UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

" Correspondencia Entre Conjuntos Convexos y Funciones Sublineales "

TESIS

PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL EN MATEMÁTICAS

Presentado por:

Bach. Mat. Becerra Menor Neiser

Bach. Mat. Huamán Fuentes Tatiana Stephanie

Asesor:

Mg. Pérez Herrera Adelmo.

LAMBAYEQUE – PERÚ

2016

UNIVERSIDAD NACIONAL“ PEDRO RUIZ GALLO”

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **“ Correspondencia Entre Conjuntos Convexos y Funciones Sublineales ”**, presentada por los Bachilleres en Matemáticas, Becerra Menor Neiser y Huamán Fuentes Tatiana Stephanie, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

M.Sc. Guevara Quiliche Santos Henry

Presidente Jurado de Tesis

Lic. Mat. Coronado Juárez William Wilmer

Secretario Jurado de Tesis

Lic. Mat. Castro Cárdenas Diana Mercedes

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: Octubre - 2016

UNIVERSIDAD NACIONAL" PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Correspondencia Entre Conjuntos Convexos Y Funciones Sublineales "

Bach. Mat. Becerra Menor Neiser

Autor

Bach. Mat. Huamán Fuentes Tatiana Stephanie

Autor

Mg. Pérez Herrera Adelmo

Asesor

Lambayeque – Perú

Octubre - 2016

Agradecimiento

Agradezco especialmente a Dios por ser quien me dá la inteligencia y sabiduría, por acompañarme durante el proceso e iluminarme en los momentos de complejidad y dificultad. También un sincero agradecimiento a nuestro asesor Mg. Adelmo Pérez Herrera, por atender nuestras dudas y por guiarnos con su conocimiento para poder culminar ésta tesis.

Tatiana.

Agradezco a Dios por guiarme en todo tiempo, siendo el dador de la sabiduría y conocimiento. Asimismo agradecer a mis padres y hermanos, por su apoyo incondicional, quienes me dan fuerzas y motivación para lograr mis metas y objetivos. Agradecer también a los profesores, que me impartieron clases y me formaron intelectualmente.

Neiser.

Dedicatoria

Quiero dedicar este trabajo de tesis a mis padres, a mis hermanos
que siempre estuvieron brindándome su apoyo incondicional,
a todos los profesores que formaron parte de nuestra formación
intelectual, y para todo aquel que les sea de provecho este trabajo.

Neiser.

Le Dedico de manera especial a mis padres, que me apoyaron incondicionalmente para llegar a concluir este trabajo de tesis. Ellos son el principal cimiento para la construcción de mi vida profesional, sentaron en mi las bases de responsabilidad y deseos de superación, son el espejo en el cual me quiero reflejar; pues sus virtudes infinitas me llevan a admirarlos cada día más. Gracias Dios por concederme los mejores padres

Tatiana.

Resumen

Es frecuente encontrar en los problemas de extremos de optimización, la maximización de funciones lineales $\langle ., y\rangle$ sobre un conjunto convexo C en $\mathbb{R}^n$, una aproximación provechosa a tales problemas es estudiar que sucede cuando y varía en C, lo que nos conduce a la búsqueda de funciones que expresan la dependencia de el supremo sobre y, denominada función soporte:

$$\delta_C := \sup\{\langle y, x\rangle : x \in C\}$$

dicha función es una clase importante de funciones sublineales.

Un resultado estudiado por Rockafellar mostró que las funciones soporte no distingue al conjunto convexo C, de su clausura, ni de su envolvente convexo cerrado. por lo cual se concluyó que un conjunto convexo cerrado se puede expresar como el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades dadas por su funciones soporte:

$$C = \{x : \langle y, x\rangle \leq \delta_C,\ \forall\ y\}$$

Complementando estas relaciones se logró establecer la correspondencia inyectiva entre los conjuntos convexos cerrados en $\mathbb{R}^n$ y objetos de otra clase muy distinta: funciones sublineales sobre $\mathbb{R}^n$.

Abstract

Is common find in the problem of extremum of optimization, the maximizing of linear functions $\langle ., y\rangle$ over a convex set C in $\mathbb{R}^n$, one fruitful approach to such a problem is to study what happens as y varies in C. This leads to the consideration of the function which expresses the dependence of the supremum on y, namely the support function:

$$\delta_C := \sup\{\langle y, x\rangle : x \in C\}$$

this function is a important sort of sublinear functions.

A result studied for Rockafellar shown the concept of support function does not distinguish a convex set C from its closet convex hull. It follows that a closed convex set C can be expressed as the set of solutions to a system of inequalities given by its support function:

$$C = \{x : \langle y, x\rangle \leq \delta_C,\ \forall\ y\}$$

to the complement this relations it shown there is an important injective correspondence between the cloesd convex set in $\mathbb{R}^n$ and objects of quite a diferent sort: sublinear functions on $\mathbb{R}^n$.

Introducción

La convexidad ha ido tomando cada vez mayor importancia en los últimos años en el estudio de problemas de extremos de optimización en muchas áreas de matemática los que forman parte fundamental del análisis convexo y cuyas aplicaciones a problemas de extremos juegan un rol central.

La funciones sublineales son candidatos interesantes de funciones convexas no triviales más simples debido a que son aproximaciones tangenciales de las mismas.

Al establecer la correspondencia entre las funciones sublineales y los conjuntos convexos sus propiedades se hacen más visibles; debido a que proporcionan herramientas analíticas poderosas en el estudio de conjuntos convexos cerrados incluso cuando se forman nuevos conjuntos se logra la correspondencia con las funciones Soporte.
Además el presente estudio aparta un enfoque didáctico de los conceptos y constituirá un documento valioso para personas interesadas en el tema.

El concepto de funciones sublineales originalmente definidas por Minkowsky para conjuntos convexos acotados, quien estableció primero la correspondencia entre *funciones gauge* y las *funciones soporte.*

Las funciones soporte son ejemplo de funciones sublineales cerradas, que bajo ciertas condiciones que serán objeto de nuestro estudio, podremos establecer una correspondencia entre estas funciones y los conjuntos convexos no vacíos.

En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ una forma lineal l se puede representar por un vector $s \in \mathbb{R}^n$, la existencia de s es única y es tal que:

$$l(x) = \langle s, x \rangle, \quad \forall\ x \in\ \mathbb{R}^n$$

Además, dado $C \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto convexo no vacío, la función:

$$\begin{array}{rccl} \delta_C : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \cup \{+\infty\} \\ & x & \longrightarrow & \delta_C(x) := \sup\{< s, x >,\ s \in C\} \end{array}$$

es sublineal y se denomina la **función Soporte** de C.
Cuando C es acotado, esta función Soporte es finita en todas partes, de otro modo, δ_C toma el valor $+\infty$, pero esto le resta semicontinuidad inferior.

Asimismo, δ_C es también la función soporte de la clausura de C, al igual que de la clausura del envolvente convexo de C. Debido a ello se consideran funciones soporte solo de conjuntos convexos cerrados no vacíos.
El resultado clave está en considerar la función $C \to \delta_C$, la cual es biyectiva.
Esta correspondencia entre conjuntos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ y funciones sublineales cerradas es la que permite interpretaciones para un estudio satisfactorio.

Índice general

Capítulo 1:

Conjuntos convexos

En éste capítulo se presenta los conceptos, definiciones y teoremas que serán útiles para el desarrollo de la teoría necesaria que orienta el presente trabajo.
La base de éstos conceptos se encuentran en: “Convex Analysis”de R. TYRRELL ROCKAFELLAR y ”Fundamental of Convex Analysis”de JEAN-BAPTISTE HIRIART URRUTY CLAUDE.

1.1 Definiciones

En el desarrollo de éste trabajo, $\mathbb{R}^n$ sera visto como estructura de espacio vectorial real (cuyos elementos se llaman vectores) y como estructura de espacio afín (conjunto de puntos).
El espacio afín se puede identificar como el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, siempre que el origen esté especificado.

Definición 1.1.1. (Producto interno)
El producto interno en el espacio vectorial E es una función que hace corresponder a cada par de vectores x y y en E, un número real indicado por $\langle x, y\rangle$ de tal modo que para cualesquiera x, x' , $y \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

P1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

P2. $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$

P3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha.\langle y, x\rangle = \langle x, \alpha y\rangle$

p4. $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$

el producto interno es una función real simétrica bilineal y definida positiva.

En el espacio $\mathbb{R}^n$ se define el producto interno canónico de dos vectores $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ y $x^* = (\xi_1^*, ..., \xi_1^*)$ expresado por:

$$\langle x, x^*\rangle = \xi_1\xi_1^* + \xi_2\xi_2^* + ... + \xi_n\xi_n^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\xi_i^*$$

Ejemplo 1.

a) sean $x = (5, 3)$ y $x^* = (-1, 2)$ entonces:

$\langle x, x^*\rangle = \langle (5, 3), (-1, 2)\rangle = 5(-1) + 3(2) = -5 + 6 = 1$

b) sean $x = (3, -4, 5)$ y $x^* = (-2, 6, 1)$ entonces:

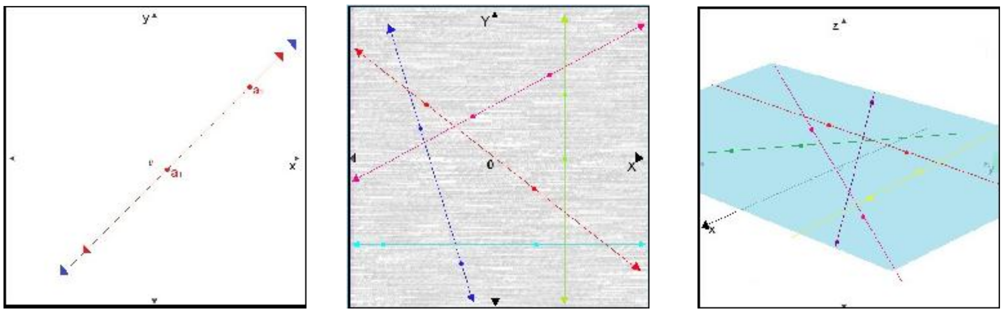
$\langle x, x^*\rangle = \langle (3, -4, 5), (-2, 6, 1)\rangle = 3(-2) + (-4)(6) + 5(1) = -6 - 24 + 5 = 25$

Definición 1.1.2. (Conjunto afín)

Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ es llamado conjunto afín o variedad afín si la recta $\{(1 - \lambda)x + \lambda y,\ \lambda \in \mathbb{R}\ \}$ está enteramente contenida en M, siempre que x y y están en M. Note que un único punto es una variedad afín.

Ejemplo 2. Una recta, todo el espacio $\mathbb{R}^2$, un plano, todo el espacio $\mathbb{R}^3$ son ejemplos de conjuntos afines; en general el espacio total $\mathbb{R}^n$ es afín y esto se ve claramente en la figura 1.1.

Teorema 1.1.1. *Los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son conjuntos afines que contienen al origen.*



(a) Una recta (b) Todo $\mathbb{R}^2$ (c) un plano

Figura 1.1: Conjuntos afines.

Demostración. Cada subespacio de $\mathbb{R}^n$ contiene al 0 y siendo cerrado bajo la adición y multiplicación escalar, en particular, es un conjunto afín.
Análogamente suponga que, M es un conjunto que contiene a 0, para cualquier $x \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se satisface: $\lambda x = (1-\lambda)0 + \lambda x \in M$. Por tanto M es cerrado bajo la multiplicación escalar.
Si $x \in M$ y $y \in M$, $\frac{1}{2}(x+y) = \dfrac{1}{2}x + (1-\frac{1}{2})y \in M$ Así M es cerrado bajo la adición y por tanto es Subespacio. □

Definición 1.1.3. (Hiperplano)
Un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ es una colección de puntos:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, b\rangle = \beta\}$$

Donde $b \neq 0$, es llamado el vector normal del hiperplano y β es un escalar fijo.

Observación 1. Los hiperplanos y otros conjuntos afines se pueden representar por funciones lineales y ecuaciones lineales. Pues los hiperplanos son las traslaciones de:

$$\begin{aligned}\{x/x \perp b\} + a &= \{x + a/\langle x, b\rangle = 0\}\\ &= \{y/\langle y-a, b\rangle = 0\}\\ &= \{y/\langle y, b\rangle = \beta\}, \quad \beta = \langle a, b\rangle\end{aligned}$$

Ejemplo 3. $H = \{x \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 + 3x_2 = 6\}$

donde $x = (x_1, x_2)$, $b = (2, 3)$ *y* $\beta = 6$

Éste hiperplano es una recta en $\mathbb{R}^2$, como se puede observar en la figura 1.2.

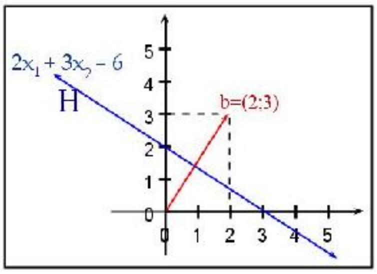


Figura 1.2: Hiperplano ejemplo 3

El siguiente teorema caracteriza a los subconjuntos afines de $\mathbb{R}^n$ como solución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas en n-variables.

Teorema 1.1.2. *Dado* $b \in \mathbb{R}^n$ *y* $[\beta]_{m \times n}$ *una matriz real, el conjunto* $M = \{x \in \mathbb{R}^n / \beta X = b\}$ *es un conjunto afín en* $\mathbb{R}^n$. *Además cada conjunto afín se puede representar de esa manera.*

Demostración. Sea $x \in M$, $y \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, si $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ entonces $\beta z = (1-\lambda)\beta x + \lambda \beta y$, por tanto $\beta z = b$, de donde M es afín.

□

El teorema 1.1.2 implica que: $M = \{x / \langle x, b_i \rangle = \beta_i : \ i = 1, ..., m\} = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$.
donde b_i es la i-ésima fila de B, β_i es la i-ésima componente de b y $H_i = \{x / \langle x, b_i \rangle = \beta_i\}$.

Cada H_i es el hiperplano $(b_i \neq 0)$, ó el conjunto vacío $(b_i = 0,\ \beta_i \neq 0)$ ó $\mathbb{R}^n$ $(b_i = 0,\ \beta_i \neq 0)$. El conjunto vacío puede ser considerado como la intersección de hiperplanos paralelos diferentes, mientras que $\mathbb{R}^n$ se puede considerar como la intersección de una colección no vacía de hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ Así:

Corolario 1.1.2.1. *Cada subconjunto afín de* $\mathbb{R}^n$ *es la intersección de una colección finita de hiperplanos.*

Definición 1.1.4. (Semiespacios asociados a un Hiperplano)

Todo hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, b\rangle = \beta\}$ tiene asociado dos conjuntos llamados semi-espacios de $\mathbb{R}^n$ pueden ser abiertos:

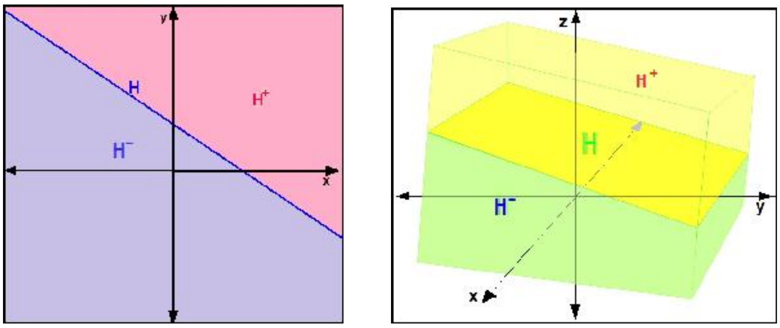
$H_a^- = \{x/\langle x, b\rangle < \beta\}$ define el semiespacio inferior abierto.

$H_a^+ = \{x/\langle x, b\rangle > \beta\}$ define el semiespacio superior abierto.

como también cerrados:

$H_c^- = \{x/\langle x, b\rangle \leq \beta\}$ define el semiespacio inferior cerrado.

$H_c^+ = \{x/\langle x, b\rangle \geq \beta\}$ define el semiespacio superior cerrado.



(a) En $\mathbb{R}^2$ (b) En $\mathbb{R}^3$

Figura 1.3: Hiperplanos y sus semiespacios asociados

Observe que cualquier punto en $\mathbb{R}^n$ está en H^+, en H^-, o en ambos.

Definición 1.1.5. (Conjunto convexo)

Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$, es convexo si: $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ para todo $x, y \in C$ y $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ (o equivalentemente $\lambda \in [0, 1]$).

Geométricamente, esto dice que el segmento de recta

$$[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

está enteramente contenido en C, siempre que sus puntos extremos x y y están en C.

En la figura 1.4, se observan conjuntos convexos, cuya propiedad es que, dados dos puntos cualesquiera, el segmento que los une está totalmente contenido en el conjunto, y en la figura 1.5 no se cumple esta condición; por tanto no son convexos.

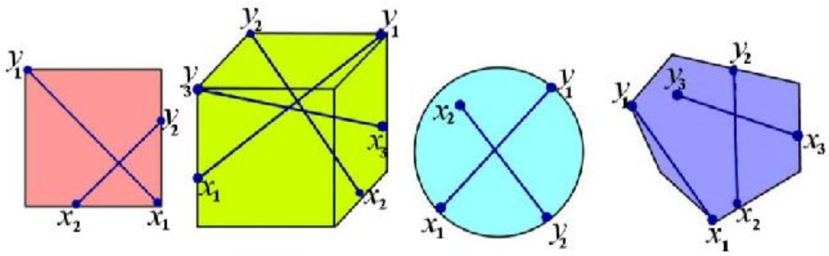


Figura 1.4: Conjuntos convexos

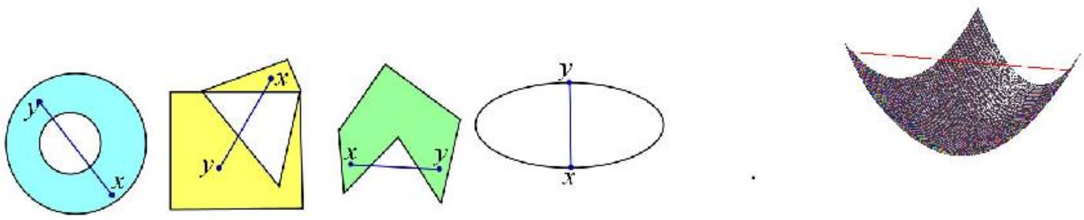


Figura 1.5: Conjuntos no convexos

Ejemplo 4. Los conjuntos convexos de una dimensión son los intervalos.
Un hiperplano es un ejemplo de conjunto convexo.
Elipsoides y cubos sólidos en $\mathbb{R}^3$ son ejemplos de conjuntos convexos pero no afines.
Todos los conjuntos afines (incluyendo al ϕ y $\mathbb{R}^n$ mismo) son convexos.

Proposición 1.1. *Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de conjuntos convexos. Entonces su intersección $C := \cap\{C_i : i \in I\}$ es convexo.*

Demostración. Inmediata. $\square$

Corolario 1.1.2.2. *Sea $b_i \in \mathbb{R}^n$ y $\beta_i \in \mathbb{R}$ para $i \in I$, donde I es un conjunto arbitrario de índices. Entonces $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, b_i\rangle \leq \beta_i, \ \forall \ i \in I\}$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Sea $C_i = \{x : \langle x, b_i \rangle \leq \beta_i\}$ entonces C_i es un semiespacio cerrado o $\mathbb{R}^n$ o ϕ y $C = \bigcap_{i \in I} C_i$. □

Esto es válido si se reemplaza $\leq$ por $\geq$, $>$, $<$, o $=$ Asi dado cualquier sistema de desigualdades lineales simultáneas y ecuaciones en n variables, el conjunto C de soluciones es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1.6. (Clausura e interior de un conjunto)
Sea C un conjunto en $\mathbb{R}^n$, se define la clausura e interior de C como:

$$int\ C = \{x \in C /\ \exists\ \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset C\}$$

$$cl\ C = \{x \in \mathbb{R}^n /\ \forall\ \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset\}$$

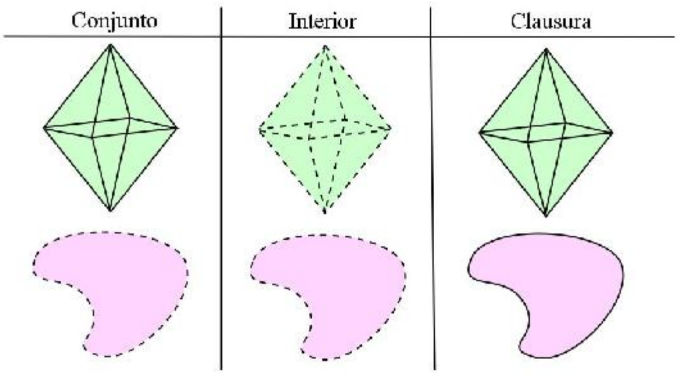


Figura 1.6: Clausura e interior

Proposición 1.2. *Si C es un conjunto convexo, su interior y su clausura, también lo son.*

Demostración. Sean x y x' diferentes y $a \in]0, 1[$, $x'' = ax + (1-a)x' \in [x, x']$ considere x y x' en el interior de C.
Escogemos $r > 0$ talque $B(x, r) \subset C$. El radio $\dfrac{\|x'' - x\|}{x' - x} = 1 - r$
Así: $B(x'', (1-a)r) = ax + (1-a)B(x', r)$ obtenida de segmentos con puntos extremos

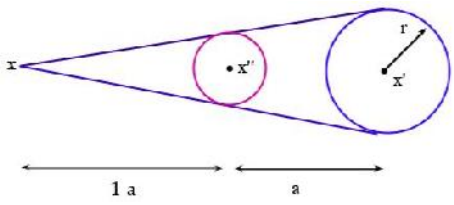


Figura 1.7: Conjuntos convexos tienen interior convexo.

en *int* C. Es decir $x^* \in$ *int* C

Ahora tome x y x' en *cl* C, seleccionamos en C dos sucesiones (x_k) y (x'_k) que convergen a x y x' respectivamente, entonces $\alpha x_k + (1-\alpha)x'_k$ está en C y convergen a x'' el cual esta en *cl* C.

□

Conceptos básicos del álgebra lineal

i) Una **combinación lineal** de elementos $x_1, ..., x_k$ de $\mathbb{R}^n$ es un elemento $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ donde los coeficientes α_i son números reales arbitrarios.

ii) Un **Subespacio lineal** de $\mathbb{R}^n$, es el conjunto que contiene todas las combinaciones lineales.

iii) Para cualquier conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, se puede asociar la intersección de todos los subespacios conteniendo a S, este subespacio es llamado el **El subespacio generado por** S o (**Envolvente lineal de** S) denotado por *lin* S.

iv) Para la relación $\subset$, *lin* S es el subespacio más pequeño conteniendo a S, este puede ser construido directamente de S, por la colección de todas las combinaciones lineales de elementos de S.

v) $x_1, ..., x_k$ de $\mathbb{R}^n$ se dicen **linealmente independientes** si, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$ implica $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$.

Al considerar Afinidad= linealidad + traslación, se puede reproducir lo anterior como:

i') Una **combinación Afín** de elementos $x_1, ..., x_k$ de $\mathbb{R}^n$ es $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ donde los coeficientes α_i satisfacen $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$.

ii') Un **Conjunto Afín** de $\mathbb{R}^n$, es el conjunto que contiene todas las combinaciones afines. Es facil verificar que la intersección de las conjuntos afines resulta una conjunto afín. (la equivalencia con la definición 1.1.2 se verá más clara en la proposición 1.3)

iii') Para cualquier conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, se puede asociar la intersección de todas los conjuntos afines conteniendo a S, denominado **Conjunto Afín generado por** S o (**Envolvente Afín de** S) denotado por $Aff\ S$.

iv') Para la relación $\subset$, $Aff\ S$ es el conjunto afín más pequeño que contiene a S, este puede ser construido directamente de S, por la colección de todas las combinaciones afines de los elementos de S.

v') los k+1 puntos $x_0, ..., x_k$ de $\mathbb{R}^n$ se dicen **afínmente independientes** si el conjunto $Aff\{x_1, ..., x_k\}$ es k- dimensional. Esto ocurre si $x_i - x_0, ..., x_k - x_0$ son linealmente independientes.

Para decir que un conjunto de vectores es afínmente dependientes es afirmar que uno de ellos es una combinación afín de los otros.

Definición 1.1.7. (Simplex o simplejo)

Sea $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ un punto de $\mathbb{R}^k$. El simplex unitario en $\mathbb{R}^k$ es:

$$\triangle_k = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0,\ \ \forall\ i = 1, ..., k\}$$

Ejemplo 5. Considere el simplex unitario $\triangle_3$, sean $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ los tres vectores bases formando sus vértices; el envolvente afín de $S = \{e_1, e_2\}$ es la recta afín que pasa a través de e_1 y e_2, y Para $S = \{e_1, e_2, e_3\}$, su envolvente afín es el plano afín de ecuación $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. los cuatro elementos $0, e_1, e_2, e_3$

son afínmente independientes, pero los cuatro elementos $(1/3, 1/3, 1/3), e_1, e_2, e_3$ no lo son.

Con la idea anterior de i') se puede llegar de afinidad a convexidad, por lo que se define:

Definición 1.1.8. Una **combinación convexa** de elementos $x_1, ..., x_k$ en $\mathbb{R}^n$ es un elemento de la forma:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \quad donde \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \;\; y \; \alpha_i \geq 0$$

.

Una combinación convexa es una combinación afín, la que es una combinación lineal en particular. se observa además que todas las combinaciones convexas de $x_1, ..., x_k$ forman un conjunto convexo: la imagen de $\triangle_k$ bajo la función lineal:

$$\mathbb{R}^k \ni (\alpha_1, ..., \alpha_k) \to \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k \in \mathbb{R}^k$$

En muchas situaciones donde las combinaciones suceden en matemáticas aplicadas, los coeficientes se interpretan como probabilidades o porciones.

Proposición 1.3. *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si y solo si contiene todas las combinaciones convexas de sus elementos.*

Demostración. Condición suficiente: la combinación convexa de dos elementos es justo el segmento que los contiene.
La condición necesaria, considere $x_1, ..., x_k$ en C y $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \Delta_k$. Por lo menos uno de los α_i es positivo, si $\alpha_1 > 0$ entonces la forma: $y_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} x_2$ está en C. Por consiguiente: $y_3 = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} y_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} x_3$
reemplazando y_2 se tiene: $y_3 = \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)$ que está en C, y así hasta que : $y_k = \frac{\alpha_1+...+\alpha_{k-1}}{1} y_{k-1} + \frac{\alpha_k}{1} x_k$

en conclusión: $y_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$

$\square$

Como la intersección de conjuntos convexos es convexo, entonces se puede definir:

Definición 1.1.9. (Envolvente convexo)

Dado un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$, el envolvente convexo de S se define como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S; y se denota por *co* S.

Es decir es el menor conjunto convexo que contiene a S.

$$co\ S = \{\bigcap_{i\in\Lambda} X_i / X_i \supset S\}$$

Ejemplo 6. En la figura 1.8 se observan conjuntos con sus respectivos envolventes convexos.

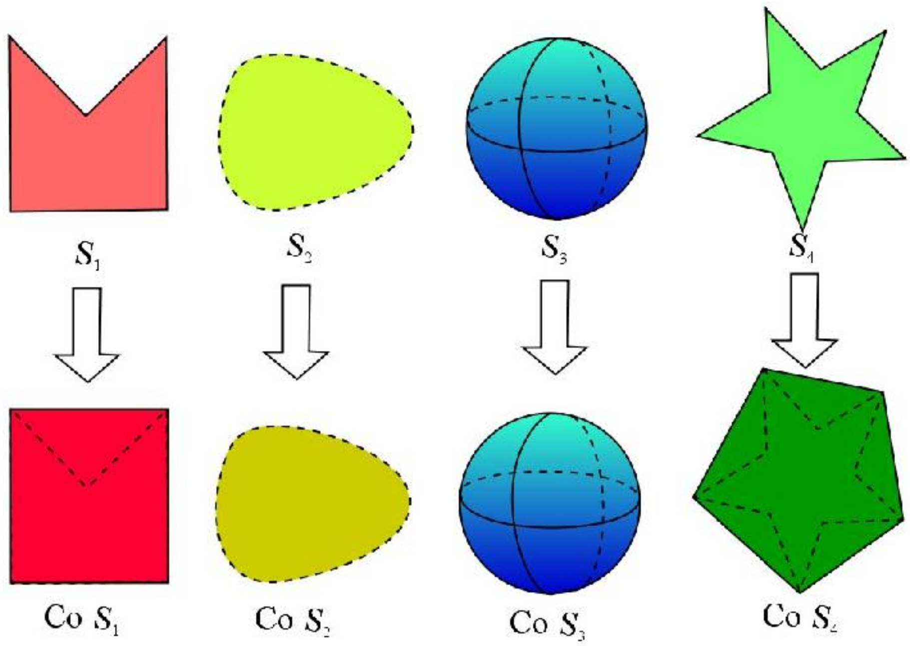


Figura 1.8: Envolventes convexos

Observación 2.

✓ $S \subseteq co\ S$

✓ Si S es un conjunto convexo, entonces $co\ S = S$, el recíproco también se cumple.

✓ Si $S_1 \subset S_2$, entonces $co\ S_1 \subset co\ S_2$.

Proposición 1.4. *El envolvente convexo se describe como el conjunto de todas las combinaciones convexas.*
Es decir: $co\ C := \cap\{C : C \text{ es convexo y contiene a } S\}$

Definición 1.1.10. El **Envolvente Convexo cerrado** $\overline{CO}\ (S)$ de un conjunto no vacío S, es la intersección de todos los conjuntos convexos cerrados que lo contienen.

Proposición 1.5. *El envolvente convexo cerrado es la clausura del envolvente convexo de* S *. Esto es* $\overline{Co}\ (S) = cl(\ Co\ S)$

Demostración.
Debido a que $cl\ Co\ S$ es un conjunto convexo cerrado conteniendo a S, éste contiene a $\overline{Co}$ también.

Por otro lado tome un conjunto convexo C que contiene a S; siendo convexo, C contiene a $Co\ S$, siendo cerrado, este contiene también la clausura de $Co\ (S)$.
Dado que C es arbitrario, se concluye que $\cap C = cl\ (Co\ S)$.

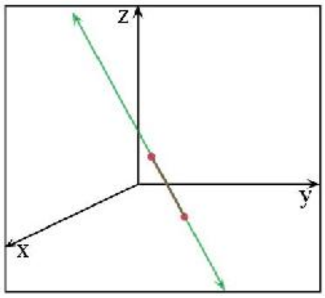
□

Definición 1.1.11. (Envolvente afín)
Dado un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ el envolvente afín se define como la intersección de la colección de conjuntos afines M talque: $M \supset S$. Es decir, es el menor conjunto afín que contiene a S. Envolvente afín de un conjunto S se denotará por $aff\ S$.

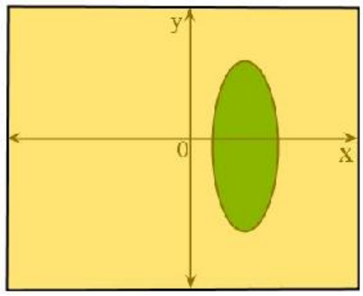
Ejemplo 7. En la figura 1.9. Se observa:
a)Un segmento de recta en $\mathbb{R}^3$ y los conjuntos afines que lo contienen son la recta entera, planos y todo el $\mathbb{R}^3$; Así el Envolvente afín es la recta que lo contiene.
b) El conjunto afín que contiene al conjunto plano es $\mathbb{R}^2$.

c) El menor conjunto afín que contiene al plano dado es el plano que lo contiene.

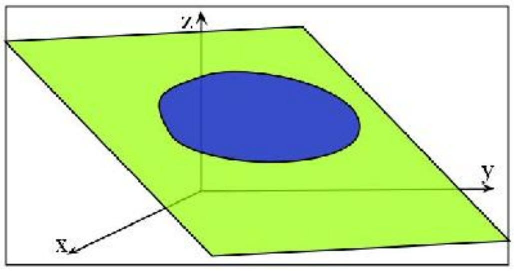
d) El conjunto afín de la superficie dada es todo el espacio $\mathbb{R}^3$, siendo el único conjunto afín que lo contiene.



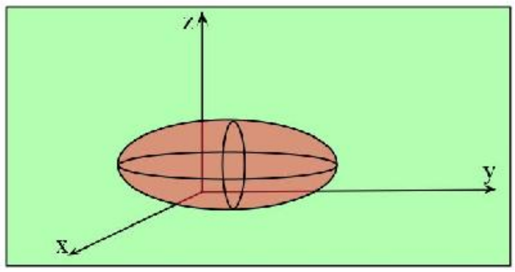
(a) De un segmento de recta: Toda la recta.



(b) De un conjunto plano de $\mathbb{R}^2$: Todo el $\mathbb{R}^2$.



(c) En $\mathbb{R}^3$, de un conjunto plano: El plano que lo contiene.



(d) En $\mathbb{R}^3$ de una superficie: Todo el $\mathbb{R}^3$.

Figura 1.9: Envolventes afines

Los conos convexos, son considerados los conjuntos convexos más simples, sin embargo son parte fundamental en el análisis convexo pues estos se pueden considerar como el conjunto de soluciones de un sistema de desigualdades lineales en una región unilateral, como también son importantes en el análisis lineal en una región bilateral de igualdades. El desarrollo de esta sección se basará en desigualdades por lo que es imprescindible el uso de Conos.

Definición 1.1.12. (Cono)
Un subconjunto K del $\mathbb{R}^n$ es un cono, si es cerrado bajo la multiplicación escalar positiva; es decir; $\lambda x \in K$, cuando $x \in K$ y $\lambda > 0$.

También se puede decir que es la unión de semilineas que parten del origen, como se puede observar en la figura 1.10.

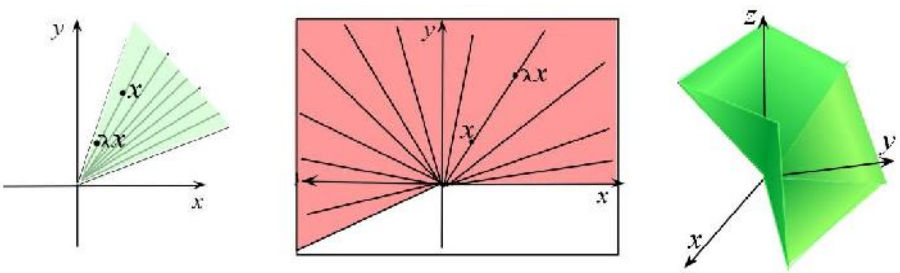


Figura 1.10: Conos

Definición 1.1.13. (Cono convexo)
Sea K un cono, es convexo, si verifica que: Para cada $x, y \in C$ se cumple que $x + y \in K$.

En la figura 1.11, se muestran conos convexos en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

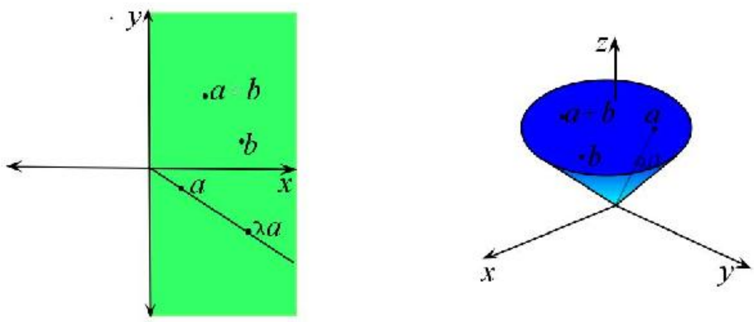


Figura 1.11: Conos convexos

Ejemplo 8. Los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son en particular un cono convexo.
También los semiespacios abiertos correspondientes al hiperplano que pasa por el origen.

Los conos convexos más útiles en la teoría de desigualdades son el octante no negativo de $\mathbb{R}^n$:

$$\Omega'_+ := \{x = (\xi_1, ..., \xi_n) : \xi_i \ \geq 0, ..., \xi_n \ \geq 0\}$$

y el octante positivo:

$$\Omega_+ := \{x = (\xi_1, ..., \xi_n) : \xi_i > 0, ... \ \geq \xi_n \ > 0\}$$

Es habitual escribir: $x \geq x'$, si $x - x'$ pertenece al octante no negativo; es decir si $\xi_j \geq \xi_j'$ para $j = 1, ..., n$. En esta notación, los octantes no negativos consisten de todos los vectores x talque $x \geq 0$.

Teorema 1.1.3. *La intersección de una colección arbitraria de conos convexos es un cono convexo.*

Demostración. Inmediato.

□

Corolario 1.1.3.1. *Sea $b_i \in \mathbb{R}^n$ para $i \in I$, donde I es un conjunto arbitrario de índices. Luego $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, b_i \rangle \leq 0, \ i \in I\}$ es un cono convexo.*

Demostración. Sea $K_i = \{x : \ \langle x, b_i \rangle \leq 0\}$ entonces K_i es un semiespacio cerrado ó $\mathbb{R}^n$ ó ϕ y $K = \bigcap_{i \in I} K_i$. □

En el corolario se puede cambiar de sentido las desigualdades ; así el conjunto de soluciones al sistema de desigualdades lineales es un cono convexo; más que sólo un conjunto convexo, si las igualdades son homogéneas.

La siguiente caracterización de conos convexos es semejante entre conos y subespacios.

Proposición 1.6. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es un cono convexo si y solo si es cerrado bajo la adición y multiplicación escalar positiva.*

Demostración. Sea K un cono convexo, y sean $x, \ y \in K$, entonces el vector: $z = \frac{1}{2}(x + y) \in K$ además, si K es cerrado bajo la adición y $0 < \lambda < 1$, los vectores: $(1 - \lambda)x$ y λy pertenecen a K; por tanto: $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$

Así K es convexo si y solo si este es cerrado bajo la adición.

□

Corolario 1.1.3.2. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es un cono convexo si y solo si contiene todas las combinaciones lineales de sus elementos (es decir todas las combinaciones lineales $\lambda_i x_i + ... + \lambda_m x_m$ en donde los coeficientes son todos positivos)*

Corolario 1.1.3.3. *Sea S un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ y sea K el conjunto de todas las combinaciones lineales de S. Entonces K es el cono convexo más pequeño que contiene a S.*

Demostración. Claramente K es cerrado bajo la adición y multiplicación escalar, y $K \supset S$, cada cono convexo incluyendo a S debería incluir a K. □

Corolario 1.1.3.4. *sea C un conjunto convexo y sea : $K = \{\lambda x : \lambda > 0,\ x \in C\}$ Entonces K es el menor cono convexo que contiene a C.*

Demostración. La demostración se sigue del corolario anterior. Cada combinación lineal positiva de elementos de C es un múltiplo escalar positivo de una combinación de elementos de C y por tanto es un elemento de K. □

Definición 1.1.14. (Bola)

Se define una bola abierta euclidiana en $\mathbb{R}^n$ con centro en $x \in \mathbb{R}^n$ y radio ε como el conjunto:

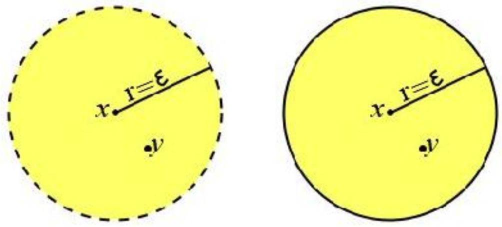
$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n / |y - x| < \varepsilon\ \}$$

Análogamente se define una bola cerrada como:

$$B[x, \varepsilon] = \{y \in \mathbb{R}^n / |y - x| \leq \varepsilon\ \}$$

Para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$, la bola centrada en a y radio $\epsilon > 0$ denotado por: $a + \mathcal{B}_\epsilon$ dado por:

$$\{x :\mid x - a \mid \leq \epsilon\} = a + \mathcal{B}_\epsilon$$



(a) Bola abierta (b) Bola cerrada

Figura 1.12: Bolas euclidianas

Para cualquier conjunto $c \in \mathbb{R}^n$, el conjunto de puntos x cuya distancia de C no excede ϵ es:

$$\{x : \; \exists y \in C, d(x,y) \leq \epsilon\}$$

$$\cup_{x \in C}\{y \in \mathcal{B}_\epsilon : \; y \in C\} = C + \mathcal{B}_\epsilon$$

Proposición 1.7. *Sea $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función afín y C un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, la imagen de C bajo A, $(A(C))$ es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$.*
si D es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^m$, la imagen inversa:
$A^{-1}(D) := \{x \in \mathbb{R}^n : A(x) \in D\}$ *es convexa en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Para x e y en $\mathbb{R}^n$, la imagen bajo A del segmento $[x, y]$ es claramente el segmento $[A(x), A(y)] \subset \mathbb{R}^m$. Esto prueba la primera afirmación.
De hecho si x e y son tales que $A(x)$ y $A(y)$ están ambos en el conjunto D, entonces cada punto del segmento $[x, y]$ tiene su imagen en $[A(x), A(y)] \subset D$
Es decir: $[x, y] \subset A^{-1}(D), \quad \forall\, x, y \in A^{-1}(D)$

□

Definición 1.1.15. (Polar de un cono convexo)

Sea K un cono convexo, su polar es:
$K^\circ := \{s \in \mathbb{R}^n / \langle s, x\rangle \geq 0 \; \forall \; x \in K\}$

1.2 Interior relativo

El interior " relativo "puede ser introducido en situaciones donde los conjuntos convexos tienen interior vacío.
Observe que un segmento de recta o un triángulo inmerso en $\mathbb{R}^3$ no poseen interior en su mismo espacio circundante, pues, para todo punto en el segmento de recta o el triángulo dentro del $\mathbb{R}^3$, la bola centrada en dicho punto no está totalmente contenida en dichos conjuntos como se ve en la figura 1.13:

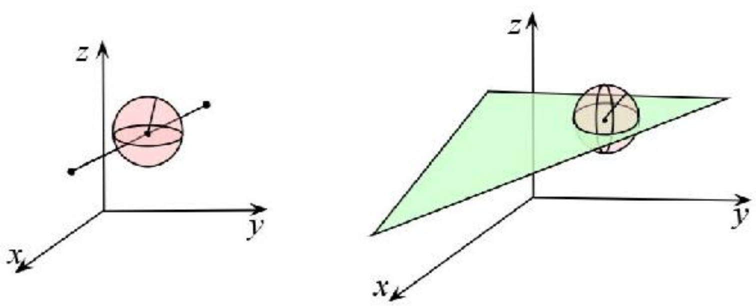


Figura 1.13: Segmento de recta y triángulo incrustado en $\mathbb{R}^3$

Por eso en análisis convexo, se introduce el concepto de topología relativa y el concepto de interior es absorbido en un concepto más conveniente el cual es llamado interior relativo.

Definición 1.2.1. (Interior relativo)
El interior relativo de un conjunto convexo C en $\mathbb{R}^n$, se define como el interior que resulta cuando C es considerado como un subconjunto del envolvente afín $aff\ C$, el que será denotado por riC.

El término "relativo" se puede asumir como "relativo del envolvente Afín del conjunto". Así el interior relativo consiste de los puntos $x \in aff\ C$, para los cuales existe un $\varepsilon > 0$ tal que $y \in C$ siempre que, $y \in aff\ C$.

Es decir:

$$riC = \{x \in aff\ (C) /\ \ \exists\, \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap aff\ (C) \subset C\}$$

Ejemplo 9.

C	Aff C	dim C	ri C
{x}	{x}	0	{x}
$[x, y]$	recta afín generada por x,y	1	(x,y)
$\triangle_n$	variedad afín de ecuación $e^t.\alpha = 1$	n-1	$\{\alpha \in \triangle_n : \alpha_i > 0\}$
$B(x_0, \delta)$	$\mathbb{R}^n$	n	int $B(x_0, \delta)$

Es claro que:

$$ri\ C \subseteq C \subseteq cl\ C$$

En la figura 1.14 se observa interiores relativos de conjuntos, ahora se puede ver que un segmento de recta incrustado en $\mathbb{R}^3$ si tiene interior relativo.

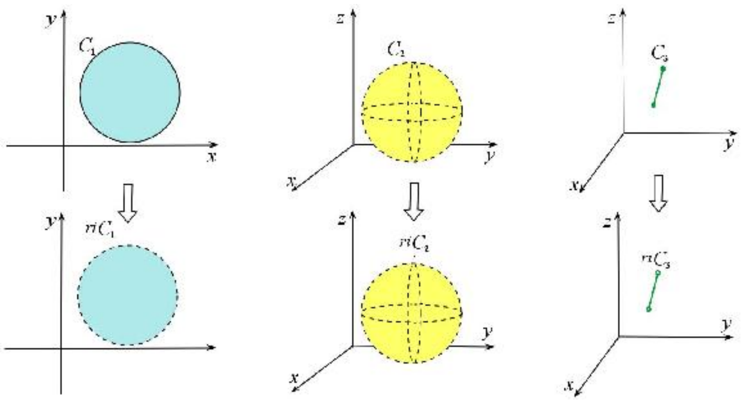


Figura 1.14: Interiores relativos

Observación 3.

✓ Para un conjunto convexo n-dimensional $aff\ (C) = \mathbb{R}^n$ por definición, así que $ri\ C = int\ C$.

✓ C es llamado relativamente abierto si $ri\ C = C$.

- ✓ Los puntos adherentes de un conjunto C están en $aff\ (C)$ (que es cerrado y contiene a C) así la clausura relativa de C es precisamente $cl\ (C)$
- ✓ El conjunto diferencia $(cl\ C)\backslash(ri\ C)$ es llamado la frontera relativa de C.
- ✓ La inclusión $C_1 \subset C_2$ no implica que $ri\ C_1 \subset ri\ C_2$. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10. Si C_1 es el cubo en $\mathbb{R}^3$ y C_2 es una de sus caras: si se tiene que $C_2 \subset C_1$

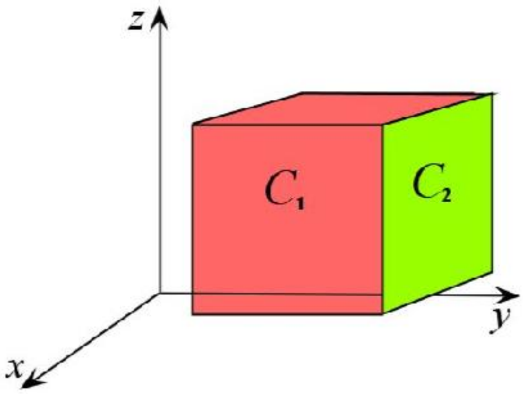


Figura 1.15: El cubo C_1 en $\mathbb{R}^3$ y C_2, una de sus caras

Se observa en a) y b) los afines de C_1 y C_2 y en c) y d) se ve los interiores relativos de cada conjunto C_1 y C_2:
Ambos $ri\ C_1$, $ri\ C_2$ son no vacíos pero disjuntos, es decir:

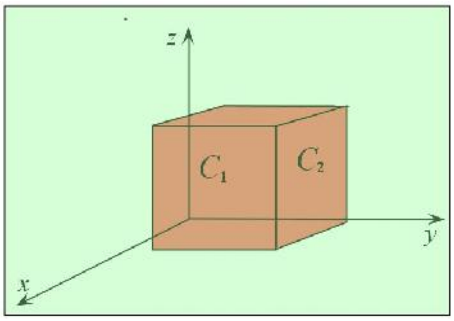
$$\Longrightarrow ri\ C_1 \cap ri\ C_2 = \emptyset$$

$$\Longrightarrow ri\ C_1 \not\subseteq ri\ C_2$$

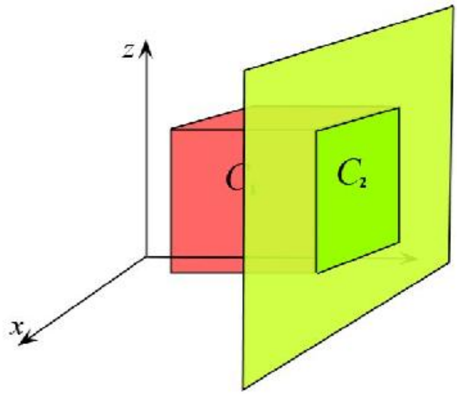
$\therefore$ si $C_2 \subset C_1$ no implica que $riC_2 \subset riC_1$

Un primer resultado importante es:

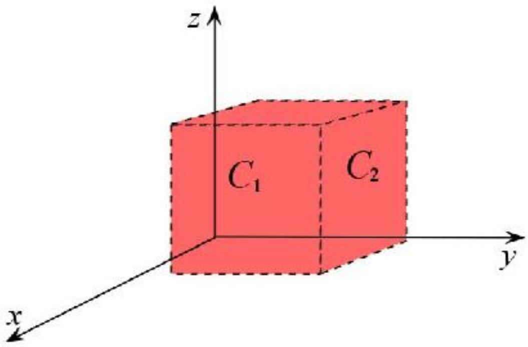
Teorema 1.2.1. *Si* $C \neq \phi \ \Rightarrow ri\ (C) \neq \phi$. *De hecho* $dim\ (ri\ (C)) = dim\ C)$



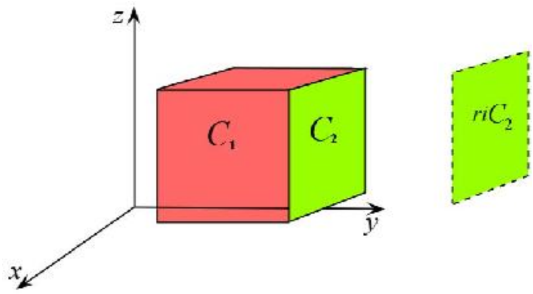
(a) $aff\ C_1 = \mathbb{R}^3$



(b) $aff\ C_2$



(c) $ri\ C_1$ es el cubo sin sus caras



(d) $ri\ C_2$ es la cara sin sus bordes

Demostración. Sea $k = dim\ C$, entonces C contiene $k+1$ elementos afínmente independientes $x_0, ..., x_k$ que generan un simplex: $co\{x_0, ..., x_k\} =: \triangle$

$$aff\ \triangle = aff\ C,\ porque\ \ \triangle \subset C\ y\ dim\triangle = k$$

solo falta demostrar que $\triangle$ tiene interior relativo no vacío. Sea $\overline{x} := \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} x_i$ (el centro de $\triangle$). y describe el $aff\ \triangle$ por puntos de la forma:

$$\overline{x} + y = \overline{x} + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i(y)x_i = \sum_{i=0}^{k}[\frac{1}{k} + \alpha_i(y)]x_i$$

. donde $\alpha(y) = (\alpha_i(y), ..., \alpha_k(y)) \in \mathbb{R}^{k+1}$ son soluciones de:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = y, \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$$

porque este sistema tiene única solución. La correspondencia: $y \to \alpha(y)$ es (lineal y) continua, se puede tomar $\delta > 0 : \|y\| \leq \delta$ implica que: $\| \ \alpha_i(y)\ \| \leq \frac{1}{k+1}, \quad \forall\ i = 1, ..., k.$

Por tanto $\overline{x}+y \in \triangle$; es decir $\overline{x} \in ri\triangle \subset riC$.

Se sigue particularmente que:$dim\ ri\ (C) = dim\triangle = dim\ C)$ □

Demostración. □

Corolario 1.2.1.1. *Sea C_1 un conjunto convexo y sea C_2 un conjunto convexo contenido en $cl(C_1)$ pero no enteramente contenido en la frontera relativa de C_1.*
Entonces $ri\ C_2 \subset ri\ C_1$.

Demostración. □

Proposición 1.8. *Los conjuntos $ri\ (C)$, C, y $cl\ (C)$ tienen el mismo envolvente afín (y por tanto la misma dimensión) el mismo interior relativo y la misma clausura (por tanto la misma frontera relativa)*

Demostración. □

1.3 Cono Asintótico

Ya se había mencionado la importancia de los conos y la facilidad de su uso, pero no todos los conjuntos son conos; Si un cono convexo cerrado es el conjunto de direcciones que se dirigen al infinito, se podría generalizar este concepto a aquellos conjuntos no cónicos logrando que estos tengan la misma propiedad, para esto surge:

Definición 1.3.1. (Recesión)
Sea C un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$, diremos que C recede en la dirección de D si C incluye todas las semirrectas en la dirección de D, las cuales empiezan en puntos de C.
Es decir: C recede en la dirección de y, con $y \neq 0$ si y sólo si $x+\lambda y \in C$, $\forall\lambda \geq 0$ y $x \in C$

Definición 1.3.2. (Cono de recesión o Cono asintótico)
Sea C un conjunto convexo cerrado en $\mathbb{R}^n$, el cono de recesión de C está dado por el

conjunto de vectores $y \in \mathbb{R}^n$ (incluyendo $y = 0$) que satisfacen $x + \lambda y \in C$ para cada $\lambda \geq 0$ y $x \in C$, el cono de recesión es denotado por C_∞.

Es decir el cono asintótico es el cono convexo cerrado:

$$C_\infty(x) = \{y \in \mathbb{R}^n / \ x + \lambda y \in C, \ \forall \ \ x \in C, \ \forall \ \ \lambda \geq 0\}$$

A pesar de las apariencias $C_\infty(x)$ depende sólo del comportamiento de C en el infinito. De hecho: $x + \lambda.y \in C$ implica que $x + \tau.y \in C, \quad \forall \ \tau \in [0, \lambda]$

Así: $C_\infty(x)$ es justo el conjunto de direcciones cuando x se dirige al infinito, mientras que permanezcan en C.

También se puede formular como:

$$C_\infty(x) = \bigcap_{\lambda > 0} \frac{C - x}{\lambda} \tag{1.1}$$

De (1.1) se deduce que $C_\infty(x)$ es un cono convexo cerrado, el cual por supuesto contiene a 0.

Proposición 1.9. *El cono convexo cerrado $C_\infty(x)$ no depende de $x \in C$*

Demostración. Se toman dos puntos diferentes x_1 y x_2 en C, es suficiente demostrar la inclusión: $C_\infty(x_1) \subset C_\infty(x_2)$. Sea $y \in C_\infty(x_1)$ y $\lambda > 0$ se debe probar que: $x_2 + \lambda.y \in C$ con $\varepsilon \in (0, 1)$, se considera el punto:

$$\begin{aligned} \overline{x}_\varepsilon : \ &= \ x_1 + \lambda.y + (1 - \varepsilon)(x_2 - x_1) \\ &= \ \varepsilon(x_1 + \frac{\lambda}{\varepsilon}.y) + (1 - \varepsilon)x_2 \end{aligned}$$

Por ser C convexo y $x_1 + \dfrac{\lambda}{\varepsilon}.y \in C, \quad \forall \ \dfrac{\lambda}{\varepsilon} > 0$, se cumple que: $\overline{x}_\varepsilon \in C$
Pasando al límite: $x_2 + \lambda.y = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \overline{x}_\varepsilon \in cl \ C = C$. Por tanto $x_2 + \lambda.y \in C$

$\square$

Ejemplo 11.

1. Sea $C_1 = \{(x, y)/x > 0, y \geq \frac{1}{x}\}$

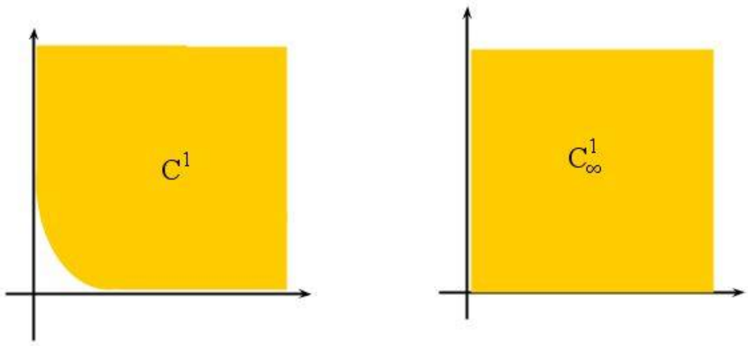


Figura 1.16: Cono de recesión de C_1

2. Sea $C_2 = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$, hallar el cono de recesión para C_2

$$
\begin{aligned}
Sea\ a = (x_1, y_1) \in C_2 &\implies x_1^2 + y_1^2 \leq 1 \\
b = (x_2, y_2) \in C_\infty^2 &\iff a + \lambda b \in C_2, \quad \forall \lambda \geq 0 \text{ y } y \neq 0 \\
&\iff (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) \in C_2 \\
&\iff (x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 \leq 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\text{pero } \ x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + y_1^2 + \lambda^2 y_2^2 \leq (x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 \leq 1 \\
0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\
\Rightarrow \quad \lambda^2 (x_2^2 + y_2^2) \leq 0 \text{ pero } \lambda \geq 0 \\
0 \leq x_2^2 + y_2^2 \leq 0 \\
x_2 = y_2 = 0 \\
\implies (x_2, y_2) = (0, 0) = 0 \ \in 0^+ C_\infty^2 \\
\therefore C_\infty^2 = \{(0, 0)\}
\end{gathered}
$$

Proposición 1.10. *Un conjunto convexo C es compacto si y solo si $C_\infty = \{0\}$.*

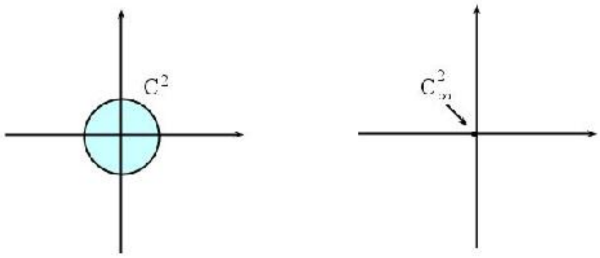


Figura 1.17: Cono de recesión de C_2

Demostración. Si C es acotado, C_∞ no puede contener direcciones diferentes de cero. Ahora considere $(x_k) \subset C$ talque $\|x_k\| \to +\infty$, $x_k \neq 0$, la sucesión $d_k = \dfrac{x_k}{\|x_k\|}$ es acotada.

Extrayendo una subsucesión: $d = \lim\limits_{k \to K} d_k \qquad K \subset \mathbb{N}, \quad \|d\| = 1$

Ahora dado $x \in C$ y $t > 0$, se considera k tan grande que: $\|x_k\| \geq t$

Así: $x + td = \lim\limits_{k \in K} [(1 - \dfrac{t}{\|x_k\|}) + \dfrac{t}{\|x_k\|} x_k]$ pertenece al conjunto C, Por tanto $d \in C_\infty$.

□

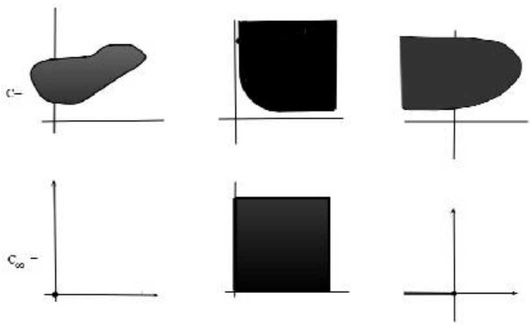


Figura 1.18: Ejemplos de Conos asintóticos en $\mathbb{R}^2$

1.4 Separación y aplicaciones

La teoría de separación ha resultado ser una de las nociones más provechosas en la teoría de convexidad y sus aplicaciones, esto se basa en el hecho que un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ divide a $\mathbb{R}^n$ en dos partes; en ese sentido el complemento de un hiperplano es la unión de dos conjuntos convexos abiertos disjuntos, los cuales son los semiespacios abiertos asociados al hiperplano.

Al tomar dos conjuntos convexos disjuntos C_1 y C_2 se puede decir: un conjunto convexo simple (hiperplano afín) puede encontrarse entre C_1 y C_2, esta propiedad importante se sigue gracias al operador proyección.

Definición 1.4.1. (Hiperplano de separación) Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$, un hiperplano H separa C_1 y C_2, si C_1 está contenido en uno de los semiespacios cerrados asociados a H y C_2 está en el semiespacio cerrado opuesto.

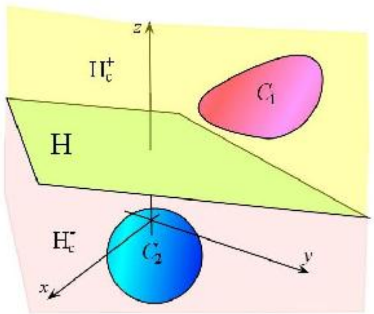


Figura 1.19: Hiperplano de separación

Definición 1.4.2. (Separación Propia) Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$, un hiperplano H separa propiamente a C_1 y C_2, si C_1 y C_2 no están ambos realmente contenidos en H.

Para ilustrar la definición particularmente si se toma C_1 un círculo y C_2 un cilindro como se muestra en la figura 1.20 donde $C_1 \subset H$ pero C_2 no, entonces se dice que C_1 y C_2 están separados propiamente.
Dado un conjunto convexo y fijando un punto en $\mathbb{R}^n$ se asocia una función que maximiza al supremo de la colección de las formas lineales con respecto al conjunto dado, y este supremo resulta ser la función soporte que veremos más adelante.

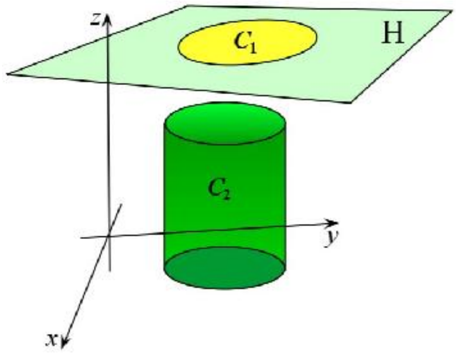


Figura 1.20: Separación propia

Teorema 1.4.1. *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío y sea $x \notin C$ entonces existe $s \in \mathbb{R}^n$ talque:*

$$\langle s, x \rangle > \sup\{\langle s, y \rangle : y \in C\} \tag{1.2}$$

Demostración.
Ver detalle de la demostración en [1].

□

Definición 1.4.3. (Separación fuerte) Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$, un hiperplano H separa fuertemente si existe algún $\varepsilon > 0$ talque $C_1 + \varepsilon B$ está contenido en uno de los semiespacios abiertos asociados a H y $C_2 + \varepsilon B$, está contenido en el otro semiespacio abierto; donde B es una bola euclidiana unitaria $\{x \ /|x| \leq 1\}$
(por su puesto, $C_i + \varepsilon B$ contiene todos los x talque $|x - y| \leq \varepsilon$ para algún $y \in C_i$)

En la figura 1.19 se observa una esfera y un cilindro que están separados fuertemente. Otra clase de separación es a veces considerada:

Definición 1.4.4. (Separación estricta) Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$, un hiperplano H separa estrictamente a C_1 y C_2 cuando cada conjunto pertenece a un semiespacio abierto opuesto.

La separación propia y separación fuerte parecen las más usadas, pues corresponden de manera natural con los extremos de funciones lineales.

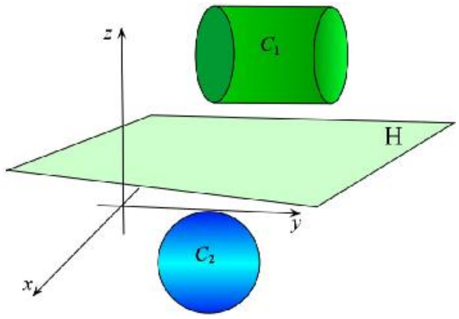


Figura 1.21: Separación fuerte

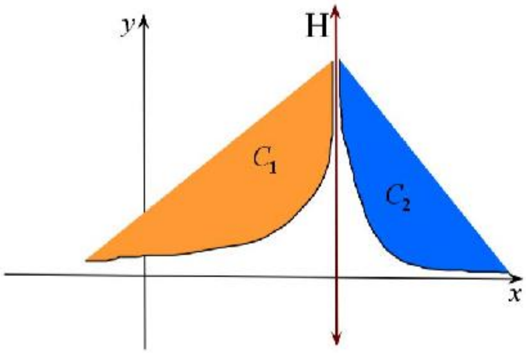
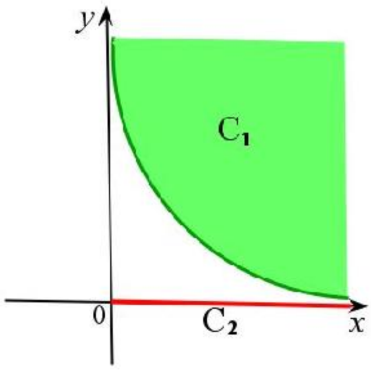


Figura 1.22: Separación estricta



Observación 4. La separación propia permite que uno (pero no ambos) de los conjuntos esté contenido en el hiperplano de separación.
El único hiperplano se separación es el eje ξ_1, el cual contiene a todo C_2

Este ejemplo también muestra que no todo par de conjuntos convexos disjuntos pueden estar separados fuertemente.

Teorema 1.4.2. *Un conjunto convexo cerrado C es la intersección de los semiespacios cerrados que lo contienen.*

Demostración.

Dado que el teorema es trivial se asume: $0 \neq C \neq \mathbb{R}^n$

Si se considera: $C_1 = a$ con $a \notin C$ y $C_2 = C$ entonces existe un hiperplano que separa a $\{a\}$ y C fuertemente.

Uno de los semiespacios cerrados asociados a este hiperplano, contiene a C pero no contiene a $\{a\}$.

Así, la intersección de los semiespacios cerrados que contienen a C no contienen otros puntos que no están en C.

$\square$

Definición 1.4.5. Sea C un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, un **Semiespacio de soporte** para C es un semiespacio cerrado, el cual contiene a C, puntos de C y su frontera.

Como ejemplo veamos la siguiente figura donde el semiespacio de soporte del triángulo es el semiespacio cerrado inferior asociado al hiperplano H que es una recta, dicho semiespacio lo intersecta en uno de sus vértices.

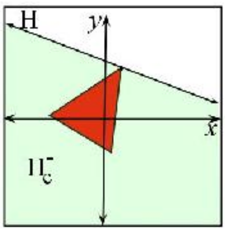


Figura 1.23: Semiespacio de soporte

Definición 1.4.6. Sea C un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, un **Hiperplano de soporte** para C es un hiperplano, el cual es frontera de un semiespaciode soporte de C.

En la figura 1.24 en el lado izquierdo se observa un cubo sólido con su hiperplano de soporte, un plano que contiene una de sus caras. En el lado derecho se ve un elipsoide sólido con su hiperplano de soporte: un plano que intersecta en uno de sus vértices y es la frontera de un semiespacio de soporte.

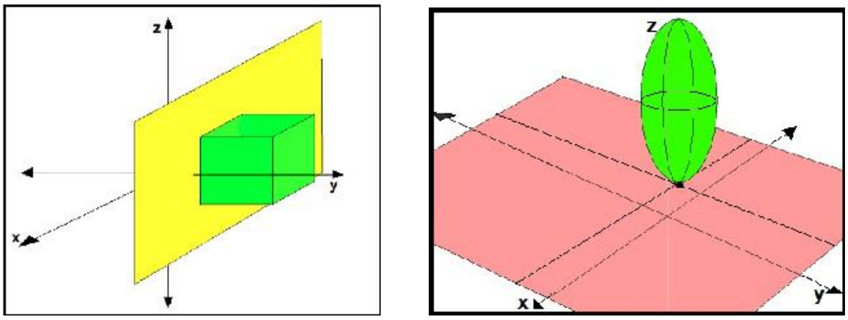


Figura 1.24: Hiperplanos de soporte en $\mathbb{R}^3$

Los hiperplanos de soporte de C, son los hiperplanos que son representados en la forma: $H = \{x/ < x, b >= \beta \;\; b \neq 0\}$ Donde:

$$
\begin{aligned}
< x, b > \;\; &\leq \;\; \beta, \qquad \forall \;\; x \in C \\
< x, b > \;\; &\geq \;\; \beta, \qquad \text{para algún} \;\; x \in C
\end{aligned}
$$

Observación 5.

1. Así un hiperplano de Soporte de C es asociado a una función lineal, la cual alcanza su máximo en C.

2. El hiperplano de soporte que pasa a través de un punto dado $a \in C$ corresponde al vector normal b de C en a, definido anteriormente.

3. Si C no es n-dimensional, de modo que $aff\ C \neq \mathbb{R}^n$, podemos extender siempre $aff\ C$ al hiperplano que contiene a todo C, usualmente hablamos de hiperplano de soporte de C no triviales, es decir, los cuales no contienen a C.

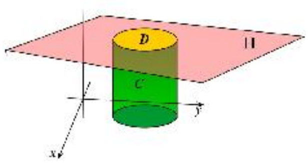


Figura 1.25: gráfica para el ejemplo 12

Ejemplo 12. Considere C como el cilindro y D una de las bases del cilindro, entonces el hiperplano que soporta al cilindro es el plano que contiene a la base, el mismo que esta separando propiamente a C y D.

Teorema 1.4.3. *Sea C_1 y C_2 subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, uno de los cuales es un cono; si existe un hiperplano que separa C_1 y C_2 propiamente, entonces existe un hiperplano que separa C_1 y C_2 propiamente y pasa a través del origen.*

Demostración. Para ilustrar el torema se ha tomado dos conos como se observa en: $\square$

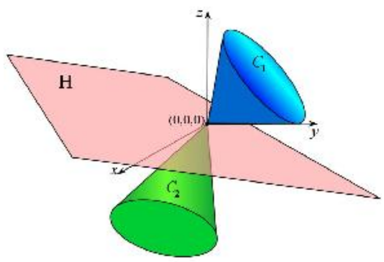


Figura 1.26: Interpretación del teorema 1.4.3

Capítulo 2:

Funciones convexas

La relación entre conjuntos convexos y funciones convexas son un tema de discusión y provecho, lo mejor está cuando se establecen los criterios de convexidad.
Los conjuntos convexos y su caracterización junto con otras funciones son mostradas con claridad para la correspondencia futura.

2.1 Definiciones y propiedades básicas

Definición 2.1.1. (Función convexa)
Una función $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa sobre S si:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \ \forall \ x, y \in S, \ \lambda \in (0,1) \tag{2.1}$$

En otras palabras f es convexa si, $\forall \ (x, y) \in S \times S$, el segmento de recta que los une se ubica sobre la gráfica de la función.

Cuando la desigualdad es estricta se dice que f es estrictamente convexa.

Definición 2.1.2.
Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ no idéntica a $\{+\infty\}$, se dice convexa cuando, $\forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda \in (0, 1)$, se cumple:

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \tag{2.2}$$

considerada una desigualdad en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Observación 6. La diferencia entre las definiciones anteriores es que en 2.1.2 se define la convexidad extendiendo el dominio a todo $\mathbb{R}^n$; manteniendo la convexidad aunque haya tomado valores infinitos. Este cambio no es estrictamente necesaria pero facilita la comprensión de resultados posteriores.
Así f en 2.1.1 se extiende por:

$$f(x) = +\infty, \quad para\ x \notin C \tag{2.3}$$

Todas estas funciones pertenecen a la clase de funciones convexas en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que se denota por *conv* $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.1. *El supremo puntual de una colección arbitraria de funciones convexas es convexa.*

Demostración. En efecto, si:

$$f = \sup\{f_i(x) : i \in I\}$$

el epígrafo de f es la intersección de los epígrafos de las funciones f_i y se sabe que la intersección de una colección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

□

Teorema 2.1.2. *Si f_1 y $f_2 \in$ conv $\mathbb{R}^n$ entonces $f_1 + f_2 \in$ conv $\mathbb{R}^n$*

Demostración. es inmediato de definición 2.1.2

□

Una combinación lineal $\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n$ de funciones convexas con coeficientes no negativos es convexa.

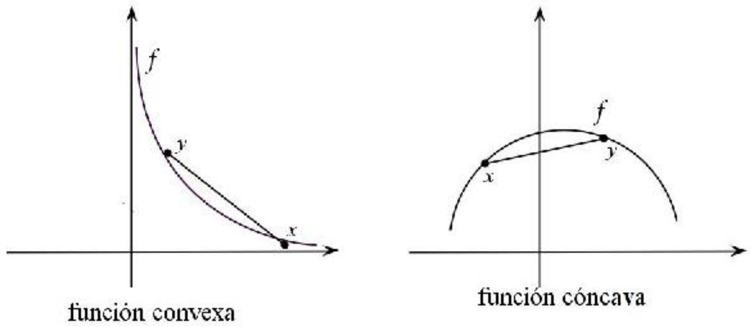
Definición 2.1.3. (Función cóncava)

Una función $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice cóncava si:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \ \forall x, y \in S, \ \lambda \in (0,1)$$

En otras palabras f es cóncava si, $\forall \ x, y \in S$ el segmento de recta que los une se ubica debajo la gráfica de la función.

Cuando la desigualdad es estricta se dice que f es estrictamente cóncava.



Definición 2.1.4. (Epígrafo de una función)

Sea f una función cuyos valores son reales ó $\{\pm\infty\}$ y cuyo dominio es un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$; El conjunto:

$$\{(x, \mu)/x \in S, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \mu \geq f(x)\}$$

es llamado el **epígrafo de** f y será denotado como *epi* f.

Desde el punto de vista geométrico el epígrafo es el conjunto de puntos que están sobre la gráfica de dicha función.

Análogamente se define el **hipógrafo** de una función (hipo f) como sigue: $\{(x, \mu)/x \in S, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \mu \leq f(x)\}$

Observación 7.

1. Una función es afín en S, si es finita, convexa y cóncava, es decir finita lineal.

2. Una función es convexa , si su epígrafo es convexo.

3. Una función es cóncava, si su hipógrafo es convexo.

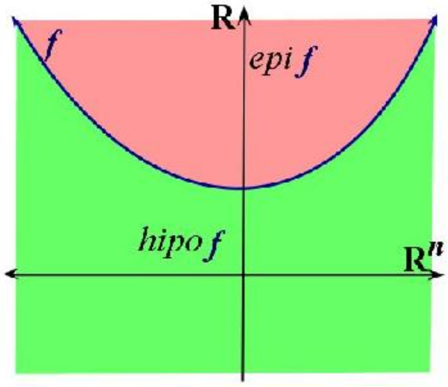


Figura 2.1: Epígrafo e hipógrafo de f

Definición 2.1.5. (Dominio efectivo)

Se define el dominio efectivo de una función convexa, como el subconjunto S, el cual es la proyección sobre $\mathbb{R}^n$ del epígrafo de f:

$$domf = \{x \in \mathbb{R}^n / \exists\ \mu, (x, \mu) \in epif\} = \{x/f(x) < +\infty\}$$

se denotará por $dom\ f$.

Claramente si f satisface (2.1) o (2.2) tiene un dominio convexo, dado que $f \in conv\ \mathbb{R}^n$, se puede tomar $C = domf$ para obtener una función convexa en el sentido de la definición 2.1.2.

Definición 2.1.6. (Transformación afín)

Una función $T : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice transformación Afín si:

$$T((1-\lambda)x + (\lambda)y) = (1-\lambda)T(x) + \lambda T(y)$$

para todo x, y en $\mathbb{R}^n$ y todo $\lambda\ \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.1.3. *Las transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ son las funciones de la forma: $T(x) = A(x) + a,$ donde A es una transformación lineal y $a \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Si T es afín, sea $a = T(0)$ y $A(x) = T(x) - a$ entonces A es una transformación afín con $A(0) = 0$.

Análogamente si $T(x) = A(x) + a$, donde A es lineal se tiene:

$$T((1-\lambda)x + (\lambda)y) = (1-\lambda)A(x) + (\lambda)A(y) + a = (1-\lambda)T(x) + (\lambda)T(y)$$

Así T es afín. $\square$

La inversa de una transformación afín, si existe, es afín.
Dado f una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, si f es una transformación afín el conjunto imagen $TM = \{T(x) : x \in M\}$ es afín en $\mathbb{R}^m$ para cada conjunto afín M en $\mathbb{R}^n$, en particular, la transformación afín preserva envolventes afines:

$$aff(TS) = T(aff\ S)$$

La gráfica de una transformación afín de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$es un subconjunto afín de $\mathbb{R}^{n+m}$, esto se sigue del teorema 1.1.2, porque si $T(x) = A(x) + a$ la gráfica de T consiste de todos los vectores $Z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^m$, tal que $Bz = b$, donde $b = -a$ y B es la transformación lineal: $(x, y) \longmapsto Ax - y$ de $\mathbb{R}^{n+m} \longmapsto \mathbb{R}^n$.
En particular, la gráfica de una transformación lineal: $x \longmapsto Ax$ de $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ es un conjunto afín conteniendo el origen de $\mathbb{R}^{n+m}$ y por tanto es un subespacio L de $\mathbb{R}^{n+m}$.(teorema 1.1.1)

Definición 2.1.7. (Función afín)
Una función $A : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice afín cuando:

$$A(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha A(x) + (1-\alpha)A(y)$$

para todo x, y en $\mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observación 8. Las funciones afines de $\mathbb{R}^n$ son transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$

Al hablar que una función es finita quiere decir que dicha función no toma valores infinitos($\pm\infty$).

Un conjunto afín bajo funciones afines es un conjunto afín. Así es el caso también para conjuntos convexos.

En el caso multidimensional, es trivial de la definición 2.1.1 que cada función de la forma: $f(x) = \langle x, a \rangle + \alpha \quad a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ es convexa en $\mathbb{R}^n$, de hecho afín y cada función afín es de esta forma (teorema 2.1.3).

Al definir el **Conjunto de Subnivel** por:

$$S_r(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq r\}$$

Se tiene la equivalencia:

$$(x, r) \in Epi\ f \Leftrightarrow x \in S_r(f)$$

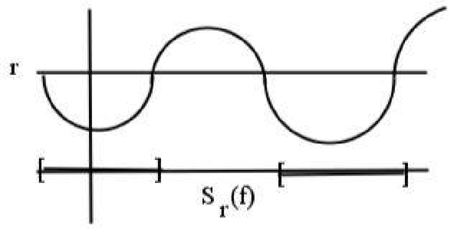


Figura 2.2: Conjunto de subnivel de f

Teorema 2.1.4. *Sea S un conjunto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces el conjunto de subnivel*

$$S_r(f) := \{x \in S : f(x) \leq r, \quad r \in \mathbb{R}\}$$

es un conjunto convexo.

Demostración. Sean x_1 y $x_2 \in S_r$. x_1 y $x_2 \in S$, y $f(x_1) \leq r$ y $f(x_2) \leq r$
Ahora sea $\lambda \in (0,1)$ y $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$
Por la convexidad de S, se tiene que $x \in S$, además, por la convexidad de f: $f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r$ entonces, $x \in S_r$, por tanto S_r es convexo.

□

Corolario 2.1.4.1. *Sea f_i una función convexa sobre $\mathbb{R}^n$ y α_i un número real para cada $i \in I$, donde I es un conjunto índice arbitrario, entonces : $C = \{x : f_i(x) \leq \alpha, \ \forall \ \ i \in I\}$ es un conjunto convexo.*

Demostración. De la misma manera que 1.1.2.2. □

Observación 9. Los conjuntos de subnivel de $f \in$ *conv* $\mathbb{R}^n$, son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ convexos.
Para construir $S_r(f)$ se corta el epígrafo de f con un plano trasversal, formando la intersección de los conjuntos convexos: *epi* $f \cap (\mathbb{R}^n \times \{r\})$ y se proyecta el resultado a $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.
El *Dom* f es la unión sobre $r \in \mathbb{R}$ de los conjuntos de subnivel $S_r f$, los cuales forman una familia anidada, este también puede verse como la proyección del *epi* $f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^n$

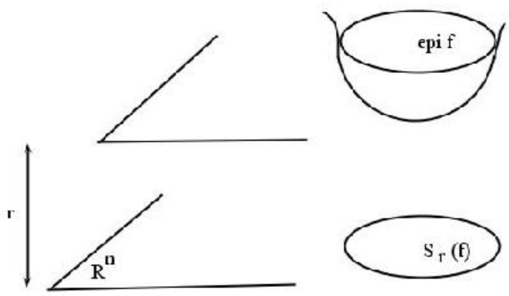


Figura 2.3: Construcción del conjunto de Subnivel

La siguiente propiedad es interpretada como una definición más de funciones convexas:

Proposición 2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ no idéntica a $+\infty$ son equivalentes:*

i) *f es convexa en el sentido de la definición 2.1.2.*

ii) *Su epígrafo es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

Demostración. Inmediato. □

Definición 2.1.8. (Función propia)

Una función convexa f, se dice propia si, su epígrafo es no vacío y no contiene rectas verticales; es decir, si $f(x) < +\infty$ para al menos un x y $f(x) > -\infty$ para cada x.

Si una función no es propia se dice función impropia.

En la clausura de funciones convexas, el asunto principal es la semicontinuidad inferior, esta propiedad es más importante que la continuidad en el caso de funciones convexas, pues, lo relaciona directamente con su epígrafo. Y ¿ qué sucede cuando una función no es semicontinua inferiormente?, en dicho caso se redefine sus valores de manera única con ciertos puntos límites de su dominio efectivo. A esta operación se le conoce como **Clausura de funciones convexas**, la cual coincide con la clausura de su epígrafo (como subconjuntos de $\mathbb{R}^{n+1}$) cuando las funciones pertenecen a *conv* $(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Funciones cerradas

Definición 2.2.1. (Función semicontinua inferior)

Una función de valores reales extendidos f sobre un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, se dice semicontinua inferior en un punto x de S si

$$f(x) \leq \lim_{i\to\infty} f(x_i)$$

para cada sucesión $x_1, x_2, ...,$ en S tal que x_i converge a x y el límite de $f(x_1), f(x_2), ...,$ existe en $[-\infty; +\infty]$, esta condición puede ser expresada como:

$$f(x) = \liminf_{y\to x} f(y)$$

.

Similarmente, f se dice que es semicontinua superior en x si

$$f(x) = \limsup_{y\to x} f(y)$$

La combinación de semicontinuidad inferior y superior a la vez en x, es la continuidad ordinaria en x.

El siguiente teorema es la caracterización fundamental de semicontinuidad inferior que relaciona a la función convexa directamente con su epígrafo.

Proposición 2.2. *Sea f una función arbitraria de $\mathbb{R}^n$ a $[-\infty; +\infty]$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es semicontinua inferior a lo largo de $\mathbb{R}^n$*

(b) *$\{x/f(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(c) *El epígrafo de f es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración.

- $[a \Rightarrow b]$ Sea $(y_k, r_k)_k$ una sucesión de *epi* f que converge a (x, r) cuando $k \to +\infty$ Además:

$$\begin{aligned} f(y_k) &\leq r_k, \quad \forall\ k \\ \lim f(y_k) &\leq \lim r_k = r \\ f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y) &\leq \liminf f(y_k) \leq r \\ f(x) \leq r & \end{aligned}$$

  Por tanto $(x, r) \in epif$, Así *epi* f es cerrado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

- $[b \Rightarrow c]$ según la observación 9, el conjunto de subnivel $S_r(f)$ se construye como la proyección de la intersección de los conjuntos cerrados *epi* f y $\mathbb{R}^n \times \{r\}$.

  Por tanto el conjunto de subnivel es cerrado.

- $[c \Rightarrow a]$ Suponga que f no es semicontinua inferior en algún x, $\exists$ una sucesión $(y_k) \to x$ talque $f(y_k) \to p$.
  Esto es: $\displaystyle\lim_{y_k \to x} f(y_k) = p \leq f(x) \leq +\infty.$

  Se escoge un $r \in (p, f(x))$ y para un k suficientemente grande:

$$f(y_k) \leqslant r \leqslant f(x)$$

  por tanto $S_r(f)$ contiene el extremo de (y_k) pero no su límite en x; pues $f(x) > r$ por tanto se concluye que $S_r(f)$ no es cerrado.

$\square$

Definición 2.2.2. (Funciones cerradas)
La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice cerrada si es semicontinua inferior en todas partes, o si su epígrafo es cerrado y si sus conjuntos subnivel son cerrados.

Al considerar la envolvente semicontinua inferior de una función f, cuyo valor en $x \in \mathbb{R}^n$ es $\liminf\limits_{y \to x} f(y)$, según la proposición 1.6. llega a ser la clausura del *epi* f, esto puede llegar a ser $-\infty$.

Definición 2.2.3. (clausura de una función)
La clausura (o envolvente semicontinua inferior) de una función f es la función:

$$cl\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{definida por:}$$
$$cl\ f(x) := \liminf_{y \to x} f(y), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$

o equivalentemente por:

$$epi(cl\ f) = cl(epi\ f)$$

La envolvente semicontinuo inferior puede ser complicada de calcular. El intervalo entre $f(y)$ y la clausura de $f(y)$ puede ser imposible de control cuando y varía en una vecindad de un punto x dado.

Ejemplo 13. Sea la función $f : (-2,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Luego existe la función $g : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ tal que $g \leq f$, además *epi* $g = cl(epi f)$ como se observa en la siguiente figura. Por tanto g es la envolvente semicontinua inferior de f.

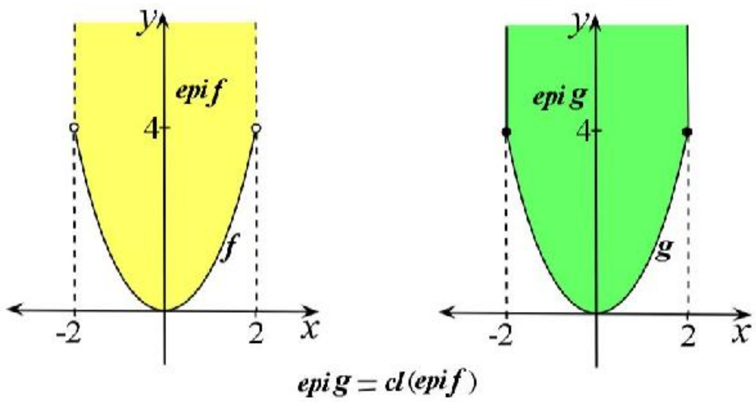


Figura 2.4: g es la envolvente semicontinua inferior de f

Ejemplo 14. Sea la misma función del ejemplo anterior $f : (-2,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Se encontró que g es la envolvente semicontinua inferior de f: $g : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$.
Como f en ninguna parte toma el valor $-\infty$, entonces $\overline{f}$ es la envolvente semicontinua inferior; es decir: $\overline{f} = g$.

Observación 10.

- Una función se dice que es cerrada si $f = \overline{f}$.
- Para una función convexa propia, la cerradura es por tanto equivalente a ser semicontinua inferior.
- La clausura de una función f puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\overline{f}(x) = \liminf_{y \to x} f(y)$$

.

- Siempre se tiene que $\overline{f} \leq f$, y si $f \leq g$, entonces implica $\overline{f} \leq \overline{g}$.

Existen muchas correspondencias entre conjuntos convexos y funciones convexas, las asociaciones más simples con cada conjunto C de $\mathbb{R}^n$ es la función indicador.

Definición 2.2.4. (Función indicador)
Sea C un conjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$, se define la función indicador como la función $I_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{+\infty\}$, dada por:

$$I_C = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in C \\ \\ +\infty, & \text{si} \quad x \notin C \end{cases}$$

I_C es convexo (cerrado) si y solo si C es convexo (cerrado). Además *epi* $I_C = C \times \mathbb{R}^+$. Es decir el epígrafo de la función indicador es un semicilindro con sección transversal C.

Las funciones indicador juegan un rol fundamental en el análisis convexo similar al rol de las funciones características de conjuntos, en otras ramas de análisis.

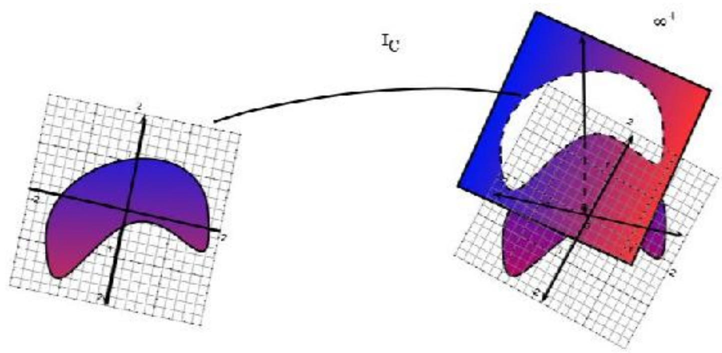


Figura 2.5: Función indicador del conjunto C

2.3 Envolvente epigráfico de un conjunto convexo

Dado un conjunto convexo no vacío $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, es interesante saber cuando C es el epígrafo de alguna función $f \in conv\ f$.

1. La condición $f(x) > -\infty$, para todo x significa que C no contiene semirectas verticales hacia abajo. Es decir:

$$\{r \in \mathbb{R} : (x,r) \in C\}\ es\ minorizada \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

2. C debería ser ilimitada superiormente, más precisamente:

$$(x,r) \in C \Rightarrow (x,r^{'}) \in C \quad \forall\ r^{'} > r \tag{2.5}$$

3. C debería tener un bottom cerrado. Es decir:

$$[(x,r^{'}) \in C\ y\ r^{'} \to r] \Rightarrow (x,r) \in C \tag{2.6}$$

Un conjunto convexo C no vacío que satisface las tres condiciones anteriores es de hecho un epígrafo(de una función convexa si C es convexa)
Si C satisface las dos primeras condiciones tiene su bottom abierto. Es decir :

$$(x,r) \in C \Rightarrow (x,r-\varepsilon) \in C \quad para\ algun\ \varepsilon = \varepsilon(x,r) > 0$$

Entonces C tiene un epígrafo estricto.

Un Epígrafo es la unión de semirectas cerradas hacia arriba.
Es interesante construir un epígrafo con un conjunto dado: el envolvente epigráfico de $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$; éste se define como el epígrafo más pequeño que contiene a C. Su construcción implica operaciones más que triviales en el conjunto ordenado $\mathbb{R}$:

1. Forzar (2.4): para cada $(x,r) \in C$ agregar a C todos $(x,r^{'})$ con $r^{'} > r$.

2. Forzar (2.5): para cerrar el bottom de C se debe poner $(x,r) \in C$, siempre que $(x,r^{'}) \in C$ con $r^{'} \to r$

Estas condiciones permiten construir la función:

$$x \to l_C(x) = \text{ínf}\{r \in \mathbb{R} : (x,r) \in C\} \tag{2.7}$$

denominada la *función acotada inferiormente.*

Observación 11. Claramente *epi* l_C es el envolvente epigráfico de C.

$$l_C(x) > -\infty, \quad \forall \quad x \; si \; C \; satisface \quad (2 \cdot 5). \tag{2.8}$$

Teorema 2.3.1. *Sea C un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que satisface 2.4 y sea su función semicontinua inferior l_C definida por 2.6.*

i) *Si C es convexo, entonces $l_C \in conv\ \mathbb{R}^n$.*

ii) *Si C es convexo cerrado, entonces $l_C \in \overline{conv}\ \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Usando la definición analítica de 2.1. se toma arbitrariamente $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1)$ y $(x_i, r_i) \in C$ talque $r_i \leq l_C(x_i) + \varepsilon$, para $\quad i = 1, 2$

Cuando C es convexo, $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha r_1 + (1-\alpha)r_2) \in C$ por tanto:

$$l_C(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha.r_1 + (1-\alpha)r_2 \leq \alpha.l_C(x_1) + (1-\alpha)l_C(x_2) + \varepsilon$$

por tanto se sigue la convexidad de l_C, pues $\varepsilon > 0$, fue escogido arbitrariamente.
i) es probado.

Ahora tome una secuencia $(x_k, \rho)_k \subset epi\ l_C$ convergiendo a (x, p)
se debe probar que: $l_C \leq \rho$ (proposición 2.3).

Por la definición de $l_C(x_k)$ se puede seleccionar, para cada entero positivo k, un número real r_k talque: $(x_k, r_k) \in C$ y:

$$l_C(x_k) \leq r_k \leq l_C(x_k) + \frac{1}{k} \leq \rho_k + \frac{1}{k} \tag{2.9}$$

Se deduce que (r_k) es acotada. Extrayendo una subsucesión, se puede asumir $r_k \to r$. Cuando C es cerrado , $(x, r) \in C$, por tanto $l_C(x) \leq r$, pero pasando al límite en (2.9) se tiene que $r \leq \rho$

La demostración esta completa. □

Las dualidades matemáticas corresponden a emparejamientos, funciones bilineales entre objetos de una clase y objetos de otro clase, en análisis convexo por ejemplo existe las dualidades de la conjugación de funciones convexas, polaridad de conos, conjuntos y funciones convexas, y la correspondencia entre los conjuntos convexos y funciones soporte, motivo de este estudio.

2.4 Conjugada de funciones convexas

Existen dos maneras de ver las superficies como cónicas, ya sea como lugar geométrico de puntos ó como una envoltura de tangentes, la dualidad fundamental se forma a partir de que un conjunto convexo cerrado en $\mathbb{R}^n$ es la intersección de semiespacios cerrados que lo contienen (teorema 1.4.2).

Los conceptos básicos de conjugación serán usados para deducir teoremas relacionados a la correspondencia. La definición de conjugada surgió del hecho que el epígrafo de una función convexa cerrada en $\mathbb{R}^n$ es la intersección de los semiespacios cerrados en $\mathbb{R}^{n+1}$ que lo contienen.

Empecemos por representar un hiperplano por medio de funciones lineales en $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$(x, u) \longrightarrow \langle x, b \rangle + \mu\beta_0, \quad b \in \mathbb{R}^n,\ \beta_0 \in \mathbb{R}$$

Dado que las funciones lineales no nulas son múltiplo escalares de cada uno de los mismos hiperplanos.

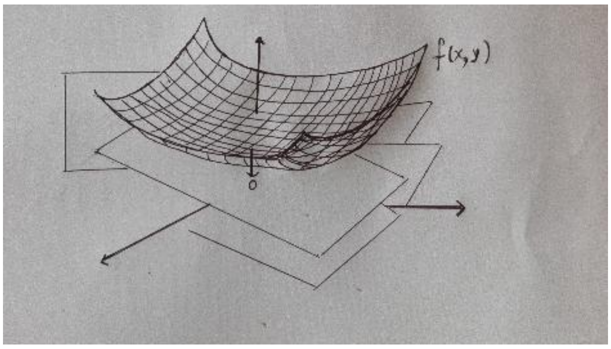


Figura 2.6: función convexa

En los casos $\beta_0 = 0$ se tiene

$$(x,u) : \langle x,b\rangle = \beta, \quad 0 \neq b \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

son llamados hiperplanos verticales. Para $\beta_0 = -1$ son de la forma:

$$(x,u) : \langle x,b\rangle - \mu\beta_0, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Estas son las gráficas de funciones afines $h(x) = \langle x,b\rangle - \beta$

Teorema 2.4.1. *Una función convexa cerrada f es el supremo puntual de la colección de todas las funciones afines h, tal que $h \leq f$.*

Demostración. Dado que el teorema es trivial, se toma f convenientemente, en la medida que *epi* f es un conjunto convexo cerrado, *epi* f es la intersección de los semiespacios cerrados en $\mathbb{R}^{n+1}$ conteniéndolo.

Por supuesto, los semiespacios inferiores no pueden contener conjuntos como *epi* f, así sólo los semiespacios cerrados vertical y superior son involucrados en la intersección.

Los semiespacios involucrados no pueden ser todos verticales, pues implicaría que, *epi* f es la unión de rectas verticales en $\mathbb{R}^{n+1}$, contrario a lo propuesto.

Los semiespacios cerrados superiores que contienen al *epi* f son justo los epígrafos de las funciones afines h talque $h \leq f$.

Su intersección es el epígrafo de los supremos puntuales de las funciones h.

Así para demostrar el teorema se debe mostrar que la intersección de los semiespacios vertical y superior cerrados que contienen al *epi* f es identica a la intersección de los semiespacios superiores cerrados que contienen al *epi* f.

Suponga que:

$$V = \{(x,u)/0 \geq \langle x, b_1 \rangle - \beta_1 = h_1(x)\}$$

es el espacio vertical que contiene a *epi* f y tal que (x_0, u_0) es un punto que no está en V, es suficiente demostrar que existe una función afín h talque $h \leq f$ y $u_o \leq h(x_0)$, sabemos que existe por lo menos una función afín h_2 talque: *epi* $f \subset$ *epi* h_2. Es decir: $h_2 \leq f$. Para cada $x \in Dom\ f$ se tiene $h_1(x) \leq 0$ y $h_2(x) \leq f(x)$ por tanto:

$$\lambda h_1(x) + h_2(x) \leq f(x), \quad \forall\ \lambda \geq 0$$

la misma desigualdad se mantiene trivialmente cuando $x \notin Dom\ f$ porque $f(x) = +\infty$ Así, si se fija cualquier $\lambda \geq 0$ y se define h por:

$$h(x) = \lambda h_1(x) + h_2(x) = \langle x, \lambda b_1 + b_2 \rangle - (\lambda \beta_1 + \beta_2)$$

se tendrá $h \leq f$ puesto que $h_1(x_0) > 0$, y λ suficientemente grande asegura que $h(x_0) > \mu_0$ como se requería.

□

Corolario 2.4.1.1. *Si f es cualquier función de $\mathbb{R}^n$ a $[-\infty, +\infty]$ entonces cl $(co\ f)$ es el supremo puntual de la colección de todas las funciones afines mayorizadas por f*

Demostración. Dado que *cl* $(co\ f)$ es la máxima función convexa cerrada mayorizada por f, la función afín h talque: $h \leq cl\ (co\ f)$ es la misma talque $h \leq f$.

□

Corolario 2.4.1.2. *Dada cualquier función convexa f en conv$(\mathbb{R}^n)$ existe algún $b \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$ talque $f(x) \geq \langle x, b \rangle - \beta$*

Demostración. El teorema 2.4.1 contiene al teorema de correspondencia para conjuntos convexos, el teorema 1.4.2, como un caso especial.

De hecho si f es la función indicador de un conjunto convexo C y $h(x) = \langle x, b\rangle - \beta$, se tiene que $h \leq f$ si y solo si $h(x) \leq 0$ para cada $x \in C$; es decir $C \subset \{x : \langle x, b\rangle \leq \beta\}$.

$\square$

Definición 2.4.1. (Función conjugada)

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función no idéntica a $\{+\infty\}$, minimizada por una función afín (Esto es, para algún $(s_0, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $f \geq \langle s_0, .\rangle - b$ en $\mathbb{R}^n$) entonces la función definida por:

$$\mathbb{R}^n \ni s \to f^*(s) := \sup\{\langle s, x\rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

Es llamada la función conjugada de f.

Observación 12. $f^*(s) \leq b$ y $f^*(s) > -\infty$, $\forall\ s$, porque $Dom\ f \neq \phi$, así $f \in c\bar{o}nv\mathbb{R}^n$.

Sea f cualquier función convexa cerrada en $\mathbb{R}^n$, según el teorema 2.4.1, f se puede describir como un conjunto F^* que contenga todos los pares:
$(s, \mu^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ talque la función afín $h(x) = \langle x, s\rangle - \mu^*$ mayorizada por f.
$h(x) \leq f(x)$, $\forall\ x$ si y solo si $\mu^* \geq \sup\{\langle s, x\rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$
De hecho F es el epígrafo de la función conjugada de f, f^* en $\mathbb{R}^n$:

$$f^*(s) = \sup\{\langle s, x\rangle - f(x)\} = -\inf_x\{f(x) - \langle s, x\rangle\}$$

La función conjugada es el supremo puntual de todas las funciones afines $g(s) = \langle s, x\rangle - \mu$ talque (x, μ) pertenece al conjunto $F = epi f$
Por tanto f^* resulta ser convexa, incluso cerrada.

Dado que f es el supremo puntual de todas afines $h(x) = \langle x, s\rangle - \mu^* : (s, \mu^*) \in\ F^* = epi f^*$ se tiene:

$$f(x) = \sup_s\{\langle s, x\rangle - f^*(s)\} = -\inf_s\{f^*(s) - \langle s, x\rangle\}$$

de lo que se deduce que la conjugada f^{**} de f^* es f.

Las funciones constantes $+\infty$ y $-\infty$ son conjugadas simples una de otra.

La función conjugada f^* de una función arbitraria f de $\mathbb{R}^n$ a $[-\infty, +\infty]$ se puede definir del teorema 2.4.1 , dado que f^* describe las funciones afines mayorizadas por f, f^* es entonces la conjugada de $cl\ (co\ f)$ (corolario 2.4.1.1)

Ejemplo 15. La conjugada de una función afín $f(x) = \langle a, x\rangle - b,\ a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}$ es:

$$f^*(x^*) = \begin{cases} b, & \text{si} \quad x^* = a \\ \\ +\infty, & \text{si} \quad x^* \notin a \end{cases}$$

Ejemplo 16. La conjugada convexa de la función valor absoluto $f(x) =\mid x \mid$ es:

$$f^*(x^*) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \mid x^* \mid \leq 1 \\ \\ +\infty, & \text{si} \quad \mid x^* \mid > 1 \end{cases}$$

La conjugada convexa de una función es siempre semicontinua inferior, la biconjugada f^{**} (conjugada convexa de la conjugada convexa) también es el contorno convexo cerrado, es decir, la función convexa semicontinua inferior más grande la que es menor que f; por tanto, $f = f^*$ si y solo si f es convexa y semicontinua inferior.

Capítulo 3:

Correspondencia entre conjuntos convexos y funciones sublineales

En el análisis real, las funciones más simples son las funciones lineales, en el análisis convexo las funciones convexas más simples son llamadas Sublineales.

La idea fundamental es entender que las funciones convexas cerradas sobre $\mathbb{R}^n$ se puede identificar con ciertos subconjuntos convexos cerrados, incluso con sus epígrafos; mientras que los conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$ pueden identificarse con ciertas funciones convexas sobre $\mathbb{R}^n$ (funciones sublineales).
Estas condiciones facilitan el paso entre la aproximación geométrica y analítica.

3.1 Una generalización propia de la linealidad

Definición 3.1.1. Una función lineal l de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ o una forma lineal sobre $\mathbb{R}^n$ es definida como una función que satisface, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y $(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$l(t_1x_1 + t_2x_2) = t_1l(x_1) + t_2l(x_2) \tag{3.1}$$

Definición 3.1.2. Una función sublineal δ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ es definida como una función que satisface, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$:

$$\delta(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1\delta(x_1) + t_2\delta(x_2) \tag{3.2}$$

La desigualdad en (3.2) exige más que la igualdad , permitiendo valores infinitos para δ, sin perder la esencia del concepto de sublinealidad.

Por supuesto (3.2) es menos estricto que (3.1) pero más exigente que la definición de función convexa, la desigualdad se cumple, aún cuando $t_1 + t_2 \neq 1$.
Esto es, las funciones sublineales son las que generalizan a las funciones lineales y estas son un claro ejemplo de funciones convexas.

El prefijo **sub** viene de la desigualdad $\leq$.

3.2 Funciones Sublineales

Definición 3.2.1. (Función Homogénea positiva)
Una función se dice homogénea positiva (de grado 1) si:

$$f(tx) = tf(x), \qquad 0 < t < \infty$$

obviamente, homogeneidad positiva implica que el epígrafo es un cono en $\mathbb{R}^{n+1}$.
En efecto: si $(x, r) \in epi\ f \ \Rightarrow \ f(t, x) \leq tr$ Así: $t(x, r) \in \ f$.
Un ejemplo de función convexa homogénea positiva la cual no es lineal es: $f(x) = |x|$.

Definición 3.2.2. (Función Sublineal)
Una función $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{+\infty\}$ se dice **Sublineal** si es convexa y homogénea positiva.
Esto es: $\delta \in conv\ \mathbb{R}^n$ y:

$$\delta(tx) = t\ \delta(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n\ y\ t > 0 \tag{3.3}$$

Observación 13. Una desigualdad en la ecuación anterior es suficiente para definir la función δ homogénea positiva

En efecto, si se satisface: $\delta(tx) \leqslant t\ \delta(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0$
También se satisface para $tx \in \mathbb{R}^n$, $\quad t^{-1} > 0$: $\delta(t^{-1}tx) \leqslant t^{-1}\ \delta(tx)$

$$t\delta(x) \leqslant \ \delta(tx) \tag{3.4}$$

por tanto δ es homogénea positiva.

De (3.3) se deduce que $\delta(0) = t\ \delta(0), \quad \forall\ t > 0$, de lo cual resultan dos posibles valores para $\delta(0) : 0$ y $+\infty$; sin embargo la mayoría de funciones sublineales satisfacen $\delta(0) = 0$.

De acuerdo a la definición 2.1.2, δ debería ser finita en todas partes, de otro modo *Dom* δ sería vacío. ahora, si $\delta(x) < +\infty$, (3.3) implica que: $\delta(x) < +\infty, \quad \forall\ t > 0$.
En otras palabras, *dom* δ es un cono convexo porque δ es asimismo convexo.
Note que, siendo convexo, δ es relativamente continuo para *ri dom* δ, pero la discontinuidad puede ocurrir sobre la frontera del *dom* δ.

Proposición 3.1. *Una función homogénea positiva f de $\mathbb{R}^n$ a $(-\infty, +\infty)$ es convexa si y solo si:*

$$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$

Demostración. La condición de subaditividad sobre f es equivalente al *epi* f, el cual es un cono. Además se conoce que el cono es cerrado bajo la adición.(proposición 1.6) □

Corolario 3.2.0.3. *Si f es una función convexa homogénea positiva, entonces:*

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

Proposición 3.2. *Una función $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es sublineal si y solo si su epígrafo es un cono no vacío en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*

Demostración. De la proposición 2.2 se sabe que δ es una función convexa si y solo si: *epi* δ es un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
Ahora se supone que δ es sublineal y solo falta mostrar que *epi* δ es un cono.
Sea $(x, r) \in epi\ \delta$ se cumple: $\delta(x) \leqslant r$
Asi por homogeneidad positiva y para $t > 0$ se tiene:
$\delta(tx) \ = t\delta(x) \ \leqslant tr$ Para $t > 0$, $t(x, r) \in epi\ \delta$. Con lo que el *epi* δ resulta ser un cono.

por otro lado, si suponemos que el *epi* δ es un cono en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,
$(x, \delta(x)) \in\ epi\ \delta$ implica que $(tx, t\delta(x)) \in\ epi\ \delta$
es decir:

$$\delta(tx) \ = t\delta(x) \quad \forall\ t > 0$$

De la observación 13, se concluye que δ es sublineal.

□

Definición 3.2.3. (Función Subaditiva)
Una función δ es Subaditiva cuando satisface:

$$\delta(x_1 + x_2) \leqslant \delta(x_1) + \delta(x_2), \quad \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \tag{3.5}$$

Proposición 3.3. *Una función $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, no idéntica a $+\infty$, es sublineal si y solo si una de las siguientes propiedades se cumple:*

$$\delta(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqslant t_1 \delta(x_1) + t_2 \delta(x_2), \quad \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n\ y\ t_1, t_2 > 0 \tag{3.6}$$

ó

$$\delta\ es\ una\ función\ homogénea\ positiva\ y\ subaditiva. \tag{3.7}$$

Demostración.

1. (sublinealidad implica (3.6)) $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $t_1, t_2 > 0$, $t = t_1 + t_2 > 0$

2. [(3.6) implica (3.7)] Una función que satisface (3.6) es subaditiva.

   En efecto, si hacemos: $t_1 = t_2 = 1 \Rightarrow \delta(x_1 + x_2) \leqslant \delta(x_1) + \delta(x_2)\ \ \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

   Ahora si se escoge $x_1 = x_2 = x \quad t_1 = t_2 = \frac{1}{2}t;\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$:

   $$\delta(\frac{1}{2}\ tx + \frac{1}{2}\ tx) \leqslant \frac{1}{2}t\delta(x) + \frac{1}{2}t\delta(x)$$

   $$\delta(tx) \leqslant t\ \delta(x)$$

   Según la observación 9, se concluye que δ es homogénea positiva.

3. (3.6) implica Sublinealidad

   Si consideramos $t_1, t_2 > 0$ con $t_1 + t_2 = 1$ al aplicar subaditividad y homogeneidad positiva se tiene:

   $$\delta(t_1x_1 + t_2x_2) \leq \delta(t_1x_1) + \delta(t_2x_2) = t_1\delta(x_1) + t_2\delta(x_2)$$

   $$\therefore \delta(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1\delta(x_1) + t_2\delta(x_2), \qquad t_1 + t_2 = 1$$

□

Corolario 3.2.0.4. *Si δ es sublineal, entonces:*

$$\delta(x)\ +\ \delta(-x) \geq 0 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n \tag{3.8}$$

Demostración. Debido a la subaditividad de δ se tiene:

$$\delta(x_1 + x_2) \leqslant \delta(x_1) + \delta(x_2), \quad \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

si $x_2 = -x_1$ entonces $\qquad 0 = \delta(0) \leqslant \delta(x_1) + \delta(-x_1)$

$$0 \leqslant \delta(x_1) + \delta(-x_1)$$

$$\delta(x) + \delta(-x) \geq 0 \quad \forall \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

□

Observación 14. Para llegar a ser una función sublineal, una función homogénea positiva necesita ser Subaditiva más que convexa. Notemos además que una función convexa y subaditiva no necesariamente es Sublineal; considere como ejemplo a la función $f(x) = 1$, que no es Sublineal, pues no cumple la condición 3.6 dada en la prop 3.3.

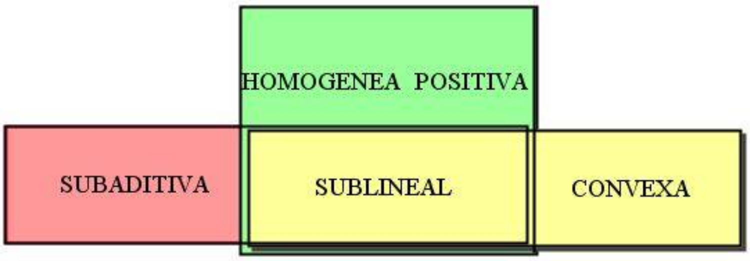


Figura 3.1: Relación entre las clases de funciones dadas

También puede surgir la pregunta: ¿ Cuándo una función sublineal llega a ser lineal? En una función lineal, (3.8) se mantiene como una igualdad, y el siguiente resultado muestra tal diferencia.

Proposición 3.4. *sea δ una función sublineal y suponga que existen $x_1, ..., x_m \in$ dom δ talque:*

$$\delta(x_j) + \delta(-x_j) = 0 \quad \forall \;\; j = 1, ..., m \tag{3.9}$$

Entonces δ es lineal sobre el subespacio generado por $x_1, ..., x_m$.

Demostración. Sea $x_1, ..., x_m$ con las condiciones de la hipótesis, $-x_j$ está en *dom* δ

Sea $x = \sum\limits_{j=1}^{m} t_j x_j$ una combinación lineal arbitraria de $x_1, ..., x_m$,
se debe probar que $\delta(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} t_j \delta(x_j)$

Se definen los conjuntos:

$$J_1 = \{j : t_j > 0\} \qquad y \qquad J_2 = \{j : t_j < 0\}$$

Asi

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \delta(\sum_{j=1}^{m} t_j x_j) \\
&= \delta(\sum_{J_1} t_j x_j + \sum_{J_2} (-t_j)(-x_j)) \\
\textit{según la proposición } 3.6 \textit{ se tiene}: & \\
&\leqslant \sum_{J_1} t_j \delta(x_j) + \sum_{J_2} (-t_j)\delta(-x_j) \\
\textit{de } (3 \cdot 9) \textit{ se sigue que}: & \\
&= \sum_{J_1} t_j \delta(x_j) + \sum_{J_2} t_j \delta(x_j) = \sum_{j=1}^{m} t_j \delta(x_j) \\
\textit{nuevamente por } (3 \cdot 9): & \\
&= -\sum_{J_1} t_j \delta(-x_j) - \sum_{J_2} (-t_j)\delta(x_j) \\
&\leqslant -\delta(-\sum_{J_1} t_j x_j) - \delta(-\sum_{J_2} (t_j x_j) \\
&= -\delta(-\sum_{j=1}^{m} t_j x_j) \\
\delta(x) &\leqslant -\delta(-x) \leqslant \delta(x)
\end{aligned}$$

En resumen, se ha probado que

$$\delta(x) \leqslant \sum_{j=1}^{m} t_j \delta(x_j) \leqslant -\delta(-x) \leqslant \delta(x)$$

$$\therefore \delta(x) = \sum_{j=1}^{m} t_j \delta(x_j)$$

□

Gracias al resultado anterior, se puede definir:

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n : \delta(x) + \delta(-x) = 0\} \tag{3.10}$$

El cual es subespacio de $\mathbb{R}^n$, donde δ es lineal. A veces es llamado el Espacio lineal de δ.

Observación 15. Suponga que V es otro subespacio talque: $U \cap V = \{0\}$, más como σ es lineal, $\sigma(x) + \sigma(-x) > 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in V$
Esto significa que si $0 \neq d \in V$, σ tiene forma de V a lo largo de d:

para $t > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma(td) &= \alpha t \\ \sigma(-td) &= \alpha t, \quad \textit{para algún } \alpha, \beta \ \textit{ en } \ \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

talque $\alpha + \beta > 0$, pues $0 < \sigma(td) + \sigma(-td) = (\alpha + \beta)\, t$, mientras $\alpha + \beta$ debería ser 0 si d estuviera en U.

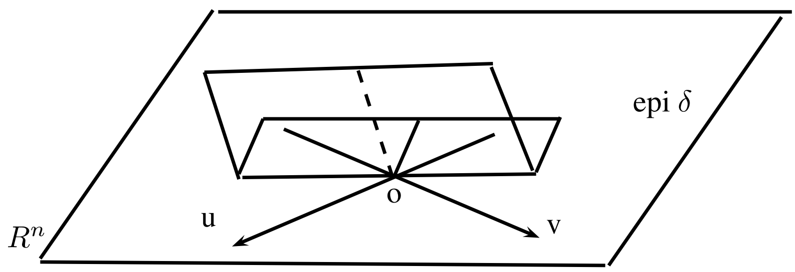


Figura 3.2: Subespacio lineal de una función lineal

Gráficamente se observa que gr σ es un hiperplano no sólo en U, si no también en las traslaciones de U: la restricción de σ a $\{y\} + U$ es afín, para algún y fijo.
Esto surge del siguiente resultado:

Proposición 3.5. *Sea δ una función sublineal, si $x \in U$, es decir:*

$$\delta(x) + \delta(-x) = 0 \tag{3.11}$$

entonces se cumple:

$$\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y), \qquad \forall\ y \in \mathbb{R}^n \tag{3.12}$$

Demostración. Por ser δ subaditiva se cumple:

$$\delta(x + y) \leqslant \delta(x) + \delta(y), \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$$

A la identidad $y = x + y - x$ se le aplica la definición de subaditividad:

$$\begin{aligned}
\delta(y) &\leqslant \delta(x + y) + \delta(-x) \\
\textit{por}\ \ (3 \cdot 12) & \\
&= \delta(x + y) - \delta(x) \\
\delta(x) + \delta(y) &\leqslant \delta(x + y) \\
\therefore \delta(x) + \delta(y) &= \delta(x + y)
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 17. Si K es un cono no vacío, su función indicador:
$I_K(.) : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$, dada por:

$$I_K(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in K \\ \\ +\infty, & \text{si} \quad x \notin K \end{cases}$$

es una función sublineal;
Particularmente suponga que $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

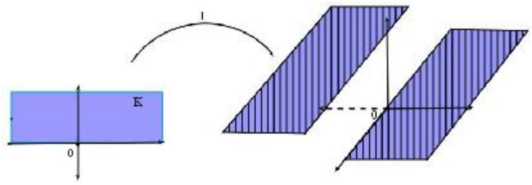


Figura 3.3: Gráfica del ejemplo 17

I_K es convexa, pues su epígrafo es convexo.

I_K es homogénea positiva. $(I(\alpha x) = \alpha.I(x),\ \forall\ \alpha > 0\ y\ x \in \mathbb{R}^n)$

En $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, el epígrafo de I_K está formado por todas las copias de K trasladadas hacia arriba. y esto se visualiza en la fig 3.3.

Su función distancia:

$$D_K(x) := inf\{\| y - x \| : y \in K\}$$

es también sublineal. (se verifica fácilmente que D_K es convexa y homogénea positiva).

Ejemplo 18. La función: $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por:

$$\delta(x) = \delta(\xi, \eta) = \begin{cases} -2\sqrt{\xi\eta}, & \text{si} \quad \xi, \eta \geqslant 0 \\ \\ +\infty, & \text{otros casos} \end{cases}$$

es Sublineal.

Su homogeneidad positiva y su convexidad no es difícil de ver.

Una de las funciones convexas más importantes en $\mathbb{R}^n$ es:

Ejemplo 19. Una norma $\|.\|$ en $\mathbb{R}^n$ es una función de $\mathbb{R}^n$ a $[0, +\infty]$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.

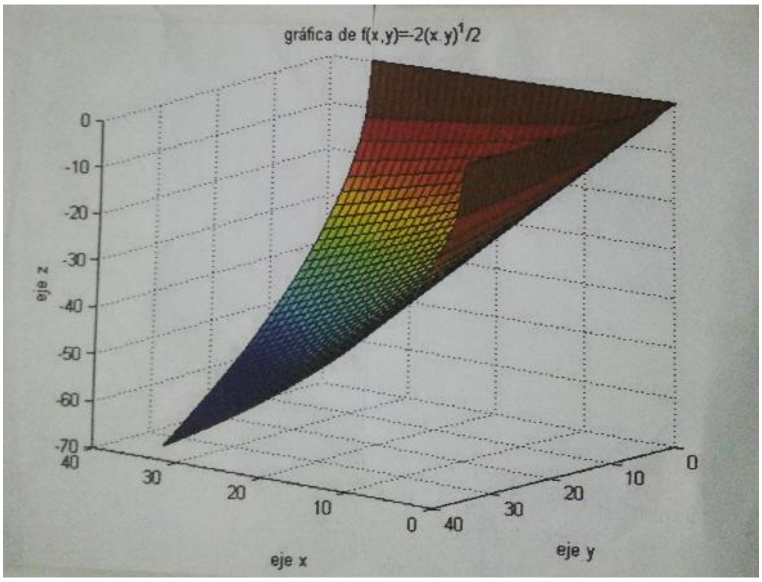


Figura 3.4: gráfica de la función δ

.

ii) $\|tx\| = |t|\|x\|, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$

iii) $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$, $\forall \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Es claro que $\|\|$ es positivo, excepto en 0.

$\|\|$ es una función sublineal finita:

En efecto,

$$\begin{aligned} \|t_1x_1 + t_2x_2\| &\leqslant \|t_1x_1\| + \|t_2x_2\|, \ \forall \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+ \\ &\leqslant t_1\|x_1\| + t_2\|x_2\|, \ \forall \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Además $\|\|$ es simétrica:

Es decir: $\| - x\| = |(-1)x\| = | - 1|\|x\| = \|x\|, \quad \forall \ x$

Esta función no es lineal sobre ninguna recta, veamos:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| + \| - x\| = 0\}$$

$$\begin{aligned} x \in U &\Leftrightarrow \|x\| + \|-x\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x\| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Asi, U se reduce a $\{0\}$.

Ya se había hecho hincapié a la importancia de los conos convexos y la simplicidad de su uso, pero no todos los conjuntos en estudio son conos, por ello surge la búsqueda de una aplicación que logre dichas transformaciones:

Definición 3.2.4. (Función gauge)

Sea C un conjunto convexo cerrado conteniendo al origen. La función $\gamma_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definida por:

$$\gamma_C := \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda C\}, \quad \lambda \in [0, +\infty) \tag{3.13}$$

Esta es llamada la función Gauge de C.

$\gamma_C(x) = +\infty, \quad \text{si} \;\; x \in \lambda C, \;\; \text{para} \;\; \text{ningún} \;\; \lambda > 0.$

Geométricamente, γ_C se puede obtener como la traslación del conjunto C en el hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ de la gráfica del espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Así el epígrafo de γ_C es el cono generado por la copia traslada de C. Ejemplificando la función Gauge cuando C es la bola centrada en el origen.

Las funciones Gauge son ejemplos de funciones sublineales cerradas.

Ejemplo 20. Considere el conjunto convexo cerrado: $C = \{(x, y) :\mid x \mid + \mid y \mid \leq 2\}$ su función gauge: $\gamma_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\gamma_C(x, y) = inf\{\lambda \geq 0 : (x, y) \in \lambda C\}$$

para el conjunto C dado, se tiene: $\gamma_C(x, y) = \text{máx}\{\mid \dfrac{x}{2} \mid + \mid \dfrac{y}{2} \mid\}$.

Es fácil verificar que para los λx que están en C su imagen es $\lambda \in \mathbb{R}$.

La gráfica de la función gauge de C se observa en la siguiente figura.

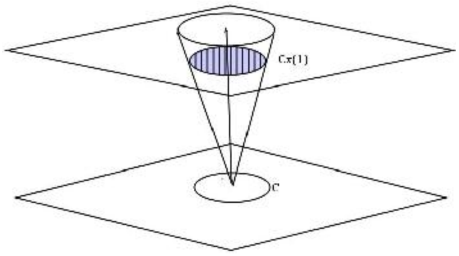


Figura 3.5: Función gauge del conjunto C

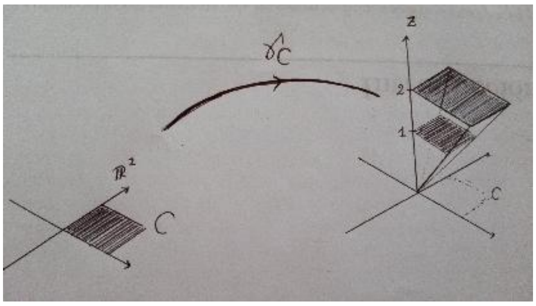


Figura 3.6: Función gauge del conjunto C

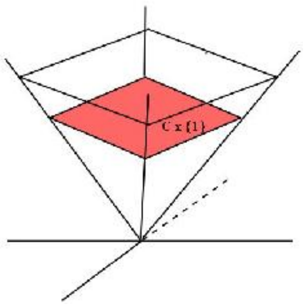


Figura 3.7: Ejemplo 20.

El siguiente resultado resume las principales propiedades de la función gauge.

Teorema 3.2.1. *Sea C un conjunto convexo cerrado conteniendo al origen, Entonces:*

i) *su **función gauge** es una función sublineal cerrada.*

ii) γ_C *es finita en todas partes si y solo si* $0 \in int\ C$.

iii) *C_∞ siendo el cono asintótico de C se cumple que:*

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_C \leqslant r\} &= r\,C \quad \forall\, r > 0 \\ \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_C = 0\} &= C_\infty \end{aligned}$$

Demostración.

i) γ_C es una función sublineal cerrada no negativa:

$$\begin{aligned} \gamma_C : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \gamma_C(x) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda C\} \end{aligned}$$

donde C es un conjunto convexo cerrado conteniendo al origen.

La homogeneidad positiva y la no negatividad son obvias de la definición.

$$\begin{aligned} \gamma_C(tx) &= \text{ínf}\{\lambda\ t \geq 0 : t\ x \in \lambda.t.C \quad \forall\ \lambda.t > 0 \\ &= \text{ínf}\{t\lambda\ \geq 0 : x \in \lambda C \\ &= t.\text{ínf}\{\lambda\ \geq 0 : x \in \lambda C \\ \gamma_C(tx) &= t.\gamma_C(x) \end{aligned}$$

Como $0 \in C$, $\gamma_C(0) = 0$

Para demostrar la convexidad de la función gauge, se hará vía la interpretación geométrica.

Sea $K_C = \textit{cono}\ (C \times \{1\}) = \{\lambda(c, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : c \in C, \lambda \geq 0\}$

La envolvente cónica de $C \times \{1\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, la cual es convexo. Además: $\gamma_C :=$ $\text{ínf}\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda C\}$ donde C es un conjunto convexo cerrado que contiene al origen.

$$\gamma_C := \text{ínf}\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C\}$$

Así, γ_C es la función acotada inferiormente, construida sobre el conjunto convexo K_C. Esto establece la convexidad de γ_C, por tanto su sublinealidad.

iii) Se probará:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_C(x) \leq 1\} = C \tag{3.14}$$

Esto implica la primera parte en iii), gracias a la homogeneidad positiva.

Así para probar (3.14), observe primero que: $x \in C$, esto es $1.x \in C$ lo cual implica que $\gamma_C \leq 1$.

Recíprocamente, si x es talque $\gamma_C(x) \leq 1$, se debe probar que $x \in C$. Se escoge $x_k := (1 - \dfrac{1}{k})x \quad para \;\; k = 1, 2...$

$\gamma(x_k) := (1 - \dfrac{1}{k})\gamma(x) \leq 1$

Por ser convexo, existe $\lambda_k \in (0, 1)$ talque $x_k \in \lambda_k C$ o equivalentemente :$\dfrac{x_k}{\lambda_k} \in C$

$\lambda_k(\dfrac{x_k}{\lambda_k}) + (1 - \lambda_k)0 = x_k \in C$. Entonces $(1 - \dfrac{1}{k})x \in C$ y gracias a la cerradura de C se concluye que $x \in C$.

La segunda parte consiste en demostrar : $\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_C = 0\} = C_\infty$

De la definición de cono asintótico se tiene:

$$C_\infty(x) = \bigcap_{t>0} \frac{C - x}{t}$$

$$C_\infty = \bigcap \{rC : r > 0\}$$

ii) γ_C es finita en todas partes si y solo si $0 \in \; int \; C$.

Suponga que: $0 \in \; int \; C \Rightarrow$ existe $\varepsilon > 0$ talque $\forall \; x \neq 0 \;\; x_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon x}{\|x\|} \in C$

de (3.13) se tiene que: $\gamma_C(x_\varepsilon) \leq 1$. Además:

$$\begin{aligned} \gamma_C(x) &= \gamma_C(\frac{\|x\|}{\varepsilon} x_\varepsilon) \\ \gamma_C(x) &= \frac{\|x\|}{\varepsilon}.\gamma_C(x_\varepsilon) \\ \gamma_C(x) &= \frac{\|x\|}{\varepsilon} \\ \gamma_C(x) &\leq 1 \end{aligned}$$

Esta desigualdad de hecho se mantiene para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $(\gamma_C(0) = 0)$ y γ_C es una función finita.

Recíprocamente, suponga que γ_C es finita en todas partes, Por continuidad γ_C tiene una cota superior $L > 0$ sobre la bola unitaria:

$$\|x\| \leq 1 \ \Rightarrow \gamma_C(x) \leq 1 \ x \in LC$$

Esto surge de (iii), en conclusión, $B(0, \frac{1}{L}) \subset C \quad \Rightarrow 0 \in int\ C$

□

Dado γ_C, una función acotada inferiormente por el cono: $K_C(= K_C + \{0\} \times \mathbb{R}^+)$ de la figura 3.5. se sabe que: $K_C \subset epi\ \gamma_C \subset cl\ K_C$ pero γ_C tiene epígrafo cerrado, por tanto:

$$epi\ \gamma_C = cl\ K_C = \overline{cono}(C \times 1) \tag{3.15}$$

Dado que $C_\infty = \{0\}$ si y solo si C es compacto (proposición 1.10)

Corolario 3.2.1.1. *C es compacto si y solo si $\gamma_C(x) > 0$ para todo $x \neq 0$*

Demostración.

$$\begin{aligned} C \text{ es compacto} \ &\Leftrightarrow \ C_\infty = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \ C_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_C(x) = 0\} = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \ x = 0 : \gamma_C(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \gamma_C(x) > 0, \ \ \forall\ x \neq 0 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 21. Considere el operador Q semidefinido positivo simétrico $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con el cual se define: $f \in \overline{conv}\mathbb{R}^n$ como:

$$f(x) = \sqrt{\langle Q(x), x\rangle}, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

f tiene valores negativos y es positivamente homogénea. Esto es:

$$f(tx) = \sqrt{\langle Q(tx), tx\rangle}, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$f(tx) = \sqrt{t^2 \langle Q(x), x \rangle}, \qquad \forall\ t > 0$$

$$0 \leq f(tx) = t f(x), \qquad \forall\ t > 0$$

Si

$$\sqrt{f(x)} \leq \lambda \qquad \forall\ \lambda > 0$$

se puede decir que:

$$\sqrt{f(x)} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \sqrt{f(x)} \leq \lambda\}$$

$$\sqrt{f(x)} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : f(x) \leq \lambda^2\}$$

$$\sqrt{f(x)} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda.S_1(f)\}$$

Donde

$$S_1(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 1\} = C$$

Así $\sqrt{f(x)}$ es la función gauge del conjunto convexo cerrado C que contiene al origen. Y por el teorema 3.2.1 se puede decir que f es una función sublineal cerrada.

Proposición 3.6.

i) Si δ_1 y δ_2 son funciones sublineales (cerradas) y t_1, t_2 son números positivos, entonces $\delta = t_1\delta_1 + t_2\delta_2$ es sublineal(cerrada), si no es idénticamente $+\infty$.

ii) Si $\{\delta_j\}_{j\in J}$ es una familia de funciones sublineales (cerradas), entonces $\delta := \sup_{j \in J} \delta_j$ es sublineal cerrada, si no es idénticamente a $+\infty$.

Demostración. Ya se ha visto anteriormente que la combinación de funciones convexas es convexa, la homogeneidad positiva es directa.

$\square$

La colección de todas las funciones sublineales tiene una estructura algebraica: Un Cono convexo contenido en $\overline{conv}\ \mathbb{R}^n$, es a su vez la colección de todas las funciones sublineales finitas. Se puede definir una estructura topológica sobre este cono, esto resulta extremadamente fructífero en el análisis convexo.

3.3 La función soporte de un conjunto no vacío

Una clase común de problemas extremos en optimización es la maximización de funciones lineales $\langle ., x\rangle$ sobre un conjunto convexo S en $\mathbb{R}^n$.
Una aproximación provechosa a tales problemas es estudiar que sucede cuando x varía en S , esto nos conduce a la consideración de funciones que expresan la dependencia del supremo sobre x , denominadas *funciones soporte.*

Definición 3.3.1. (Función Soporte) Sea S un conjunto convexo no vació en $\mathbb{R}^n$
La función $\delta_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definida por:

$$\delta_S(x) := \sup\{\langle s, x\rangle : s \in S\} \tag{3.16}$$

es llamada la función Soporte de S.

$\delta_S(.)$ es el supremo puntual de todas las colecciones de las formas lineales $\langle s, .\rangle$ cuando s varía sobre S.
Para un conjunto S dado la función soporte depende del producto escalar, Así variando el producto $\langle ., .\rangle$ varía δ_S.
El espacio donde S actúa y recorre son duales uno de otro. El supremo de la definición puede ser finito o infinito, alcanzado sobre S o no.

Proposición 3.7. *Una función soporte es cerrada y sublineal.*

Demostración.
Dado que la función soporte es el supremo de la colección de todas las formas lineales

$\langle s, . \rangle$ sobre S, las que son cerradas, homogéneas positivas y convexas. Así llegan a ser sublineales cerradas.

De la proposición 3.5 parte ii) se tiene que el supremo de la colección de funciones sublineales cerradas es sublineal cerrada.
Por tanto se concluye que las funciones soporte son sublineales y cerradas.

$\square$

Proposición 3.8. *Una función soporte de S es finita en todas partes si y solo si S es acotada.*

Demostración. Sea S acotada , es decir $S \subset B(0, L)$, para algún $L > 0$
Entonces:

$$\langle s, x \rangle \leq \|s\| \|x\| \leq L\|x\|, \quad \forall\ s \in S$$

$$\langle s, x \rangle \leq L\|x\|, \quad \forall\ s \in S$$

Como cumple para todo $s \in S$, cumple para:

$$\sup_{s \in S} \langle s, x \rangle \leq L\|x\|, \quad \forall\ s \in S$$

$$\delta_S(x) \leq L\|x\|, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

Ahora, suponiendo que la función soporte es finita en todas partes, es decir:

$$\langle s, x \rangle \leq \delta_S(x) \leq L, \quad \textit{para algún } L$$

$$\langle s, x \rangle \leq L, \quad \textit{para algún } L$$

Si $s \neq 0$, se puede tomar: $x = \dfrac{s}{\|s\|}$ así $\langle s, \dfrac{s}{\|s\|} \rangle \leq L$
lo que implica que: $\|s\| \leq L$ $\square$

Observación 16.

$$\begin{aligned} -\delta(-x) &= -\sup_{s\in S}\,[-\langle s,x\rangle] \\ &= \inf_{s\in S}\,\langle s,x\rangle \end{aligned}$$

El número $\delta_S(x)+\delta_S(-x)$ es interesante aquí, observemos:

De hecho, un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ es acotado si y solo si éste está contenido en algún cubo; y esto es verdad si y solo si cada función lineal es acotada sobre S.

Ejemplo 22. Sea $S=[2,5]$, su función soporte está dada por:

$$\begin{aligned} \delta_S:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ x &\to \delta_S := \sup\{\langle s,x\rangle : s\in S\} \end{aligned}$$

Todas las formas lineales están comprendidas entre las funciones lineales $2x$ y $5x$ por lo cual la función soporte para este conjunto se define por:

$$\delta_S = \begin{cases} 5x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ \\ 2x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

Observe la gráfica:

Ejemplo 23. Sea Q el operador simétrico definido positivo.

$$Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

su conjunto de subnivel: $E_Q=\{s\in\mathbb{R}^n : \langle Q(s),s\rangle\leq 1\}$ es elíptico.
Con función soporte:

$$\begin{aligned} \delta_{E_Q}:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ d &\to \delta_{E_Q}(d)=\text{máx}\{\langle s,d\rangle : \langle Q(s),s\rangle\leq 1\} \end{aligned}$$

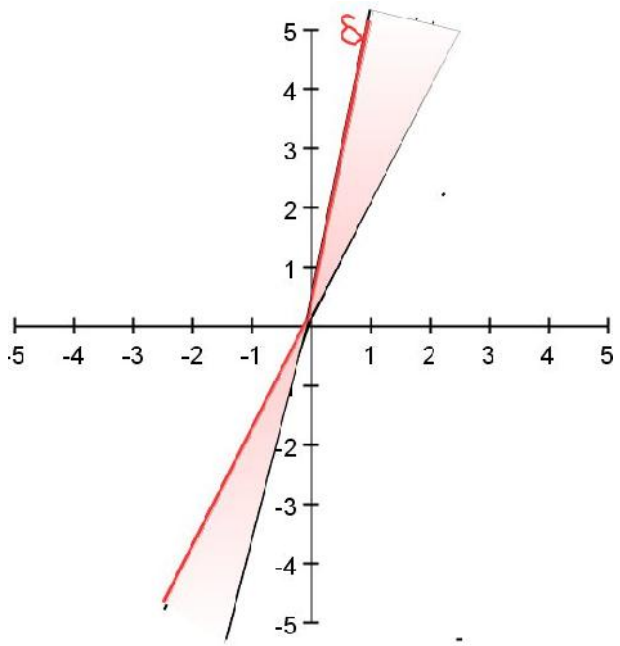


Figura 3.8: Función soporte del conjunto $S = [2, 5]$

Llamando $Q^{1/2}$ a la raíz cuadrada de Q, el cambio de variable $p = Q^{1/2}(s)$ nos da:

$$\delta_{E_Q}(d) = max\{ \langle p, Q^{-1/2}(d)\rangle : \|p\|^2 \leq 1\}$$

cuya solución para $d \neq 0$ es $p = \dfrac{Q^{-1/2}(d)}{\|Q^{-1/2}(d)\|}$ y finalmente:

$$\delta_{E_Q}(d) = \|Q^{-1/2}(d)\| = \sqrt{\langle d, Q^{-1}(d)\rangle}$$

En este ejemplo se observa la dualidad entre las *funciones gauges* $x \rightarrow \sqrt{\langle Q(x), x\rangle}$ de E_Q y su *función soporte.*

Proposición 3.9. *Para $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, se cumple*

$$\delta_S = \delta_{cl\ S} = \delta_{co\ S} \tag{3.17}$$

de donde: $\delta_S = \delta_{\overline{co}\ S}$

Demostración. La continuidad [respectivamente linealidad, por tanto convexidad] de la función $\langle s, .\rangle$ la cual es maximizada sobre S, implica que: $\delta_S = \delta_{cl\ S}$

De la proposición 1.5 se conoce que: $co\ S = cl\ co\ S$, por tanto (3.17) se sigue inmediatamente.

$\square$

El resultado anterior muestra que el concepto de funciones soporte no distingue un conjunto S de su envolvente convexo ni siendo cerrado; Así cuando se habla de funciones soporte, no hay diferencia si se restringe al caso de conjuntos convexos cerrados.
De la definición de función soporte y de (3.17) se puede escribir:

$$s \in \overline{co}\ S \Rightarrow [\langle s, d\rangle \leq \delta_S(d), \quad \forall\ d \in \mathbb{R}^n]$$

Veamos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1. *Para el conjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^n$ y su función soporte δ_S se cumple:*

$$s \in \overline{co}\ S \Leftrightarrow [\langle s, d\rangle \leq \delta_S(d) \quad \forall\ d \in \mathbb{R}^n] \tag{3.18}$$

Demostración. La condición necesaria ya se ha visto anteriormente.
Solo falta demostrar la condición suficiente, suponga que s no pertenece a $\overline{co}\ S$, según el teorema 1.4.1, $\{s\}$ y $\overline{co}\ S$ pueden estar estrictamente separados. Esto es: $\exists\ d_0 \in \mathbb{R}^n$ talque: $\langle s, d_0\rangle > \sup\{\langle s', d_0\rangle : s' \in \overline{co}\ S\}$

$$\langle s, d_0\rangle > \delta_{\overline{co}\ S}(d_0) = \delta_S(d_0)$$

$$\langle s, d_0\rangle > \delta_S(d_0)$$

el resultado es demostrado por contradicción. $\square$

En resumen, Un conjunto convexo cerrado es completamente determinado por su función soporte: entre las clases de conjuntos convexos cerrados y de funciones soporte existe una correspondencia biyectiva. Gráficamente se puede visualizar en la siguiente figura:
Así, sea S un conjunto convexo cerrado, dado s se puede verificar con ayuda de 3.18, si s pertenece al conjunto o no.
De hecho, se puede decir que: la función soporte filtra el interior, el interior relativo y el envolvente afín de un conjunto convexo cerrado.

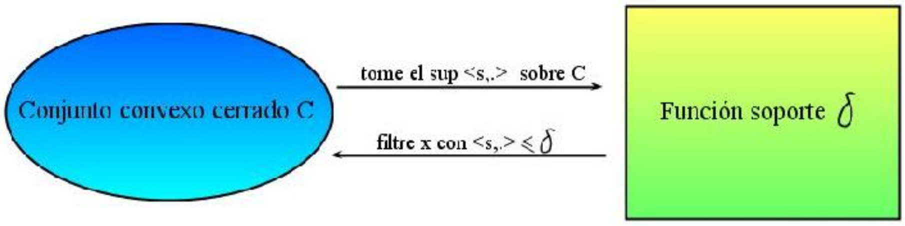


Figura 3.9: Correspondencia entre conjuntos convexos y funciones soporte

3.4 Correspondencia entre los conjuntos convexos y funciones sublineales

Se ha visto que una función soporte es cerrada y sublineal, pero que sucede con el recíproco. La respuesta en no, pues no todas las funciones sublineales cerradas pueden ser vistas como funciones soporte; la clave está en su representación vía funciones afines que la minimizan, éstas pueden asumirse como lineales.

Teorema 3.4.1. *Sea δ una función sublineal cerrada, entonces existe una función lineal minimizando a δ.*
De hecho, δ es el supremo de las funciones lineales. En otras palabras: δ es la función soporte del conjunto convexo cerrado no vacío.

$$S_\delta = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d\rangle \leq \delta(d), \quad \forall\ d \in \mathbb{R}^n\} \tag{3.19}$$

Demostración. Siendo convexo, δ es minimizada por alguna función afín (teorema 2.4.1) Para algún $(s, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\langle s, d\rangle - r \leqslant \delta(d), \quad \forall\ d \in \mathbb{R}^n \tag{3.20}$$

La condición $\delta(0) = 0$, asegura que r es no negativa. Por homogeneidad positiva: $\langle s, td\rangle - r \leqslant \delta(td) = t\delta(d)t\langle s, d\rangle - r \leqslant t\delta(d)$

$$\langle s, d\rangle - \frac{1}{t}r \leqslant \delta(d), \quad \forall\ d \in \mathbb{R}^n\ y\ t > 0$$

haciendo $t \to +\infty$, se observa que δ es de hecho minimizada por una función lineal.

$$\langle s, d \rangle \leqslant \delta(d), \quad \forall \ d \in \mathbb{R}^n \tag{3.21}$$

Ahora la minimización anterior es más clara que (3.20), ésto es: cuando se expresa la función convexa cerrada δ como el supremo de todas las funciones afines que la minimizan, se puede restringir a funciones lineales. Dicho en otras palabras:

$$\delta(d) = \sup\{\langle s, d \rangle : la\ funcion\ lineal\ \langle s, . \rangle\ que\ minimiza\ a\ \delta\}$$

□

Uno de los puntos más importantes en este resultado es, la no nulidad de S_δ en 3.19. Del teorema se sigue que un conjunto convexo cerrado S se puede expresar como el conjunto de soluciones al sistema de desigualdades dados por su función soporte:

$$S = \{x : \langle x, y \rangle \leqslant \delta_S(y), \ \forall \ y \in \mathbb{R}^n\}$$

completamente determinado por su función soporte.

Este hecho es interesante, porque muestra la existencia de la correspondencia inyectiva entre conjuntos convexos cerrados en $\mathbb{R}^n$ y objetos de diferente clase: ciertas funciones en $\mathbb{R}^n$. Esta correspondencia tiene remarcables propiedades, por ejemplo, la función soporte de la suma de dos conjuntos convexos no vacíos S_1 y S_2 esta dada por:

$$\begin{aligned}
\delta_{S_1+S_2} &= \sup\{\langle x_1 + x_2, y \rangle : \quad x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\} \\
&= \sup\{\langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle : \quad x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\} \\
&= \sup\{\langle x_1, y \rangle \quad x_1 \in S_1\} + \sup\{\langle x_2, y \rangle : \ x_2 \in S_2\} \\
\delta_{S_1+S_2} &= \delta_{S_1} + \delta_{S_2}
\end{aligned}$$

Así la adición de conjuntos se ha transformado en una adición de funciones.

Y ¿ en qué clase de funciones está envuelta? cuando tenemos una función cualquiera

como reconocer si es la función soporte de algún conjunto, veamos:
Si sucede que la función soporte correspondiente puede ser considerada como un caso especial de conjugación, se debe considerar la correspondencia uno a uno trivial entre conjuntos convexos y su función indicador.

La conjugada de δ_C es definida por:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\langle x, x^*\rangle - \delta_C(x)\} = \sup_{x\in C}\{\langle x, x^*\rangle = \delta^*_C(x^*)\}$$

La conjugada de $\delta^*_C(x^*)$ entonces satisface :

$$(\delta^*_C(x))^* = cl\ \delta_C(x) = \delta_{cl\ C}(x)$$

de acuerdo a la naturaleza de la conjugada.

Teorema 3.4.1. *La función indicador y la función soporte de un conjunto convexo cerrado son conjugadas una de otra. Las funciones sublineales son las funciones soporte de conjuntos convexos no vacíos .*

Demostración. Se debe mostrar que una función convexa cerrada no tiene valores mas que 0 y $+\infty$ si y solo si su conjugada es homogénea positiva, esta propiedad es equivalente a tener $f(x) = \lambda f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$.

La segunda propiedad es equivalente a tener: $f^*(x) = \lambda f^*(\lambda^{-1}x^*) = (f^*\lambda)(x^*)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$. Pero $\lambda f^*(x^*) = \sup_x\{\langle x, x^*\rangle - \lambda f(x)\} = \sup_x\{\lambda(\langle x, \lambda^{-1}x^*\rangle - \lambda f(x)\} = \lambda f^*(\lambda^{-1}x^*)$
Asi $f = \lambda f$ para cada $\lambda > 0$ si y solo si $f^* = f^*\lambda$ para cada $\lambda > 0$, cuando f es una función convexa cerrada. □

Ejemplo 24. La norma euclidiana, debe ser la función soporte de algún conjunto, porque es una función convexa, homogénea positiva.
¿ cuál es éste conjunto?

Veamos:

$$\begin{aligned}
|\langle x,y\rangle| &\leqslant |x|.|y| \quad \textit{desigualdad de Cauchy Schwarz}\\
\textit{implica que}\ \ |\langle x,y\rangle| &\leqslant |x|\ , \quad \textit{cuando}\ \ |y|\leqslant 1\\
\textit{Por su puesto}\ \ \langle x,y\rangle &= |x|\ ,\ \ \textit{si}\ x=0\\
\textit{Así}:\ & \\
|x| &= Sup\{\langle x,y\rangle/|y|=1\}=\delta_B(x)
\end{aligned}$$

Donde B es la bola unitaria euclidiana.

Los conjuntos convexos cerrados *epi* δ, es la intersección de los semiespacios cerrados que lo contienen, pero dado que *epi* δ es realmente un cono (por ser sublineal), estos semiespacios se pueden asumir como hiperplanos lineales como fronteras.
La principal consecuencia de este teorema es la contribución de las funciones sublineales cerradas.

Con el teorema 3.3.1 se ha establecido una biyección de conjuntos convexos cerrados hacia funciones soporte, pero gracias al teorema 3.4.1 la biyección se puede extender hacia funciones sublineales cerradas; que muchas veces están definidas en abstracto.

Así en la figura 3.9 la función soporte debería ser remplazada por función sublineal cerrada.
Este cambio en el teorema 3.3.1 se hace gracias a:

Corolario 3.4.1.1. *Para un conjunto convexo cerrado no vacío S y una función sublineal cerrada δ, se cumple que δ es la función soporte del conjunto:*

$$S=\{s:\langle s,d\rangle\leqslant\delta(d),\quad\forall\ d\ \in\mathbb{R}^n\}$$

Demostración. Teorema 3.4.1. □

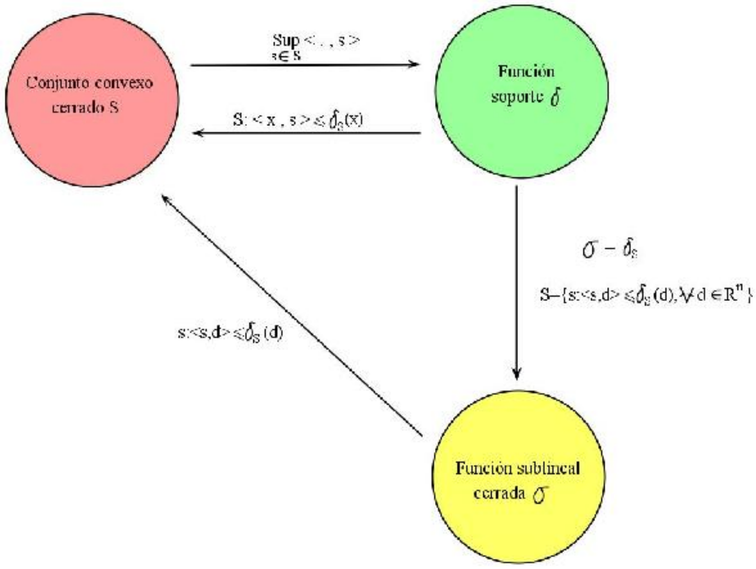


Figura 3.10: Correspondencia entre conjuntos convexos y funciones sublineales

Ejemplo 25. Normas, duales y polaridad

Sea: $\parallel . \parallel$ una norma arbitraria en $\mathbb{R}^n$, ésta es una función sublineal cerrada positiva excepto en 0 y su conjunto de subnivel:

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n : \parallel x \parallel \leq 1\} \tag{3.22}$$

es interesante, ésta es la bola asociada a la norma, un conjunto compacto, convexo simétrico conteniendo al origen como punto interior.

$\parallel x \parallel$ es la función gauge de B, y ¿ porque no tomar un conjunto cuya función soporte es $\parallel . \parallel$? En vista del corolario 3.4.1.1, este se define por:

$$\{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, x \rangle \leq \parallel x \parallel, \ \forall x \in \mathbb{R}^n\} =: B^* \tag{3.23}$$

B es también simétrica, convexa, compacta, y contiene al origen como punto interior.

Al tener los conjuntos convexos B y B^* se puede generar las funciones sublineales cerradas: la función soporte δ_B de B y la función gauge γ_{B^*} de B^* resulta que se obtiene la misma función, de hecho es una norma denotada por $\parallel . \parallel^*$, la así llamada norma dual de $\parallel . \parallel$

Proposición 3.10. *Sea B y B^* definidas por (3.22) y (3.23) donde $\| \,.\, \|$ es la norma en $\mathbb{R}^n$. La función soporte de B y la función gauge de B^* son la misma función $\| \,.\, \|^*$ definida por:*

$$\| s \|^* := max \ \{\langle s, x\rangle : \| x \| \leq 1\} \tag{3.24}$$

Además, $\| \,.\, \|^*$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. La función soporte en la bola unitaria B^* y la gauge de su conjunto soportado B son la misma función $\| \,.\, \|$: se cumple

$$\| x \|^* := max \ \{\langle s, x\rangle : \| s \|^* \leq 1\} \tag{3.25}$$

Demostración. Note primero la relación simétrica Cauchy- Schwarz

$$\langle s, x\rangle \leq \| s \|^* \| x \|, \quad \forall (s, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \tag{3.26}$$

lo que viene directamente de (3.24), usando homogeneidad positiva. Lo que expresa la correspondencia dual entre los espacios de Banach $(\mathbb{R}^n, \| \,.\, \|)$ y $(\mathbb{R}^n, \| \,.\, \|^*)$ □

Observación 17. La operación 3.25 y 3.26 establecen una correspondencia dual dentro una subclase de funciones sublineales cerradas: estas son simétricas finitas en todas partes y positivas (excepto en cero)- en resumen, normas.
La operación analítica tiene contra parte en el mundo geométrico: empezando de un conjunto convexo cerrado, el cual es simétrico, acotado y contiene al origen con punto interior -en conclusión la bola unitaria- tal como B , se construye vía gauge y funciones soporte otro conjunto convexo cerrado B^* el que tiene las mismas propiedades. Esta correspondencia es llamada polaridad, el conjunto polar de B es:

$$B^* := \{s : \langle s, x\rangle \leq 1, \ \forall \ x \in B\} \tag{3.27}$$

También puede ser visto con la teoría de separación, el polar de B^* es simétrico ($0 \in B$)

$$(B^*)^* := \{\langle s, x\rangle \leq 1, \ \ \forall \ s \in B^*\} = B \tag{3.28}$$

Proposición 3.11. *Sea C un conjunto convexo cerrado conteniendo al origen, su función gauge γ_C es la función soporte del conjunto convexo cerrado conteniendo el origen:*

$$C^0 = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d \rangle \leq 1 \ \forall \ d \in C\} \tag{3.29}$$

el cual define el conjunto polar de C

Demostración. Se sabe ya, que γ_C (cerrada, sublineal y no negativa por la proposición 3.2.1 (i)) es la función soporte de algún conjunto D convexo cerrado conteniendo al origen; de 3.19 se tiene:

$$D = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d \rangle \leq r \ \forall \ (d, r) \in epi\gamma_C\}$$

Como ya se ha visto, $epi\gamma_C$ es el envolvente cónico convexo cerrado de $C \times \{1\}$ y usando homogeneidad positiva para escribir:

$$D = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d \rangle \leq 1 \ \forall \ d : \gamma_C(d) \leq 1\}$$

□

En vista del teorema 3.2.1 el conjunto índice anterior es justo C, en otras palabras, $D = C^0$

3.5 Aplicaciones

El conjunto de funciones sublineales tiene una estructura que permite cálculos y asimismo el cálculo se da con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces la pregunta es ¿ para qué extender estas estructuras en correspondencia vía la operación soporte ? Y ¿ para qué extensión es la operación soporte un isomorfismo? la respuesta se da en esta sección, empecemos con la relación:

Proposición 3.12. *Sea S_1 y S_2 conjuntos convexos cerrados no vacíos, además δ_{S_1} y δ_{S_2} son sus respectivas funciones soporte. entonces:*

$$S_1 \subset S_2 \Leftrightarrow \delta_{S_1}(d) \leq \delta_{S_2}(d), \quad \forall \ d \in \mathbb{R}^n$$

Demostración. Al aplicar la condición de equivalencia en el corolario 3.4.1.1 se satisface:

$$
\begin{aligned}
S_1 \subset S_2 \;&\Leftrightarrow\; s \in S_2,\ \textit{para todo}\ \ s \in S_1,\ d \in \mathbb{R}^n.\\
&\Leftrightarrow\; \delta_{S_2} \geq \langle s, d\rangle,\ \ \textit{para todo}\ s \in S_1,\ d \in \mathbb{R}^n.\\
&\Leftrightarrow\; \delta_{S_2} \geq \sup_{s\in S_1}\langle s, d\rangle,\quad d \in \mathbb{R}^n.\\
&\Leftrightarrow\; \delta_{S_2} \geq \delta_{S_1},\quad d \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

□

De manera que el resultado anterior generaliza al teorema 3.3.1, y si se complementa con la proposición 3.5:

Proposición 3.13. *Sea δ_{S_1} y δ_{S_2} las funciones soporte de los conjuntos convexos cerrados S_1 y S_2. Si t_1 y t_2 son escalares positivos, entonces: $t_1\delta_{S_1} + t_2\delta_{S_2}$ es la función soporte de $cl(t_1S_1 + t_2S_2)$*

Demostración. Llamando S al conjunto convexo cerrado $cl\ (t_1S_1+t_2S_2)$, por definición su función soporte es: $\delta_S(d) = \sup\{\langle t_1\delta_{S_1} + t_2\delta_{S_2}, d\rangle : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$
En la expresión anterior s_1 y s_2 actúan independientemente de sus conjuntos índices S_1 y S_2 y t_1 y t_2 son positivos, así que : $\delta_S(d) = t_1 \sup_{s_1\in S_1}\langle s, d\rangle + t_1 \sup_{s_2\in S_2}\langle s, d\rangle$
Entonces: $\delta_S(d) = t_1\delta_{S_1} + t_2\delta_{S_2}$; además como $t_1S_1 + t_2S_2$ es automáticamente cerrado.

□

Si exploramos la homogeneidad positiva en la proposición anterior se puede escribir:

$$\delta_{tS}(d) = \delta_S(td),\quad \textit{para todo}\ d \in \mathbb{R}^n\ \textit{y}\ t > 0$$

la condición se cumple también para t negativo, generalmente:

Proposición 3.14. *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un operador lineal, con adjunta A^* (para algún producto escalar $\ll .,. \gg$ en $\mathbb{R}^m$) para $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío se tiene:*

$$\delta_{cl\ A(S)}(y) = \delta_S(A^*y),\quad \textit{para todo}\ y \in \mathbb{R}^n$$

Demostración. Se escriben las definiciones :

$$\delta_{A(s)}(y) = \sup_{s \in S} \ll As, y \gg = \sup_{s \in S} \langle s, A^* y \rangle$$

al usar la proposición 3.9 se obtiene:

$$\delta_{cl\ A(S)}(y) = \delta_S(A^* y), \quad para\ todo\ y \in \mathbb{R}^m$$

$\square$

La operación imagen es otra operación que implica un operador lineal:

Proposición 3.15. *Sea Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un operador lineal, con adjunto A^* (para algún producto escalar $\ll .,. \gg$ en $\mathbb{R}^m$), sea δ la función soporte de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo cerrado no vacío. Si δ es minimizado sobre la imagen inversa:*

$$A^{-1}(d) = \{p \in \mathbb{R}^n : Ap = d\}$$

de cada $d \in \mathbb{R}^n$, entonces la función soporte del conjunto $(A^{-1})^*(S)$ es la clausura de la imagen de la función: A_δ

Demostración. La homogeneidad positiva de A_δ es clara, para $d \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$

$$(A\delta)(t.d) = \inf_{A_p = td} \delta(p) = \inf_{A(P/t) = d} t\delta(p/t) = t \inf_{Aq = d} \sigma(q) = t(A_\delta)(d)$$

Así la función sublineal cerrada $cl(A_\delta)$ soporta algún conjunto S', por definición, $s \in S'$ si y solo si: $\langle s, d \rangle \leqslant \inf\{\delta(p) : Ap = d\}$, para todo $d \in \mathbb{R}^n$
Esto significa que: $\langle s, Ap \rangle \leqslant \delta(p)$, para todo $p \in \mathbb{R}^m$, Esto es: $A^* s \in S$ porque $\langle s, Ap \rangle = \ll A^* s, p \gg$

$\square$

La imagen inversa $(A^*)^{-1}(s)$ del conjunto cerrado S bajo el mapeo continuo A^* es cerrado. A_δ no necesariamente es una función cerrada, como caso particular suponga que S es acotado (δ_S es finita en todas partes) y que A es sobreyectiva, entonces A_δ es finita en todas partes, lo que significa que: $(A^{-1})^*(S)$ es compacto.

Observación 18. La hipótesis hecha en la proposición 3.14 significa exactamente que la función As es en ninguna parte $-\infty$, en otras palabras, su clausura $cl\ (A_\delta)$ es la función soporte de un conjunto no vacío: $(A^*)^{-1}(s) \neq \phi$. La propiedad anterior se podría reescribir como:

$$S \cap Im\ A^* \neq \phi \quad ó \quad 0 \in S - im\ A^* = S + (kerA) \tag{3.30}$$

Como ya se mencionó la función imagen es una operación interesante, de la cual otras múltiples son construidas: Por ejemplo:
- Sea S_1 y S_2 dos conjuntos convexos cerrados no vacíos de $\mathbb{R}^n$ con funciones soporte δ_{S_1} y δ_{S_2} y con $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se toma $A(x, y) := x + y$ y $\delta(d_1, d_2) := \delta_1(d_1) + \delta_2(d_2)$ Observe que δ es la función soporte de $S = S_1 \times S_2$ asociado al producto escalar:

$$\ll (s_1, s_2), (d_1, d_2) \gg := \langle s_1, d_1 \rangle + \langle s_2, d_2 \rangle$$

El siguiente resultado es futura ilustración del isomorfismo del que tanto se habla: Cuando combinamos conjuntos convexos cerrados se sabe que sucede con sus funciones, al aplicar los resultados (3.12-3.14) . Análogamente, cuando las funciones sublineales cerradas son combinadas uno sabe que sucede con los conjuntos que éstos soportan: las diferentes regla implicadas se resumen en la siguiente tabla:

Conjuntos convexos cerrados	funciones sublineales cerradas
$S_1 \subset S_2$	$\delta_{S_1} < \delta_{S_2}$
$tS \quad (t > 0)$	$t\delta$
$cl\ (S_1 + S_2)$	$\delta_{S_1} + \delta_{S_2}$
$clA(s) \quad (\ A$ es lineal$)$	$\delta\ o\ A^*$
$(A^{-1})^*(s)$	$cl\ (A\delta)$
$\cap_{j\in J} S_j$	$\overline{co}(\inf_{j\in J} \delta_j)$
$\overline{co}(\cup_{j\in J} S_j)$	$\sup_{j\in J} \delta_j$

- Generalmente hablando , ésto ayuda a recordar cuando un conjunto aumenta, su función soporte se incrementa (primera fila, y surge de la definición 3.3.1.
  Muchas de estas reglas son aplicadas sin convexidad cerrada en cada S_j (recordando que $\delta_S = \delta_{co\ S}$).

- Muchas de estas reglas son aplicadas sin convexidad cerrada en cada conjunto S_j (recordando que $\delta_S = \delta_{\bar{co}\ S}$) Por ejemplo la equivalencia en la fila 1, requiere la convexidad solo de S_2.

- Cuando interceptamos conjuntos, cada conjunto debe ser cerrado y convexo necesariamente para preservar las mismas propiedades, por ejemplo: considere: $A = \{0,1\}$ y $B = \{0,2\}$, así las funciones soporte no distinguen la diferencia entre $A \cap B = \{0\}$ y $co\ A \cap co\ B = [0,1]$

Conclusiones

1. Las funciones sublineales son aquellas que son homogéneas positivas y convexas a la vez, particularmente se ha trabajado con las funciones gauge y funciones soporte, que son ejemplos importantes de éstas.

2. Dado un conjunto convexo S en $\mathbb{R}^n$, su función soporte es el supremo de la colección de todas las formas lineales sobre S.

3. Una función soporte definida en un conjunto convexo cerrado acotado no vacío llega ser una función sublineal.

4. La maximización de funciones lineales sobre un conjunto C se puede estudiar en términos de su función soporte y como resultado de éste estudio, se afirma que un conjunto convexo cerrado C se puede expresar como el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades dada por su función soporte, lo cual nos condujo a una correspondencia biyectiva entre conjuntos convexos y funciones soporte:

$$\begin{array}{rcl} C & \longrightarrow & \delta_C \\ s & \longrightarrow & [\langle s, d\rangle \leqslant \delta_C(d), \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n] \end{array}$$

   Además la clausura de una función sublineal resulta ser la función soporte del conjunto convexo cerrado, con lo cual la biyección se restringe hacia las funciones sublineales cerradas.

$$C = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d\rangle \leqslant \delta_C(d), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Bibliografía

[1] R. Tyrrel Rockafellar "*Convex Analysis*", Princeton University Press, New Jersey 1972.

[2] Hirriart Urruty J., Lemaréchal C., "*Fundamental of convex analysis.*", Springer-Verlag 2010. Berlin Heidelberge Gmbh.

[3] Diaz Albujar J., Torres Gonzales J. "*Optimización Convexa y subdiferenciabilidad*", Tesis en Licenciatura, FACFYM. UNPRG. Lambayeque 2003.

[4] Mokhtar S. Bazaraa., C.M. Shetty., "*nonlinear Programming.-Teory and algorithms*", Jhon Wileyand sons 1979.

[5] Hirriart Urruty J., Lemaréchal C., "*Convex analysis and Minimización algorithms I* .", Second corrected printing 1996, Springer-Verlag 2010. Berlin HeidelbergE Gmbh.

[6] Georgi G, Magaril-ll'yaev., V. M. tikhomirov. "*Convex analisys: theory and applications.*", American Mathematical Society. Providence Rhode Island. 2003.