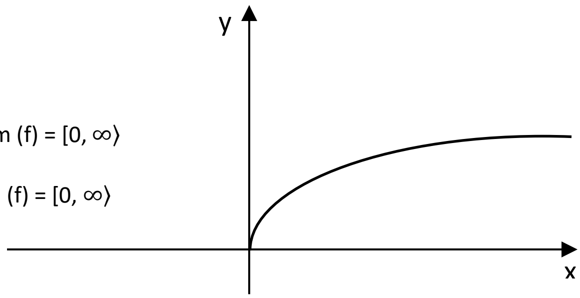
18) **f(x) = $|x|$**



Dom (f) = R

Ran (f) = [0, ∞⟩

19) **f(x) = $\sqrt{x}$**



Dom (f) = [0, ∞⟩

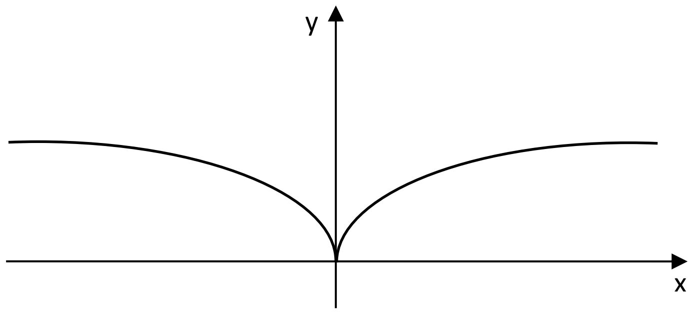
Ran (f) = [0, ∞⟩

20) **f(x) = $\sqrt{|x|}$**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dom (f) = R

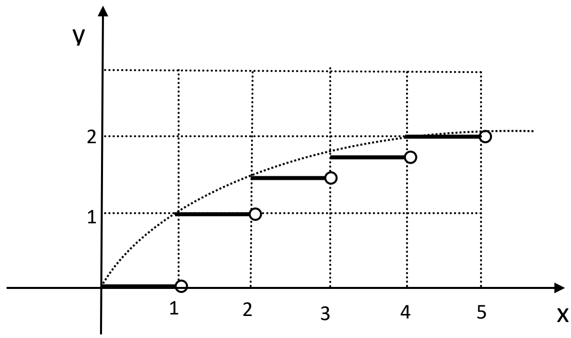
Ran (f) = [0, ∞⟩



21) **f(x) = $\sqrt{[\![x]\!]}$**

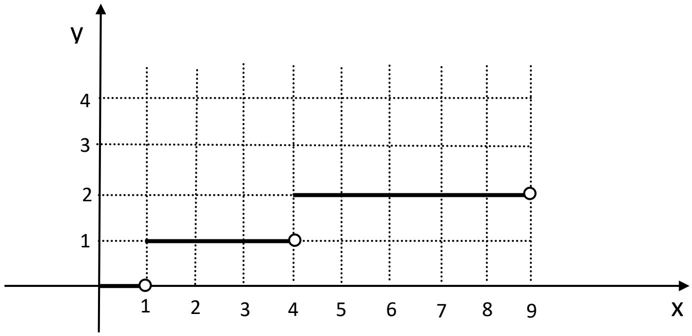
Dom(f) = [0, ∞⟩

Rang(f) = { $\sqrt{n}$, n ∈ Z_0^+ }



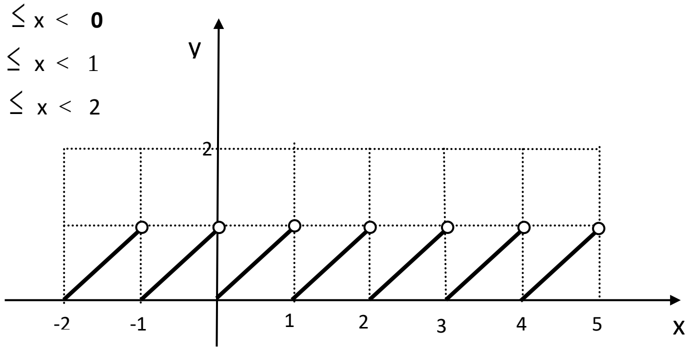
22) **f(x) = $[\![\sqrt{x}]\!]$**

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 4 \\ \mathbf{2} & \text{si} \quad 4 \leq x < 9 \\ 3 & \text{si} \quad 9 \leq x < 16 \\ \ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$



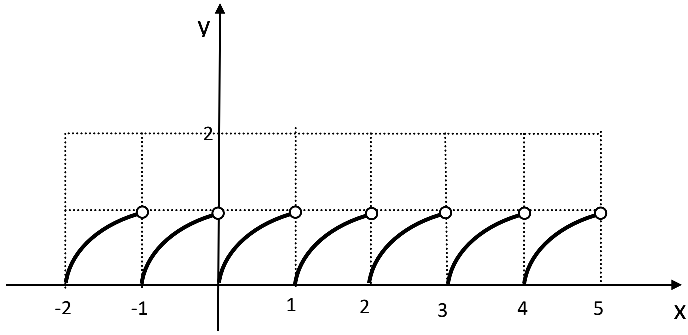
23) $\mathbf{f(x) = x - [\![x]\!]}$

$$f(x) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x+2, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < \mathbf{0} \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



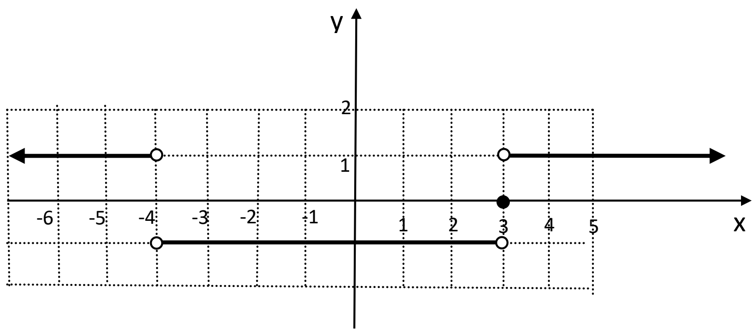
24) $\mathbf{f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}}$

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sqrt{\boldsymbol{x+2}} & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ \sqrt{\boldsymbol{x+1}} & \text{si } -1 \leq x < \mathbf{0} \\ \sqrt{\boldsymbol{x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{\boldsymbol{x-1}} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \sqrt{\boldsymbol{x-2}} & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



25) $\quad f(x) = Sgn\left(\frac{x-3}{x+4}\right)$

$$Sgn\left(\frac{x-3}{x+4}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{x+3}{x+4} > 0 \text{ , } x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle \\ 0, & \text{si } \frac{x+3}{x+4} = 0 \text{ , } x = 3 \\ -1, & \text{si } \frac{x+3}{x+4} < 0 \text{ , } x \in \langle -4, 3\rangle \end{cases}$$



Dom(f) = R – {-4}

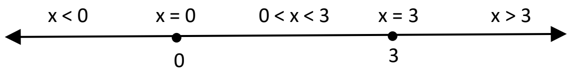
Rang(f) = {-1, 0 , 1}

26) **f(x) = Sgn(x – 3) – 3Sgn(x)**

Solución:

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{Sgn}(x-3) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 3 \\ 0, & \text{si } x = 3 \\ -1, & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Analizando el comportamiento de la función f(x) en los intervalos y puntos:



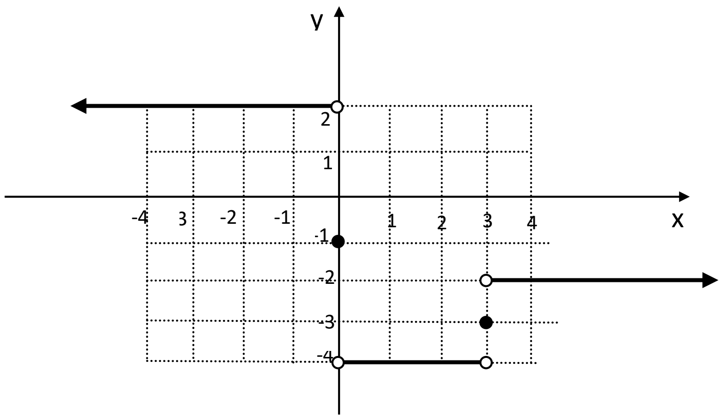
Si $x < 0$ entonces $f(x) = -1 - 3(-1) = 2$; $f(x) = 2$

Si $x = 0$ entonces $f(x) = -1 - 3(0) = -1$; $f(0) = -1$

Si $0 < x < 3$ entonces $f(x) = -1 - 3(1) = -4$; $f(x) = -4$

Si $x = 3$ entonces $f(x) = 0 - 3(1) = -3$; $f(3) = -3$

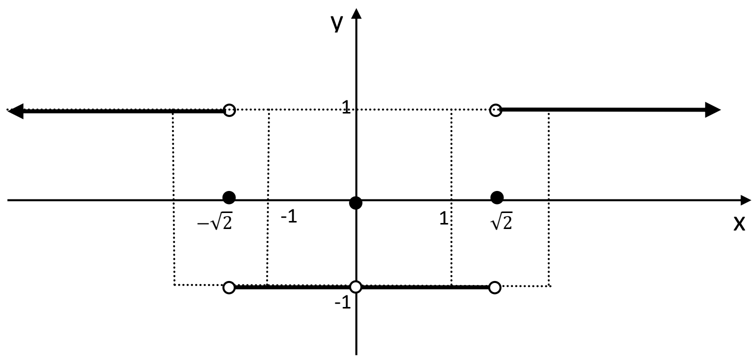
Si $x > 3$ entonces $f(x) = 1 - 3(1) = -2$; $f(x) = -2$



27) **f(x) = Sgn$\left(\left|x^2-1\right|-1\right)$**

Solución:

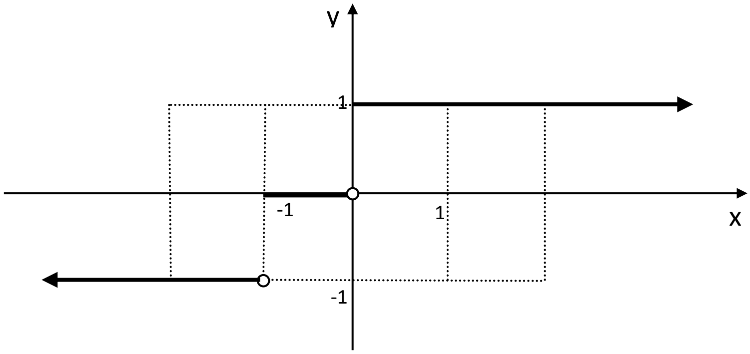
$$\text{Sgn}\left(\left|x^2-1\right|-1\right)=\begin{cases} 1, & \text{si } |x^2-1| > 1; \quad x \in \langle -\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2}, \infty\rangle \\ 0, & \text{si } |x^2-1| = 1; \quad x = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\} \\ -1, & \text{si } |x^2-1| < 1; \quad x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle - \{0\} \end{cases}$$



28) **f(x) = Sgn$(⟦x+3⟧-2)$**

Solución:

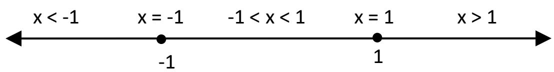
$$\text{Sgn}(⟦x+3⟧-2)=\begin{cases} 1, & \text{si } ⟦x+3⟧ > 2; \quad x+3 \geq 2+1; \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{si } ⟦x+3⟧ = 2; \quad 2 \leq x+3 < 3; \quad -1 \leq x < 0 \\ -1, & \text{si } ⟦x+3⟧ < 2; \quad x+3 < 2; \quad x < -1 \end{cases}$$



29) **f(x) = Sgn$(x+1)$. μ (x – 1)**

Solución:

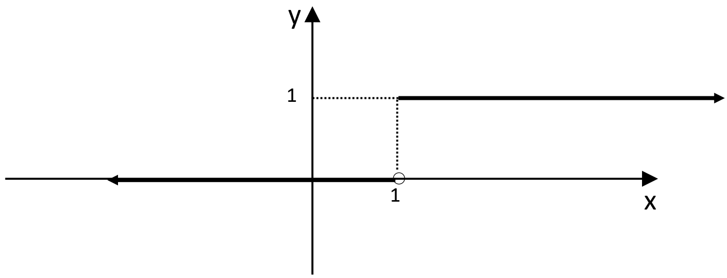
$$\text{Sgn}\,(x+1) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > -1 \\ 0, & \text{si } x = -1 \\ -1, & \text{si } x < -10 \end{cases} \qquad \mu\,(x-1) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 1 \\ 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$



Analizando el comportamiento de la función f(x) en los intervalos y puntos:

Si	$x < -1$	entonces	$f(x) = -1.(0) = 0;$	$f(x) = 0$
Si	$x = -1$	entonces	$f(x) = 1.(0) = 0;$	$f(-1) = 0$
Si	$-1 < x < 1$	entonces	$f(x) = 1.(0) = 0;$	$f(x) = 0$
Si	$x = 1$	entonces	$f(x) = 1.(1) = 1;$	$f(1) = 1$
Si	$x > 1$	entonces	$f(x) = 1.(1) = 1;$	$f(x) = 1$

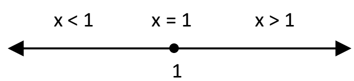
Resumiendo: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 1 \\ 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}$



30) $\mathbf{f(x) = x^2 \mu(x-1) + 2x\mathrm{Sgn}(1-x)}$

Solución:

$\mathrm{Sgn}(1-x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1 \\ 0, & \text{si } x = 1 \\ -1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $\qquad \mu(x-1) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 1 \\ 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}$



Analizando el comportamiento de la función f(x) en los intervalos y puntos:

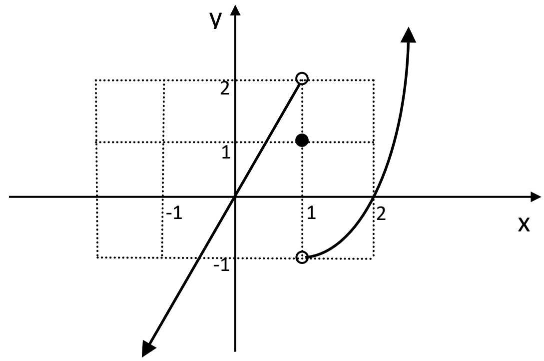
Si $x < 1$ entonces $f(x) = x^2(0) + 2x(1)$; $f(x) = 2x$

Si $x = 1$ entonces $f(x) = x^2(1) + 2x(0)$; $f(x) = x^2$; $f(1) = 1$

Si $x > 1$ entonces $f(x) = x^2(1) + 2x(-1)$; $f(x) = x^2 - 2x$

Resumiendo: $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$y = x^2 - 2x + 1 - 1$ $y + 1 = (x-1)^2$ Parábola de V(1,-1) se abre hacia arriba

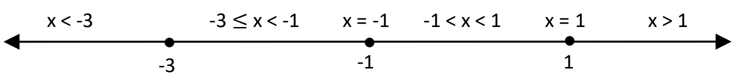


31) **f(x) = x $\boldsymbol{\mu}$ ($[\![x+3]\!]$) – x.Sgn($|x|$ – 1)**

Solución:

$$\mu\,([\![x+3]\!]) = \begin{cases} 1, & \text{si } [\![x+3]\!] \geq 0; \Leftrightarrow x+3 \geq 0, \Rightarrow x \geq -3 \\ 0, & \text{si } [\![x+3]\!] < 0; \Leftrightarrow x+3 < 0, \Rightarrow x < -3 \end{cases}$$

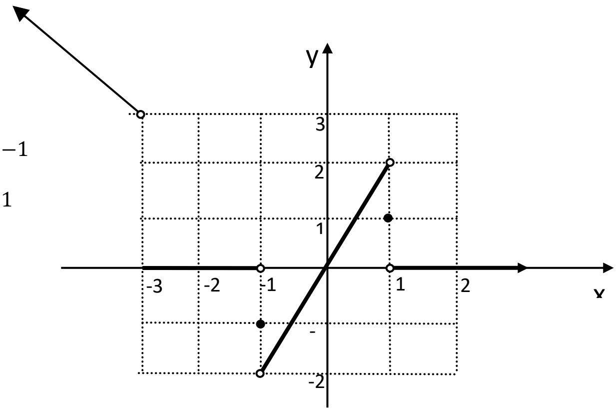
$$\text{Sgn}\,(|x| - 1) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| > 1; \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \\ 0, & \text{si } |x| = 1, \Leftrightarrow x = \{-1, 1\} \\ -1, & \text{si } |x| < 1, \Leftrightarrow x \in \langle -1, 1\rangle \end{cases}$$



Analizando el comportamiento de la función f(x) en los intervalos y puntos:

Si $x < -3$	entonces	$f(x) = x(0) - x(1)$;	$f(x) = -x$
Si $-3 \leq x < -1$	entonces	$f(x) = x(1) - x(1)$;	$f(x) = 0$
Si $x = -1$	entonces	$f(x) = x(1) - x(0)$;	$f(-1) = -1$
Si $-1 < x < 1$	entonces	$f(x) = x(1) - x(-1)$;	$f(x) = 2x$
Si $x = 1$	entonces	$f(x) = x(1) - x(0)$;	$f(1) = 1$
Si $x > 1$	entonces	$f(x) = x(1) - x(1)$;	$f(x) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x < -3 \\ 0 & si \quad -3 \leq x < -1 \\ -1 & si \quad x = -1 \\ 2x & si \quad -1 < x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$



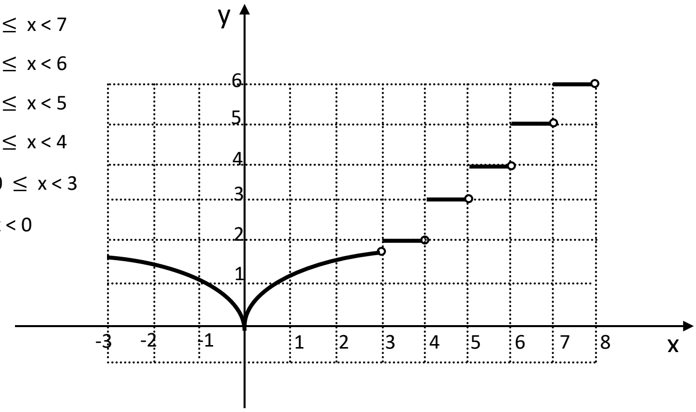
32) $\quad$ **f(x) =** $\begin{cases} [\![\boldsymbol{x-1}]\!], & \boldsymbol{si} \;\; \boldsymbol{3} \leq \boldsymbol{x} < 8 \\ \sqrt{|\boldsymbol{x}|}, & \boldsymbol{Si} \;\; \boldsymbol{x} < 3 \end{cases}$

Solución:

$$por \;\; propiedad \;\; tenemos \; que: \qquad [\![x-1]\!] = [\![x]\!] - 1$$

$$|x| = \begin{cases} \mathbf{x}, & \mathbf{si} \;\; \mathbf{x} \geq 0 \\ \mathbf{-x}, & \mathbf{si} \;\; \mathbf{x < 0} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{Si} \quad 7 \leq x < 8 \\ 5 & \text{Si} \quad 6 \leq x < 7 \\ 4 & \text{Si} \quad 5 \leq x < 6 \\ 3 & \text{Si} \quad 4 \leq x < 5 \\ 2 & \text{Si} \quad 3 \leq x < 4 \\ \sqrt{x} & \text{Si} \quad 0 \leq x < 3 \\ \sqrt{-x} & \text{Si} \quad x < 0 \end{cases}$$



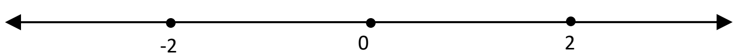
33) **f(x) = $|x+2| + |x-2| - |x| - 1$**

Solución:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{si} \quad x \geq -2 \\ -(x+2), & \text{si} \quad x < -2 \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

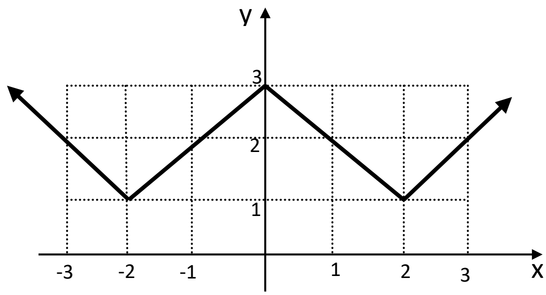
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$x < -2$ $\quad$ $-2 \leq x < 0$ $\quad$ $0 \leq x < 2$ $\quad$ $x \geq 2$



Analizando el comportamiento de la función f(x) en los intervalos y puntos:

Si $x < -2$	entonces	$f(x) = -x - 2 + 2 - x + x - 1;$	$f(x) = -x - 1$
Si $-2 \leq x < 0$	entonces	$f(x) = x + 2 - x + 2 + x - 1;$	$f(x) = x + 3$
Si $0 \leq x < 2$	entonces	$f(x) = x + 2 - x + 2 - x - 1;$	$f(x) = -x + 3$
Si $x \geq 2$	entonces	$f(x) = x + 2 + x - 2 - x - 1;$	$f(1) = x - 1$



34) $\quad f(x) = \sqrt{4-x^2}.\,\mathrm{Sgn}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right) + \left[\!\left[\dfrac{2x+6}{x+4}\right]\!\right] - 1$

Solución:

Analizando tenemos:

a) $4 - x^2 \geq 0; \quad x \in [-2,\ 2]$

b)

$$\mathrm{Sgn}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } \dfrac{x}{x^2-1} > 0; \quad \Leftrightarrow \ x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \\ 0, & \text{si } \dfrac{x}{x^2-1} = 0; \quad \Leftrightarrow \ x = 0 \\ -1, & \text{si } \dfrac{x}{x^2-1} < 0; \quad \Leftrightarrow \ x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \end{cases}$$

c) $\quad \left[\!\left[\dfrac{2x+6}{x+4}\right]\!\right] = \left[\!\left[2 - \dfrac{2}{x+4}\right]\!\right] = 2 + \left[\!\left[-\dfrac{2}{x+4}\right]\!\right]$

Hallando el mayor entero de: $\left[\!\left[-\frac{2}{x+4}\right]\!\right]$ partiendo de $x \in [-2,\ 2]$

$-2 \leq x \leq 2$

$2 \leq x+4 \leq 6$

$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x+4} \leq \frac{1}{2}$

$-1 \leq \frac{-2}{x+4} \leq -\frac{1}{3}$

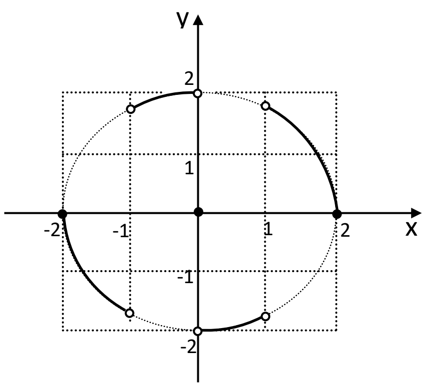
Por la definición de mayor entero tenemos:

$\left[\!\left[-\frac{2}{x+4}\right]\!\right] = -1$, luego:

$\left[\!\left[\frac{2x+6}{x+4}\right]\!\right]$ **= 2 + (-1) = 1**

De a), b) y c) tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \\ 0 & \text{si } x = \{-2, 0, 2\} \\ -\sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in \langle -2, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \end{cases}$$



35) **f(x) = x^2Sgn(x^2 – 1) – $\left[\!\left[\frac{x-1}{2}\right]\!\right] |x-1|$ Sgn(x + 1); con x $\in$ [-3, 3⟩**

Solución:

$$\text{Sgn}\,(x^2-1) = \begin{cases} 1, \text{ si } (x^2-1) > 0; & x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \\ 0, \text{ si } (x^2-1) = 0; & x = \{-1, 1\} \\ -1, \text{ si } (x^2-1) < 0; & x \in \langle -1, 1\rangle \end{cases}$$

$$\text{Sgn}(x+1) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > -1 \\ 0, & \text{si } x = -1 \\ -1, & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

$$\left[\!\left[\frac{x-1}{2}\right]\!\right] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq \frac{x-1}{2} < n+1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n+1 \leq x < 2n+3$$

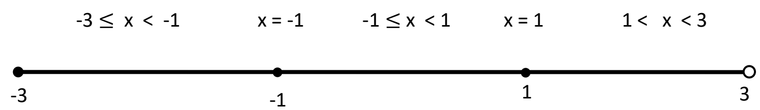
Tomando los n de tal manera que: $x \in [-3, 3\rangle$
tenemos que $n = \{-2, -1, 0\}$

$n = -2 \Rightarrow \quad -3 \leq x < -1$

$n = -1 \Rightarrow \quad -1 \leq x < 1$

$n = 0 \Rightarrow \quad 1 \leq x < 3$

$$\left[\!\left[\frac{x-1}{2}\right]\!\right] = \begin{cases} -2 & \text{Si } -3 \leq x < -1 \\ -1 & \text{Si } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{Si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$$



Analizando el comportamiento de la función f(x) en los intervalos y puntos:

Si $-3 \leq x < -1$ entonces $f(x) = x^2(1) - -2(1-x)(-1)$; $f(x) = x^2 + 2x - 2$

Si $x = -1$ entonces $f(x) = x^2(0) - -1(1-x)(0)$; $f(-1) = 0$

Si $-1 < x < 1$ entonces $f(x) = x^2(-1) - -1(1-x)(1)$; $f(x) = -x^2 - x + 1$

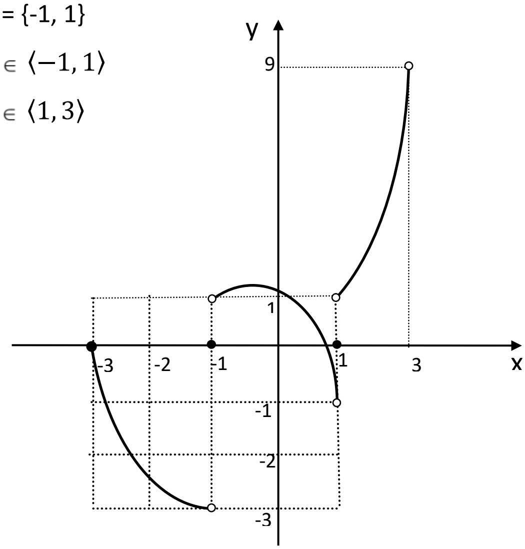
Si $x = 1$ entonces $f(x) = x^2(0) - 0(x-1)(1)$; $f(1) = 0$

Si $1 < x < 3$ entonces $f(x) = x^2(1) - 0(x-1)(1)$; $f(x) = x^2$

Resumiendo tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{Si } x \in [-3, -1\rangle \\ 0 & \text{Si } x = \{-1, 1\} \\ -x^2 - x + 1 & \text{Si } x \in \langle -1, 1\rangle \\ x^2 & \text{Si } x \in \langle 1, 3\rangle \end{cases}$$

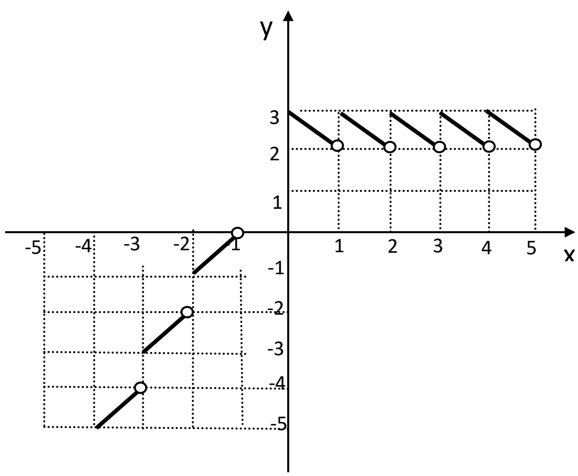
Rang(f) =]-3, 9 [



36) **f(x) = $[\![x+3]\!] - |x|$**

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -2 + x & \text{Si } -5 \le x < -4 \\ -1 + x & \text{Si } -4 \le x < -3 \\ x & \text{Si } -3 \le x < -2 \\ 1 + x & \text{Si } -2 \le x < -1 \\ 2 + x & \text{Si } -1 \le x < 0 \\ 3 - x & \text{Si } 0 \le x < 1 \\ 4 - x & \text{Si } 1 \le x < 2 \\ 5 - x & \text{Si } 2 \le x < 3 \\ 6 - x & \text{Si } 3 \le x < 4 \end{cases}$$



37) **f(x) =** $\dfrac{3-x}{|x|-[\![x]\!]}$

Solución:

Vemos que el denominador debe ser diferente de cero: $|x| - [\![x]\!] \neq 0$;

Debemos extraer los valores donde $|x| - [\![x]\!] = 0$ es decir cuando:

$$|x| = [\![x]\!]\ ;\quad \text{Si}\quad |x| = [\![x]\!] \implies [\![x]\!] \geq 0 \ \wedge\ (x = [\![x]\!] \ \vee\ x = -[\![x]\!])$$

De lo cual tenemos que: $x \geq 0 \ \wedge\ (x \in Z \ \ \vee$ se da sólo si $x = 0)$

Operando vemos que: $x \in N$

$\therefore$ $|x| - [\![x]\!] = 0$ sólo si $x \in N$

Entonces el **Dom(f) = R – N.**

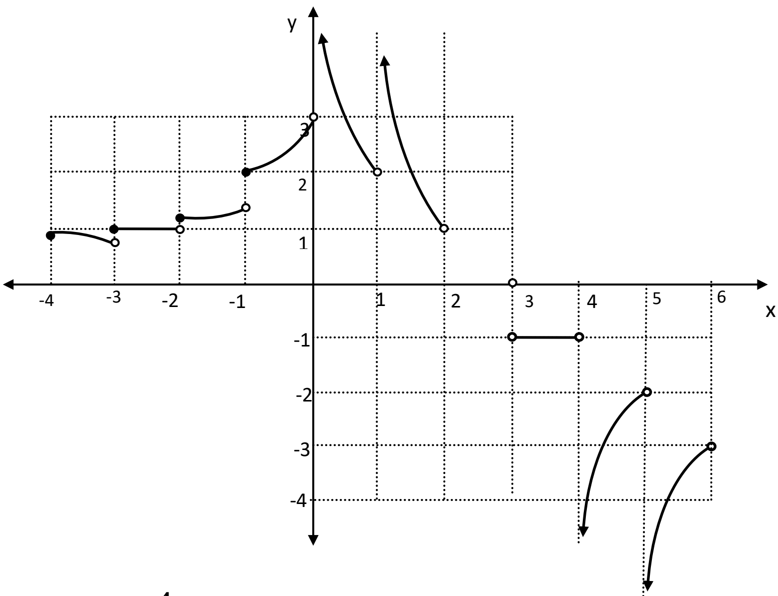
Analizando el valor absoluto según definición:

a) Si $x \geq 0$ $\Rightarrow$ f(x) = $\dfrac{3-x}{x-[\![x]\!]}$

$\dfrac{3-x}{x}$	Si	$x \in \langle 0, 1\rangle$
$\dfrac{3-x}{x-1}$	Si	$x \in \langle 1, 2\rangle$
$\dfrac{3-x}{x-2}$	Si	$x \in \langle 2, 3\rangle$
$\dfrac{3-x}{x-3} = -1$	Si	$x \in \langle 3, 4\rangle$
$\dfrac{3-x}{x-4}$	Si	$x \in \langle 4, 5\rangle$
....		

b) Si $x < 0$ $\Rightarrow$ f(x) = $\dfrac{3-x}{-x-[\![x]\!]}$

$\dfrac{x-3}{x-1}$	Si	$x \in [-1, 0\rangle$
$\dfrac{x-3}{x-2}$	Si	$x \in [-2, -1\rangle$
1	Si	$x \in [-3, -2\rangle$
$\dfrac{x-3}{x-4}$	Si	$x \in [-4, -3\rangle$
....		



38) $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x - Sgn(x^2 - 4)}$

Solución:

$$Sgn\,(x^2 - 4) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad (x^2 - 4) > 0; \quad x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \\ 0, & \text{si} \quad (x^2 - 4) = 0; \quad x = \{-2, 2\} \\ -1, & \text{si} \quad (x^2 - 4) < 0; \quad x \in \langle -2, 2\rangle \end{cases}$$

Analizando la función f(x) en los intervalos generados por la función signo

a) Si $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x-1} \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(y-3) = -4$$

Hipérbola equilátera con asíntotas en $x = 1$, $y = 3$, $a = 2\sqrt{2}$

b) Si $x = \{-2, 2\}$

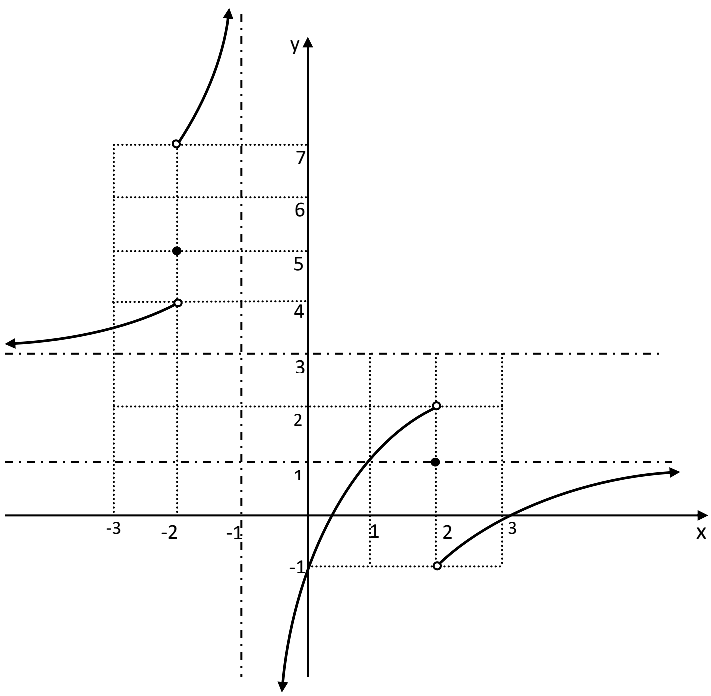
$$f(x) = 3 - \frac{4}{x} \quad \Longrightarrow \quad f(-2) = 5 \quad \text{y} \quad f(2) = 1$$

c) Si $x \in \langle -2, 2\rangle$

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1} \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(y-3) = -4$$

Hipérbola equilátera con asíntotas en $x = -1$, $y = 3$, $a = 2\sqrt{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \dfrac{4}{x-1} & \text{Si } x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \\ 5 & \text{Si } x = -2 \\ 1 & \text{Si } x = 2 \\ 3 - \dfrac{4}{x+1} & \text{Si } x \in \langle -2, 2\rangle - \{-1\} \end{cases}$$



39)

$$f(x) = \begin{cases} 7 + \dfrac{2}{x-6} & \text{Si } |x| > 2 \ \wedge \ x \neq 6 \\ \sqrt{4Sgn(x^2-1) - x^2} & \text{Si } 1 < |x| \leq 2 \\ \left[\!\left[\dfrac{1}{x-2}\right]\!\right] + x^2 & \text{Si } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Solución:

a) Si $|x| > 2 \ \wedge \ x \neq 6 \iff x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle - \{6\}$

$y = 7 + \dfrac{2}{x-6} \iff (x-6)(y-7) = 2$

Hipérbola equilátera con asíntotas en $x = 6$, $y = 7$, $a = 2$

b) $\sqrt{4Sgn(x^2-1) - x^2}$, Si $1 < |x| \leq 2$ $(x \in [-2, -1\rangle \cup \langle 1, 2])$

$$Sgn\,(x^2-1) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x^2-1) > 0; & x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \\ 0, & \text{si } (x^2-1) = 0; & x = \{-1, 1\} \\ -1, & \text{si } (x^2-1) < 0; & x \in \langle -1, 1\rangle \end{cases}$$

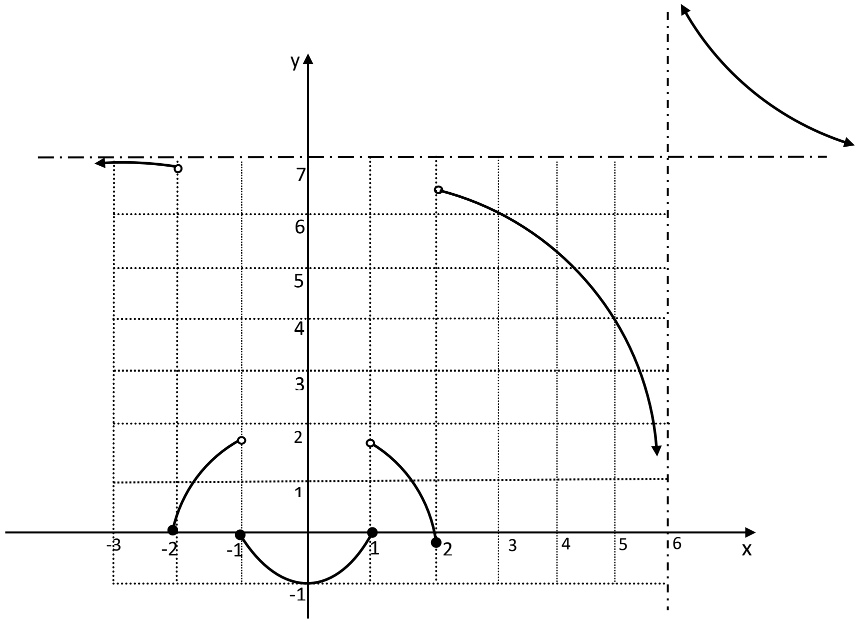
$\therefore$ Si $x \in [-2, -1) \cup (1, 2]$ $\sqrt{4Sgn(x^2-1) - x^2} = \sqrt{4(1) - x^2}$

c) $\left[\!\left[\dfrac{1}{x-2}\right]\!\right] + x^2 \iff$ Si $|x| \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1 \implies -1 \leq \dfrac{1}{x-2} \leq -\dfrac{1}{3} \quad \therefore \left[\!\left[\dfrac{1}{x-2}\right]\!\right] = -1$

Ahora de a), b) y c) tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 7 - \dfrac{2}{x-6} & \text{Si } x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle - \{6\} \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{Si } x \in [-2, -1\rangle \cup \langle 1, 2] \\ x^2 - 1 & \text{Si } x \in [-1, 1] \end{cases}$$



40)

$$f(x) = \begin{cases} \left|x^2 - 9\right| & \text{Si } |x| > 4 \\ sgn([\![x+1]\!] + 2) & \text{Si } -4 \leq x < 0 \\ \sqrt{sgn(x-2) + \left|[\![x-2]\!]\right|} & \text{Si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Solución:

a) Si $|x| > 4 \Longrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$

$|x^2 - 9| = x^2 - 9$ (considerar la definición del valor absoluto e interceptar con el intervalo anterior)

b)

$$sgn([\![x+1]\!] + 2) = \begin{cases} 1 & \text{Si } [\![x+1]\!] > -2 \Longrightarrow x \geq -2 \\ 0 & \text{Si } [\![x+1]\!] = -2 \Longrightarrow -3 \leq x < -2 \\ -1 & \text{Si } [\![x+1]\!] < -2 \Longrightarrow x < -3 \end{cases}$$

Observe que: $[\![x]\!] > n \iff x \geq n+1$

$[\![x]\!] < n \iff x < n$

Interceptando con el intervalo $-4 \leq x < 0$

$$sgn([\![x+1]\!] + 2) = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad x \in [-2, 0\rangle \\ 0 & \text{Si} \quad x \in [-3, -2\rangle \\ -1 & \text{Si} \quad x \in [-4, -3\rangle \end{cases}$$

c) $\sqrt{sgn(x-2) + |[\![x-2]\!]|}$ Si $0 \leq x < 4$

$$\text{Sgn}(x-2) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 2 \\ 0, & \text{si } x = 2 \\ -1, & \text{si } x < 2 \end{cases} \qquad |[\![x-2]\!]| = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [0, 1\rangle \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2\rangle \\ 0 & \text{si } x \in [2, 3\rangle \\ 1 & \text{Si } x \in [3, 4\rangle \\ 2 & \text{Si } x = 4 \end{cases}$$

Analizando los intervalos que generan la función: **Sgn (x – 2)** y $|[\![\boldsymbol{x-2}]\!]|$

Si x > 2

$$\sqrt{sgn(x-2) + |[\![x-2]\!]|} = \begin{cases} \sqrt{1+0} = 1 & \text{si } x \in \langle 2, 3\rangle \\ \sqrt{1+1} = \sqrt{2} & \text{si } x \in [3, 4\rangle \\ \sqrt{1+2} = \sqrt{3} & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

Si x = 2

$$\sqrt{sgn(x-2) + |[\![x-2]\!]|} = \sqrt{0+0} = 0, \quad \text{Si } x = 2$$

Si x < 2

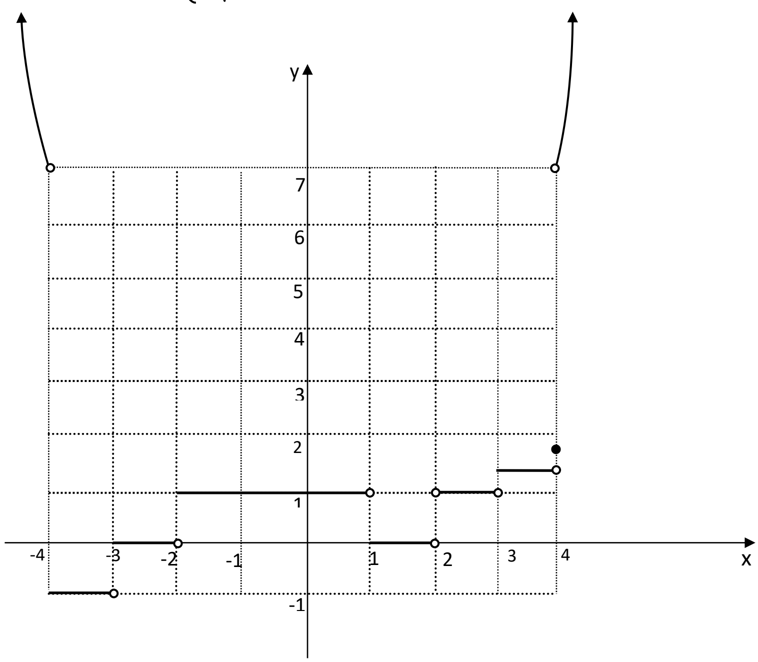
$$\sqrt{sgn(x-2) + |[\![x-2]\!]|} = \begin{cases} \sqrt{-1+1} = 0 & \text{Si } x \in [1, 2\rangle \\ \sqrt{-1+2} = 1 & \text{Si } x \in [0, 1\rangle \end{cases}$$

Resumiendo **c)** tenemos:

$$\sqrt{sgn(x-2)+\ |[\![x-2]\!]|} \ = \begin{cases} 1 & \text{Si } \ x \in [0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle \\ 0 & \text{Si } \ x \in [1,2] \\ \sqrt{2} & \text{Si } \ x \in [3,4\rangle \\ \sqrt{3} & \text{Si } \ x = 4 \end{cases}$$

De a), b) y c) :

$$f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{Si } \ x \in \langle -\infty,-4\rangle \cup \langle 4,\infty\rangle \\ -1 & \text{Si } \ x \in [-4,-3\rangle \\ 0 & \text{Si } \ x \in [-3,-2\rangle \cup [1,2] \\ 1 & \text{Si } \ x \in x \in [-2,0\rangle \cup [0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle \\ \sqrt{2} & \text{Si } \ x \in [3,4\rangle \\ \sqrt{3} & \text{Si } \ x = 4 \end{cases}$$



41) $\mathbf{f(x) = \sqrt{9 - x^2}\, Sgn\left(\frac{\sqrt{2+x}}{x-1}\right) + \left[\!\left[\frac{2x+5}{x+3}\right]\!\right] - 1}$

Solución:

a) $9 - x^2 \geq 0 \implies x \in [-3, 3]$

b) $Sgn\left(\frac{\sqrt{2+x}}{x-1}\right)$; $2 + x \geq 0 \implies x \geq -2 \ \wedge \ x \neq 1$

$$Sgn\left(\frac{\sqrt{2+x}}{x-1}\right) = \begin{cases} 1 \quad Si \ \frac{\sqrt{2+x}}{x-1} > 0 \implies x > 1 \\ 0 \quad Si \ \frac{\sqrt{2+x}}{x-1} = 0 \implies x = -2 \\ -1 \quad Si \ \frac{\sqrt{2+x}}{x-1} < 0 \implies -2 \leq x < 1 \end{cases}$$

c) $\left[\!\left[\frac{2x+5}{x+3}\right]\!\right] = 2 + \left[\!\left[-\frac{1}{x+3}\right]\!\right]$ para hallar el mayor entero veamos el

Dominio de f(X): $Dom(f) = [-3, 3] \cap [-2, \infty\rangle - \{1\}$

$Dom(f) = [-2, 3] - \{1\} \Rightarrow -2 \leq x \leq -3 \ \wedge \ x \neq 1$

$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x+3} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{x+3} \leq -\frac{1}{6}$

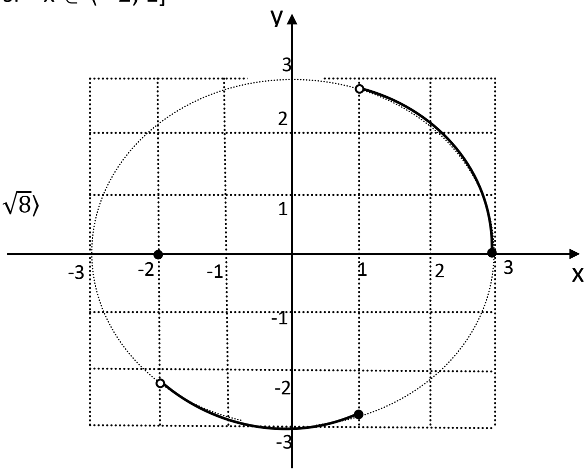
$\left[\!\left[-\frac{1}{x+3}\right]\!\right] = -1$; el resultado de c) es: $2 + \left[\!\left[-\frac{1}{x+3}\right]\!\right] = 2 + (-1) = 1$

De a), b) y c) tenemos:

$$\sqrt{9 - x^2}\, Sgn\left(\frac{\sqrt{2+x}}{x-1}\right) + \left[\!\left[\frac{2x+5}{x+3}\right]\!\right] - 1 = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}\,(1) + 1 - 1; \ \text{si} \ x \in \langle 1, 3] \\ \sqrt{9-x^2}\,(0) + 1 - 1; \ \text{si} \ x = -2 \\ -\sqrt{9-x^2}\,(-1) + 1 - 1; \ \text{si} \ x \in \langle -2, 1] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{si } x \in \langle 1, 3] \\ 0 & \text{si } x = -2 \\ -\sqrt{9-x^2}; & \text{si } x \in \langle -2, 1] \end{cases}$$

Rang (f) = $[-3, -\sqrt{5}\,\rangle \cup [0, \sqrt{8}\rangle$



42)

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} x^2 - |x| & \text{si } x \in \langle -3, 2] \\ x[\![|x - 2|]\!] - 2\,\mathrm{sgn}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right) & \text{si } x \in \langle 2, 4] \end{cases}$$

Solución:

a) Considerando el dominio tenemos:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x \in \langle -3, 0\rangle \\ x^2 - x, & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases}$$

b)

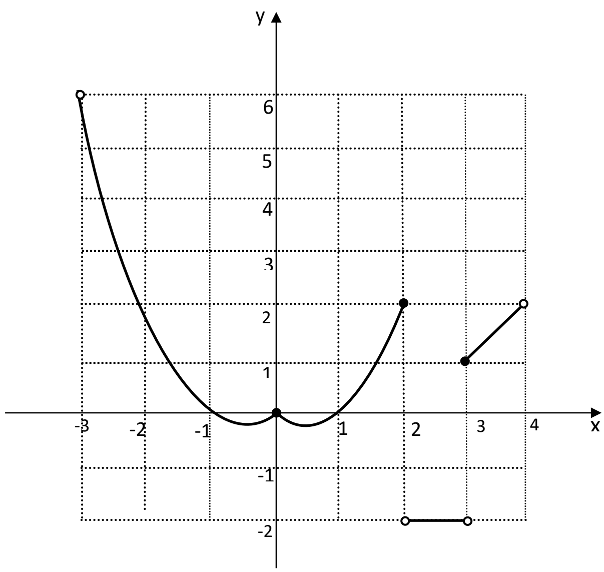
$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{si } x < 2, \text{ no puede suceder según el dominio)} \end{cases}$$

$$[\![|x - \mathbf{2}|]\!] = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad x \in \langle 2, 3\rangle \\ 1 & \text{Si} \quad x \in [3, 4\rangle \end{cases}$$

$$\text{Sgn}\left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \\ 0, & \text{si} \quad x = \{\,2\,\} \text{ (no puede suceder según el dominio)} \\ -1, & \text{si} \quad x \in \langle 1, 2\rangle \text{ (no puede suceder según el dominio)} \end{cases}$$

De a) y b) tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{Si} \quad x \in \langle -3, 0\rangle \\ x^2 - x & \text{Si} \quad x \in [0, 2] \\ x(0) - 2(1) = -2 & \text{Si} \quad x \in \langle 2, 3\rangle \\ x(1) - 2(1) = x - 2 & \text{Si} \quad x \in [3, 4\rangle \end{cases}$$



Rang(f) = $[-\frac{1}{4}, 6\rangle \cup \{-2\}$

43) $\quad$ **f(x) = 2x +** $\left[\!\left[\dfrac{7x-15}{x-1}\right]\!\right]$ $\quad$ **Si x** $\in \langle -1, 0\rangle$

Solución:

$\left[\!\left[\dfrac{7x-15}{x-1}\right]\!\right] = 7 + \left[\!\left[-\dfrac{8}{x-1}\right]\!\right]$ Usando el dominio para hallar el mayor entero:

$-1 < x < 0 \quad \Longrightarrow \quad 4 < -\dfrac{8}{x-1} < 8$

$4 < -\dfrac{8}{x-1} < 5; \quad \left[\!\left[-\dfrac{8}{x-1}\right]\!\right] = 4 \quad \Longrightarrow \quad -1 < x < -\dfrac{3}{5}$

$5 \leq -\dfrac{8}{x-1} < 6; \quad \left[\!\left[-\dfrac{8}{x-1}\right]\!\right] = 5 \quad \Longrightarrow \quad -\dfrac{3}{5} \leq x < -\dfrac{1}{3}$

$6 \leq -\dfrac{8}{x-1} < 7; \quad \left[\!\left[-\dfrac{8}{x-1}\right]\!\right] = 6 \quad \Longrightarrow \quad -\dfrac{1}{3} \leq x < -\dfrac{1}{7}$

$7 \leq -\dfrac{8}{x-1} < 8; \quad \left[\!\left[-\dfrac{8}{x-1}\right]\!\right] = 7 \quad \Longrightarrow \quad -\dfrac{1}{7} \leq x < 0$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 11 & \text{Si } x \in \langle -1, -\frac{3}{5}\rangle \\ 2x + 12 & \text{Si } x \in [-\frac{3}{5}, -\frac{1}{3}\rangle \\ 2x + 13 & \text{Si } x \in [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\rangle \\ 2x + 14 & \text{Si } x \in [-\frac{1}{7}, 0\rangle \end{cases}$$

Rang(f) = $\left(9, \frac{49}{5}\right] \cup \left[\frac{54}{5}, \frac{34}{3}\right) \cup \left[\frac{37}{3}, \frac{89}{7}\right) \cup \left[\frac{96}{7}, 14\right)$

Se deja el grafico para el entretenimiento del lector.

Realizar las siguientes operaciones con funciones:

44) **Dados f = {(1, 2),(3, 4),(2, 5),(4, 1)} y g = {(3, -1),(2, 1),(1, 0),(0, 2)}**

Calcular: a) f + g b) f – g c) f . g d) $\frac{f}{g}$

Solución:

Hallando los dominios de f y g tenemos:

Dom(f) = {1, 2, 3, 4} Dom(g) = {0, 1, 2, 3}

Dom(f) ∩ Dom(g) = {1, 2, 3 }

a) f + g = {(1, 2),(2, 6),(3, 3)}

b) f – g = {(1, 2),(2, 4),(3, 5)}

c) f . g = {(1, 0),(3,-4),(2, 5)}

d) Hallamos el Dom($\frac{f}{g}$) = Dom(f) ∩ Dom(g) – { x ∈ Dom(g)/ g(x) = 0}

Dom($\frac{f}{g}$) = {1, 2, 3} – {1} = {2, 3}

$\frac{f}{g}$ = {(2, 5),(3, -4)}

45) **Dados f = {(-3, 2),(0, 0),(2, 4),(3, -1),(4, 3)} y g = {(2, 0),(3, 4),(4, 7),(6, 2)}**

Calcular: a) f + g b) f – g c) f.g d) $\frac{f}{g}$

Solución:

Hallando los dominios de f y g tenemos:

Dom(f) = {-3, 0, 2, 3, 4} Dom(g) = {2, 3, 4, 6}

Dom(f) ∩ Dom(g) = {2, 3, 4 }

a) f + g = {(2, 4),(3, 3),(4, 10)}

b) f – g = {(2, 4),(3, -5),(4, -4)}

c) f . g = {(2, 0),(3, -4),(4, 21)}

d) Hallamos el Dom$(\frac{f}{g})$ = Dom(f) ∩ Dom(g) – { x ∈ Dom(g)/ g(x) = 0}

Dom$(\frac{f}{g})$ = {2, 3, 4} – {2} = {3, 4}

$\frac{f}{g}$ = {(3, $-\frac{1}{4}$),(4, $\frac{3}{7}$)}

46) Hallar (f + g)(x) si:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}, & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x} \leq 1 \\ \sqrt{\boldsymbol{x}}, & \boldsymbol{Si} \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{4} \end{cases} \qquad \mathbf{g(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2-1} & \mathbf{Si} \ \ \mathbf{x < 0} \\ \mathbf{x} & \mathbf{Si} \ \ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{2} \\ \mathbf{x+5} & \mathbf{Si} \ \ \mathbf{x > 2} \end{cases}$$

Solución:

Observe la forma de:

$$\text{f(x)} = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases} \qquad \text{g(x)} = \begin{cases} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{cases}$$

Interceptando los dominios para ver la existencia de (f + g)(x)

a) Dom (f_1) ∩ Dom(g_1) = $x \leq 1 \quad \wedge \quad x < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -\infty, 0\rangle$

$(f_1 + g_1)(x) = \sqrt{1 - x} + x^2 - 1$

b) Dom (f_1) ∩ Dom(g_2) = $x \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle 0, 1\rangle$

$(f_1 + g_2)(x) = \sqrt{1 - x} + x$

c) Dom (f_1) ∩ Dom(g_3) = $x \leq 1 \quad \wedge \quad x > 2 \quad \Rightarrow \quad x \in \emptyset$

d) Dom (f_2) ∩ Dom(g_1) = $x \geq 4 \quad \wedge \quad x < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \emptyset$

e) Dom (f_2) ∩ Dom(g_2) = $x \geq 4 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad x \in \emptyset$

f) Dom (f_2) ∩ Dom(g_3) = $x \geq 4 \quad \wedge \quad x > 2 \quad \Rightarrow \quad x \in [4, \infty\rangle$

$$(f_2 + g_3)(x) = \sqrt{x} + x + 5$$

Resumiendo tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \sqrt{1 - x} - \mathbf{1} & \text{Si } x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ x + \sqrt{1 - x} & \text{Si } x \in [0, 1] \\ x + \sqrt{x} + 5 & \text{Si } x \in [4, \infty\rangle \end{cases}$$

Se deja el gráfico para el entretenimiento del lector.

47) Hallar (f + g)(x) y graficar si:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{Sgn}|x^2 - 4|, & \mathbf{Si}\ \ x^2 \leq 9 \\ \left[\!\left[\frac{x+6}{3}\right]\!\right], & \mathbf{Si}\ \ x^2 - 12x < -27 \\ x^2 + 10x + 21, & \mathbf{Si}\ \ |x - 3| > 6 \end{cases} \qquad \mathbf{g(x) = 3;\ \ Si\ \ x < 9}$$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Sgn}|x^2 - 4| & \text{Si } x \in [-3, 3] \\ \left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right] + 2 & \text{Si } x \in \langle 3, 9\rangle \\ x^2 + 10x + 21 & \text{Si } x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 9, \infty\rangle \end{cases}$$

a)

$$\textbf{Sgn}|x^2 - 4| = \left\{\begin{array}{lllll} 1, & \text{si} & |x^2-4| > 0; & \Longrightarrow & x \in R - \{-2, 2\} \\ 0, & \text{si} & |x^2-4| = 0; & \Longrightarrow & x = \{-2, 2\} \\ -1, & \text{si} & |x^2-4| < 0; & \Longrightarrow & x \in \emptyset \end{array}\right\} \cap [-3, 3]$$

b) $\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right] + 2 \quad \Longrightarrow \quad n \leq \frac{x}{3} < n + 1\,; \qquad 3n \leq x < 3n + 3\,;$

Tomando $n = 1$ y $n = 2$

Cuando $x \in \langle 3, 6\rangle$ entonces $\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right] = 1$

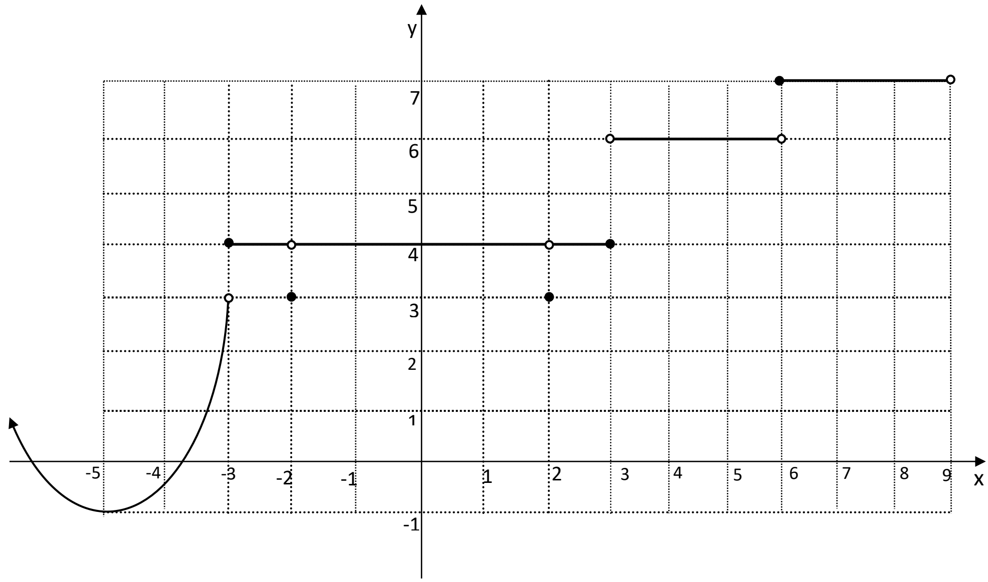
Cuando $x \in [6, 9\rangle$ entonces $\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right] = 2$

$$\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right] + 2 = \begin{cases} 3, & \text{si } x \in \langle 3, 6\rangle \\ 4, & \text{si } x \in [6, 9\rangle \end{cases}$$

Considerando f(x), a), b) y g(x) tenemos:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 1 + 3 = 4 & \text{Si } x \in [-3, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, 3] \\ 0 + 3 = 3 & \text{Si } x = \{-2, 2\} \\ 3 + 3 = 6 & \text{Si } x \in \langle 3, 6\rangle \\ 4 + 3 = 7 & \text{Si } x \in [6, 9[\\ (x+5)^2 - 1 & \text{Si } x \in [-\infty, -3[\end{cases}$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 4 & \text{Si } x \in [-3, 3] - \{-2, 2\} \\ 3 & \text{Si } x = \{-2, 2\} \\ 6 & \text{Si } x \in \langle 3, 6\rangle \\ 7 & \text{Si } x \in [6, 9[\\ (x+5)^2 - 1 & \text{Si } x \in [-\infty, -3[\end{cases}$$



Rang(f + g)(x) = [-1, ∞)

48) **Sea** **f(X)** $= |x-2| + |x+2|$

$$g(x) = \begin{cases} 3x+2, & \text{si } x < 0 \\ 1-x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Hallar el rango y la gráfica de H(x) = f(x) + g(x), donde Dom(H) = [-2, 3[

Solución:

$$f(x) + g(x) = \left.\begin{cases} |x-2| + |x+2| + 3x + 2, & \text{si } x < 0 \\ |x-2| + |x+2| + 1 - x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}\right\} \cap [-2, 3[$$

$$H(x) = \begin{cases} |x-2| + |x+2| + 3x + 2, & \text{si } x \in [-2, 0[\\ |x-2| + |x+2| + 1 - x, & \text{si } x \in [0, 3[\end{cases}$$

Analizando los valores absolutos

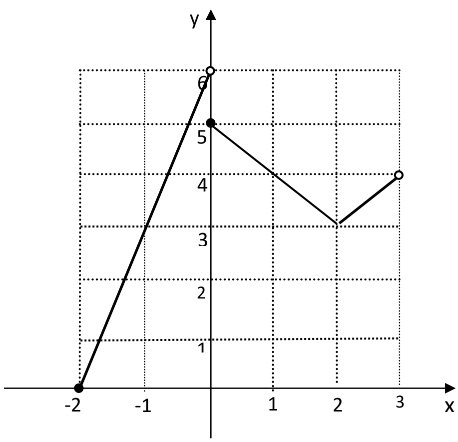
$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \geq -2 \\ -(x+2), & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

$$\textbf{H(x)} = \begin{cases} 2 - x + x + 2 + 3x + 2, & \text{Si } x \in [-2, 0[\\ 2 - x + x + 2 + 1 - x, & \text{Si } x \in [0, 2[\\ 2 - x + x + 2 + 1 - x, & \text{Si } x \in [2, 3[\end{cases}$$

$$\textbf{H(x)} = \begin{cases} 3x + 6, & \text{Si } x \in [-2, 0[\\ 5 - x, & \text{Si } x \in [0, 2[\\ X + 1, & \text{Si } x \in [2, 3[\end{cases}$$

Rang(H) = [0, 6[



49) Hallar (f + g)(x) y graficar

$$f(x) = \begin{cases} [\![x^2]\!] + |x^2 - 1| - 3, & \text{si } x \in [-2, 2] \\ \dfrac{2x-1}{x-1}, & \text{si } x \in \,]2, 4[\end{cases}$$

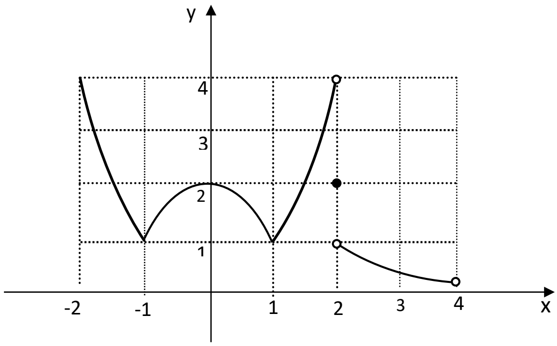
$$g(x) = \begin{cases} 4 - [\![x^2]\!], & \text{si } x < 2 \\ -2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} [\![x^2]\!] + |x^2 - 1| - 3 + 4 - [\![x^2]\!], & \text{Si } x \in [-2, 2[\\ [\![x^2]\!] + |x^2 - 1| - 3 - 2, & \text{Si } x = 2 \\ \dfrac{2x-1}{x-1} - 2, & \text{Si } x \in \,]2, 4[\end{cases}$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| + 1, & \text{Si } x \in [-2, 2[\\ 2, & \text{Si } x = 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{Si } x \in \,]2, 4[\end{cases}$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 - 1 + 1 = x^2, & \text{Si } x \in [-2, -1] \cup [1, 2[\\ 1 - x^2 + 1 = 2 - x^2, & \text{Si } x \in \,]-1, 1[\\ 2, & \text{Si } x = 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{Si } x \in \,]2, 4[\end{cases}$$



Rang(f + g)(x) = $]\frac{1}{3}, 4]$

50) Sean las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $y \geq 5$

$g(x) = 2|x-1| + 1$; con $x \in [-3, 4[$. Hallar f + g, el rango y esbozar la gráfica.

Solución:

a) En la función f(x) tenemos que $y \geq 5$

$x^2 - 2x + 2 \geq 5$

$(x-3)(x+1) \geq 0 \implies x \in]-\infty, -1] \cup [3, \infty[$

Por lo tanto $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \in]-\infty, -1] \cup [3, \infty[$

b) Analizando la función g(x) tenemos:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \geq 1 \cap [-3, 4[= [1, 4[\\ -(x-1), & \text{si } x < 1 \cap [-3, 4[= [-3, 1[\end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } x \in [1, 4[\\ -2x + 3, & \text{si } x \in [-3, 1[\end{cases}$$

De a) y b) e Interceptando los dominios tenemos:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \in [3, 4[\\ x^2 - 4x + 5, & \text{si } x \in [-3, -1[\end{cases}$$

Hallando el rango de f + g

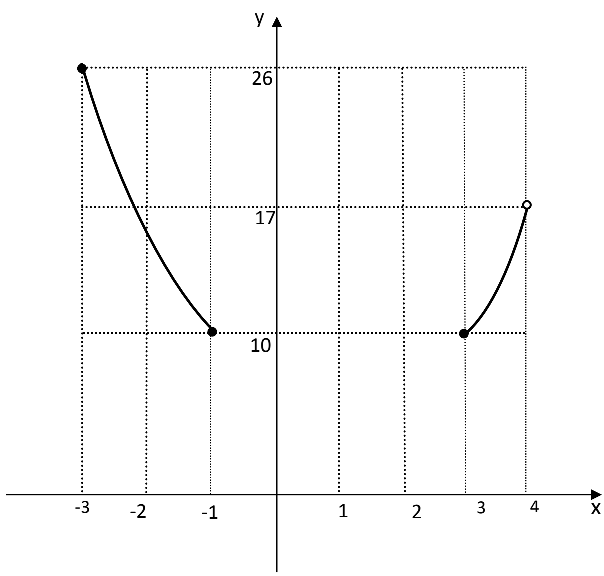
Sea $y_1 = x^2 + 1$, si $x \in [3, 4)$ entonces veamos en que intervalo está y_1

$3 \leq x < 4 \implies 10 \leq x^2 + 1 < 17 \quad \therefore \quad y_1 \in [10, 17[$

Sea $y_2 = x^2 - 4x + 5$, si $x \in [-3, -1[$ entonces veamos en que intervalo está y_2

$-3 \leq x < -1 \implies 10 \leq x^2 - 4x + 5 < 26 \quad \therefore \quad y_2 \in [10, 26[$

El rango sería: $y_1 \cup y_2 = [10, 17[\cup [10, 26[= [10, 26[$



51) **Sea**

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4|, & \text{si } x \in [-6, 0] \\ 2, & \text{si } x \in [2, \infty[\end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \in [2, \infty[\\ 1, & \text{si } x \in]-\infty, 2[\end{cases}$$

Hallar: $(\frac{f}{g})(x)$, **el rango y su gráfica.**

Solución:

a) Desarrollando el valor absoluto de f(x) tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{Si } x \in [-6, -2] \\ 4 - x^2, & \text{Si } x \in]-2, 0] \\ 2, & \text{Si } x \in [2, \infty[\end{cases}$$

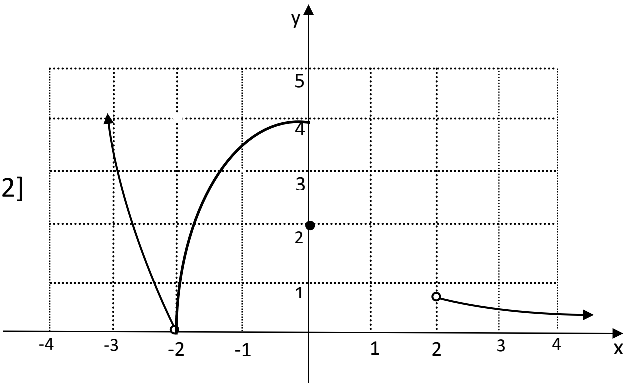
b) g(x) debe ser diferente de cero: $g(x) \neq 0 \Longrightarrow x + 2 \neq 0$

$x \neq -2$

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \in]2, \infty[\\ 1, & \text{si } x \in]-\infty, 2[\end{cases}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{1} = x^2 - 4 & \text{Si } x \in [-6, -2[\\ \frac{4 - x^2}{1} = 4 - x^2 & \text{Si } x \in]-2, 0] \\ \frac{2}{x+2} & \text{Si } x \in]2, \infty[\end{cases}$$

Rang$(\frac{f}{g})$ =]0, 32]



52) **Hallar: $(\frac{f}{g})$(x) e indicar su rango**

f(x) = 2.Sgn$[\frac{1}{2}(x-2)^2+1]$; Si x ∈ R

g(x) = $\left[\!\left[\frac{3x-1}{2}\right]\!\right]$; si x ∈]-1, 2]

Solución:

g(x) debe ser diferente de cero, entonces veamos cuando g(x) = 0 para quitarlo:

$$\left[\!\left[\frac{3x-1}{2}\right]\!\right] = 0 \iff 0 \leq \frac{3x-1}{2} < 1 \implies x \in [\frac{1}{3}, 1[$$

Dominio de g(x) = x ∈]-1, 2] − $[\frac{1}{3}, 1[$

Dom g(x) = x ∈]-1, $\frac{1}{3}$[∪ [1, 2]

Ahora veamos el comportamiento del mayor entero en g(x):

$$\left[\!\left[\frac{3x-1}{2}\right]\!\right] = n \iff n \leq \frac{3x-1}{2} < n+1 \implies \frac{2n+1}{3} \leq x < \frac{2n+3}{3}$$

Reemplazando valores para n según el dominio tenemos:

n = -2 $\Longrightarrow$ x $\in$ [-1, $-\frac{1}{3}$[

n = -1 $\Longrightarrow$ x $\in$ [-$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ [

n = 0 $\Longrightarrow$ x $\in$ [$\frac{1}{3}$, 1[

n = 1 $\Longrightarrow$ x $\in$ [1, $\frac{5}{3}$[

n = 2 $\Longrightarrow$ x $\in$ [$\frac{5}{3}$, 2[

$$g(x) = \begin{cases} -2, & \text{Si } x \in \,]-1, -\frac{1}{3}[\\ -1, & \text{Si } x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[\\ 1, & \text{Si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{5}{3}[\\ 2, & \text{Si } x \in [\frac{5}{3}, 2[\end{cases}$$

Desarrollando la función signo en f(x)

$$\text{Sgn}[\tfrac{1}{2}(x-2)^2 + 1] = \begin{cases} 1, & \text{Si } \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 > 0 \Longrightarrow x \in R \\ 0, & \text{Si } \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x \in \emptyset \\ -1 & \text{Si } \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 < 0 \Longrightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

Por lo tanto al reemplazar en f(x) el valor de la función signo tenemos:

f(x) = 2(1) = 2 Si x $\in$ R

Ahora hallando:

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} -1, & \text{Si } x \in \,]-1, -\frac{1}{3}[\\ -2, & \text{Si } x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[\\ 2, & \text{Si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{5}{3}[\\ 1, & \text{Si } x \in [\frac{5}{3}, 2[\end{cases}$$

Rang $\frac{f}{g}$(x) = {-2, -1, 1, 2}

Composición de funciones

53) Determinar "f o g" Si f = {(1, 3),(2, 4),(3, 5),(4, 6)}

y g = {(4, 1),(1, 2),(6, 3),(0, -2)}

Solución:

Teniendo en cuenta las siguientes definiciones:
$(f \circ g)(x) = \{ (x, f(g(x))) \ / \ x \in Dom(f \circ g) \}$
$Dom(f \circ g) = \{ x \in Dom(g) \ \wedge \ g(x) \in Dom(f) \}$

f o g = {(4, 3), (1, 4),(6, 5)}

54) Determinar "f o g" y "g o f" Si f = {(0, 1),(1, 2),(2, 3),(4, 3),(5, 2)}

y g = {(6, 7),(5, 4),(4, 3),(2, 4),(1, 4),(6, 7)}.

Solución:

f o g = {(5, 3), (2,3),(1, 3)}

g o f = {(0, 4), (1, 4),(5, 4)}

55) Determinar "g o f" Si f = {(2, 5),(5, 7),(3, 3),(8, 1)}

y g = {(1, 2),(2, 3),(4, 5),(6, 7)}.

Solución:

g o f = { (8, 2) }

56) Si

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{si } x \in [-4, 4[\\ x, & \text{si } x \in [4, 6[\end{cases}$$

y $\quad g(x) = x^2 + 1;$ $\quad$ **Hallar** $(f \circ g)(x)$.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} (f_1 \circ g)(x) \\ (f_2 \circ g)(x) \end{cases}$$

a) $f_1 \circ g$

$\text{Dom}(f_1 \circ g) = x \in \text{Dom}(g) \wedge \{ g(x) \in \text{Dom}(f_1) \}$

$\text{Dom}(f_1 \circ g) = x \in R \cap x^2 + 1 \in [-4, 4[$

$\text{Dom}(f_1 \circ g) = R \cap x^2 < 3$

$\text{Dom}(f_1 \circ g) = R \cap]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

$\text{Dom}(f_1 \circ g) =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

Hallado su dominio ahora veamos $(f_1 \circ g)(x)$

$(f_1 \circ g)(x) = f_1(g(x)) = f_1(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) - 2$

Resumiendo a) tenemos:

$(f_1 \circ g)(x) = 3x^2 + 1$, Si $x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

b) $f_2 \circ g$

$\text{Dom}(f_2 \circ g) = x \in \text{Dom}(g) \wedge \{ g(x) \in \text{Dom}(f_2) \}$

$\text{Dom}(f_2 \circ g) = x \in R \cap x^2 + 1 \in [4, 6[$

$\text{Dom}(f_2 \circ g) = R \cap 3 \leq x^2 < 5$

$\text{Dom}(f_2 \circ g) = R \cap 3 \leq |x|^2 < 5$

Dom (f_2 o g) = R ∩ x ∈]- $\sqrt{5}$, - $\sqrt{3}$] ∪ [$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ [

Dom (f_2 o g) =]- $\sqrt{5}$, - $\sqrt{3}$] ∪ [$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ [

Hallado su dominio ahora veamos (f_2 o g)(x)

(f_2 o g)(x) = f_2 (g (x)) = f_2(x^2 + 1) = x^2 + 1

Resumiendo b) tenemos:

(f_2 o g)(x) = x^2 + 1, Si x ∈]- $\sqrt{5}$, - $\sqrt{3}$] ∪ [$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ [

De a) y b)

$$(f \text{ o } g)(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & \text{si } x \in \,]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\,[\\ x^2 + 1, & \text{Si } x \in \,]-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\,] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5}\,[\end{cases}$$

57) Dada las funciones: f(x) = x^2 + 2x + 3; g(x) = x – 5 y la función h(x) = $2x^2$ + x; Hallar A y B si:

$$A = \left[\frac{(f\ o\ g)(3)\ +\ (g\ o\ f)(1).(f\ o\ g)(-1)\ -(h\ o\ g)(4)}{(f\ o\ g\ o\ h)(0) -\ (h\ o\ f\ o\ g)(4)}\right]^{-3}$$

$$B = \left[\frac{(f\ o\ g)(3)\ +\ (h\ o\ g)(2)}{(h\ o\ f)(-1)}\right].(f\ o\ f)(0)$$

Solución:

(f o g)(3) = f g(3)) = 3; (h o g)(4) = h(g(4)) = 1

(g o f)(1) = g(f(1)) = 1; (f o g o h)(0) = f(g(h(0) = 18

(f o h)(-1) = f(h(-1)) = 6; (h o f o g)(4) = h(f(g(4))) = 10

$$A = \left[\frac{3 + 1(6) - 1}{18-10}\right]^{-3} \qquad \therefore \ A = 1$$

(h o g)(2) = h(g(2)) = 15

(h o f)(-1) = h(f(-1)) = 10

(f o f)(0) = f(f(0)) = 18

$$B = \left[\frac{3+15}{10}\right](18)$$

$$\therefore \; B = \frac{162}{5}$$

58) $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}\left[\!\left[\dfrac{|x-2|+4x^2-x-2}{x^2-1}\right]\!\right], & \text{si } x \in [2, 6] \\ -x, & \text{si } x \in \,]0, 2[\end{cases}$$

g(x) = 3x² – x, x ∈ R – [-3, -1[; Hallar g o f.

Solución:

Analizando el valor absoluto y el mayor entero:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Interceptando con el dominio:

x ∈ [2, 6], tomaríamos x – 2

$$\frac{x-2+x^2-x-2}{x^2-1} = 4 \qquad \therefore \; [\![4]\!] = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} 4.\sqrt{x-2}, & \text{si } x \in [2, 6] \\ -x, & \text{si } x \in \,]0, 2[\end{cases}$$

Ahora $$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (g \circ f_1)(x) \\ (g \circ f_2)(x) \end{cases}$$

a) g o f_1

Dom (g o f_1) = x $\in$ Dom (f_1) $\wedge$ { f_1(x) $\in$ Dom (g) }

Dom (g o f_1) = x $\in$ [2, 6] $\cap$ $4\sqrt{x-2}$ $\in$ R – [-3, -1[

Dom (g o f_1) = [2, 6] $\cap$ x $\geq$ 2

Dom (g o f_1) = [2, 6]

Hallado su dominio ahora veamos (g o f_1)(x)

(g o f_1)(x) = g(f_1 (x)) = g($4\sqrt{x-2}$) = 3($4\sqrt{x-2}$) – $4\sqrt{x-2}$

Resumiendo a) tenemos:

(g o f_1)(x) = 48(x – 2) – $4\sqrt{x-2}$, Si x $\in$ [2, 6]

b) g o f_2

Dom (g o f_2) = x $\in$ Dom (f_2) $\wedge$ { f_2(x) $\in$ Dom (g)}

Dom (g o f_2) = x $\in$]0, 2[$\cap$ -x $\in$ R – [-3, -1[

Dom (g o f_2) =]0, 2[$\cap$ x $\in$]-∞ , 1] $\cup$]3, ∞[

Dom (g o f_2) =]0, 1]

Hallado su dominio ahora veamos (g o f_2)(x)

(g o f_2)(x) = g(f_2 (x)) = g(-x) = $3(-x)^2$ – 4(-x)

Resumiendo b) tenemos:

(g o f_2)(x) = $3x^2 + x$, Si x $\in$]0, 1]

De a) y b)

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 48(x-2) - 4\sqrt{x-2}\,, & \text{Si } x \in [2, 6] \\ 3x^2 + x, & \text{Si } x \in \,]0, 1] \end{cases}$$

59) **Sean las funciones** **f(x) =** $\sqrt{2x-1}$ **y** **g(x) =** $\sqrt{2x^2-7}$

Hallar la función h tal que (f o h)(x) = g(x).

Solución:

(f o h)(x) = g(x) $\Leftrightarrow$ f(h(x)) = g(x)

$$\sqrt{2h(x)-1} = \sqrt{2x^2-7}$$

$$2h(x) = 2x^2 - 6$$

$$h(x) = x^2 - 3$$

60) **Si** **f(x -2) =** $\frac{2}{x-3}$ **; Hallar el valor de "x" de modo que:**

(f o f)$\left(\frac{2}{x}\right) = \mathbf{5.}$

Solución:

f(x -2) = $\frac{2}{(x-2)-1}$ entonces f(x) = $\frac{2}{x-1}$

(f o f)$\left(\frac{2}{x}\right) = 5$; f$\left(f\left(\frac{2}{x}\right)\right) = 5$ reemplazando tenemos:

$$\frac{4-2x}{3x-2} = 5 \quad \therefore \quad x = \frac{14}{17}$$

61) **Hallar f o g si f(x) = $2x^2 + 1$, con x $\in$]-2, 20[**

$$g(x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{Si } x \in \,]-\infty, -2[\\ 2x, & \text{Si } x \in \,]6, \infty[\end{cases}$$

Solución:

Observe que: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} (f \circ g_1)(x) \\ (f \circ g_2)(x) \end{cases}$

a) $f \circ g_1$

$\text{Dom}(g \circ f_1) = x \in \text{Dom}(g_1) \ \wedge \ \{ g_1(x) \in \text{Dom}(f) \}$

$\text{Dom}(g \circ f_1) = x \in \ ]-\infty, -2[\ \cap \ 1 - x \in]-2, 20[$

$\text{Dom}(g \circ f_1) = \ ]-\infty, -2[\ \cap \ ]-19, 3[$

$\text{Dom}(f \circ g_1) = \ ]-19, -2[$

Hallado su dominio ahora veamos $(f_1 \circ g)(x)$

$(f \circ g_1)(x) = f(g_1(x)) = f(1 - x) = 2(1 - x)^2 + 1$

Resumiendo a) tenemos:

$(f \circ g_1)(x) = 2x^2 - 4x + 3, \quad \text{Si } x \in \ ]-19, -2[$

b) $f \circ g_2$

$\text{Dom}(f \circ g_2) = x \in \text{Dom}(g_2) \ \wedge \ \{ g_2(x) \in \text{Dom}(f) \}$

$\text{Dom}(f \circ g_2) = x \in \ ]6, \infty[\ \cap \ 2x \in \ ]-2, 20[$

$\text{Dom}(f \circ g_2) = \ ]6, \infty[\ \cap \ ]-1, 10[$

$\text{Dom}(f \circ g_2) = \ ]6, 10[$

Hallado su dominio ahora veamos $(f \circ g_2)(x)$

$(f \circ g_2)(x) = f(g_2(x)) = f(2x) = 2(2x)^2 + 1$

Resumiendo b) tenemos:

$(f \circ g_2)(x) = 8x^2 + 1, \quad \text{Si } x \in \ ]6, 10[$

De a) y b)

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x + 3, & \text{si } x \in \ ]-19, -2[\\ 8x^2 + 1, & \text{Si } x \in \ ]6, 10[\end{cases}$$

62) Hallar g o f si:

$$f(x) = \begin{cases} \left[\!\left[\sqrt{\dfrac{1}{|x+2|}}\right]\!\right], & \text{Si } x \in \,]-1,\ 1[\\ |x|, & \text{Si } x \in [1, \infty[\end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 [\![x^2]\!] - 2|x|, & \text{Si } x \in \,]-\sqrt{2}, 0] \\ X [\![|x-3|]\!] + 2, & \text{Si } x \in \,]2, 4[\end{cases}$$

Solución:

a) Analizando f(x):

Si $x \in (-1, 1) \implies \left[\!\left[\sqrt{\dfrac{1}{|x+2|}}\right]\!\right] = 0$ y si $x \in [1, \infty[\implies |x| = x$

Reescribiendo f(x) tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \in \,]-1, 1[\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ f_1 \\ x, & \text{Si } x \in [1, \infty[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ f_2 \end{cases}$$

b) Analizando g(x):

b.1) $x^2 [\![x^2]\!] - 2|x|$ con $x \in \,]-\sqrt{2}, 0]$ desdoblando el dominio:

Si $-\sqrt{2} < x \leq -1 \implies [\![x^2]\!] = 1$

Si $-1 < x \leq 0 \implies [\![x^2]\!] = 0$

b.2) $x. [\![|x-3|]\!] + 2$ con $x \in \,]2, 4[$

Si $2 < x < 4 \implies -1 < x - 3 < 1 \implies |x-3| < 1$

$0 \leq |x-3| < 1 \implies [\![|x-3|]\!] = 0$

De b.1) y b.2) tenemos:

$$g(x) = \begin{cases} x^2(1) - 2(-x) = x^2 + 2x, & \text{Si } x \in \,]-\sqrt{2}, -1] \ldots\ldots g_1 \\ x^2(0) - 2(-x) = 2x, & \text{Si } x \in \,]-1, 0[\ldots\ldots\ldots\ldots g_2 \\ x^2(0) - 2(x) = -2x, & \text{Si } x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots g_3 \\ x(0) + 2, & \text{Si } x \in \,]2, 4[\ \ldots\ldots\ldots\ldots g_4 \end{cases}$$

Las posibilidades de composición de g y f son:

$$g \circ f = \begin{cases} g_1 \text{ o } f_1 \; ; & \text{Dom}(g_1 \text{ o } f_1) = \emptyset \\ g_1 \text{ o } f_2 \; ; & \text{Dom}(g_1 \text{ o } f_2) = \emptyset \\ g_2 \text{ o } f_1 \; ; & \text{Dom}(g_2 \text{ o } f_1) = \emptyset \\ g_2 \text{ o } f_2 \; ; & \text{Dom}(g_2 \text{ o } f_2) = \emptyset \\ \mathbf{g_3 \text{ o } f_1 \; ;} & \mathbf{Dom(g_3 \text{ o } f_1) \neq \emptyset} \\ g_3 \text{ o } f_2 \; ; & \text{Dom}(g_3 \text{ o } f_2) = \emptyset \\ g_4 \text{ o } f_1 \; ; & \text{Dom}(g_4 \text{ o } f_1) = \emptyset \\ \mathbf{g_4 \text{ o } f_2 \; ;} & \mathbf{Dom(g_4 \text{ o } f_2) \neq \emptyset} \end{cases}$$

Desarrollando la composición para "g_3 o f_1" y "g_4 o f_2"

$\text{Dom}(g_3 \text{ o } f_1) = x \in \text{Dom}(f_1) \;\wedge\; \{ f_1(x) \in \text{Dom}(g_3)\}$

$\text{Dom}(g_3 \text{ o } f_1) = x \in \,]-1, 1[\; \cap \; 0$

$\text{Dom}(g_3 \text{ o } f_1) = \,]-1, 1[\; \cap \; R = \,]-1, 1[$

Hallando $(g_3 \text{ o } f_1)(x) = g_3(f_1(x))$; $\quad g_3(0) = -2(0) = 0$

$\therefore (g_3 \text{ o } f_1)(x) = 0$ con $x \in \,]-1, 1[$

$\text{Dom}(g_4 \text{ o } f_2) = x \in \text{Dom}(f_2) \;\wedge\; \{ f_2(x) \in \text{Dom}(g_4)\}$

$\text{Dom}(g_4 \text{ o } f_2) = x \in \,]1, \infty[\; \cap \; x \in \,]2, 4[$

$\text{Dom}(g_4 \text{ o } f_2) = \,]2, 4[$

Hallando $(g_4 \text{ o } f_2)(x) = g_4(f_2(x))$; $\quad g_4(x) = 2$

$\therefore (g_4 \text{ o } f_2)(x) = 2$ con $x \in \,]2, 4[$

Finalmente tenemos:

$$(g \text{ o } f)(x) = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \in \,]-1, 1[\\ 2, & \text{Si } x \in \,]2, 4[\end{cases}$$

63) **Si f: [3, ∞ [$\longrightarrow$ R, definida por f(x) = $\frac{1}{x-2}$ y g : [$\frac{1}{2}$, ∞[$\longrightarrow$ R, definida por g(x) = $\frac{2x+1}{x}$, Hallar (g o f)(x).**

Solución:

f(x) = $\frac{1}{x-2}$ Si x ∈ [3, ∞[∧ g(x) = $\frac{2x+1}{x}$ Si x ∈ [$\frac{1}{2}$, ∞ [

Dom (g o f) = Dom (g o f) = x ∈ Dom (f) ∧ { f(x) ∈ Dom (g)}

Dom (g o f) = x ∈ [3, ∞) ∩ $\frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{2}$

Dom (g o f) = [3, ∞ [∩]-∞, 4] = [3, 4]

Hallando (g o f)(x) = g (f(x)) ; g $\left(\frac{1}{x-2}\right) = x$

∴ (g o f)(x) = x, Si x ∈ [3, 4]

64) **Si (f o g)(x) = x^3 + x + 1; g(x) = x^3 + 1, Hallar (g o f)(9).**

Solución:

Tenemos que: (f o g)(x) = f(g(x)) $\Longrightarrow$ f(x^3 + 1) = x^3 + x + 1

Nos piden hallar (g o f)(9) = g(f(9)),

Tenemos que para f(9) hacemos x^3 +1 = 9 de donde x = 2, que al reemplazar en:

x^3 + x + 1 = $(2)^3$ + 2 + 1 = 11, Por lo tanto f(9) = 11,

Ahora g(11) = $(11)^3$ + 1 $\Longrightarrow$ (g o f)(9) = 1332

65) **Si f(x) = $|x - 1| + |x - 2|$;**

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{Si} \quad x \leq -1 \\ 2, & \text{Si} \quad -1 < x \leq 1 \\ x^2, & \text{Si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Hallar (g o f)(x).

Solución:

De la forma de las funciones tenemos que: $g \text{ o } f = \begin{cases} g_1 \text{ o } f \\ g_2 \text{ o } f \\ g_3 \text{ o } f \end{cases}$

a) g_1 o f

Dom (g_1 o f) = x $\in$ Dom (f) $\wedge$ { f(x) $\in$ Dom (g_1) }

Dom (g_1 o f) = x $\in$ R $\cap$ $|x - 1| + |x - 2| \leq -1$

Dom (g_1 o f) = $\emptyset$

b) g_2 o f

Dom (g_2 o f) = x $\in$ Dom (f) $\wedge$ { f(x) $\in$ Dom (g_2)}

Dom (g_2 o f) = x $\in$ R $\cap$ $-1 < |x - 1| + |x - 2| \leq 1$

Dom (g_2 o f) = x $\in$ R $\cap$ [1, 2]

Dom (g_2 o f) = [1, 2]

Hallado su dominio ahora veamos (g_2 o f)(x)

(g_2 o f)(x) = g_2 (f (x)) = $g_2(|x - 1| + |x - 2|)$ = 2

Resumiendo b) tenemos:

(g_2 o f)(x) = 2, Si x $\in$ [1, 2]

c) g_3 o f

Dom (g_3 o f) = x $\in$ Dom (f) $\wedge$ { f(x) $\in$ Dom (g_3)}

Dom $(g_3 \circ f)$ = $x \in R \cap |x-1| + |x-2| > 1$

Dom $(g_3 \circ f)$ = $x \in R \cap \{\,]-\infty, 1[\,\cup\,]2, \infty[\,\}$

Dom $(g_3 \circ f)$ = $]-\infty, 1[\,\cup\,]2, \infty[$

Hallado su dominio ahora veamos $(g_3 \circ f)(x)$

$$(g_3 \circ f)(x) = \begin{cases} g_3(|x-1| + |x-2|) = (3-2x)^2 & \text{Si } x \in]-\infty, 1[\\ g_3(|x-1| + |x-2|) = (2x-3)^2 & \text{Si } x \in]2, \infty[\end{cases}$$

Finalmente de a), b) y c) tenemos:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2 & \text{Si } x \in [1, 2] \\ (2x-3)^2 & \text{Si } x \in]-\infty, 1[\,\cup\,]2, \infty[\end{cases}$$

Ejercicios con funciones inyectivas, biyectivas e inversas:

66) Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ver si f es inyectiva.

Solución:

f es inyectiva: Si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$

$$\frac{a}{a^2+1} = \frac{b}{b^2+1} \implies a(b^2+1) = b(a^2+1)$$

$$(b-a)(ab-1) = 0 \implies a = b \quad v \quad ab = 1$$

$\therefore$ f No es inyectiva por tener las dos posibilidades

67) **Sea f: A $\longrightarrow$ (-4,1] definida por f(x) = $\frac{10+3x}{10-2x}$, hallar A y mostrar si f es inyectiva.**

Solución:

a) hallando el dominio. -4 < $\frac{10+3x}{10-2x} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x-5} < \frac{1}{5}$

Desarrollando las desigualdades independientemente tenemos:

A = { x ∈]-∞, 0] ∪]10, ∞ [}

b) analizando la inyectividad:

$\frac{10+3a}{10-2a} = \frac{10+3b}{10-2b}$ observando el dominio a y b $\neq$ 5

$\Longrightarrow$ (10 + 3a)(10 – 2b) = (10 + 3b)(10 – 2a)

Reduciendo tenemos que: a = b

∴ f es inyectiva

68) **Sea f(x) = $\frac{x-1}{x+2}$ con x $\neq$ -2, ver si f es inyectiva.**

Solución:

f es inyectiva: Si f(a) = f(b) entonces a = b

$\frac{a-1}{a+2} = \frac{b-1}{b+2}$ por el dominio a y b $\neq$ 2,

(a – 1)(b + 2) = (a + 2)(b – 1) $\Longrightarrow$ a = b

∴ f es inyectiva.

69) Sea f(x) = $\frac{x}{x^2-4}$ con x $\in$ $]0,2[\ \cup\ ]2,\infty[$; ver si f es inyectiva.

Solución:

f es inyectiva: Si f(a) = f(b) entonces a = b

$\frac{a}{a^2-4} = \frac{b}{b^2-4}$ por el dominio a y b $\neq$ 2,

$ab^2 - 4a = ba^2 - 4b \implies (b-a)(ab+4) = 0$

a = b v ab = -4 (esta posibilidad queda descartada considerando que a y b $\in$ $]0,2[\ \cup]2,\infty[$

$\therefore$ f es inyectiva.

70) Probar si f es inyectiva y luego hallar su inversa

$$f(x) = \begin{cases} 4-\sqrt{x^2+12x+27}, & \text{Si } x \leq -11 \\ X^2+6x+6, & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

Solución:

a) probaremos la inyectividad de f_1 y f_2

b) Rango de f_1 $\cap$ Rango de f_2 = $\emptyset$

c) Hallar la inversa si se cumple a) y b).

a) Probaremos la inyectividad de f_1 y f_2

Para $f_1(x) = 4-\sqrt{x^2+12x+27}$, Si $x \leq -11$

Aplicando la definición tenemos:

$4-\sqrt{a^2+12a+27} = 4-\sqrt{b^2+12b+27}$ con a y b $\in$ $]-\infty,-11]$

$a^2+12a+27 = b^2+12b+27 \implies (a-b)(a+b+12) = 0$

$a = b$ v $a + b = -12$ (esta posibilidad queda descartada considerando el dominio)

$\therefore$ f_1 es inyectiva.

Para $f_2(x) = x^2 + 6x + 6$, Si $x > 0$

Aplicando la definición tenemos:

$$a^2 + 6a + 6 = b^2 + 6b + 6 \quad \text{con } a \text{ y } b \in \,]0, \infty[$$

$(a - b)(a + b + 6) = 0 \Rightarrow a = b$ v $a + b = -6$ (esta posibilidad queda descartada considerando el dominio)

$\therefore$ f_2 es inyectiva.

b) Rango de f_1 ∩ Rango de f_2 = ∅

Hallando el rango de $f_1(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 12x + 27}$, Si $x \leq -11$

De $x \leq -11 \Rightarrow x + 6 \leq -5 \Rightarrow -(x + 6) \geq 5$

$(x + 6)^2 - 9 \geq 16 \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 - 9} \geq 4$

$\Rightarrow \underbrace{4 - \sqrt{(x+6)^2 - 9}} \leq 0$

$\therefore$ $\mathbf{y_1 \leq 0}$

Hallando el rango de $f_2(x) = x^2 + 6x + 6$, Si $x > 0$

De $x > 0 \Rightarrow x + 3 > 3 \Rightarrow (x + 3)^2 > 9$

$x^2 + 6x + 9 > 9 \Rightarrow \underbrace{x^2 + 6x + 6} > 6$

$\therefore$ $\mathbf{y_2 > 6}$

Rango de f_1 ∩ Rango de f_2 = $]-\infty. 0] \cap]6, \infty[= \emptyset$

c) Hallando la inversa de f_1 y f_2

Para la inversa de f_1 tenemos:

Forma 1: cambiando x por y

$x = 4 - \sqrt{y^2 + 12y + 27}$

$\sqrt{(y+6)^2 - 9} = 4 - x$

$(y+6)^2 = (4-x)^2 + 9$

$y = -6 \pm \sqrt{x^2 - 8x + 25}$

$y = -6 - \sqrt{x^2 - 8x + 25}$

Forma 2: $(f \circ f^{-1})(x) = x$

Es decir: $f_1(f_1^{-1}(x)) = x$

$4 - \sqrt{(f_1^{-1}(x) + 6)^2 - 9} = x$

$(4-x)^2 = (f_1^{-1}(x) + 6)^2 - 9$

$(f_1^{-1}(x) + 6)^2 = (4-x)2 + 9$

$f_1^{-1}(x) = -6 \pm \sqrt{(4-x)2 + 9}$

$f_1^{-1}(x) = -6 - \sqrt{x^2 - 8x + 25}$

Observación:

Se toma el signo menos considerando el dominio y que $y_1 \leq 0$

$$\therefore \quad f_1^{-1}(x) = -6 - \sqrt{x^2 - 8x + 25} \quad \text{con} \quad x \leq 0$$

Para la inversa de f_2 tenemos:

Forma 1: cambiando x por y

$x = y^2 + 6y + 6$

$(y+3)^2 = x + 3$

$y = -3 \pm \sqrt{x+3}$

$y = \sqrt{x+3} - 3$

Forma 2: $(f \circ f^{-1})(x) = x$

Es decir: $f_2(f_2^{-1}(x)) = x$

$[f_2^{-1}(x)]^2 + 6[f_2^{-1}(x)] + 6 = x$

$[f_2^{-1}(x) + 3]^2 = x + 3$

$f_2^{-1}(x) = -3 \pm \sqrt{x+3}$

$f_2^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 3$

Observación:

Se toma el signo menos considerando el dominio y que $y_2 > 6$

$$\therefore \qquad f_2^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 3 \quad \text{con} \quad x > 6$$

De a) b) y c) tenemos:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -6 - \sqrt{x^2 - 8x + 25} & \text{Si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+3} - 3 & \text{Si } x > 6 \end{cases}$$

71) Probar si f es inyectiva y luego hallar su inversa

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2 + 2x - 2} & \textbf{Si } \mathbf{x \in [-3, -2[} \\ \dfrac{|x+3|}{|x-2|-1} & \textbf{Si } \mathbf{x \in \,]-1, 2[} \end{cases}$$

Solución:

a) probaremos la inyectividad de f_1 y f_2

b) Rango de f_1 $\cap$ Rango de f_2 = $\emptyset$

c) Hallar la inversa si se cumple a) y b).

a) Probaremos la inyectividad de f_1 y f_2

Para $f_1(x) = x^2 + 2x - 2$ Si $x \in [-3, -2[$

Aplicando la definición tenemos:

$$a^2 + 2a - 2 = b^2 + 2b - 2 \quad \text{con} \quad a \text{ y } b \in [-3, -2[$$

$(a - b)(a + b + 2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = b \quad \vee \quad a + b = -2$ (esta posibilidad queda descartada considerando el dominio)

$\therefore$ f_1 es inyectiva.

Para $f_2(x) = \frac{|x+3|}{|x-2|-1}$, Si $x \in$]-1, 2[

Analizando los valores absolutos en el dominio:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{si } x \geq -3 \\ -(x+3), & \text{si } x < -3 \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Tenemos que:

$$f_2(x) = \frac{x+3}{2-x-1} = \frac{x+3}{1-x} \quad \text{con } x \in \left]-1, 2\right[- \{1\}$$

Aplicando la definición tenemos:

$$\frac{a+3}{1-a} = \frac{b+3}{1-b} \quad \text{con } a \text{ y } b \in \left]-1, 2\right[- \{1\}$$

$$(a+3)(1-b) = (b+3)(1-a) \quad \Rightarrow \quad a - ab + 3 - 3b = b - ba + 3 - 3a$$

$$\Rightarrow \quad a = b \qquad \therefore \quad f_2 \text{ es inyectiva.}$$

b) Rango de f_1 ∩ Rango de f_2 = ∅

Hallando el rango de $f_1(x) = x^2 + 2x - 2$ Si $x \in [-3, -2[$

De $-3 \leq x < -2 \Rightarrow -2 \leq x + 1 < -1 \Rightarrow 1 < -(x+1) \leq 2$

$$1 < x^2 + 2x + 1 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad -2 < \underbrace{x^2 + 2x - 2}_{f_1(x)} \leq 1$$

$\therefore$ $f_1 = y_1 \in \left]-2, 1\right]$

Hallando el rango de $f_2(x) = \frac{x+3}{1-x}$ con $x \in \left]-1, 2\right[- \{1\}$

$$f_2(x) = -1 + \frac{4}{1-x} \quad \text{con } x \in \left]-1, 1\right[\cup \left]1, 2\right[$$

si $x \in$]-1, 1[	Si $x \in$]1, 2[
$-1 < x < 1$	$1 < x < 2$
$0 < 1 - x < 2$	$-1 < 1 - x < 0$
$-1 + \frac{4}{1-x} > 1$	$-1 + \frac{4}{1-x} < -5$

$\therefore$ $f_2 =$ $\mathbf{y_2}$ $\in$]-∞, -5[∪]1, ∞[

Rango de f_1 ∩ Rango de f_2 =]-2, 1] ∩ {]-∞, -5[∪]1, ∞[} = ∅

c) Hallando la inversa de f_1 y f_2

Para la inversa de f_1 (cambiando x por y) tenemos:

$$x = y^2 + 2y - 2$$

$$x + 3 = (y + 1)^2$$

$$y = -1 \pm \sqrt{x+3}$$

Observación:

Se toma el signo menos considerando el dominio y que $f_1 = y_1 \in$]-2, 1]

$$f_1^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x+3} \quad \text{con} \quad x \in \,]-2, 1]$$

Para la inversa de f_2 (cambiando x por y) tenemos:

$$x = \frac{y+3}{1-y} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{1-y} - 1 \quad \Longrightarrow \quad x + 1 = \frac{4}{1-y}$$

$$1 - y = \frac{4}{x+1} \quad \Longrightarrow \quad y = 1 - \frac{4}{x+1}$$

$f_2^{-1}(x) = \quad 1 - \frac{4}{x+1} \qquad$ con $x \in$]-∞, -5[∪]1, ∞[

∴ De a) b) y c) tenemos:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -1 - \sqrt{x+3} & \text{con } x \in \left]-2, 1\right] \\ 1 - \frac{4}{x+1} & \text{con } x \in \left]-\infty, -5\right[\cup \left]1, \infty\right[\end{cases}$$

72) Dada la función f(x) = - $\sqrt{x^2 + 8x - 9}$, con x ∈]-∞, -9[; hallar la función inversa de f, si es que existe.

Solución:

Veamos si f(x) es inyectiva:

f es inyectiva: Si f(a) = f(b) entonces a = b

$-\sqrt{a^2 + 8a - 9} = -\sqrt{b^2 + 8b - 9} \implies a^2 + 8a - 9 = b^2 + 8b - 9$

(a – b)(a + b + 8) = 0 ⟹ a = b v a + b = -8 (esta posibilidad queda descartada considerando el dominio donde a, b ∈]-∞, -9[

∴ f es inyectiva.

Hallando la inversa de f(x) = $-\sqrt{x^2 + 8x - 9}$

Observemos que: f(x) = y ≤ 0

Tenemos que: (f o f^{-1})(y) = y ⟹ f (f^{-1}(y)) = y

$-\sqrt{[f^{-1}(y)]^2 + 8[f^{-1}(y)] - 9} = y$; completando cuadrados se tiene:

$[f^{-1}(y) + 4]^2 - 25 = y^2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y^2 + 25} - 4$

Descartamos el signo menos porque $x \in \,]-\infty, -9[$

$f^{-1}(y) = -\sqrt{y^2 + 25} - 4$ con $y \in \,]-\infty, 0] = \text{Dom}(f^{-1})$

Cambiando nuevamente la variable "y" por "x"

$$\therefore \; f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 25} - 4 \text{ con } x \in \,]-\infty, 0]$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Graficar y hallar el dominio de las siguientes relaciones:

$R_1 = \{ (x, y) \in R^2 / \; 1 \leq x \leq 3 \; , 1 \leq y \leq 3 \}$

$R_2 = \{ (x, y) \in R^2 / \; x^2 + y^2 \leq 9 \; , \; x \geq y \}$

$R_3 = \{ (x, y) \in R^2 / \; y = \sqrt{9 - x^2} \}$

$R_4 = \{ (x, y) \in R^2 / \; y^2 - 2y - 3 \leq x \}$

$R_5 = \{ (x, y) \in R^2 / \; -1 \leq y \leq x + 2 \; , \; y \leq 8 - 2x \}$

$R_6 = \{ (x, y) \in R^2 / \; x^2 + y^2 \leq 36 \; \Delta \; |x| + |y| \leq 5 \}$

$R_7 = \{ (x, y) \in R^2 / \; x^2 + 2x + 1 > y \; , \; x + 2 \geq y \}$

$R_8 = \{ (x, y) \in R^2 / \; x^2 - y^2 \geq 0 \; , \; |x| + |y| \leq 5 \; , \; x^2 - y^2 \geq 0 \}$

$R_9 = \{ (x, y) \in R^2 / \; y \leq x^2 - 2x + 3 \; \Delta \; x \leq y^2 - 2y + 5 \}$

$R_{10} = \{ (x, y) \in R^2 /\ y \leq -|x| \ ,\ 2 < |x| \leq 4 \ ,\ y \geq -6 \}$

$R_{11} = \{ (x, y) \in R^2 / x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13 \leq 16 \ \Delta\ |x-2| + |y-3| \geq 4\}$

$R_{12} = \{ (x, y) \in R^2 /\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \ ,\ |x| + 2 \leq y \leq |x| + 3 \}$

$R_{13} = \{ (x, y) \in R^2 /\ x \geq y \ ,\ \dfrac{|x-1|+1}{|x|-2} \geq 1 \}$

$R_{14} = \{ (x, y) \in R^2 /\ y \leq \dfrac{[\![x]\!]}{x} \}$

$R_{15} = \{ (x, y) \in R^2 /\ |[\![x-4]\!] - x - 1| = y \}$

$R_{16} = \{ (x, y) \in R^2 /\ [\![x-3]\!] + [\![y-2]\!] = 1 \}$

$R_{17} = \{ (x, y) \in R^2 /\ \dfrac{[\![2x-1]\!]}{x-1} = y \ ,\ [\![x]\!]$ es un número par$\}$

$R_{18} = \{ (x, y) \in R^2 /\ x = [\![y-3]\!] \}$

$R_{19} = \{ (x, y) \in R^2 /\ [\![y]\!] - [\![x]\!] = 0 \}$

$R_{20} = \{ (x, y) \in R^2 /\ \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} \geq 1 \ \cup\ |x| + |y| \leq 5 \}$

II. Discutir y graficar cada una de las siguientes relaciones

1) $xy^2 - 9x - y^2 = 0$

2) $y^2x - 3y^2 - 1 = 0$

3) $x^2y - x^2 - 4xy + 4y = 0$

4) $y^3 + x^2y - x^2 = 0$

5) $x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0$

6) $y^3 - x^2 + 3y^2 + 2x + 3y = 0$

7) $xy^2 - 9x - y - 1 = 0$

8) $xy^2 + xy - 2x - 2 = 0$

9) $x^3 - xy^2 + 2y^2 = 0$

10) $yx - x^2 - 1 = 0$

11) $x^2y^2 - 8(2-x) = 0$

12) $x^2y^2 - 8(2-x) = 0$

III. Calcular el dominio de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 1}$

2) $f(x) = \frac{sen\, x}{\sqrt{1 - x^2}}$

3) $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

4) $f(x) = \frac{1}{3x - x^2}$

5) $f(x) = sen\, \frac{1}{x^2 - 9}$

6) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

7) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 3x}$

8) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3x + 2}{x + 1}}$

9) $f(x) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}$

10) $f(x) = arccos\left(\frac{4x + 4}{2x + 3}\right)$

IV. Trazar el gráfico e indicar el dominio de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^2 + 3x + 8$

2) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

3) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$

4) $f(x) = 2 + \frac{1}{(x-2)^2}$

5) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

6) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$

7) $f(x) = x - |x + 5|$

10) $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x}}{x^2 - 1}$

11) $f(x) = \sqrt{|x + 1| - [\![x]\!]}$

12) $f(x) = \sqrt{[\![x]\!] + 2}$

13) $f(x) = 3^{x-2}$

14) $f(x) = \log_3(x - 2)$

15) $f(x) = [\![x]\!] + \sqrt{|x| - [\![x]\!]}$

16) $f(x) = \frac{x}{[\![x]\!].[\![x + 1]\!]}$

8) $f(\mathrm{x}) = |2x+1| - [\![\mathrm{x}-3]\!]$

17) $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{[\![\mathrm{x}]\!]+2}} + \left[\!\!\left[\frac{1}{\mathrm{x}}\right]\!\!\right]$

9) $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = [\![\mathrm{x}-2]\!] + 1$

18) $f(x) = \mathrm{sgn}([\![\mathrm{x}-1]\!] - 1)$

V. Dadas las funciones realizar las siguientes operaciones:

1) f= {(1, 4),(2, 3),(3, 2),(4, 5)} g= {(0, 2),(1, 2),(2, -1),(3, 0),(5, 2)}

Hallar: a) f + g b) f – g c) f.g d) $\frac{f}{h}$ e) f o g f) g o f

2) f= {(1, 2),(2, 4),(3, 6),(4, 8)} g= {(2, 5),(3, 7),(5, 9),(6, 11)}

Hallar: a) f + g b) f – g c) f.g d) $\frac{f}{h}$ e) f o g f) g o f

3) f(x) = $x^2 - 5x + 3$; g(x) = $\sqrt{x+1}$ y h(x) = e^{2x-1}

Hallar:

a) f – 3g + h b) $\frac{f}{h}$ c) f.g^2 d) f o g e) g o f f) f o g o h

4) f(x) = $sen^2 x$ y g(x) = cot^2 5x

Hallar: a) (f o g)(x) b) (g o f)(x)

5) $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} [\![\mathrm{x}-1]\!], & \mathrm{x} \in [2,3\rangle \\ |\mathrm{x}+1|, & \mathrm{x} < 2 \end{cases}$ $f(\mathrm{x}) = x-2, \ \mathrm{x} \le 5$

Hallar: (f o g)(x)

6) $f(x) = \begin{cases} x\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] + |3-x|, & x \in \langle -4, 0] \\ \left[\!\left[\frac{3x-2}{x+1}\right]\!\right], & x \in \langle 0,\ 4\rangle \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-1, 0\rangle \\ 0, & x = 0 \\ x^2, & x \in \langle 0, 1] \\ \sqrt{3-x}, & x \in \langle 1, 3] \end{cases}$

Hallar: (f o g)(x)

7) $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-5, -1] \\ 2x, & x \in [1, 4] \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} [\![x-2]\!], & x \in [0, 3\rangle \\ x^2, & x \in [3,\ 6] \end{cases}$

Hallar: (f + g)(x)

8) $f(x) = \begin{cases} [\![x^2]\!] + |x^2-1| - 3, & x \in [-2, 2] \\ \frac{2x-1}{x-1}, & x \in \langle 2, 4\rangle \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 4 - [\![x^2]\!], & x < 2 \\ -2, & x \geq 2 \end{cases}$

Hallar: (f + g)(x)

9) $f(x) = \begin{cases} [\![x-1]\!], & x \in \langle 0, 3] \\ \sqrt{|1-x|-2}, & x > 3 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \frac{x-1}{x-4}$

Hallar: (g o f)(x)

10) $f(x) = \sqrt{1-x}$ $\qquad g(x) = \frac{1}{|x^2-1|}$

Hallar el dominio de (f o g)(x)

VI. Encuentre la inversa de las siguientes funciones si existe:

1) $f(x) = \sqrt{x - 4}$

2) $f(x) = 2x + 1$

3) $f(x) = \frac{2x - 3}{4}$

4) $f(x) = |x + 1|$

5) $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x - 1}, & x \geq 1 \\ x^3, & x < 1 \end{cases}$

6) $f(x) = x^3 - 2$

7) $f(x) = \frac{2x - 1}{2x + 1}$

8) $f(x) = (|x - 3| + x)\sqrt{3 - x}$

9) $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

10) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

VII. Determine si f(x) es par, impar o ninguna:

1) $f(x) = 2x^3 - 4x$

2) $f(x) = |x| + 5$

3) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$

4) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

BIBLIOGRAFÍA

1. ESPINOZA, E. (2012). Análisis Matemático I. Lima, Perú: Edukperú.
2. BLAS, G.(1999). Matemática Básica I. Lima, Perú: Gómez.
3. CARRANZA, C., CASTILLO. P, VÉLIZ, C y AGAPITO, V. (1994). Matemática Básica. Perú: Copias Graficas S. A.
4. COLECCIÓN SIGLO XXI. (2012). Lógica. Lima: Editorial San marcos.
5. FIGUEROA, R.(2012). Matemática Básica I. Lima: Ediciones RFG.
6. FIGUEROA, R.(2013). Análisis Matemático I. Lima: Ediciones RFG.
7. HAEUSSLER, E. y PAUL, R. (2003). Matemáticas para Administración y Economía. Mexico: Pearson Educación S.A.
8. HALL, H. y KNIGHT, S. (1969). Algebra Superior. Mexico: Unión Tipográfica Hispano – Americana.
9. LARSON, R. y EDWARS, B. (2010). Cálculo 1 de una Variable. McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. Impreso en China
10. LADERA, P. (2000). Didáctica de la Matemática Teoría y Práctica. Lima, Perú: Abedul E.I.R.L.
11. LAZARO, M. (1993). Matemática Básica Tomo I. Lima, Perú: Moshera S.R.L.
12. LAZARO, M. (1993) Matemática Básica Tomo II. Lima, Perú: Moshera S.R.L.
13. LAZARO, M(1994). Relaciones y Funciones de R en R. Lima, Perú: Moshera S.R.L.
14. LAZARO, M. (1998). Límites y continuidad. Lima, Perú: Moshera S.R.L.

15. LEITHOLD, L. (1998). El Cálculo con Geometría Analítica. México: Grupo Serla S.A de C.V.
16. MITACC, M. y TORO, L. (2011). Tópicos de Cálculo Vol. I. Lima, Perú: Thales S.R.L.
17. PENNEY, D. y EDWARDS, C. (1996). Cálculo con Geometría Analítica. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
18. ROJO, A. (1978). Algebra I. Argentina: Ateneo.
19. ROMERO, R. (1964). Matemática Histórica y Recreativa. Lima, Perú: Iberia S.A.
20. THOMAS, G. y FINNEY. R. (1998). Cálculo una Variable. México: Addison Wesley Longman S.A.
21. TROMBA, A. y MARSDEN, J. (1998). Cálculo Vectorial. México: Addison Wesley Longman S.A.
22. VENERO, A. (2009). Matemática básica. Lima, Perú: Ediciones Gemar.
23. VENERO, A. (2009). Análisis Matemático I. Lima, Perú. Ediciones Gemar.

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
LAMBAYEQUE

ISBN: 978-9972-55-028-7
9 789972 550287

EDITORIAL UNIVERSITARIA
UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO