



UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**“Regularidad y Existencia de Tangentes para
 s -Conjuntos en el Plano”**

TESIS

**“PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO
PROFESIONAL DE LICENCIADO EN
MATEMÁTICAS”.**

Presentado por:

Bach. Mat. Garcia Santisteban Luis Alberto

Bach. Mat. Inoñan Alfaro Kassandra Elena

Asesor:

M.Sc. Santamaria Santisteban Oscar

LAMBAYEQUE – PERÚ

2016

UNIVERSIDAD NACIONAL “PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “**Regularidad y Existencia de Tangentes para s -Conjuntos en el Plano**”, presentada por los bachilleres en matemáticas, Garcia Santisteban Luis Alberto, Inoñan Alfaro Kassandra Elena, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas .

Dra. Ortíz Basauri Gloria María
Presidente Jurado de Tesis

Lic. Mat. Chiroque Baldera José Antonio
Secretario Jurado de Tesis

Lic. Mat. Lluén Cumpa Elmer
Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: Agosto - 2016

UNIVERSIDAD NACIONAL “PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“Regularidad y Existencia de Tangentes para
 s -Conjuntos en el Plano”

Bach. Mat. Garcia Santisteban Luis Alberto
Autor

Bach. Mat. Inoñan Alfaro Kassandra
Autor

M.Sc. Santamaría Santisteban Oscar
Asesor

Lambayeque – Perú
Agosto - 2016

Agradecimiento

En primer lugar agradecer a Dios por cuidarme día a día, y por darme las habilidades que tengo, agradecer a mis padres al señor Luciano Garcia y a la señora Paula Santisteban a mis hermanos y hermanas por ayudarme y apoyarme siempre mutuamente y también económicamente, mis agradecimientos a mis amigos en especial a la señora Carmen Alfaro, Mercedes Ocampos y Segundo Alfaro por darnos un lugar en donde hacer nuestro trabajo de investigación por la paciencia y por todo este tiempo que le hemos dedicado nuestra tesis.

Agradezco a mi compañera y amiga Kassandra Inoñan quien gustosamente aceptó hacer la tesis conmigo y por ultimo agradecer sinceramente a mi profesor y asesor Mg. Oscar Santamaría Santisteban.

Luis

En primer lugar agradecer a Dios que me a dado vida y salud, para poder cumplir esta meta, agradecer a mis padres al señor Pedro Inoñan y a la señora Carmen Alfaro por su apoyo incondicional y económico, a mis hermanos Pedro y Alonso.

Agradezco a mi compañero y amigo Luis Garcia por aceptar hacer la tesis conmigo y por haberme tenido la paciencia necesaria, agradecer sinceramente a mi profesor y asesor Mg. Oscar Santamaría Santisteban por su orientación.

Por último agradecer a todas las personas que me dieron su apoyo incondicional en especial a mis abuelitos Mercedes y Segundo Alfaro.

Kassandra

Dedicatoria

Este trabajo se lo dedico a Dios y a la santísima virgen María, a mis padres Luciano y Paula por estar siempre conmigo en cada momento de mi vida, a mis hermanos Felicita, Genaro, Carmen, Lorenzo, Nelly, Laura y Deley Marleny.

Dedicarle este trabajo a una persona a quien quiero y amo mucho Kassandra, también aquellas personas que partieron de este mundo pero se que muy pronto nos volveremos a ver.

Luis

Este trabajo se lo dedico a Dios y a la santísima virgen María, a mis padres Pedro y Carmen por apoyarme siempre, a mis hermanos Pedro y Alonso.

Dedicarle este trabajo a la persona que quiero y amo mucho Luis, por su paciencia y comprensión.

Kassandra

Resumen

El presente trabajo de investigación desarrolla las características sobre regularidad y existencia de tangentes mediante la noción de densidad, para s -conjuntos en el plano. Por ello en el primer capítulo se da la noción de medida y dimensión de Hausdorff s -dimensional para un conjunto en \mathbb{R}^n lo cual es importante por que hay muchos conjuntos que no se pueden medir en el sentido de longitud, área o volumen, ya que dichos conjuntos están en una dimensión no entera, por ejemplo el conjunto ternario de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, entre otros. Dicha medida de Hausdorff s -dimensional permite dar una aproximación de su medida de dichos conjuntos. En el segundo capítulo se desarrolla regularidad e irregularidad de un s -conjunto basado en la noción de densidad, donde un s -conjunto F es un conjunto de Borel con medida de Hausdorff s -dimensional positiva y finita ($0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$). También se analiza la estructura de un 1-conjunto, el cual se divide en dos partes: Una llamada curva-like (parte regular) y otra llamada curva-free (parte irregular), estudiándolos cada uno por separado para luego recombinarlas sin afectar sus propiedades. El tercer y último capítulo se presenta la existencia de tangentes para un s -conjunto. Veremos que un s -conjunto regular en el plano tiene tangentes en casi todos sus puntos, en particular tienen esta propiedad las curvas rectificables que son los 1-conjuntos regulares. Por otro lado los s -conjuntos irregulares en el plano, no tienen tangentes en casi todos sus puntos, en particular los s -conjuntos en el plano para $1 < s < 2$.

Abstract

The present work of investigation develops the characteristics of regularity and existence of tangents through the notion of density, for s -sets in the plane. Thus, in the first chapter introduce the measure and dimension of s -dimensional Hausdorff for a set in \mathbb{R}^n which is important because there are many sets that can not be measured in the direction of length, area or volume, as such assemblies are in a non-integer dimension, for example the ternary Cantor set, Sierpinski triangle, curve Koch, among others. This measure Hausdorff s -dimensional allows give an approximation measure of these sets. In the second chapter develop regularity and irregularity of an s -set based on the notion of density, where an s -set is a set a Borel with measure s -dimensional Hausdorff positive and finite ($0 < \mathcal{H}^s < \infty$). It also discussed the structure of 1-set, which is divided into two parts: a called curve-like (regular part) and another called curve-free (irregular part), studying each one separately and then recombine without affecting their properties. The third and final chapter discusses the existence of tangent for s -set. We will see that a regular s -set in the plane has tangent at almost every point, in particularly the curves have this property rectify are regular 1-set regular. On the other hand irregular s -set in the plane, no tangents at almost every point, particularly s -sets in the plane for $1 < s < 2$.

Introducción

En la geometría diferencial clásica, los conjuntos como curvas y superficies regulares tienen, localmente y a escalas adecuadas, formas bastantes aproximadas a segmentos de rectas (en el caso de curvas) o a planos (en el caso de superficies regulares 2–dimensionales).

Pero hay otros conjuntos que no tienen esta forma, como por ejemplo el triángulo de Sierpinski, el conjunto ternario de Cantor, la curva de Koch, el polvo de cantor, etc. Por ello surge una nueva geometría llamada geometría fractal, y dentro de la geometría fractal se estudia la estructura local de los s –conjuntos, donde s es la dimensión de Hausdorff de dichos conjuntos, esto proporciona dar una idea más general sobre un s –conjunto, pues s no necesariamente es un número entero, además esto proporciona un resultado que muchos de los conjuntos en \mathbb{R}^n (con dimensión de Hausdorff s) son s –conjuntos irregulares.

Este trabajo de investigación se basa en el estudio de regularidad y existencia de tangentes para s –conjuntos en el plano, para ello este trabajo se desarrolla en tres capítulos.

En el primer capítulo se describe y se repasan los conceptos básicos necesarios para comprender la tesis. Aquí se introduce la noción de medida y dimensión de Hausdorff, la medida de Lebesgue, la medida de Radon, teorema de Vitali y otros conceptos relacionados a nuestro trabajo que nos permitirán demostrar algunos resultados más adelante (como sucesión de números reales, interior y adherencia de conjuntos, función de Lipschitz, dimensión de conteo de cajas de un conjunto en \mathbb{R}^n).

En el segundo capítulo se desarrolla y analiza la estructura local de los s –conjuntos, donde se comienza definiendo un s –conjunto. Además se describe y se define la densidad y regularidad de un s –conjunto, en particular se desarrollan y analizan las propiedades de los 1–conjuntos en el plano. Aquí se analiza que un 1–conjunto en el plano se puede dividir en dos partes: una llamada como curva-like (parte regular), y otra llamada curva-free (parte irregular).

Finalmente en el tercer capítulo, se desarrolla la existencia de tangentes de un s –conjunto. Se

inicia este capítulo dando la definición de tangente para un s -conjunto y otras definiciones asociados a dichos conjuntos, luego se describen algunos resultados que nos permitirán ver la existencia de tangentes de los s -conjuntos en el plano, así como también damos algunos ejemplos para tener una idea más clara del tema.

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
Introducción	III
1. Preliminares	2
1.1. Medida y dimensión de Hausdorff	2
1.2. Medida de Lebesgue	12
1.3. Teorema de Vitali	13
1.4. Conceptos y resultados adicionales	15
2. Estructura local de los s-conjuntos	22
2.1. Densidad y regularidad	23
2.2. Estructura de 1-conjunto	43
3. Tangentes para s-conjuntos	60
Conclusiones	72
Referencias	74

Capítulo 1:

Preliminares

En este capítulo se describen los conceptos básicos necesarios que nos ayudan a desarrollar los resultados del presente trabajo de investigación, como la medida y dimensión de Hausdorff, así como otros resultados que son fundamentales para desarrollar la presente tesis.

1.1 Medida y dimensión de Hausdorff.

En esta sección, se considera a \mathbb{R}^n provisto de la métrica euclidiana $|\cdot|$.

Definición 1.1. Sea U un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n . Se llama diámetro de U al supremo de las distancias $|x - y|$, con x, y variando en U . Es decir,

$$|U| := \sup\{|x - y| : x, y \in U\}.$$

Ejemplo 1.1. Considere el círculo C y la circunferencia B , ambos de centro x y radio r , el diámetro del círculo y la circunferencia es el supremo de las distancias $|y - z|$, para todo y, z en C ó en B respectivamente, es decir dicho diámetro es $2r$.

Observar que las distancias $|y - z|$ tanto en C como en B se toman de diferente manera (ver Figura 1.1), pero en ambas el diámetro coincide.

Definición 1.2. Una colección enumerable (o finita) $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, se denomina un δ -cubrimiento de un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ si cada U_i tiene diámetro a lo más δ y F está contenido en la unión de estos U_i .

Es decir, $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un δ -cubrimiento de F si

$$0 \leq |U_i| \leq \delta \text{ para cada } i \text{ y } F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

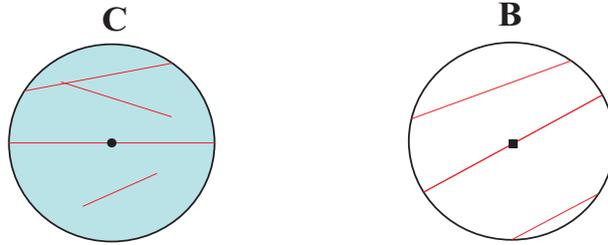


Figura 1.1: El círculo C y la circunferencia B .

Definición 1.3. Una medida exterior en un conjunto X es una función $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ tal que:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- Si $\{A_i : i = 1, 2, \dots\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Definición 1.4. Sea F un subconjunto de \mathbb{R}^n y s un número no negativo. Para cualquier $\delta > 0$ se define,

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } F \right\}$$

Definición 1.5. La medida exterior de Hausdorff s -dimensional de un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ se define como el límite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$.

Este límite se denota como $\mathcal{H}^s(F)$. Es decir $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$.

Observación 1.1. La medida $\mathcal{H}^s(F)$ está definida para cualquier subconjunto F de \mathbb{R}^n , pues $\mathcal{H}^s(F)$ decrece en función de $\delta > 0$, ya que si $\delta_1 < \delta$ resulta que $\{\delta_1\text{-cubrimientos de } F\} \subseteq \{\delta\text{-cubrimientos de } F\}$ y, por lo tanto, $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(F) \geq \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$.

Definición 1.6. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$. La dimensión de Hausdorff se define como:

$$\dim_{\mathcal{H}} F = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}. \quad (1.1)$$

Donde

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_{\mathcal{H}} F \\ 0 & \text{si } s > \dim_{\mathcal{H}} F. \end{cases}$$

Si $s = \dim_{\mathcal{H}} F$, entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede ser cero, infinito o puede satisfacer $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Observación 1.2. Para todo subconjunto F de \mathbb{R}^n , $\mathcal{H}^0(F)$ es la medida de contar, es decir, el cardinal de F , $\mathcal{H}^1(F)$, $\mathcal{H}^2(F)$ y $\mathcal{H}^3(F)$ representa la longitud, área y volumen respectivamente.

Ejemplo 1.2.

1. La dimensión de Hausdorff del círculo es 2.

En efecto, sea $C = C[x, r]$ el círculo de centro x y radio r , se tiene que $\mathcal{H}^1(C) = \infty$, pues al cubrir al círculo por segmentos $I_i, i \in \mathbb{N}$, que tienen en común el punto x y de longitud r , tenemos que $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, por lo tanto, $\mathcal{H}^1(C) = \mathcal{H}^1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} r = \infty$, y como \mathcal{H}^3 representa el volumen y C es una superficie plana se tiene que $\mathcal{H}^3(C) = 0$, donde

$$\mathcal{H}^s(C) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_{\mathcal{H}} C \\ 0 & \text{si } s > \dim_{\mathcal{H}} C. \end{cases}$$

Entonces $1 < \dim_{\mathcal{H}} C < 3$, como $\mathcal{H}^2(C) = \pi r^2 < \infty$, por definición tenemos que

$$\dim_{\mathcal{H}} C = \sup(1, 2) = \inf(2, 3) = 2.$$

2. La dimensión de Hausdorff de la circunferencia es 1.

En efecto, sea B la circunferencia, se tiene que $\mathcal{H}^0(B) = \infty$ y $\mathcal{H}^2(B) = 0$, donde

$$\mathcal{H}^s(B) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_{\mathcal{H}} B \\ 0 & \text{si } s > \dim_{\mathcal{H}} B. \end{cases}$$

Entonces $0 < \dim_{\mathcal{H}} B < 2$, como $\mathcal{H}^1(B) = 2r\pi < \infty$, por definición tenemos que

$$\dim_{\mathcal{H}} B = \sup(0, 1) = \inf(1, 2) = 1.$$

3. La dimensión de Hausdorff del conjunto ternario de Cantor esta entre $]0, 1[$.

En efecto, sea F el conjunto ternario de Cantor, se tiene que \mathcal{H}^0 representa el número de elementos de F , el conjunto ternario de Cantor son intervalos pequeños donde en cada uno de ellos hay infinidad de puntos así que $\mathcal{H}^0(F) = \infty$, y \mathcal{H}^1 representa la longitud

del conjunto ternario de Cantor de donde se tiene que en la k -ésima iteración consta de 2^k intervalos cada uno de longitud $\frac{1}{3^k}$, por lo tanto, $\mathcal{H}^1(F) = 2^k \frac{1}{3^k} = \frac{2^k}{3^k}$ y cuando k tiende al ∞ se tiene $\mathcal{H}^1(F) = 0$. Donde

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_{\mathcal{H}} F \\ 0 & \text{si } s > \dim_{\mathcal{H}} F. \end{cases}$$

Entonces $0 < \dim_{\mathcal{H}} F < 1$. Como se observa la dimensión de Hausdorff del conjunto ternario de Cantor es un número no entero.

Teorema 1.1. *La función \mathcal{H}^s tal que $F \mapsto \mathcal{H}^s(F)$ es una medida exterior, es decir,*

1. $\mathcal{H}^s(F) \geq 0, \forall F \subseteq \mathbb{R}^n$.
2. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.
3. Si E está contenida en F entonces $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ y
4. Si $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ es cualquier colección contable de conjuntos en \mathbb{R}^n , entonces

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i). \quad (1.2)$$

Demostración:

1. Se demuestra que $\mathcal{H}^s(F) \geq 0$, para todo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un δ -cubrimiento de F . como $|U_i| \geq 0$ para todo i entonces $|U_i|^s \geq 0$.

Luego $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq 0$, de donde

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } F \right\} \geq 0.$$

Es decir, por definición de \mathcal{H}_δ^s se tiene $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq 0$, de donde resulta que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \geq 0.$$

Por lo tanto $\mathcal{H}^s(F) \geq 0$, para todo $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

2. Sea $F = \emptyset$, es decir, F consta de cero elementos.

Fije $x \in \mathbb{R}^n$ y considere la familia $\{\tilde{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\tilde{U}_i = \{x\}$, para todo índice i .

Entonces $F = \emptyset \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{U}_i$ y si $x, y \in \tilde{U}_i$, (luego $x = y$)

$$|\tilde{U}_i| = \sup_{x, y \in \tilde{U}_i} \{|x - y|\} = \sup\{0\} = 0$$

luego, $|\tilde{U}_i| = 0, \forall i$. De aquí resulta que $\sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{U}_i|^s = 0$.

Luego para cada $\delta > 0$

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{U}_i|^s : \{\tilde{U}_i\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \text{ y } \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{U}_i \supseteq F, |\tilde{U}_i| \leq \delta \right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{U}_i|^s = 0.$$

Esto muestra que $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq 0$ y como $0 \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$ entonces $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$.

De esto resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(\emptyset) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0.$$

3. Ahora se demuestra que si $E \subseteq F$ entonces $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$.

En efecto, observar que todo cubrimiento de F es un cubrimiento de E y en particular, todo δ -cubrimiento de F es un δ -cubrimiento de E , pues E está contenido en F . Entonces

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ y } 0 \leq |U_i| \leq \delta, \forall i \right\} \supseteq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ y } 0 \leq |U_i| \leq \delta, \forall i \right\}.$$

Luego tenemos

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ y } 0 \leq |U_i| \leq \delta, \forall i \right\} \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ y } 0 \leq |U_i| \leq \delta, \forall i \right\}$$

es decir, por definición, $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$ de donde resulta $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Por tanto, $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$.

4. Sean $\{F_i : i = 1, 2, \dots\}$ cualquier colección enumerable de subconjuntos en \mathbb{R}^n y $\epsilon > 0$. Para cada $i = 1, 2, \dots$, por tanto, para cada F_i , existe una familia $\{U_{ij} : j = 1, 2, \dots\}$ tal que

$$F_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{ij} \text{ y } \sum_{j=1}^{\infty} |U_{ij}|^s < \mathcal{H}^s(F_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Además $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \subseteq \bigcup_{i,j=1}^{\infty} U_{ij}$, de esto se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) &\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |U_{ij}|^s = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |U_{ij}|^s \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, entonces

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$$

□

Definición 1.7. Sea X un conjunto, una colección $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se llama σ -álgebra si:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $X - A \in \mathcal{A}$.
3. Si A_1, A_2, \dots es una familia enumerable en \mathcal{A} entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Ejemplo 1.3. X un conjunto. $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X\}$ y $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(X)$ son σ -álgebras sobre X .

Definición 1.8. Dada una clase de conjuntos \mathcal{C} , definimos $\sigma(\mathcal{C})$ (la σ -álgebra generada por \mathcal{C}) como la mas pequeña (en el sentido de la inclusión) σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} .

Nota 1.1. Denotemos por \mathcal{M} al conjunto de abiertos, y \mathcal{N} al conjunto de cerrados en \mathbb{R}^n .

Definición 1.9. La σ -álgebra generada por \mathcal{M} se llama σ -álgebra de Borel y se denota por \mathcal{B} . Es decir $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{M})$.

Se puede mostrar que $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{N})$. Luego $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{N})$.

Definición 1.10. X un conjunto y $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ una medida exterior. Un conjunto $A \subseteq X$ es μ -medible si

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c), \quad \forall E \subseteq X.$$

Nota 1.2. En la Definición 1.10 es suficiente demostrar que $\mu(E) \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c)$, $\forall E \subseteq X$, ya que la otra desigualdad se cumple trivialmente por ser μ una medida exterior.

Las siguientes resultados nos ayudan a demostrar que \mathcal{H}^s es una medida y Borel regular.

Proposición 1.1. La colección de conjuntos μ -medibles es un σ -álgebra.

Ver [1], página 22.

Definición 1.11. Sea μ una medida exterior en \mathbb{R}^n .

1. μ es **regular** si para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, existe un conjunto μ -medible C tal que $A \subseteq C$ y $\mu(A) = \mu(C)$.
2. μ es llamada **Borel** si cada conjunto de Borel es μ -medible.
3. μ es llamada **Borel regular** si μ es Borel y para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, existe un conjunto de Borel C tal que $A \subseteq C$ y $\mu(A) = \mu(C)$.

Definición 1.12. Sea μ una medida exterior en X y $A \subseteq X$. La restricción μ al conjunto A es definido como

$$\mu|_A(B) = \mu(A \cap B)$$

para todo $B \subseteq X$.

Es inmediato comprobar que $\mu|_A$ es una medida exterior sobre X .

Teorema 1.2. Si μ es Borel regular y A es un conjunto μ -medible, con $\mu(A) < \infty$, entonces $\mu|_A$ es Borel regular.

Demostración:

Como μ es Borel regular, existe un conjunto de Borel B tal que $A \subseteq B$ y $\mu(A) = \mu(B)$, además como $\mu(A) < \infty$ entonces $\mu(B) < \infty$ de donde $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = 0$.

Dado $C \subseteq \mathbb{R}^n$, se demuestra que existe un conjunto D tal que $C \subseteq D$ y $\mu|_A(C) = \mu|_A(D)$.

En efecto, como μ es Borel regular, existe un conjunto de Borel E tal que $B \cap C \subseteq E$ y

$\mu(B \cap C) = \mu(E)$. Tome $D = E \cup (\mathbb{R}^n \setminus B)$, como E y B son conjuntos de Borel, D también es conjunto de Borel. Aun más

$$C \subseteq (B \cap C) \cup (\mathbb{R}^n \setminus B) \subseteq E \cup (\mathbb{R}^n \setminus B) = D$$

esto implica que $C \subseteq D$.

Además tenemos que $D \cap B = (E \cup B^c) \cap B = (E \cap B) \cup (B \cap B^c) = E \cap B$, entonces

$$\begin{aligned} \mu|_A(D) &= \mu(D \cap A) \leq \mu(D \cap B) = \mu(E \cap B) \leq \mu(E) \\ &= \mu(B \cap C) = \mu(C \cap B \cap A) + \mu(C \cap B \cap A^c) \\ &= \mu(C \cap A) + \mu(C \cap B \cap A^c) \\ &\leq \mu(C \cap A) + \mu(B \cap A^c) \\ &= \mu(C \cap A) = \mu|_A(C). \end{aligned}$$

Esto implica que, $\mu|_A(D) \leq \mu|_A(C)$ y como $C \subseteq D$ y $\mu|_A$ es una medida exterior se tiene $\mu|_A(C) \leq \mu|_A(D)$. Luego, $\mu|_A(C) = \mu|_A(D)$.

Por lo tanto, $\mu|_A$ es Borel regular. □

Definición 1.13. Una medida exterior μ en \mathbb{R}^n es una medida de **Radon** si μ es Borel regular y $\mu(K) < \infty$ para cada conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.3. Sea μ una medida Borel regular en \mathbb{R}^n y A un conjunto μ -medible con $\mu(A) < \infty$. Entonces $\mu|_A$ es una medida de Radon.

Demostración:

Sea $\nu = \mu|_A$, entonces para cada compacto K se tiene que

$$\nu(K) = \mu(K \cap A) \leq \mu(A) < \infty.$$

Por el Teorema 1.2 se tiene que $\mu|_A$ es Borel regular. Por lo tanto $\mu|_A$ es una medida de Radon. □

Definición 1.14. Una medida en un conjunto X sobre un σ -álgebra \mathcal{A} , es una función

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$$

tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subseteq B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. Si los conjuntos $A_i \in \mathcal{A}$ con $i \in \mathbb{N}$ son disjuntos dos a dos entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Definición 1.15. Sea (X, \mathcal{A}, μ) espacio de medida.

Una propiedad \mathcal{P} se cumple en casi todo punto (c.t.p) si

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{P}(x) \text{ no es válido}\}) = 0.$$

Ejemplo 1.4. Sea $M \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. La función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es nula en casi todos sus puntos si $\mu(\{x \in M : f(x) \neq 0\}) = 0$.

Proposición 1.2. La medida exterior de Hausdorff s -dimensional restringida sobre los σ -álgebra de los μ -medibles es una medida.

Demostración:

Sea \mathcal{A} la σ -álgebra de los conjuntos μ -medible (ver Proposición 1.1) y sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección enumerable disjunta en \mathcal{A} .

Del Teorema 1.1 solo falta demostrar que

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i).$$

En efecto para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Como los $A_n \in \mathcal{A}$, dado $E \subseteq X$.

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_n) = \mathcal{H}^s((E \cap B_n) \cap A_n) + \mathcal{H}^s((E \cap B_n) \cap A_n^c). \quad (1.3)$$

Como los A_n son disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, entonces

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_n) = \mathcal{H}^s(E \cap A_n) + \mathcal{H}^s(E \cap B_{n-1})$$

aplicando lo mismo para $\mathcal{H}^s(E \cap B_{n-1})$ en (1.3) se tiene que

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_{n-1}) = \mathcal{H}^s(E \cap A_{n-1}) + \mathcal{H}^s(E \cap B_{n-2})$$

esto implica que $\mathcal{H}^s(E \cap B_n) = \mathcal{H}^s(E \cap A_n) + \mathcal{H}^s(E \cap A_{n-1}) + \mathcal{H}^s(E \cap B_{n-2})$.

Luego por inducción, se tiene que

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^s(E \cap A_i). \quad (1.4)$$

Como B_n es \mathcal{H}^s -medible, entonces $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(E \cap B_n) + \mathcal{H}^s(E \cap (B_n)^c)$ y de (1.4) se tiene que

$$\mathcal{H}^s(E) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^s(E \cap A_i) + \mathcal{H}^s(E \cap (B_n)^c). \quad (1.5)$$

Sea $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Observe que $B_n \subseteq B, \forall n \in \mathbb{N}$ de donde se tiene que $E \cap (B_n)^c \supseteq E \cap B^c$ y como \mathcal{H}^s es una medida exterior $\mathcal{H}^s(E \cap B^c) \leq \mathcal{H}^s(E \cap (B_n)^c)$.

En (1.5) se tiene que

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^s(E \cap A_i) + \mathcal{H}^s(E \cap B^c) \quad (1.6)$$

Haciendo n tender al infinito en (1.6) se tiene que

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E \cap A_i) + \mathcal{H}^s(E \cap B^c)$$

y como \mathcal{H}^s es una medida exterior

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \mathcal{H}^s(E \cap B) + \mathcal{H}^s(E \cap B^c).$$

Luego $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es \mathcal{H}^s -medible.

Se sabe que para todo $E \subseteq X$

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E \cap A_i) + \mathcal{H}^s(E \cap (B_n)^c).$$

Tomando $E = B$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap A_i\right) + \mathcal{H}^s(B \cap (B_n)^c) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap A_i\right) + \mathcal{H}^s(\emptyset) \end{aligned}$$

Como los A_i son disjuntos $\forall i \in \mathbb{N}$ y \mathcal{H}^s es una medida exterior

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i).$$

Por lo tanto, \mathcal{H}^s es una medida.

□

Teorema 1.4. *Sea \mathcal{H}^s la medida de Hausdorff s -dimensional entonces \mathcal{H}^s es una medida de Borel regular, con $\leq s < \infty$.*

Ver [7], página 61.

1.2 Medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue n -dimensional se obtiene como una extensión de la definición usual de volumen en \mathbb{R}^n (tomamos “volumen” en el sentido de longitud en \mathbb{R} y área en \mathbb{R}^2).

Definición 1.16. *Sea*

$$C = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n),$$

donde $[a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}$ y $a_i < b_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

El volumen de C se define como

$$V(C) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Definición 1.17. *Se dirá que C_i es un n -bloque si C_i es un producto cartesiano de n intervalos reales finitos.*

Definición 1.18. *Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ se define la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n como:*

$$\mathcal{L}^n(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V(C_i) : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \text{ y cada } C_i \text{ es un } n\text{-bloque} \right\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los cubrimientos de F .

En particular, la medida de Lebesgue 1-dimensional \mathcal{L}^1 en \mathbb{R} es definido por

$$\mathcal{L}^1(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |V(C_i)| : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, V(C_i) \subseteq \mathbb{R} \right\},$$

para todo $F \subseteq \mathbb{R}$. En este caso $|V(C_i)|$ es la longitud del intervalo $C_i \subseteq \mathbb{R}$.

Proposición 1.3. *La medida de Hausdorff 1-dimensional es igual a la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , es decir, $\mathcal{H}^1(F) = \mathcal{L}^1(F)$, para todo $F \subseteq \mathbb{R}$.*

Demostración:

Sabemos que la medida exterior de Hausdorff 1–dimensional es

$$\mathcal{H}_\delta^1(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i| : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 \leq |U_i| \leq \delta \right\},$$

de donde $\mathcal{H}^1(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^1(F)$.

Tomando a los $U_i = V(C_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$ y por el Teorema 1.1, \mathcal{L}^1 es una medida exterior.

Por otro lado por el Proposición 1.2, \mathcal{L}^1 resulta ser una medida, luego por definición de medida de Lebesgue 1–dimensional se tiene que $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$. \square

Definición 1.19. *Un conjunto A en \mathbb{R}^n tiene medida nula si para todo $\epsilon > 0$ existe una familia numerable $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de rectángulos cerrados en \mathbb{R}^n tales que*

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(R_i) < \epsilon,$$

donde $V(R_i)$ es el volumen de cada R_i .

Observación 1.3.

1. En la definición anterior pueden sustituirse los rectángulos cerrados por rectángulos abiertos o semiabiertos, como también se puede sustituir por bolas abiertas y cerradas.
2. Si A y B son dos subconjuntos de \mathbb{R}^n , con $A \subseteq B$, y B tiene medida nula, entonces A también tiene medida nula.

Teorema 1.5. (Teorema de diferenciación de Lebesgue)

Sea μ la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n y f una función localmente integrable en \mathbb{R}^n . Entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f d\mu = f(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

La demostración se encuentra en [10], página 230.

1.3 Teorema de Vitali

Teorema 1.6. (Teorema de cubrimiento de Vitali)

Sea $\mathcal{F} = \{B_i : i \in I\}$ una colección de bolas cerradas contenidas en \mathbb{R}^n tal que $\sup\{\text{rad}(B_i) :$

$i \in I\} < \infty$, donde $\text{rad}(B_i)$ denota el radio de la bola B_i . Entonces existe una subcolección disjunta finita o infinita enumerable $\mathcal{G} = \{B_i : i \in I'\}$, $I' \subseteq I$ tal que

$$\bigcup_{B_i \in \mathcal{F}} B_i \subseteq \bigcup_{B_i \in \mathcal{G}} \hat{B}'_i$$

donde \hat{B}'_i es la bola concéntrica con B_i y de cinco veces el radio.

Demostración:

Sea $r = \sup\{\text{rad}(B) : B \in \mathcal{F}\} < \infty$. Considere la partición de \mathcal{F} en subcolecciones $\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{Z}_0^+$, donde para cada $n \in \mathbb{Z}_0^+$, \mathcal{F}_n consiste de bolas cerradas B cuyo radio esta en $\left(\frac{r}{2^{n+1}}, \frac{r}{2^n}\right]$, es decir,

$$\mathcal{F}_n = \left\{ B \in \mathcal{F} : \left(\frac{r}{2^{n+1}} < \text{rad}(B) \leq \frac{r}{2^n}\right) \right\}.$$

Una sucesión \mathcal{G}_n , con $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ se define inductivamente de la siguiente manera: Sea \mathcal{G}_0 una colección disjunta máxima de bolas en \mathcal{F}_0 . Asumiendo que $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ han sido seleccionados y considere el conjunto

$$H_{n+1} = \left\{ B \in \mathcal{F}_{n+1} : B \cap B' = \emptyset, \text{ para todo } B' \in \bigcup_{i=0}^n \mathcal{G}_i \right\}$$

donde \mathcal{G}_{n+1} una subcolección disjunta máxima de H_{n+1} , es decir, una colección máxima disjunta de bolas en \mathcal{F}_{n+1} .

Defina la subcolección $\mathcal{G} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}$ donde \mathcal{G} es una colección de bolas disjuntas, pues cada \mathcal{G}_i es una colección de bolas disjuntas en \mathcal{F} .

Ahora se demuestra que para cada $B \in \mathcal{F}$ existe una bola $B' \in \mathcal{G}$ tal que $B \cap B' \neq \emptyset$ y $B \subseteq \hat{B}'$.

En efecto, fije B una bola en la colección \mathcal{F} entonces existe un índice n tal que $B \in \mathcal{F}_n$. Por la maximalidad de \mathcal{G}_n , existe una bola $B' \in \bigcup_{n=0}^j \mathcal{G}_n$, esto significa que B intersecciona alguna

bola de $\bigcup_{n=0}^j \mathcal{G}_n$, es decir, $B \cap B' \neq \emptyset$. Pero para algún n , $B' \in \mathcal{F}_n$ donde $\text{rad}(B') > \frac{r}{2^{n+1}}$ y $\text{rad}(B) \leq \frac{r}{2^n}$, de esto se tiene que $2 \text{rad}(B') > \text{rad}(B)$.

Tome \hat{B}' la bola concéntrica en B' y de cinco veces el radio, de donde se tiene que $B \subseteq \hat{B}'$, para cada $B \in \mathcal{F}$. \square

Una forma precisa del teorema es que si \mathcal{F} es una colección de bolas en \mathbb{R}^n , con radios acotados. Existe una subcolección disjunta \mathcal{G} de \mathcal{F} con la siguiente propiedad:

Cada bola B en \mathcal{F} intersecciona a una bola B' en \mathcal{G} tal que $B \subseteq \hat{B}'$, donde \hat{B}' es de cinco veces el radio de B (ver Figura 1.2).

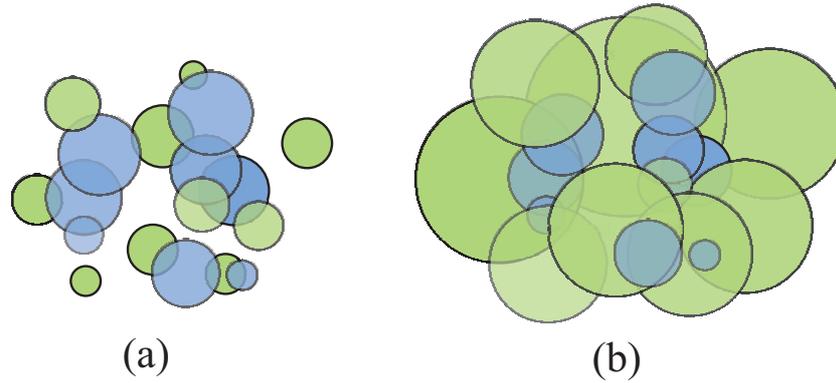


Figura 1.2: En el gráfico (a) la colección de bolas verdes son la subcolección disjunta. En el gráfico (b) la colección de bolas de cinco veces el radio (bolas de color verde) cubren todas las bolas.

1.4 Conceptos y resultados adicionales

Los siguientes resultados serán de importancia para desarrollar algunos resultados, como por ejemplo la propiedad de escala es útil para encontrar la dimensión de Hausdorff de algunos conjuntos, así como también la definición de conteo de cajas, entre otros.

Definición 1.20. Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

a) Se define límite inferior como

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} (\inf\{f(x) : 0 < x < r\}).$$

b) Se define límite superior como

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} (\sup\{f(x) : 0 < x < r\})$$

Definición 1.21. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales.

a) Sea $t_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$.

Se llama límite inferior de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ al valor $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \sup_{n \geq 1} t_n. \text{ Luego}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} (\inf_{k \geq n} x_k).$$

b) Sea $s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$.

Se llama *límite superior* de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ al valor $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \inf_{n \geq 1} s_n. \text{ Luego}$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 1} (\sup_{k \geq n} x_k).$$

Ejemplo 1.5. Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{k}{k+1} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, se tiene que

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k = 1.$$

En efecto.

Por definición de límite superior se tiene que $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$, donde $s_k = \sup\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\}$.

Sea $\{x_k\}_{n \geq k} = \left\{ \frac{k}{k+1}, \frac{k+1}{k+2}, \frac{k+2}{k+3}, \dots \right\}$, entonces $s_k = \sup_{n \geq k} \{x_k\} = \frac{k}{k+1}$.

Luego,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

Por lo tanto, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 1$, esto implica que $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k = 1$.

Definición 1.22. Sea A un conjunto no vacío de \mathbb{R}^n . Un punto $x \in A$ es punto interior de A , si existe una bola abierta de centro x que esta contenida en A .

Se denomina interior de A al conjunto de puntos interiores de A , que lo denotaremos como $\text{int}(A)$.

Definición 1.23. Sea A un conjunto no vacío \mathbb{R}^n . Un punto $x \in A$ es punto de clausura o adherencia de A , si para toda bola de centro x contiene algún punto de A .

Se denomina adherencia de A al conjunto de puntos adherentes de A , que lo denotaremos como \overline{A} .

Definición 1.24. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es de Lipschitz si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Proposición 1.4. Sea $F \subset \mathbb{R}^m$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha; \quad x, y \in F, \quad (1.7)$$

para constantes $c > 0$ y $\alpha > 0$. Entonces para cada $s > 0$

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F). \quad (1.8)$$

Demostración:

Si $\{U_i\}$ es un δ -cubrimiento de F , esto es

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ y } 0 \leq |U_i| \leq \delta, \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \dots$$

En efecto, sabemos que:

$$|f(F \cap U_i)| = \sup\{|f(x) - f(y)|; f(x), f(y) \in f(F \cap U_i), x, y \in F \cap U_i\}$$

$$y \quad |F \cap U_i| = \sup\{|x - y|, x, y \in F \cap U_i\}.$$

Por hipótesis tenemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, x, y \in F; \alpha > 0, c > 0.$$

Entonces

$$\sup\{|f(x) - f(y)|\} \leq \sup\{c|x - y|^\alpha\} = c(\sup\{|x - y|\})^\alpha$$

lo que implica que $|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha$.

Como $F \cap U_i \subseteq U_i$, entonces

$$\{|x - y|, x, y \in F \cap U_i\} \subseteq \{|x - y|, x, y \in U_i\}$$

$$\sup\{|x - y|, x, y \in F \cap U_i\} \leq \sup\{|x - y|, x, y \in U_i\}.$$

Por definición de diámetro se tiene $|F \cap U_i| \leq |U_i|$ y como $\alpha > 0$

$$|F \cap U_i|^\alpha \leq |U_i|^\alpha.$$

Luego:

$$|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha.$$

Se sigue que $\{f(F \cap U_i)\}$ es un ε -cubrimiento de $f(F)$, donde $\varepsilon = c\delta^\alpha > 0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq \sum_{i=1}^{\infty} (c|U_i|^\alpha)^{s/\alpha} = c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s,$$

lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

De aquí se tiene

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} : \{f(F \cap U_i)\} \text{ es un } \varepsilon\text{-cubrimiento de } f(F) \right\} \leq$$

$$c^{s/\alpha} \cdot \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } F \right\}.$$

Es decir, por definición de \mathcal{H}_δ^s

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Como δ tiende a 0 entonces ε tiende a 0, pues $\varepsilon = c\delta^\alpha$.

Aplicando límite cuando δ tiende a cero, tenemos:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

lo cual implica

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

□

Observación 1.4. En el caso $\alpha = 1$ se tiene $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$, $x, y \in F$ lo cual por 1.8 implica que

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F) \quad (1.9)$$

Definición 1.25. Una transformación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de similitud de escala $\lambda > 0$, si

$$|S(x) - S(y)| = \lambda|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Proposición 1.5. (Propiedad de escala)

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación de similitud de factor escala $\lambda > 0$. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Demostración:

Sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de F , es decir, $0 \leq |U_i| \leq \delta$ para cada i y $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$

Entonces $\{S(U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un $\lambda\delta$ -cubrimiento de $S(F)$, es decir,

$$S(F) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} S(U_i) \quad \text{y} \quad 0 \leq |S(U_i)| \leq \lambda\delta.$$

Además se tiene que:

$$|S(U_i)| = \sup\{|S(x) - S(y)|, S(x), S(y) \in S(U_i), x, y \in U_i\}$$

y

$$|U_i| = \sup\{|x - y|, x, y \in U_i\}.$$

Por hipótesis S es una transformación de similitud de escala $\lambda > 0$ de donde se obtiene que $|S(U_i)| = \lambda|U_i|$, para todo $i = 1, 2, \dots$. Y como s es un número real positivo tenemos

$$|S(U_i)|^s = (\lambda|U_i|)^s = \lambda^s|U_i|^s \text{ para todo } i = 1, 2, \dots$$

Es decir,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |S(U_i)|^s = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^s |U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Luego para todo δ -cubrimiento $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de F y $\lambda\delta$ -cubrimiento $\{S(U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $S(F)$ se tiene

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |S(U_i)|^s \right\} = \inf \left\{ \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\} = \lambda^s \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\}$$

es decir, por definición de \mathcal{H}_δ^s

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F), \quad \lambda^s > 0$$

Tomando el límite cuando δ tiende a cero se tiene:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(S(F)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Como λ^s no depende de δ , entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(S(F)) &= \lambda^s \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \\ \mathcal{H}^s(S(F)) &= \lambda^s \mathcal{H}^s(F) \end{aligned}$$

□

Teorema 1.7. *Sea μ una medida regular de Borel en X , A un conjunto μ -medible y $\epsilon > 0$, entonces*

- a) *Si $\mu(A) < \infty$, podemos encontrar un conjunto cerrado $C \subseteq A$ tal que $\mu(A \setminus C) < \epsilon$.*
- b) *Si V_1, V_2, \dots son conjuntos abiertos tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ y $\mu(V_i) < \infty$ para cada i , entonces hay un conjunto abierto V tal que $A \subseteq V$ y $\mu(V \setminus A) < \epsilon$.*

La demostración se encuentra en [13] página 11.

Observación 1.5. Si en el Teorema 1.7 parte a), consideramos μ como una medida de Radon, y tomamos C como un conjunto compacto se tiene que $\mu(A \setminus C) < \epsilon$.

Definición 1.26. Sea F cualquier subconjunto no vacío y acotado de \mathbb{R}^n , y sea $N_\delta(F)$ el menor número de conjuntos de diámetro a lo más δ que cubren a F , es decir, $N_\delta(F)$ es el menor número de conjuntos en cualquier δ -cubrimiento de F . La dimensión de conteo de cajas de F se definen como:

$$\dim_C F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

Observación 1.6. La dimensión de Hausdorff coincide con la dimensión de conteo de cajas.

Ejemplo 1.6. La siguiente construcción nos lleva a un conjunto conocido como *polvo de Cantor*. Esta se realiza de la siguiente manera: Sea E_0 un cuadrado de lado 1. La primera iteración consiste en dividir E_0 en dieciséis cuadrados y en cada columna se retiran tres cuadrados, quedando un conjunto E_1 , como en la Figura 1.3. En la segunda iteración cada uno de los cuadrados que conforman E_1 es dividido en dieciséis cuadrados y en cada columna de dichos cuadrados se retiran tres cuadrados, quedando un conjunto E_2 . Y se repite el proceso infinitas veces. Entonces el polvo de Cantor es definido como el conjunto

$$F = \bigcap_{i=0}^{\infty} E_i.$$

Se demuestra que $\dim_C F = 1$ y $1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$.

En efecto, observe que de la construcción del polvo de Cantor el conjunto E_1 consta de cuatro cuadrados cada uno de lado $\frac{1}{4}$, el conjunto E_2 consta de dieciséis cuadrados cada uno de lado $\frac{1}{16}$, y así en la k -ésima iteración, E_k consta de 4^k cuadrados cada uno de lado 4^{-k} .

Tomando $\delta = 4^{-k}$ y $N_\delta(F) = 4^k$ se tiene que $\dim_C F = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^k}{-\ln 4^{-k}} = 1$.

Ahora se tiene que el diámetro

$$|U_i| = \sqrt{(4^{-k})^2 + (4^{-k})^2} = \sqrt{4^{-2k} + 4^{-2k}} = 4^{-k}\sqrt{2},$$

la cual implica $|U_i| = 4^{-k}\sqrt{2}$, para cada índice i .

Tomando los cuadrados de la etapa E_k como δ -cubrimiento de F , con $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^1(F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i| : \{U_i\} \text{ es un } \delta \text{-cubrimiento de } F \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{4^k} |U_i| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k 4^{-k}\sqrt{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

La cual implica que $\mathcal{H}_\delta^1(F) \leq \sqrt{2}$.

Tomando el límite cuando δ tiende a cero se tiene $\mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2}$.

Por otro lado sea $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección ortogonal, y sea $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ en \mathbb{R}^2 , tal que

$$|\pi_1(x) - \pi_1(y)| = |x_1 - y_1| \leq |x - y|.$$

Así π_1 es una función de Lipschitz, y por la construcción del conjunto F , se tiene que $\pi_1(F) = [0, 1]$.

Luego por la Proposición 1.3 y 1.4 se tiene que

$$1 = \mathcal{L}^1([0, 1]) = \mathcal{H}^1([0, 1]) = \mathcal{H}^1(\pi_1(F)) \leq \mathcal{H}^1(F).$$

Por lo tanto, $1 \leq \mathcal{H}^1(F)$.

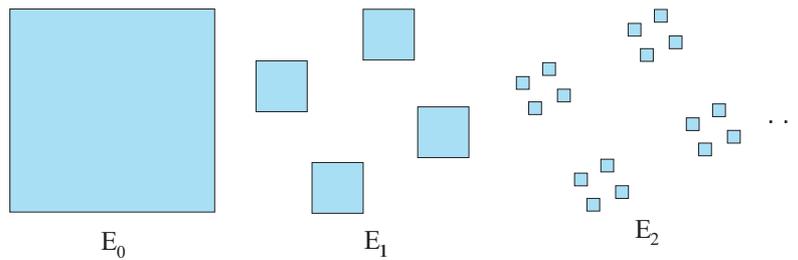


Figura 1.3: Dos primeras iteraciones de la construcción del polvo de Cantor.

Definición 1.27. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ si

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right\} < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre las particiones $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$.

Teorema 1.8. Sea la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de variación acotada entonces la función f es diferenciable en casi todas partes de $[a, b]$

La demostración se encuentra en [12], página 87.

Capítulo 2:

Estructura local de los s -conjuntos

El cálculo clásico implica encontrar aproximaciones locales a curvas y superficies por medio de rectas y planos tangentes, respectivamente. Tomando una pequeña parte de una curva, el entorno de un punto en una curva suave es parecido a un segmento de recta. ¿Se puede decir algo sobre la estructura local de diversas clases de objetos como los fractales? Sorprendentemente, la respuesta en muchos casos es sí. Se puede de alguna manera establecer la forma de fractales en un entorno de un punto general. En particular, podemos estudiar la regularidad e irregularidad de los s -conjuntos en casi todos sus puntos. El conocimiento de la forma local de un fractal es útil tanto en el desarrollo de la teoría como en las aplicaciones.

Para comprender la importancia de la medida de Hausdorff, es necesario restringir el universo de conjuntos a estudiar. Exactamente nos referimos a los s -conjuntos, los cuales son conjuntos de Borel de dimensión de Hausdorff s con medida de Hausdorff s -dimensional positiva y finita. De manera más general, es posible trabajar con s -conjuntos de medida \mathcal{H}^h - positiva y finita para alguna función de dimensión h , (ver [2] sección 3.7), pero esta generalización no se considera aquí. Muchos fractales encontrados en la práctica son s -conjuntos, incluso si $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. Por ejemplo consideramos a F como la curva de Koch, este conjunto cuando $s = 1$ tiene medida de Hausdorff 1-dimensional infinita ($\mathcal{H}^1(F) = \infty$). Por otra parte, a veces ocurre que un conjunto F de dimensión s es la unión enumerable de s -conjuntos, y las propiedades de estos conjuntos a menudo se pueden transferir a F . En este caso, nos restringimos a los subconjuntos del plano, es decir, s -conjuntos en el plano para $0 < s < 2$.

2.1 Densidad y regularidad

En esta sección se introduce la noción de la densidad de Lebesgue en el espacio euclidiano n -dimensional, en particular para la densidad de Lebesgue en el espacio 1-dimensional y 2-dimensional, para luego investigar sobre la densidad y regularidad de los s -conjunto en \mathbb{R}^2 , que son conjuntos cuya dimensión de Hausdorff es s .

Definición 2.1. *La densidad de Lebesgue de $F \subseteq \mathbb{R}^m$ en x , es el límite*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(F \cap B[x, r])}{\mathcal{L}^n(B[x, r])}.$$

Donde \mathcal{L}^n es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n y $B[x, r]$ la bola cerrada con centro en x y radio $r > 0$. Dicho límite se denota como $D^n(F, x)$.

Observación 2.1. En la definición anterior n denota la dimensión del conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^m$.

Teorema 2.1. Teorema de densidad de Lebesgue

Sea \mathcal{L}^n la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n y F un subconjunto Lebesgue medible de \mathbb{R}^m . Entonces $D^n(F, x)$ es igual a 1 si $x \in F$ y 0 si $x \notin F$, excepto para un conjunto de \mathcal{L}^n -medida cero.

Demostración:

Por definición de la integral de Lebesgue, $f = \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{1}_{F_i}$, se tiene que $\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(F_i \cap E)$.

Tomando $E = B[x, r]$, $f = \mathbb{1}_F$ y $\mu = \mathcal{L}^n$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{B[x, r]} \mathbb{1}_F d\mu &= \sum_{i=1}^m a_i \mu(F \cap B[x, r]) \\ &= 1 \cdot \mu(F \cap B[x, r]) = \mu(F \cap B[x, r]). \end{aligned}$$

Como la función característica es una función localmente integrable en \mathbb{R}^n , y por el teorema de diferenciación de Lebesgue (ver Teorema 1.5).

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_F(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B[x, r])} \int_{B[x, r]} \mathbb{1}_F d\mu \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B[x, r])} \mu(F \cap B[x, r]). \end{aligned}$$

Esto implica que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(F \cap B[x, r])}{\mu(B[x, r])} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin F \\ 1 & \text{si } x \in F \end{cases} \quad \square$$

Lo que nos quiere decir el teorema de densidad de Lebesgue es que si x es un punto de F , pequeñas bolas centradas en x están casi totalmente contenidos en F , pero si x está en el complemento de F entonces pequeñas bolas centradas en x generalmente contienen muy poco de F (ver Figura 2.1).

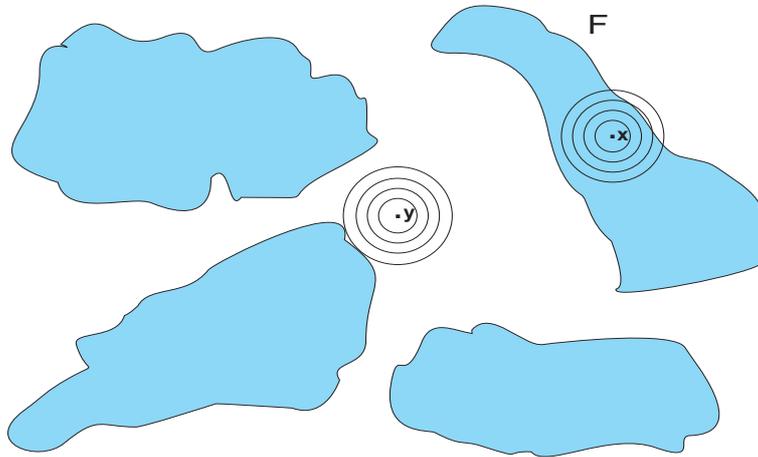


Figura 2.1: Teorema de densidad de Lebesgue.

En la Definición 2.1, la densidad de Lebesgue para $n = 1$, \mathcal{L}^1 significa que estamos en el caso de longitud, es decir, la densidad de Lebesgue de $F \subseteq \mathbb{R}^m$ en x , es

$$D^1(F, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^1(F \cap B[x, r])}{\mathcal{L}^1(B[x, r])} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{longitud}(F \cap B[x, r])}{2r}.$$

Nota 2.1. Note que de la ecuación anterior, $\mathcal{L}^1(B[x, r]) = 2r$, pues en este caso una bola cerrada en \mathbb{R} es un intervalo cerrado de radio r , cuya longitud es $2r$.

Corolario 2.1. Sea F un subconjunto de \mathbb{R}^m y $D^1(F, x)$ la densidad de Lebesgue de F en x . Entonces $D^1(F, x)$ es igual a 1 si $x \in F$ y 0 si $x \notin F$, excepto para un conjunto de \mathcal{L}^1 -medida cero.

La demostración se sigue del Teorema 2.1 para $n = 1$.

Ejemplo 2.1. Sea C una curva suave en \mathbb{R}^m y x un punto de C (que no sea un punto extremo). Por el Corolario 2.1 dicha curva tiene densidad de Lebesgue $D^1(C, x)$ igual a 1 si $x \in C$ y 0 si $x \notin C$, en particular toda recta en \mathbb{R}^m cumple dicha propiedad.

En la Definición 2.1, la densidad de Lebesgue para $n = 2$, \mathcal{L}^2 significa que estamos en el caso del área, es decir, la densidad de Lebesgue de $F \subseteq \mathbb{R}^m$ en x , es

$$D^2(F, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(F \cap B[x, r])}{\text{area}(B[x, r])} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(F \cap B[x, r])}{\pi r^2}. \quad (2.1)$$

Corolario 2.2. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^m$ y $D^2(F, x)$ la densidad de Lebesgue de F en x . Entonces $D^2(F, x)$ es igual a 1 si $x \in F$ y 0 si $x \notin F$, excepto para un conjunto de \mathcal{L}^2 -medida cero.

La demostración se sigue del Teorema 2.1 para $n = 2$.

Ejemplo 2.2. Sea F un rectángulo. De la ecuación (2.1) se tiene (ver Figura 2.2).

1. Si $a \in \text{int}(F)$, entonces $D^2(F, a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(F \cap B[a, r])}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi r^2}{\pi r^2} = 1$.
2. Si b es un vértice, entonces $D^2(F, b) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(F \cap B[b, r])}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$.
3. Si c pertenece a una arista, se tiene $D^2(F, c) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(F \cap B[c, r])}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{1}{2}$.
4. Si $d \in F^c$, es decir, $B(d, r) \cap F = \emptyset$, se tiene

$$D^2(F, d) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(F \cap B[a, r])}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(\emptyset)}{\pi r^2} = 0.$$

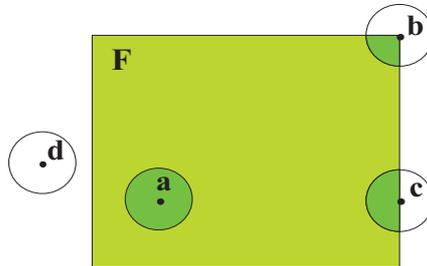


Figura 2.2: EL conjunto F y su densidad de Lebesgue en los puntos a, b, c y d .

Las ideas de densidad como estas en el sentido de los Corolarios 2.1 y 2.2, nos dicen cuanto del conjunto F se concentra cerca del punto x . De la misma manera, esto nos da una idea para investigar la densidad en conjuntos de \mathbb{R}^n (si dichos conjuntos tiene dimensión de Hausdorff s) ¿Cómo se comporta la medida de Hausdorff s -dimensional de $F \cap B[x, r]$ cuando r tiende a 0?

Veamos la interrogante cuando F es un s -conjunto en \mathbb{R}^2 (los 0-conjuntos son justamente conjuntos finitos de puntos, y hay poco que estudiar, y \mathcal{H}^2 es esencialmente el área, si $s = 2$, en este último caso estamos en la situación de la densidad de Lebesgue (2.1)).

Definición 2.2. Sea F un subconjunto de \mathbb{R}^n , F se denomina un s -conjunto con $0 \leq s \leq n$, si F es un conjunto de Borel y $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Observación 2.2. En la definición anterior F también puede ser un conjunto \mathcal{H}^s -medible, pues como la medida de Hausdorff s -dimensional de F es finita de alguna manera podemos encontrar su medida de dicho conjunto.

Ejemplo 2.3. Del Ejemplo 1.6 el polvo de Cantor F es un 1-conjunto, pues $0 < 1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt{2} < \infty$.

Ejemplo 2.4. (El conjunto ternario de Cantor)

1. El conjunto ternario de Cantor es el primer fractal conocido. Fue ideado por Georg Cantor en 1883, como ejemplo de conjunto de longitud cero, cuyos puntos se pueden identificar uno a uno con todos los puntos de una recta (que tiene longitud infinita).

Para su construcción iniciamos de un segmento de longitud 1, exactamente consideramos el intervalo $E_0 = [0, 1]$. En la primera iteración, E_0 se divide en tres partes iguales y se elimina la parte central abierta (es decir, sin incluir los extremos) esto origina el conjunto E_1 . En la segunda iteración, cada uno de los segmentos que conforman E_1 es dividido en tres partes iguales, originando el conjunto E_2 . En la tercera iteración, se divide E_2 procediendo como en los pasos anteriores con cada uno de los cuatro segmentos que quedan. Y se repite el proceso infinitas veces. Entonces el conjunto ternario de Cantor (ver Figura 2.3), está dado por la intersección $\bigcap_{i=0}^{\infty} E_i = F$.

2. El conjunto ternario de Cantor F tiene dimensión de Hausdorff $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, que coincide con la dimensión de cajas.

- a) El conjunto ternario de Cantor F se divide en una parte izquierda $F_I = F \cap [0, \frac{1}{3}]$ y una parte derecha $F_D = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Claramente ambas partes son geoméricamente similares a F pero de escala $\lambda = \frac{1}{3}$, y $F = F_I \cup F_D$ donde F_I y F_D son disjuntos. Así, para cualquier s ,

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_I) + \mathcal{H}^s(F_D) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F).$$

Donde la ultima igualdad de la ecuación anterior es por la propiedad de escala (ver Proposición 1.5), y por tanto $1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$ esto implica que $s = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309\dots$

- b) En efecto, tenemos que en la primera iteración, el conjunto E_1 consta de dos intervalos de longitud $\frac{1}{3}$ cada uno; en la segunda iteración, el conjunto E_2 consta de cuatro intervalos de longitud $\frac{1}{9}$ cada uno; en la tercera iteración, el conjunto E_3 consta de ocho intervalos de longitud $\frac{1}{27}$ cada uno y así sucesivamente en la k -ésima iteración el conjunto E_k consta de 2^k intervalos de longitud $\frac{1}{3^k}$ cada uno. Tomando $\delta = 3^{-k}$ y $N_\delta(F) = 2^k$ tenemos que

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{-\ln 3^{-k}} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

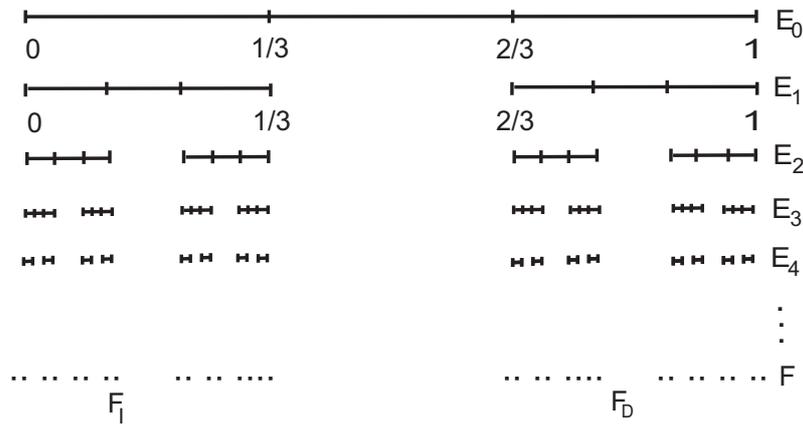


Figura 2.3: Cuatro primeras iteraciones para la construcción del conjunto ternario de Cantor.

3. Si $s = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309\dots$ entonces $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$ y, por tanto, F es un s -conjunto. En efecto, llamamos E_k al conjunto de intervalos de la k -ésima iteración de F . Así en la k -ésima iteración, E_k consta de 2^k intervalos cada uno de longitud 3^{-k} .

Tomando los intervalos de E_k como un δ -cubrimiento de F , donde $\delta = 3^{-k}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta \text{-cubrimiento de } F \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^k} |U_i|^s \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^k} (3^{-k})^s = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k (3^{-k})^s. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k 3^{-ks}$.

Como $3^s = 2$ y k es un número positivo se tiene $3^{ks} = 2^k$. La cual implica que $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 3^{ks} \cdot 3^{-ks} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1$, de donde $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq 1$, tomando el límite cuando δ tiende a cero se tiene $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq 1$. Por definición de \mathcal{H}^s , se tiene $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Para verificar que $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$ solo basta deducir la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}. \quad (2.2)$$

Si tomamos el ínfimo y el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ en (2.2) se tendrá que $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$.

Sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cualquier cubrimiento de F . Es suficiente asumir que los $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ son intervalos, pues F es el conjunto ternario de Cantor y usando la compacidad de F , necesitamos sólo verificar (2.2), si $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una colección finita de subintervalos cerrados de $[0, 1]$. Para cada U_i , sea k el número entero positivo no nulo tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}. \quad (2.3)$$

Entonces U_i puede intersectarse a lo más en un intervalo de la k -ésima iteración. La separación de estos intervalos de la k -ésima iteración es de al menos 3^{-k} , ya que para cada iteración siempre se divide en tres partes iguales, luego el intervalo central es eliminado. Si $j \geq k$ entonces, por construcción, U_i se intersecta a lo más en los intervalos de la j -ésima iteración de E_j , donde la cantidad de intervalos de la $(j - k)$ -ésima iteración está dada por

$$2^{j-k} = 2^j \times 3^{-sk} = 2^j \times 3^s \times 3^{-s} \times 3^{-sk} = 2^j \times 3^s \times 3^{-(k+1)s}$$

Usando (2.3) se tiene $2^{j-k} \leq 2^j \times 3^s \times |U_i|^s$, para todo índice i .

Si escogemos j bastante grande tenemos que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ para todo U_i , entonces,

desde que $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ interseca a todos los intervalos 2^j de longitud 3^{-j} y sumando todos los intervalos de la k -ésima iteración, tenemos que

$$2^j \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^j 3^s |U_i|^s = 2^j 3^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Esto implica que $2^j \leq 2^j 3^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ de donde $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1.$$

Y así, el conjunto F es un s -conjunto, con $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Ejemplo 2.5. Sea F un cubo sólido de aristas igual a uno, F es un s -conjunto con $s = 3$.

En efecto, sabemos que \mathcal{H}^3 representa el volumen de un conjunto en \mathbb{R}^n . Cubrimos al cubo F por cubos pequeños U_i , $i \in \mathbb{N}$, de lado $\frac{1}{2^k}$, con $k \in \mathbb{N}$ donde el volumen de cada cubo es $\frac{1}{2^{3k}}$. Así, tomando un δ -cubrimiento con $\delta = \frac{1}{2^k}$ y $|U_i|^3 = \frac{1}{2^{3k}}$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^3 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^{3k}} \frac{1}{2^{3k}} = 1.$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}^3(F) = 1$. Además F es \mathcal{H}^3 -medible, pues toda bola es medible, en particular una esfera sólida en \mathbb{R}^3 .

Así, F es un s -conjunto, con $s = 3$.

Para medir la concentración de puntos de un s -conjunto en las proximidades de un punto dado se recurre al concepto de densidad, comparando con la medida del conjunto que hay en cada bola centrada en el punto con su diámetro. Más concretamente, se define la densidad inferior y superior del conjunto F , de dimensión de Hausdorff s , en el punto x como:

Definición 2.3. Sea F un s -conjunto y x un punto de \mathbb{R}^n , se llama densidad inferior de F en x al límite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} \quad (2.4)$$

donde $B[x, r]$ es una bola cerrada de centro x y radio $r > 0$. Dicho límite se denota como $\underline{D}^s(F, x)$.

Observación 2.3. El límite inferior existe siempre y cuando la medida de Hausdorff s -dimensional de $(F \cap B[x, r])$ se aproxima a $(2r)^s$ ya que $\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])$ decrece en función de r , pues a

medida que r tiende a cero la medida de Hausdorff s -dimensional del conjunto F intersectado con la bola también tiende a cero.

Definición 2.4. Sea F un s -conjunto y x un punto de \mathbb{R}^n , se llama densidad superior de F en x al límite

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s}. \quad (2.5)$$

El límite (2.5) se denota como $\overline{D}^s(F, x)$.

Observación 2.4. Por definición de límite superior e inferior se tiene que $\underline{D}^s(F, x) \leq \overline{D}^s(F, x)$.

Lema 2.1. Sea $a \geq 0$ y $0 < t < 1$.

1. Si $a \leq t(a + \epsilon)$, $\forall \epsilon > 0$ entonces $a \leq ta$.
2. $a \leq ta$ si y solo si $a = 0$.

Demostración:

1. Si $a = 0$, la desigualdad se cumple. suponer $a > 0$.

Si ocurre que $a > ta$, tome $\epsilon = \frac{a - ta}{2} > 0$. Entonces

$$a \leq t \left(a + \frac{a - ta}{2} \right) = \frac{3ta}{2} - \frac{t^2a}{2}$$

$$2a \leq 3ta - t^2a.$$

Esto implica que $2 \leq 3t - t^2$, y así se tiene $t^2 - 3t + 2 \leq 0$, de donde $t \in [1, 2]$.

Lo cual contradice el hecho que $0 < t < 1$.

2. Si $a = 0$ es claro que $a \leq ta$.

Por otro lado se demuestra que si $a \leq ta$ implica que $a = 0$. En efecto, si $a \neq 0$ se tiene que $a > 0$. Pero siendo $a \leq ta$ entonces $1 \leq t$. esto contradice el hecho que $0 < t < 1$.

Por tanto, $a = 0$. □

Lema 2.2. Sea S un conjunto no vacío de números reales y $b = \sup(S)$. Entonces, para cada $c < b$, existe un x de S tal que $c < x \leq b$.

Demostración:

La demostración se hace por el absurdo. En efecto, si $x \leq c$, para todo $x \in S$, como $c < b$ entonces c no es una cota superior, entonces existe $y \in S$ tal que $c < y$. esto contradice que

$x \leq c$. Por lo tanto, $c < x \leq b$. □

Observación 2.5. Se denota a \mathcal{H}^s -c.t.p para referirnos a \mathcal{H}^s -casi todos sus puntos.

Proposición 2.1. Sea F un s -conjunto en \mathbb{R}^n , entonces $2^{-s} \leq \overline{D}^s(F, x) \leq 1$, para \mathcal{H}^s -c.t.p $x \in F$.

Demostración:

i) Se demuestra que $\overline{D}^s(F, x) \geq \frac{1}{2^s}$ para \mathcal{H}^s -c.t.p $x \in F$.

Considere la familia de conjuntos

$$B_k = \left\{ x \in F : \mathcal{H}^s(B[x, r] \cap F) < \frac{k}{k+1} \cdot r^s, \text{ para } 0 < r < \frac{1}{k} \right\}, \text{ donde } k = 1, 2, 3, \dots$$

y sea $Y = \left\{ x \in F : \overline{D}^s(F, x) < \frac{1}{2^s} \right\}$. Afirmamos que $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

En efecto, si $y \in Y$ se tiene $\overline{D}^s(F, y) < \frac{1}{2^s}$. Por definición de densidad superior tenemos

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[y, r])}{(2r)^s} < \frac{1}{2^s}.$$

Lo que implica

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[y, r])}{r^s} < 1. \quad (2.6)$$

Tomando $0 < r < \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Como se sabe $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$, entonces en la Ecuación 2.6, se tiene

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[y, r])}{r^s} < \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{k}{k+1},$$

además cuando k tiende al infinito, r tiende a cero, lo que implica

$$\frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[y, r])}{r^s} < \frac{k}{k+1}.$$

Luego $\mathcal{H}^s(F \cap B[y, r]) < \frac{k}{k+1} r^s$, lo que significa que $y \in B_k$, para algún k .

Por otro lado, sea $z \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_k$, entonces $z \in B_k$ para algún k , $k = 1, 2, \dots$, es decir

$$\frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[z, r])}{r^s} < \frac{k}{k+1}, \text{ con } 0 < r < \frac{1}{k} \quad (2.7)$$

dividiendo a (2.7) por 2^s , se tiene

$$\frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[z, r])}{(2r)^s} < \frac{k}{(2^s)(k+1)}$$

Cuando k tiende al infinito, r tiende a cero, luego se tiene que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[z, r])}{(2r)^s} < \frac{1}{2^s}.$$

Por lo tanto, $\overline{D}^s(F, z) < \frac{1}{2^s}$, lo que significa que $z \in Y$.

Por definición de \mathcal{H}^s -c.t.p., es suficiente demostrar que $\mathcal{H}^s(B_k) = 0$, para cada k .

Fije un k , con $t = \frac{k}{k+1}$, y $\epsilon > 0$. Por como está definido el conjunto B_k , existe un δ -cubrimiento $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ de B_k , con $\delta = \frac{1}{k}$ y E_i conjuntos de \mathbb{R}^n , es decir $0 < |E_i| < \delta$ y $B_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, en particular $B_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_k \cap E_i)$ y $B_k \cap E_i \neq \emptyset$, y como esta definido \mathcal{H}^s se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^s \leq \mathcal{H}^s(B_k) + \epsilon,$$

pues los diámetros de los conjuntos E_i tienden a cero a medida que k tiende al infinito.

Para cada i escogemos $x_i \in B_k \cap E_i$ y sea $r_i = |E_i|$. Entonces $B_k \cap E_i \subseteq F \cap B[x_i, r_i]$ y como \mathcal{H}^s es una medida exterior tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(B_k) &\leq \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_k \cap E_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(B_k \cap E_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F \cap B[x_i, r_i]) \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} t r_i^s = t \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^s \\ &\leq t(\mathcal{H}^s(B_k) + \epsilon). \end{aligned}$$

Esto implica que $\mathcal{H}^s(B_k) \leq t(\mathcal{H}^s(B_k) + \epsilon)$ y por el Lema 2.1 tenemos $\mathcal{H}^s(B_k) \leq t(\mathcal{H}^s(B_k))$ y $\mathcal{H}^s(B_k) = 0$.

Por lo tanto por definición de \mathcal{H}^s -c.t.p se tiene que $\overline{D}^s(F, x) \geq 2^{-s}$.

II) Se demuestra que $\overline{D}^s(F, x) \leq 1$, para \mathcal{H}^s -c.t.p.

Sea $t > 1$ y defina el conjunto

$$B = \{x \in F : \overline{D}^s(F, x) > t\}$$

por definición de \mathcal{H}^s -c.t.p, es suficiente demostrar que $\mathcal{H}^s(B) = 0$.

En efecto para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, como $A \cap B$ y $A \cap B^c$ son disjuntos y \mathcal{H}^s es una medida tenemos que $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(A \cap B) + \mathcal{H}^s(A \cap B^c)$ así B es \mathcal{H}^s -medible.

Por el Teorema 1.4, \mathcal{H}^s es Borel regular y F un s -conjunto, entonces F es \mathcal{H}^s -medible, y $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, luego por el Teorema 1.2 $\mathcal{H}^s|_F$ es una medida Borel regular.

Además se tiene que $B \subseteq F$, por lo que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, donde $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ son cubrimientos de F .

Sea $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$. Por el Teorema 1.7 encontramos un conjunto abierto U tal que $B \subseteq U$ y $\mathcal{H}^s(U \setminus B) < \epsilon$, además como $F \cap U \subseteq (U \setminus B) \cup B$ se tiene que $\mathcal{H}^s(F \cap U) < \mathcal{H}^s(B) + \epsilon$.

Defina el conjunto

$$T = \left\{ B[x, r] : x \in B, B[x, r] \subseteq U, 0 < r < \delta/2, \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} > t \right\}.$$

Afirmemos que

$$\frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} > t. \quad (2.8)$$

En efecto, por definición de límite superior se tiene

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup \left\{ \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} : 0 < r < \delta/2 \right\} \right).$$

Haciendo $g(\delta) = \sup \left\{ \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} : 0 < r < \delta/2 \right\}$ y como $\overline{D}^s(F, x) > t$, se tiene que $\lim_{\delta \rightarrow 0} g(\delta) > t$.

Suponer que $\lim_{\delta \rightarrow 0} g(\delta) = L$, por definición de límite sea $\epsilon = L - t > 0$, existe $\beta > 0$ tal que $0 < |\delta| < \beta$ entonces $|g(\delta) - L| < \epsilon$.

Luego, $g(\delta) > L - \epsilon = t$, esto implica que para todo $\epsilon > 0$, $t < g(\delta)$. Y por el Lema 2.2, existe $\frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s}$ tal que $t < \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} \leq g(\delta)$, de donde se obtiene lo afirmado.

Por el Teorema de cubrimiento de Vitali (Teorema 1.6) existe una familia enumerable de bolas disjunta $\{B_i\}_{i \in I'}$ tal que $\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \bigcup_{i \in I'} B_i$, donde $B_i, i \in I'$ es la bola concentrica con B_i y de cinco veces el radio.

Haciendo $B_i = B[x_i, r_i]$. Para cada $x_i \in B$ con $B_i \in T$, y para todo $i \in I'$, se tiene que $F \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq F \cap U$, entonces tenemos

$$\mathcal{H}^s(F \cap U) \geq \mathcal{H}^s\left(F \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (F \cap B_i)\right)$$

y como \mathcal{H}^s es una medida

$$\mathcal{H}^s(F \cap U) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F \cap B_i).$$

Por 2.8 se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F \cap B_i) > \sum_{i=1}^{\infty} t(2r_i)^s = t \sum_{i=1}^{\infty} (2r_i)^s = t \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s$$

es decir

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F \cap B_i) > t \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s.$$

Como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(B) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s : \{B_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } B \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s, \end{aligned}$$

esto implica que $t\mathcal{H}_\delta^s(B) \leq \mathcal{H}^s(F \cap U)$.

Entonces $\mathcal{H}^s(B) + \epsilon > t\mathcal{H}_\delta^s(B)$, cuando δ tiende a cero, se tiene que $\mathcal{H}^s(B) + \epsilon \geq t\mathcal{H}^s(B)$ y por el Lema 2.1 tenemos $\mathcal{H}^s(B) \geq t\mathcal{H}^s(B)$ y $\mathcal{H}^s(B) = 0$.

Por lo tanto $\overline{D}^s(F, x) \leq 1$.

□

Observación 2.6. La Proposición (2.1) garantiza la existencia del límite superior, pues la medida de Hausdorff s -dimensional del conjunto F intersectado con la bola cerrada decrece en función de r , ya que como r tiende a cero, $\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])$ también tiende a cero y dicho límite siempre va a estar entre $[2^{-s}, 1]$, esto significa que $\frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s}$ se aproxima a un número real entre $[2^{-s}, 1]$ cuando r se aproxima a cero.

Observación 2.7. Si $\underline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(F, x)$, este valor común se conoce como la densidad de F en x , y se denota como $D^s(F, x)$.

Definición 2.5. Un s -conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es regular en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si

$$\underline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(F, x) = 1. \quad (2.9)$$

Caso contrario se dirá que F es irregular en el punto x .

Definición 2.6. Sea F un s -conjunto.

a) F se denomina regular si en \mathcal{H}^s -c.t.p es regular, es decir, es regular en todos sus puntos excepto para un conjunto de medida de Hausdorff s -dimensional cero (\mathcal{H}^s -medida 0).

b) F se denomina irregular si en \mathcal{H}^s -c.t.p es irregular.

Nota 2.2. Note que un conjunto irregular no significa que dicho conjunto es no regular, pues un punto irregular al menos una de ellas (densidad superior o inferior) es igual a uno, en cambio un punto no regular su densidad superior e inferior son ambas diferente de uno.

Ejemplo 2.6. Todo intervalo acotado en \mathbb{R} es regular excepto para un conjunto de \mathcal{H}^1 -medida cero.

Ejemplo 2.7. Por el Corolario 2.1 y además como $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$, se deduce que la densidad de una curva rectificable C , en \mathcal{H}^1 -c.t.p es igual a 1, es decir, $D^1(C, x) = 1$, $x \in C$, por lo tanto, C es regular.

Ejemplo 2.8. (El triángulo de Sierpinski)

1. El triángulo de Sierpinski, fue ideado por Waclaw Sierpinski en 1915, y su construcción es de la siguiente manera:

Se inicia con un conjunto E_0 que consta de un triángulo equilátero de lado 1. En la primera iteración consiste en dividir el conjunto E_0 en cuatro triángulos equiláteros iguales (esto se consigue uniendo los puntos medios de los lados del triángulo equilátero dado en E_0) y luego se elimina el triángulo central, es decir, nos quedamos con los tres triángulos equiláteros como se muestra en E_1 de la Figura 2.4. En la segunda iteración cada uno de los triángulos que conforman E_1 es dividido en cuatro triángulos equiláteros iguales y luego el triángulo central es eliminado, obteniendo así el conjunto E_2 . En la tercera iteración consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en la segunda iteración sobre cada uno de los nueve triángulos obtenidos en E_2 . Y se repite el proceso infinitas veces, obteniendo como resultado final el triángulo de Sierpinski (ver Figura 2.4), dado por la intersección $\bigcap_{i=0}^{\infty} E_i = F$.

2. El triángulo de Sierpinski F tiene dimensión de cajas $s = \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

En efecto, de la construcción del triángulo de Sierpinski en la primera iteración, E_1 está formado por tres triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{2}$ cada uno. En la segunda iteración,

E_2 está formado por nueve triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{4}$ cada uno. En la tercera iteración, E_3 está formado por veintisiete triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{8}$ cada uno y así sucesivamente hasta en la iteración k . E_k está formado por 3^k triángulos equiláteros de lado 2^{-k} cada uno de ellos.

Tomando $\delta = 2^{-k}$ y $N_\delta(F) = 3^k$ tenemos que

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^k}{-\ln 2^{-k}} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

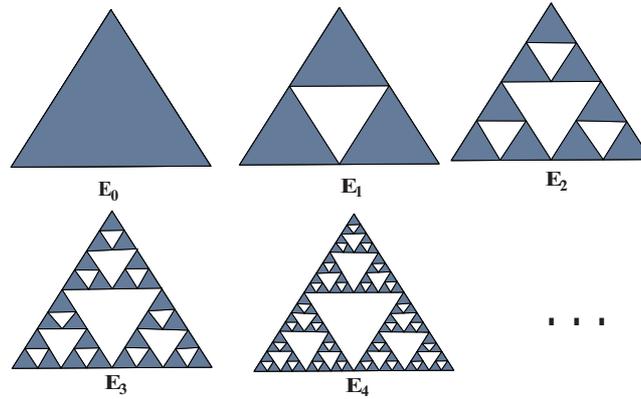


Figura 2.4: Cuatro primeras iteraciones de la construcción del triángulo de Sierpinski.

3. Sea F el triángulo de Sierpinski. Si $s = \ln 3 / \ln 2$, entonces $\frac{1}{18} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

En efecto, llamamos E_k al conjunto de triángulos de la k -ésima iteración de F . Así en la k -ésima iteración, el conjunto E_k consta de 3^k triángulos de lado 2^{-k} cada uno.

Tomando un δ -cubrimiento $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de F para 3^k triángulos con $\delta = 2^{-k}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } F \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{3^k} |U_i|^s \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{3^k} (2^{-k})^s. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 3^k (2^{-k})^s$. Como $2^s = 3$ y k es un número positivo, se tiene $2^{sk} = 3^k$, lo cual implica que $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq 1$.

Como k tiende al infinito, δ tiende a cero, de donde se tiene que $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Por otro lado, demostraremos que $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{18}$.

Como F es compacto, es suficiente demostrar que $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq \frac{1}{18}$, para cualquier cubrimiento $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de F .

Sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal cubrimiento finito de conjuntos cerrados de F , tal que para cada U_i y $k = 1, 2, 3, \dots$ se tiene

$$2^{-(k+2)} \leq |U_i| \leq 2^{-(k+1)}.$$

Entonces U_i interseca a lo más dos triángulos de E_k , pues si $j \geq k$, el número de triángulos de E_j que intersecan a U_i es

$$\begin{aligned} 2 \times 3^{j-k} &= 3^j \times 2^{-sk+1} \\ &= 3^j \times 2^{2s+1} \times 2^{-s(k+2)} \\ &\leq 3^j \times 18 \times |U_i|^s. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior es válida para una cantidad determinada U_i (recordar que k depende de U_i). Dado que solo hay un número finito de conjuntos cerrados U_i , podemos elegir j que sea lo suficientemente grande para que la desigualdad sea verdadera para todos los U_i .

Dado que los U_i intersecan todos los 3^j triángulos de E_j y sumando todos los conjuntos U_i , tenemos que

$$3^j \leq 3^j \times 18 \times \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

Por lo tanto, $\frac{1}{18} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$.

Así F es un s -conjunto, con $s = \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

4. El conjunto F llamado el triángulo de Sierpinski es un s -conjunto irregular, con $s = \frac{\ln 3}{\ln 2}$. En efecto, sea $x \in F$ y $B[x, r]$ la bola cerrada de centro x y radio $r > 0$. En la iteración k de la construcción del triángulo de Sierpinski, el conjunto E_k consta de 3^k triángulos de donde se tiene que $\mathcal{H}^s(F) = 3^k \mathcal{H}^s(F \cap B(x, r))$, con $r = \frac{2^{-k}}{\sqrt{3}}$ y x es el centro de cada uno de los triángulos de E_k , así del ítem anterior tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{18} &\leq 3^k \mathcal{H}^s(F \cap B[x, r]) \leq 1 \\ \frac{1}{18(2r)^s 3^k} &\leq \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} \leq \frac{1}{(2r)^s} \\ \frac{1}{18(3)^{k+1}(2^{-k}\sqrt{3})^s} &\leq \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} \leq \frac{1}{3^{k+1}(2^{-k}\sqrt{3})^s}. \end{aligned}$$

Como $2^s = 3$ esto implica que

$$\frac{3^{(s/2-1)}}{18} \leq \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} \leq 3^{(s/2-1)}.$$

Además como k tiende al infinito, r tiende a cero.

Así, se tiene que $\frac{3^{(s/2-1)}}{18} \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} \leq 3^{(s/2-1)}$ y por definición de densidad

tenemos $\frac{3^{(s/2-1)}}{18} \leq D(F, x) \leq 3^{(s/2-1)}$.

Luego $\underline{D}^s(F, x) = \frac{3^{(s/2-1)}}{18} = 0,04422\dots$ y $\overline{D}^s(F, x) = 3^{(s/2-1)} = 0,7961\dots$, por lo tanto F es irregular.

Proposición 2.2. *Sea F un s -conjunto en \mathbb{R}^n , entonces $D^s(F, x) = 0$, para \mathcal{H}^s -c.t.p $x \notin F$.*

Demostración:

Se demuestra que $D^s(F, x) = 0$ para \mathcal{H}^s -c.t.p $x \notin F$.

En efecto, fije $t > 0$ y defina

$$A_t = \{x \notin F : D^s(F, x) > t\},$$

por definición de \mathcal{H}^s -c.t.p, basta demostrar que $\mathcal{H}^s(A_t) = 0$ para que $D^s(F, x) = 0$.

Como \mathcal{H}^s es una medida Borel regular, y por hipótesis F es un s -conjunto, es decir, F es \mathcal{H}^s -medible y $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, por el Teorema 1.3 tenemos que $\mathcal{H}^s|_F$ es la medida de Radon y dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto compacto $K \subseteq F$ tal que $\mathcal{H}^s(F \setminus K) < \epsilon$ (ver Teorema 1.7, para C un conjunto compacto).

Considere el conjunto abierto $U = \mathbb{R}^n \setminus K$. Por definición de A_t se tiene que $A_t \subseteq U$. Fije un $\delta > 0$ y considere

$$M = \left\{ B[x, r] : x \in U, B[x, r] \subseteq U, 0 < r < \delta, \frac{\mathcal{H}^s(B[x, r] \cap F)}{(2r)^s} > t \right\}$$

Por el teorema de cubrimiento de Vitali (Teorema 1.6) existe una familia enumerable disjunta de bolas $\{B_i\}$ en M tal que $A_t \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i$, con \tilde{B}_i es la bola concéntrica con B_i y de cinco veces su radio.

Escribimos a los B_i como $B[x_i, r_i]$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{10\delta}^s(A_t) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s : \{B_i\} \text{ es un } \epsilon\text{-cubrimiento de } A_t \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (10r_i)^s = 5^s \sum_{i=1}^{\infty} (2r_i)^s \\ &\leq 5^s \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{H}^s(B_i \cap F)}{t} = \frac{5^s}{t} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(B[x_i, r_i] \cap F). \end{aligned}$$

Como \mathcal{H}^s es una medida, se tiene que

$$\mathcal{H}_{10\delta}^s(A_t) \leq \frac{5^s}{t} \mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \cap F) \right).$$

Como $K \subseteq F$ y $B[x_i, r_i] \subseteq U$, para todo $i \in \mathbb{N}$, además $U \cap F = F \setminus K$ se tiene que $\mathcal{H}_{10\delta}^s(A_t) \leq \frac{5^s}{t} \mathcal{H}^s(U \cap F) = \frac{5^s}{t} \mathcal{H}^s(F \setminus K)$.

Esto implica que $\mathcal{H}_{10\delta}^s(A_t) < \frac{5^s}{t} \epsilon$.

Cuando $\delta \rightarrow 0$, se tiene $\mathcal{H}^s(A_t) \leq \frac{5^s}{t} \epsilon$, y como $\epsilon = 10\delta$ entonces ϵ también tiende a cero.

Entonces $\mathcal{H}^s(A_t) = 0$, para cada $t > 0$, y por definición de casi todo punto tenemos que $D^s(F, x) = 0$. \square

Corolario 2.3. *Sea $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$, con E conjunto \mathcal{H}^s -medible $E \subseteq F$ y F un s -conjunto. Entonces para \mathcal{H}^s -c.t.p $x \in E$*

$$\overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x) \text{ y } \underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x). \quad (2.10)$$

Demostración:

Por hipótesis E es un conjunto \mathcal{H}^s -medible y $x \in E$, se tiene

$$\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r]) = \mathcal{H}^s(F \cap B[x, r] \cap E) + \mathcal{H}^s(F \cap B[x, r] \cap E^C).$$

Como $E \subseteq F$, entonces $F \cap E = E$, luego

$$\frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} = \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B[x, r])}{(2r)^s} + \frac{\mathcal{H}^s((F \setminus E) \cap B[x, r])}{(2r)^s} \quad (2.11)$$

i) Demostraremos que $\overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x)$.

Aplicando límite superior en (2.11), cuando r tiende a cero, se tiene

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B[x, r])}{(2r)^s} + \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s((F \setminus E) \cap B[x, r])}{(2r)^s}.$$

Por definición de densidad superior

$$\overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x) + \overline{D}^s(F \setminus E, x)$$

como $x \in E$, y F es un s -conjunto, entonces por la Proposición 2.2 para \mathcal{H}^s -c.t.p $x \notin F \setminus E$, tenemos que $\overline{D}^s(F \setminus E, x) = 0$, por lo tanto

$$\overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x)$$

ii) Demostraremos que $\underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x)$.

Aplicando límite inferior en (2.11), cuando r tiende a cero, se tiene

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r])}{(2r)^s} = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B[x, r])}{(2r)^s} + \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s((F \setminus E) \cap B[x, r])}{(2r)^s}.$$

Por definición de densidad inferior

$$\underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x) + \underline{D}^s(F \setminus E, x)$$

como $x \in E$, y F es un s -conjunto, entonces por la Proposición 2.2 para \mathcal{H}^s -c.t.p $x \notin F \setminus E$, tenemos que $\underline{D}^s(F \setminus E, x) = 0$, por lo tanto

$$\underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x)$$

□

Lema 2.3. Si E es un subconjunto medible de un s -conjunto F con $\mathcal{H}^s(E) > 0$ entonces

a) E es regular, si F es regular.

b) E es irregular, si F es irregular.

Demostración:

a) Como F es regular, por definición se tiene que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\overline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(F, x) = 1$ y por el Corolario 2.3 se tiene que $\overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x) = 1$ y $\underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x) = 1$, es decir, E es regular.

b) Como F es irregular, por definición se tiene que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\overline{D}^s(F, x) \neq 1$ ó $\underline{D}^s(F, x) \neq 1$ y por el Corolario 2.3 se tiene que $1 \neq \overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x)$ ó $1 \neq \underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x)$, es decir, E es irregular. □

Definición 2.7. Un punto m del conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama punto de acumulación de M si para toda bola de centro m y radio $r > 0$ se tiene $(B(m, r) \setminus \{m\}) \cap M \neq \emptyset$.

Teorema 2.2. Sea F un s -conjunto en \mathbb{R}^2 . Si $0 < s < 1$ entonces F es irregular en casi todos sus puntos.

Demostración:

Se demuestra que F es irregular si $0 < s < 1$. Por demostrar que la densidad $D^s(F, x)$ no existe en casi toda partes de F .

Supongamos lo contrario, entonces sea $r_0 > 0$ podemos encontrar un conjunto $F_1 \subseteq F$ de medida positiva donde la densidad existe y por la Proposición 2.1, $\overline{D}^s(F, x) \geq 2^{-s} > \frac{1}{2}$, pues $0 < s < 1$ y por la Ecuación (2.8) tenemos que

$$\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r]) > \frac{1}{2}(2r)^s \quad (2.12)$$

para todo $x \in E$ y $r < r_0$.

Sea y un punto de acumulación de E , y η un número con $0 < \eta < 1$ y sea $A_{r,\eta}$ el anillo $B[y, r(1 + \eta)] \setminus B[y, r(1 - \eta)]$ (ver Figura 2.5). Consideremos $B^+ = B[y, r(1 + \eta)]$ y $B^- = B[y, r(1 - \eta)]$, como B^- es \mathcal{H}^s -medible, es decir,

$$\mathcal{H}^s(F \cap B^+) = \mathcal{H}^s(F \cap B^+ \cap B^-) + \mathcal{H}^s(F \cap B^+ \cap (B^-)^c)$$

Como $B^- \subseteq B^+$ se tiene que $B^- \cap B^+ = B^-$, luego

$$\mathcal{H}^s(F \cap B^+) = \mathcal{H}^s(F \cap B^-) + \mathcal{H}^s(F \cap A_{r,\eta})$$

multiplicando por $(2r)^{-s}$ tenemos

$$(2r)^{-s} \mathcal{H}^s(F \cap A_{r,\eta}) = (2r)^{-s} \mathcal{H}^s(F \cap B^+) - (2r)^{-s} \mathcal{H}^s(F \cap B^-).$$

Aplicando límite cuando r tiende a cero, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap A_{r,\eta})}{(2r)^s} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B^+)}{(2r)^s} - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B^-)}{(2r)^s} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B^+)(1 + \eta)^s}{(2r)^s(1 + \eta)^s} - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B^-)(1 - \eta)^s}{(2r)^s(1 - \eta)^s} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B^+)}{(2r(1 + \eta))^s} (1 + \eta)^s - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap B^-)}{(2r(1 - \eta))^s} (1 - \eta)^s \end{aligned}$$

y por definición de densidad se tiene

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap A_{r,\eta})}{(2r)^s} = D^s(F, y)[(1 + \eta)^s - (1 - \eta)^s]. \quad (2.13)$$

Para una sucesión de valores de r tendiendo a cero, podemos encontrar un elemento $x \in E$ con $|x - y| = r$. Entonces $B[x, r\eta/2] \subseteq A_{r,\eta}$, así por (2.12) se tiene

$$\mathcal{H}^s(F \cap B[x, r\eta/2]) > \frac{1}{2} \left(2 \left(\frac{r\eta}{2} \right) \right)^s = \frac{1}{2} r^s \eta^s.$$

Como $B[x, r\eta/2] \subseteq A_{r,\eta}$ entonces $F \cap B[x, r\eta/2] \subseteq F \cap A_{r,\eta}$.

Luego $\mathcal{H}^s(F \cap A_{r,\eta}) \geq \mathcal{H}^s(F \cap B[x, r\eta/2]) > \frac{1}{2} r^s \eta^s$ esto implica que

$$\frac{\mathcal{H}^s(F \cap A_{r,\eta})}{(2r)^s} \geq \frac{1}{2} r^s \eta^s \frac{1}{(2r)^s} = 2^{-s-1} \eta^s,$$

luego aplicando límite cuando r tiende a cero, se tiene

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(F \cap A_{r,\eta})}{(2r)^s} \geq 2^{-s-1}\eta^s$$

y de (2.13) tenemos

$$2^{-s-1}\eta^s \leq D^s(F, y)[(1 + \eta)^s - (1 - \eta)^s].$$

Tendiendo η a cero, vemos que eso es absurdo pues $0 < s < 1$.

Por lo tanto F es irregular si $0 < s < 1$.

□

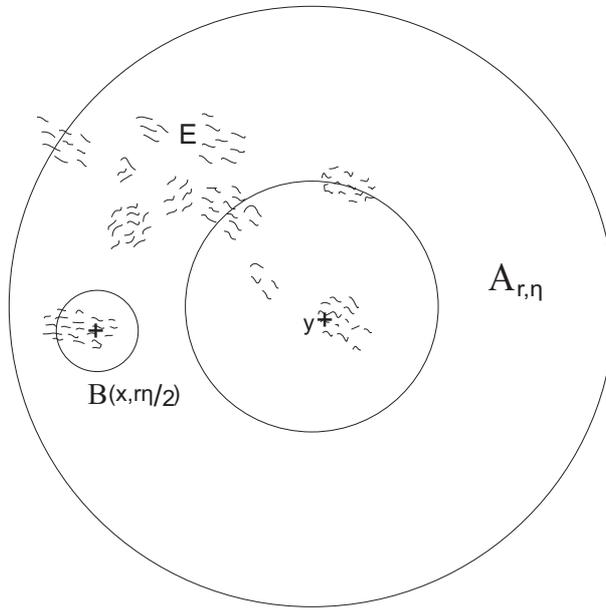


Figura 2.5: Anillo $A_{r,\eta}$.

Ejemplo 2.9. Del Ejemplo 2.4 el conjunto ternario de Cantor F es un s -conjunto, con $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ y por el Teorema 2.2 el conjunto F es un s -conjunto irregular.

Observación 2.8. En las Definiciones 2.3 y 2.4 trabajamos con bolas cerradas de centro x y radio $r > 0$, pero en lugar de dicha bola también podemos trabajar con un conjunto convexo U , de donde se genera la siguiente definición.

Definición 2.8. Se llama densidad convexa superior de un s -conjunto F en x , a

$$\overline{D}_c^s(F, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sup \frac{\mathcal{H}^s(F \cap U)}{|U|^s} \right\}$$

donde el supremo es tomado sobre todos los conjuntos convexo U con $x \in U$ y $0 < |U| \leq r$.

2.2 Estructura de 1-conjunto

Como vimos en el Teorema 2.2, los conjuntos de dimensión no entera son irregulares. La situación para los conjuntos de dimensión entera es más complicada por ello el siguiente teorema de descomposición, como también se muestra en la Figura 2.6, nos permite dividir un 1-conjunto en una parte regular y una parte irregular, para que así podamos analizar cada uno separadamente y recombinarlos sin afectar las propiedades de densidad.

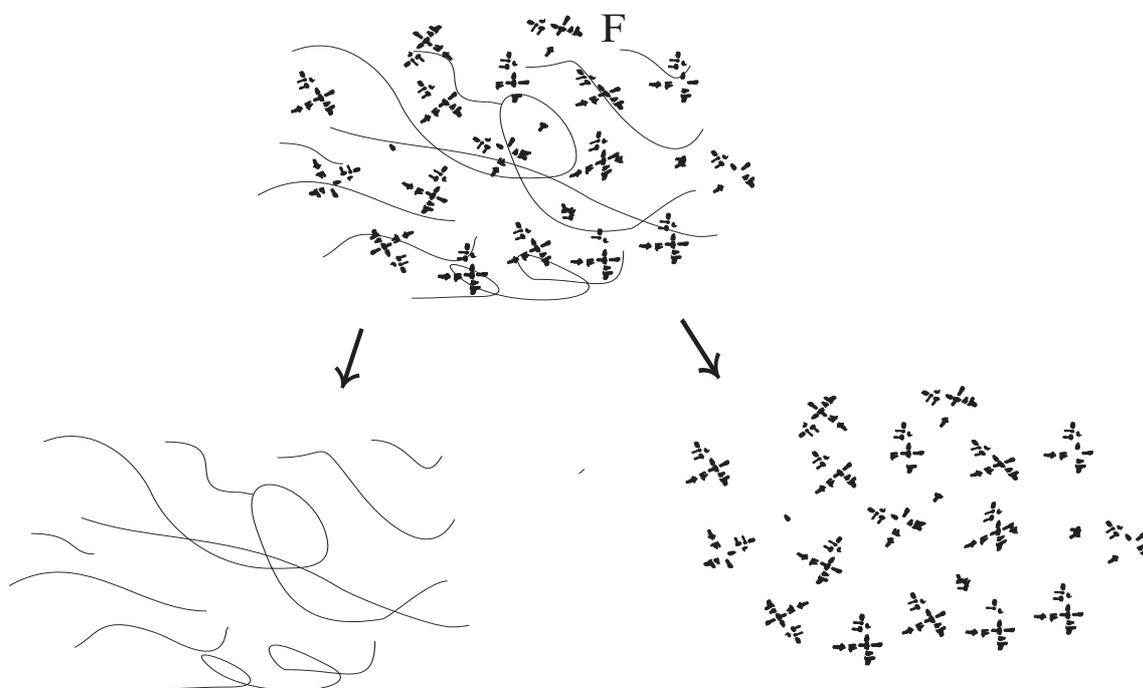


Figura 2.6: Descomposición de un 1-conjunto en una parte regular “curva-like” y una parte irregular “curva-free”.

Teorema 2.3. (Teorema de descomposición)

Sea F un 1-conjunto. El conjunto de puntos regulares de F es un conjunto regular y el conjunto de puntos irregulares de F forman un conjunto irregular.

Demostración:

Se supone que E es el conjunto de puntos regulares de F , entonces para \mathcal{H}^s -casi todo punto

regular x de F , con $s = 1$ se tiene que $\underline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(F, x) = 1$ y como F es 1-conjunto, E es \mathcal{H}^1 -medible, y por el Corolario 2.3, se tiene $1 = \underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x)$, además

$$1 = \overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x).$$

Por lo tanto E es regular, para \mathcal{H}^1 -casi todo $x \in E$.

Ahora demostraremos que el conjunto de puntos irregulares de F forman un conjunto irregular. Supongamos que E es el conjunto de puntos irregulares de F entonces para \mathcal{H}^s -casi todo punto irregular x de F , con $s = 1$ se tiene que

$$\underline{D}^s(F, x) \neq 1 \text{ ó } \overline{D}^s(F, x) \neq 1$$

y como F es 1-conjunto, E es \mathcal{H}^1 -medible, y por el Corolario 2.3, se tiene

$$1 \neq \underline{D}^s(F, x) = \underline{D}^s(E, x), \text{ esto implica que } \underline{D}^s(E, x) \neq 1$$

además $1 \neq \overline{D}^s(F, x) = \overline{D}^s(E, x)$.

Por lo tanto E es irregular, para \mathcal{H}^1 -casi todo $x \in E$. □

Las curvas rectificables son regulares y nos proporcionan las formas de la geometría clásica como por ejemplo los perímetros de círculos o elipses. Los 1-conjuntos regulares están formados por trozos de curvas, considerando que los 1-conjuntos irregulares son “curva-free”, es decir, son conjuntos cuya intersección con cualquier curva de longitud finita resulta un conjunto de \mathcal{H}^1 -medida cero.

Para estudiar los 1-conjuntos necesitamos algunos conceptos sobre curvas.

Definición 2.9. Una curva o curva de Jordan C es la imagen de una función inyectiva continua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado.

Observación 2.9. De acuerdo a la definición anterior, las curvas no se auto-intersectan, además tienen dos extremos y son subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Definición 2.10. Sea $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, una función inyectiva continua y $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ la partición del intervalo $[a, b]$. Se llama longitud de la curva C a la aproximación poligonal

$$L(C) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones de C por los puntos x_0, x_1, \dots, x_m en ese orden a lo largo de la curva.

Definición 2.11. Una curva C es llamada *rectificable* si la longitud $L(C)$ es positiva y finita.

Ejemplo 2.10. Sea F la curva de Von Koch, la cual fue ideada por Helge Von Koch en 1904.

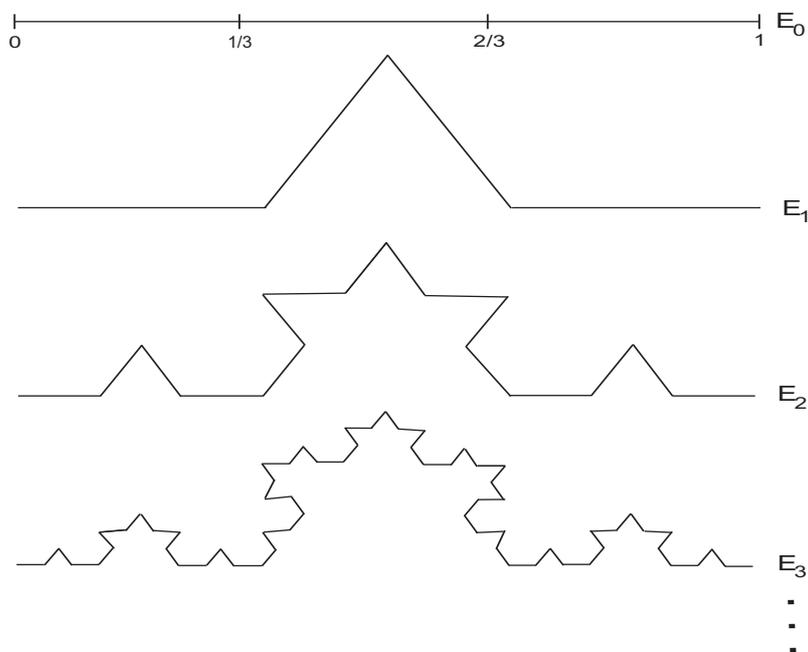


Figura 2.7: Tres primeras iteraciones de la curva de Koch.

La construcción de la curva de Koch es la siguiente: Se inicia de un segmento de longitud 1, exactamente nos referimos al intervalo $[0, 1] = E_0$. La primera iteración consiste en dividir E_0 en tres intervalos iguales, luego en la parte central de dicho intervalo se construye un triángulo equilátero y la base de dicho triángulo es suprimido, generando así un conjunto E_1 . En la segunda iteración E_1 consiste en hacer lo mismo que se hizo en E_0 sobre cada uno de los cuatro intervalos, obteniendo un conjunto E_2 . En la tercera iteración consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en la segunda iteración sobre cada uno de los dieciséis intervalos que han resultado, se repite el proceso infinitas veces y así obtenemos la curva de Koch que es la curva a la que se van aproximando las sucesivas poligonales que resultan en cada paso (ver Figura 2.7). La curva de Koch no es rectificable.

En efecto, observar que en la iteración k de su construcción se obtiene una poligonal formada por 4^k segmentos, de longitud 3^{-k} cada uno de ellos. La longitud de esta poligonal es infinita, pues

$$\text{Longitud}(\text{paso } k) = 4^k \cdot 3^{-k} = \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

y cuando k tiende al infinito la longitud de la curva de Koch es infinita, es decir, $L(F) = \infty$ y así F no es rectificable.

Lema 2.4. *Si C es una curva rectificable, entonces $\mathcal{H}^1(C) = L(C)$.*

Demostración:

Sean $x, y \in C$, y denote por $C_{x,y}$ a la parte de C comprendida entre x e y . Sea π_1 la proyección ortogonal de \mathbb{R}^2 hacia \mathbb{R} la cual no incrementa distancia, es decir, $|\pi_1(m) - \pi_1(n)| \leq |m - n|$; $m, n \in \mathbb{R}^2$, en particular tomando $\varphi = \pi_1|_{C_{x,y}}$ tal que $\varphi(C_{x,y}) = [x, y]$ (ver Figura 2.8) y de (1.9) se tiene que

$$\mathcal{H}^1(C_{x,y}) \geq \mathcal{H}^1(\varphi(C_{x,y})) = \mathcal{H}^1([x, y]).$$

Como la medida de Hausdorff 1-dimensional es igual a la medida de Lebesgue en \mathbb{R} entonces

$$\mathcal{H}^1([x, y]) = \mathcal{L}^1([x, y]) = |x - y|$$

esto implica que $\mathcal{H}^1(C_{x,y}) \geq |x - y|$.

Luego para cualquier partición x_0, x_1, \dots, x_m de C ,

$$\sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| \leq \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^1(C_{x_i, x_{i-1}}) = \mathcal{H}^1(C).$$

Tomando el supremo de todas las particiones de C se tiene $L(C) \leq \mathcal{H}^1(C)$.

Por otro lado como C es una curva rectificable entonces $L(C) < \infty$. Si β es la parametrización de C por la longitud de arco, entonces podemos considerar a C como la imagen de una función $\beta : [0, L(C)] \rightarrow C$ de tal manera que la longitud de $\beta([0, t])$ es igual a t , para todo $t \in [0, L(C)]$, luego

$$|\beta(t) - \beta(u)| \leq |t - u|; \quad \text{para } t, u \in [0, L(C)],$$

es decir, β es una función de Lipchitz y por (1.9) tenemos

$$\mathcal{H}^1(\beta([0, L(C)])) \leq \mathcal{H}^1([0, L(C)]) = \mathcal{L}^1([0, L(C)]) = L(C).$$

Esto implica que $\mathcal{H}^1(\beta([0, L(C)])) \leq L(C)$. Como β es sobreyectiva, de la última desigualdad se tiene que

$$\mathcal{H}^1(C) \leq L(C).$$

Por lo tanto $\mathcal{H}^1(C) = L(C)$.

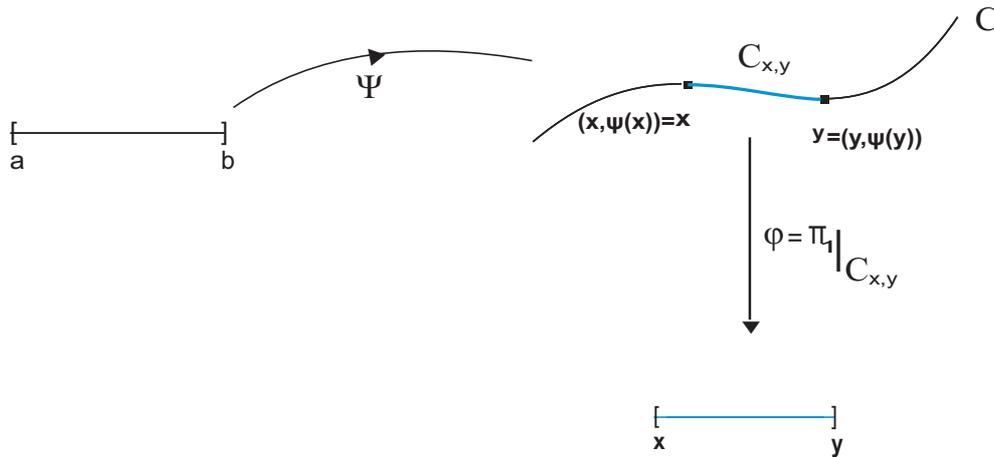


Figura 2.8: φ denota la proyección sobre el eje x restringido a $C_{x,y}$.

□

Ejemplo 2.11. Sea $\varphi : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la parametrización de la curva C definida como $\varphi(t) = (t, t)$. Si C es rectificable, hallar $\mathcal{H}^1(C)$.

En efecto, sea $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 2\}$ una partición del intervalo $[0, 2]$.

Por lo tanto la longitud de la curva C asociada a la partición P está dada por:

$$\begin{aligned} L(C) &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} |(t_i - t_{i-1})^2 + (t_i - t_{i-1})^2|^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} |2(t_i - t_{i-1})|^{\frac{1}{2}} \right\} = \sqrt{2}[t_m - t_0] = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Esto implica que $L(C) = 2\sqrt{2}$, así C es rectificable y por el Lema 2.4 se tiene que $\mathcal{H}^1(C) = L(C) = 2\sqrt{2}$.

Lema 2.5. Toda curva rectificable C es un 1-conjunto regular para \mathcal{H}^1 -c.t.p en C .

Demostración:

Como C es rectificable entonces $L(C) < \infty$. Por definición de $L(C)$, si p y q son puntos cualesquiera de C , con $p \neq q$ entonces $L(C) \geq |p - q| > 0$.

Por el Lema 2.4, $0 < L(C) = \mathcal{H}^1(C) < \infty$, esto implica que $0 < \mathcal{H}^1(C) < \infty$ así C es un 1-conjunto.

Ahora demostraremos la regularidad de C , es decir, $\overline{D}^1(C, x) = \underline{D}^1(C, x) = 1$, para casi todo $x \in C$.

Sea x un punto de C que no es un extremo de dicha curva. Entonces x divide a C en dos partes que denotaremos como $C_{m,x}$ y $C_{x,n}$. En particular $C_{m,x} \cup C_{x,n} = C$.

Si r es suficientemente pequeño entonces para cada $y \in C_{x,n}$ se tiene que $C_{x,y} \subseteq B(x, r)$, con $|x - y| = r$ (ver Figura 2.9). Si $C_{x,y}$ denota una pequeña parte de la curva C entre los puntos x e y , entonces

$$r = |x - y| \leq L(C_{x,y}) = \mathcal{H}^1(C_{x,y}).$$

Y como $C_{x,y} \subseteq C_{x,n} \cap B(x, r)$ y \mathcal{H}^s es una medida exterior, en particular para $s = 1$ se tiene que $\mathcal{H}^1(C_{x,y}) \leq \mathcal{H}^1(C_{x,n} \cap B[x, r])$ de donde $r \leq \mathcal{H}^1(C_{x,n} \cap B(x, r))$.

Análogamente se tiene que $r \leq \mathcal{H}^1(C_{m,x} \cap B(x, r))$.

Así

$$2r \leq \mathcal{H}^1(C_{m,x} \cap B[x, r]) + \mathcal{H}^1(C_{x,n} \cap B[x, r]).$$

Como $C_{m,x} \cap B(x, r)$ y $C_{x,n} \cap B(x, r)$ son concatenados entonces

$$\begin{aligned} 2r &\leq \mathcal{H}^1((C_{m,x} \cap B[x, r]) \cup (C_{x,n} \cap B[x, r])) \\ &= \mathcal{H}^1(C \cap B[x, r]). \end{aligned}$$

Esto implica que $2r \leq \mathcal{H}^1(C \cap B[x, r])$. Por definición de densidad inferior se tiene

$$\underline{D}^1(C, x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(C \cap B[x, r])}{2r} \geq 1 \quad \text{entonces} \quad \underline{D}^1(C, x) \geq 1$$

y por la Proposición 2.1, para $s = 1$ tenemos $\underline{D}^1(C, x) \leq \overline{D}^1(C, x) \leq 1$ para \mathcal{H}^1 -casi todo x , luego $\underline{D}^1(C, x) = 1$. Entonces $\overline{D}^1(C, x) = \underline{D}^1(C, x) = 1$, así C es regular.

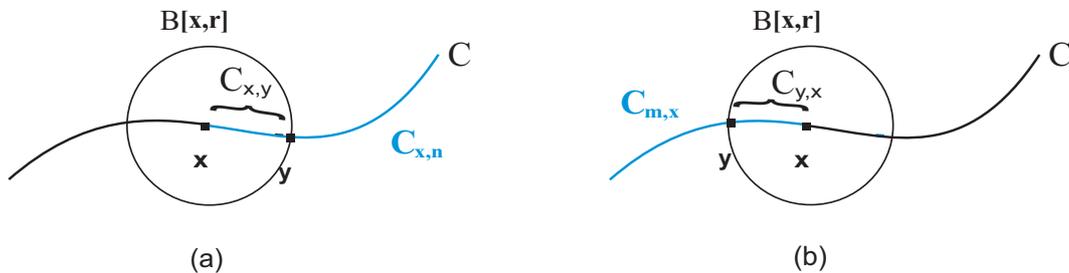


Figura 2.9: $C = C_{m,x} \cup C_{x,n}$ y $C_{x,y}$ denota la parte de la curva C entre x e y , donde $C_{x,y}$ es diferente de $C_{y,x}$.

□

Nota 2.3. Por el Corolario 2.3, se deduce que subconjuntos de conjuntos regulares.

Definición 2.12. Un 1-conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva-like si está contenida en una unión enumerable de curvas rectificables, es decir, $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, donde $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de curvas rectificables.

Ejemplo 2.12. Toda curva rectificable C es curva-like, pues C se contiene así misma.

Proposición 2.3. Un 1-conjunto curva-like es un 1-conjunto regular.

Demostración:

Si F es un 1-conjunto curva-like, entonces $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, donde los C_i son curvas rectificables para cada $i \in \mathbb{N}$ y por el Lema 2.5, se tiene que C_i es un 1-conjunto regular, es decir, $\overline{D}^1(C_i, x) = \underline{D}^1(C_i, x) = 1$.

Luego para \mathcal{H}^1 -casi todo $x \in F \cap C_i \subseteq F$ se tiene

$$1 = \underline{D}^1(C_i, x) = \underline{D}^1((F \cap C_i), x) \leq \underline{D}^1(F, x)$$

esto implica que $1 \leq \underline{D}^1(F, x)$, para casi todo $x \in F$ y por la Proposición 2.1, $\overline{D}^1(F, x) \leq 1$ para \mathcal{H}^1 -casi todo $x \in F$ de donde se tiene que $\underline{D}^1(F, x) \leq \overline{D}^1(F, x) \leq 1$.

Por lo tanto $D^1(F, x) = 1$, luego F es regular. \square

Corolario 2.4. Un punto en \mathbb{R} tiene medida de Hausdorff 1-dimensional cero.

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}$ entonces por la Proposición 1.3, se tiene que

$$\mathcal{H}^1(\{x\}) = \mathcal{L}^1(\{x\}).$$

Como $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x, x - \frac{1}{n})$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\{x\}) &= \mathcal{L}^1\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x, x - \frac{1}{n})\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}^1([x, x - \frac{1}{n})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $\mathcal{H}^1(\{x\}) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. \square

Observación 2.10. Todo conjunto numerable tiene \mathcal{H}^1 -medida cero.

Es natural introducir una definición complementaria de un 1-conjunto curva-like, lo cual aquí le llamaremos curva-free.

Definición 2.13. Un 1-conjunto se llama curva-free si su intersección con cada curva rectificable tiene \mathcal{H}^1 -medida cero.

Ejemplo 2.13. Del ejemplo 1.6 se tiene que el polvo de Cantor F es un 1-conjunto, y por tanto un 1-conjunto curva-free, en efecto de la construcción del polvo de Cantor todos sus puntos forman un conjunto discreto, es decir, todos sus puntos son aislados y por tanto cualquier curva rectificable C_i , $i = 1, 2, \dots$ que intersecciona al conjunto F ocurren dos casos:

El primer caso es que para algún $i \in \mathbb{N}$, $F \cap C_i$ solo es un punto y en el otro caso es que $F \cap C_i = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$, y por el Corolario 2.4 se tiene que en ambos casos $\mathcal{H}^1(F \cap C_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y así F es un 1-conjunto curva-free.

Proposición 2.4. Un 1-conjunto irregular es una curva-free.

Demostración:

Si F es irregular y C es una curva rectificable, entonces por el Lema 2.5, C es un 1-conjunto regular esto implica que $F \cap C$ es un subconjunto de ambos, es decir un conjunto regular y un conjunto irregular, pero un conjunto no puede ser regular y al mismo tiempo irregular a menos que tenga \mathcal{H}^1 -medida cero. \square

Estas dos proposiciones empiezan a sugerir que los conjuntos regulares e irregulares podrían ser caracterizado como curva-like y curva-free, respectivamente, ya que de lo demostrado anteriormente este es el caso. Lo esencial de la materia es la siguiente estimación que corresponde a la densidad inferior de un 1-conjunto curva-free (ver Proposición 2.5), ya que antes se vió de cuando un s -conjunto es regular o irregular, en particular para los 1-conjuntos, pero en este caso veremos cuanto es la densidad inferior de un 1-conjunto curva-free. Para desarrollar esto depende de una investigación compleja de las propiedades de curvas, conjuntos conexos, y algunos argumentos geométricos no triviales.

Lema 2.6. Sea $a > 0$ y $\alpha > 0$. Si $a \geq \alpha$ y $\alpha < 1$ entonces $a \geq 1$

Demostración:

Supongamos que $a < 1$, entonces como $\alpha < 1 < a$, donde se obtiene que $\alpha < a$ lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $a \geq 1$.

Teorema 2.4. *Si F es un s -conjunto en \mathbb{R}^n . Entonces $\overline{D}_c^s(F, x) = 1$ para \mathcal{H}^s -c.t.p $x \in F$.*

Demostración:

Usando la definición de medida de Hausdorff demostraremos que $\overline{D}_c^s(F, x) \geq 1$ en casi todo F .

Tome $\alpha < 1$ y $\rho > 0$. Sea

$$E = \{x \in F : \mathcal{H}^s(F \cap U) < \alpha|U|^s \text{ para todo convexo } U \text{ con } x \in U \text{ y } |U| \leq \rho\}, \quad (2.14)$$

por definición de \mathcal{H}^s -c.t.p demostraremos que $\mathcal{H}^s(E) = 0$.

Como E es un subconjunto de F . Para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar un ρ -cubrimiento de E por conjuntos convexos $\{U_i\}$, es decir, $0 \leq |U_i| \leq \rho$ y $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s < \mathcal{H}_\delta^s(E) + \epsilon.$$

Como $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap U_i)$ y \mathcal{H}^s es una medida exterior se tiene

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E \cap U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F \cap U_i).$$

De esto y (2.14) se tiene que $\mathcal{H}^s(E) < \alpha \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s < \alpha(\mathcal{H}_\delta^s(E) + \epsilon)$, esto implica que $\mathcal{H}^s(E) < \alpha(\mathcal{H}_\delta^s(E) + \epsilon)$. Haciendo δ tender a cero tenemos $\mathcal{H}^s(E) \leq \alpha(\mathcal{H}^s(E) + \epsilon)$ y por el Lema 2.1, se tiene que $\mathcal{H}^s(E) \leq \alpha\mathcal{H}^s(E)$ y $\mathcal{H}^s(E) = 0$.

Podemos definir un conjunto E para cualquier $\rho > 0$, así por definición de \mathcal{H}^s -c.t.p se tiene $\overline{D}_c^s(F, x) \geq \alpha$ para casi todo $x \in F$. Esto se cumple para todo $\alpha < 1$, así por el Lema 2.6 concluimos que $\overline{D}_c^s(F, x) \geq 1$ en casi todo F .

Por otro lado demostraremos que $\overline{D}_c^s(F, x) \leq 1$ para casi todo $x \in F$. En efecto dado $\alpha > 1$ y sea $E = \{x \in F : \overline{D}_c^s(F, x) \leq \alpha\}$, por definición de \mathcal{H}^s -c.t.p es suficiente demostrar que $\mathcal{H}^s(E) = 0$ para que $\overline{D}_c^s(F, x) \leq 1$.

Siguiendo el mismo procedimiento como en la Proposición 2.1 en la parte II, haciendo $U = B[x, r]$ con $|U| = 2r > 0$, se obtiene que $\overline{D}_c^s(F, x) \leq 1$. Por lo tanto $\overline{D}_c^s(F, x) = 1$. □

Definición 2.14. *Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama conexo si no existen conjuntos abiertos U y V talque $U \cup V \supseteq A$ con $A \cap U$ y $A \cap V$ disjuntos y no vacios. Intuitivamente un conjunto A es conexo si consiste de una solo pieza.*

Observación 2.11. En la definición anterior, los conjuntos U y V pueden ser conjuntos cerrados.

Definición 2.15. Un conjunto continuo es un conjunto cerrado y conexo.

Ejemplo 2.14. El conjunto de los números reales es cerrado y conexo, por tanto \mathbb{R} es continuo, además la circunferencia es una curva cerrada y conexa, luego la circunferencia es un conjunto continuo.

Definición 2.16. Una colección de bolas es semidisjunta si ninguna bola de la colección esta contenida en cualquier otra bola.

Lema 2.7. Sea E un conjunto continuo en \mathbb{R}^2 . Suponga que $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una colección semidisjunta enumerable de bolas cerradas contenidas en E , y para cada $d > 0$ existe una cantidad finita de B_i tal que $|B_i| \geq d$. Entonces si Γ_i es el perímetro de B_i ,

$$F = \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$$

es un conjunto continuo.

Demostración:

Observar que $F = W \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$, donde $W = \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(B_i) \right)$. Así para demostrar que F es cerrado basta demostrar que $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i} \subseteq F$, pues W es cerrado por ser E cerrado.

Si $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i} \setminus W \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(B_i)$, entonces $x \in \text{int}(B_i)$ para algún i .

Sea $d > 0$ la distancia de x al perímetro de B_i . Si Γ_j intersecta a la bola cerrada de centro x y radio $\frac{d}{2}$, entonces B_j no solo se encuentra en $B[x, \frac{d}{2}]$ si no que también se encuentra en la bola cerrada $\mathbb{R}^2 \setminus B_i$, donde $B_j \not\subseteq B_i$.

Así $|\Gamma_j| \geq \frac{d}{2}$, tan solo una cantidad finita de círculos Γ_j pueden intersectar a $B[x, \frac{d}{2}]$.

Como $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i}$ se concluye que para algún k , $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i} = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \subseteq F$, como requeríamos.

Se demuestra que F es conexo. Para esto suponga que $F = F_1 \cup F_2$, donde F_1 y F_2 son conjuntos cerrados y disjuntos. Sean los conjuntos

$$E_1 = F_1 \cup \bigcup_{i: \Gamma_i \subseteq F_1} B_i, \quad E_2 = F_2 \cup \bigcup_{i: \Gamma_i \subseteq F_2} B_i.$$

Cada Γ_i esta contenido en cada conjunto E_1 ó E_2 respectivamente, así que $E_1 \cup E_2 = E$, donde las bolas $\{B_i\}$ son semidisjuntas y $F \cap B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$ para cada i , además $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

El conjunto E_1 es cerrado, en efecto si $x \in \bigcup_{i:\Gamma_i \subseteq F_1} B_i$, entonces x es el límite de una sucesión

de puntos en $\bigcup_{i=1}^k B_i$ para algún k , además $\Gamma_i \subseteq F_1$ esto quiere decir que B_i esta contenido en el conjunto cerrado F_1 para cada i , por tanto E_1 es cerrado. Análogamente E_2 es cerrado, así $E = E_1 \cup E_2$ es una descomposición disjunta de E en los conjuntos cerrados.

Como E es un conjunto continuo, E es conexo y E_1 ó E_2 es vacío y así F_1 ó F_2 es vacío, por lo tanto F es conexo y así F es continuo. \square

Sea $R(x, y)$ la región común del par de círculos con centros x e y , de modo que $R(x, y) = \text{int}(B(x, r) \cap B(y, r))$, donde $r = |x - y|$.

Lema 2.8. *Sea F un 1-conjunto en \mathbb{R}^2 y $\alpha > 0$. Sea E un subconjunto compacto de F con $\mathcal{H}^1(E) > 0$, tal que $\mathcal{H}^1(F \cap R(x_1, x_2)) \geq \alpha|x_1 - x_2|$ si $x_1, x_2 \in E$. Entonces existe un continuo H tal que $0 < \mathcal{H}^1(H \cap F) \leq \mathcal{H}^1(H) < \infty$.*

Demostración:

Sea $\rho_1 > 0$, sin perdida de generalidad, de la Proposición 2.1 podemos suponer que

$$\frac{\mathcal{H}^1(F \cap B[x, r])}{2r} < 2; \text{ si } x \in E \text{ y } 0 < r \leq \rho_1. \quad (2.15)$$

donde E es un subconjunto compacto de F con $\mathcal{H}^1(E) > 0$.

Como $y \in E$, y F es un 1-conjunto entonces por la Proposición 2.2 para \mathcal{H}^1 -c.t.p $y \notin F \setminus E$ se tiene que

$$\mathcal{H}^1((F \setminus E) \cap B[y, r]) < \frac{2r}{10^3} \alpha, \text{ con } 0 < r \leq 3\rho, \alpha > 0 \quad (2.16)$$

donde $0 < \rho \leq \frac{1}{10} \rho_1$, y por la misma Proposición 2.1 para \mathcal{H}^1 -c.t.p $y \in E$ tenemos

$$\mathcal{H}^1(E \cap B[y, \rho]) > \frac{1}{4} 2\rho = \frac{\rho}{2}. \quad (2.17)$$

Al reducir ρ si es necesario, también podemos suponer que el perímetro Γ de la bola $B[y, \rho]$ contiene algún punto de E .

Sea \mathcal{C} la familia de bolas cerradas

$$\mathcal{C} = \{B[x, r] : x \in E \cap B[y, \rho], 0 < r < 2\rho \text{ y } \mathcal{H}^1((F \setminus E) \cap B[x, r]) \geq \alpha r\}. \quad (2.18)$$

Por el Teorema 1.6 podemos encontrar una subcolección disjunta finita o enumerable \mathcal{M} de bolas cerradas $\{B_i\}$ en \mathcal{C} tal que $\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subseteq \bigcup_{B_i \in \mathcal{M}} B'_i$, donde B'_i es la bola cerrada concéntrica con B_i de cinco veces el radio. Además, de todas las bolas B'_i podemos escoger una colección $\{B'_i\}$ semidisjuntas. Escribimos Γ_i como el perímetro de cada B'_i de la colección $\{B'_i\}$.

Haciendo

$$G = (E \cap B(y, \rho)) \cup \Gamma \cup \bigcup_i B'_i,$$

definimos

$$H = \left(G \setminus \bigcup_i B'_i \right) \cup \bigcup_i \Gamma_i$$

(ver Figura 2.10). Demostraremos que H es continuo juntamente con las propiedades que se indican.

- a) G es cerrado, en efecto dado que $E \cap B(y, \rho)$ y Γ son cerrados, es suficiente demostrar que $\overline{\bigcup_i B'_i} \subseteq G$. Si $z \in \overline{\bigcup_i B'_i}$, entonces o bien $z \in \bigcup_i^k B'_i \subseteq G$ para algún k finito, o caso contrario z es el límite de puntos de una subsucesión de bolas $\{B'_i\}_i$ con $r \rightarrow 0$ por lo tanto z es el punto límite de los centros de estas bolas en el que todas las bolas se encuentran en el conjunto cerrado $E \cap B(y, \rho)$, así G es cerrado.
- b) G es conexo, en efecto supongamos que $G = G_1 \cup G_2$, donde G_1 y G_2 son conjuntos cerrados y disjuntos.

Si G no es conexo entonces cualquier subconjunto conexo de G debe estar contenido en G_1 ó G_2 , por lo que se asume que $\Gamma \subseteq G_1$. Cada B'_i tiene centro en $B[y, \rho]$, así que B'_i contiene puntos sobre o fuera de Γ y, por lo tanto, está contenida en G_1 . De esta manera $G_2 \subseteq \text{int}(B[y, \rho])$.

Sea G'_1 el conjunto obtenido por $\mathbb{R}^2 \setminus B[y, \rho]$ concatenado a G_1 , de modo que G'_1 es cerrado, conexo y disjunto de G_2 . Puesto que ambos G'_1 y G_2 contienen puntos de E , sea $x_1 \in E \cap G'_1$ y $x_2 \in E \cap G_2$ puntos que minimizan la distancia $r = |x_1 - x_2|$. Este ínfimo se obtiene de tomar la distancia de x_1 a x_2 y además es positivo.

Como $\Gamma \subseteq G'_1$ contiene algún punto de E , con $0 < r < 2\rho$. La región común $R(x_1, x_2)$ es disjunta de E , de lo contrario r podría ser más pequeño de modo que $R(x_1, x_2) \cap E = \emptyset$, por hipótesis y como $F \cap R(x_1, x_2) = [(E \cup E^c) \cap F] \cap R(x_1, x_2) = E^c \cap F \cap R(x_1, x_2)$ se

tiene

$$\begin{aligned} 0 < \alpha r &\leq \mathcal{H}^1(F \cap R(x_1, x_2)) = \mathcal{H}^1((F \setminus E) \cap R(x_1, x_2)) \\ &\leq \mathcal{H}^1((F \setminus E) \cap B[x_2, r]). \end{aligned}$$

Dado que $x_2 \in E \cap B[y, \rho]$ y como $r < 2\rho$, se tiene que $B[x_2, r]$ es un conjunto de \mathcal{C} , entonces $B[x_2, r] \subseteq \bigcup_i B'_i \subseteq G$. De modo que $B[x_2, r] = (B[x_2, r] \cap G'_1) \cup (B[x_2, r] \cap G_2)$ es una descomposición de $B[x_2, r]$ en conjuntos cerrados disjuntos con $x_1 \in (B[x_2, r] \cap G'_1)$ y $x_2 \in (B[x_2, r] \cap G_2)$. Esto es absurdo, ya que $B[x_2, r]$ es conexo, por lo tanto G es conexo.

c) H es un conjunto continuo, en efecto por a) y b) G es un conjunto continuo, así por el Lema 2.7, H es también un conjunto continuo.

d) $\sum_i |B'_i| \leq \frac{1}{8}\rho$, en efecto usando (2.18), y (2.16), vemos que

$$\begin{aligned} \sum_i |B'_i| &= 5 \sum_i |B_i| = 5 \sum_i 2r_i \leq \frac{10}{\alpha} \sum_i \mathcal{H}^1((F \setminus E) \cap B_i) \\ &\leq \frac{10}{\alpha} \mathcal{H}^1((F \setminus E) \cap B[y, 3\rho]) \leq \frac{10}{\alpha} 6\rho 10^{-3} \alpha \leq \frac{1}{8}\rho. \end{aligned}$$

e) $\mathcal{H}^1(H) < \infty$. En efecto dado que $H \subseteq F \cup \Gamma \cup \bigcup_i \Gamma_i$, tenemos que

$$\mathcal{H}^1(H) \leq \mathcal{H}^1(F) + 2\pi\rho + \pi \sum_i |B'_i|.$$

Como F es un 1-conjunto entonces $\mathcal{H}^1(F) < \infty$ y por la parte d) tenemos que $\mathcal{H}^1(H) < \infty$.

f) $\mathcal{H}^1(H \cap F) > 0$, en efecto por como esta definido H , se tiene $G \subseteq H \cup \bigcup_i B'_i$ de donde $G \cap F \subseteq (H \cap F) \cup \left(\bigcup_i B'_i \cap F \right)$. Como H y $\bigcup_i B'_i$ son disjuntos se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(H \cap F) &\geq \mathcal{H}^1(G \cap F) - \mathcal{H}^1(F \cap \bigcup_i B'_i) \\ &\geq \mathcal{H}^1(E \cap B[y, \rho]) - \sum_i \mathcal{H}^1(F \cap B'_i) \end{aligned}$$

de 2.15 y 2.17, junto con la parte d) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(E \cap B[y, \rho]) - \sum_i \mathcal{H}^1(F \cap B'_i) &\geq \mathcal{H}^1(E \cap B[y, \rho]) - 2 \sum_i |B'_i| \\ &\geq \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{4}\rho = \frac{1}{4}\rho > 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $\mathcal{H}^1(H \cap F) > 0$ (note que $|B'_i| < 20\rho \leq 2\rho_1$).

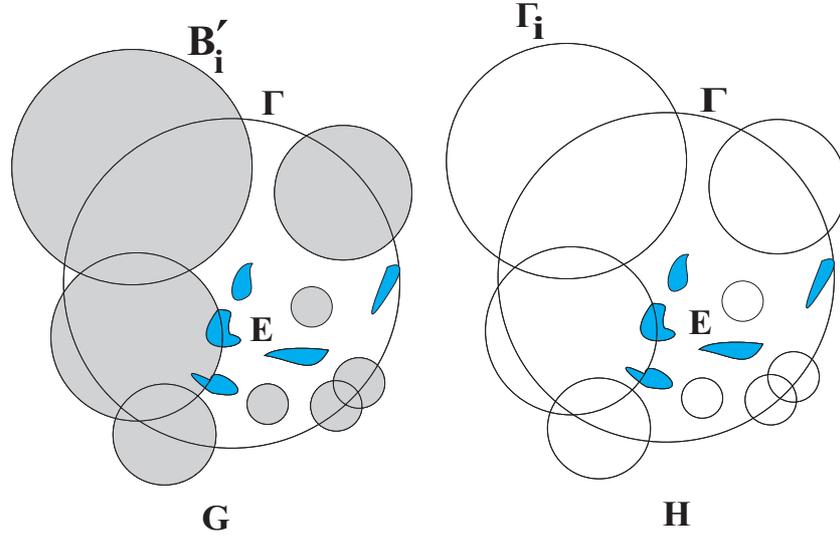


Figura 2.10: El conjunto conexo G y H un conjunto continuo.

□

Lema 2.9. *La intersección de un 1-conjunto curva-free con un conjunto continuo de \mathcal{H}^1 -medida finita es de medida cero.*

Demostración:

Sea H un conjunto continuo, es decir, H es cerrado y conexo tal que $\mathcal{H}^1(H) < \infty$, además como F es una curva-free tenemos que F intersectado con cada curva rectificable tiene \mathcal{H}^1 -medida cero y por el Corolario 2.4 se tiene que $\mathcal{H}^1(F \cap H) = 0$. □

Proposición 2.5. *Sea F un 1-conjunto curva-free en \mathbb{R}^2 . Entonces $\underline{D}^1(F, x) \leq \frac{3}{4}$ en casi todo $x \in F$.*

Demostración:

Para cada $\alpha > 0$ considere el conjunto $F_1 = \{x : \underline{D}^1(F, x) > \frac{3}{4} + \alpha\}$. Por definición de \mathcal{H}^1 -c.t.p demostraremos que $\mathcal{H}^1(F_1) = 0$.

Supongamos que $\mathcal{H}^1(F_1) \neq 0$, es decir $\mathcal{H}^1(F_1) > 0$. Sea $\rho > 0$, tal que

$$\mathcal{H}^1(F \cap B[x, r]) > \left(\frac{3}{4} + \alpha\right)2r, \quad (2.19)$$

donde $x \in F_1$, $0 < r \leq \rho$ y por el Teorema 2.4, tenemos que

$$\mathcal{H}^1(F \cap U) < (1 + \alpha)|U|, \quad x \in F_1 \cap U, \quad 0 < |U| \leq 3\rho. \quad (2.20)$$

Sea F_0 un subconjunto compacto de F_1 con $0 < \mathcal{H}^1(F_0) < \infty$ y $|F_0| \leq \rho$. Si $x_1, x_2 \in F_0$ entonces $r = |x_1 - x_2| \leq \rho$, y usando (2.19) y (2.20) con $U = B[x_1, r] \cup B[x_2, r]$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(F \cap R(x_1, x_2)) &= \mathcal{H}^1(F \cap B[x_1, r]) + \mathcal{H}^1(F \cap B[x_2, r]) - \mathcal{H}^1(F \cap (B[x_1, r] \cup B[x_2, r])) \\ &\geq 2\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)(2r) - (1 + \alpha)(3r) = \alpha r \\ &= \alpha|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Por lo tanto aplicando el Lema 2.8 para $F_0 \subseteq F$, se deduce que existe un continuo H con $0 < \mathcal{H}^1(H \cap F) \leq \mathcal{H}^1(H) < \infty$, pero por hipótesis F es un 1-conjunto curva-free, además $\mathcal{H}^1(H \cap F) < \infty$ lo cual contradice el Lema 2.9.

Por lo tanto $\mathcal{H}^1(F_1) = 0$, así $\underline{D}^1(F, x) \leq \frac{3}{4}$ en casi todo $x \in F$. □

Teorema 2.5.

- (a) Un 1-conjunto en \mathbb{R}^2 es irregular si y solo si es una curva-free.
- (b) Un 1-conjunto en \mathbb{R}^2 es regular si y solo si es la unión de un conjunto curva-like y un conjunto de \mathcal{H}^1 -medida cero.

Demostración:

- (a) Por la Proposición 2.4, se tiene que un 1-conjunto irregular es una curva-free y por la Proposición 2.5, se tiene que un conjunto curva-free es un conjunto irregular, pues $\underline{D}^1(F, x) \leq \frac{3}{4}$ en casi todo $x \in F$.
- (b) Sea $F = A \cup B$, donde A es un conjunto curva-like y B un conjunto de \mathcal{H}^1 -medida cero, de donde se tiene que $D^1(F, x) = D^1(A, x) + D^1(B, x) = D^1(A, x)$, con $x \in F$ y por Proposición 2.3, un conjunto curva-like es regular, es decir $D^1(A, x) = 1$ y por consiguiente el conjunto F es regular.

Por otro lado, si F es regular por el Lema 2.3 todo subconjunto de Borel E de F con medida positiva es regular, es decir, $D^1(E, x) = 1$ para casi todo $x \in E$. Por Proposición 2.5, el conjunto E no puede ser curva-free, así algunas curvas rectificables intersectan a E en un conjunto de longitud positiva.

Usamos este hecho para definir inductivamente una sucesión de curvas rectificables $\{C_i\}$.

Elegimos C_1 para cubrir una parte bastante grande de F , es decir,

$$\mathcal{H}^1(F \cap C_1) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathcal{H}^1(F \cap C) : C \text{ es rectificable}\} > 0.$$

Si C_1, \dots, C_k han sido seleccionados y el conjunto regular $F_k = F \setminus \bigcup_{i=1}^k C_i$ tiene medida positiva, pues F es 1-conjunto regular, entonces elegimos una curva rectificable C_{k+1} para la cual

$$\mathcal{H}^1(F_k \cap C_{k+1}) \geq \frac{1}{2} \sup\{\mathcal{H}^1(F_k \cap C) : C \text{ es rectificable}\} > 0. \quad (2.21)$$

Así para algún k , las curvas C_1, \dots, C_k cubren casi todo el conjunto F y así F es una curva-like, es decir, $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$.

De otra manera, supongamos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \subseteq F$ y como $F_k \subseteq F$ se tiene

$$\begin{aligned} F_k \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i &\subseteq F \\ F_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^k C_i \cup \bigcup_{i=k+1}^{\infty} C_i \right) &\subseteq F \\ F_k \cap \bigcup_{i=k+1}^{\infty} C_i &\subseteq F. \end{aligned}$$

Como $F_k \cap C_{k+1}$ son disjuntos y \mathcal{H}^1 es una medida tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(F_k \cap C_{k+1}) \leq \mathcal{H}^1(F) < \infty.$$

Por ser F un 1-conjunto, el valor de $\mathcal{H}^1(F_k \cap C_{k+1})$ tiende a cero, cuando k tiende al infinito, es decir, dicha sumatoria $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(F_k \cap C_{k+1}) > 0$.

Pero si $\mathcal{H}^1\left(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) > 0$, por hipótesis se tiene que F es 1-conjunto regular y por el Lema 2.5 tenemos que toda curva rectificable es un 1-conjunto regular esto implica que el conjunto $F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ no puede ser una curva-free, entonces podemos encontrar una curva

rectificable C , tal que $\mathcal{H}^1\left(\left(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \cap C\right) = d$, para algún $d > 0$. Pero por (2.21) con k

tendiendo al infinito se tiene que $\mathcal{H}^1(F_k \cap C_{k+1}) \geq \frac{1}{2} \mathcal{H}^1\left(\left(F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \cap C\right) = \frac{d}{2}$ entonces

para todo k , $\mathcal{H}^1(F_k \cap C_{k+1}) \geq \frac{d}{2}$, esto implica que $\mathcal{H}^1(F) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(F_k \cap C_{k+1}) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{2} =$

∞ , lo que contradice el hecho de que $\mathcal{H}^1(F) < \infty$ por lo tanto $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, de esto se

tiene que el conjunto $F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \emptyset$ y $F \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, y así F consiste de la unión de un conjunto curva-like $F \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ junto con $F \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ que es un conjunto de \mathcal{H}^1 -medida cero. □

Así, los 1-conjuntos regulares son esencialmente uniones de subconjuntos de curvas rectificables, pero los 1-conjuntos irregulares no contienen piezas de curvas rectificables en absoluto. Esta dicotomía es notable en que la definición de la regularidad es puramente en términos de densidades y no hace ninguna referencia a las curvas. Las Proposiciones 2.3 y 2.4 proporcionan una idea más precisa, estas dos proposiciones nos dicen que un 1-conjunto curva-like es un 1-conjunto regular y que un 1-conjunto irregular es un 1-conjunto curva-free respectivamente. Casi en todas partes, un conjunto regular tiene densidad inferior, que es igual a 1, mientras que un conjunto irregular tiene densidad inferior a lo más $\frac{3}{4}$. Otras diferencias entre los conjuntos regulares e irregulares, es la existencia de tangentes, esto se desarrollará en el siguiente capítulo.

Capítulo 3:

Tangentes para s -conjuntos

Supongamos que una curva suave C tiene una tangente (en el sentido clásico) en x . Esto significa que cerca de x , el conjunto C se concentra en dos direcciones diametralmente opuestas. ¿Qué se puede decir acerca de la distribución direccional de un s -conjunto en las proximidades de un punto? ¿Hay una definición significativa de una tangente a un s -conjunto?, ¿Existe algún criterio para saber cuando tales tangentes existen? Aquí veremos estas interrogantes.

Cualquier generalización de la definición de tangentes debe reflejar la distribución direccional local de los conjuntos de medida positiva para conjuntos cuya complejidad es mayor a las clásicas curvas suaves. En este sentido, es prudente pensar que no debemos esperar de una definición involucrando a todos los puntos cercanos; debemos conformarnos con una condición en casi todos los puntos.

Definición 3.1. *El sector doble $S(x, \theta, \varphi)$ es aquel que consta de aquellos y tal que el segmento de recta $[x, y]$ forma un ángulo a lo más φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), con el vector v o $-v$ (ver Figura 3.1).*

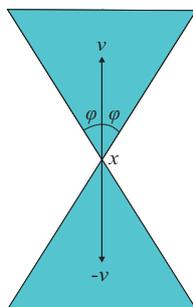


Figura 3.1: El sector doble $S(x, v, \varphi)$.

Definición 3.2. Un s -conjunto F en \mathbb{R}^n tiene una tangente en x en la dirección v , si

$$\overline{D}(F, x) > 0 \quad (3.1)$$

donde v es el vector unitario, y para cada ángulo $\varphi > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-s} \mathcal{H}^s(F \cap (B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi))) = 0 \quad (3.2)$$

donde $S(x, v, \varphi)$ es el sector doble con vértice x .

Así, para una tangente en dirección v la ecuación (3.1) requiere que una parte significativa de F se encuentre cerca del punto x , y de (3.2), una cantidad insignificante cerca de x queda fuera de cualquier sector doble (ver Figura 3.2).

En nuestro caso primero discutimos las tangentes a los 1-conjuntos regulares en el plano, una situación no muy alejada del cálculo clásico de curvas, para luego verificar que un 1-conjunto regular tiene una tangente en casi todos sus puntos y que un 1-conjunto irregular no existen tangentes en casi todos sus puntos.

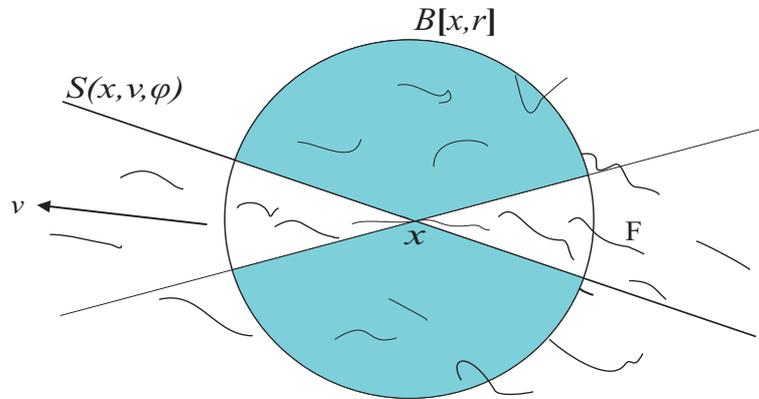


Figura 3.2: F tiene una tangente en dirección v en el punto x , donde para r suficientemente pequeño, hay una parte insignificante en $B(x, r) \setminus S(x, v, \varphi)$ (parte sombreada).

Proposición 3.1. Toda curva rectificable C tiene una tangente en casi todos sus puntos.

Demostración:

Se sabe que por el Lema 2.5, una curva rectificable C es un 1-conjunto regular, es decir, $D^1(C, x) = 1$, de donde se tiene que $\overline{D}^1(C, x) = 1 > 0$, para casi todo $x \in C$.

Por otro lado podemos reparametrizar la curva C por longitud de arco, mediante la función

$\psi : [0, L(C)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $\psi(t)$ es la distancia, del extremo inicial $\psi(0)$ a lo largo de C hasta el punto $\psi(t)$.

Por hipótesis C es una curva rectificable por lo que $L(C) < \infty$, es decir,

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^m |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \right\} < \infty,$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = L(C)$ es una partición del intervalo $[0, L(C)]$, y por el Teorema 1.8 la función ψ es de variación acotada.

Como ψ es de variación acotada es diferenciable a lo más en casi todas partes, entonces existe un vector $\psi'(t)$ para casi todo $t \in [0, L(C)]$ y como C está parametrizada por longitud de arco, $|\psi'(t)| = 1$, para todo $t \in [0, L(C)]$.

Así que en casi todos los puntos $\psi(t)$ en C , existe un vector unitario v tal que $v = \psi'(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{\psi(u) - \psi(t)}{u - t}$, por lo tanto, dado $\varphi > 0$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $\psi(u) \in S(\psi(t), v, \varphi)$, cuando $|u - t| < \epsilon$.

Como C no tiene puntos dobles, es decir, ψ es inyectiva, podemos encontrar un número r tal que $\psi(u) \notin B[\psi(t), r]$, si $|u - t| \geq \epsilon$, así $C \cap (B[\psi(t), r] \setminus S(\psi(t), v, \varphi))$ es vacío (ver Figura 3.3).

Por lo tanto,

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \mathcal{H}^1(C \cap (B[\psi(t), r] \setminus S(\psi(t), v, \varphi))) = \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \mathcal{H}^1(\emptyset) = 0.$$

Por (3.1) y (3.2), se tiene que la curva C tiene una tangente en el punto $\psi(t)$. Por lo tanto la curva C tiene una tangente en casi todos sus puntos.

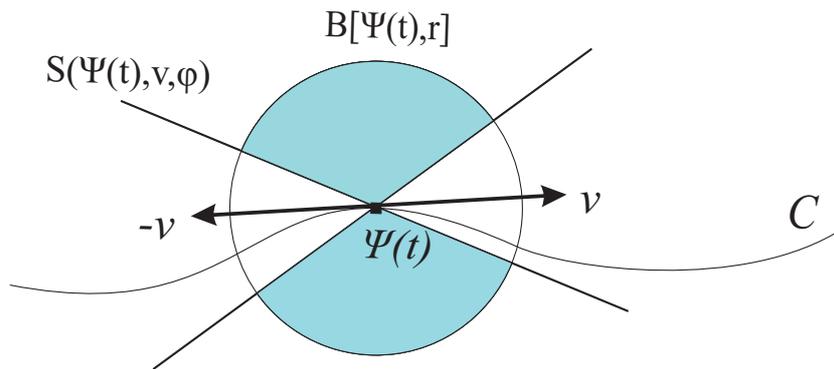


Figura 3.3: $C \cap (B[\psi(t), r] \setminus S(\psi(t), v, \varphi)) = \emptyset$.

□

Proposición 3.2. *Un 1-conjunto regular F en \mathbb{R}^2 tiene una tangente en casi todos sus puntos.*

Demostración:

Por definición de regularidad $\overline{D}^1(F, x) = 1 > 0$, para casi todo $x \in F$.

Por Proposición 3.1 tenemos que si C es rectificable, entonces en casi todos sus puntos $x \in C$, existe un vector unitario v tal que si $\varphi > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \mathcal{H}^1(C \cap (B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi))) \\ &\geq \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \mathcal{H}^1((F \cap C) \cap (B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi))). \end{aligned}$$

Además para casi todo $x \in C$, se tiene que $x \notin F \setminus C$ y como F es un 1-conjunto, por la Proposición 2.2 tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \mathcal{H}^1((F \setminus C) \cap B[x, r]) \\ &\geq \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \mathcal{H}^1((F \setminus C) \cap (B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi))). \end{aligned}$$

Sea $A = B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi)$, como $(F \cap C \cap A)$ y $((F \setminus C) \cap A)$ son disjuntos y \mathcal{H}^1 es una medida se tiene que

$$0 \geq \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} [\mathcal{H}^1((F \cap C) \cap A) + \mathcal{H}^1((F \setminus C) \cap A)] = \lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \mathcal{H}^1(F \cap A),$$

por lo tanto, como \mathcal{H}^1 es una medida exterior, es decir, $\mathcal{H}^1(F \cap A) \geq 0$ se tiene la otra desigualdad, donde tenemos la siguiente igualdad

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-1} \mathcal{H}^1(F \cap (B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi))) = 0$$

para casi todo $x \in C$ y por tanto para casi todo $x \in F \cap C$, se tiene que 1-conjunto regular en \mathbb{R}^2 tiene una tangente en casi todos sus puntos. □

Ejemplo 3.1. La frontera de un polígono regular de n -lados es una curva rectificable, pues su perímetro es igual al número de lados por la longitud del lado y por Lema 2.5 se tiene que dicho conjunto es un 1-conjunto regular y por la Proposición 3.2 tenemos que el polígono regular tiene una tangente en casi todos sus puntos.

A diferencia de los conjuntos regulares, los 1-conjuntos irregulares generalmente no admiten tangentes, para ello damos los siguientes resultados .

Proposición 3.3. *En casi todos los puntos de un 1-conjunto irregular en el plano, no existe tangente.*

Demostración:

Sea F un 1-conjunto irregular en el plano y denote por F_1 al conjunto de puntos de F donde existe una tangente, es decir,

$$F_1 = \{x \in F : \text{existe una tangente en } x\}.$$

Por definición de \mathcal{H}^1 -c.t.p, se demuestra que $\mathcal{H}^1(F_1) = 0$. Suponga lo contrario, es decir, $\mathcal{H}^1(F_1) > 0$. Sea $\alpha = 2\varphi$ un ángulo pequeño ($\alpha < \frac{\pi}{180}$) y T' y T'' dos direcciones que difieren por un ángulo α y denote por F_2 el conjunto de puntos de F_1 en el que se incluye la dirección de la tangente v en el ángulo que forman las direcciones (T', T'') . Entonces el conjunto F_2 es Borel. Dadas las direcciones T' y T'' de tal manera que $\mathcal{H}^1(F_2) > 0$; esto es cierto; pues $\mathcal{H}^1(F_1) > 0$.

Sea el sector doble $S(a_2, v, \varphi)$ la parte del plano dentro del ángulo $\alpha = 2\varphi$ formado por los segmentos T' con T'' y sus paralelos a través del punto $a_2 \in F_2$ y β el conjunto de puntos de la parte del plano dentro de los dos ángulos obtusos formados por los paralelos T' y T'' a través de este punto, es decir, $\beta = (S(a_2, v, \varphi))^c$. Para cada punto a_2 del conjunto F_2 tenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(F \cap \beta \cap B[a_2, r])}{r} = 0$$

donde el punto $a_2 \in \beta$ y $B[a_2, r]$ es la bola cerrada de centro a_2 y radio r . Sea d un número positivo y $0 < \epsilon < \frac{1}{216}$, además considere el conjunto

$$F_3 = \left\{ a_3 \in F_2 : \frac{\mathcal{H}^1(F \cap \beta \cap B[a_3, r])}{r} \leq \epsilon, \text{ para todo } r \leq d \right\}.$$

F_3 es Borel, ya que $F_3 \subseteq F_2$ y F_2 es Borel, y además $\mathcal{H}^1(F_3) > 0$ para valores suficientemente pequeños de d .

Sea $B = B[O, r]$ la bola de radio $r < \frac{d}{2}$ tal que

$$\frac{\mathcal{H}^1(F_3 \cap B)}{2r} > \frac{1}{3} \quad (3.3)$$

Tal bola siempre existe, porque en casi todos sus puntos de un conjunto de Borel la densidad superior es mayor igual a $\frac{1}{2}$ (ver Proposición 2.1), de manera que podamos tomar tales puntos para el centro de B , y cuando r tiende a 0, el valor $\frac{\mathcal{H}^1(F_3 \cap B)}{2r}$ esta lo más próximo con el valor de la densidad superior en el centro de B . Sea RS (ver Figura 3.4) el diámetro de la bola B que divide en dos el ángulo agudo que forman T', T'' . Consideremos el conjunto L de todos

los segmentos, donde ambos extremos pertenecen al conjunto $F_3 \cap B$ y cuya dirección con RS hace un ángulo mayor que 4α . En cada uno de estos segmentos como diagonal, construimos un paralelogramo con lados paralelos a las direcciones (T', T'') .

Si denotamos por l la longitud de cualquier segmento de L , y por m la proyección sobre el diámetro RS de la segunda diagonal del paralelogramo construido sobre l , podemos ver que m es mayor que $4l$. Sea μ que denota el límite superior de los valores de m para todos los segmentos de L .

Ahora considere un segmento l cuyo paralelogramo es tal que $m > 0,9\mu$. A través de los extremos de la segunda diagonal perpendicular a RS dibujamos cuerdas y sea M la parte de la bola de corte entre estas cuerdas, incluidas las propias cuerdas.

Con a y b como centros, describimos los arcos ij , np de radio m y considere las regiones encerradas por los puntos $acijda = V$ y $bcnpdb = W$. Entonces

$$\mathcal{H}^1(F \cap V) < \epsilon m, \quad \mathcal{H}^1(F \cap W) < \epsilon m. \tag{3.4}$$

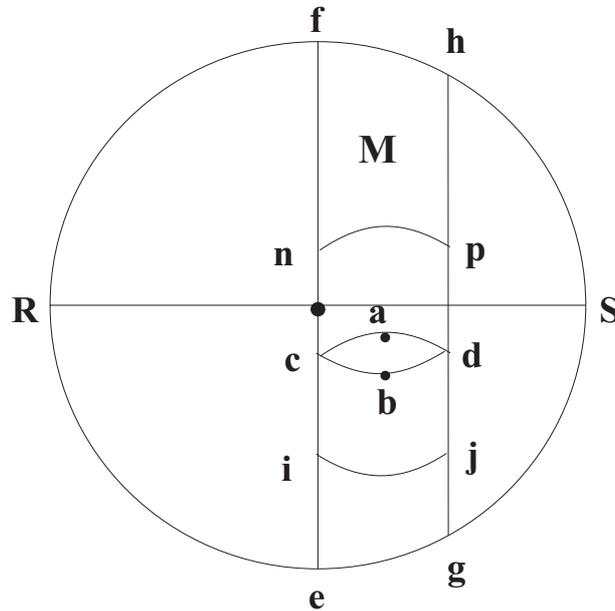


Figura 3.4: $B[O, r]$ es la bola cerrada de centro O y radio r .

Luego no existes puntos del conjunto A_3 en la franja M fuera de $ijpni$, pero si q fuera tal punto, la longitud del segmento que forman los puntos aq , sería mayor que m y harían un ángulo mayor que 4α con RS . La proyección de la segunda diagonal, que corresponde a este

segmento que forman los puntos aq , sería por tanto mayor que $4m > 3,6\mu$ lo cual es imposible.

Así se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(F \cap M) &= \mathcal{H}^1(F \cap (V \cup W)) \\ &\leq \mathcal{H}^1(F \cap V) + \mathcal{H}^1(F \cap W) \\ &< 2\epsilon m\end{aligned}$$

y como $F_3 \subseteq F$, tenemos

$$\mathcal{H}^1(F_3 \cap M) < 2\epsilon m \quad (3.5)$$

Es fácil ver que m no puede ser mayor o igual que $4r$, pues los arcos ij y np con centros en a y b respectivamente tienen como radio m . Para tomar en este caso para la franja M entre las tangentes a los puntos R y S , y con los puntos a, b como centros con radio $2r$ describen los arcos $i'j', n'p'$, cuyos puntos forman una franja M' . Entonces, por el argumento anterior, se tiene

$$\mathcal{H}^1(F_3 \cap M') < 4\epsilon r$$

pero en este caso la bola B esta contenida en M' y, por consiguiente

$$\mathcal{H}^1(F_3 \cap B) < 4\epsilon r$$

lo cual es imposible por (3.3).

Como el punto medio de m esta siempre dentro de la bola B , se sigue que todas las proyecciones m se encuentran en el interior del segmento de longitud $6r$, con su punto medio en O .

No hay segmentos del conjunto L que tienen sus extremos en lados diferentes de M , porque por un argumento similar a lo anterior, la segunda diagonal sería mayor que $3,6\mu$.

Sea L_1 el conjunto de segmentos de L , donde ambos extremos de dichos segmentos están fuera de M . De la misma manera que antes, nos corresponde para este conjunto un número μ_1 que es exactamente el límite superior de las proyecciones de las segundas diagonales sobre RS , y también una franja M_1 . Al proceder así, obtenemos sucesivamente las franjas M_2, M_3, \dots , (posiblemente se superponen).

Primero vamos a probar que

$$m + m_1 + m_2 + \dots \leq 18r. \quad (3.6)$$

Observar que

$$\mu \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$$

y que

$$\mu_i \geq m_i > 0,9\mu_i$$

Para cualquier i .

Si dos proyecciones m_i, m_j ($i < j$) tienen una parte en común, su longitud debe ser de $\frac{5}{9}m_i$.

Pues tenemos $m_j \leq \mu_j, m_i > 0,9\mu_i, \mu_i > \mu_j$, donde $\frac{1}{2}m_j < \frac{5}{9}m_i$.

Dado que la proyección del centro del paralelogramo P_j corresponde al segmento m_j , esta fuera de la proyección m_i , la parte de la proyección m_j , que pertenece a la proyección m_i es menor que $\frac{1}{2}m_j$ y consecuentemente $\frac{3}{9}m_i$.

Veamos ahora que cuatro proyecciones m_i, m_j, m_k, m_l ($i < j < k < l$) pueden tener puntos en común a todos ellos. Suponga que m_j, m_k están a la derecha de m_i (ver Figura 3.5). observe que en este caso la parte común de m_i, m_j, m_k debe estar en el extremo de la derecha de m_i y debe ser menor que $\frac{5}{81}m_i$; pero entonces el segmento de m_l no puede extenderse hasta esta parte común, ya sea desde la derecha o desde la izquierda. Así cuatro segmentos m no pueden tener una parte común. Una prueba similar se aplica en los otros casos.

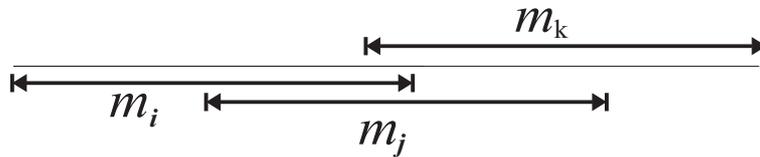


Figura 3.5: Los segmentos de recta m_i, m_j y m_k .

Ahora para verificar la ecuación (3.6) se desprende del hecho en que todos los segmentos m, m_1, m_2, \dots se encuentran dentro de un segmento de longitud $4r$, y que ningún punto de este segmento se cubre más de tres veces por los segmentos m, m_1, m_2, \dots .

Así m_i , y consecuentemente μ_i , tiende a cero, cuando i tiende a infinito.

Ahora sea E que denota el conjunto

$$F_3 \cap (M \cup M_1 \cup M_3 \cup \dots).$$

Por (3.5) y (3.6) se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(E) &= \mathcal{H}^1(F_3 \cap (M \cup M_1 \cup M_3 \cup \dots)) \\ &\leq \mathcal{H}^1(F_3 \cap M) + \mathcal{H}^1(F_3 \cap M_1) + \dots \\ &< 2\epsilon m + 2\epsilon m_1 + \dots \\ &= 2\epsilon(m + m_1 + \dots) \leq 36r\epsilon\end{aligned}$$

y por (3.3)

$$\mathcal{H}^1((F_3 \cap B) \setminus E) > \left(\frac{2}{3} - 36\epsilon\right)r > \frac{1}{2}r.$$

Ahora se observa que no hay segmento de L , donde ambos extremos pertenecen al conjunto $(F_3 \cap B) \setminus E$, porque en ese caso el valor correspondiente de m (digamos m') sería menor igual que μ_i para cualquier i , lo cual es absurdo, ya que μ_i tiende a cero cuando i tiende al infinito. Así todos los puntos del conjunto $(F_3 \cap B) \setminus E$ pertenecen a una curva rectificable y por el Lema 2.5 se tiene que toda curva rectificable es un 1-conjunto regular. Pero esto contradice, el hecho de que el conjunto F_3 es irregular.

Por lo tanto la proposición queda demostrada. □

Ejemplo 3.2. El polvo de Cantor es un 1-conjunto curva-free y por el Teorema 2.5 se tiene que dicho conjunto es un 1-conjunto irregular y por la Proposición 3.3 tenemos que el polvo de Cantor no tiene tangentes en casi todos sus puntos

Pasamos ahora a s -conjuntos en \mathbb{R}^2 para s no entero, que como hemos visto, son necesariamente irregulares. Para $0 < s < 1$, las preguntas de tangencia no son particularmente interesante, porque cualquier conjunto contenido en una curva suave va a satisfacer de forma automática (3.2) con v la dirección de la tangente a la curva en el punto x . Por ejemplo, el conjunto ternario de Cantor esta contenido en el intervalo $[0, 1]$, es decir esta contenido en una curva rectificable. Intuitivamente por mas pequeño que sea el intervalo tiene una tangente en casi todos sus puntos, pues por la Proposición 3.1, toda curva rectificable tiene una tangente en casi todos sus puntos.

Es aceptable que s -conjuntos en \mathbb{R}^2 con $1 < s < 2$ no tienen tangentes, tales conjuntos son tan grandes que se dispersan en todas las direcciones desde un punto, de modo que la Ecuación (3.2) no se puede obtener. Esto se hace preciso en la siguiente proposición.

Proposición 3.4. *Si F es un s -conjunto en \mathbb{R}^2 con $1 < s < 2$, entonces en casi todo los puntos de F no existe tangente.*

Demostración:

Para $r_0 > 0$, sea un conjunto

$$E = \{y \in F : \mathcal{H}^s(F \cap B[y, r]) < 2(2r)^s, \text{ para todo } r < r_0\}. \quad (3.7)$$

Para cada $x \in E$, cada vector unitario v y cada ángulo φ con $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, evaluamos cuanto de E se encuentra en $B[x, r] \cap S(x, v, \varphi)$. Para $r < \frac{r_0}{20}$, $i = 1, 2, \dots$, sea A_i la intersección del anillo y el sector doble dado por

$$A_i = \left(B[x, ir\varphi] \setminus B[x, (i-1)r\varphi] \right) \cap S(x, v, \varphi).$$

Entonces $B[x, r] \cap S(x, v, \varphi) \subset \bigcup_{i=1}^m A_i \cup \{x\}$, para algún entero positivo $m < \frac{2}{\varphi}$. Cada A_i comprende dos partes: una en dirección v y otra en dirección $-v$ ambos de diámetro a lo más $2r\varphi < r_0$, así para partes que contienen puntos de E y sumando tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(B[x, r] \cap S(x, v, \varphi)) &\leq \sum_{i=1}^m |A_i|^s \\ &\leq m(2r\varphi)^s \end{aligned}$$

esto implica que

$$\frac{\mathcal{H}^s(B[x, r] \cap S(x, v, \varphi))}{m(2r\varphi)^s} \leq 1 \quad (3.8)$$

Como $E \cap B[x, r] \cap S(x, v, \varphi) \subseteq B[x, r] \cap S(x, v, \varphi)$ y \mathcal{H}^s es una medida exterior y por 3.8 se tiene

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap B[x, r] \cap S(x, v, \varphi))}{m(2r\varphi)^s} \leq \frac{\mathcal{H}^s(B[x, r] \cap S(x, v, \varphi))}{m(2r\varphi)^s} \leq 1.$$

Y como $1 < 2$ tenemos que $\frac{\mathcal{H}^s(E \cap B[x, r] \cap S(x, v, \varphi))}{m(2r\varphi)^s} < 2$, esto implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(E \cap B[x, r] \cap S(x, v, \varphi)) &< 2m(2r\varphi)^s < 2\frac{2}{\varphi}(2r\varphi)^s \\ &= 4\varphi^{s-1}(2r)^s, \end{aligned}$$

así que

$$\frac{\mathcal{H}^s(E \cap B[x, r] \cap S(x, v, \varphi))}{(2r)^s} < 4\varphi^{s-1}. \quad (3.9)$$

Descomponiendo $F \cap B[x, r]$ en tres partes disjuntas, se tiene

$$F \cap B[x, r] = ((F \setminus E) \cap B[x, r]) \cup (F \cap B[x, r] \cap S(x, v, \varphi)) \cup (F \cap (B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi))).$$

Como \mathcal{H}^s es una medida, y para casi todo $x \in E$, por la Proposición 2.2 se tiene que $\overline{D}^s(F \setminus E) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(F \cap B[x, r]) &= \mathcal{H}^s(((F \setminus E) \cap B[x, r])) + \mathcal{H}^s((F \cap B[x, r] \cap S(x, v, \varphi))) \\ &\quad + \mathcal{H}^s((F \cap (B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi)))). \end{aligned}$$

Dividiendo por $(2r)^s$ y tomando el límite superior cuando r tiende a cero, y por la Ecuación (3.9) tenemos

$$\overline{D}^s(F, x) \leq 0 + 4\varphi^{s-1} + \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} (2r)^{-s} \mathcal{H}^s(F \cap (B(x, r) \setminus S(x, v, \varphi)))$$

para casi todo $x \in E$, y por la Proposición 2.1 se tiene que $\frac{1}{2^s} \leq \overline{D}^s(F, x)$, esto implica

$$2^{-s} \leq 4\varphi^{s-1} + 2^{-s} \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{-s} \mathcal{H}^s(F \cap (B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi))) \quad (3.10)$$

multiplicando a la Ecuación 3.10 por 2^s tenemos

$$1 \leq 2^s 4\varphi^{s-1} + \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{-s} \mathcal{H}^s(F \cap (B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi))).$$

Por lo tanto, tendiendo φ a cero, se sigue que para todo v ,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} (r)^{-s} \mathcal{H}^s(F \cap (B[x, r] \setminus S(x, v, \varphi))) \geq 1.$$

Así la Ecuación (3.2) no se satisface, por lo tanto F no tiene tangente en casi todos sus puntos. □

Ejemplo 3.3. El triángulo de Sierpinski es un s -conjunto, donde $s = \frac{\ln 3}{\ln 2}$, denota su dimensión y por la Proposición 3.4 se tiene que el triángulo de Sierpinski no tiene tangentes en casi todos sus puntos.

Ejemplo 3.4. Sea F la curva de Koch, si $s = \frac{\ln 4}{\ln 3}$, se tiene que $\frac{1}{2^{s+2}} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$, por tanto, F es un s -conjunto que no tiene tangentes en casi todos sus puntos.

En efecto, del ejemplo 2.10 tenemos que en la k -ésima iteración el conjunto E_k consiste de 4^k segmentos de lado 3^{-k} cada uno, tomando $\delta = 3^{-k}$ y $N_\delta(F) = 4^k$ tenemos que

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^k}{-\ln 3^{-k}} = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Ahora veremos que si $s = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ entonces F es un s -conjunto. Tomando $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un δ -cubrimiento de F con $\delta = 3^{-k}$ tenemos que

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{4^k} |U_i|^s \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k 3^{-ks}.$$

Como $3^s = 4$ y k es un número entero positivo se tiene que $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k 4^{-k} = 1$, de donde $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq 1$. Por definición de \mathcal{H}^s obtenemos $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Por otro lado, para que $\mathcal{H}^s(F) \geq 2^{-(s+2)}$ es suficiente verificar que $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq 2^{-(s+2)}$, para cualquier cubrimiento $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de F .

Sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un cubrimiento finito de conjuntos cerrados de F . Para cada U_i sea $k = 1, 2, \dots$ tal que $3^{-(k+1)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \times |U_i| < 3^{-k}$.

Entonces U_i interseca a lo más dos segmentos de E_k . Si $j \geq k$, el número de segmentos de E_j que interseca U_i es a lo más

$$\begin{aligned} 2 \times 4^{j-k} &= 4^j \times 2 \times 4^{-k} = 4^j \times 2 \times 3^{-sk} \\ &= 4^j \times 2 \times 3^s \times 3^{s(k+1)} \\ &\leq 4^j \times 2 \times 3^s \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times |U_i| \right)^s \\ &= 4^j \times 2^{(s+2)} \times |U_i|^s. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior es válida para una cantidad determinada U_i (recordar que k depende de U_i). Dado que sólo hay un número finito de conjuntos cerrados U_i , podemos elegir j que sea lo suficientemente grande para que la desigualdad sea verdadera para todos los U_i .

Dado que los U_i intersecan todos los 4^j segmentos de E_j y sumando todos los conjuntos U_i , tenemos que

$$4^j \leq 4^j \times 2^{(s+2)} \times \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

Por lo tanto, $2^{-(s+2)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$.

Así F es un s -conjunto, con $s = \frac{\ln 4}{\ln 3}$.

Por la Proposición 3.4 se tiene que la curva de Koch no tiene tangentes en casi todos sus puntos.

Los 1-conjuntos irregulares en el plano no tienen tangentes en casi todos sus puntos, aún más si es un s -conjunto en plano con $1 < s < 2$, no tiene tangentes en casi todos sus puntos.

CONCLUSIONES

La densidad hace uso de la medida y dimensión de Hausdorff s -dimensional, por ello es de importancia ver la dimensión y medida de Hausdorff s -dimensional, ya que dicha medida está definida para un s -conjunto en \mathbb{R}^n , donde $0 \leq s \leq n$ denota la dimensión de dicho conjunto.

1. La regularidad e irregularidad de un s -conjunto, así como también la existencia de tangentes en dichos conjuntos están en términos de la densidad.
2. La densidad de un s -conjunto es mayor igual que cero pero menor igual que 1, es decir, dicho valor esta entre $[0, 1]$.
3. Un 1-conjunto en \mathbb{R}^2 se descompone en una parte regular y una parte irregular.
4. Un 1-conjunto regular se caracteriza con 1-conjunto curva-like.
5. Un 1-conjunto curva-free se caracteriza con 1-conjunto irregular.
6. Toda curva rectificable en el plano es un 1-conjunto regular y tiene tangente en casi todos sus puntos.
7. Un s -conjunto irregular en el plano, con $1 \leq s < 2$, no tiene tangente en casi todos sus puntos.

SUGERENCIAS

1. Aquellos interesados en el tema sugerimos que se desarrolle las propiedades para un s -conjunto en \mathbb{R}^n , con $s \geq 2$.
2. Sugerimos no confundir la medida de Hausdorff, representada por s , con n que es el espacio donde se está trabajando, pues si un conjunto F está en \mathbb{R}^2 , dicho conjunto no siempre tiene dimensión 2.
3. Para todos aquellos interesados en la Matemática aplicada seria interesante hacer una aplicación para los conjuntos que son s -conjuntos, con $0 \leq s < 2$, como por ejemplo en dichos conjuntos podemos encontrar la dimensión de Hausdorff en el diseño de la banda de rodadura de un neumático, esta aplicación lo podemos encontrar en la revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, de Rafael Larraz Mora (ISSN: 0213 – 1315).

REFERENCIAS

- [1] Bass, Richard F. *Real analysis for graduate students : measure and integration theory*. Place of publication not identified: Richard F. Bass, 2011.
- [2] Besicovitch Abram Samoilovitch. *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points*. Math. Ann., Vol. 98 (1927), 422-464. (Section 6.6)
- [3] Besicovitch Abram Samoilovitch. *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points II*. Math. Ann., Vol. 115 (1938), 296-329. (Section 6.6)
- [4] Besicovitch Abram Samoilovitch. *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points III*. Math. Ann., Vol. 116 (1939), 349-357. (Section 6.6)
- [5] B elair, Jacques, and Serge Dubuc. *Fractal geometry and analysis*. Dordrecht: Springer-Science+Business Media, B.V, 1991.
- [6] Edgar, Gerald A. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. New York, NY: Springer New York, 1990.
- [7] Evans, Lawrence C., and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Boca Raton: CRC Press, 1992.
- [8] Falconer, K. J. *Fractal geometry : mathematical foundations and applications*. Hoboken: John Wiley & Sons Inc, 2014.
- [9] Falconer, K. J. *The geometry of fractal sets*. Cambridge Cambridgeshire New York: Cambridge University Press, 1985.
- [10] Fava Norberto y Z o Felipe. *Medida e integraci on de Lebesgue*. Departamento de Matem atica Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires, 2013.

- [11] Guzmán. *Real variable methods in Fourier analysis*. Amsterdam New York: North-Holland Pub. Co. Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier North-Holland, 1981.
- [12] Mattila, Pertti. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces : fractals and rectifiability*. Cambridge England New York: Cambridge University Press, 1995.
-