UNIVERSIDAD NACIONAL
"Pedro Ruiz Gallo"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Aplicaciones de la Teoría de juegos no Cooperativos para Dos Personas Tratados Matricialmente en Conflictos Económicos Sociales y Políticos.

TESIS

Presentada para obtener el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADA POR:

Bach. Mat. QUIÑONES HUATANGARI LENIN.

ASESORA:

Dra. Gloria María Ortíz Basauri.

LAMBAYEQUE, PERÚ

UNIVERSIDAD NACIONAL
"Pedro Ruiz Gallo"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Aplicaciones de la Teoría de juegos no Cooperativos para Dos Personas Tratados Matricialmente en Conflictos Económicos Sociales y Políticos.

TESIS

Presentada para obtener el Título Profesional de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADA POR:

Bach. Mat. QUIÑONES HUATANGARI LENIN.

ASESORA:

Dra. Gloria María Ortíz Basauri.

LAMBAYEQUE, PERÚ

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUÍZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Aplicaciones de la Teoría de Juegos no Cooperativos para Dos Personas Tratados Matricialmente en Conflictos Económicos, Sociales y Políticos.

TESIS PRESENTADA POR

Bach. Mat. QUIÑONES HUATANGARI LENIN.

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Asesora:

Dra. Gloria María Ortíz Basauri .

LAMBAYEQUE - PERÚ

ESIS APROBADA POR:

PRESIDENTE : Mag. Mat. ANDRES FIGUEROA ALVARADO

SECRETARIO : Lic.Mat. HENRY GUEVARA QUILICHE

VOCAL : Mag. Mat. NORMA GUTIERREZ MORENO

DECANO : Dr. LUIS JAIME COLLANTES SANTISTEBAN

ASESORA : Dra. GLORIA MARIA ORTIZ BASAURI

Aplicaciones de la Teoría de Juegos no cooperativos para dos personas tratados matricialmente en conflictos económicos, sociales y políticos

Lenin Quiñones Huatangari

15 de febrero de 2010

Dedicatoria

A mi Madre y Padre que me han dado la existencia; y en ella, la capacidad por superarme y desear lo mejor por cada paso en este camino difícil y arduo de la vida.

Gracias por ser como son, porque su presencia y persona han ayudado a construir y forjar el hombre que soy.

A mis hermanos; por su cariño, comprensión y apoyo incondicional, gracias por confiar en mí. ♡

Agradecimiento

- *A la Dra. Gloria María Ortiz Basauri; por su apoyo e invalorable amistad.*

- *A mis maestros y amigos; que en el andar de la vida nos hemos ido encontrando; porque cada uno de ustedes ha motivado mis sueños y esperanzas en consolidar un mundo mas humano.*
  Gracias a todas y a todos los que han recorrido conmigo este camino, porque me han enseñado a ser mas humano y cercano a mis semejantes.

Resumen

El objetivo de esta tesis fue mostrar el Teorema de Existencia de Equilibrio de Nash y sus aplicaciones a la teoría de juegos no cooperativos para dos entidades. Este teorema establece la existencia de estrategias óptimas para ambos jugadores en todo juego finito de suma no cero. Fue necesario recurrir al concepto de Equilibrio de Nash, al Teorema de punto fijo de Kakutani y al Teorema de Von Neuman, éste último afirma que existen estrategias óptimas para ambos jugadores en todo juego finito de suma cero.

Palabras Clave: Equilibrio de Nash; Juego finito de suma cero; Juego finito de suma no cero; Teorema de Existencia de Equilibrio de Nash.

Abstract

The aim of this thesis was to show the Nash Equilibrium Existence Theorem and its applications to the theory of non-cooperative games for two entities. This theorem establishes the existence of optimal strategies for both players in every finite non-zero sum game. It was necessary to resort to the concept of Nash Equilibrium, Kakutani's Fixed Point Theorem and Von Neuman's Theorem, the latter proves that there are optimal strategies for both players in any finite zero-sum game.

Keywords: Nash equilibrium; Finite zero sum game; Non-zero sum finite game; Nash Equilibrium Existence Theorem.

Índice general

ACTA Nº 004-2010-D/FACFyM

En la ciudad de Lambayeque, siendo las 10:00 am del día 04 de Febrero del 2010, se reunieron en la Sala de Sustentaciones de la FACFyM los miembros del Jurado designados mediante Resolución Nº 972-2009-D/FACFyM, MSc. Andrés Figueroa Alvarado (Presidente), Lic. Mat. Henry Guevara Quiliche (secretario) Lic. Mat. Norma Gutiérrez Moreno (Vocal), para recibir el trabajo de Tesis titulado "Aplicaciones de la Teoría de Juegos No Cooperativos para Dos Personas Tratados Matricialmente en Conflictos Económicos, Sociales y Políticos", desarrollado por el bachiller Quiñones Huatangari, Lenin.

Después de escuchar la exposición y las respuestas a las preguntas formuladas por los miembros del Jurado, se acordó APROBAR el trabajo por UNANIMIDAD con el calificativo de BUENO.

En consecuencia, el bachiller en referencia queda apto para recibir el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas de acuerdo a la Ley Universitaria, el Estatuto y el Reglamento de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Lambayeque.

Para constancia del hecho firman,

M.Sc. Andrés Figueroa Alvarado
Presidente

Lic. Mat. Henry Guevara Quiliche
Secretario

Lic. Mat. Norma Gutiérrez Moreno
Vocal

Introducción

Los fundamentos de la teoría de juegos fueron establecidos por JOHN VON NEUMANN en 1928, y expuestos en el libro Theory of games and economic behaviour, que publicó junto a Oscar Morgensten en 1944. Esta teoría pone de manifiesto que los acontecimientos de las ciencias sociales donde los agentes actúan a veces unos contra otros para la consecución de sus objetivos, pueden ser descritos mediante modelos matemáticos.

La teoría de juegos proporciona modelos de las situaciones reales, los que aportan son sólo pautas generales de comportamiento, proporcionan normas de actuación más precisas, en tanto el modelo refleje con mayor precisión la realidad.

En esta tesis, se expondrán soluciones prácticas, especialmente a los juegos representados de forma matricial, tanto a los modelos relacionados de juegos con pagos de suma no cero y cero, también llamados juegos bimatriciales y matriciales.

Dichos modelos se aplican tanto en el análisis de situaciones económicas como en las cuestiones sociales ó en contextos políticos.

Dentro del primer capítulo, se ha considerado dos temas: en el item 1.1 se representan los conceptos básicos de los juegos, la forma de representar juegos, clasificación y modelos importantes de ellos, en el item 1.2 se presenta las herramientas matemáticas a utilizar, como es el Teorema de Punto Fijo de Kakutani, convexidad, convergencia, correspondencia.

El segundo capítulo comienza con juegos de dos jugadores en donde cada jugador elige de muchas estrategias puras finitas o aleatoriamente entre ellas, y la suma de los pagos de los jugadores es siempre igual a cero.

Se da las definiciones y teoría básica, se muestra como desarrollar juegos $2 \times n$ y $m \times 2$, estrategia dominada y por último se demuestra el Teorema de Minimax, que garantiza una solución a este tipo de juegos.

En lo que sigue del segundo capítulo, se considera juegos donde cada jugador elige estrategias finitas puras o aleatoriamente entre éstas,la suma de los pagos de los jugadores es no nula.

Se introduce el modelo y el concepto de "Equilibrio de Nash", se mostrará como calcular los Equilibrios de Nash en estrategias puras, todos los Equilibrios de Nash en juego donde ambos jugadores tienen exactamente dos estrategias puras y como usar el concepto de dominación estricta. Además se demostrará el tema principal de la tesis el "Teorema de existencia de Equilibrio de Nash".

El tercer capítulo está destinado a las aplicaciones. Las primeras cuatro aplicaciones son con respecto a Juegos de Suma Cero (también llamados juegos Matriciales) y las tres últimas a los Juegos de Suma no cero (también llamados juegos Bimatriciales).

Bach. Mat. Lenin Quiñones Huatangari.

Capítulo 1:

Preliminares

1.1. Nociones básicas de juego

1.1.1. *Definición de un juego*

- Es una situación en la que compiten dos o mas jugadores (Ferguson y Gould, 1975)
- Un juego es cualquier situación en la que los individuos deben tomar decisiones estratégicas y en la que el resultado final depende de lo que cada uno decida hacer (Nicholson, 1997).
- Cualquier problema de toma de decisiones, donde el rendimiento (que obtiene una persona) depende no sólo de sus propias decisiones sino también de las decisiones de las otras personas que participan en el juego (Maddala y Miller, 1991).

1.1.2. *Elementos de un juego*

- **JUGADORES** Son jugadores cada uno de los agentes que **toman decisiones**. Pueden **elegir** entre un conjunto de alternativas posibles

- **ESTRATEGIAS** Una estrategia corresponde a cada curso de acción que puede elegir un jugador.

  CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS

  - Estrategia Pura: Una estrategia pura es la elección de una acción con certeza por parte de un agente.
  - Estrategia Mixta: Una estrategia es mixta cuando la elección de una acción es aleatoria por parte de un agente.

- **GANANCIAS O PAGOS** Las ganancias corresponden a los rendimientos que obtiene cada jugador cuando termina el juego.

1.1.3. *Clasificación general de los juegos*

Las situaciones de conflicto reales conducen a una diversidad de juegos. En la actualidad no existe ninguna clasificación universal de los juegos, aunque éstos se diferencian por diversos criterios como: número de participantes, número de estrategias, relación entre los jugadores, tipo de pago, número de movimientos, cantidad de información que posee cada jugador, etc...

⋆ **Número de jugadores** Dependiendo del número de jugadores se definen tres tipos:

  - Juegos de un jugador (sin consideración en teoría de juegos),
  - Juegos de dos jugadores (**la más estudiada**) y
  - Juegos n-personales con un proceso de simulación y resolución muy dificultoso.

⋆ **Número de estrategias** Los juegos se dividen en **juegos finitos** en los que cada jugador tiene un número finito de estrategias, y **juegos infinitos** en los que al menos un jugador posee infinitas estrategias.

⋆ **Relación entre los jugadores** Se clasifican en **juegos no cooperativos** (*juegos sin coaliciones*), en los que los jugadores no pueden firmar ni acuerdos ni coaliciones, **juegos cooperativos** (*juegos con coaliciones*) en los cuales los acuerdos se firman con anterioridad y deben ser respetados obligatoriamente.

⋆ **Tipo de pago** Se distinguen los **juegos de suma cero**[1] en el que la ganancia de un jugador implica la pérdida en misma cantidad de otro y **juegos de suma no nula**, en la cual las ganancias no suman cero.

⋆ **Número de movimientos** Los juegos se dividen en *juegos de un paso* que terminan cuando cada jugador realiza un movimiento y *juegos multipasos* los cuales también se dividen en *juegos de posición* (cada jugador puede realizar más de un movimiento en el tiempo), *juegos estocásticos* (al elegir una nueva posición existe probabilidad de volver a la anterior), *juegos de tipo duelo* (se caracterizan por el instante en el cual se hace el movimiento y por la probabilidad de obtener un pago dependiendo del tiempo transcurrido)

⋆ **Información disponible** Los juegos se clasifican en *juegos de información completa* en los que cada jugador conoce los movimientos hechos por los demás, y *juegos de información incompleta* en los que no se conocen todas las jugadas anteriores.

Obviamente existen otros tipos de juegos. Dependiendo de su clase, se elabora su método de solución. No obstante, cabe destacar que un mismo juego puede pertenecer a diferentes clase.

[1]Los juegos de suma cero se llaman también juegos antagónicos ya que los intereses de los jugadores son opuestos

Tenemos la esperanza que la teoría de juegos
funcione, del mismo modo que en 1942 teníamos
la esperanza de que la bomba atómica funcionaría,
CIENTÍFICO ANÓNIMO DEL PENTÁGONO
A Fortune, 1949

1.1.4. *Juegos cooperativos y no cooperativos*

1. **Juegos cooperativos**

   Los jugadores pueden negociar contratos vinculantes. "Eligen estrategias de manera conjunta".

2. **Juegos no cooperativos**

   Los jugadores NO pueden negociar contratos vinculantes. "Cada uno elige su estrategia óptima independientemente".

   - Comprender el punto de vista de un adversario "racional".
   - Deducir su respuesta a nuestros actos.

1.1.5. *Formas de representar un juego*

La representación de un juego puede realizarse a través de:

- **Matriz de ganancias**(Forma normal)

  Es una representación de una situación estratégica a través de una tabla. Las estrategias de cada jugador se presentan a la izquierda y en la parte superior de la tabla. Las ganancias obtenidas por cada uno de los jugadores al final del juego se presentan en la parte interior de la tabla.

  Contiene los siguientes elementos:

  - Jugadores.

- Estrategias de acciones factibles.
- Matriz de pagos "payoffs"

- **Árbol de juego (forma extensiva)**

  - **Forma extensiva de un juego**:

    Forma extensiva contiene toda la información sobre el juego, especificando el orden de jugadas, la información y las alternativas de que un jugador dispone en cualquier momento en que sea su turno jugar, los pagos para todos los jugadores, etc. (mientras que la forma normal es mas resumida).

  - **Definición de un juego de forma extensiva**:

    Un juego consiste en:

    - Un conjunto de jugadores
    - Un árbol.
    - Una asignación de cada nodo no-terminal a un jugador.
    - Una división (partición) de información.
    - Un pago (payoff) para cada jugador en cada nodo terminal.

  - **Definición de árbol**:

    Un árbol es un conjunto de nodos y líneas conectándolos de modo que:

    - Para cada nodo existe como máximo una línea que lo conecta con el nodo anterior.
    - Para cada par de nodos existe una sola trayectoria que los conecta.

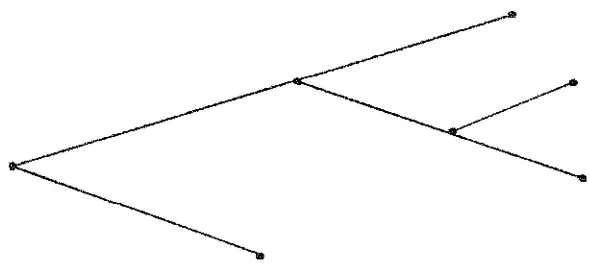


Figura 1.1

***Ejemplo* 1.1. Competencia de mercados**

Consideremos 2 jugadores: la firma I es una firma incúmbete, y la firma Es la potencial entrante en la industria.

Primero, la firma E decide si entrar o no entrar al mercado.

Segundo, la firma I decide si acomoda la entrada o si lucha (por ejemplo, bajando los precios).

Se representa este juego por medio de la forma normal:

E/I	Acomodar	Pelear
Entrar	(4,5)	(-1,0)
No entrar	(0,10)	(0,10)

En su forma extensiva:

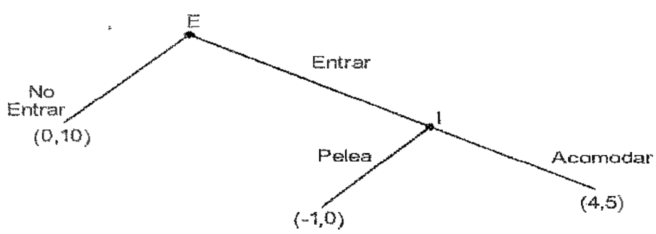


Figura 1.2

1.1.6. *Modelos importantes de juegos no cooperativos*

a) **Juegos de Suma Cero**

▶ **La batalla del Mar Bismark**

Se dió en el sur-pacifico en 1943.El almirante japonés INAMURA tiene que transportar tropas de un lado a otro el mar Bismark a Nueva Guinea , y el almirante americano KENNEY desea bombardear a las tropas, INAMURA tiene dos posibilidades:

- Una ruta corta del norte (2 días).
- Una ruta larga del sur (3 días).

Kenney tiene que elegir una de esas rutas para hacer su plan, si elige la ruta incorrecta puede regresar hacia tras los planes y tomar la otra ruta pero el número de días de bombardeo es reducido a 1. El numero de días de bombardeo representa el pago para Kenney en un sentido positivo y para Inamura un sentido negativo.
El problema de la batalla del mar de BISMARK se modela en la siguiente tabla.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Norte} \\ \text{Sur} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Norte} & \text{Sur} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cada jugador tiene dos posibles elecciones, Kenney (jugador 1) elige una fila, Inamura (jugador 2) elige una columna y estas elecciones son tomadas independientemente y simultáneamente. Los números representan los pagos para kenney.
Este es un ejemplo de suma cero porque la suma de los pagos es siempre igual a cero.
En este juego en particular, no parece tener dificultad para predecir que va a pasar.

Si elegimos Norte Inamura es siempre menos mala que si escogiera el Sur, esto se ve eu la tabla de pagos. Ver que en este juego es fácilmente analizar porque uno de los jugadores tiene una estrategia dominante .i.e ,Una elección es siempre buena o alguna otra elección, no interesando que decida el oponente.

En lugar de tratar de unirme a la coalición
de Von Neumann, estaba jugando a un
juego no-cooperativo con él.
JOHN NASH
1993

b) **Juegos de Suma No Cero**

► **Dilema del prisionero**

Dos delincuentes sou detenidos y eucerrados en celdas de aislamiento de forma que no pueden comunicarse. El policía sospecha que han participado en el robo del banco, delito cuya pena es diez años de cárcel, pero no tienen pruebas. Sólo tiene pruebas y puede culparles de un delito menor, tenencia ilícita de armas, cuyo castigo es de dos años de cárcel. Prometen a cada uno de ellos que reducirá su condena a la mitad si proporciona las pruebas para culpar al otro del robo del banco.

Las alternativas para cada prisionero pueden representarse en forma de matriz de pagos. La estrategia "lealtad" consiste en permanecer en silencio y no proporcionar pruebas para acusar al compañero. Llamaremos "traición" a la estrategia de acusar al otro.

Dilema del prisionero Matriz de pagos (años de cárcel)			
		Preso Y	
		Lealtad	Traición
Preso X	Lealtad	2/2	10/1
	Traición	1/10	5/5

Los pagos a la izquierda o a la derecha de la barra indican los años de cárcel a los que es condenado el preso X o Y respectivamente según las estrategias que hayan elegido cada uno de ellos.

El dilema del prisionero, es un juego de suma no nula, bipersonal, biestratégico y simétrico. Fue formalizado y analizado por primera vez por A. W. Tucker en 1950. Es el juego más conocido y estudiado en la Teoría de Juegos. En base a él se han elaborado multitud de variaciones, muchas de ellas se basan en la repetición del juego y el diseño de estrategias reactivas.

- **La guerra de los sexos**

Hay dos jugadores: "ÉL" y "ELLA". Cada uno de ellos puede elegir entre dos posibles estrategias a las que llamaremos "Fútbol" y "Discoteca".

Supongamos que el orden de preferencias de ÉL es el siguiente:

1. (Lo más preferido) EL y ELLA eligen Fútbol.
2. EL y ELLA eligen Discoteca.
3. EL elige Fútbol y ELLA elige Discoteca.
4. (Lo menos preferido) El elige Discoteca y ELLA elige Fútbol.

Supongamos que el orden de preferencias de ELLA es el siguiente:

1. (Lo más preferido) ÉL y ELLA eligen Discoteca.
2. EL y ELLA eligen Fútbol.
3. EL elige Fútbol y ELLA elige Discoteca.
4. (Lo menos preferido) Él elige Discoteca y ELLA elige Fútbol.

La matriz de pagos es como sigue:

Guerra de los sexos			
		ELLA	
		Fútbol	Discoteca
ÉL	Fútbol	$1^o/2^o$	$3^o/3^o$
	Discoteca	$4^o/4^o$	$2^o/1^o$

A la izquierda de la barra, los pagos a EL.
Este juego, es un juego sin repetición y sin transferencia de utilidad. Sin repetición significa que sólo se juega una vez por lo que no es posible tomar decisiones en función de la elección que haya hecho el otro jugador en juegos anteriores. Sin transferencia de utilidad significa que no hay comunicación previa por lo que no es posible ponerse de acuerdo, negociar ni acordar pagos secundarios ("Si vienes al fútbol te pago la entrada").

1.2. Herramientas Matemáticas

1.2.1. *Algunas definiciones* [14]

- Un subconjunto $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ es **CONVEXO**, si para dos puntos $x, y \in Z$, también la linea segmento conectando x a y es contenido en Z. Formalmente:

$$\forall \quad x,y \in Z \quad , \quad \forall \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad : \quad \lambda x + (1-\lambda).y \in Z$$

- Un subconjunto $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si y solo si: $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \in Z \quad , \quad \forall \quad x_1, x_2, \cdots, x^k \in Z$ y todos los números no negativos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ con $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$
Donde la suma $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \in Z$ es llamado combinación convexa de los x^j.

- Un conjunto $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si este es cerrado y acotado.

- Un conjunto $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado si existe un $k > 0$ tal que $x \in Z$ entonces $\|x\| \leq k$

- Un conjunto $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si este contiene el limite de toda sucesión convergente en Z

- Sea $f : Z \longmapsto \mathbb{R}^n$ una función definida en el conjunto $Z \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que f es una función continua en el punto $a \in X$ cuando:

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad , \quad \exists \quad \delta > 0 \quad : \quad x \in Z \quad , \quad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

- Dado $\phi : Z \longrightarrow Z$ es una correspondencia, es decir, $\phi(x)$ es un subconjunto no vacío de Z, $\forall x \in Z$
- Llamaremos valor convexo deϕ, si $\phi(x)$ es un conjunto convexo, $\forall x \in Z$
- Sea $\phi : Z \longrightarrow Z$ es superiormente semi-continua si para toda sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in Z$ y para toda sucesión $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ en Z converge a $y \in Z$, si $y^k \in \phi(x^k)$, $\quad \forall k \in \mathbb{N}$, entonces $y \in \phi(x)$.
- Un punto $x^* \in Z$ es un punto fijo de Z si $x^* \in \phi(x^*)$

1.2.2. *Teorema de Separación y de lo alternativo para matrices* [1]

- **Teorema de Separación**

  Dado $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo cerrado y dado $x \in \mathbb{R}^n|_Z$. Entonces existe un $y \in \mathbb{R}^n$ con

$$y \cdot z > y \cdot x \quad , \quad \forall z \in Z$$

- **Teorema de la alternativa para matrices**

  Dado A una matriz $m \times n$. Exactamente uno de los siguientes enunciados es verdadero:

  (1) Existe un $y \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}^m$ con $(y,z) \geq 0$, $(y,z) \neq 0$ y $A \cdot y + z = 0$

  (2) Existe un $x \in \mathbb{R}^m$ con $x > 0$ y $x \cdot A > 0$

(*) Para vectores $x = (x_1, \dots x_n)$, $y = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Denota el producto interno de x y y

1.2.3. *Algunos teoremas de punto fijo*[1]

Dado $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío compacto y convexo, sea $f : Z \longmapsto Z$ una función continua, un pnnto $x^* \in Z$ es un punto fijo de f si $f(x^*) = x^*$

- **Teorema de punto fijo de Brouwer**
  Dado $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío compacto y convexo y dado $f : Z \longmapsto Z$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo.
  Una generalización del teorema anterior es el Teorema de punto fijo de KAKUTANI.

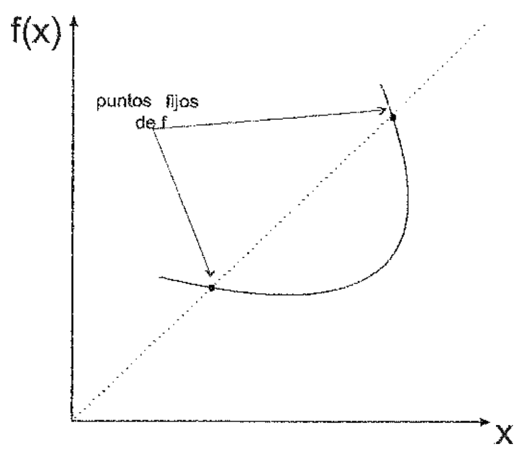


Figura 1.3: Punto fijo para una función

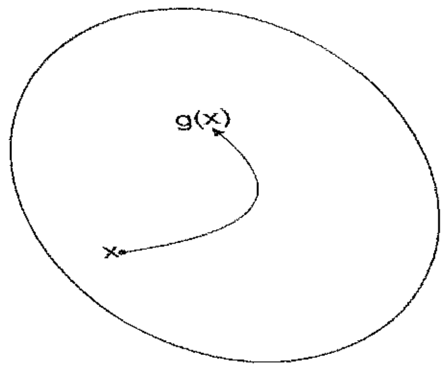


Figura 1.4: Punto fijo para una correspondencia

- **Teorema de punto fijo de Kakutani**

  Dado $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y convexo, no vacío y dado $f : Z \longmapsto Z$ es sobre-semi continua y valor-convexo correspondiente . Entonces f tiene un punto fijo.

Capítulo 2:

Juegos Finitos

2.1. Juegos finitos de suma cero para dos personas

Este capítulo trata juegos con dos jugadores en donde cada jugador elige de estrategias puras finitas o aleatorias entre estas, y la suma de los pagos o pagos esperados es siempre igual a cero.

En la sección 2.1.1, las definiciones y teorías básicas son discutidas. En la sección 2.1.2 se muestra como resolver juegos de 2×2, $2 \times m$, $m \times 2$ y juegos amplios por eliminación de estrategias estrictamente dominada.

Por último en la sección 2.1.3 se estudia los juegos finitos de suma cero para dos personas-juegos matriciales-más rigurosamente. En particular se prueba el Teorema del MINIMAX de Von Neumann, que nos garantiza que en todo juego matricial A el pago que al menos recibirá el jugador 1 es igual al pago que a lo más el jugador 2 pagará.

2.1.1. *Definiciones y teoría básica*

Los datos de un juego finito de suma cero para dos personas puede ser resumida en una matriz, donde el juego es normalmente llamado un "Juego matricial".

DEFINICIÓN 2.1. *(JUEGO MATRICIAL). Un juego matricial es una matriz A de $m \times n$ números reales, donde el número de filas m y el número de columnas n son enteros mayores ó igual que 1.*

Una estrategia (mixta) del jugador 1 es una distribución de probabilidad p sobre las filas de A, es decir, un elemento del conjunto

$$\Delta^m = \{p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m / \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, m\}$$

Una estrategia (mixta) del jugador 2 es una distribución de probabilidad q sobre las columnas de A, es decir, un elemento del conjunto

$$\Delta^n = \{q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots, n\}$$

Una estrategia p del jugador 1 es llamada pura si hay alguna fila i con $p_i = 1$. Esta estrategia es también denotada por e^i, q es una estrategia del jugador 2 es llamada pura, si en alguna columna j con $q_j = 1$. Esta estrategia es denotada por e^j.

La interpretación de un juego matricial A es:

Si el jugador 1 juega la fila i (i.c. la estrategia pura e^i) y el jugador 2 la columna j (i.e. la estrategia pura e^j), entonces el jugador 1 recibe un pago de a_{ij} y el jugador 2 paga a_{ij} (y de esta manera recibe $-a_{ij}$), donde a_{ij} es el número en la fila i y columna j de la matriz A.

Si el jugador 1 juega la estrategia [1] p y el jugador 2 juega la estrategia q, el

[1]Observe que aquí, por "estrategia"se entenderá estrategias mixtas, para diferenciarlas de las estrategias puras.

jugador 1 recibe el pago esperado [2]

$$p\ A\ q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} \qquad [5]$$

y el jugador 2 recibe $-p\ A\ q$.

Para solucionar juegos matriciales, los conceptos de estrategias máximin y minimax son importantes.

DEFINICIÓN 2.2. *(Estrategias MAXIMIN y MINIMAX)*

Una estrategia p es una estrategia máximin del jugador 1 en juego matricial A si:

$$min\{p\ A\ q/q \in \Delta^n\} \geq min\{p'\ A\ q/q \in \Delta^n\}, \quad \forall p' \in \Delta^m$$

Una estrategia q es una estrategia minimax del jugador 2 en un juego matricial A si:

$$max\{p\ A\ q/p \in \Delta^m\} \leq max\{p\ A\ q'/p \in \Delta^m\}, \quad \forall q' \in \Delta^n$$

Una estrategia máximin del jugador 1 maximiza el mínimo (con respecto a las estrategias del jugador 2) pago del jugador 1, y una estrategia minimax del jugador 2 minimiza el máximo (con respecto a las estrategias del jugador 1) qne el jugador 2 tiene que pagar al jugador 1.

Para probar si una estrategia p del jugador 1 es una estrategia máximin es suficiente probar que la primera inecuación en la definición 2.2 cumple con e^j, para todo $j = 1, \ldots, n$ en lugar de para todo $q \in \Delta^n$. Esto es referido en la sección 2.1.3.

Para probar si una estrategia es máximin (minimax) es suficiente considerar su desempeño contra toda estrategia pura i.e, columna (fila).

¿Por qué nos interesa tales estrategias?

[2] $p\ A\ q$ puede ser expresado por $p^T\ A\ q$ ó $p\ A\ q^T$ matrices

A primera vista, tales estrategias parecen expresar un comportamiento conservativa o pesimista, la actitud en el escenario del caso-peor, la razón para considerar estrategias máximin / minimax es probado por NEWMAN.
VON NEUMAN mostró [3] que para todo juego matricial A, tiene un número real $v = v(A)$, con las siguientes propiedades:

1. Una estrategia p del jugador 1 garantiza un pago de al menos v para el jugador 1.(i.e, $p\ A\ q \geq v \quad , \quad \forall q$, de estrategias para el jugador 2) sí y solamente si p es una estrategia máximin.

2. Una estrategia q del jugador 2 garantiza un pago de a lo más v para el jugador 2 al jugador 1. (i.e, $p\ A\ q \leq v$, para toda estrategia p del jugador 1) sí y solamente si q es una estrategia minimax.

donde, el jugador 1 puede obtener un pago de a lo menos v pero jugando una estrategia máximin y el jugador 2 puede garantizar un pago de no más que v donde asegura un pago de al menos $-v$, pero jugando una estrategia minimax.
Por estas razones, el número $v = v(A)$ se llama el valor del juego A y las estrategias máximin y minimax se llaman estrategias óptimas para los jugadores 1 y 2, respectivamente.
Por lo tanto desarrollar el juego A consta determinar las estrategias óptimas y el valor del juego.
En la batalla del mar Bismark, la estrategia pura N de ambos jugadores garantiza la misma cantidad de 2. Por lo tanto, es el valor del juego y N es la estrategia óptima para ambos jugadores.
El análisis del juego es fácil cuando este tiene un "punto silla", a saber la posición $(1, 1)$ con $a_{11} = 2$.

[3] la demostración de Von Newman se verá en la sección 2.1.3

DEFINICIÓN 2.3. *(Punto silla)*
Una posición (i, j) en un juego matricial A es un punto silla si:

$$a_{ij} \geq a_{kj} \quad \forall k = 1, \ldots, m \qquad y \qquad a_{ij} \leq a_{ik} \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

i.e, si a_{ij} es máximal en su columna j y mínimo en su fila i.

Si (i, j) es un punto silla, entonces el jugador 1 puede garantizar un pago de al menos a_{ij} pero jugando la estrategia pura, fila i, donde a_{ij} es mínimo en su fila i.
Similarmente, el jugador 2 puede garantizar un pago de al menos $-a_{ij}$ pero jugando la estrategia pura, columna j, donde a_{ij} es el valor del juego matricial A: $v(A) = a_{ij}$, e^i es una estrategia optimal (máximin) del jugador 1 y e^j es una estrategia optimal (minimax) del jugador 2.

2.1.2. *Resolviendo juegos*

En esta sección se desarrolla juegos matriciales donde a lo menos uno de los jugadores tiene dos estrategias puras. Se muestra como la idea de dominación estricta sirve de ayuda para resolver juegos matriciales.

Juegos de matriz 2×2

En este tipo de juegos se usa la teoría de matrices para determinar las estrategias óptimas. Este es un juego en el cual cada jugador sólo tiene la posibilidad de hacer dos jugadas[4]. En este caso, la matriz de pagos es una matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

[4]las estrategias puras son también llamadas jugadas

Si el juego matricial A tiene un punto silla, se puede determinar las estrategias óptimas de los jugadores, si por el contrario este juego no tuviera punto silla, se procede de la siguiente manera:

Se calcula primero el pago esperado para dos estrategias arbitrarias p y q, $p\,A\,q$.

Sea $p = (p_1, p_2)$ y $q = (q_1, q_2)$

$$
\begin{aligned}
p\,A\,q &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_i q_j a_{ij} \\
p\,A\,q &= \sum_{i=1}^{2} p_i(q_1 \cdot a_{i1} + q_2 \cdot a_{i2}) \\
p\,A\,q &= p_1(q_1 \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12}) + p_2(q_1 \cdot a_{21} + q_2 \cdot a_{22}) \\
p\,A\,q &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12} \\ q_1 \cdot a_{21} + q_2 \cdot a_{22} \end{bmatrix} \\
p\,A\,q &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \boxed{p\,A\,q = p^T\,A\,q = p\,A\,q^T} \tag{2.1}$$

luego de (2.1) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
p\,A\,q &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\
p\,A\,q &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12} \\ q_1 \cdot a_{21} + q_2 \cdot a_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$p\,A\,q = a_{11}.p_1.q_1 + a_{12}.p_1.q_2 + a_{21}.p_2.q_1 + a_{22}.p_2.q_2 \cdots (*_1)$$

Como $p_1 + p_2 = 1$ y $q_1 + q_2 = 1 \cdots (*_2)$

pueden sustituirse $p_2 = 1 - p_1$ y $q_2 = 1 - q_1$ en $(*_1)$, obteniéndose

$$p\,A\,q = a_{11}.p_1.q_1 + a_{12}.p_1.(1 - q_1) + a_{21}.(1 - p_1).q_1 + a_{22}.(1 - p_1).(1 - q_1)$$

reordenando los términos de la ecuación se llega a:

$$p\ A\ q = [(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})p_1 - (a_{22} - a_{21})]q_1 + (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22} \cdots (*_3)$$

Examinando el coeficiente del término en q_1 de $(*_3)$, se ve que, se se hace:

$$p_1 = p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \cdots (*_4)$$

ese coeficiente es cero y la ecuación $(*_3)$ se reduce a:

$$p^*\ A\ q = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \cdots (*_5)$$

la ecuación $(*_5)$ es independiente de q, si el jugador 1 escoge la estrategia determinada por p_1^*, el jugador 2 no puede variar el pago esperado cambiando su estrategia.

De forma análoga, se demuestra que si el jugador 2 escoge la estrategia :

$$q_1 = q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \cdots (*_6)$$

con la sustitución en $(*_3)$, se obtiene:

$$p\ A\ q^* = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \cdots (*_7)$$

las ecuaciones $(*_7)$ y $(*_5)$ demuestran que

$$p^*\ A\ q = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = p\ A\ q^*$$

se tiene que:

$$p^* A q^* = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$\therefore \qquad p^*\ A\ q = p^*\ A\ q^* = p\ A\ q^*$$

para todas las estrategias p y q. Por consiguiente por el Teorema de MINIMAX de VON NEWMAN, se tendrá que las estrategias determinadas por las ecuaciones $(*_4)$ y $(*_6)$ son óptimas respectivamente, para los jugadores 1 y 2.

Lo anterior se resume en el siguiente Teorema, en el que los valores correspondientes a p_2^* y q_2^* se calcula por medio de la ecuación $(*_2)$.

TEOREMA 2.1. *Las estrategias óptimas para los jugadores 1 y 2 en un juego matricial* 2×2 *que no tiene punto silla, son*

$$p^* = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} & \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{bmatrix}$$

y

$$q^* = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{bmatrix}$$

y el valor del juego es:

$$v=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

Juegos $2 \times n$

Considerando el siguiente juego 2×4:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e^1 & e^2 & e^3 & e^4 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se tiene etiquetadas las columnas, i.e., las estrategias puras del jugador 2 bajo referencia.

Dado $p = (p, 1-p)$ es una estrategia arbitraria del jugador 1.

Los pagos esperados del jugador 1, si el jugador 2 juega una estrategia pura es igual a:

$$
\begin{aligned}
pAe^1 &= 10.p + 2.(1-p) &= 8.p + 2 \\
pAe^2 &= 2.p + 10.(1-p) &= 10 - 8.p \\
pAe^3 &= 4.p + 8.(1-p) &= 8 - 4.p \\
pAe^4 &= p + 12.(1-p) &= 12 - 11.p
\end{aligned}
$$

Graficamente estas cuatro funciones lineales de p en un diagrama:

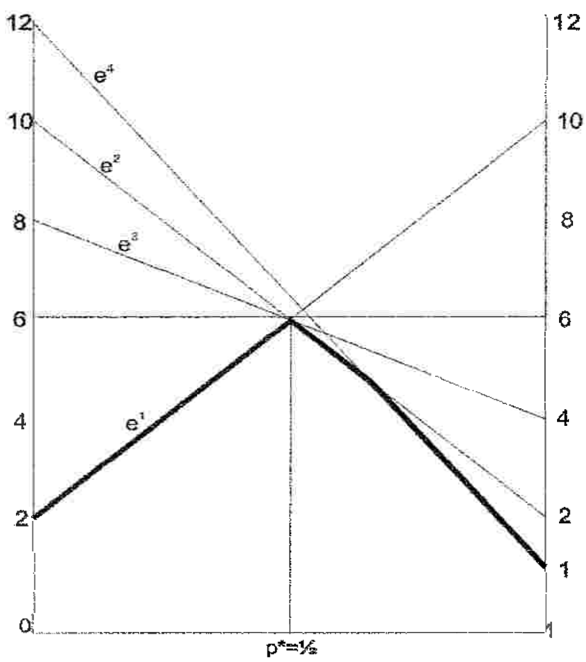


Figura 2.1

En este diagrama los valores de p son graficados en el eje horizontal y las cuatro líneas gráfica los pagos del jugador 1 si el jugador 2 juega uno de sus cuatro estrategias puras, respectivamente.
Observe que para todo $0 \leq p \leq 1$ el pago mínimo que el jugador 1 puede obtener es dado por la curva gruesa negra en el diagrama.
Para algún P, una combinación (q_1,q_2,q_3,q_4) de los puntos en e^1,e^2,e^3,e^4 con primera coordenada p. Claramente en la curva negra se obtiene el valor máximal para $p = p^* = \frac{1}{2}$, y el valor máximal es 6. Donde, se tiene establecido que el jugador 1 tiene una única estrategia óptima (máximin), correctamente

$$p^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad \text{y el valor del juego} \quad v(A) = 6$$

¿Cuáles son las estrategias óptimas o minimax del jugador 2?
De la teoría de la sección previa se conoce que una estrategia minimax $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ del jugador garantiza al jugador 2 tener que pagar a lo más el valor del juego. Del diagrama es claro que $q_4 = 0$, sino el pago del jugador 1 es más amplio que 6 si el jugador 1 juega $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, y de esta manera q no puede ser una estrategia minimax.
Donde una estrategia minimax tiene la forma $(q_1, q_2, q_3, 0)$, del diagrama diremos que es una combinación de las tres líneas asociadas con e^1, e^2 y e^3, que pasa alrededor del punto $(\frac{1}{2}, 6)$ donde todas las tres lineales asociadas pasan por este punto. Además, para ningún valor de p esta linea excede el valor 6, de a lo más 6 por el jugador 2.
Conserventemente esta linea tiene que ser horizontal.
Se observa para los números
$q_1, q_2, q_3 \geq 0$ tal que:

$$\begin{aligned}
2q_1 + 10q_2 + 8q_3 &= 6 \quad \cdots \quad \text{(punto final izquierda es } (0,6)) \\
10q_1 + 2q_2 + 4q_3 &= 6 \quad \cdots \quad \text{(punto final derecha es } (1,6)) \\
q_1 + q_2 + q_3 &= 1 \quad \cdots \quad (q \text{ es vector probabilidad})
\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones es fácilmente reducido[5] a las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}
3q_1 - q_2 &= 1 \\
q_1 + q_2 + q_3 &= 1
\end{aligned}$$

la primera ecuación implica que si $q_1 = \frac{1}{3}$, entonces $q_2 = 0$ y si $q_1 = \frac{1}{2}$ entonces $q_2 = \frac{1}{2}$

La linea negra son los valores pedidos.

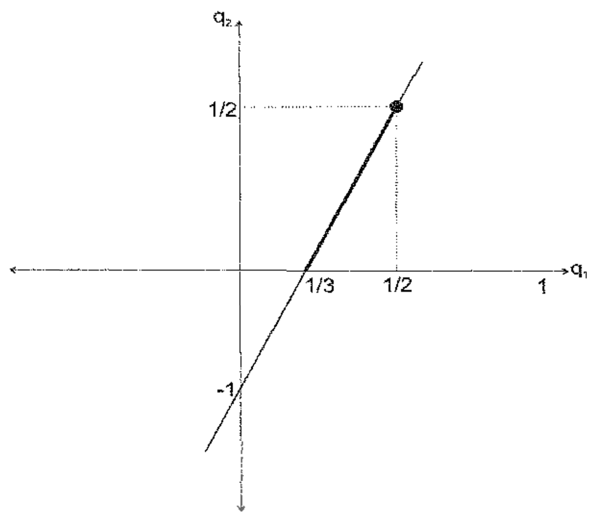


Figura 2.2

Claramente q_1, q_2 no puede ser amplio donde entonces su suma excede a

[5]Para la instancia por sustitución. En realidad una de las dos primeras ecuaciones pueden ser omitidas para encontrar que la combinación de las tres líneas pasen por $(\frac{1}{2}, 6)$ y dos puntos son suficientes para determinada.

1. Donde el conjunto de estrategias óptimas del jugador 2 es:

$$\left\{q = (q_1,q_2,q_3,q_4) \in \mathbb{R}^4 / \frac{1}{3} \leq q_1 \leq \frac{1}{2}, q_2 = 3q_1 - 1, q_4 = 0\right\}$$

Juegos $m \times 2$

El método de solución para resolver juegos $m \times 2$ es análogo.

El siguiente ejemplo:

$$A = \begin{array}{c} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \\ e^4 \end{array} \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \\ 4 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Dado $q = (q, 1-q)$ es una estrategia arbitraria del jugador 2. Además se hará un diagrama en donde ahora los valores de q se ponen en el eje horizontal, y las líneas rectas indicadas por e^i, para $i = 1, 2, 3, 4$; son los pagos esperados del jugador 1 asociado con sus cuatro estrategias puras (filas) como funciones de q.

Las ecuaciones de estas líneas son dadas por:

$$\begin{aligned} e^1 Aq &= 10q + 2(1-q) &&= 8q + 2 \\ e^2 Aq &= 2q + 10.(1-q) &&= 10 - 8q \\ e^3 Aq &= 4q + 8.(1-q) &&= 8 - 4q \\ e^4 Aq &= q + 12.(1-q) &&= 12 - 11q \end{aligned}$$

Resultan el diagrama:

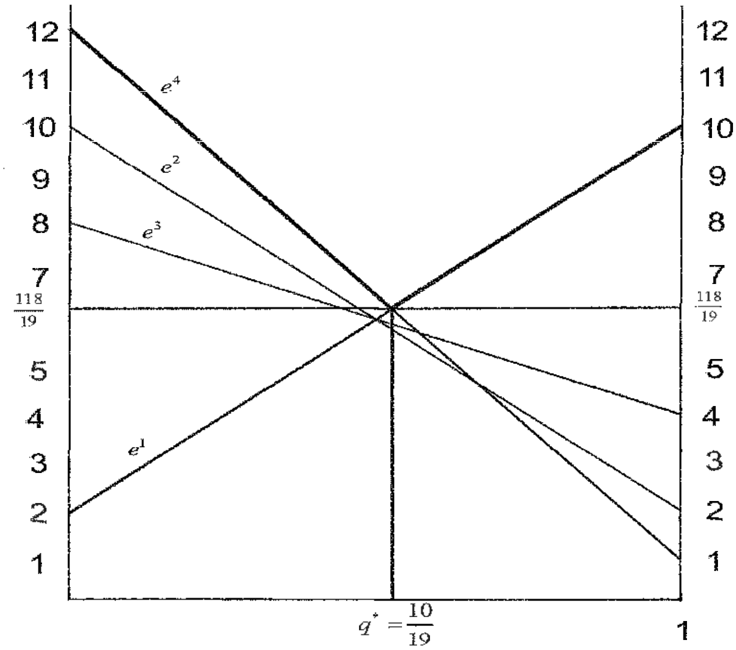


Figura 2.3

Observe que el máximo pago que el jugador 2 tiene que dar 118/19, ahora es localizado sobre la linea negra. El mínimo es alcanzado en el punto de intersección de e^1 y e^4 en el diagrama, cuando tiene coordenadas $(\frac{10}{19}, \frac{1}{1}\frac{9}{9})$. Donde el valor del juego es $\frac{118}{19}$ y la única estrategia óptima (minimax) del jugador 2 es $q^* = (\frac{10}{19}, \frac{9}{19})$.

Para las estrategias óptimas o estrategias $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ del jugador 1, se sigue del diagrama que $p_2 = p_3 = 0$, de otra manera para $q = \frac{10}{19}$ el valor $\frac{118}{19}$) del juego no es encontrado, así que p no es estrategia maximin.

Así como nosotros observamos para una combinación de e^1 con e^4, la cual será mayor que $\frac{118}{9}$ para todo q, donde este tiene que ser igual a $\frac{11}{198}$ para todo q.

Resumiendo este argumento,

$$\begin{aligned} 2p_1 + 12p_4 &= \tfrac{118}{19} \\ 10p_1 + p_4 &= \tfrac{118}{19} \\ p_1 + p_4 &= 1 \end{aligned}$$

y resolviendo estas ecuaciones obtendremos una solución única.

$$p_1 = \frac{11}{19} \quad \text{y} \quad p_4 = \frac{8}{19}$$

Por consiguiente la estrategia óptima del jugador 1 es $(\frac{11}{19}, 0, 0, \frac{8}{19})$

Dominación Estricta

La idea de dominación estricta se usa para eliminar estrategias puras antes del análisis gráfico de un juego matricial.

Considerar el juego:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e^1 & e^2 & e^3 & e^4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se considera una estrategia $(\alpha, 1-\alpha, 0, 0)$ del jugador 2.

El pago esperado de esta estrategia del jugador 2 al jugador 1 es $8\alpha + 2$ si el jugador 1 juega la primera fila y $10 - 8\alpha$ si el jugador 1 juega la segunda fila. Para algún valor $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{8}$, el primer número es menor que 5 y el segundo número es menor que 8. Donde esta estrategia es estrictamente mejor que jugando su estrategia pura e^3, por ningún motivo le convendría jugar e^3. Pero entonces, para una estrategia $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ del jugador 2 con $q_3 > 0$, el pago esperado al jugador 2 puede llegar a ser estrictamente grande (su pago al jugador q es estrictamente pequeño) pero transfiriendo la probabilidad q_3 a la primera y segunda estrategia pura en alguna proporción favorable α , i.e. pero jugando $(q_1 + \alpha q_3, q_2 + (1-\alpha)q_3, 0, q_4)$ para algún $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{8}$, en lugar de q.

Donde, en una estrategia óptima (minimax) se tiene que $q_3 = 0$.

Esto implica que, para desarrollar el juego, se puede comenzar por eliminar la tercera columna de la matriz. El valor del juego es siempre 6, y el jugador 1 siempre tiene una única estrategia óptima $p^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, y el jugador 2 ahora también tiene una única estrategia óptima, a saber donde $q_3 = 0$, donde es la estrategia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.

En general las estrategias puras estrictamentes dominadas en un juego matricial no son jugados con probabilidad positiva es una estrategia óptima y puede por lo tanto ser eliminado antes de desarrollar el juego. Usualmente, esta idea puede ser usada para desarrollar juegos matriciales en donde cada jugador tiene más que dos estrategias puras $(m, n > 2)$.

Además, la idea es aplicada iterativamente, después de eliminar a todas las estrategias puras estrictamente dominadas.

DEFINICIÓN 2.4. *(Dominación estricta)*

Dado A un juego matricial $m \times n$ y i una fila, la estrategia pura e^i es estrictamente dominada si hay una estrategia $p = (p_1, \ldots, p_m) \in \Delta^m$ con $p_i = 0$ tal que $pAe^j > e^iAe^j$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Dada j una columna, la estrategia pura e^j es estrictamente dominada si ahí hay una estrategia $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \Delta^n$ con $q_j = 0$ tal que:

$$e^i Aq < e^i Ae^j \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

***Ejemplo* 2.1.** Considerar el siguiente juego matricial 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el jugador 1, la tercera estrategia pura e^3 es estrictamente dominada por la estrategia $p = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12}, 0)$, donde $p\ A = (3\frac{1}{2}, 2\frac{12}{1}, 2\frac{5}{6})$ tiene estrictamente todas las coordenadas mayores que $e^3 A = (3, 2, 1)$.

Donde, en una estrategia óptima del jugador 1 pondremos la probabilidad cero en la tercera fila. Eliminando a esta fila resultaría la matriz.

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora, la tercera estrategia del jugador 2 (e^3) es estrictamente dominada por la estrategia $q = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$, donde $B\ q = (\frac{3}{2}, 3\frac{3}{4})$, donde tiene todas las coordenadas son estrictamente menores que $B\ e^3 = (2, 4)$.

Donde en una estrategia óptima para el jugador 2, pondremos probabilidad cero en la tercera columna.

Eliminando a esta columna resulta la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Este es un jnego matricial 2×2, donde puede ser desarrollado por el teorema (2.1) de la sección (2.1.2).

Aplicando el teorema mencionado, el juego matricial no tiene puntos sillas.

Luego:

$$a_{11} = 6 \quad , \quad a_{12} = 0 \quad , \quad a_{21} = 0 \quad , \quad a_{22} = 5$$

- $$\begin{aligned} p^* &= \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\right) \\ p^* &= \left(\frac{5-0}{6+5-0-0}, \frac{6-0}{6+5-0-0}\right) \\ p^* &= \left(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}\right) \quad \text{Estrategia óptima del jugador 1} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} q^* &= \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\right) \\ q^* &= \left(\frac{5-0}{6+5-0-0}, \frac{6-0}{6+5-0-0}\right) \\ q^* &= \left(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}\right) \quad \text{Estrategia óptima del jugador 2} \end{aligned}$$

Y el valor del juego es:

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Reemplazando:

$$v = \frac{6{,}5 - 0{,}0}{6 + 5 - 0 - 0} = \frac{30}{11}$$

$$\therefore \quad \boxed{v = \frac{30}{11}} \quad \text{El valor del juego.}$$

En el juego original las estrategias óptimas son $(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}, 0)$ para el jugador 1 y $(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}, 0)$ para el jugador 2.

2.1.3. *El teorema del Minimax*

En esta sección se estudia juegos finitos para dos personas Suma cero-juegos matriciales-más rigurosamente, que se ha visto en la sección 2.1.1. Haciendo uso de estas definiciones se prueba el Teorema de Von Newman del Minimax.

Dado A un juego matricial $m \times n$. Para nna estrategia $p \in \Delta^m$ del jugador 1,

$$v_1(p) = \min_{q \in \Delta^n} pAq = \min_{j \in \{1,\dots,n\}} pAe^j$$

Es fácil ver que $\min\limits_{j \in \{1,\dots,n\}} pAe^j$, donde pAq es combinación convexa de los números pAe^j.

En el juego matricial A el jugador 1 puede garantizar un pago de al menos

$$v_1(A) = \max_{p \in \Delta^m} v_1(p)$$

Similarmente, para una estrategia $q \in \Delta^n$ del jugador 2, daremos

$$v_2(q) = \max_{p \in \Delta^m} pAq = \max_{i \in \{1,\dots,m\}} e^i Aq$$

entonces el jugador 2 puede garantizar un pago de a lo más

$$v_2(A) = \min_{q \in \Delta^n} v_2(q)$$

Intuitivamente, el jugador 1 no puede garantizar de obtener más que el jugador 2 puede garantizar su pago máximo.

***Lema* 2.1.** Para un juego matricial A de $m \times n$.

$$v_1(A) \leq v_2(A)$$

TEOREMA 2.2. *(**Teorema de Minimax**) Para un juego matricial A de $m \times n$.*

$$v_1(A) = v_2(A)$$

Demostración. Supóngase que A es un juego matricial $m \times n$. Entonces (1) o (2) en el Teorema Alternativo para matrices tiene que cumplir:

- Primero, supongamos que (1) cumple

  $\exists y \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^m$ con $(y, z) \geq 0$, $(y, z) \neq 0$ y $Ay + z = 0$

  Este no puede ser que $y = 0 \implies z = 0 \quad (\Longrightarrow\Longleftarrow)$

  Donde:

  $$\sum_{k=1}^{n} y_k > 0$$

  Definamos $q \in \Delta^n$ por $q_j = \frac{y_j}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \quad \forall j = 1, \ldots, n$

  $$\implies \qquad Aq = \frac{-z}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \leq 0$$

  Donde $v_2(q) \leq 0$, y por consiguiente

  $$v_2(A) \leq 0$$

- Supongamos que (2) cumple

  $\exists x \in \mathbb{R}^m$ con $x > 0$ y $X.A > 0$

  Definamos $p \in \Delta^m$, por $p = \frac{x}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \Longrightarrow v_1(p) > 0$ y por consiguiente

$$v_1(A) > 0$$

Nosotros concluimos que, para algún juego matricial A, no es posible tener

$$v_1(A) \leq 0 < v_2(A)$$

fijemos algún juego matricial β, y supongamos que $v_1(\beta) < v_2(\beta)$. Se encuentra una contradicción.

Dado A un juego matricial produciendose por sustracción de los números $v_1(\beta)$ de todas las encontradas de β.

Entonces,

$$v_1(A) = v_1(\beta) - v_1(\beta) = 0$$

y

$$v_2(A) = v_2(\beta) - v_1(\beta) > 0$$

Donde:

$$v_1(A) \leq 0 < v_2(A) \qquad (\Longrightarrow\Longleftarrow)$$

$\square$

2.2. Juegos finitos de suma no-cero para dos personas

Este capítulo considera juegos con dos jugadores donde cada jugador elige estrategias puras finitas o aleatoriamente entre estas estrategias.

En contraste al capítulo 2.1, que no es requerible que la suma de los pagos de los jugadores sea cero (o equivalentemente constante).
Esto se tiene en cuenta para muchas clases de juegos, incluyendo muchos juegos relevantes de economía u otras aplicaciones. Conocidos ejemplos son los "Dilema del Prisionero" y la "Batalla de los sexos".
En la sección 2.2.1, se introduce el modelo y concepto de "Equilibrio de Nash".
Sección 2.2.2 se muestra como calcular el equilibrio de Nash en estrategias puras para un juego arbitrario, todos los equilibrios de Nash en juegos donde ambos jugadores tienen exactamente dos estrategias puras, además del método de la extensión gráfica para los juegos matriciales 3×2 y 2×3 y como usar el concepto de Dominación estricta para facilitar el cálculo de los equilibrios de Nash y calcular el equilibrio también de juegos amplios.

2.2.1. *Definiciones y Teoría básica*

Los datos de un juego finito para dos personas pueden ser resumidos por dos matrices. Normalmente, estas matrices son escritas en una matriz con dos números en cada posición.
Dichos juegos son a menudo llamados "Juegos Bimatriciales"la definición formal es como sigue:

DEFINICIÓN 2.5. ***(Juego Bimatricial)*** *Un juego Bimatricial es un par de matrices $m \times n$ (A, B), donde m y n son enteros mayores que o igual que 1.*

La interpretación como tal de un juego bimatricial (A, B) es que, si el jugador 1 (el jugador fila) juega la fila i y el jugador 2 (jugador columna) juega la columna j, entonces el jugador 1 recibe un pago a_{ij} y el jugador 2 recibe $b_{ij,}$ donde estos números son las correspondientes entradas de A y B respectivamente.

Definiciones y notaciones para estrategias puras y mixtas, conjunto de estrategias y pago esperado es similar esto a juegos matriciales.

Una estrategia (mixta) del jugador 1, es una distribución de probabilidad p sobre las filas de A, i.e. Un elemento del conjunto.

$$\Delta^m = \{p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m \quad / \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \quad , \quad p_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, m\}$$

Similarmente,

Una estrategia (mixta) del jugador 2, es una distribución de probabilidad q sobre las columnas de A, i.e. Un elemento del conjunto.

$$\Delta^n = \{q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \quad , \quad q_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots, n\}$$

Una estrategia p del jugador 1 es llamada PURA si ahí hay una fila i con $p_i = 1$.

Esta estrategia se denota por e^i.

Una estrategia q del jugador 2 es llamada pura si ahí hay una columna j con $q_j = 1$.Esta estrategia se denota por e^j.

Si el jugador 1, juega la estrategia p y el jugador 2 la estrategia q entonces el pago esperado para el jugador 1.

$$\boxed{p \quad A \quad q = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j}$$

y el pago para el jugador 2, es el pago esperado

$$\boxed{p \quad B \quad q = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j}$$

Como mencionamos, los enteros de A y B son normalmente agrupados en común en una matriz, pero expresa el par (a_{ij}, b_{ij}) en la posición (i, j) de la matriz.

La parte central de la Teoría de Juegos no-cooperativos es la idea de mejor respuesta. Es decir, que un jugador racional egoistamente siempre maximize su pago esperado, dando su conocimiento o conjetura sobre las estrategias elegidas por el otro jugador.

DEFINICIÓN 2.6. ***(Mejor Respuesta)*** *Una estrategia p del jugador 1 es una mejor respuesta para una estrategia q del jugador 2 en un juego bimatricial $m \times n$ (A, B) si*

$$p\,A\,q \geq p'\,A\,q \quad , \quad \forall p' \in \Delta^m$$

Similarmente q es una mejor respuesta del jugador 2 para p si

$$p\,B\,q \geq p\,B\,q' \quad , \quad \forall q' \in \Delta^n$$

En un "Equilibrio de Nash", cada estrategia del jugador es una mejor respuesta para la otra estrategia del jugador.

DEFINICIÓN 2.7. ***(Equilibrio de Nash)*** *Un par de estrategias (p^*, q^*), en un juego bimatricial (A, B) es un Equilibrio de Nash. Si p^* es una mejor respuesta del jugador 1 para q^* y q^* es una mejor respuesta del jugador 3 para p^*.*

Un equilibrio de Nash es llamada pura si ambos p^* y q^* son estrategias puras.

El concepto de un Equilibrio de Nash puede ser extendido a bastantes juegos arbitrarios, incluyendo juegos con un número arbitrario de jugadores, conjuntos de estrategias y funciones de pago.

Para juegos finitos de dos personas, Nash probó que todo juego tiene un Equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

2.2.2. *Encontrando Equilibrios de Nash*

Para encontrar todos los Equilibrios de Nash de un juego bimatricial arbitrario es una tarea difícil.
Aquí se encuentra todos los equilibrios de Nash en estrategias puras de un juego arbitrario bimatricial y mostraremos como se encuentra todos los equilibrios de Nash en juegos 2×2, 2×3 y 3×2 gráficamente.
Para juegos amplios, soluciones gráficas son impracticables o verdaderamente imposibles.

Equilibrio de Nash Pura

Para hallar los equilibrios de Nash pura en un juego bimatricial, uno puede primero determinar las mejores respuestas puras del jugador 2 para toda estrategia pura del jugador 1, y siguiente determinaremos las mejores respuestas puras del jugador 1, para toda estrategia pura del jugador 2.
Estos pares de estrategias puras que son común mejor respuesta son los Equilibrios de Nash Pura del juego.
Para ilustrar el método, consideremos el juego bimatricial.

$$\begin{array}{c} \\ T \\ M \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,2 & 4,0 & 1,1 & 3,2 \\ 0,3 & 1,5 & 4,4 & 3,4 \\ 2,0 & 2,1 & 5,1 & 1,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Primero, se determina las mejores respuestas puras del jugador 2 para toda estrategia pura del jugador 1, indicado por las estrellas en los enteros correspondientes. Esto quedará:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2{,}2^{\star} & 4{,}0 & 1,1 & 3{,}2^{\star} \\ 0{,}3 & 1{,}5^{\star} & 4{,}4 & 3{,}4 \\ 2{,}0 & 2{,}1^{\star} & 5,1^{\star} & 1{,}0 \end{pmatrix} \end{array}$$

lo siguiente, se determina las mejores respuestas puras del jugador 1 para todas las estrategias puras del jugador 2, además la indicamos por las estrellas en los enteros correspondientes. Esto nos da:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2^{\star},2 & 4^{\star}{,}0 & 1,1 & 3^{\star},2 \\ 0,3 & 1{,}5 & 4,4 & 3^{\star}{,}4 \\ 2^{\star}{,}0 & 2,1 & 5^{\star},1 & 1{,}0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Escribiendo los dos resultados juntos obtendremos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2^{\star},2^{\star} & 4^{\star}{,}0 & 1{,}1 & 3^{\star},2^{\star} \\ 0{,}3 & 1,5^{\star} & 4{,}4 & 3^{\star}{,}4 \\ 2^{\star}{,}0 & 2,1^{\star} & 5^{\star},1^{\star} & 1,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se concluye que el juego tiene tres Equilibrios de Nash en estrategias puras, correctamente (T,w), (T,z) y (B,y).

En notación de estrategias mixtas, estos son los pares (e^1, e^1), (e^1, e^4) y (e^3, e^3) respectivamente. En notación mas extensiva:

$((1,0,0),(1,0,0,0))$; $((1,0,0),(0,0,0,1))$ y $((1,0,0),(0,0,1,0))$, respectivamente.

Estrictamente hablando, uno debe también considerar mejores respuestas mixtas a una estrategia pura en orden a establecer si su estrategia pura puede encontrarse en un Equilibrio de Nash, pero ello no es difícil ver que una mejor respuesta mixta es una combinación de mejores respuestas puras, y de esta manera, puede nunca a llevar a un pago mayor.

Para instancia en el ejemplo anterior, una estrategia de la forma $(q, 0, 0, 1-q))$ jugado en contra de T, produciríamos al jugador 2 un pago de 2 $(= 2q+2(1-q))$ y es por consiguiente una mejor respuesta, pero no produce un pago mayor que w o z.

Sin embargo, se puede probar que todos los pares de estrategias de la forma. $(T, (q, o, o, 1-q))$ $(0< q < 1)$ son Equilibrios de Nash en este juego.

El par de pago (4,4), resultando de (M,y) es mejor para ambos jugadores que el pago equilibrio (2, 2), resultando de (T, w).

Juegos 2×2

La mejor forma para demostrar el método de solución gráfica para juegos 2×2 es por medio de un ejemplo.

Se considera el juego bimatricial:

$$(A,B) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2 & 0,1 \\ 1,1 & 3,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observe que este juego tiene dos Equilibrios de Nash se determinará las mejores respuestas de ambos jugadores.

Primero, consideremos la estrategia $(q, 1-q)$ del jugador 2, la mejor respuesta del jugador 1 a esta estrategia es T o equivalente $(1, 0)$, si el pago esperado de jugar T es mayor que el pago esperado de jugar B, donde entonces es también mayor que el pago esperado de jugar una combinación $(p, 1-p)$ de T y B.

Donde, la mejor respuesta es T si de esta forma

$$\begin{aligned} 2.q + 0.(1-q) &> 1q + 3(1-q) \\ 4q &> 3 \\ q &> \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Similarmente, se encuentra que B es la mejor respuesta si $q < \frac{4}{3}$ y que B y Tson mejores respuestas si $q = \frac{3}{4}$

En el último caso, donde T y B muestra el mismo pago al jugador 1 en contra de $(q, 1-q)$, es que $(p, 1-p)$ es una mejor respuesta.

Resumiendo, si se denota el conjunto de mejores respuestas del jugador 1 en contra de $(q, 1-q)$ por $\beta_1(q, 1-q)$, se tiene:

$$\beta_1(q, 1-q) = \begin{cases} \{(1,0)\} & \text{si} \quad \frac{3}{4} < q < 1 \\ \{(p, 1-p)/0 \leq p \leq 1\} & \text{si} \quad q = \frac{3}{4} \\ \{(0,1)\} & \text{si} \quad 0 \leq q < \frac{3}{4} \end{cases}$$

Por argumentos análogos, se encuentra que para una estrategia $(p, 1-p)$ las mejores respuestas $\beta_2(p, 1-p)$ del jugador 2 es dado por:

$$\beta_2(p,1-p) = \begin{cases} \{(1,0)\} & \text{si} \quad \frac{2}{3} < p < 1 \\ \{(q,1-q)/0 \leq q \leq 1\} & \text{si} \quad p = \frac{2}{3} \\ \{(0,1)\} & \text{si} \quad 0 \leq p < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Por definición, los equilibrios de Nash del juego es la combinación de las estrategias (p^*,q^*), donde$p^* \in \beta_1(q^*)$ y $q^* \in \beta_2(p^*)$.

i.e. los puntos de intersección de las funciones mejores respuestas en $\beta_1(q, 1-q)$ y $\beta_2(p, 1-p)$.

Una forma conveniente para encontrar estos puntos es dibujando las gráficas de $\beta_1(q, 1-q)$ y $\beta_2(p, 1-p)$.

Nosotros, pondremos p en el eje horizontal y q en el eje vertical y se obtiene el siguiente diagrama.

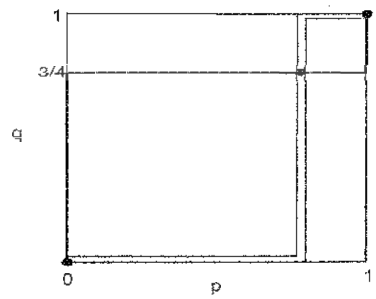


Figura 2.4

la curva sólida negra es la función de mejor respuesta del jugador 1 y la otra curva es la función de la mejor respuesta del jugador 2; los tres puntos indican los tres equilibrios de Nash del juego:

$$((1,0),(1,0)),\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\right) \text{ y } ((0,1),(0,1))$$

Juegos 2×3 ***y*** 3×2

En la sección anterior se ha visto juegos bimatriciales 2×2 gráficamente. Ahora se extiende este método para juegos 2×3 y 3×2. Para juegos amplios este llega a ser imposible o impracticable al usar este método gráfico. Consideremos el juego bimatricial 2×3

$$\begin{pmatrix} 2,1 & 1,0 & 1,1 \\ 2,0 & 1,1 & 0,0 \end{pmatrix}$$

los equilibrios de Nash de este juego son elementos del conjunto $\Delta^2 \times \Delta^3$ de todas las posibles combinaciones estrategicas. Este conjunto es representado en la figura 2.5

Donde el jugador 2 elige un punto en el triángulo con vértices e^1, e^2 y e^3,

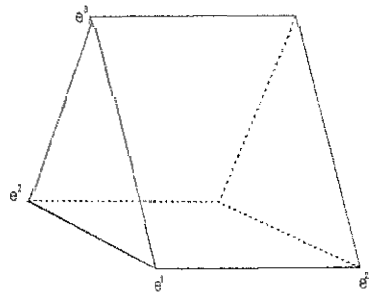


Figura 2.5: El conjunto $\Delta^2 \times \Delta^3$

mientras que el jugador 1 elige un punto del segmento de linea horizontal con vértices e^1 y e^2.

Para determinar en orden, se determina las mejores respuestas del jugador 1, notar que

$$A\, q = \begin{pmatrix} 2q_1 + q_2 + q_3 \\ 2q_1 + q_2 \end{pmatrix}$$

Como

-
$$\begin{aligned} e^1\, A\, q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2q_1 + q_2 + q_3 \\ 2q_1 + q_2 \end{pmatrix} \\ e^1\, A\, q &= 2q_1 + q_2 + q_3 + 0.(2q_1 + q_2) \\ e^1\, A\, q &= 2q_1 + q_2 + q_3 \end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned} e^2\, A\, q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2q_1 + q_2 + q_3 \\ 2q_1 + q_2 \end{pmatrix} \\ e^2\, A\, q &= 0.(2q_1 + q_2 + q_3) + 1.(2q_1 + q_2) \\ e^2\, A\, q &= 2q_1 + q_2 \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} e^1\, A\, q &= e^2\, A\, q \\ 2q_1+q_2+q_3 &= 2q_1 + q_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{q_3 = 0}$$

Si $q_3 > 0$, tendríamos que $e^1\ A\ q > e^2\ A\ q$, por la cual e^1 sería la mejor respuesta.

Resumiendo esto:

$$\beta_1(q) = \begin{cases} \{e^1\} & \text{si} \quad q_3 > 0 \\ \{\Delta^2\} & \text{si} \quad q_3 = 0 \end{cases}$$

Estas mejores respuestas están representadas en la figura 2.6

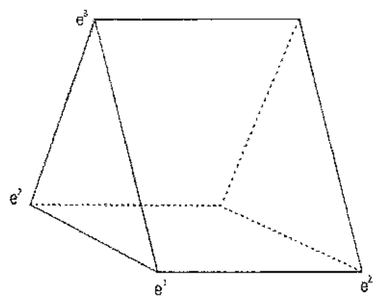


Figura 2.6

Similarmente

$$\begin{aligned} p\,B &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ p\,B &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como:

- $$p\,B\,e^1 = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = p_1$$

- $$p\,B\,e^2 = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p_2$$

- $$p\,B\,e^3 = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = p_1$$

Implica que:

$$\beta_2(p) = \begin{cases} \{e^2\} & \text{si} \quad p_1 < p_2 \\ \{\Delta^3\} & \text{si} \quad p_1 = p_2 \\ \{q \in \Delta^3 \ / \ q_2 = 0\} & \text{si} \quad p_1 > p_2 \end{cases}$$

Estas mejores respuestas pueden ser representadas por la figura 2.7

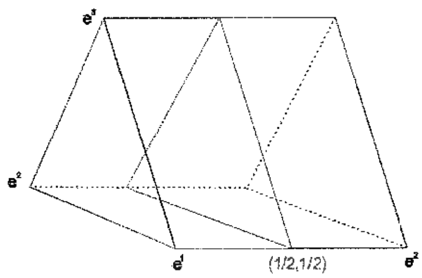


Figura 2.7

En la figura 2.8, representa la intersección de las dos mejores respuestas y de esta manera, el conjunto de los Equilibrios de Nash.

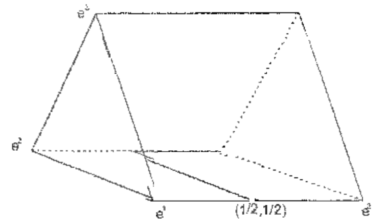


Figura 2.8

Dominación Estricta

En general, para el objeto de encontrar los equilibrios de Nash, el tamaño del juego puede ser usualmente reducido por eliminar iterativamente estrategias estrictamente dominadas.
Nosotros observamos para una estrategia estrictamente dominada de un jugador, eliminando la fila o columna asociada y continúa este procedimiento hasta que el juego quede pequeño y sin ninguna más estrategia estrictamente dominada.
En realidad, se muestra que niuguna estrategia pura que es eliminada por el procedimiento anterior es siempre jugado con probabilidad positiva en un Equilibrio de Nash del juego original. De esta manera, ningún Equilibrio de Nash del juego original es eliminado, también ningúm equilibrio de Nash es agregado.
Para completar nosotros primero repetiremos la definicón de dominación estricta, formulada para un juego bimatricial y entonces presentaremos un ejemplo.

DEFINICIÓN 2.8. ***(Dominación estricta)***

Sea (A, B) un juego bimatricial $m \times n$ y i una fila, la estrategia pura e^i es estrictamente dominada si esta es una estrategia $p = (p_1, \dots, p_m) \in \Delta^m$ con $p_i = 0$ tal que $p\ A\ e^j > e^i\ A\ e^j$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Similarmente, dado j una columna, la estrategia pura e^j es estrictamente dominada si esta es una estrategia $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \Delta^n$ con $q_j = 0$ tal que:

$$e^i\ B\ q > e^i\ A\ e^j \quad , \quad \forall\, j = 1, \dots, m$$

Consideremos el siguiente juego bimatricial

$$\begin{array}{c} \\ T \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,2 & 2,1 & 2,2 & 0,0 \\ 1,0 & 4,1 & 2,4 & 1,5 \\ 0,4 & 3,1 & 3,0 & 3,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observe primero, que ninguna estrategia pura (fila) del jugador 1 es estrictamente dominada por otra estrategia del jugador 1 y que ninguna estrategia pura (columna) del jugador 2 es estrictamente dominada por otra estrategia pura del jugador 2.

Donde x es estrictamente dominada por una estrategia de la forma $(q, 0, 1-q, 0)$ con $\frac{1}{4} < q < \frac{3}{4}$.

Donde x puede ser eliminado para obtener la matriz

$$\begin{array}{c} \\ T \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,2 & 2,2 & 0,0 \\ 1,0 & 2,4 & 1,5 \\ 0,4 & 3,0 & 3,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

En lo siguiente, observamos que este juego puede ser reducido por el jugador 1, la estrategia pura M es estrictamente dominada por una estrategia de la forma $(p, 0, 1-p)$ con $\frac{1}{2} < p < \frac{2}{3}$.

Donde M puede ser eliminado para obtener

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} w & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2 & 2,2 & 0,0 \\ 0,4 & 3,0 & 3,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Este juego puede ser desarrollado usando el método gráfico y obteniendo el resultado en el siguiente diagrama, después de las operaciones efectuadas

- $$A\,q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-2q \end{pmatrix}$$

  Luego:

  $$e^1\,A\,q = 2 \quad , \quad e^2\,A\,q = 3-2q$$

  $$\begin{aligned} \Longrightarrow\ 3-3q &= 2 \\ q &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

  Resumiendo:

  $$\beta_1(q) = \begin{cases} \{e^1\} & \text{si} \quad \frac{1}{3} < q \leq 1 \\ \{(p, 1-p),\ 0 \leq p \leq 1\} & \text{si} \quad q = \frac{1}{3} \\ \{e^2\} & \text{si} \quad 0 \leq q < \frac{1}{3} \end{cases}$$

- $$p\,B = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2p \\ 2p \end{pmatrix}$$

  $$\begin{aligned} \Longrightarrow\ 4-2p &= 2p \\ 4 &= 4p \\ p &= 1 \end{aligned}$$

  Resumiendo:

  $$\beta_2(p) = \begin{cases} \{(q, 1-q), 0 \leq q \leq 1\} & \text{si} \quad p = 1 \\ \{e^1\} & \text{si} \quad 0 \leq q < 1 \end{cases}$$

Graficando

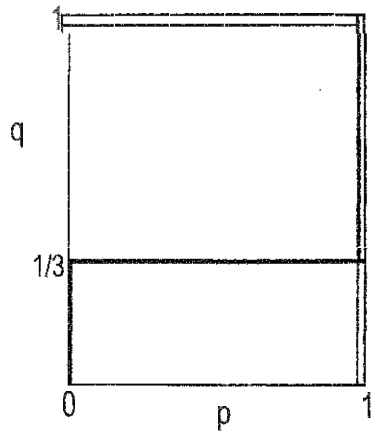


Figura 2.9

2.2.3. *Juegos Finitos*

En la sección 2.2.1, se estudió juegos finitos para dos personas-juegos bimatricialcs, la presente sección se elabora un análisis más riguroso de juegos finitos , i.e. juegos con finitamente muchos jugadores a menudo dos.
En 2.2.3 se demuestra el Teorema de la Existencia del Equilibrio de Nash y ademas la sección 2.2.3 los juegos bimatriciales.

Existencia de Equilibrio de Nash

Un juego finito es $2n + 1 - upla$

$$G = (\mathbb{N}, s_1, s_2. \ldots, s_n, \mu_1, \ldots, \mu_n)$$

donde:

- $\mathbb{N} = \{1, \ldots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. es el conjunto de jugadores.

- $\forall\, i \in \mathbb{N}$, S_i el conjunto finito de estrategias puras del jugador i.
- $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $\mu_i : S = s_1 \times \ldots \times s_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la función pago del jugador i, es decir, para toda combinación de estrategias puras $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}$ es el pago del jugador i.

Una estrategia (mixta) del jugador i es una distribución de probabilidad sobre S_i.

El conjunto de estrategias (mixtas) del jugador i es denotado por $\Delta(S_i)$.

Observe que, cuando se habla de una estrategia se quiere decir que es una estrategia mixta.

Dado $(\sigma_1, \ldots ,\sigma_n) \in \Delta(s_1) \times \ldots \times \Delta(s_n)$ es una combinación de estrategias. El pago para el jugador i de esta combinación de estrategias es definido como su pago esperado. Con algún abuso de notación este es también denotado por $\mu_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. formalmente

$$\mu_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in S} \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i(s_i) \right) \mu_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

Para una combinación de estrategias σ y un jugador $i \in \mathbb{N}$ nosotros denotamos por (σ'_i, σ_{-i}) la combinación de estrategias en donde el jugador i juega $\sigma'_i \in \Delta(s_i)$ y cada jugador $j \neq i$ juega σ_j.

Una mejor respuesta del jugador i a la combinación de estrategias σ_{-i} de los otros jugadores es una estrategia $\sigma_i \in \Delta(s_i)$ tal que $\mu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \mu_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$ $\forall\, \sigma'_i \in \Delta(s_i)$.

Un equilibrio de Nash de σ es una combinación de estrategias $\sigma^* \in \Pi_{i\in\mathbb{N}}\Delta(s_i)$ tal que para cada jugador i, σ^*_i es una mejor respuesta σ^*_{-i}.

Denotaremos a la mejor respuesta del jugador i como una correspondencia β_i. Esto es:

$$\beta_i : \Pi_{j\in\mathbb{N}, j\neq i}\Delta(s_j) \longrightarrow \Delta(s_i)$$

asignado a cada combinación de estrategias de los otros jugadores, el conjunto de todas las mejores respuestas del jugador i .

Nash probó que todo juego finito tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Formalmente:

TEOREMA 2.3. ***(Existencia de Equilibrio de Nash)*** *Todo juego finito* $G = (\mathbb{N}, s_1, s_2 \ldots, s_n, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ *tiene un Equilibrio de Nash.*

La demostración de este Teorema se basa en el teorema de Punto fijo de Kakutani.

Demostración. Considerar la correspondencia;

$$\begin{array}{rcll} \beta: & \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \Delta(s_i) & \longrightarrow & \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \Delta(s_i) \\ & (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) & \longmapsto & \beta(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \beta_i(\sigma_1, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \end{array}$$

- $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \Delta(s_i)$ **es compacto y convexo**

  El producto cartesiano de conjuntos compactos y convexos es compacto y convexo, por eso es suficiente probar que todo $\Delta(s_i)$, $i \in \mathbb{N}$, cumple con esas propiedades.

  1. $\Delta(s_i)$ es compacto

     ⋆ $\Delta(s_i)$ es cerrado

     Tomando, $a = (0, \ldots, 0)$ y $r = 1$, luego obtendremos

     $$\Delta(s_i) = \beta[a, 1] = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; |x - a|_n \leq 1\}$$

     Donde

     $$|x - a|_n = \text{máx}\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|, \ldots, |x_n - a_n|\}$$

en nuestro caso

$$|x|_n \leq 1 \Longleftrightarrow |x_1| \leq 1, \ldots, |x_n| \leq 1$$

Con esto hemos observado que $\Delta(s_i)$ es una bola cerrada de centro $(0, \ldots, 0)$ y radio 1; por consiguiente toda bola cerrada es conjunto cerrado, veamos, pues si

$$|x_k| \leq r \ , \ \forall k \quad \text{y} \quad \text{lím} x_k = b$$

entonces $|b| = \text{lím}\ |x_k| \leq r \Longrightarrow |b| \leq r$

$$\therefore\ b \in \beta((0, \ldots, 0), 1) = \Delta(s_i)$$

$\star\star$ $\Delta(s_i)$ es acotado

Cuando $\exists c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tal que:

$$|x|_m \leq c \ , \ \forall x \in \Delta(s_i)$$

Sea $c = 1 \Longrightarrow |x|_m \leq 1$, $\forall x \in \Delta(s_i)$

$$\therefore \ \text{de}\star \ \text{y}\{\star\star \ \Delta(s_i) \text{ es compacto.}$$

2. $\Delta(s_i)$ es convexo

Se puede pensar de σ_i, como un vector asociado de probabilidades σ_i^j, $j = 1, 2, \ldots, |s_i|$

$$\Delta(s_i) = \{\sigma_i' = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, \ldots, \sigma_1^n) \ / \ \sigma_i^j \geq 0 \ , \ \forall j = 1, \ldots, |s_i|\}$$

Un vector (s_i).dimensional $\Delta(s_i)$ tiene las siguientes propiedades:

a) $\sigma_i^j \geq 0$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, |s_i|\}$

b) $\sum\limits_{j=1}^{|s_i|} \sigma_i^j = 1$

Ahora se toma dos estrategias mixtas

$$\alpha_i, \beta_i \in \Delta(s_i) \text{ y algún}, 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i = (\lambda\alpha_i^1 + (1-\lambda)\beta_i^1, \ldots, \lambda\alpha_1^n + (1-\lambda)\beta_i^n)$$

es claro que:

$$\lambda\alpha_i^j + (1-\lambda)\beta_i^j \geq 0 \ , \ \forall j$$

También

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{|\Delta(s_i)|} \lambda\alpha_i^j + (1-\lambda)\beta_i^j &= \lambda \sum_{j=1}^{|\Delta(s_i)|} \alpha_i^j + (1-\lambda)\beta_i^j \\ &= \lambda,1 + (1-\lambda),1 \\ &= \lambda + 1 - \lambda \\ &= 1 \end{aligned}$$

De esta manera $\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i \in \Delta(s_i)$, por lo tanto $\Delta(s_i 9$

- <u>$\beta(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ **es no vacio y convexo**</u>

  Cuando s_i es finito y no vacio, $\forall i \in \mathbb{N}$, la aplicación mejor respuesta, $G = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

  $$\beta_i(G) \neq \emptyset \quad \text{y por lo tanto} \quad \beta(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq \emptyset$$

  Considerar, al jugador i, dos estrategias mixtas $\alpha_i, \beta_i \in \beta_i(\sigma)$ y tomar $0 < \lambda < 1$

  Para mostrar que $\beta_i(\sigma)$ es convexo, se muestra que

  $$\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i \in \beta_i(\sigma)$$

Notar que

$$\begin{aligned}
\mu_i(\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i, \sigma_{-i}) &= \sum_{s\in S}\prod_{j=1}^{\mathbb{N}} \sigma_j(s_j).\mu_i(s) \\
&= \sum_{s\in S}(\lambda\alpha_i(s_i) + (1-\lambda)\beta_i(s_i)) \prod_{j=1,j\neq i}^{\mathbb{N}} \sigma_j(s_j).\mu_i(s) \\
&= \lambda\sum_{s\in S}\alpha_i(s_i) \prod_{j=1,j\neq i}^{\mathbb{N}} \sigma_j(s_j).\mu_i(s) \\
&\quad +(1-\lambda)\sum_{s\in S}\beta_i(s_i) \prod_{j=1,j\neq i}^{\mathbb{N}} \sigma_j(s_j).\mu_i(s) \\
&= \lambda\mu_i(\alpha_i, \sigma_\sigma{-i}) + (1-\lambda)\mu_i(\beta_i, \sigma{-i})
\end{aligned}$$

Si α_i y β_i son ambos mejores respuestas a $\sigma{-i}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mu_i(\alpha_i, \sigma{-i}) &\geq \mu_i(\sigma_i', \sigma{-i}) \quad , \quad \forall\, \sigma_i' \in \Delta(s_i) \\
\mu_i(\beta_i, \sigma{-i}) &\geq \mu_i(\sigma_i', \sigma{-i}) \quad , \quad \forall\, \sigma_i' \in \Delta(s_i)
\end{aligned}$$

De donde, sabiendo que $\mu_i : \Delta(s_i) \times \ldots \times \Delta(s_n) \longmapsto \mathbb{R}$; se tendría que:

$$\begin{aligned}
\lambda.\mu_i(\alpha_i, \sigma{-i}) &\geq \lambda\mu_i(\sigma_i', \sigma{-i}) \\
(1-\lambda)\mu_i(\beta_i, \sigma{-i}) &\geq (1-\lambda)\mu_i(\sigma_i', \sigma{-i})
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lambda.\mu_i(\alpha_i, \sigma{-i}) + (1-\lambda)\mu_i(\beta_i, \sigma{-i}) \geq \mu_i(\sigma_i', \sigma{-i}) \ , \ \forall\sigma{-i} \in \Delta(s_i)$$

Por lo tanto:

$$\mu_i(\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i, \sigma{-i}) \geq \mu_i(\sigma_i', \sigma{-i}) \ , \ \forall\sigma{-i} \in \Delta(s_i)$$

y por consiguiente es mejor respuesta para $\sigma{-i}$, de la cual se concluye que:

$$\beta(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \quad \text{es CONVEXO}$$

- **La correspondencia** $\beta : \prod_{i \in \mathbb{N}} \Delta(\sigma_i) \longmapsto \prod_{i \in \mathbb{N}} \Delta(\sigma_i)$ **es superiormente semicontinua**

Demostración por el absurdo

Tomaremos dos pares de suceciones de estrategia mixtas

$$(\sigma^k, \hat{\sigma}^k) \longrightarrow (\sigma, \hat{\sigma}), \ \forall \, k = 1, 2, \ldots$$

Además $\hat{\sigma}^k \in \beta(\sigma^k)$, pero $\sigma^k \notin \beta(\sigma)$

Donde $\hat{\sigma}$ no es mejor respuesta a σ. entonces, para algún $i \in \mathbb{N}$, $\exists \, \overline{\sigma_i} \in \Delta(s_i)$ tal que:

$$\mu_i(\overline{\sigma_i}, \sigma_{-i}) > \mu_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i})$$

A causa de $\sigma^k \longrightarrow \sigma$, y de esta manera $\sigma^k_{-i} \longrightarrow \sigma_{-i}$, se puede encontrar k suficientemente grande al tomar arbitrariamente a $\mu_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i})$.

De esta manera para suficientemente grande k

$$\mu_i(\overline{\sigma_i}, \sigma^k_{-i}) > \mu_i(\hat{\sigma}^k_i, \sigma^k_{-i})$$

donde establece una contradicción, porque $\hat{\sigma}^k_i$ es una mejor respuesta a σ^k_i $(\Longrightarrow\Longleftarrow)$

De esta manera la correspondencia es upper-semicontinua.

Por el Teorema de Punto Fijo de Kakutani, se establece la existencia de un punto fijo.

Por definición de β, un punto fijo es un Equilibrio de Nash de G. $\square$

Juegos Bimatriciales

Se da relaciones formales entre la estrategia pura y mixtas en equilibrios de Nash, además de considerar un juego matricial como un espacio juego bimatricial.

✓ ESTRATEGIAS PURAS Y MIXTAS

Dado (A, B) un juego bimatricial $m \times n$.

El primer lema se refiere que para determinar que una esetrategia par es Equilibrio de Nash es suficiente comparar el pago esperado de una estrategia (mixta) con los pagos de estrategias puras.

***Lema* 2.2.** Una combinación de estrategias $(p^*,q^*) \in \Delta^m \times \Delta^n$ es un Equilibrio de Nash de (A, B) sii

$$p^* \, A \, q^* \geq e^i \, A \, q^* \, \forall i = 1, \ldots, m \quad \text{y} \quad p^* \, B \, q^* \geq p^* \, B \, e^j \, \forall j = 1, \ldots, n$$

Demostración. Por hipótesis (p^*, q^*) es un Equilibrio de Nash.

- p^* es mejor respuesta para q^*, es decir:

$$p^* \, A \, q^* \geq p' \, A \, q^* \forall p' \in \Delta^m$$

En particular tomando $p' = e^i$, $\forall i = 1, \ldots, m$

$$p^* \, A \, q^* \geq e^i \, A q^* \, \forall i = 1, \ldots$$

- q^* es mejor respuesta para p^*, es decir:

$$p^* \, B \, q^* \geq q^* \, A \, q' \forall q' \in \Delta^n$$

Tomando $q' = e^j$, $\forall j = 1, \ldots, n$

$$p^* \, B \, q^* \geq p^* \, B \, e^j \, \forall j = 1, \ldots, n$$

□

El siguiente lema nos dice que un jugador siempre tiene una mejor respuesta pura en contra a una estrategia del otro jugador.

***Lema* 2.3.** Dado $p^* \in \Delta^m$ y $q^*\Delta^n$. Entonces hay un $i \in \{1,\ldots,m\}$ con $e^i \in \beta_1(q)$ y un $j \in \{1,\ldots,n\}$ con $e^j \in \beta_2(p)$

Demostración. • Tomar i tal que:

$$e^i\ A\ q \geq e^k\ A\ q \quad \forall k = 1,\ldots,m$$

Entonces claramente

$$e^i\ A\ q \geq p'\ A\ q \quad \forall p' \in \Delta^m$$

$$\therefore e^i \in \beta_1(q)$$

• Tomar j tal que:

$$p\ B\ e^j \geq p\ B\ e^k \quad \forall k = 1,\ldots,n$$

$$p\ B\ e^j \geq p\ B\ q' \quad \forall q' \in \Delta^n$$

$$\therefore e^j \in \beta_1(p)$$

□

DEFINICIÓN 2.9. *Dado* (A,B) *un juego Bimatricial* $m \times n$ *y* $p \in \Delta^m$, $q \in \Delta^n$. *Entonces*

$$p\beta_1(q) = \{i \in \{1,\ldots,m\}\ /\ e^i\ A\ q = \max_k e^k\ A\ q\}$$

es el conjunto de mejores respuestas puras del jugador 1 a q.

$$p\beta_2(p) = \{j \in \{1,\ldots,n\}\ /\ p\ A\ e^j = \max_k p\ A\ e^k\}$$

es el conjunto de mejores respuestas puras del jugador 2 a p.
Observe, que con algún abuso de notación, la estrategia pura de esta definición son etiquetadas por el número de fila y columna.

El portador $C(p)$ de una estrategia mixta $p \in \Delta^k$, donde $k \in \mathbb{N}$, es el conjunto de coordenadas que son positivas, es decir:

$$C(p) = \{i \in \{1, \ldots, k\} \mid p_i > 0$$

El siguiente formalizamos la observación, correctamente que en una mejor respuesta un jugador usa probabilidad positiva sii en estas estrategias puras maximiza su pago.

***Lema* 2.4.** Dado (A, B) un juego bimatricial $n \times n$, $p \in \Delta^m$ y $q \in \Delta^n$ Entonces:

$$\begin{aligned} p \in \beta_1(q) &\iff C(p) \subseteq p\,\beta_1(q) \\ p \in \beta_2(p) &\iff C(q) \subseteq p\,\beta_2(p) \end{aligned}$$

***Corolario* 2.1.** Un par de estrategias (p, q) es un Equilibrio de Nash en un juego bimatricial (A,B) sii $C(p) \subseteq p\,\beta_1(q)$ y $C(q) \subseteq p\,\beta_2(p)$

***Ejemplo* 2.2.** Considere el juego bimatricial

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 1,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 1,1 & 1,1 & 0,1 & 0,1 \\ 1,1 & 1,1 & 1,1 & 0,1 \\ 1,1 & 1,1 & 1,1 & 1,1 \end{pmatrix}$$

y las estrategias $p = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.

Donde:

$$A\,q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad p\,B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p\,\beta_1(q) = \{2,3,4\} \quad \text{y} \quad p\,\beta_2(p) = \{1,2,3,4\}$$

Donde $C(p) = \{2,3,4\}$ y $C(q) = \{1,2\}$

Nosotros tenemos $C(p) \subseteq p\ \beta_1(q)$ y

$$C(q) \subseteq p\ \beta_2(p)$$

.

Por el corolario implica que (p, q) es un Equilibrio de Nash.

✓ JUEGOS MATRICIALES

Los juegos matriciales son también juegos bimatriciales, todo lo que se conoce acerca de juegos bimatriciales es también verdadero para juegos matriciales.

En realidad, el **Teorema Minimax** (teorema 4.2)puede ser derivado directamente del **Teorema de la Existencia del Equilibrio de Nash** (teorema 5.1).

Además, cada equilibrio de Nash en un juego matricial consiste de un par de estrategias óptimas (máximin y minimax), y donde cada par es un Equilibrio de Nash.

Todos estos factores son coleccionados en el siguiente Teorema; la nueva contribución de este teorema es la parte (2), la parte (1) es una forma alternativa de probar el **Teorema Minimax**.

TEOREMA 2.4. *Dado A un juego matricial $m \times n$, entonces:*

(1) $v_1(A) = v_2(A)$

(2) *Un par $(p^*,q^*) \in \Delta^m \times \Delta^n$ es un Equilibrio de Nash de $(A,-A)$ sii p^* es una estrategia óptima del juagador 1 en A y q^* es una estrategia óptima del jugador 2 en A*

TEOREMA 2.5. *Para un juego matricial A de $m \times n$, $v_1(A) = v_2(A)$*

Demostración. (1) En vista del lema (2.1) es suficiente probar que $v_1(A) \geq v_2(A)$.

Eligiendo $(\widehat{p}, \widehat{q}) \in \Delta^m \times \Delta^n$ es un equilibrio de Nash de $(A, -A)$, esto es posible por el teorema

$$p\ A\ \widehat{q} \leq \widehat{p}\ A\ \widehat{q} \leq \widehat{p}\ A\ q \qquad \forall p \in \Delta^m, q \in \Delta^n$$

Esto implica que:

$$\max_p p\ A\ \widehat{q} \leq \widehat{p}\ A\ q \quad , \quad \forall q$$

Donde

$$v_2(A) = \min_{q'} \max_p p\ A\ q' \leq \widehat{p}\ A\ q \quad , \quad \forall q$$

Así que,

$$v_2(A) \leq \min_q \widehat{p}\ A\ q \leq \max_p \min_q p\ A\ q = v_1(A)$$

$$\therefore \quad v_2(A) \leq v_1(A)$$

(2) $(\Longrightarrow)$ Supongamos que $(p^*, q^*) \in \Delta^m \times \Delta^n$ es un equilibrio de Nash en $(A, -A)$.

Entonces:

$$\begin{aligned} p^*\ A\ q^* &= \max_p p\ A\ q^* \\ p^*\ A\ q^* &= v_2(q^*) \geq \min_q v_2(q) = v_2(A) \\ p^*\ A\ q^* &= v(A) \end{aligned}$$

Si p^*, no es óptima, entonces $p^*\ A\ q < v(A)$, para algún $q \in \Delta^n$.

Así que, $p^*\ A\ q^* \leq p^*\ A\ q < v(A)$, $\qquad (\Longrightarrow\Longleftarrow)$.

Similarmente q^* es óptima.

($\Longleftarrow$) Supongamos que, p^* y q^* son estrategias óptimas.

Donde,

$$\begin{aligned} p\,A\,q^* &\leq v(A) \quad , \quad \forall \quad p \in \Delta^m \quad \text{y} \\ p^*\,A\,q &\geq v(A) \quad , \quad \forall \quad q \in \Delta^n \end{aligned}$$

Si seguimos que p^* y q^* son en común mejores respuestas y de esta manera, (p^*, q^*) es un equilibrio de Nash en $(A, -A)$.

$\square$

Capítulo 3:

Aplicaciones

3.1. Juegos Finitos de Suma Cero

3.1.1. *La batalla de Avranches (II Guerra Mundial)*

O.G. Haywood (1954). En el desembarco aliado en agosto de 1944, se abrió una brecha por mar en Avranches (Francia).
La cabeza de playa expuso el flanco oeste del noveno ejército alemán, mandado por el general Von Kluge. Éste tuvo dos posibles formas de actuar:

(1) Atacar hacia el oeste para llegar al mar, asegurándose su flanco occidental y dividir a las fuerzas americanas.

(2) Retirarse hacia el este para llegar a una mejor posición defensiva cerca del río Sena.

El general americano Bradley tuvo al primer ejército americano conteniendo al ejército alemán desde la cabeza de la playa y más al interior tuvo al tercer ejército, bajo las órdenes del general Patton, en reserva, haciendo misiones de limpieza del terreno hacia el este, sur y oeste.
Bradley consideró tres posibilidades:

(1) Ordenar a la reserva volver a defender la brecha abierta. (Reforzar)

(2) Enviar la reserva hacia el este para intentar cortar la retirada del noveno ejército alemán. (Mover)

(3) Mantener las reservas en su posición durante un día y decidir después si ordenar ayudar a la cabeza de la playa si era atacada o enviarlas hacia el este. (Esperar)

El análisis completo de la situación le llevó a valorar los diferentes resultados de acuerdo con la siguiente tabla, en la que las filas representan las estrategias del general Bradley, y las columnas las estrategias del general Von Kluge.

	1. Atacar	**2. Retirarse**
1. Reforzar	Se mantiene la brecha.	Débil presión sobre la retirada alemana.
2. Mover	Se produce el corte alemán.	Fuerte presión en la retirada alemana.
3. Esperar	Se mantiene la brecha y los alemanes son rodeados.	Moderada presión en la retirada alemana.

Lógicamente, la resolución del conflicto dependerá de la valoración de los resultados $v(i,j)$ $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2$

El orden de preferencias de mejor a peor según la doctrina del ejército americano era:

$$v(3,1) > v(2,2) > v(3,2) > v(1,2) > v(1,1) > v(2,1)$$

Por lo que al buscar la estrategia menos mala, maximin, el general Bradley escogió la tercera estrategia.
Las valoraciones alemanas, debían ser similares, la estrategia minimax, pues el general Von Kluge decidió retirarse pero nunca ejecutó su decisión.
Hitler, a cientos de kilómetros del campo de batalla, debió tener otras valoraciones del conflicto y ordenó atacar y cerrar la brecha.
El resultado fue que Bradley resistió el ataque alemán, y mantuvo la reserva en el sur, lo que permitió enviarla al siguiente día hacia el este, los alemanes comenzaron la retirada, siendo rodeadas por las armadas americanas y francesas, lo que llevó al suicidio del general.

3.1.2. *Campaña de vacunación*

Un Programa de salud inició una campaña de vacunación contra el virus de la influenza.
El virus provoca dos cuadros diferentes y no se sabe en que proporción de la población ocurre cada uno de los cuadros. Se desarrollaron dos vacunas, de diferente eficacia, con las cuales se pretendió atacar a dicho virus.
La vacuna 1 tuvo 85 % de eficacia contra el cuadro 1 y 70 % el cuadro 2.
La vacuna 2 tuvo 60 % de eficacia contra el cuadro 1 y 90 % el cuadro 2.
¿Cuál fue la política de inoculación que debieran adoptar los directores del Programa de Salud?
Se resolvió como un juego de dos personas, en el cual el jugador R (directivos) deseó que el pago (porcentaje de ciudadanos resistentes al virus) sea lo más grande posible y el jugador C (el virus), que el pago sea lo más pequeño posible.

		Cuadros	
		1	2
Vacunas	1	0.85	0.70
	2	0.60	0.90

La matriz de pagos fue:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}70 \\ 0{,}60 & 0{,}90 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se vió que se pudo aplicar el Teorema (4.1), porque esta matriz no tuvo ningún punto silla. Así:

- $$\begin{aligned} p_1^* &= \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ p_1^* &= \frac{0{,}90-0{,}60}{0{,}85+0{,}90-0{,}70-0{,}60} \\ p_1^* &= \frac{0{,}30}{0{,}45} \\ p_1^* &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} p_2^* &= 1-p_1^* \\ p_2^* &= 1-\frac{2}{3} \\ p_2^* &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ q_1^* &= \frac{0{,}90-0.70}{0{,}85+0{,}90-0{,}70-0{,}60} \\ q_1^* &= \frac{0{,}20}{0{,}45} \\ q_1^* &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} q_2^* &= 1-q_1^* \\ q_2^* &= 1-\frac{4}{9} \\ q_2^* &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v &= \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\
v &= \frac{(0{,}85)(0{,}90)-(0{,}70)(0{,}60)}{0{,}85+0{,}90-0{,}70-0{,}60} \\
v &= \frac{0{,}345}{0{,}45} \\
v &= 0{,}7666\cdots
\end{aligned}$$

Entonces la estrategia óptima fue inocular a las 2/3 partes de la población con la vacuna 1 y al 1/3 restante con la vacuna 2.

Esto garantizó que el $76,7\,\%$ de ciudadanos sea resistente, independiente de la estrategia de inoculación que se adoptó.

3.1.3. *Competencia Televisiva*

Dos canales de televisión, que compiten entre sí, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ decidieron producir programas de 1 hora con el mismo horario.

El canal $\mathbb{R}$ puede presentara uno de tres posibles programas y $\mathbb{C}$, uno de cuatro. Ninguna de los canales conoce el programa que va a presentar la otra.

Los dos piden, a la misma agencia, una encuesta que estime la forma en que se dividirá el público televidente en cada una de las posibles combinaciones de programas. La agencia, le entrega a cada una de los canales, la siguiente tabla en la que una entrada de orden (i, j) significa el porcentaje de televidentes que verá el programa i del canal $\mathbb{R}$ si, al mismo tiempo, el canal $\mathbb{C}$ presenta el programa j.

		Programas cadena $\mathbb{C}$			
		1	2	3	4
Programas cadena $\mathbb{R}$	1	60	20	30	55
	2	50	75	45	60
	3	70	45	35	30

¿Qué programa deben escoger las cadenas de televisión para lograr el mayor número de televidentes?

De la tabla anterior, restando 50 a todas las entradas, se obtiene la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 10 & -30 & -20 & 5 \\ 0 & 25 & -5 & 10 \\ 20 & -5 & -15 & -20 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz de pagos de un juego de matriz suma cero, en la cual se considera que cada canal inicia con un auditorio del 50 % y de donde una entrada (i, j) significa el porcentaje de auditorio que pierde el canal $\mathbb{C}$ en favor del canal $\mathbb{R}$, al presentarse al mismo tiempo los programas i y j. Facilmente se vé que la entrada

$$a_{23} = -5$$

es un punto silla de la matriz de pagos por lo tanto, la estrategia óptima del canal $\mathbb{R}$ es presentar el programa 2 y la estrategia óptima del canal $\mathbb{C}$ el 55 % restante.

3.1.4. *Orientación Tributaria*

Una empresa tiene dos compañías, A y B que, en media, pagan a Sunat anualmente 4000000 U.I.T y 12000000 U.I.T respectivamente.

Para cada una de las compañías, la empresa puede declarar sus ingresos reales y pagar los impuestos correspondientes, o bien falsificar su contabilidad y evitar el pago de impuestos.

El servicio de inspección de la Sunat sólo tiene medios para investigar una compañía cada año.

Si investiga una compañía con ingresos falsos, descubrirán el fraude, y la compañía tendrá que pagar los impuestos correspondientes más una multa que será el doble de lo defraudado. se desea obtener la estrategia óptima para la inspección de la Sunat, si esta desea maximizar los ingresos.

- Las estrategias de la Sunat son:

  I_1 : Investigar la compañía A

  I_2 : Investigar la compañía B

- las estrategias de la Empresa son:

  II_1 : Declarar los ingresos reales de A y B.

  II_2 : Declarar los ingresos reales de A y falsos de B.

  II_3 : Declarar los ingresos reales de B y falsos de A.

  II_4 : Declarar los ingresos falsos para A y B.

la matriz de pagos en millones de U.I.T es

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} II_1 & II_2 & II_3 & II_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 16 & 4 & 24 & 12 \\ 16 & 40 & 12 & 36 \end{pmatrix} \end{array}$$

De donde

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e^1 & e^2 & e^3 & e^4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 16 & 4 & 24 & 12 \\ 16 & 40 & 12 & 36 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dado $p = (p, 1 - p)$ es la estrategia arbitraria del jugador 1.

Los pagos esperados del jugador 1, si el jugador 2 juega una estrategia pura, es:

- $pAe^1 = 16p + 16(1-p) \implies pAe^1 = 16$

- $pAe^2 = 4p + 40(1-p) \implies pAe^2 = 40 - 36p$

- $p\,A\,e^3 = 24p + 12(1-p) \quad \Longrightarrow \quad p\,A\,e^3 = 12p + 12$
- $p\,A\,e^4 = 12p + 36(1-p) \quad \Longrightarrow \quad p\,A\,e^4 = -24p + 36$

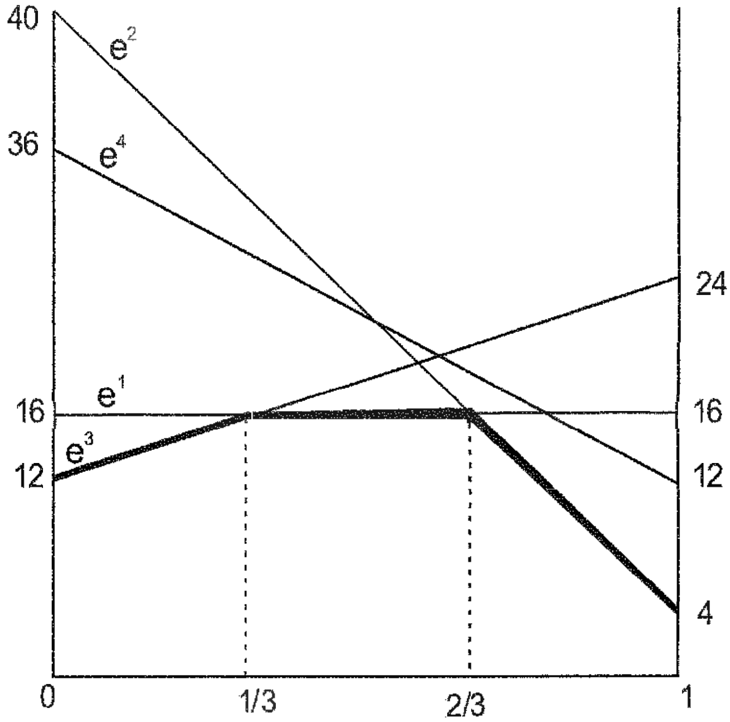


Figura 3.1

Claramente el máximo de la curva oscura es cuando:

$$\{p = (p, 1-p) \in \Delta^2 \;/\; 1/3 \leq p \leq 2/3\}$$

valor máximo esperado es 16.
Se tiene establecido que el jugador 1, no tiene una única estrategia optimal (maximin) y el valor del juego es 16.

- Encontrando las estrategias óptimas del jugador 2.

Dado $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, $q_4 = 0$

$$\begin{aligned} 16q_1 + 12q_3 &= 16 \\ 4q_2 + 16q_1 &= 16 \\ q_1 + q_2 + q_3 &= 1 \end{aligned}$$

Desarrollando el sistema de ecuaciones:

$$q_1 = 1 \quad q_2 = 0 \quad q_3 = 0$$

$$\therefore\ q = (1, 0, 0, 0) \text{ es decir } II_1$$

3.2. Juegos Finitos de Suma No Cero

3.2.1. *La batalla de los sexos*

Una pareja tiene que decidir entre ir a la discoteca o ir a un partido de fútbol.

Ella (jugador 2) quiere ir a la discoteca y él (jugador 1) al partido de fútbol, en cualquier caso ambos quieren ir juntos, resultando la siguiente matriz de pagos:

		Discoteca	**Fútbol**
		II_1	II_2
Discoteca	I_1	(1,4)	(0,0)
Fútbol	I_2	(0,0)	(4,1)

Observe que este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras, (I_1, II_1) e (I_2, II_2).

Para encontrar todos los Equilibrios de Nasb se determinó la mejor respuesta de ambos jugadores.

Primero se consideró la estrategia $(q, 1-q)$ del jugador 2.

Luego:

- $$\begin{aligned} 1.q + 0.(1-q) &= 0.q + 4.(1-q) \\ q &= 4-4q \\ 5q &= 4 \\ q &= \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 1.q + 0.(1-q) &> 0.q + 4.(1-q) \\ q &> 4-4q \\ 5q &> 4 \\ q &> \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 1.q + 0.(1-q) &< 0.q + 4.(1-q) \\ q &< 4-4q \\ 5q &< 4 \\ q &< \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

Resumiendo, si se denota al conjunto de mejores respuestas del jugador 1, por $\beta_1(q, 1-q)$ se tuvo:

$$\beta_1(q,1-q) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{si } 4/5 < q \leq 1; \\ \{(p, 1-p) \ / \ 0 \leq p \leq 1\}, & \text{si } q = 4/5; \\ \{(0,1)\}, & \text{si } 0 \leq q < 4/5. \end{cases}$$

Por argumentos completamente análogos, se encuentra que para una estrategia $(q, 1-q)$ la mejor respuesta del jugador 2 es dado por:

$$\beta_2(p, 1-p) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{si } 1/5 < p \leq 1; \\ \{(q, 1-q) \ / \ 0 \leq q \leq 1\}, & \text{si } p = 1/5; \\ \{(0,1)\}, & \text{si } 0 \leq p < 4/5. \end{cases}$$

Dibujando a los conjuntos $\beta_1(q, 1-q)$ y $\beta_2(p, 1-p)$ y por definición de Equilibrio de Nash de un juego son la combinación de estrategias (p^*, q^*) tal que $p^* \in \beta_1(q^*)$ y $q^* \in \beta_2(p^*)$

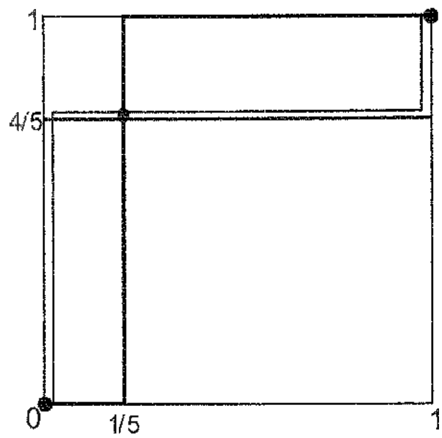


Figura 3.2

Los puntos indican los tres equilibrios de Nash $[(1,0),(1,0)]$; $[(1/5, 4/5), (4/5, 1/5)]$ y $[(0,1),(0,1)]$

Está claro que el jugador I intentará alcanzar el equilibrio (I_2, II_2), por ello puede jugar su estrategia I_2 como una forma de obligar a su oponente a jugar II_2.

Sin embargo, se observa que si el jugador I utiliza su estrategia I_2, mientras que el jugador II se mantiene en su estrategia II_1, el pago que reciben es $(0, 0)$

3.2.2. *Fabricación de Computadores*

Dos empresas que compiten (Smith y Brown) diseñan CPU de computadoras, ellos quieren diseñar CPU para utilizar grande o pequeño floppy disks.

Ambos jugadores pueden vender más computadoras si sus disk drives son compatibles. Si ambos eligiesen diseñar floppy disks grandes, el pago puede ser de 2 cada uno.

Si ambos eligiesen diseñar floppy disks pequeños, los pagos pueden ser de 1 cada uno. si ellos eligiesen diferentes tamaños los pagos pueden ser de -1 a cada uno.

Representando, en una matriz de pago vectorial tendremos:

$$\begin{array}{c} \\ \textbf{Grande} \\ \textbf{Pequeño} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textbf{Grande} & \textbf{Pequeño} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,2 & -1,-1 \\ -1,-1 & 1,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La Empresa Smith es el jugador fila y la empresa Brown el jugador columna. Los equilibrios de Nash, en estrategias puras serán:

$$\begin{pmatrix} 2^*, 2^* & -1, -1 \\ -1, -1 & 1^*, 1^* \end{pmatrix}$$

cuando los jugadores diseñan los grandes o pequeños también.

- **Encontrando todos los Equilibrios de Nash**

  - Las mejores respuestas del jugador 1

    Sea $(q, 1-q)$ la estrategia del jugador 2.

$$
\begin{aligned}
A\,q &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} \\
A\,q &= \begin{pmatrix} 2q-1(1-q) \\ -q+1(1-q) \end{pmatrix} \\
A\,q &= \begin{pmatrix} 2q-1+q \\ -q+1-q \end{pmatrix} \\
A\,q &= \begin{pmatrix} 3q-1 \\ -2q+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Además:

$$e^{1}\,A\,q = 3\,q-1 \quad , \quad e^{2}\,A\,q = -2q+1$$

Si:

$$
\begin{aligned}
3q-1 &> -2q+1 \quad e^{1} \text{ es mejor respuesta} \\
3q+2q &> 1+1 \\
5q &> 2 \\
q &> 2/5 \\
\therefore\ e^{1} &= \{(1,0)\} \text{ es mejor respuesta, } q > 2/5
\end{aligned}
$$

De forma análoga, si $q < 2/5$, se tiene que:

$$e^{2} = \{(0,1)\} \text{ es mejor respuesta}$$

Por el contrario, si:

$$
\begin{aligned}
3q-1 &= -2q+1 \quad e^{1} \text{ es mejor respuesta} \\
3q+2q &= 1+1 \\
5q &= 2 \\
q &= 2/5
\end{aligned}
$$

los valores esperados son iguales para ambas estrategias puras, es decir, e^{1} y e^{2} son mejores respuestass y por lo cual

$\{(p, 1-p)\ ,\ 0 \leq p \leq 1\}$, son el conjunto de mejores respuestas.

Resumiendo:

$$\beta_1(q, 1-q) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{si } 2/5 < q \leq 1; \\ \{(p, 1-p)\ /\ 0 \leq p \leq 1\}, & \text{si } q = 2/5; \\ \{(0,1)\}, & \text{si } 0 \leq q < 2/5. \end{cases}$$

- Las mejores respuestas del jugador 2

  Sea $(p, 1-p)$ la estrategia del jugador 1.

$$\begin{aligned} p\,B &= \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ p\,B &= \begin{pmatrix} 2p-1(1-p) & -p+1(1-p) \end{pmatrix} \\ p\,B &= \begin{pmatrix} 2p-1+p & -p+1-p \end{pmatrix} \\ p\,B &= \begin{pmatrix} 3p-1 & -2p+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además:

$$p\,B\,e^1 = 3p-1 \quad , \quad p\,B\,e^2 = -2p+1$$

Si:

$$\begin{aligned} 3p-1 &> -2p+1 \quad e^1 \text{ es mejor respuesta} \\ 3p+2p &> 1+1 \\ 5p &> 2 \\ p &> 2/5 \\ \therefore\ e^1 &= \{(1,0)\} \text{ es mejor respuesta, } p > 2/5 \end{aligned}$$

De forma análoga, si $p < 2/5$, tendremos que:

$e^2 = \{(0,1)\}$ es mejor respuesta del jugador 2 para la estrategia $(p, 1-p)$

Por último si $p = 2/5$ el conjunto $\{(q, 1-q)\ ,\ 0 \leq q \leq 1\}$, es el conjunto de mejores respuestas.

Resumiendo:

$$\beta_2(p, 1-p) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{si } 2/5 < p \leq 1; \\ \{(q, 1-q) \;/\; 0 \leq q \leq 1\}, & \text{si } p = 2/5; \\ \{(0,1)\}, & \text{si } 0 \leq p < 2/5. \end{cases}$$

Graficando $\beta_1(q, 1-q)$ y $\beta_2(p, 1-p)$ se obtiene:

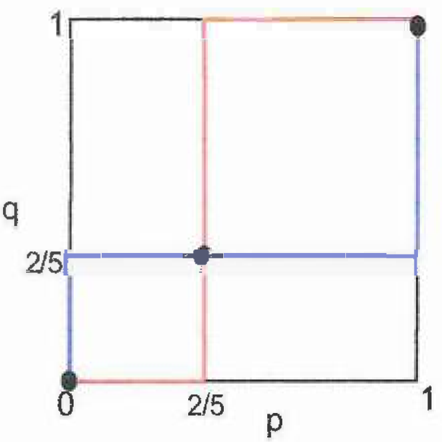


Figura 3.3

De la gráfica, se deduce los tres equilibrios de Nash

$$[(1,0),(1,0)];\ [(0,1),(0,1)]\ y\ [(2/5,3/5),(2/5,3/5)]$$

3.2.3. *Juego de Asistencia Gubernamental*

Este juego modela a un gobierno que pretende ayudar a un pobre, siempre y cuando el ayude a buscar trabajo pero no de otra manera.
Los pagos son 3, 2 (para el Gobierno, pobre) si el Gobierno ayuda y el pobre intenta trabajar $-1, 1$ si el Gobierno no ayuda y el pobre intenta $-1, 3$ si

el Gobierno ayuda y el pobre no intenta trabajar; y $0, 0$ en el caso que el Gobierno no ayude ni el pobre intente trabajar.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\textbf{Intenta} & \textbf{No intenta}\end{array} \\ \begin{array}{c}\textbf{Ayuda} \\ \textbf{No Ayuda}\end{array} & \left(\begin{array}{cc} 3,2 & -1,3 \\ -1,1 & 0,0 \end{array}\right) \end{array}$$

El jugador fila es el Gobierno y el jugador columna es el pobre.

Encontrando los equilibrios de Nash en estrategias puras:

$$\left(\begin{array}{cc} 3^*,2 & -1,3^* \\ -1,1^* & 0^*,0 \end{array}\right)$$

De donde se deduce que no hay Equilibrio de Nash.

- **Encontrando todos los Equilibrios de Nash**

  - Las mejores respuestas del jugador 1

$$\begin{aligned} A\,q &= \left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} q \\ 1-q \end{array}\right) \\ A\,q &= \left(\begin{array}{c} 3q-1(1-q) \\ -q+0.(1-q) \end{array}\right) \\ A\,q &= \left(\begin{array}{c} 3q-1+q \\ -q \end{array}\right) \\ A\,q &= \left(\begin{array}{c} 4q-1 \\ -q \end{array}\right) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 4q-1 &= -q \\ 4q+q &= 1 \\ 5q &= 1 \\ q &= 1/5 \end{aligned}$$

Entonces el conjunto $\{(p, 1-p)\ ,\ 0 \leq p \leq 1\}$, es el de mejores respuestas.

Análogamente:

- Si $q > 1/5$ lamejor respuesta es $\{(1,0)\}$
- Si $q < 1/5$ la mejor respuesta es $\{(0, 1)\}$

Resumiendo:

$$\beta_1(q,1-q)=\begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{si } 1/5 < q \leq 1; \\ \{(p,1-p)/0\leq p\leq 1\}, & \text{si } q = 1/5; \\ \{(0,1)\}, & \text{si } 0 \leq q < 1/5. \end{cases}$$

- Las mejores respuestas del jugador 2

$$\begin{aligned} pB &= \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ pB &= \begin{pmatrix} 2p+1(1-p) & 3p+0(1-p) \end{pmatrix} \\ pB &= \begin{pmatrix} 2p+1-p & 3p \end{pmatrix} \\ pB &= \begin{pmatrix} p+1 & 3p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además:

$$pBe^1 = p+1\,, \quad pBe^2 = 3p$$

Si:

$$\begin{aligned} p+1 &> 3p \quad e^1 \text{ es mejor respuesta} \\ 1 &> 2p \\ 2p &> 1 \\ p &< 1/2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ e^1 = \{(1,0)\} \text{ es mejor respuesta si, } p < 1/2$$

De forma análoga, si $p > 1/2$, se tiene que:

$$e^2 = \{(0,1)\} \text{ es mejor respuesta}$$

Por el contrario $p = 1/2$ el conjunto $\{(q, 1 - q),\ 0 \leq q \leq 1\}$, es el conjunto de mejores respuestas.

Resumiendo:

$$\beta_2(p, 1-p) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{si } 0 < p \leq 1/2; \\ \{(q, 1-q)\ /\ 0 \leq q \leq 1\}, & \text{si } p = 1/2; \\ \{(0,1)\}, & \text{si } 1/2 \leq p < 1. \end{cases}$$

Graficando, las mejores respuestas $\beta_1(q, 1-q)$ y $\beta_2(p, 1-p)$

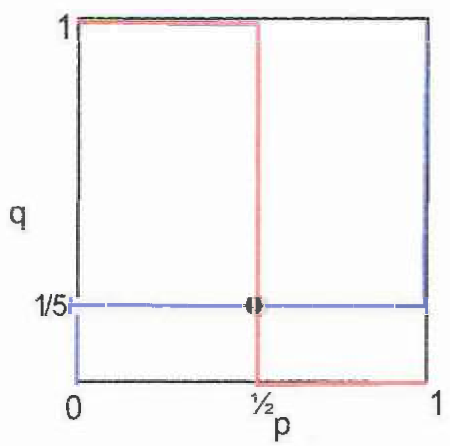


Figura 3.4

El único Equilibrio de Nash será $[(1/2, 1/2), (1/5, 4/5)]$ y los valores esperados serán:

- Para el jugador 1

$$\begin{aligned}
p\,A\,q &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \\
p\,A\,q &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
p\,A\,q &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
p\,A\,q &= -\tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{10} \\
p\,A\,q &= -\tfrac{2}{10} \\
p\,A\,q &= -0{,}2
\end{aligned}$$

- Para el jugador 2

$$\begin{aligned}
p\,B\,q &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \\
p\,B\,q &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
p\,B\,q &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
p\,B\,q &= \tfrac{14}{10} + \tfrac{1}{10} \\
p\,B\,q &= \tfrac{15}{10} \\
p\,B\,q &= 1{,}5
\end{aligned}$$

Conclusiones

(1) La teoría de juegos modela conflictos ocurridos en la sociedad.

(2) En todo conflicto o juego siempre se pretende encontrar las estrategias óptimas para hallar el mejor resultado para ambos jugadores.

(3) Los juegos finitos no cooperativos se subdividen en Juegos de Suma cero y Jnegos de Suma no cero.

(4) En todo juego finito de Suma cero existen estrategias óptimas para ambos jugadores debido a la existencia del Teorema de VON NEVVMAN

(5) En todo juego finito de Suma No Cero, existe estratégias óptimas para ambos jugadores, debido al Teorema de Existencia de Equilibrio de Nash.

Anexo

3.3. Juego de piedra, papel o tijera

Dos jugadores tienen tres estrategias puras: elegir piedra, papel o tijera. Se sabe que, el jugador que juega tijera gana al que jugó papel, el jugador que juega papel gana a piedra, el jugador que juega piedra gana a tijera. Asignando 1 a ganar, 0 a empatar y -1 a perder; la matríz de pagos es:

$$
\begin{array}{c}
\\
\text{Piedra} \\
\text{Papel} \\
\text{Tijera}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Piedra} & \text{Papel} & \text{Tijera} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & -1 & 1 \\
1 & 0 & -1 \\
-1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Se conoce que la probabilidad de elegir cualquier estrategia pura es de 1/3; luego las estrategias mixtas para los jugadores son: $p* = (1/3, 1/3, 1/3)$ y $q* = (1/3, 1/3, 1/3)$ Obviamente, el pago esperado será nulo, en efecto:

$$
\begin{aligned}
p*\ Aq* &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\
p*\ A\,q* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\
p*\ A\,q* &= 0
\end{aligned}
$$

Bibliografía

[1] Allen, B. Mackenzie and Luis A. Dasilva *Game theory for wireless engineers.* MORGAN & CLAYPOOL PUBLISHER'S FIRST EDITION, 2006.

[2] Nasar S. *A beautiful mind.* FABER AND FABER, London 1998.

[3] Chris Rorres - Koward Anton *Aplicaciones de Algebra Lineal.* LIMUSA, Mexico 1975.

[4] Churchil *Second world war.* HOUGHTON MIFLIN, Boston 1983.

[5] Gibbons R. *A primer in game theory.* HARVESTER WHEATSHEAF, 1992.

[6] Gadner *Games for busines and Economics.* WILEY, New York 1995.

[7] Hans Peters *Game theory. A multi-leveled Approach.* SPRINGER, Berlin 2008.

[8] J. M. Bilbao y F. R. Fernández*Avances en Teoría de Juegos.* UNIVERSIDAD DE SEVILLA, España 1998.

[9] Rasmusen E. *Games and Information an introduction a game theory.* OXFORD, 1989.

CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD
(RESOLUCIÓN N° 626-2021-CU DEL 30 DE DICIEMBRE 2021)

Yo, GLORIA MARÌA ORTIZ BASAURI, identificada con Documento de Identidad N°16748071, usuario revisor del documento titulado: "*Aplicaciones de la Teoría de juegos no Cooperativos para Dos Personas Tratados Matricialmente en Conflictos Económicos Sociales y Políticos"*, cuyo autor es: ***Bach. Mat. Quiñones Huatangari Lenin ,*** declaro que la evaluación realizada por el Programa Informático Turnitin, después de haber excluido el documento publicado tres años después de ser sustentada la tesis en mención, ha arrojado un porcentaje de similitud de **18 %**, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 18 de noviembre de 2022.

GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071

Docente asesor

Aplicaciones de la Teoría de juegos no Cooperativos para Dos Personas Tratados Matricialmente en Conflictos Económicos Sociales y Políticos

INFORME DE ORIGINALIDAD

18%	18%	1%	8%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	documents.mx Fuente de Internet	3%
2	docplayer.es Fuente de Internet	2%
3	hdl.handle.net Fuente de Internet	1%
4	hercules.us.es Fuente de Internet	1%
5	gestiopolis.com Fuente de Internet	1%
6	www.buenastareas.com Fuente de Internet	1%
7	www.coursehero.com Fuente de Internet	1%
8	www.esi2.us.es Fuente de Internet	1%
9	Submitted to Universidad Nacional Pedro Henríquez Ureña Trabajo del estudiante	1%
10	www.scribd.com Fuente de Internet	1%
11	silo.tips Fuente de Internet	1%

ri.ues.edu.sv

12	Fuente de Internet	1 %
13	qdoc.tips Fuente de Internet	<1 %
14	journals.openedition.org Fuente de Internet	<1 %
15	www.fcfm.buap.mx Fuente de Internet	<1 %
16	es.scribd.com Fuente de Internet	<1 %
17	"Finite Two-Person Zero-Sum Games", Game Theory, 2008 Publicación	<1 %
18	ve.scielo.org Fuente de Internet	<1 %
19	www.slideshare.net Fuente de Internet	<1 %
20	revistas.unj.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
21	idus.us.es Fuente de Internet	<1 %
22	Submitted to Universidad San Ignacio de Loyola Trabajo del estudiante	<1 %
23	docslide.us Fuente de Internet	<1 %
24	hotelling.uab.es Fuente de Internet	<1 %
25	prezi.com Fuente de Internet	<1 %
26	repositorio.unprg.edu.pe Fuente de Internet	<1 %

27	www.aaep.org.ar Fuente de Internet	<1 %
28	zaloamati.azc.uam.mx Fuente de Internet	<1 %
29	Submitted to Fundacion Universidad de San Andres Trabajo del estudiante	<1 %
30	Submitted to Nottingham Trent University Trabajo del estudiante	<1 %
31	datospdf.com Fuente de Internet	<1 %
32	decon.edu.uy Fuente de Internet	<1 %
33	dokumen.pub Fuente de Internet	<1 %

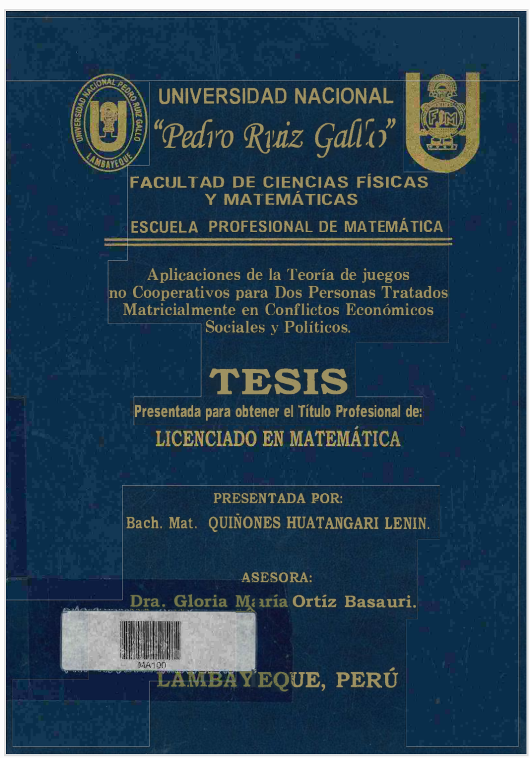
Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 15 words
Excluir bibliografía	Activo		

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Lenin Quiñones Huatangari
Título del ejercicio:	Aplicaciones de la Teoría de Juegos
Título de la entrega:	Aplicaciones de la Teoría de juegos no Cooperativos para Do...
Nombre del archivo:	Matricialmente_en_Conflictos_Econ_micos_Sociales_y_Pol_tic...
Tamaño del archivo:	17.3M
Total páginas:	94
Total de palabras:	15,777
Total de caracteres:	66,319
Fecha de entrega:	11-nov.-2022 09:28p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre...	1951590137


UNIVERSIDAD NACIONAL
"Pedro Ruiz Gallo"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Aplicaciones de la Teoría de juegos no Cooperativos para Dos Personas Tratados Matricialmente en Conflictos Económicos Sociales y Políticos.

TESIS
Presentada para obtener el Título Profesional de:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADA POR:
Bach. Mat. QUIÑONES HUATANGARI LENIN.

ASESORA:
Dra. Gloria María Ortíz Basauri.

LAMBAYEQUE, PERÚ