UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Transformación de Bäcklund para la ecuación de Sine-Gordon, superficies pseudoesféricas y los solitones"

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autor:

CHININ CRUZ WILMER FERNANDO

Asesor:

ORTIZ BASAURI GLORIA MARÍA

LAMBAYEQUE – PERÚ
2015

Universidad Nacional "Pedro Ruiz Gallo"
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada "Transformación de Bäcklund para la ecuación de Sine-Gordon, superficies pseudoesféricas y los solitones". Presentada por el Bach. Mat. Wilmer Fernando Chininin Cruz, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Dr. Rubén Esteban Burga Barboza
Presidente del jurado

Lic. Mat. Walter Arriaga Delgado
Secretario del jurado

Lic. Mat. Darwin Díaz Delgado
Vocal del jurado

Fecha de defensa: 01 de Junio del 2015

Universidad Nacional “Pedro Ruiz Gallo”
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Título de la tesis	:	Transformación de Bäcklund para la ecuación de Sine-Gordon, superficies pseudoesféricas y los solitones.
Escuela profesional	:	Matemática.
Autor	:	Wilmer Fernando Chininin Cruz.
Asesor	:	Gloria María Ortiz Basauri.

Dra. Gloria María Ortiz Basauri
Asesor

Bach. Mat. Wilmer Fernando Chininin Cruz
Autor

A mi madre, por apoyarme en todo.

Agradecimientos

Quiero primeramente agradecer a Dios por todo.

A mi familia y amigos que que siempre estuvieron apoyándome.

A mi amigo Jesús Gutierrez por apoyarme en las gráficas y a Richard Becerra por ayudarme a entender los solitones.

A los profesores del departamento de matemática que me enseñaron durante los cinco años de carrera profesional.

Y finalmente a mi profesora y amiga Gloria Ortiz Basauri por el apoyo incondicional y que con su paciencia me supo orientar e incentivar en este trabajo.

Resumen

En esta tesis se soluciona la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon y se analiza su solución. La metodología consiste en utilizar la transformación de Bäcklund para encontrar una nueva solución no nula. La solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon tiene correspondencia con la pseudoesfera y además tiene el comportamiento de un solitón. Para encontrar nuevas soluciones de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon se pueden utilizar herramientas de la geometría diferencial.

Abstract

In this thesis the Sine-Gordon partial differential equation is solved and this solution is analyzed. The methodology is to use the Bäcklund Transformation to find a new nonzero solution. The solution of partial differential equation Sine-Gordon has correspondence with the pseudosphere and also has the behavior of a soliton. To find new solutions of partial differential Sine-Gordon equation can be used tools of differential geometry.

Índice general

Notación

Notación	**Significado**
S	Superficie
$\mathbf{S}^2$	Esfera en $\mathbb{R}^3$
T_pS	Espacio tangente de la superficie S en un punto p
r	Parametrización de la superficie S
u, v	Coordenadas
$\overrightarrow{v}$	Vector
$a.b$	Producto interior canónico de a y b
U, V	subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$
K	Curvatura de la superficie S

0186

Acta de Sustentación N° 048 - 2015 - D/FACFyM

(Sustentación Autorizada por Resolución N° 208-2015-D/FACFyM)

En la ciudad de Lambayeque, siendo las 11:30 am del día 01 de junio del 2015 se reunieron en la sala de sustentaciones de la FACFyM los miembros del jurado designados mediante Resolución N° 346-2014-D/FACFyM y Resolución N° 597-2015-D/FACFyM, los docentes:

Dr. Rubén Esteban Burga Barboza — Presidente
Lic. Mat. Walter Arriaga Delgado — Secretario
Lic. Mat. Dorwin Díaz Delgado — Vocal

para evaluar el trabajo de tesis titulado: Transformaciones de Backlund para la ecuación de Sine-Gordon, superficies pseudoesféricas y los solitones desarrollado por el Bachiller en Matemáticas, Chininin Cruz Wilmer Fernando. Después de escuchar la exposición y las respuestas a las preguntas formuladas por los miembros del Jurado, se acordó aprobar el trabajo por unanimidad con el calificativo de Muy Bueno. En consecuencia, el Bachiller en referencia queda apto para recibir el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas, de acuerdo a la Ley Universitaria, el Estatuto y Reglamento de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Lambayeque.

Para constancia del hecho firman.

Dr. Rubén Esteban Burga Barboza
Presidente

Lic. Mat. Walter Arriaga Delgado
Secretario

Lic. Mat. Dorwin Díaz Delgado
Vocal

Capítulo 1

Introducción

A medida que se estudia las ecuaciones diferenciales parciales se aprende los diferentes métodos para solucionarlas, pero existen ecuaciones que son difíciles o imposibles de resolver. Además, se encuentran ecuaciones diferenciales parciales no lineales que son aún más difíciles de resolver por métodos tradicionales. Dentro de las que son difíciles de resolver se encuentra la *ecuación de Sine-Gordon*

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} = -K \operatorname{sen}\theta \cos\theta,$$

donde K indica la curvatura, θ_{xx} y θ_{tt} indican las derivadas parciales con respecto al espacio y al tiempo. Esta ecuación se convierte en la *ecuación de la onda* si el lado derecho es cero($K = 0$), por eso algunos la llaman *ecuación de la onda no lineal*.

La *ecuación de Sine-Gordon* tiene grandes aplicaciones en la física del estado sólido, óptica no lineal, entre otras. Su importancia radica en que tiene soluciones denominadas *solitones*. Pero, ¿qué son los solitones?, es la pregunta clave quizá para empezar.

Los solitones estuvieron en la naturaleza desde los inicios del tiempo, pero fueron observados por primera vez en el año de 1834 cuando un ingeniero naval Scott Russell paseaba por el canal de Edimburgo(Inglaterra) y observó que al detenerse de golpe un barco, se desprendió una gran onda de agua que avanzó varios kilómetros sin cambiar su forma. A este fenómeno lo llamó *gran onda de traslación*, la cual no llegó a modelar a pesar de mucho esfuerzo.

Tuvieron que pasar más de 60 años para que los holandeses D.J.Korteweg y G.de Vries formularan un modelo matemático que diera explicación al fenómeno observado por Scott Russell. Las ondas parecían condenadas al olvido, pero en 1955 Fermi, Pasta y Ulam encontraron una relación entre la *ecuación de Korteweg-Vries* dada por

$$\theta_t = \frac{1}{4}\theta_{xxx} - \frac{3}{2}\theta\theta_x$$

y el extraño comportamiento de los sistemas, originalmente lineales, en el cual fueron introducidas perturbaciones no lineales. Al darse cuenta que las ondas de la ecuación de Korteweg-Vries no se dispersan y conservan sus características iniciales después de chocar, los científicos Zabusky y Kruskal llamaron tales ondas como *solitones*.

Como se dijo al principio, los métodos para resolver ecuaciones diferenciales parciales son escasos, la finalidad de esta tesis es solucionar la ecuación de Sine-Gordon utilizando herramientas de geometría diferencial dadas por Bäcklund, Bianchi entre otros en el siglo XIX y XX; además de establecer una relación entre la solución de la ecuación de Sine-Gordon con las superficies pseudoesféricas y los solitones.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan aspectos fundamentales de la geometría diferencial. Se comienza primeramente por las superficies regulares, dando la definición de espacio tangente a una superficie regular; curvas paramétricas, seguidamente se define la aplicación de Gauss la cual sirve para dar una definición de curvatura Gaussiana que ayuda a describir el aspecto que tiene la superficie. Por último se hará un breve repaso sobre los tipos de coordenadas.

En la otra sección aparece la teoría física, que empieza a aclarar el panorama partiendo desde la física clásica y moderna hasta definir ondas solitarias y solitones.

2.1 Nociones de geometría diferencial

2.1.1 Superficie Regular

La idea principal de superficies regulares es cubrir a toda la superficie utilizando funciones diferenciables que tengan subconjuntos abiertos como dominio. A continuación se define a una superficie regular expuesta en el libro del profesor Santamaría [Santamaria et al., 2008] y que en esta tesis se ha tratado para el caso de superficies de dimensión 2 y que se encuentran

en $\mathbb{R}^3$.

Definición 1. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie regular* de dimensión 2 si para cada punto $p \in S$ existe un abierto V en $\mathbb{R}^3$ conteniendo p y una aplicación $r : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \cap V$ de un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $S \cap V$ tales que:

(a) r es un homeomorfismo diferenciable.

(b) $dr_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q = (q_1, q_2) \in U$.

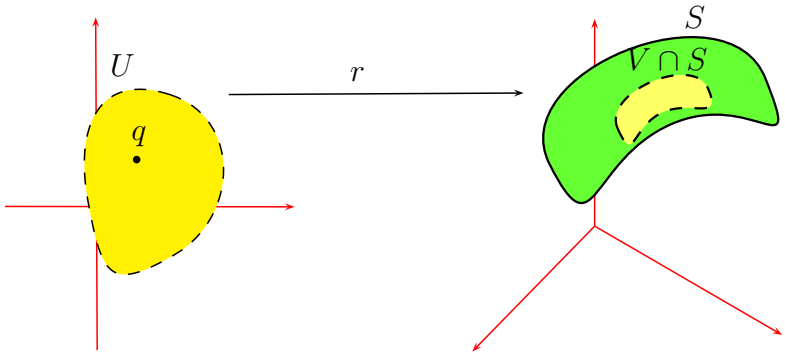


Figura 2.1.1: Superficie Regular

Observación 1. (a) La palabra diferenciable significará de clase C^∞, salvo se diga lo contrario.

(b) Cada aplicación r de la definición (1), es llamada parametrización(o sistema de coordenadas) y el conjunto $r(U) = V \cap S$ se denomina vecindad coordenada.

(c) La aplicación $r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$ es diferenciable de clase C^∞ cuando las funciones coordenadas $r_1, r_2, r_3 : U \to \mathbb{R}$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes, en todos los puntos de U.

(d) Para verificar la continuidad de $r^{-1} : V \cap S \to U$ se debe verificar que r^{-1} es la restricción de una aplicación continua $F : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida en un subconjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^3$ conteniendo $V \cap S$.

(e) Se denota por u, v las coordenadas en $\mathbb{R}^2$. Si $dr_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es la derivada de la parametrización $r : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \cap V$, entonces la matriz asociada a la transformación lineal dr_q está dada por

$$J(r(q)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial r_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial r_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial r_2}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial r_3}{\partial u}(q) & \frac{\partial r_3}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

Mostrar que dr_q es inyectiva equivale a mostrar que las columnas de $J(r(q))$ sean linealmente independientes. De la misma manera, esto es equivalente a mostrar que la matriz $J(r(q))$ tenga rango 2.

Puesto que el rango de una matriz es igual al rango de filas entonces decir que $J(r(q))$ tiene rango 2 equivale a decir que el máximo número de filas linealmente independientes es 2.

Por lo tanto, por lo menos una de las submatrices de $J(r(q))$ dadas por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial r_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial r_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial r_2}{\partial v}(q) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial r_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial r_3}{\partial u}(q) & \frac{\partial r_3}{\partial v}(q) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial r_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial r_2}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial r_3}{\partial u}(q) & \frac{\partial r_3}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

tiene determinante diferente de cero.

Los determinantes de las anteriores tres submatrices se denotan respectivamente por:

$$\frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(u, v)}(q), \quad \frac{\partial(r_1, r_3)}{\partial(u, v)}(q), \quad \frac{\partial(r_2, r_3)}{\partial(u, v)}(q)$$

Observe que si se hace $\frac{\partial r}{\partial u} = (\frac{\partial r_1}{\partial u}, \frac{\partial r_2}{\partial u}, \frac{\partial r_3}{\partial u})$ y $\frac{\partial r}{\partial v} = (\frac{\partial r_1}{\partial v}, \frac{\partial r_2}{\partial v}, \frac{\partial r_3}{\partial v})$ entonces

$$\frac{\partial r}{\partial u}(q) \times \frac{\partial r}{\partial v}(q) = \left(\frac{\partial(r_2, r_3)}{\partial(u, v)}(q), -\frac{\partial(r_1, r_3)}{\partial(u, v)}(q), \frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(u, v)}(q) \right).$$

Por lo tanto, el que la matriz $J(r(q))$ tenga rango 2 es equivalente a que el producto vectorial $\frac{\partial r}{\partial u}(q) \times \frac{\partial r}{\partial v}(q)$ sea diferente de cero.

Hasta aquí ya se sabe cuando una superficie es regular, pero si se desea saber algunas proposiciones importantes se tiene que repasar un libro de geometría diferencial como [Santamaria et al., 2008, Tenemblat, 1986].

2.1.2 Espacio Tangente

Definición 2. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Un vector $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ es llamado vector tangente a S en un punto $p \in S$ si existe una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \overrightarrow{v}$.

Definición 3. Fijado un punto $p \in S$, se llama *espacio tangente* a S en p al conjunto

$$T_pS = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{v} \text{ es tangente a } S \text{ en } p\}.$$

Es decir, el espacio tangente T_pS es la colección de todos los vectores tangentes a S en p.

Una base de T_pS

Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. De acuerdo a un resultado del álgebra lineal(ver apéndice proposición (12)), la inyectividad de $dr_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ garantiza que los vectores $dr_q(e_1)$ y $dr_q(e_2)$ sean linealmente independientes. Pero ellos además generan el espacio tangente $dr_q(\mathbb{R}^2) = T_pS$, por tanto se concluye que el conjunto $\{dr_q(e_1), dr_q(e_2)\}$ es una base para T_pS y entonces T_pS es un espacio vectorial de dimensión 2, es decir de la misma dimensión que la superficie S. Observe que $dr_q(e_1) = \frac{\partial r}{\partial u}(q)$ y $dr_q(e_2) = \frac{\partial r}{\partial v}(q)$. Por tanto la base de T_pS, construida anteriormente, queda denotada por $\{\frac{\partial r}{\partial u}(q), \frac{\partial r}{\partial v}(q)\}$ y recibe el nombre de *base de T_pS*.
En este caso, el espacio tangente es llamado simplemente *plano tangente*.

2.1.3 Superficies de Revolución

Primero se define lo que es una curva regular diferente a lo que normalmente se conoce, para luego poder dar una explicación sobre superficies de revolución.

Definición 4. Se llama curva regular en $\mathbb{R}^3$ a un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ tal que para cada punto $p \in C$ existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^3$ y una aplicación $\alpha : [a, b] \to V \cap C$ que cumple las siguientes condiciones:

1. $\alpha : [a, b] \to V \cap C$ es un homeomorfismo diferenciable.

2. $d\alpha_t : R \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

Sea C una curva regular contenida en un plano $\mathcal{P}$ de tal manera que $C \cap L = \emptyset$. Cuando la curva C gira alrededor de L genera un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ llamado *superficie de Revolución*. En este caso la curva C es llamada *generatriz* de S.
Cuando se hace girar C, cada punto de esta curva genera una circunferencia contenida en S. Estas circunferencias son llamadas *paralelos* de S. Las diferentes posiciones de C a medida que gira en rotación son llamadas *meridianos* de S. Considere en particular la curva regular C contenida en el plano XZ y suponga que ella gira alrededor de la recta L dada por el eje Z. Esto da origen a la superficie de revolución $S \subset \mathbb{R}^3$.

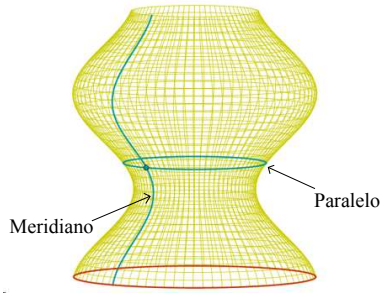


Figura 2.1.3: Superficie de Revolución

Proposición 1. *La superficie de revolución S obtenida a partir de C es una superficie regular.*

Demostración. Ver [Santamaria et al., 2008] ■

Observación 2. La demostración anterior deja algunas cosas que cabe resaltar, como por ejemplo la obtención de una aplicación $r : U \to S$ definida por

$$r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u)) \tag{2.1}$$

donde f, g representan funciones diferenciables y $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : a < u < b,\ 0 < v < 2\pi\}$.

2.1.4 Curvas coordenadas o paramétricas

Sea $r : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización, S una superficie regular contenida en $\mathbb{R}^3$, $p \in S$ y $q = r^{-1}(p) = (q_1, q_2)$. Se llaman curvas paramétricas de r a las aplicaciones $\alpha_1 : I \to S$ definida por $\alpha_1(t) = r(t, q_2)$ y $\alpha_2 : J \to S$ definida por $\alpha_2(t) = r(q_1, t)$ donde $I, J \subset \mathbb{R}$.
Evidentemente por cada punto $p \in r(U)$ pasan 2 curvas paramétricas. Además

$$\alpha_1'(q_1) = \frac{\partial r(q)}{\partial u} = r_u(q) \;\text{ y }\; \alpha_2'(q_2) = \frac{\partial r(q)}{\partial v} = r_v(q)$$

Ángulo entre curvas paramétricas

Dadas dos curvas $\alpha_1 : I \to S$ y $\alpha_2 : J \to S$ que se intersecan en un punto $p = \alpha_1(t_0) = \alpha_2(s_0) \in S$ entonces el ángulo ω entre ellas cumple con la relación

$$\cos\omega = \frac{\alpha_1'(t_0).\alpha_2'(s_0)}{|\alpha_1'(t_0)|\ |\alpha_2'(s_0)|}.$$

Expresando en términos de r, el ángulo esta dado por

$$\cos\omega = \frac{r_u.r_v}{|r_u|\ |r_v|} \tag{2.2}$$

2.1.5 Aplicación de Gauss

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie bidimensional con orientación dada por el campo normal unitario $N : S \to \mathbb{R}^3$. Esto significa en particular que $|N(p)| = 1$ para todo $p \in S$.
La aplicación $G : S \to \mathbf{S}^2$ se define como

$$G(p) = \text{ punto final del vector } N(p)$$

Esta aplicación G es llamada *aplicación normal de Gauss* de S.

Observación 3. El vector N generalmente está dado por

$$N(p) = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

donde $r : U \to S$ es la parametrización de la superficie S.

2.1.6 Curvatura Gaussiana y Curvatura Media

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada con orientación dada por el campo normal unitario $N : S \to \mathbb{R}^3$ y sea $G : S \to \mathbf{S}^2$ la aplicación de Gauss cuya diferencial es $dG_p : T_pS \to T_pS$. Sea $B_P \in M(2 \times 2)$ la matriz asociada a dG_p dada por:

$$B_p = \begin{pmatrix} b_{11}(p) & b_{12}(p) \\ b_{21}(p) & b_{22}(p) \end{pmatrix}.$$

Entonces

Definición 5. Se llama *curvatura Gaussiana* de S en p al número

$$K(p) = det(B_p)$$

Definición 6. Se llama *curvatura media* de S en p al número

$$H(p) = -\frac{1}{2} Traza(B_p)$$

2.1.7 Superficies hiperbólicas

Definición 7. Una superficie S se llama *superficie hiperbólica* si todos sus puntos son hiperbólicos, es decir

$$K(p) < 0, \quad \forall\, p \in S.$$

2.1.8 Primera y Segunda Forma Fundamental

Definición 8. Sea S una superficie regular y un punto $p \in S$. Se llama primera forma fundamental de S en p a la forma cuadrática $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$ definida por $I_p(v) = (v.v)_p = |v|^2$.

Es importante contar con alguna expresión local que permita hacer los cálculos, es decir, expresar I_p en términos de alguna parametrización que en éste caso será $r = r(u, v)$.
Sea $r : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ la parametrización de S en p. Entonces dado un vector $dr \in T_pS$, la primera forma fundamental I_p queda expresada de la siguiente manera

$$I(dr) = dr.dr = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.3}$$

donde

$$E = r_u.r_u, \quad F = r_u.r_v, \quad G = r_v.r_v$$

son funciones diferenciables al hacer variar p en una vecindad coordenada de $r(U)$.
De forma análoga, se define la segunda forma fundamental.

Definición 9. Se llama segunda forma fundamental de $S \subset \mathbb{R}^3$ en p a la forma cuadrática $II_p : T_pS \to \mathbb{R}$ definida por

$$II_p(\overrightarrow{v}) = -dG_p(\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v}$$

donde dG_p es la diferencial de la aplicación de Gauss.
Sea ahora $r : U \to S$ la parametrización de S, entonces los vectores r_u y r_v son tangentes a S en p, y en tal punto son linealmente independientes, además el vector

$$N(p) = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \tag{2.4}$$

es normal unitario para S. Entonces la segunda forma fundamental expresada en términos de la parametrización $r = r(u, v)$ es

$$II(dr) = -dr.dN = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \tag{2.5}$$

donde

$$e = -r_u.N_u = r_{uu}.N, \quad g = -r_v.N_v = r_{vv}.N \tag{2.6}$$
$$f = -r_u.N_v = -r_v.N_u = r_{uv}.N.$$

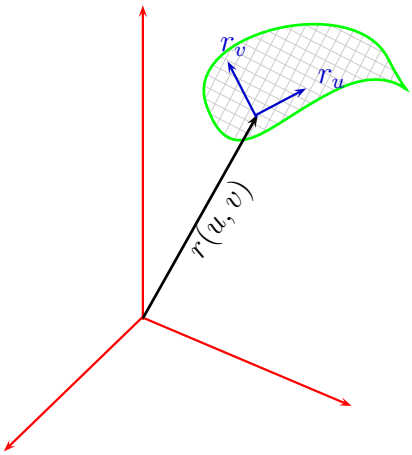


Figura 2.1.8: Superficie con parametrización $r(u, v)$

Si se hace variar $p \in S$ entonces e, f, g denotan funciones diferenciables en U.

2.1.9 Curvatura Normal

Antes de dar una definición sobre la curvatura normal, se van a recordar algunas definiciones sobre curvas en $\mathbb{R}^3$.

Definición 10. Sea C una curva diferenciable parametrizada por $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, donde I es un intervalo, se llama curvatura de C en p al número real

$$k(p) = |\alpha''(p)|.$$

Definición 11. Se llama *vector normal principal* de C en p, al vector

$$\overrightarrow{n}(p) = \frac{\alpha''(p)}{|\alpha''(p)|}.$$

Sea ahora $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular de dimensión 2, orientada por el campo normal unitario $N : S \to \mathbb{R}^3$. Sea también C una curva regular contenida en S que pasa por el punto $p \in S$, $k(p)$ la curvatura de C en p y $\overrightarrow{n}$ el vector normal principal de C en p. Finalmente considere $\overrightarrow{N} = N(p)$ como el vector normal a S en p y $\cos\beta = \overrightarrow{n}.\overrightarrow{N}$, donde β es el ángulo que hacen $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{N}$.

Definición 12. Se llama *curvatura normal* de $C \subset S$ en p al número

$$k_n(p) = k(p)\cos\beta.$$

Proposición 2. *Sea $C \subset S$ una curva regular parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es la longitud de arco, tal que $\alpha(0) = p$. Entonces*

$$II_p(\alpha'(0)) = k_n(p)$$

Demostración. Ver [Santamaria et al., 2008] ■

Este resultado quiere decir que el valor de la segunda forma fundamental II_p en un vector unitario $\overrightarrow{v} \in T_pS$ es igual a la curvatura normal de la curva regular que pasa por p y tiene a $\overrightarrow{v}$ como vector tangente. En particular se tiene como resultado la siguiente proposición.

Proposición 3. *Sean $\alpha(s)$ y $\beta(s)$ dos curvas parametrizadas por la longitud de arco tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p \in S$ y tienen el mismo vector tangente $\overrightarrow{v}$ en el punto p. Entonces $k_n^{\alpha}(p) = k_n^{\beta}(p)$.*

Demostración. Ver [Santamaria et al., 2008] ■

Corolario 1 (Meusnier)**.** *Todas las curvas contenidas en una superficie S que tienen en un punto dado la misma recta tangente, tienen en este punto la misma curvatura normal.*

Este resultado indica que el valor de la curvatura normal no depende al fin de cuentas de la curva elegida. Entonces se pueden tomar las curvas que resultan de la intersección de un plano con la superficie, llamadas secciones normales.

2.1.10 Sección Normal

Conviene recordar que el conjunto

$$(T_pS)^{\perp} = \{\overrightarrow{N} \in \mathbb{R}^m : \overrightarrow{N}.\overrightarrow{v} = 0, \text{ para todo } \overrightarrow{v} \in T_pS\}$$

es llamado *espacio vectorial normal* a S en el punto p.

Sea $p \in S$, $\mathcal{P}$ un plano generado por los vectores $\overrightarrow{v} \in T_pS$ y $N(p) \in (T_pS)^{\perp}$.
Se llama sección normal de S en p en la dirección de $\overrightarrow{v}$, a la curva dada por la intersección de S y $\mathcal{P}$.
Suponga que se ha elegido una orientación N en la superficie S y sea $C \subset S$ una sección normal la cual tiene vector normal $\overrightarrow{n}$ y vector tangente $\overrightarrow{v}$.

Observación 4.

1. Si $k_n(p) > 0$ entonces $\overrightarrow{n} = N(p)$ y por lo tanto la sección normal se está flexionando en la dirección de $N(p)$. Esto implica a su vez que la superficie S, en la dirección de $\overrightarrow{v}$, se flexiona hacia $N(p)$.

2. Si $k_n(p) < 0$ entonces $\overrightarrow{n} = -N(p)$ y por lo tanto la sección normal se está flexionando en la dirección contraria de $N(p)$. Esto significa que la superficie S se flexiona también en la dirección contraria de $N(p)$, cuando nos desplazamos en la dirección $\overrightarrow{v}$.

3. Si $k_n(p) = 0$ no se puede concluir que S no se flexiona pues puede suceder que la sección normal tenga curvatura cero sólo en el punto p, pero en todo caso se puede afirmar que la flexión de S en la dirección de $\overrightarrow{v}$ es bastante pequeña.

Resultados vistos en [Santamaria et al., 2008]

Como se puede observar, las curvaturas normales brindan información de la manera como se flexiona una superficie en la vecindad de un determinado punto. Sin embargo, observe que en cada punto de la superficie existe un plano tangente y por lo tanto hay infinidad de direcciones en las que tendríamos que determinar la forma de la superficie alrededor de un determinado punto. Afortunadamente existen dos direcciones que se pueden fijar para evitar complicaciones y que se estudian en la siguiente sección.

2.1.11 Curvaturas principales

Sea S una superficie regular de dimensión 2, y sea C una curva regular contenida en S, entonces esta curva tendrá una infinidad de curvaturas normales al hacer el recorrido de k_n por C. Dentro del conjunto de los valores de la curvatura normal, es importante observar los valores

mínimo y máximo, los cuales se denominan *curvaturas principales* de S en p.

Proposición 4. *Sea $II_p : T_pS \to \mathbb{R}$ la segunda forma fundamental de S en p. Entonces existe una base ortonormal $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$ de T_pS tal que si $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e}_1 + v_2\overrightarrow{e}_2$ entonces*

$$II_p(v) = k_1v_1^2 + k_2v_2^2$$

donde $k_2 = II_p(\overrightarrow{e}_2) \geq k_1 = II_p(\overrightarrow{e}_1)$ son los valores máximo y mínimo respectivamente de II_p en el círculo unitario $S^1 \subset T_pS$.

Demostración. Ver [Santamaria et al., 2008] ■

Proposición 5. *Sea $dG_p : T_pS \to T_pS$ la diferencial de la aplicación de Gauss. Entonces existe una base ortonormal $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$ de T_pS tal que*

$$dG_p(e_1) = -k_1\overrightarrow{e}_1, \quad dG_p(\overrightarrow{e}_2) = -k_2\overrightarrow{e}_2,$$

donde $k_1 = II_p(\overrightarrow{e}_1) \leq k_2 = II_p(\overrightarrow{e}_2)$ son los valores mínimo y máximo respectivamente de II_p en el círculo unitario $S^1 \subset T_pS$.

Demostración. Ver [Santamaria et al., 2008] ■

Definición 13. Se llaman *curvaturas principales* de S en p a los valores extremos de II_p en el círculo unitario $S^1 \subset T_pS$ dados por $k_1 = II_p(\overrightarrow{e}_1)$ y $k_2 = II_p(\overrightarrow{e}_2)$. Los vectores respectivos $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ son llamados *vectores principales* y las direcciones dadas por estos vectores se llaman *direcciones principales* en p.

Definición 14. Una curva regular conexa $C \subset S$ se llama *línea de curvatura* si en cada punto $p \in C$, la respectiva recta tangente es una *dirección principal.*

2.1.12 Tipos de coordenadas

Coordenadas ortogonales

Se recuerda que el ángulo entre dos curvas paramétricas es dado por la ecuación (2.2), lo que permite saber cuándo las curvas paramétricas son ortogonales.

Definición 15. Una parametrización $r : U \to V \subset S$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^2$, para la superficie regular S se dice que es ortogonal si los vectores de coordenadas son ortogonales, es decir, si

$$r_u.r_v = 0, \tag{2.7}$$

para todo $(u, v) \in U$.

Proposición 6. *Para cada $p \in S$ existe una parametrización $r(u, v)$ definida en una vecindad V de p tal que los vectores coordenados r_u, r_v son ortogonales en toda la vecindad V.*

Demostración. Ver [Avendaño, 2006]. ■

Coordenadas de líneas de curvatura

Es una parametrización $r(u, v)$ en la cual las curvas coordenadas coinciden con las líneas de curvatura(ver la sección 2.1.4 y la definición 14).

Proposición 7. *Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular y $p \in S$ es un punto no umbilical entonces existe una vecindad $V \subset S$ de p y una parametrización $r : U \to S$ de líneas de curvatura, tal que*

$$F = r_u.r_u = 0, \qquad f = r_{uv}.N = 0$$

en consecuencia

$$I = Edu^2 + Gdv^2, \quad II = edu^2 + gdv^2.$$

Demostración. Ver [Avendaño, 2006]. ■

Coordenadas de líneas asintóticas

Definición 16. Se llama *dirección asintótica* de una superficie S en un punto $p \in S$ a una recta contenida en T_pS en cuya dirección la curvatura normal es cero.

Definición 17. Una curva $C \subset S$ en la cual las rectas tangentes en cada uno de sus puntos son direcciones asintóticas recibe el nombre de *curva asintótica.*

Definición 18. Una parametrización $r(u, v)$ de S se dice ser de *líneas asintóticas* si las curvas coordenadas coinciden con las curvas asintóticas(ver la sección 2.1.4 y la definición anterior 17).

Ver [Avendaño, 2006] para más detalles.

2.2 Ondas solitarias y Solitones

No hay duda de que la física y la matemática siempre van a estar unidas. La física describe los fenómenos de la naturaleza pero necesita de la matemática para poder expresar y dar una predicción de lo que pasará o lo que pasó o lo que está pasando en la naturaleza.
Los conocimientos en física han ido avanzando, descartando varias teorías o admitiendo la validez de otras. A continuación se definen las cosas básicas de la física en cuanto a ondas, empezando por la diferenciación de la clásica y moderna, para luego dar el concepto de Campo que será importante para modelar cualquier fenómeno de la naturaleza. Finalmente se hace hincapié a los solitones que es el tema central del trabajo.
La física **clásica** estudia todo lo relacionado al electromagnetismo, mecánica, óptica, dinámica de fluidos, donde los fenómenos ocurridos suceden a velocidades inferiores a la velocidad de la luz.
La física **moderna** en cambio, estudia todos aquellos fenómenos que ocurren a la velocidad de la luz o muy cercana a ella, además estudia fenómenos que ocurren a nivel subatómico. Entre las ramas de la física moderna se encuentran la física cuántica y la física relativista.

En física se estudian las leyes que rigen el movimiento en el universo y se puede citar a las clásicas leyes de Newton, por otra parte, resulta interesante estudiar también las interacciones(fuerzas) que ocurren en el universo entre dos o más objetos. Entre las interacciones fundamentales de la física se encuentran:

(a) **Interacción gravitatoria** que se manifiesta en el movimiento planetario y en el de la materia en conjunto.

(b) **Interacción electromagnética** la mejor comprendida y posiblemente la más importante desde el punto de vista de la vida diaria. La mayoría de los fenómenos que se observa

a nuestro alrededor, incluyendo los procesos químicos y biológicos, son el resultado de interacciones electromagnéticas entre átomos y moléculas.

(c) **Interacción nuclear o fuerte** que es responsable de que los protones y los neutrones (conocidos como nucleones) se mantengan dentro del núcleo atómico y de otros fenómenos relacionados.

(d) **Interacción débil**, responsable de ciertos procesos entre partículas fundamentales, tal como la desintegración beta, el cual es un proceso en donde se emite un electrón o positrón para compensar la relación de neutrones y protones del núcleo atómico.

Para describir estas interacciones es fundamental introducir el concepto de *campo*.
El *campo* es una propiedad física extendida en una región del espacio y descrita por medio de una función de la posición y el tiempo.
Se supone que para cada interacción, una partícula produce a su alrededor un campo correspondiente. Este campo actúa a su vez sobre una segunda partícula para producir la interacción necesaria. La segunda partícula produce su propio campo, el cual actúa sobre la primera partícula dando como resultado una interacción mutua.
Existen varios tipos de campos, entre los cuales se encuentran:

(a) **Campo escalar**, aquel en el que cada punto del espacio lleva asociada una magnitud escalar. (campo de temperaturas de un sólido, campo de presiones atmosféricas,etc).

(b) **Campo vectorial**, aquel en que cada punto del espacio lleva asociado una magnitud vectorial (campos de fuerzas, etc).

(c) **Campo tensorial**, aquel en que cada punto del espacio lleva asociado un tensor (campo electromagnético en electrodinámica clásica, campo gravitatorio en teoría de la relatividad general, campo de tensiones de un sólido, etc).

(d) **Campo espinorial**, un campo que generaliza al tipo anterior y que aparece sólo en mecánica cuántica y teoría cuántica de campos.

También se necesitará dejar claro que un campo es **uniforme** si la magnitud que define al campo permanece constante y se denomina **estacionario** si no depende del tiempo.

Aunque se puede describir las interacciones por medio de campos, no todos los campos corresponden a interacciones, hecho que está implícito en la definición de campo. Por ejemplo, un meteorólogo puede expresar la presión y la temperatura atmosféricas en función de la latitud y la longitud en la superficie terrestre y de la altura sobre ésta. Se tiene entonces dos campos escalares: el campo de presiones y el campo de temperaturas. En el movimiento de un fluido su velocidad en cada punto constituye un campo vectorial. El concepto de campo es entonces de gran utilidad general en la física. Ver [Alonso and Finn, 1970].

Ahora que ya se sabe algo sobre el concepto de "campo", podemos decir que la ecuación de Sine-Gordon dada en la introducción por la ecuación:

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} = -K \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

modela un fenómeno de la naturaleza, donde $\theta = \theta(x, t)$ representa un campo clásico, es decir un campo de fenómenos físicos macroscópicos.
Estos fenómenos representados por la solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon $\theta(x, t)$ se llaman en algunos casos ondas solitarias o solitones, pero para poder diferenciarlos es necesario dar algunos conceptos y definiciones. Ver [González, 2001]
Un **fenómeno ondulatorio** es aquel que se genera por la alteración del estado de equilibrio de un sistema, propagándose de una región del sistema a otra. Dentro de los más conocidos están las pequeñas olas de un estanque, los sonidos musicales, los temblores sísmicos causados por un terremoto.
Dentro de las ondas se tiene a las llamadas **ondas mecánicas** que se propagan a través de un material llamado medio y las **ondas no mecánicas** que no necesitan de un medio para su propagación. Ver [Sears and Zemansky, 2013]

Definición 19 (Onda Solitaria)**.** Una solución onda solitaria de una ecuación en derivadas parciales

$$F(x, t, \theta) = 0$$

donde $x, t \in \mathbb{R}$(variables espacial y temporal respectivamente) y $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la variable dependiente, es una solución de onda viajera de la forma:

$$\theta(x, t) = \phi(x - \gamma t) = \phi(z)$$

para alguna velocidad γ, y cuya transición ocurre desde un estado asintótico constante, cuando $z \to -\infty$, hasta otro estado asintótico constante cuando $z \to +\infty$.

Definición 20 (Solitón)**.** Un solitón es una onda solitaria que preserva asintóticamente su forma y su velocidad bajo interacciones no lineales con otras ondas solitarias, o de manera más general, con otra perturbación localizada arbitraria.

Se puede decir que el término "solitón" se asocia con la solución de una ecuación diferencial parcial no lineal (o un sistema de ellas) que tiene 3 características:

(a) Representa una onda cuya forma no varía con el tiempo,

(b) está localizada, de manera que decae o se aproxima a un valor constante en el infinito, y

(c) puede interaccionar fuertemente con otros solitones y mantener su forma y su velocidad, salvo una traslación espacial.

Éstas características se encuentran en la tesis de Sara Cuenda [Cuenda, 2007].

Observación 5. Un solitón siempre será una onda solitaria, pero el recíproco no es cierto.

Capítulo 3

Transformación de Bäcklund

Ahora que ya se hizo un repaso de las cosas más importantes de la geometría y de la teoría de solitones se presenta este segundo capítulo que empieza deduciendo las ecuaciones de Gauss-Weingarten las cuales se vuelven especiales cuando son utilizadas en superficies hiperbólicas, posteriormente se define a la transformación de Bäcklund para solucionar la ecuación de Sine-Gordon, finalmente haciendo uso de la relación que existe entre la solución de la ecuación de Sine-Gordon y las superficies pseudoesféricas, se encuentra otra superficie. Para esta parte se ha tomado como referencia a [Rogers and Schief, 2002]

3.1 Las Ecuaciones de Gauss-Weingarten para Superficies Hiperbólicas

Sea S una superficie regular bidimensional, entonces definiendo la primera y segunda forma fundamental como en la sección (2.1.8), se observa lo siguiente:

Observación 6. Puesto que los vectores r_u y r_v no son nulos, se observa que $E = r_u.r_u = |r_u|^2 > 0,\ G = r_v.r_v = |r_v|^2 > 0$.
También se tiene que $EG - F^2 > 0$, puesto que $|r_u \times r_v|^2 + (r_u.r_v)^2 = |r_u|^2|r_v|^2$ entonces se tiene que

$$EG - F^2 = |r_u|^2|r_v|^2 - (r_u.r_v)^2 = |r_u \times r_v|^2 > 0.$$

De acuerdo a la subsección (2.1.2), se tiene que una base para T_pS es $\{r_u, r_v\}$.
Como N es ortogonal a T_pS, entonces el conjunto

$$\{r_u, r_v, N\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$. Por tanto, los vectores $r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}, N_u$ y N_v pueden ser expresados en términos de la base. Es decir:

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + a_{11}N, && (3.1)\\ r_{uv} &= \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + a_{12}N, && (3.2)\\ r_{vv} &= \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + a_{22}N, && (3.3)\\ N_u &= b_{11}r_u + b_{12}r_v, && (3.4)\\ N_v &= b_{21}r_u + b_{22}r_v, && (3.5) \end{aligned}$$

donde los coeficientes $\Gamma_{ij}^k, a_{ij}, b_{ij}$ deben de ser determinados. Los coeficientes Γ_{ij}^k se denominan *símbolos de Christoffel* de la superficie S, las ecuaciones (3.1,3.2 y 3.3) se denominan *ecuaciones de Gauss* mientras que las ecuaciones (3.4) y (3.5) se denominan *ecuaciones de Weingarten.*

A continuación, se van a determinar los coeficientes $\Gamma_{ij}^k, a_{ij}, b_{ij}$ en términos de la primera y segunda forma fundamental junto con sus respectivas derivadas.
En efecto, Considerando el producto interno de las tres primeras relaciones (3.1, 3.2 y 3.3) con el vector normal N y utilizando el hecho de que $r_u.N = 0, r_v.N = 0$ se obtiene:

$$a_{11} = e, \quad a_{12} = f, \quad a_{22} = g. \tag{3.6}$$

Entonces las tres primeras ecuaciones (3.1,3.2 y 3.3) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + eN, && (3.7)\\ r_{uv} &= \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + fN, && (3.8)\\ r_{vv} &= \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + gN. && (3.9) \end{aligned}$$

Para determinar los coeficientes b_{ij}, primero se analizarán algunas relaciones importantes.

Dado que $E = r_u.r_u$, entonces derivando nuevamente con respecto a u, se tiene

$$E_u = 2r_{uu}.r_u. \tag{3.10}$$

De la misma manera si se deriva con respecto a v, se tiene

$$E_v = 2r_{uv}.r_u. \tag{3.11}$$

Ahora, si se deriva con respecto a u y v a la ecuación $G = r_v.r_v$, se obtienen las ecuaciones:

$$G_u = 2r_{uv}.r_v \tag{3.12}$$

$$G_v = 2r_{vv}.r_v. \tag{3.13}$$

Similarmente, como $F = r_u.r_v$, entonces derivando con respecto a u y con respecto a v, utilizando las ecuaciones anteriores(3.11 y 3.12) y reemplazándolas, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$F_u = r_{uu}.r_v + \frac{1}{2}E_v \tag{3.14}$$

$$F_v = r_u.r_{vv} + \frac{1}{2}G_u. \tag{3.15}$$

Regresando nuevamente a la ecuación (3.1), se tiene

$$r_{uu} = \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + eN, \tag{3.16}$$

multiplicando internamente por r_u, y reemplazando los respectivos valores de $E = r_u.r_u,\ F = r_u.r_v,\ r_u.N = 0$ y el valor de la ecuación (3.10) en la ecuación anterior (3.16), se tiene

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2}E_u. \tag{3.17}$$

De una manera similar, si se multiplica (3.16) por r_v, y utilizando $F = r_u.r_v, G = r_v.r_v, r_v.N = 0$ y la ecuación (3.14), se tiene la siguiente ecuación

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2}E_v, \tag{3.18}$$

obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \frac{1}{2}E_u \\
\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= F_u - \frac{1}{2}E_v \\
\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \frac{1}{2}E_v \\
\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \frac{1}{2}G_u \\
\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= F_v - \frac{1}{2}G_u \\
\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \frac{1}{2}G_v \\
b_{11}E + b_{12}F &= -e \qquad (3.19) \\
b_{11}F + b_{12}G &= -f \qquad (3.20) \\
b_{21}E + b_{22}F &= -f \qquad (3.21) \\
b_{21}F + b_{22}G &= -g. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Ahora, de las cuatro últimas ecuaciones anteriores (3.19,3.20,3.21,3.22), resolviendo el sistema para hallar los valores de $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \qquad (3.23) \\
b_{12} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \qquad (3.24) \\
b_{21} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \qquad (3.25) \\
b_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Reemplazando estos valores en (3.4 y 3.5) y haciendo $H^2 = |r_u \times r_v|^2 = EG - F^2$, se tiene que las ecuaciones de Weingarten son:

$$
\begin{aligned}
N_u &= \frac{fF - eG}{H^2} r_u + \frac{eF - fE}{H^2} r_v \qquad (3.27) \\
N_v &= \frac{gF - fG}{H^2} r_u + \frac{fF - gE}{H^2} r_v. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Por otra parte, los símbolos de Christoffel se obtienen con las siguientes identidades:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \tag{3.29}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \tag{3.30}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \tag{3.31}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \tag{3.32}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \tag{3.33}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \tag{3.34}$$

Observación 7. Observe que aquí los símbolos de Christoffel son seis, pero para una superficie bidimensional son ocho. En efecto, puesto que $r_{uv} = r_{vu}$ entonces se tiene

$$\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} \quad \text{y} \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}.$$

Es decir, los símbolos de Christoffel son simétricos con respecto a los índices inferiores.

3.1.1 Curvatura Gaussiana en términos de las formas fundamentales

---

A continuación se obtendrá la curvatura Gaussiana en términos de la primera y segunda forma fundamental.

Anteriormente se han determinado los coeficientes $b_{ij},\ i,j = 1,2$, en términos de la primera y segunda forma fundamental, entonces reemplazando en la matriz B_p de la definición (5), se tiene que la curvatura Gaussiana está dada por

$$K = det(B_p) = \begin{vmatrix} \dfrac{fF - eG}{EG - F^2} & \dfrac{eF - fE}{EG - F^2} \\ \\ \dfrac{gF - fG}{EG - F^2} & \dfrac{fF - gE}{EG - F^2} \end{vmatrix}$$

desarrollando el determinante, se tiene finalmente que la curvatura Gaussiana está dada por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{3.35}$$

que en términos de E, F, G será:

$$K = \frac{1}{H}\left[\left(\frac{H}{E}\Gamma_{11}^2\right)_v - \left(\frac{H}{E}\Gamma_{12}^2\right)_u\right]. \tag{3.36}$$

3.1.2 Ecuaciones de Mainardi-Codazzi

A continuación se deducen las ecuaciones de Mainardi-Codazzi utilizando las condiciones de compatibilidad $(r_{uu})_v = (r_{uv})_u$ y $(r_{uv})_v = (r_{vv})_u$ aplicadas al sistema lineal de Gauss (3.1, 3.2 y 3.3).
Primero, utilizando la condición $(r_{uu})_v = (r_{uv})_u$, se tiene,
$(\Gamma_{11}^1)_v r_u + \Gamma_{11}^1 r_{vu} + (\Gamma_{11}^2)_v r_v + \Gamma_{11}^2 r_{vv} + e_v N + eN_v = (\Gamma_{12}^1)_u r_u + \Gamma_{12}^1 r_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u r_v + \Gamma_{12}^2 r_{uv} + f_u N + fN_u$
reemplazando los valores correspondientes de las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9) se tiene

$$\begin{aligned}&[(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u]r_u + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)(\Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + fN) + [(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u]r_v + \Gamma_{11}^2 \\ &(\Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + gN) - \Gamma_{12}^1(\Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + eN) + (e_v - f_u)N + eN_v - fN_u = 0\end{aligned} \tag{3.37}$$

En la ecuación anterior (3.37), se multiplica por el vector normal unitario N obteniendo así

$$(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)f + \Gamma_{11}^2 g - \Gamma_{12}^1 e + e_v - f_u = 0$$

ordenando algunos términos finalmente se obtiene

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \tag{3.38}$$

de una manera idéntica, multiplicando (3.37) por $r_u/||r_u||^2$,

$$(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + e\left(\frac{gF - fG}{H^2}\right) - f\left(\frac{fF - eG}{H^2}\right) = 0$$

efectuando algunas operaciones algebraicas se tiene

$$K = \frac{(\Gamma^1_{12})_u - (\Gamma^1_{11})_v - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12}}{F}, \tag{3.39}$$

por último, multiplicando (3.37) por $r_v/||r_v||^2$,

$$(\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12})\Gamma^2_{12} + (\Gamma^2_{11})_v - (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + e\left(\frac{fF - gE}{H^2}\right) - f\left(\frac{eF - fE}{H^2}\right) = 0$$

entonces reordenando la ecuación y operando se obtiene finalmente:

$$K = -\frac{(\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}}{E}. \tag{3.40}$$

Por otro lado, utilizando la condición $(r_{uv})_v = (r_{vv})_u$, se tiene
$(\Gamma^1_{12})_v r_u + \Gamma^1_{12} r_{vu} + (\Gamma^2_{12})_v r_v + \Gamma^2_{12} r_{vv} + f_v N + f N_v = (\Gamma^1_{22})_u r_u + \Gamma^1_{22} r_{uu} + (\Gamma^2_{22})_u r_v + \Gamma^2_{22} r_{uv} + g_u N + g N_u$
reemplazando los valores correspondientes de las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9) y ordenando la ecuación se tiene

$$\begin{aligned}&[(\Gamma^1_{12})_v - (\Gamma^1_{22})_u]r_u + (\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})(\Gamma^1_{12} r_u + \Gamma^2_{12} r_v + fN) + [(\Gamma^2_{12})_v - (\Gamma^2_{22})_u]r_v + \Gamma^2_{12}\\ &(\Gamma^1_{22} r_u + \Gamma^2_{22} r_v + gN) - \Gamma^1_{22}(\Gamma^1_{11} r_u + \Gamma^2_{11} r_v + eN) + (f_v - g_u)N + fN_v - gN_u = 0\end{aligned} \tag{3.41}$$

multiplicando la ecuación anterior (3.41) por N, se tiene

$$(\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})f + \Gamma^2_{12} g - \Gamma^1_{22} e + f_v - g_u = 0$$

ordenando la ecuación se obtiene

$$f_v - g_u = e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12}, \tag{3.42}$$

de igual manera, multiplicando (3.41) por $r_u/||r_u||^2$

$$(\Gamma^1_{12})_v - (\Gamma^1_{22})_u + (\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + f\left(\frac{gF - fG}{H^2}\right) - g\left(\frac{fF - eG}{H^2}\right) = 0$$

ordenando la ecuación y simplificando algunos términos, se obtiene

$$K = \frac{(\Gamma^1_{22})_u - (\Gamma^1_{12})_v + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11}}{G}, \tag{3.43}$$

de la misma manera, multiplicando (3.41) por $r_v/||r_v||^2$

$$(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 + f\left(\frac{fF - gE}{H^2}\right) - g\left(\frac{eF - fE}{H^2}\right) = 0$$

ordenando y simplificando algunos términos se tiene

$$K = -\frac{(\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2}{F}. \tag{3.44}$$

las ecuaciones (3.38) y (3.42) son conocidas como *ecuaciones de Mainardi-codazzi* y son equivalentes al siguiente sistema:

$$\left(\frac{e}{H}\right)_v - \left(\frac{f}{H}\right)_u + \frac{e}{H}\Gamma_{22}^2 - 2\frac{f}{H}\Gamma_{12}^2 + \frac{g}{H}\Gamma_{11}^2 = 0 \tag{3.45}$$

$$\left(\frac{g}{H}\right)_u - \left(\frac{f}{H}\right)_v + \frac{e}{H}\Gamma_{22}^1 - 2\frac{f}{H}\Gamma_{12}^1 + \frac{g}{H}\Gamma_{11}^1 = 0. \tag{3.46}$$

Con estos resultados ya se puede garantizar la existencia de una superficie que tenga como coeficientes de la primera y segunda forma fundamental a los expuestos anteriormente.

Teorema 1 (Teorema fundamental de la teoría local de superficies)**.** *Sean E, F, G, e, f, g funciones reales diferenciables definidas en un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, tales que $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$. Si las funciones satisfacen las ecuaciones de Gauss y Mainardi-Codazzi, entonces*

1. *Existe una superficie parametrizada regular $r : U \to \mathbb{R}^3$ tal que las funciones E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental y e, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental.*

2. *Si r y $\overline{r}$ son dos superficies satisfaciendo el item anterior entonces, existe un movimiento rígido F de R^3 tal que $\overline{r} = Fo r$*

Demostración. Ver demostración en [Avendaño, 2006]. ■

Ecuaciones de Mainardi-Codazzi para superficies hiperbólicas

Antes de saber lo que ocurre con las ecuaciones de Mainardi-Codazzi cuando la superficie tiene curvatura Gaussiana negativa, se enunciará una proposición que se encuentra en la página 254 del libro [Santamaria et al., 2008].

Proposición 8. *Una condición necesaria y suficiente para que las curvas coordenadas de una parametrización en un entorno de un punto hiperbólico sean asintóticas es que* $e = g = 0$.

Demostración. Ver [Santamaria et al., 2008]. ■

Si la curvatura Gaussiana de S es negativa, esto es, si S es una superficie hiperbólica, entonces las líneas asintóticas en S se pueden tomar en forma de curvas paramétricas. Entonces $e = g = 0$ y las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (3.45 y 3.46) se reducen a,

$$\left(\frac{f}{H}\right)_u + 2\Gamma_{12}^2 \frac{f}{H} = 0, \quad \left(\frac{f}{H}\right)_v + 2\Gamma_{12}^1 \frac{f}{H} = 0 \tag{3.47}$$

mientras que la curvatura Gaussiana (3.35) se reduce a:

$$K = -\frac{f^2}{H^2} := -\frac{1}{\rho^2}, \tag{3.48}$$

donde $H^2 = EG - F^2$.

El ángulo entre las curvas paramétricas es dado por la ecuación (2.2), pero reemplazando los valores de la segunda forma fundamental y utilizando $H^2 = EG - F^2$, se obtiene

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{H}{\sqrt{EG}} \tag{3.49}$$

y como $E, G > 0$ (ver observación 6), se puede tomar sin pérdida de generalidad,

$$E = \rho^2 a^2, \quad G = \rho^2 b^2, \tag{3.50}$$

así, la primera y segunda forma fundamental (2.3 y 2.5) se reducen a

$$I(dr) = \rho^2(a^2du^2 + 2ab\cos\omega dudv + b^2dv^2) \tag{3.51}$$

$$II(dr) = 2\rho ab \operatorname{sen}\omega dudv \tag{3.52}$$

Las *ecuaciones de Mainardi-Codazzi* (3.38 y 3.42) para una superficie hiperbólica se reducen a

$$a_v + \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a - \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b\cos\omega = 0 \tag{3.53}$$

$$b_u + \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b - \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a\cos\omega = 0 \tag{3.54}$$

mientras que la representación de Gauss (3.36) se convierte en

$$\omega_{uv} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_u}{\rho}\frac{b}{a}\operatorname{sen}\omega\right)_u + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\frac{a}{b}\operatorname{sen}\omega\right)_v - ab\operatorname{sen}\omega = 0. \tag{3.55}$$

Ecuaciones de Mainardi-Codazzi para superficies pseudoesféricas

A continuación se deduce que las ecuaciones de Gauss-Mainardi-Codazzi (3.53,3.54 y 3.55) se reducen simplemente a la ecuación de Sine-Gordon.
En el caso particular, cuando la curvatura Gaussiana $K = -1/\rho^2$ es una constante negativa, la superficie S es llamada *superficie pseudoesférica* y las ecuaciones de Mainardi (3.53) y Codazzi (3.54), muestran que $a = a(u)$ y que $b = b(v)$, pues $\rho_u = 0$ y $\rho_v = 0$. Si S es ahora parametrizada por la longitud de arco a lo largo de las líneas asintóticas(correspondiente a la transformación $du \to du' = \sqrt{E(u)}du,\ dv \to dv' = \sqrt{G(v)}dv$), entonces las formas fundamentales (3.51 y 3.52) se convierten en:

$$I(dr) = du^2 + 2\cos\omega du dv + dv^2 \tag{3.56}$$

$$II(dr) = \frac{2}{\rho}\operatorname{sen}\omega du dv \tag{3.57}$$

como $\rho_u = 0,\ \ \rho_v = 0$ y además $\rho^2 ab = 1$, entonces la ecuación (3.55) se reduce a la célebre *ecuación de Sine-Gordon*

$$\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2}\operatorname{sen}\omega. \tag{3.58}$$

Por otro lado, calculando los símbolos de Christoffel de acuerdo a las ecuaciones (3.29-3.34) y utilizando el hecho de que $E = \rho^2 a^2 = 1,\ F = \cos\omega,\ G = \rho^2 b^2 = 1,\ e = 0,\ f = \operatorname{sen}\omega/\rho,\ g = 0$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1} &= \omega_u \cot\omega, \\
\Gamma_{11}^{2} &= -\omega_u \csc\omega, \\
\Gamma_{12}^{1} &= 0, \\
\Gamma_{12}^{2} &= 0, \\
\Gamma_{22}^{1} &= -\omega_v \csc\omega, \\
\Gamma_{22}^{2} &= \omega_v \cot\omega.
\end{aligned}
$$

Entonces las *ecuaciones de Gauss* (3.1,3.2 y 3.3) quedan expresadas como

$$
r_{uu} = \omega_u \cot\omega \; r_u - \omega_u \csc\omega \; r_v, \tag{3.59}
$$

$$
r_{uv} = \frac{1}{\rho} \operatorname{sen}\omega \; N, \tag{3.60}
$$

$$
r_{vv} = -\omega_v \csc\omega \; r_u + \omega_v \cot\omega \; r_v. \tag{3.61}
$$

Ahora, si se utilizan las ecuaciones (3.23-3.26) y se reemplazan en las ecuaciones (3.4 y 3.5) se obtiene

$$
N_u = \frac{1}{\rho} \cot\omega \; r_u - \frac{1}{\rho} \csc\omega \; r_v, \tag{3.62}
$$

$$
N_v = -\frac{1}{\rho} \csc\omega \; r_u + \frac{1}{\rho} \cot\omega \; r_v, \tag{3.63}
$$

que son las *ecuaciones de Weingarten* expresadas en otros términos.

3.2 Transformación de Bäcklund para la ecuación de Sine-Gordon

Utilizando la transformada de Bäcklund y considerando una superficie pseudoesférica inicial S, un punto p de la superficie y un segmento de línea pp' de longitud constante y tangencial a S en p, se obtiene otra superficie S' que tiene la misma curvatura Gaussiana en el punto $p' \in S'$

que la superficie inicial S. Si se realiza para S' el mismo procedimiento descrito nuevamente, se obtiene una superficie S'' y así sucesivamente se puede generar una sucesión de superficies pseudoesféricas con la misma curvatura Gaussiana que la superficie inicial S.
Sea S una superficie con curvatura Gaussiana $K = -1/\rho^2$ y con el vector de posición genérico $r = r(u, v)$, donde u, v corresponden a la parametrización por la longitud de arco a lo largo de líneas asintóticas. En esta parametrización, r_u, r_v y N son todos vectores unitarios, pero r_u y r_v no son ortogonales. En consecuencia, resulta conveniente introducir vectores ortonormales A, B, C de la siguiente manera

$$A = r_u, \quad B = -r_u \times N = -r_u \times \frac{r_u \times r_v}{\operatorname{sen}\omega} = \csc\omega r_v - \cot\omega r_u, \quad C = N. \tag{3.64}$$

Las ecuaciones de Gauss-Weingarten (3.59)-(3.63), pueden ser usadas ahora para obtener expresiones para las derivadas de A, B y C con respecto a u y v.
En efecto:

$$\begin{aligned}
A &= r_u \\
A_u &= r_{uu} \\
A_u &= \omega_u \cot\omega r_u - \omega_u \csc\omega r_v \\
A_u &= \omega_u(\cot\omega r_u - \csc\omega r_v) \\
A_u &= -\omega B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \csc\omega r_v - \cot\omega r_u \\
B_u &= -\csc\omega\cot\omega\omega_u r_v + \csc\omega r_{vu} + \csc^2\omega\omega_u r_u - \cot\omega r_{uu} \\
B_u &= -\csc\omega\cot\omega\omega_u r_v + \csc\omega r_{vu} + \csc^2\omega\omega_u r_u - \cot\omega(\omega_u\cot\omega r_u - \omega_u\csc\omega r_v) \\
B_u &= -\csc\omega\cot\omega\omega_u r_v + \frac{1}{\rho}N + \csc^2\omega\omega_u r_u - \cot^2\omega\omega_u r_u + \csc\omega\cot\omega\omega_u r_v \\
B_u &= (\csc^2\omega - \cot^2\omega)(\omega_u r_u) + \frac{1}{\rho}C \\
B_u &= \omega_u A + \frac{1}{\rho}C
\end{aligned}$$

$$C = N$$
$$C_u = N_u$$
$$C_u = \frac{1}{\rho}\cot\omega r_u - \frac{1}{\rho}\csc\omega r_v$$
$$C_u = \frac{1}{\rho}(\cot\omega r_u - \csc\omega r_v)$$
$$C_u = -\frac{1}{\rho}B$$

$$A = r_u$$
$$A_v = r_{uv}$$
$$A_v = \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega N$$
$$A_v = \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega C$$

$$B = \csc\omega r_v - \cot\omega r_u$$
$$B_v = -\csc\omega\cot\omega\omega_v r_v + \csc\omega r_{vv} + \csc^2\omega\omega_v r_u - \cot\omega r_{uv}$$
$$B_v = -\csc\omega\cot\omega\omega_v r_v + \csc\omega(-\omega_v\csc\omega r_u + \omega_v\cot\omega r_v) + \csc^2\omega\omega_v r_u - \cot\omega(\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega N)$$
$$B_v = -\csc\omega\cot\omega\omega_v r_v - \csc^2\omega\omega_v r_u + \csc\omega\cot\omega\omega_v r_v + \csc^2\omega\omega_v r_u - \frac{1}{\rho}\cos\omega N$$
$$B_v = -\frac{1}{\rho}\cos\omega C$$

$$
\begin{aligned}
C &= N \\
C_v &= N_v \\
C_v &= -\frac{1}{\rho} r_u \csc \omega r_u + \frac{1}{\rho} \cot \omega r_v \\
C_v &= -\frac{1}{\rho} r_u \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} + \frac{1}{\rho} \cot \omega r_v \\
C_v &= -\frac{1}{\rho} r_u \frac{\operatorname{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega}{\operatorname{sen} \omega} + \frac{1}{\rho} \cot \omega r_v \\
C_v &= -\frac{1}{\rho} r_u (\operatorname{sen} \omega + \frac{\cos^2 \omega}{\operatorname{sen} \omega}) + \frac{1}{\rho} \cot \omega r_v \\
C_v &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{sen} \omega r_u - \frac{1}{\rho} \frac{\cos^2 \omega}{\operatorname{sen} \omega} r_u + \frac{1}{\rho} \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} r_v \\
C_v &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{sen} \omega r_u + \frac{1}{\rho} \cos \omega (\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} r_v - \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} r_u) \\
C_v &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{sen} \omega r_u + \frac{1}{\rho} \cos \omega (\csc \omega r_v - \cot \omega r_u) \\
C_v &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{sen} \omega A + \frac{1}{\rho} \cos \omega B
\end{aligned}
$$

obteniendo finalmente el siguiente sistema de ecuaciones

$$
\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_u & 0 \\ \omega_u & 0 & 1/\rho \\ 0 & -1/\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \tag{3.65}
$$

$$
\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1/\rho) \operatorname{sen} \omega \\ 0 & 0 & -(1/\rho) \cos \omega \\ -(1/\rho) \operatorname{sen} \omega & (1/\rho) \cos \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \tag{3.66}
$$

Proposición 9. *El sistema lineal anterior (3.65 y 3.66) es compatible si y solamente si ω satisface la ecuación de Sine-Gordon (3.58).*

Demostración. En efecto, tomando la primera ecuación del sistema (3.65)

$$
A_u = -\omega_u B,
$$

y derivando ahora con respecto a v se tiene la ecuación

$$A_{uv} = -\omega_{uv}B - \omega_u B. \tag{3.67}$$

De la misma manera, tomando la primera ecuación del sistema (3.66)

$$A_v = \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega C,$$

y derivando ahora con respecto a u se tiene la ecuación

$$A_{vu} = \frac{1}{\rho}\cos\omega\omega_u C + \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega C_u. \tag{3.68}$$

Ahora, las ecuaciones (3.67) y (3.68) son iguales si y solamente si se aplica la condición de las derivadas cruzadas $A_{uv} = A_{vu}$, e igualando se tiene

$$-\omega_{uv}B - \omega_u B_v = \frac{1}{\rho}\cos\omega\omega_u C + \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega C_u,$$

reemplazando los valores de $B_v = -\frac{1}{\rho}\cos\omega C$ y $C_u = -\frac{1}{\rho}B$ en la ecuación anterior, se tiene

$$-\omega_{uv}B - \omega_u(-\frac{1}{\rho}\cos\omega C) = \frac{1}{\rho}\cos\omega\omega_u C + \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega(-\frac{1}{\rho}B)$$

multiplicando internamente por B y sabiendo que $B.B = 1, B.C = 0$, se tiene

$$-\omega_{uv} = -\frac{1}{\rho^2}\operatorname{sen}\omega$$

que es equivalente a la *ecuacion de Sine-Gordon* dada por (3.58).
Se hace el mismo procedimiento tomando las demás ecuaciones y aplicando las condiciones $B_{uv} = B_{vu}$ y $C_{uv} = C_{vu}$. Concluyendo así la demostración. ■

La nueva superficie pseudoesférica S' con el vector de posición r' es

$$r' = r + L\cos\phi A + L\operatorname{sen}\phi B, \tag{3.69}$$

donde $L = |r' - r|$ es constante. Aquí $\phi(u, v)$ es limitado por el requisito que en S', como en S, las coordenadas u, v corresponden a la parametrización a lo largo de líneas asintóticas.

Una condición necesaria para este caso es que S' tenga la primera forma fundamental del tipo (3.56). En particular, esto requiere que

$$r'_u.r'_u = 1, \quad r'_v.r'_v = 1. \tag{3.70}$$

Derivando (3.69) con respecto a u y utilizando las relaciones de (3.65)

$$\begin{aligned}
r'_u &= r_u + L(-\operatorname{sen}\phi)\phi_u A + L\cos\phi(-\omega_u B) + L\cos\phi\phi_u B + L\operatorname{sen}\phi(\omega_u A + \frac{1}{\rho}C) \\
r'_u &= A - L\operatorname{sen}\phi\phi_u A - L\cos\phi\omega_u B + L\cos\phi\phi_u B + L\operatorname{sen}\phi\omega_u A + \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi C \\
r'_u &= [1 - L(\phi_u - \omega_u)\operatorname{sen}\phi]A + L(\phi_u - \omega_u)\cos\phi B + \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi C \qquad (3.71)
\end{aligned}$$

de igual manera, derivando (3.69) con respecto a v y utilizando (3.66)

$$\begin{aligned}
r'_v &= r_v + L(-\operatorname{sen}\phi)\phi_v A + L\cos\phi(\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega C) + L\cos\phi\phi_v B + L\operatorname{sen}\phi(\frac{-1}{\rho}\cos\omega C) \\
r'_v &= \cos\omega A + \operatorname{sen}\omega B - L\phi_v\operatorname{sen}\phi A + L\phi_v\cos\phi B + \frac{L}{\rho}(\operatorname{sen}\omega\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\cos\omega)C \\
r'_v &= (\cos\omega - L\phi_v\operatorname{sen}\phi)A + (\operatorname{sen}\omega + L\phi_v\cos\phi)B + \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}(\omega - \phi)C. \qquad (3.72)
\end{aligned}$$

sustituyendo la ecuación (3.71) en la condición (3.70) y operando el producto interno, se tiene

$$\begin{aligned}
[1 - L(\phi_u - \omega_u)\operatorname{sen}\phi]^2 + [L(\phi_u - \omega_u)\cos\phi]^2 + \left[\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi\right]^2 &= 1 \\
1 - 2L(\phi_u - \omega_u)\operatorname{sen}\phi + L^2(\phi_u - \omega_u)^2\operatorname{sen}^2\phi + L^2(\phi_u - \omega_u)^2\cos^2\phi + \frac{L^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2\phi &= 1 \\
-2L(\phi_u - \omega_u)\operatorname{sen}\phi + L^2(\phi_u - \omega_u)^2 + \frac{L^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2\phi &= 0 \\
L^2(\phi_u - \omega_u)^2 - 2L(\phi_u - \omega_u)\operatorname{sen}\phi &= -\frac{L^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2\phi
\end{aligned}$$

sumando $\operatorname{sen}^2\phi$ a ambos miembros de la ecuación anterior, se tiene

$$L^2(\phi_u - \omega_u)^2 - 2L(\phi_u - \omega_u)\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}^2\phi = \operatorname{sen}^2\phi - \frac{L^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2\phi$$

$$[L(\phi_u - \omega_u) - \operatorname{sen}\phi]^2 = (1 - \frac{L^2}{\rho^2})\operatorname{sen}^2\phi$$

$$
\begin{aligned}
L(\phi_u - \omega_u) - \operatorname{sen}\phi &= \pm\sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho}}\operatorname{sen}\phi \\
L(\phi_u - \omega_u) &= \operatorname{sen}\phi \pm \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}}\operatorname{sen}\phi \\
\phi_u - \omega_u &= \frac{1}{L}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}}\right)\operatorname{sen}\phi
\end{aligned}
$$

para obtener finalmente

$$
\phi_u = \omega_u + \frac{1}{L}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}}\right)\operatorname{sen}\phi \tag{3.73}
$$

De la misma manera, para la segunda ecuación de (3.70) operando el producto interno, se tiene

$$
(\cos\omega - L\phi_v \operatorname{sen}\phi)^2 + (\operatorname{sen}\omega + L\phi_v\cos\phi)^2 + \frac{L^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2(\omega - \phi) = 1
$$

$\cos^2\omega - 2L\cos\omega\operatorname{sen}\phi\phi_v + L^2\phi_v^2\operatorname{sen}^2\phi + \operatorname{sen}^2\omega + 2L\phi_v\operatorname{sen}\omega\cos\phi + L^2\phi_v^2\cos^2\phi + \frac{L^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2(\omega - \phi) = 1$

utilizando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\omega + \cos^2\omega = 1$, y cancelando en ambos lados de la ecuación anterior

$$
2L(\operatorname{sen}\omega\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\cos\omega)\phi_v + L^2\phi_v^2(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi) + \frac{L^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2(\omega - \phi) = 0
$$

$$
2L\operatorname{sen}(\omega - \phi)\phi_v + L^2\phi_v^2 + \frac{L^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2(\omega - \rho) = 0
$$

$$
L^2\phi_v^2 + 2L\operatorname{sen}(\omega - \phi)\phi_v = -\frac{L^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2(\omega - \phi)
$$

sumando $\operatorname{sen}^2(\omega - \phi)$ a ambos miembros de la ecuación anterior

$$
L^2\phi_v^2 + 2L\phi_v\operatorname{sen}(\omega - \phi) + \operatorname{sen}^2(\omega - \phi) = \operatorname{sen}^2(\omega - \phi) - \frac{L^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2(\omega - \phi)
$$

$$
\begin{aligned}
[L\phi_v + \operatorname{sen}(\omega-\phi)]^2 &= (1-\frac{L^2}{\rho^2})\operatorname{sen}^2(\omega-\phi) \\
L\phi_v + \operatorname{sen}(\omega-\phi) &= \pm\sqrt{1-\frac{L^2}{\rho^2}}\operatorname{sen}(\omega-\phi) \\
L\phi_v &= \left(1\pm\sqrt{1-\frac{L^2}{\rho^2}}\right)\operatorname{sen}(\omega-\phi) \\
\phi_v &= \frac{1}{L}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{L^2}{\rho^2}}\right)\operatorname{sen}(\omega-\phi)
\end{aligned}
$$

utilizando $\operatorname{sen}(\omega-\phi) = -\operatorname{sen}(\phi-\omega)$,, se tiene

$$
\phi_v = \frac{1}{L}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{L^2}{\rho^2}}\right)\operatorname{sen}(\phi-\omega). \tag{3.74}
$$

Estableciendo convenientemente

$$
\beta = \frac{\rho}{L}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{L^2}{\rho^2}}\right) = \frac{L}{\rho}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{L^2}{\rho^2}}\right)^{-1}
$$

y sustituyendo en las relaciones (3.73) y (3.74), se obtiene

$$
\phi_u = \omega_u + \frac{\beta}{\rho}\operatorname{sen}\phi \tag{3.75}
$$

$$
\phi_v = \frac{1}{\beta\rho}\operatorname{sen}(\phi-\omega) \tag{3.76}
$$

estableciendo así los requisitos necesarios para el ángulo ϕ, con el fin de que S' sea una superficie pseudoesférica parametrizada por la longitud de arco a lo largo de líneas asintóticas. Por otra parte, estas ecuaciones son compatibles con la ecuación de Sine-Gordon (3.58). Reemplazando (3.75) en (3.71), se tiene

$$
r'_u = [1 - L(\omega_u + \frac{\beta}{\rho}\operatorname{sen}\phi - \omega_u)\operatorname{sen}\phi]A + L(\omega_u + \frac{\beta}{\rho}\operatorname{sen}\phi - \omega_u)\cos\phi B + \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi C
$$

cancelando se obtiene

$$
r'_u = \left(1 - \frac{L}{\rho}\beta\operatorname{sen}^2\phi\right)A + \frac{L}{\rho}\beta\operatorname{sen}\phi\cos\phi B + \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi C. \tag{3.77}
$$

De la misma manera, reemplazando (3.76) en (3.72) y utilizando $\operatorname{sen}(\omega-\phi)=-\operatorname{sen}(\phi-\omega)$ se obtiene

$$r'_v=[\cos\omega-\frac{L}{\beta\rho}\operatorname{sen}(\phi-\omega)]A+[\operatorname{sen}\omega+\frac{L}{\beta\rho}\operatorname{sen}(\phi-\omega)]B-\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}(\phi-\omega)C \tag{3.78}$$

tal que $r'_u.r'_v=\cos(2\phi-\omega)$ y la primera forma fundamental de S' se convierte en

$$I(dr')=du^2+2\cos(2\phi-\omega)dudv+dv^2 \tag{3.79}$$

Además, la normal unitaria N' de S' es dada por

$$N'=\frac{r'_u\times r'_v}{|r'_u\times r'_v|}=-\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi A+\frac{L}{\rho}\cos\phi B+(1-\frac{L\beta}{\rho})C. \tag{3.80}$$

Utilizando la ecuación (3.69) y multiplicando $(r-r').N'$, se tiene

$$-\frac{L^2}{\rho}\cos\phi\operatorname{sen}\phi+\frac{L^2}{\rho}\cos\phi\operatorname{sen}\phi+0=0.$$

En consecuencia, el vector $r-r'$ que une los puntos correspondientes en S y S', es tangencial a S'. Por otra parte, derivando la ecuación (3.80) con respecto a u, se tiene

$$N'_u=-\frac{L}{\rho}\cos\phi\phi_uA-\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi A_u-\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi\phi_uB+\frac{L}{\rho}\cos\phi B_u+\left(1-\frac{L\beta}{\rho}\right)C_u$$

$$\begin{aligned}N'_u &= -\frac{L}{\rho}\cos\phi(\omega_u+\frac{\beta}{\rho}\operatorname{sen}\phi)A-\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi(-\omega_uB)-\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi(\omega_u+\frac{\beta}{\rho}\operatorname{sen}\phi)B\\ &\quad+\frac{L}{\rho}\cos\phi(\omega_uA+\frac{1}{\rho}C)+(1-\frac{L\beta}{\rho})(-\frac{1}{\rho}B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N'_u &= -\frac{L}{\rho}\cos\phi\omega_uA-\frac{L\beta}{\rho^2}\operatorname{sen}\phi\cos\phi A+\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi\omega_uB-\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi\omega_uB-\frac{L\beta}{\rho^2}\operatorname{sen}^2\phi B\\ &\quad+\frac{L}{\rho}\cos\phi\omega_uA+\frac{L}{\rho^2}\cos\phi C-\frac{1}{\rho}B+\frac{L\beta}{\rho^2}B\end{aligned}$$

$$N'_u=-\frac{L\beta}{\rho^2}\operatorname{sen}\phi\cos\phi A+\frac{L\beta}{\rho^2}(1-\operatorname{sen}^2\phi)B-\frac{1}{\rho}B+\frac{L}{\rho^2}\cos\phi C$$

para finalmente obtener

$$N'_u = -\frac{L\beta}{\rho^2}\operatorname{sen}\phi\cos\phi A + (\frac{L\beta}{\rho^2}\cos^2\phi - \frac{1}{\rho})B + \frac{L}{\rho^2}\cos\phi C. \tag{3.81}$$

De la misma manera, derivando N' con respecto a v,

$$N'_v = -\frac{L}{\rho}\cos\phi\phi_v A - \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi A_v - \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi\phi_v B + \frac{L}{\rho}\cos\phi B_v + (1 - \frac{L\beta}{\rho})C_v$$

$$\begin{aligned} N'_v &= -\frac{L}{\rho}\cos\phi(\frac{1}{\beta\rho}\operatorname{sen}(\phi-\omega))A - \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi(\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega C) - \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi(\frac{1}{\rho\beta}\operatorname{sen}(\phi-\omega))B \\ &\quad +\frac{L}{\rho}\cos\phi(-\frac{1}{\rho}\cos\omega C) + (1-\frac{L\beta}{\rho})(-\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega A + \frac{1}{\rho}\cos\omega B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'_v &= -\frac{L}{\beta\rho^2}\cos\phi\operatorname{sen}(\phi-\omega)A - \frac{L}{\rho^2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega C - \frac{L}{\beta\rho^2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}(\phi-\omega)B - \frac{L}{\rho^2}\cos\phi\cos\omega C \\ &\quad -\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega A + \frac{1}{\rho}\cos\omega B + \frac{L\beta}{\rho^2}\operatorname{sen}\omega A - \frac{L\beta}{\rho}\cos\omega B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'_v &= \left[\frac{L\beta}{\rho^2}\operatorname{sen}\omega - \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega - \frac{L}{\beta\rho^2}\cos\phi\operatorname{sen}(\phi-\omega)\right]A + \left[\frac{1}{\rho}\cos\omega - \frac{L\beta}{\rho}\cos\omega - \right. \\ &\quad \left.\frac{L}{\beta\rho^2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}(\phi-\omega)\right]B - \left[\frac{L}{\rho^2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega + \frac{L}{\rho^2}\cos\phi\cos\omega\right]C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'_v &= \left[\frac{1}{\rho}(\frac{L\beta}{\rho}-1)\operatorname{sen}\omega - \frac{L}{2\beta\rho^2}2\operatorname{sen}(\phi-\omega)\cos\phi\right]A + \left[\frac{1}{\rho}(1-\frac{L\beta}{\rho})\cos\omega - \right. \\ &\quad \left.\frac{L}{2\beta\rho^2}2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}(\phi-\omega)\right]B - \left[\frac{L}{\rho^2}(\cos\omega\cos\phi + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\phi)\right]C \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} N'_v &= [\frac{L}{2\rho^2\beta}\operatorname{sen}(\omega-2\phi) + \frac{1}{\rho}(1-\frac{L}{2\rho\beta})\operatorname{sen}\omega]A + [\frac{L}{2\rho^2\beta}\cos(\omega-2\phi) - \frac{1}{\rho}(1-\frac{L}{2\rho\beta})\cos\omega]B \\ &\quad -\frac{L}{\rho^2}\cos(\omega-\phi)C \end{aligned} \tag{3.82}$$

de donde se deduce que los coeficientes de la segunda forma para S' son:

$$e = r'_u.N'_u = 0, \quad f = r'_u.N'_v = r'_v.N'_u = -\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}(2\phi - \omega), \quad g = r'_v.N'_v = 0.$$

La segunda forma fundamental para S' es

$$II(dr') = \frac{2}{\rho}\operatorname{sen}(2\phi - \omega)dudv \tag{3.83}$$

y esto con la primera forma fundamental dada por (3.79) demuestran que S' es una superficie pseudoesférica parametrizada por la longitud de arco a lo largo de las líneas asintóticas.

Proposición 10. *El ángulo entre las líneas asintóticas en S' dado por*

$$\omega' = 2\phi - \omega \tag{3.84}$$

satisface la ecuación de Sine-Gordon (3.58).

Demostración. En efecto, derivando ω' con respecto a u, se tiene

$$\begin{aligned}
\omega'_u &= 2\phi_u - \omega_u \\
\omega'_u &= 2\left(\omega_u + \frac{\beta}{\rho}\operatorname{sen}\phi\right) - \omega_u \\
\omega'_u &= \omega_u + \frac{2\beta}{\rho}\operatorname{sen}\phi,
\end{aligned}$$

ahora derivando con respecto a v se tiene

$$\begin{aligned}
\omega'_{uv} &= \omega_{uv} + \frac{2\beta}{\rho}\cos\phi\phi_v \\
\omega'_{uv} &= \omega_{uv} + \frac{2\beta}{\rho}\cos\phi\left(\frac{1}{\beta\rho}\operatorname{sen}(\phi - \omega)\right) \\
\omega'_{uv} &= \frac{1}{\rho^2}\operatorname{sen}\omega + \frac{1}{\rho^2}2\cos\phi\operatorname{sen}(\phi - \omega),
\end{aligned}$$

sumando las fracciones homogéneas, se tiene

$$\omega'_{uv} = \frac{\operatorname{sen}(2\phi - \omega)}{\rho^2}$$

como $\omega' = 2\phi - \omega$, se tiene finalmente

$$\omega'_{uv} = \frac{1}{\rho^2}\operatorname{sen}\omega'. \tag{3.85}$$

■

3.2.1 Ecuaciones de la transformación de Bäcklund

Despejando ϕ de la ecuación (3.84), se tiene

$$\phi = \frac{\omega' + \omega}{2}, \tag{3.86}$$

ahora reemplazando la ecuación anterior (3.86) en las ecuaciones (3.75) y (3.76),

$$\begin{aligned}
(\frac{\omega' + \omega}{2})_u &= \omega_u + \frac{\beta}{\rho}\,\mathrm{sen}(\frac{\omega' + \omega}{2}) \\
(\frac{\omega' + \omega}{2})_v &= \frac{1}{\beta\rho}\,\mathrm{sen}(\frac{\omega' + \omega}{2} - \omega)
\end{aligned}$$

pasando a restar ω_u al otro lado, se tiene las denominadas *ecuaciones de la transformación de Bäcklund* que une las ecuaciones de Sine-gordon (3.58) y (3.85)

$$\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_u = \frac{\beta}{\rho}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \tag{3.87}$$

$$\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)_v = \frac{1}{\beta\rho}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right). \tag{3.88}$$

3.3 Superficie Pseudoesférica S'

Hasta aquí se han construido las ecuaciones que rigen la transformación de Bäcklund (3.87 y 3.88), relacionando las soluciones ω y ω' de la ecuación de Sine-Gordon (3.58). Veamos ahora cómo se relacionan las superficies pseudoesféricas.

En la ecuación (3.69) se va a reemplazar los valores de A, B y el ángulo ϕ que está en función de ω y ω'. Entonces la ecuación (3.69) se convierte en

$$r' = r + L\cos(\frac{\omega' + \omega}{2})r_u + L\,\mathrm{sen}(\frac{\omega' + \omega}{2})(\csc\omega r_v - \cot\omega r_u)$$

multiplicando y agrupando los términos se tiene

$$r' = r + [L\cos(\frac{\omega' + \omega}{2}) - L\,\mathrm{sen}(\frac{\omega' + \omega)}{2}\cot\omega]r_u + L\,\mathrm{sen}(\frac{\omega' + \omega}{2})\csc\omega r_v$$

utilizando las relaciones trigonométricas $\cot\omega = \dfrac{\cos\omega}{\mathrm{sen}\,\omega}$, $\csc\omega = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\omega}$ y reemplazándolas, la ecuación anterior se convierte en

$$r' = r + [L\cos(\frac{\omega' + \omega}{2}) - L\,\mathrm{sen}(\frac{\omega' + \omega}{2})\frac{\cos\omega}{\mathrm{sen}\,\omega}]r_u + L\,\mathrm{sen}(\frac{\omega' + \omega}{2})\frac{1}{\mathrm{sen}\,\omega}r_v$$

factorizando $\dfrac{L}{\mathrm{sen}\,\omega}$ de la ecuación anterior

$$r' = r + \frac{L}{\mathrm{sen}\,\omega}[\mathrm{sen}\,\omega\cos(\frac{\omega' + \omega}{2}) - \mathrm{sen}(\frac{\omega' + \omega}{2})\cos\omega]r_u + \frac{L}{\mathrm{sen}\,\omega}\mathrm{sen}(\frac{\omega' + \omega}{2})r_v$$

utilizando la relación trigonométrica $\mathrm{sen}\,\omega\cos(\dfrac{\omega' + \omega}{2}) - \mathrm{sen}(\dfrac{\omega' + \omega}{2})\cos\omega = \mathrm{sen}(\dfrac{\omega - \omega'}{2})$ y reemplazando en la ecuación anterior se tiene

$$r' = r + \frac{L}{\mathrm{sen}\,\omega}\mathrm{sen}(\frac{\omega - \omega'}{2})r_u + \frac{L}{\mathrm{sen}\,\omega}\mathrm{sen}(\frac{\omega' + \omega}{2})r_v$$

factorizando $\dfrac{L}{\mathrm{sen}\,\omega}$ se tiene

$$r' = r + \frac{L}{\mathrm{sen}\,\omega}[\mathrm{sen}(\frac{\omega - \omega'}{2})r_u + \mathrm{sen}(\frac{\omega + \omega'}{2})r_v] \tag{3.89}$$

que representa el vector de coordenadas de la superficie S' correspondiente a la solución ω' de la ecuación de Sine-Gordon (3.58). Además se debe recordar que ω' es obtenido mediante la transformación de Bäcklund de ω y que r es el vector de coordenadas de la superficie S.

3.4 Teorema de Permutabilidad de Bianchi

Aquí se denotarán como ω_1 y ω_2 a las soluciones obtenidas a partir de una solución ω ya conocida. A las dos ecuaciones de la transformación de Bäcklund (3.87 y 3.88) se les denotará

como $\mathbb{B}_\beta$; y como ω_i es obtenida a partir de las transformaciones de Bäcklund, entonces éstas serán denotadas como $\mathbb{B}_{\beta_i}(\omega) = \omega_i, \quad i = 1, 2$.

Sea ω una solución inicial de la ecuación de Sine-Gordon (3.58) y que ω_1 y ω_2 sean las transformaciones de Bäcklund vía $\mathbb{B}_{\beta_1}$ y $\mathbb{B}_{\beta_2}$, es decir $\omega_1 = \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)$ y $\omega_2 = \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)$. Sea $\omega_{12} = \mathbb{B}_{\beta_2(\omega_1)}$ y $\omega_{21} = \mathbb{B}_{\beta_1(\omega_2)}$, Bianchi hizo un esquema en donde se puede apreciar de una mejor manera lo señalado.

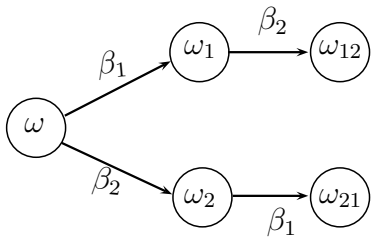


Figura 2.3(a): Diagrama de Bianchi

Ahora, se va a encontrar por construcción una solución Ω en donde se aplique la condición conmutativa $\omega_{12} = \omega_{21}$.

Como ω_1 es solución de la ecuación de Sine-Gordon, entonces satisface la ecuación (3.87), que luego de despejar $(\omega_1)_u$, se tiene:

$$(\omega_1)_u = \omega_u + \frac{2\beta_1}{\rho}\,\mathrm{sen}(\frac{\omega_1 + \omega}{2}) \tag{3.90}$$

de manera análoga despejando $(\omega_2)_u, (\omega_{12})_u, (\omega_{21})_u$ se obtienen las siguientes ecuaciones

$$(\omega_2)_u = \omega_u + \frac{2\beta_2}{\rho}\,\mathrm{sen}(\frac{\omega_2 + \omega}{2}) \tag{3.91}$$

$$(\omega_{12})_u = (\omega_1)_u + \frac{2\beta_2}{\rho}\,\mathrm{sen}(\frac{\omega_{12} + \omega_1}{2}) \tag{3.92}$$

$$(\omega_{21})_u = (\omega_2)_u + \frac{2\beta_1}{\rho}\,\mathrm{sen}(\frac{\omega_{21} + \omega_2}{2}). \tag{3.93}$$

Si se coloca

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \Omega, \tag{3.94}$$

restando las ecuaciones (3.90)-(3.91) se tiene

$$(\omega_1)_u - (\omega_2)_u = \frac{2\beta_1}{\rho}\,\mathrm{sen}(\frac{\omega_1 + \omega}{2}) - \frac{2\beta_2}{\rho}\,\mathrm{sen}(\frac{\omega_2 + \omega}{2}), \tag{3.95}$$

de la misma manera, restanto las ecuaciones (3.92)-(3.93) se obtiene

$$0 = (\omega_1)_u - (\omega_2)_u + \frac{2\beta_2}{\rho}\operatorname{sen}(\frac{\Omega+\omega_1}{2}) - \frac{2\beta_1}{\rho}\operatorname{sen}(\frac{\Omega+\omega_2}{2}) \tag{3.96}$$

sumando miembro a miembro (3.95)+(3.96)

$$\begin{aligned}(\omega_1)_u - (\omega_2)_u &= (\omega_1)_u - (\omega_2)_u + \frac{2\beta_1}{\rho}\left[\operatorname{sen}(\frac{\omega_1+\omega}{2}) - \operatorname{sen}(\frac{\Omega+\omega_2}{2})\right] \\ &\quad + \frac{2\beta_2}{\rho}\left[\operatorname{sen}(\frac{\Omega+\omega_1}{2}) - \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2+\omega}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

simplificando los términos correspondientes,

$$0 = \frac{2}{\rho}\left[\beta_1\operatorname{sen}(\frac{\omega_1+\omega}{2}) - \beta_1\operatorname{sen}(\frac{\Omega+\omega_2}{2}) + \beta_2\operatorname{sen}(\frac{\Omega+\omega_1}{2}) - \beta_2\operatorname{sen}(\frac{\omega_2+\omega}{2})\right],$$

como $\frac{2}{\rho} \neq 0$, entonces

$$0 = \beta_1\operatorname{sen}(\frac{\omega_1+\omega}{2}) - \beta_1\operatorname{sen}(\frac{\Omega+\omega_2}{2}) + \beta_2\operatorname{sen}(\frac{\Omega+\omega_1}{2}) - \beta_2\operatorname{sen}(\frac{\omega_2+\omega}{2})$$

luego

$$\beta_2\left[\operatorname{sen}(\frac{\omega_2+\omega}{2}) - \operatorname{sen}(\frac{\Omega+\omega_1}{2})\right] = \beta_1\left[\operatorname{sen}(\frac{\omega_1+\omega}{1}) - \operatorname{sen}(\frac{\Omega+\omega_2}{2})\right] \tag{3.97}$$

Haciendo

$$2n = \frac{\omega_2+\omega}{2},\ 2m = \frac{\Omega+\omega_1}{2},\ 2\overline{n} = \frac{\omega_1+\omega}{2},\ 2\overline{m} = \frac{\Omega+\omega_2}{2},$$

se obtiene que (3.97) es equivalente a

$$\beta_2[\operatorname{sen}(2n) - \operatorname{sen}(2m)] = \beta_1[\operatorname{sen}(2\overline{n}) - \operatorname{sen}(2\overline{m})]. \tag{3.98}$$

Considerando las propiedades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(n \pm m)\cos(n \mp m) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(2n) \pm \operatorname{sen}(2m)] \tag{3.99}$$

se tiene

$$\beta_2[2\operatorname{sen}(n-m)\cos(n+m)] = \beta_1[2\operatorname{sen}(\overline{n}-\overline{m})\cos(\overline{n}+\overline{m})], \tag{3.100}$$

como $n + m = \overline{n} + \overline{m}$, entonces (3.100) es equivalente a

$$\beta_2\operatorname{sen}(n-m) = \beta_1\operatorname{sen}(\overline{n}-\overline{m})$$

es decir

$$\beta_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2+\omega}{4}-\frac{\Omega+\omega_1}{4}\right)=\beta_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega}{4}-\frac{\Omega+\omega_2}{4}\right)$$

la cual es equivalente a

$$\beta_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega-\omega}{4}-\frac{\omega_2-\omega_1}{4}\right)=\beta_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega-\omega}{4}+\frac{\omega_2-\omega_1}{4}\right) \tag{3.101}$$

utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(n-m)=\operatorname{sen}(n)\cos(m)-\operatorname{sen}(m)\cos(n) \tag{3.102}$$

en la ecuación (3.101) se obtiene

$$\begin{aligned}\beta_2\left[\operatorname{sen}(\frac{\Omega-\omega}{4})\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{4})-\operatorname{sen}(\frac{\omega_2-\omega_1}{4})\cos(\frac{\Omega-\omega}{4})\right] &= \beta_1\left[\operatorname{sen}(\frac{\Omega-\omega}{4})\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{4})\right.\\ &\quad\left.+\operatorname{sen}(\frac{\omega_2-\omega_1}{4})\cos(\frac{\Omega-\omega}{4})\right]\end{aligned}$$

de donde

$$(\beta_2-\beta_1)\operatorname{sen}(\frac{\Omega-\omega}{4})\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{4})=(\beta_2+\beta_1)\operatorname{sen}(\frac{\omega_2-\omega_1}{4})\cos(\frac{\Omega-\omega}{4}) \tag{3.103}$$

la cual equivale a la siguiente expresión

$$\tan(\frac{\Omega-\omega}{4})=\frac{\beta_2+\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\tan(\frac{\omega_2-\omega_1}{4}). \tag{3.104}$$

Por consiguiente, si la condición de conmutatividad (3.94) se mantiene, entonces

$$\Omega=\omega+4\arctan\left[\frac{\beta_2+\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\tan\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{4}\right)\right] \tag{3.105}$$

De una manera análoga, partiendo de la ecuación (3.88) se tiene para ω_1 la siguiente ecuación

$$\left(\frac{\omega_1+\omega}{2}\right)_v=\frac{1}{\beta_1\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1-\omega}{2}\right)$$

despejando $(\omega_1)_v$

$$(\omega_1)_v=-\omega_v+\frac{2}{\beta_1\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1-\omega}{2}\right) \tag{3.106}$$

de igual manera despejando $(\omega_2)_v, (\omega_{12})_v, (\omega_{21})_v$ se tienen las siguientes ecuaciones

$$(\omega_2)_v = -\omega_v + \frac{2}{\beta_2\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2-\omega}{2}\right) \tag{3.107}$$

$$(\omega_{12})_v = -(\omega_1)_v + \frac{2}{\beta_2\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_{12}-\omega_1}{2}\right) \tag{3.108}$$

$$(\omega_{21})_v = -(\omega_2)_v + \frac{2}{\beta_1\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_{21}-\omega_2}{2}\right) \tag{3.109}$$

utilizando (3.94) y restando (3.106)-(3.107) se tiene

$$(\omega_1)_v - (\omega_2)_v = \frac{2}{\beta_1\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1-\omega}{2}\right) - \frac{2}{\beta_2\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2-\omega}{2}\right) \tag{3.110}$$

restando ahora (3.109)-(3.108) da como resultado

$$0 = (\omega_1)_v - (\omega_2)_v + \frac{2}{\beta_1\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega-\omega_2}{2}\right) - \frac{2}{\beta_2\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega-\omega_1}{2}\right) \tag{3.111}$$

sumando miembro a miembro (3.110)+(3.111)

$$\begin{aligned}(\omega_1)_v - (\omega_2)_v &= (\omega_1)_v - (\omega_2)_v + \frac{2}{\beta_1\rho}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1-\omega}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega-\omega_2}{2}\right)\right] \\ &\quad -\frac{2}{\beta_2\rho}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2-\omega}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega-\omega_1}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

luego, simplificando $\frac{2}{\rho} \neq 0$ y ordenando se tiene la siguiente ecuación

$$\beta_1[\operatorname{sen}(\frac{\omega_2-\omega}{2}) + \operatorname{sen}(\frac{\Omega-\omega_1}{2})] = \beta_2[\operatorname{sen}(\frac{\omega_1-\omega}{2}) + \operatorname{sen}(\frac{\Omega-\omega_2}{2})], \tag{3.112}$$

haciendo

$$2n' = \frac{\omega_2-\omega}{2},\ 2m' = \frac{\Omega-\omega_1}{2},\ 2\overline{n'} = \frac{\omega_1-\omega}{2},\ 2\overline{m'} = \frac{\Omega-\omega_2}{2}$$

y reemplazando en (3.112) se tiene:

$$\beta_1[\operatorname{sen}(2n') + \operatorname{sen}(2m')] = \beta_2[\operatorname{sen}(2\overline{n'}) + \operatorname{sen}(2\overline{m'})]$$

utilizando (3.99) se tiene

$$\beta_1[2\operatorname{sen}(n'+m')\cos(n'-m')] = \beta_2[2\operatorname{sen}(\overline{n'}+\overline{m'})\cos(\overline{n'}-\overline{m'})]$$

como $n' - m' = \overline{n'} - \overline{m'}$ simplificando se tiene la ecuación

$$\beta_1 \operatorname{sen}(n' + m') = \beta_2 \operatorname{sen}(\overline{n'} + \overline{m'}) \tag{3.113}$$

reemplazando los valores de $n', m', \overline{n'}, \overline{m'}$ en (3.113)

$$\beta_1 \operatorname{sen}(\frac{\omega_2 - \omega}{4} + \frac{\Omega - \omega_1}{4}) = \beta_2 \operatorname{sen}(\frac{\omega_1 - \omega}{4} + \frac{\Omega - \omega_2}{4})$$

que equivale a

$$\beta_1 \operatorname{sen}(\frac{\Omega - \omega}{4} + \frac{\omega_2 - \omega_1}{4}) = \beta_2 \operatorname{sen}(\frac{\Omega - \omega}{4} - \frac{\omega_2 - \omega_1}{4})$$

utilizando (3.102) se tiene:

$$\begin{aligned} \beta_1 \operatorname{sen}(\frac{\Omega - \omega}{4}) \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{4}) + \beta_1 \operatorname{sen}(\frac{\omega_2 - \omega_1}{4}) \cos(\frac{\Omega - \omega}{4}) &= \beta_2 \operatorname{sen}(\frac{\Omega - \omega}{4}) \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{4}) \\ &\quad -\beta_2 \operatorname{sen}(\frac{\omega_2 - \omega_1}{4}) \cos(\frac{\Omega - \omega}{4}) \end{aligned}$$

arreglando convenientemente se tiene

$$(\beta_1 + \beta_2) \operatorname{sen}(\frac{\omega_2 - \omega_1}{4}) \cos(\frac{\Omega - \omega}{4}) = (\beta_2 - \beta_1) \operatorname{sen}(\frac{\Omega - \omega}{4}) \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{4})$$

lo cual equivale a (3.104).

Con esto, el siguiente diagrama de Bianchi es conmutativo.

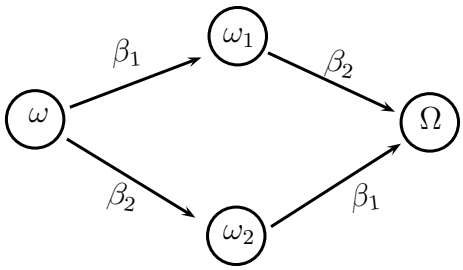


Figura 2.3(b): Diagrama conmutativo de Bianchi

Capítulo 4

Ecuación de Sine-Gordon

4.1 Ecuación de Sine-Gordon en coordenadas de líneas de curvatura

Para construir superficies correspondientes a soluciones solitón de la ecuación de Sine-Gordon, resulta más conveniente parametrizar las superficies pseudoesféricas en términos de coordenadas de curvatura.

$$x = u + v, \quad t = u - v \tag{4.1}$$

Si establecemos $\omega = 2\theta$, entonces la primera y segunda forma fundamental se convierten en

$$I = \cos^2\theta dx^2 + \operatorname{sen}^2\theta dt^2, \tag{4.2}$$

$$II = \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta\cos\theta(dx^2 - dt^2). \tag{4.3}$$

Por lo tanto, una triada ortogonal se puede introducir de acuerdo con

$$A^* = \frac{r_x}{\cos\theta}, \quad B^* = \frac{r_t}{\operatorname{sen}\theta}, \quad C^* = N \tag{4.4}$$

y las ecuaciones de Gauss-Weingarten producen

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & \theta_t & \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta \\ -\theta_t & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & \theta_x & 0 \\ -\theta_x & 0 & -\frac{1}{\rho}\cos\theta \\ 0 & \frac{1}{\rho}\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Proposición 11. *El sistema lineal anterior (4.5 y 4.6) en* $\{A^*, B^*, C^*\}$ *es compatible si y solo si se cumple la ecuación de Sine-Gordon dada por*

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} = \frac{1}{\rho^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{4.7}$$

Demostración. En efecto, tomando la primera ecuación del sistema (4.5)

$$A^*_x = \theta_t B^* + \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta C^*,$$

y derivando ahora con respecto a t se tiene la ecuación

$$A^*_{xt} = \theta_{tt}B^* + \theta_t B^*_t + \frac{1}{\rho}\cos\theta\theta_t C^* + \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta C^*_t. \tag{4.8}$$

De la misma manera, tomando la primera ecuación del sistema (4.6)

$$A^*_t = \theta_x B^*,$$

y derivando ahora con respecto a x se tiene la ecuación

$$A^*_{tx} = \theta_{xx}B^* + \theta_x B^*_x. \tag{4.9}$$

Ahora, las ecuaciones (4.8) y (4.9) son iguales si y solamente si se aplica la condición de las derivadas cruzadas $A^*_{xt} = A^*_{tx}$, e igualando se tiene

$$\theta_{tt}B^* + \theta_t B^*_t + \frac{1}{\rho}\cos\theta\theta_t C^* + \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta C^*_t = \theta_{xx}B^* + \theta_x B^*_x,$$

reemplazando los valores de $B^*_t = -\theta_x A^* - \frac{1}{\rho}\cos\theta C^*$, $C^*_t = \frac{1}{\rho}\cos\theta B^*$ y $B^*_x = -\theta_t A^*$ en la ecuación anterior, se tiene

$$\theta_{tt}B^* + \theta_t(-\theta_x A^* - \frac{1}{\rho}\cos\theta C^*) + \frac{1}{\rho}\cos\theta\theta_t C^* + \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta(\frac{1}{\rho}\cos\theta B^*) = \theta_{xx}B^* + \theta_x(-\theta_t A^*),$$

multiplicando internamente por B^* y sabiendo que $B^*.B^* = 1,\ B^*.C^* = 0,\ B^*.A^* = 0$ se tiene

$$\theta_{tt} + \frac{1}{\rho^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \theta_{xx}$$

que es equivalente a la ecuacion dada por (4.7).
De la misma manera para las demás ecuaciones y aplicando las condiciones $B^*_{xt} = B^*_{tx}$ y $C^*_{xt} = C^*_{tx}$. Concluyendo así la demostración. ■

Esta versión de la ecuación de Sine-Gordon (4.7) en coordenadas de curvatura es la más común en las aplicaciones físicas. En ella, x usualmente denota una variable espacial mientras que t denota el tiempo. En este contexto, es usual llamar a (4.7) la *ecuación de Sine-Gordon* $1+1-$dimensional.

4.2 Soluciones de la ecuación de Sine-Gordon

Sustituyendo la solución nula $\omega = 0$ de la ecuación (3.58) en la transformación de Bäcklund (3.87) y (3.88) respectivamente, se demuestra que la segunda solución no trivial ω' de (3.85) se puede construir por integración del par de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\omega'_u = \frac{2\beta}{\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega'}{2}\right), \tag{4.10}$$

$$\omega'_v = \frac{2}{\beta\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega'}{2}\right). \tag{4.11}$$

En efecto, pasando a dividir $\operatorname{sen}\left(\frac{\omega'}{2}\right)$ de la ecuación (4.11), se tiene

$$\frac{\omega'_v}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega'}{2}\right)} = \frac{2}{\beta\rho}$$

integrando con respecto a v la ecuación anterior, se tiene

$$2\ln(\tan(\frac{\omega'}{4})) = \frac{2}{\beta\rho}v + f(u) \tag{4.12}$$

derivando la ecuación (4.12) con respesto a u, se tiene la ecuación

$$\frac{\omega'_u}{\operatorname{sen}(\frac{\omega'}{2})} = [f(u)]_u \tag{4.13}$$

sustituyendo la ecuación (4.10) en (4.13),

$$\frac{2\beta}{\rho} = [f(u)]_u \tag{4.14}$$

nuevamente integrando con respecto a u la ecuación anterior (4.14)

$$f(u) = \frac{2\beta}{\rho}u + \alpha_1 \tag{4.15}$$

donde α_1 es una constante de integración. Ahora sustituyendo la ecuación (4.15) en (4.12), se tiene

$$2\ln(\tan(\frac{\omega'}{4})) = \frac{2}{\beta\rho}v + \frac{2\beta}{\rho}u + \alpha_1 \tag{4.16}$$

obteniendo así;

$$\tan(\frac{\omega'}{4}) = \exp(\frac{\beta}{\rho}u + \frac{1}{\beta\rho}v + \frac{\alpha_1}{2}) \tag{4.17}$$

que conduce a la nueva solución ω',

$$\omega'(u,v) = 4\arctan\left[\exp\left(\frac{\beta}{\rho}u + \frac{1}{\beta\rho}v + \alpha\right)\right] \tag{4.18}$$

donde $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{2}$ es una constante de integración.

A continuación se verá la gráfica de la solución $\omega'(u,v)$ para valores $\alpha = 0$ y $u \in [-10, 10],\ v \in [-10, 10], \beta = 1, \rho = 1$

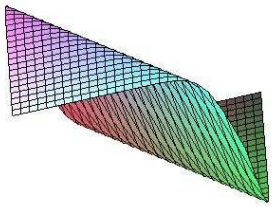


Figura 4.2.1: Gráfica de la solución que no presenta forma de solitón en 3D

Sin embargo, con esto se comprueba que no presenta la forma característica de un solitón.

Ahora, derivando la solución $\omega'(u,v)$ con respecto a u y luego con respecto a v, se tiene

$$\begin{aligned}\omega'_u &= \frac{2\beta}{\rho}\operatorname{sech}(\frac{\beta}{\rho}u+\frac{1}{\beta\rho}v+\alpha),\\ \omega'_v &= \frac{2}{\beta\rho}\operatorname{sech}(\frac{\beta}{\rho}u+\frac{1}{\beta\rho}v+\alpha).\end{aligned}$$

Al graficar ω'_u con valores $\alpha=0, u\in[-1,1],\ v\in[-5,5], \beta=1, \rho=1$ se tiene

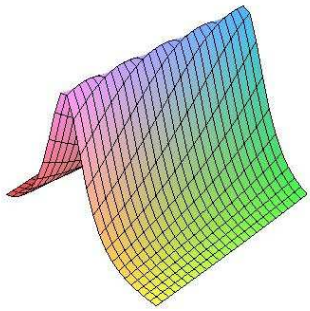


Figura 4.2.2: Gráfica de la solución con la forma de solitón en 3D

que es la forma característica que presenta un solitón estacionario.
De la misma manera al graficar ω'_v con valores $\alpha=0, u\in[-1,1],\ v\in[-5,5], \beta=1, \rho=1$ se obtiene la gráfica anterior.

4.3 Relación entre la solución y la superficie

Sea r el vector de posición de la superficie de revolución generada por la rotación de una curva plana $z=\phi(u)$ sobre el eje z(ver observación 2), entonces r es de la forma:

$$r=(u\cos v, u\operatorname{sen} v, \phi(u)). \tag{4.19}$$

Los círculos $u = cte$ son los paralelos y las curvas $v = cte$ se conocen como meridianos. Calculando los coeficientes de la primera forma fundamental, se obtiene:
$E = r_u.r_u = (\cos v, \operatorname{sen} v, \phi'(u)).(\cos v, \operatorname{sen} v, \phi'(u)) = \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v + \phi'(u)^2 = 1 + \phi'(u)^2$
$F = r_u.r_v = (\cos v, \operatorname{sen} v, \phi'(u)).(-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) = -u \operatorname{sen} v \cos v + u \operatorname{sen} v \cos v + 0 = 0$
$G = r_v.r_v = (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0).(-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) = u^2 \operatorname{sen}^2 v + u^2 \cos^2 v + 0 = u^2$
entonces la primera forma fundamental esta dada por:

$$I(dr) = [1 + \phi'(u)^2]du^2 + u^2 dv^2$$

de la misma forma para calcular la segunda forma fundamental, se utiliza el vector normal

$$N = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(-\cos v\phi'(u), -\operatorname{sen} v\phi'(u), 1)}{\sqrt{1 + \phi'(u)^2}}$$

calculando entonces los coeficientes de la segunda forma fundamental,

$$e = r_{uu}.N = (0, 0, \phi''(u)).\frac{(-\cos v\phi'(u), -\operatorname{sen} v\phi'(u), 1)}{\sqrt{1 + \phi'(u)^2}} = \frac{\phi''(u)}{\sqrt{1 + \phi'(u)^2}}$$

$$f = r_{uv}.N = (-\operatorname{sen} v, \cos v, 0).\frac{(-\cos v\phi'(u), -\operatorname{sen} v\phi'(u), 1)}{\sqrt{1 + \phi'(u)^2}} = 0$$

$$g = r_{vv}.N = (-u \cos v, -u \operatorname{sen} v, 0).\frac{(-\cos v\phi'(u), -\operatorname{sen} v\phi'(u), 1)}{\sqrt{1 + \phi'(u)^2}} = \frac{u\phi'(u)}{\sqrt{1 + \phi'(u)^2}}$$

entonces la segunda forma fundamental es

$$II(dr) = \frac{\phi''(u)}{\sqrt{1 + \phi'(u)^2}}\, du^2 + \frac{u\phi'(u)}{\sqrt{1 + \phi'(u)^2}}\, dv^2.$$

Como $F = f = 0$, entonces las líneas coordenadas $u = cte$ y $v = cte$ son líneas de curvatura en la superficie de revolución.
Escribiendo

$$I = d\xi^2 + u^2 dv^2,$$

donde

$$d\xi = \sqrt{1 + \phi'(u)^2}du, \quad u = u(\xi)$$

entonces el teorema de Gauss muestra que la curvatura de Gauss está dada por

$$K = -\frac{1}{u}\frac{d^2u}{d\xi^2},$$

donde la superficie pseudoesférica general de revolución con $K = -1/\rho^2$ adopta la forma

$$u = c_1 \cosh\frac{\xi}{\rho} + c_2 \operatorname{senh}\frac{\xi}{\rho},$$

donde ρ es constante. En particular, en el caso $c_1 = c_2 = c$ corresponde a las llamadas superficies pseudoesféricas parabólicas de revolución, los meridianos son dados por

$$u = ce^{\xi/\rho},$$

mientras

$$z = \phi(u) = \int \sqrt{1 - (c^2/\rho^2)e^{2\xi/\rho}}\, d\xi. \tag{4.20}$$

Sustituyendo

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{c}{\rho}e^{\xi/\rho}$$

en la ecuación anterior (4.20) da como resultado

$$z = \rho(\cos\psi + \ln|\tan\frac{\psi}{2}|)$$

y por consiguiente

$$dz = \cot\psi\ dr$$

de manera que ψ es el ángulo que la tangente al meridiano forma con el eje z. La distancia $d = u\csc\psi$ desde un punto genérico en el meridiano para el eje z medido a lo largo de la tangente se ve que es ρ y así es una constante. Una curva con esta propiedad es llamada tractriz. Por lo tanto, la superficie pseudoesférica parabólica de revolución es generada por la rotación alrededor del eje z de una tractriz. Esta superficie es conocida como la pseudoesfera. Para determinar la solución de la ecuación de Sine-Gordon (4.7) correspondiente a la pseudoesfera, hay que parametrizar de acuerdo a (4.2) y (4.3). En términos de ψ y v, el vector posición de la pseudoesfera es dado por

$$r = (\rho\operatorname{sen}\psi\cos v, \rho\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen} v, \rho(\cos\psi + \ln|\tan\frac{\psi}{2}|)), \tag{4.21}$$

por consiguiente

$$I = \rho^2 \cot^2 \psi \; d\psi^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi \; dv^2 \tag{4.22}$$

$$II = \rho \cot \psi \; d\psi^2 - \rho \operatorname{sen} \psi \cos \psi \; dv^2 \tag{4.23}$$

si ahora se introduce x e y de acuerdo con

$$dx = \rho \csc \psi \; d\psi, \quad y = \rho v \tag{4.24}$$

luego (4.22) y (4.23) adoptan las formas (4.2) y (4.3) respectivamente, con $\theta = \psi$.
Integrando en la ecuación (4.24) se obtiene:

$$x = \rho(\ln(\tan \frac{\psi}{2}))$$

despejando la variable ψ, se tiene

$$\psi = 2 \arctan[\exp(\frac{x}{\rho} + \alpha)] \tag{4.25}$$

donde α es una constante de integración.
Como se puede observar, la ecuación anterior (4.25) se obtiene al hacer

$$\omega' = 2\psi, \; \beta = 1, \; \rho = 1, u = v = x/2$$

en la ecuación (4.18).
Demostrando así que existe una conexión entre la superficie pseudoesférica dada por la ecuación (4.21) y la solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon dada por (4.18).

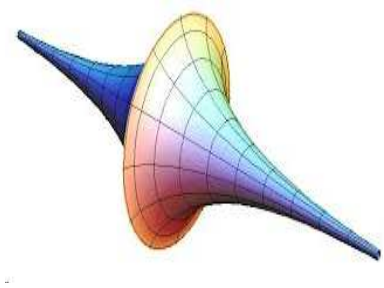


Figura 4.3.1: Gráfica de la superficie llamada pseudoesfera relacionada con la solución

4.4 Relación entre la Solución y el Solitón

En la sección "soluciones de la ecuación de Sine-Gordon" se encontró una solución general ω' en donde u, v son coordenadas del espacio, sin embargo se va a trabajar con la solución dada por (4.25) para determinar la "solución solitónica"(o la candidata a ser solución solitón). Entonces, para los valores $\alpha = 0, \rho = 1$, la solución estática (4.25) será:

$$\psi_k(x,t) = 2\arctan[\exp(x)] \tag{4.26}$$

la cual es llamada **solución kink**.

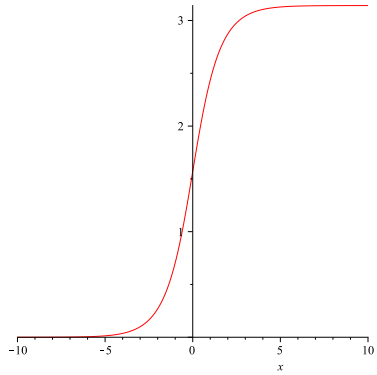


Figura 4.4.1: Gráfica de la solución estática tipo kink

Haciendo un cambio de variable,

$$x = \frac{x' - \gamma t}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

donde $|\gamma| < 1$, en la ecuación (4.26),

$$\phi_k(x' - \gamma t) = 2\arctan[\exp(\frac{x' - \gamma t}{\sqrt{1-\gamma^2}})] \tag{4.27}$$

que es la candidata a ser solución solitón.
No hay que olvidar $z = x' - \gamma t$, convierte a la ecuación en

$$\psi(x,t) = \phi(x' - \gamma t) = \phi(z),$$

Para comprobar si es solución solitón, simplemente se verifica si se cumplen las propiedades especificadas en los preliminares.
Analizando cuando $z = x' - \gamma t \to -\infty$ en la ecuación (4.27):

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to-\infty} \phi(z) &= \lim_{z\to-\infty} 2\arctan[\exp(\frac{z}{\sqrt{1-\gamma^2}})] \\
&= 2\arctan(0) \\
&= 2(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De la misma manera analizando cuando $z = x' - \gamma t \to \infty$ en la ecuación (4.27):

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} \phi(z) &= \lim_{z\to\infty} 2\arctan[\exp(\frac{z}{\sqrt{1-\gamma^2}})] \\
&= 2\arctan(\infty) \\
&= 2(\frac{\pi}{2}) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Con esto se demuestra que existe un estado asintótico constante cuando $z \to -\infty$ el cual es cero y de la misma manera existe otro estado asintótico constante cuando $z \to \infty$ el cual es π. Por lo tanto se concluye que la solución dada por $\phi(z)$ es una onda solitaria.
De la misma manera, se construye una solución llamada **solución antikink**, dada por

$$\psi_{\overline{k}}(x,t) = 2\arctan[\exp(-x)] \tag{4.28}$$

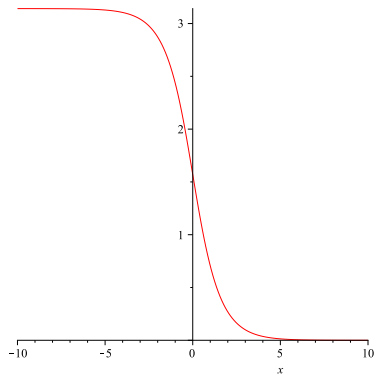


Figura 4.4.2: Gráfica de la solución estática tipo antikink

Haciendo un cambio de variable,

$$x = \frac{x' - \gamma t}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

donde $|\gamma| < 1$, en la ecuación (4.28),

$$\phi_{\overline{k}}(x' - \gamma t) = 2\arctan\left[\exp\left(-\frac{x' - \gamma t}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)\right] \tag{4.29}$$

Aunque ya no se hará los tecnicismos para encontrar la fórmula de la colisión de un kink-antikink, solo se colocará la fórmula:

$$\phi_{k\overline{k}} = 2\arctan\left[\frac{\operatorname{senh}\left(\dfrac{\gamma t}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)}{\gamma\cosh\left(\dfrac{x'}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)}\right]$$

la cual preserva la forma del kink(antikink) después del choque. Por tanto se concluye que la solución tipo kink(antikink) para la ecuación de Sine-Gordon tiene el comportamiento de un solitón.

Conclusiones

4.4 Conclusiones

1. Usando la transformación de Bäcklund se determina la solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon.

2. Existe una correspondencia entre la superficie pseudoesférica dada por la ecuación

$$r = (\rho \operatorname{sen} \psi \cos v, \rho \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} v, \rho(\cos \psi + \ln |\tan \frac{\psi}{2}|))$$

   y la solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon dada por

$$\omega' = 4 \arctan[\exp(\frac{\beta}{\rho} u + \frac{1}{\beta \rho} v + \alpha)]$$

3. La solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon obtenida a través de la transformación de Bäcklund es una solución solitón.

4. Para encontrar nuevas soluciones a la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon se pueden utilizar herramientas de geometría diferencial.

Sugerencias

Usar la geometría hiperbólica para determinar las ecuaciones de las superficies pseudoesféricas.

Apéndice A

Apéndice

A.1 Transformaciones lineales

Proposición 12. *Sea $T : E \to F$ una transformación lineal entre los espacios vectoriales E y F sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita m y n respectivamente ($m \leq n$). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$T : E \to F$ es inyectiva.*
2. *Dada una base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de E, los vectores $\{T(v_1), \ldots, T(v_m)\}$ son linealmente independientes.*
3. *La matriz asociada a T tiene rango m.*

Demostración. Ver [Santamaria et al., 2008]

A.2 Sistema de ecuaciones

Definición 21. Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es un *sistema incompatible* si no tiene solución. Por el contrario se dice que es un *sistema compatible* si tiene alguna solución.

En este último caso sólo caben dos posibilidades: o bien el sistema tiene una única solución, y en este caso se dice que es un *sistema compatible determinado*, o bien tiene infinitas soluciones, llamándose un *sistema compatible indeterminado*.

A.3 Ecuaciones diferenciales parciales

Definición 22. Una ecuación diferencial parcial(EDP) es una ecuación que envuelve dos o más variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y las derivadas parciales de una función $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Más precisamente, una EDP es una ecuación de la forma

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{du}{dx_1}, \ldots, \frac{du}{dx_n}, \frac{d^2u}{dx_1^2}, \frac{d^2u}{dx_1 dx_2}, \ldots, \frac{d^k u}{dx_n^k}) = 0.$$

Donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, Ω es un dominio en $\mathbb{R}^n$, F es una función dada y $u(x)$ es la función que se quiere determinar.

Definición 23. Una solución clásica de una EDP de orden k en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es una función $u \in C^k(\Omega)$ que satisface a la EDP en todos los puntos de Ω. En el caso $k \geq 2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Así la EDP de orden $k = 2$ se puede escribir de la forma:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

Para saber el tipo de EDP se tiene en cuenta:

1. Elíptica en (x_0, y_0) si $b^2 - ac < 0$
2. Parabólica en (x_0, y_0) si $b^2 - ac = 0$
3. Hiperbólica en (x_0, y_0) si $b^2 - ac > 0$

La EDP es elíptica, parabólica e hiperbólica en Ω si son elípticas, parabólicas e hiperbólicas en cada punto de Ω.

Lema 1. El tipo de EDP es invariante bajo el cambio local de coordenadas

Demostración. Ver [Iorio, 1988] ■

A.4 Equivalencias de la ecuación de Sine-Gordon

A continuación convertiremos la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon en su forma normal, tomando como función $u(x, y) = \theta(x, t)$. La ecuación de Sine-Gordon es:

$$\theta_{xx} - \phi_{tt} = \operatorname{sen}\theta \tag{A.1}$$

donde θ_{xx} y θ_{tt} indican las derivadas parciales con respecto a los parámetros x y t.
Primero se analizará el tipo de ecuación diferencial parcial, para eso se tiene en cuenta los coeficientes de la parte izquierda de la ecuación (A.1).
Los coeficientes de la ecuación son $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1$, entonces $b^2 - ac = 1 > 0$, por tanto, la ecuación (A.1) es hiperbólica.
Para pasar la ecuación a su forma normal, resolvemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} a\theta^2 - 2b\theta + c &= 0 \\ \theta^2 - 1 &= 0 \\ (\theta - 1)(\theta + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Como las soluciones son $\theta = 1$ y $\theta = -1$, entonces resolvemos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= 1 \\ dt &= dx \\ t &= x + c_1 \end{aligned}$$

De igual manera para la otra solución

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= -1\\ dt &= -dx\\ t &= -x + c_2\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable convenientemente

$$u = \frac{\rho}{2}(x-t); \quad v = \frac{\rho}{2}(x+t)$$

Por consiguiente: $\theta(x,t) = \omega(u,v)$. Utilizando la regla de la cadena, se tienen las derivadas parciales:

$$\theta_x = \frac{\rho}{2}.\omega_u + \frac{\rho}{2}.\omega_v$$

nuevamente derivamos con respecto a x y se utiliza el hecho de que $\omega_{uv} = \omega_{vu}$,

$$\begin{aligned}\theta_{xx} &= \frac{\rho}{2}\omega_{uu}\frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2}\omega_{uv}\frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2}\omega_{vu}\frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2}\omega_{vv}\frac{\rho}{2}\\ \theta_{xx} &= \frac{\rho^2}{4}\omega_{uu} + \frac{\rho^2}{2}\omega_{uv} + \frac{\rho^2}{4}\omega_{vv}\end{aligned}$$

Ahora, se deriva θ con respecto a t,

$$\theta_t = \frac{-\rho}{2}.\omega_u + \frac{\rho}{2}.\omega_v$$

nuevamente se deriva θ con respecto a t y se tiene

$$\begin{aligned}\theta_{tt} &= \frac{-\rho}{2}.\omega_{uu}.\frac{-\rho}{2} + \frac{-\rho}{2}.\omega_{uv}.\frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2}.\omega_{vu}.\frac{-\rho}{2} + \frac{\rho}{2}.\omega_{vv}.\frac{\rho}{2}\\ \theta_{tt} &= \frac{\rho^2}{4}\omega_{uu} - \frac{\rho^2}{2}\omega_{uv} + \frac{\rho^2}{4}\omega_{vv}\end{aligned}$$

Ahora se reemplazan los resultados obtenidos por ϕ_{xx} y ϕ_{tt} en la ecuación (A.1) obteniendo así

$$\frac{\rho^2}{4}\omega_{uu} + \frac{\rho^2}{2}\omega_{uv} + \frac{\rho^2}{4}\omega_{vv} - (\frac{\rho^2}{4}\omega_{vv} - \frac{\rho^2}{2}\omega_{uv} + \frac{\rho^2}{4}\omega_{vv}) = \operatorname{sen}\omega$$

cancelando algunos términos de la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\rho^2\omega_{uv} &= \operatorname{sen}\omega\\ \omega_{uv} &= \frac{1}{\rho^2}\operatorname{sen}\omega\end{aligned}$$

que es la *ecuación de Sine-Gordon* obtenida en (3.58).

A.5 Términos físicos

Física del estado sólido es una rama de la física que se encarga del estudio de las propiedades de la materia, especialmente la materia rígida o semirrígida.

Óptica no lineal describe el comportamiento de las interacciones material-luz donde el principio de superposición no se puede aplicar.

Solución kink es la solución de la ecuación diferencial no lineal en donde no se encuentra presente el tiempo, es decir es una solución estática.

Referencias

Alonso, M. and Finn, E. (1970). *Física: Campos y Ondas*, volume II. Primera edition.

Avendaño, M. (2006). Teorema fundamental de superficies y el criterio de frobenius.

Cuenda, S. (2007). *Secuencia genética y dinámica de excitaciones no lineales de ADN*. PhD thesis, Universidad Carlos III de Madrid.

González, M. (2001). *Kinks, Sistemas Integrables y Geodésicas: Solitones en el Modelo Sigma O(3) Lineal*. PhD thesis, Universidad de Salamanca.

Iorio, R. (1988). *Ecuaciones Diferenciales Parciales: Una Introducción*.

Rogers and Schief (2002). *Transformaciones de Bäcklund y Darboux: Geometria y Aplicaciones Modernas en teoría de solitones*.

Santamaria, O., Damián, Huancas, and Julca, P. (2008). *Introducción a la geometría diferencial de curvas y superficies*.

Sears and Zemansky (2013). *Fisica universitaria Vol I*.

Tenemblat, K. (1986). *Introdução à Geometria Diferencial vol. I*.

CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD
(RESOLUCIÓN N° 626-2021-CU DEL 30 DE DICIEMBRE 2021)

Yo, GLORIA MARÌA ORTIZ BASAURI, identificada con Documento de Identidad Nº16748071, usuario revisor del documento titulado: "Trasformación Bäcklund para la ecuación de Sine-Gordon, superficies pseudoesféricas y los solitones", cuyo autor es: Bach. Mat. Wilmer Fernando Chininin Cruz; declaro que la evaluación realizada por el Programa Informático, después de excluir el porcentaje debido a la publicación de la misma en MATHEMA-2015, ha arrojado un porcentaje de similitud de **16** %, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 18 de julio de 2022.

GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071
Docente asesor

Se adjunta:
*Resumen de Reporte automatizado de similitudes
*Recibo Digital

Trasformación de Backlund

INFORME DE ORIGINALIDAD

16%	15%	1%	7%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	repositorio.unap.edu.pe Fuente de Internet	4%
2	hdl.handle.net Fuente de Internet	1%
3	baixardoc.com Fuente de Internet	1%
4	urn.nsk.hr Fuente de Internet	1%
5	es.wikipedia.org Fuente de Internet	1%
6	Submitted to University of Kent at Canterbury Trabajo del estudiante	1%
7	archive.org Fuente de Internet	1%
8	Submitted to Pontificia Universidad Catolica del Peru Trabajo del estudiante	1%
9	repositorio.ufpe.br Fuente de Internet	

		1 %
10	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA Trabajo del estudiante	1 %
11	Submitted to Instituto Tecnologico de Costa Rica Trabajo del estudiante	1 %
12	docplayer.es Fuente de Internet	<1 %
13	nanopdf.com Fuente de Internet	<1 %
14	www.branchingnature.org Fuente de Internet	<1 %
15	www.dma.fi.upm.es Fuente de Internet	<1 %
16	www.scribd.com Fuente de Internet	<1 %
17	archive.cmat.edu.uy Fuente de Internet	<1 %
18	www.slideshare.net Fuente de Internet	<1 %
19	Submitted to Australian National University Trabajo del estudiante	<1 %

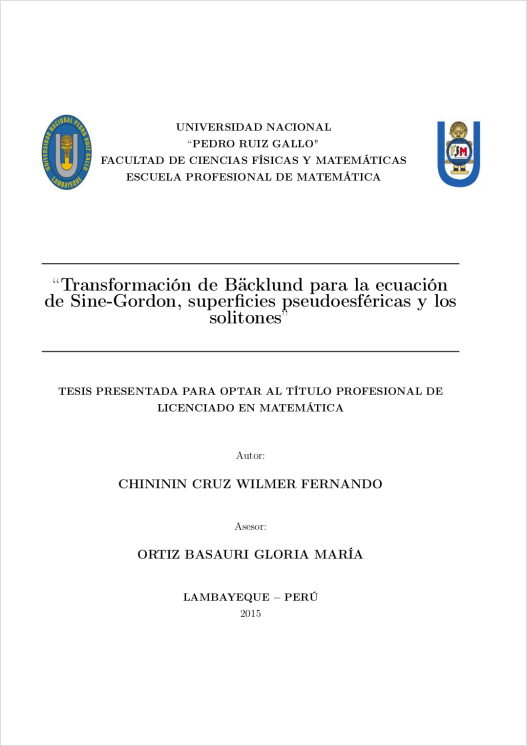
20	albertofest.matcuer.unam.mx Fuente de Internet	<1 %
21	Submitted to University of Sheffield Trabajo del estudiante	<1 %
22	www.warwick.ac.uk Fuente de Internet	<1 %
23	Manfredo P. do Carmo. "Chapter 3 Die Geometrie der Gauß-Abbildung", Springer Science and Business Media LLC, 1983 Publicación	<1 %
24	livrosdeamor.com.br Fuente de Internet	<1 %
25	repozitorij.pmf.unizg.hr Fuente de Internet	<1 %
26	159.90.160.10 Fuente de Internet	<1 %
27	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo Trabajo del estudiante	<1 %
28	www.famat.ufu.br Fuente de Internet	<1 %
29	dokumen.pub Fuente de Internet	<1 %
30	dokumen.site Fuente de Internet	<1 %

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Wilmer Fernando Chininin Cruz
Título del ejercicio:	Trasformación de Backlund
Título de la entrega:	Trasformación de Backlund
Nombre del archivo:	principal_2_1.pdf
Tamaño del archivo:	456.61K
Total páginas:	77
Total de palabras:	14,998
Total de caracteres:	63,199
Fecha de entrega:	29-may.-2022 12:06p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre...	1846494353



UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Transformación de Bäcklund para la ecuación de Sine-Gordon, superficies pseudoesféricas y los solitones"

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autor:

CHININ CRUZ WILMER FERNANDO

Asesor:

ORTIZ BASAURI GLORIA MARÍA

LAMBAYEQUE – PERÚ
2015