



UNIVERSIDAD NACIONAL “PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



**Interpolación de Splines Cúbicos y su Aplicación en
la Estimación de los Ingresos Tributarios
Recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque,
1994-2019**

TESIS

**Para obtener el título profesional de
Licenciado(a) en Matemáticas**

Autores:

Bach. Mat. Delgado Bustinza Elvis Iván

Bach. Mat. Salazar Cornejo Fiorella Yanina

Asesor:

Mg. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl

LAMBAYEQUE – PERÚ

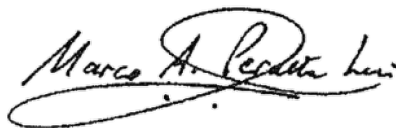
2023

UNIVERSIDAD NACIONAL“ PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **“Interpolación de Splines Cúbicos y su Aplicación en la Estimación de los Ingresos Tributarios Recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque, 1994-2019”**, presentada por los bachilleres en matemáticas, Delgado Bustinza Elvis Iván y Salazar Cornejo Fiorella Yanina, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de licenciado en matemáticas.



Dr. Cárpena Velásquez Enrique Wilfredo
Presidente Jurado de Tesis



Dr. Peralta Lui Marco Antonio Martín
Secretario Jurado de Tesis



Dr. Coronado Juárez William Wilmer
Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: 12 de julio de 2023

UNIVERSIDAD NACIONAL“ PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

Interpolación de Splines Cúbicos y su Aplicación en
la Estimación de los Ingresos Tributarios
Recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque,
1994-2019



Bach. Mat. Delgado Bustinza Elvis Iván
Autor



Bach. Mat. Salazar Cornejo Fiorella Yanina
Autor



Mg. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl
Asesor

Lambayeque – Perú
Septiembre-2023



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DECANATO
Ciudad Universitaria - Lambayeque



ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL N° 034-2023-D/FACFyM

Siendo las 08:00 am del día miércoles 12 de julio del 2023, se reunieron vía plataforma virtual, <https://meet.google.com/wvg-axtt-nta> los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada:

**Interpolación de Splines Cúbicos y su Aplicación en la Estimación de los Ingresos Tributarios
Recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque, 1994-2019**

Designados por Resolución N° 073-2021-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 02 de febrero de 2021 con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

Dr. Lic. Mat. Enrique Wilfredo Cárpene Velásquez	Presidente
Dr. Lic. Mat. Marco Antonio Martín Peralta Lui	Secretario
Dr. Lic. Mat. William Wilmer Coronado Juárez	Vocal

La tesis fue asesorada por el Mg. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez, nombrado por Resolución N° 124-2022-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 2 de febrero de 2022.

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N° 559-2023-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 7 de julio de 2023.

La Tesis fue presentada y sustentada por los Bachilleres: Luis Iván Delgado Bustinza y Fiorella Yanina Salazar Cornejo, y tuvo una duración de 75 minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de 17 (diecisiete) en la escala vigesimal, mención Bueno.

Por lo que quedan aptos para obtener el Título Profesional de **Licenciado (a) en Matemáticas**, de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

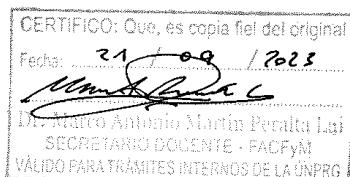
Siendo las 9:18 am se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

Dr. Lic. Mat. Enrique Wilfredo Cárpene Velásquez
Presidente

Dr. Lic. Mat. Marco Antonio Martín Peralta Lui
Secretario

Dr. Lic. Mat. William Wilmer Coronado Juárez
Vocal

Mg. Lic. Mat. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez
Asesor





CONSTANCIA DE SIMILITUD N° 71-2023- VIRTUAL-UI-FACFyM

El que suscribe, director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, hace constar:

Que, el Bachiller **DELGADO BUSTINZA ELVIS IVÁN** de la Escuela Profesional de **MATEMÁTICA**, ha cumplido con presentar la **SIMILITUD DE ORIGINALIDAD DE LA TESIS (TURNITIN)**, como requisito indispensable para la sustentación de la tesis, según detalle:

- TÍTULO DE LA TESIS: “Tesis “**INTERPOLACIÓN DE SPLINES CÚBICOS Y SU APLICACIÓN EN LA ESTIMACIÓN DE LOS INGRESOS TRIBUTARIOS RECAUDADOS POR SUNAT EN LA REGION LAMBAYEQUE, 1994-2019**”
- ÍNDICE DE SIMILITUD: 18%
- **ASESOR:** M. Sc. Lic. Mat. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez.

Se expide la presente constancia, para la tramitación del Título Profesional, dispuesto en la Directiva para la evaluación de originalidad de los documentos académicos, de investigación formativa y para la obtención de Grados y Títulos de la UNPRG.

Lambayeque, 28 de agosto de 2023

Dr. WALTER ARRIAGA DELGADO
DIRECTOR - UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



CONSTANCIA DE SIMILITUD N° 72-2023- VIRTUAL-UI-FACFyM

El que suscribe, director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, hace constar:

Que, la Bachiller **SALAZAR CORNEJO FIORELLA YANINA** de la Escuela Profesional de **MATEMÁTICA**, ha cumplido con presentar la **SIMILITUD DE ORIGINALIDAD DE LA TESIS (TURNITIN)**, como requisito indispensable para la sustentación de la tesis, según detalle:

- TÍTULO DE LA TESIS: “Tesis “**INTERPOLACIÓN DE SPLINES CÚBICOS Y SU APLICACIÓN EN LA ESTIMACIÓN DE LOS INGRESOS TRIBUTARIOS RECAUDADOS POR SUNAT EN LA REGION LAMBAYEQUE, 1994-2019**”
- ÍNDICE DE SIMILITUD: 18%
- **ASESOR:** M. Sc. Lic. Mat. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez.

Se expide la presente constancia, para la tramitación del Título Profesional, dispuesto en la Directiva para la evaluación de originalidad de los documentos académicos, de investigación formativa y para la obtención de Grados y Títulos de la UNPRG.

Lambayeque, 28 de agosto de 2023

Dr. WALTER ARRIAGA DELGADO
DIRECTOR - UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

Agradecimiento

En esta oportunidad voy a agradecer inmensamente a nuestro creador todopoderoso que me ha permitido llegar a esta altura de mi vida , se que este nuevo reto no es nada fácil pero voy aprovecharlo dando lo mejor de mí, a mi hermosa familia que siempre me da apoyo incondicional , a mis hijas Sheryl y Estrella porque ellas son mi mejor fortaleza de levantarme cada día, a una persona muy especial que siempre llevare presente en mi vida porque me ha dado mucho valor, valentía y a todas las personas que alguna vez estuvieron ahí apoyándome incondicionalmente de alguna u otra manera, muchas gracias desde el fondo de mi corazón a todos ustedes.

Fiorella

En primer lugar, agradecido con este logro en mi vida profesional por llenarme de luz sabiduría, por haberme mandados unos padres que nunca me dejaron solo y siempre me ayudaron ante las adversidades, también le agradezco por la familia que me dio y aunque ya no estén conmigo parte de ella siempre estarán marcados en mi vida.

Elvis

Dedicatoria

Dedicado a mi bendecida y hermosa familia que Dios me ha regalado, mis dos preciosas hijas Sheryl y Estrella, que serán siempre mi mejor compañía, las cuales me llenan de valentía y fortaleza y todas aquellas personas que siempre me apoyan, confían y ayudan en mi crecimiento personal y laboral, en especial a una persona que siempre me ha ayudado a sacar lo mejor de mí. Esta tesis está dedicada a todos ustedes con mucho cariño y amor.

Fiorella

Dedico este trabajo a mi familia que siempre me estuvieron apoyando a mis padres, mi hermana que con su apoyo incondicional me sacaron adelante luchando contra los buenos y malos momentos y a mi hija Sheryl motivo y razón por la cual me llena de energía para seguir adelante con mis metas, a Fiorella por acompañarme en este trabajo por sus consejos y su esfuerzo como madre y profesional, y a Estrella por enseñarme lo valiente y lo duro que golpea la vida y también lo bonito y maravilloso que es vivir.

Elvis

Resumen

El presente trabajo de investigación tuvo como objetivo aplicar la interpolación de Splines Cúbicos en la estimación de los ingresos tributarios recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque 1994-2019, con los valores recaudados para el año 1994 en millones de soles de forma mensual, se realizó un análisis detallado para construir un modelo matemático utilizando la interpolación de Splines Cúbicos, luego para simplificar el cálculo se implementó una interfaz gráfica de usuario en matlab donde a los de SUNAT les permitirá ingresar los años, la cantidad recaudada y el valor a encontrar, mostrando como resultado los coeficientes de los Splines Cúbicos y su gráfica; para garantizar su correcto funcionamiento se comparó con los resultados encontrados en el año 1994. Finalmente la interfaz gráfica de usuario del método de interpolación de Splines Cúbicos va a simplificar el proceso de solución y aproximar valores desconocidos que están dentro de los años 1994-2019, por lo que SUNAT emitirá cualquier reporte de ingresos tributarios recaudados de manera rápida y sencilla.

Palabras Clave: *Interpolación, splines cúbicos, ingresos tributarios, Matlab.*

Abstract

The objective of this research work was to apply Cubic Spline interpolation to estimate the tax revenues collected by SUNAT in the Lambayeque Region 1994-2019, with the values collected for the year 1994 in millions of soles on a monthly basis, A detailed analysis was carried out to build a mathematical model using Cubic Splines interpolation, then to simplify the calculation a graphical user interface was implemented in matlab where SUNAT will allow them to enter the years, the amount collected and the value to be found, showing as a result the coefficients of the Cubic Splines and its graph; To guarantee its correct functioning, a comparison was made with the results found in 1994. Finally the graphical user interface of the Cubic Splines interpolation method will simplify the solution process and approximate unknown values that are within the years 1994-2019, so SUNAT will issue any report of tax revenues collected quickly and easily.

Keywords: *Interpolation, cubic splines, tax revenue, Matlab.*

Introducción

Existen diferentes aplicaciones reales donde intervienen los datos experimentales que se encuentran en la matemática, física, biología, química, administración y todas las ramas de la ciencia, a partir de los datos se busca conocer una función polinómica que lo defina, es aquí donde nace la interpolación polinómica cuyos métodos son interpolación de Lagrange, diferencias divididas, mínimos cuadrados y splines cúbicos donde en este último nos centramos la investigación cuya base de datos se encuentra los ingresos tributarios recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque recaudados en el periodo 1994-2019, es por eso que nos planteamos el siguiente problema ¿De qué manera la interpolación de splines cúbicos aplicados en la estimación de los ingresos tributarios recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque permite conocer en forma sencilla y entendible los ingresos recaudados en el periodo 1994-2019? como objetivo fue aplicar la interpolación de Splines Cúbicos en la estimación de los ingresos tributarios recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque, 1994-2019 para su conocimiento en forma sencilla y entendible y cuya hipótesis se tiene: Si aplicamos la interpolación de Splines Cúbicos utilizando los datos obtenidos de los ingresos tributarios recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque, entonces se obtendrá funciones polinómicas que permitirán conocer en forma directa, sencilla y entendible los ingresos recaudados en 1994-2019. Para simplificar el cálculo se implementó una interfaz gráfica de usuario en matlab donde a los de SUNAT les permitirá ingresar los años, la cantidad recaudada y el valor a encontrar, mostrando como resultado los coeficientes de los Splines Cúbicos y su gráfica; para garantizar su correcto funcionamiento se comparó con los resultados encontrados en el año 1994. Finalmente la interfaz gráfica de usuario del método de interpolación de Splines Cúbicos

cos va ha simplificar el proceso de solución y aproximar valores desconocidos que están dentro de los años 1994-2019, por lo que SUNAT emitirá cualquier reporte de ingresos tributarios recaudados de manera rápida y sencilla.

En el primer capítulo se tiene el software Matlab, matrices, interpolación y aproximación.

En el segundo capítulo se tiene aproximación de los splines cúbicos, splines cúbicos, existencia y unicidad de los splines cúbicos y error de splines cúbicos.

En el tercer capítulo trata sobre la aplicación de los ingresos tributarios mensual de 1994-2019 y el ingreso anual 1994-2019.

Además se tiene conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y anexos.

Índice general

Resumen	II
Abstract	III
Introducción	IV
1. Preliminares	3
1.1. Software Matlab R2021a	3
1.1.1. Interfaz Gráfica de Usuario	5
1.2. SUNAT	7
1.3. Matrices	8
1.4. Interpolación y aproximación polinomial.	9
1.4.1. Aproximación por el polinomio de Taylor.	10
1.4.2. Polinomio de interpolación de Lagrange.	12
2. Teoría de los Splines Cúbicos	16
2.1. Aproximación de Splines Cúbicos	16
2.2. Splines cúbicos	18
2.2.1. Construcción de los splines cúbicos	20
2.2.2. Condiciones en los extremos	22
2.3. Error del splines cúbicos natural.	27
3. Aplicación	33
3.1. Ingresos Tributarios 1994-2019	33

3.2. Ingreso tributario mensual mediante Spline Cúbicos	35
3.3. Ingreso tributario anual de los años 1994-2019	70
Conclusiones	72
Recomendaciones	73
Referencias Bibliográficas	74
Anexo	77

Capítulo 1:

Preliminares

1.1 Software Matlab R2021a

Gutierrez (2022) mencionó que MATLAB es una herramienta computacional derivada de Mathworks destinada para el desarrollo de aplicativos integrados y orientados a proyectos relativos a cálculos matemáticos asimismo a las interfaces gráficas capaces de reflejarlos. Dentro de las aplicaciones integradas en la plataforma de Matlab, se encuentran:

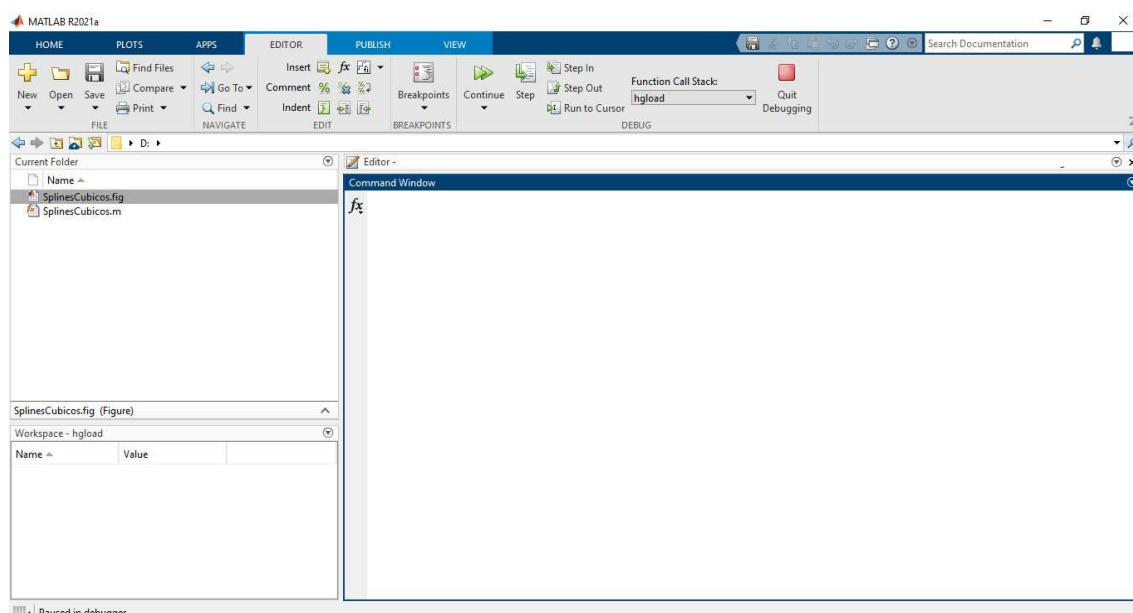
- Análisis numérico
- Cálculo matricial
- Procesamiento de señales
- Representación gráfica en 2D y 3D

Todas las aplicaciones reflejan la solución de problemas expresadas de forma convencional (como lo describe la matemática tradicional), sin necesidad de aplicar algoritmos de programación para llegar a una solución.

Actualmente Matlab posee una amplia gama de programas recurso dispuestos para diversas especialidades, son denominados “Toolboxes”. Los Toolboxes despliegan un gran

número de funciones al programa principal y en la actualidad se estima que cubre casi todas las áreas de ingeniería y software de simulación. Entre ellos destacan:

- Proceso de imágenes señal
- Control robusto
- Estadística
- Análisis financiero
- Matemáticas simbólicas
- Redes neurales
- Lógica difusa
- Identificación de sistemas
- Simulación de sistemas dinámicos



Matlab es un software de gran escala que fue elaborado para realizar cálculos numéricos y programación en una interfaz fácil de usar. Este software otorga una interfaz que

se adapta con mucha rapidez a lo que el usuario necesita, otorgando un conjunto de comandos los cuales permiten la solución de problemas lineales y no lineales, como también otros sistemas numéricos. Este software usa un algoritmo matemático sencillo para identificar y resolver los problemas. Esta interfaz contiene un compilador el cual otorga al usuario la creación de sus propios algoritmos y funciones, cabe resaltar que este programa tiene compatibilidad con lenguajes como C y Fortran. Matlab es una aplicación de régimen matemático para calculo aritmético apoyado en matrices. Entre sus principales funciones básicas tenemos:

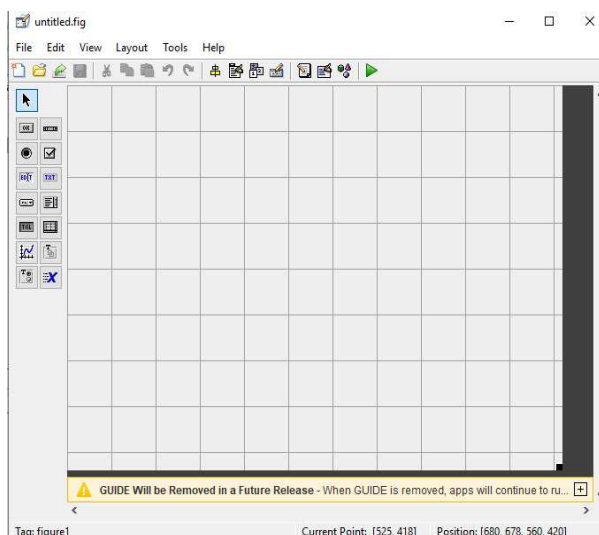
- Ejecutar cálculos aritméticos.
- Ejecutar cálculos como derivación o integración de funciones.
- Ejecutar un script.
- Hacer gráficos en 2D y 3D.
- Crear interfaces de usuarios (GUI).
- Comunicarse con diferentes instrumentos de hardware.

1.1.1 Interfaz Gráfica de Usuario

Las GUI (también conocidas como interfaces gráficas de usuario) permiten un control sencillo de las aplicaciones de software, lo cual elimina la necesidad de aprender un lenguaje y escribir comandos a fin de ejecutar una aplicación.

Las apps de MATLAB son programas autónomos de MATLAB con un frontal gráfico de usuario GUI que automatizan una tarea o un cálculo. Por lo general, la GUI incluye controles tales como menús, barras de herramientas, botones y controles deslizantes. Muchos productos de MATLAB, como Curve Fitting Toolbox, Signal Processing Toolbox y Control System Toolbox, incluyen apps con interfaces de usuario personalizadas.

También es posible crear apps personalizadas propias, incluidas las interfaces de usuario correspondientes, para que otras personas las utilicen. (Mathworks, 2023)



Frías y Pardo (2022) mencionaron:

1. **Static Text (Texto estático)**. “Un **static text** puede exhibir símbolos, mensajes o incluso valores numéricos de una GUI, y puede colocarse en lugar deseado”.
2. **Popup Menu (Menú desplegable)**. “Los **pop-up** menús pueden aparecer en cualquier punto de la ventana de figura”.
3. **Push button**. “Generan una acción cuando das click con el puntero del ratón sobre ellos”.
4. **Radio Button (Botón de radio)**. “Los botones de radio en grupo son mutuamente exclusivos (es decir, si un botón está encendido, todos los demás botones se apagan), mientras que las casillas de verificación son independientes entre sí”.
5. **Slider (Barra deslizador)**. “Los usuarios mueven la barra dejando presionado el botón del mouse y arrastrándola, Dando click en el canal, en la flecha”.
6. **Edit Text (Texto editable)**. “El dispositivo de texto editable permite al usuario teclear una cadena de entrada”.

7. **Axes (Ejes)**. “Permite al usuario mostrar las gráficas”.

8. **Table (Tabla)**. “Permite al usuario ingresar y mostrar valores en forma de matrices o tablas”.

Nota 1.1. La notación científica que muestra matlab es $e + n$ que es equivalente a 10^n o $e - n$ que es equivalente a 10^{-n}

1.2 SUNAT

La Superintendencia Nacional de Aduanas y de Administración Tributaria (SUNAT, 2023) manifestó que de acuerdo a su Ley 24829 - Ley de creación, Ley General aprobada por Decreto Legislativo 501 y la Ley 29816 - Ley de Fortalecimiento de la Sunat, es un organismo técnico especializado.

Este cuenta con personería jurídica de derecho público, con patrimonio propio y goza de autonomía funcional, técnica, económica, financiera, presupuestal y administrativa que, en virtud a lo dispuesto por el Decreto Supremo 061-2002-PCM, expedido al amparo de lo establecido en el numeral 13.1 del artículo 13° de la Ley N° 27658, ha absorbido a la Superintendencia Nacional de Aduanas, asumiendo las funciones, facultades y atribuciones que por ley, correspondían a esta entidad.

Administramos los tributos del gobierno nacional (con excepción de las municipales) y facilitamos el comercio exterior promoviendo el cumplimiento tributario y aduanero mediante el uso de la tecnología y el fortalecimiento de la conciencia tributaria. Trabajamos con un equipo humano íntegro, unificado, competente y comprometido con el país para brindar un servicio de excelencia.

La base de datos se encuentran en el siguiente link: <https://n9.cl/1ntu8>.

1.3 Matrices

Bracamonte y Llontop (2015) enunciaron:

Definición 1.1. Matriz de diagonal estrictamente dominante. Una matriz cuadrada

A es llamada diagonalmente dominante si se cumple las siguientes condiciones

$$r_i = |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

diremos que una matriz A es de diagonal estrictamente dominante si las desigualdades (2.14) son estrictas.

Teorema 1.1. (Criterio de Hadamard) Toda matriz con diagonal estrictamente dominante es no singular.

Demostración. Supongamos por el absurdo que la matriz A es de diagonal estrictamente dominante y es singular, es decir, $\det(A) = 0$ y el sistema homogéneo de ecuaciones $Ax = 0$ ó

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

tiene solución no trivial $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$.

Uno puede encontrar k tal que

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = |x_k| > 0$$

Luego se sigue de la k -ésima ecuación que

$$|a_{kk}| |x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| |x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|.$$

desde aquí

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|,$$

lo que contradice la suposición de que la matriz A tiene diagonal estrictamente dominante. En consecuencia, la única solución de $Ax = 0$, es $x = 0$. Esto completa la prueba. \square

1.4 Interpolación y aproximación polinomial.

Definición 1.2. *Polinomio de Bernstein*

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El polinomio de Bernstein de orden n de f es la función polinómica:

$$P_n^f(t) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(t)$$

donde $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$.

Teorema 1.2. *Rolle*

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable $]a, b[$ y verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe algún punto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 1.3. *Aproximación de Weierstrass*

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y ϵ un número real positivo cualquiera. Entonces, existe una función polinomial de coeficientes reales, P en $[a, b]$ tal que $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ para todo $x \in [a, b]$.

Teorema 1.4. *Rolle generalizado*

Suponga que $f \in C[a, b]$ es n veces derivable en (a, b) . Si $f(x)$ se anula en los $n+1$ números distintos x_0, \dots, x_n en $[a, b]$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f^n(c) = 0$.

Teorema 1.5. Aproximación de Weierstrass.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y ε un real positivo cualquiera. Entonces, existe una función polinomial de coeficientes reales, p definidos en $[a, b]$, tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in [a, b]$.

El Teorema de aproximación de Weierstrass nos asegura que dada una función f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, existe una función polinomial, p , que se acerca a f tanto como sea posible. La función polinomial tiene la ventaja de ser continua en todo \mathbb{R} , es fácil derivar e integrar y es fácil de evaluar. Por estas razones, la clase de polinomios es muy importante para aproximar otras funciones que son continuas.

1.4.1 Aproximación por el polinomio de Taylor.

Suponga que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) . Si $x_0 \in [a, b]$, el polinomio más cercano a f en una vecindad de x_0 , es la recta tangente

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

en la cual $p_1(x_0) = f(x_0)$ y $p'_1(x_0) = f'(x_0)$. Geométricamente esto significa que la recta y la función pasan por el mismo punto de abscisa x_0 y la pendiente es la misma para ambas curvas. El polinomio p_1 es una primera aproximación de la función f y en caso de mejorar la aproximación, se aumentaría el grado del polinomio adicionando un término al polinomio lineal.

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a(x - x_0)^2,$$

si f es dos veces diferenciable en x_0 y es fácil calcular el valor de la constante a ,

$$a = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Geométricamente, p_2 tiene una concavidad semejante a la de f en un entorno de x_0 .

Se puede seguir mejorando la precisión del polinomio, adicionando nuevos términos y aumentando el grado de éste en forma similar al caso anterior. Si f es n veces diferenciable

en x_0 se puede construir un polinomio de grado n alrededor del punto $(x_0, f(x_0))$.

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n,$$

es claro que p_n es una combinación lineal de $\{1, (x - x_0), (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^n\}$, que es una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n . Ahora, si $p_n(x_0) = f(x_0), p'_n(x_0) = f'(x_0), p''_n(x_0) = f''(x_0), p'''_n(x_0) = f'''(x_0), \dots, p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$, entonces $a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}, a_3 = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$. Por lo tanto, existe un único polinomio

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (1.2)$$

el polinomio (1.2) es llamado, **polinomio de Taylor**.

En el caso que $x_0 = 0$, el polinomio de Taylor se llama polinomio de MacLaurin en honor a Colin MacLarin (1698-1746), uno de los principales matemáticos de su tiempo.

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (1.3)$$

la expresión en (1.3) es la diferencia $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ que se denomina **el resto del polinomio de Taylor** f , y es debida a *Lagrange*, por lo que también se denomina **resto de Lagrange**.

En general, el resto de *Lagrange*, nos permite saber con exactitud el valor de $f(x) - p_n(x)$ porque el punto $\xi(x)$ (error) se puede conocer, sin embargo es muy útil para obtener cotas de error en las aproximaciones de Taylor.

Para obtener una aproximación $f(a)$, cuyo valor exacto no se conoce, se elige un punto x_0 próximo al número a para el que resulta fácil obtener $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ y a continuación se construye el polinomio de Taylor de f alrededor de x_0 y finalmente se realiza la aproximación con dicho polinomio en $x = a$.

Teorema 1.6. Existencia y unicidad del polinomio interpolante.

Sea la partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ con $n + 1$ términos sobre el intervalo $[a, b]$. Si f es una función definida sobre $[a, b]$ Entonces, existe un único polinomio p de grado a lo más n tal que

$$f(x_k) = p(x_k), \quad \text{para cada } k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Demostración. En efecto p puede escribirse de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$, se cumple que $p(x_0) = f(x_0) = y_0, p(x_1) = f(x_1) = y_1, p(x_2) = f(x_2) = y_2, p(x_3) = f(x_3) = y_3, \dots, p(x_n) = f(x_n) = y_n$. De lo anterior, se obtiene un sistema de $n + 1$ ecuaciones para los $n + 1$ coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

el determinante del sistema (1.5) es el determinante de **Vandermonde**, correspondiente a los números $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Este determinante se calcula en la forma

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (1.6)$$

Como $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ son todos diferentes, entonces $x_j - x_i \neq 0$ para todo i, j tal que $i < j$, por lo tanto el determinante es distinto de cero y el sistema tiene solución única y además existe un único polinomio que cumple la propiedad (1.4) \square

1.4.2 Polinomio de interpolación de Lagrange.

Teorema 1.7. Si x_0, x_1, \dots, x_n son $n + 1$ números distintos y si f es una función cuyos valores están dados en esos números, entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado a lo más n , con la propiedad de que

$$f(x_k) = P(x_k) \text{ para cada } k = 0, 1, \dots, n.$$

Demostración. Daremos una prueba constructiva, obteniendo explícitamente el polinomio interpolante.

Para cada $k = 0, 1, \dots, n$ construimos una función $L_{n,k}(x)$ de grado a lo mas n , con la propiedad de que $L_{n,k}(x_i) = 0$, cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}(x_k) = 1$. Para satisfacer $L_{n,k}(x_i) = 0$ para cada $i \neq k$ se requiere que el numerador de $L_{n,k}(x)$ contenga el término

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n).$$

Para satisfacer $L_{n,k}(x_k) = 1$, el denominador de $L_{n,k}(x)$ debe coincidir con este término cuando se evalúe en $x = x_k$. Entonces $L_{n,k}$ de x se escribe

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

Por lo tanto el polinomio del problema general de interpolación está dado por

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \dots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x), \quad (1.7)$$

Pues $P(x_k) = f(x_k)$ para $k = 0, 1, \dots, n$ □

Teorema 1.8. *Si es f una función continua en $[a, b]$ y $n+1$ veces diferenciable en (a, b) y sea p un polinomio de grado a lo más n que interpola a la función f en los $n+1$ números $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Entonces, para cada $x \in [a, b]$ existe $\xi(x) \in (a, b)$ tal que:*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (1.8)$$

Demostración. En efecto. Sea g una función continua en $[a, b]$ y $n+1$ veces diferenciable en (a, b) , definida por:

$$g(t) = f(t) - p(t) - (f(x) - p(x)) \prod_{i=0}^n \frac{t - x_i}{x - x_i},$$

para toda $t \in [a, b]$ y algún $x \in [a, b]$. Si $t = x_k$ y $x \neq x_k$ para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$g(x_k) = f(x_k) - p(x_k) - (f(x) - p(x)) \prod_{i=0}^n \frac{x_k - x_i}{x - x_i},$$

aplicando la ecuación (1.4), y $\prod_{i=0}^n (x_k - x_i) = 0$ cuando $i = k$,

$$g(x_k) = 0 - (f(x) - p(x)) \cdot 0 = 0,$$

además, para $t = x \neq x_k$ para toda $k = 0, 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - p(x) - (f(x) - p(x)) \prod_{i=0}^n \frac{x - x_i}{x - x_i} \\ &= f(x) - p(x) - (f(x) - p(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, g se hace cero en los $n + 2$ números distintos x_0, x_1, \dots, x_n, x . Además, g es $n + 1$ veces diferenciable en (a, b) . Aplicando el Teorema (1.4), existe $\xi(x) \in (a, b)$ tal que $g^{(n+1)}(\xi(x)) = 0$,

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - (f(x) - p(x)) \cdot \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \\ g^{(n+1)}(\xi(x)) &= f^{(n+1)}(\xi(x)) - p^{(n+1)}(\xi(x)) - (f(x) - p(x)) \cdot \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} = 0, \end{aligned}$$

como p es de grado a lo más n , entonces $p^{(n+1)}(t) = 0$.

$$f^{(n+1)}(\xi(x)) - (f(x) - p(x)) \cdot \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} = 0,$$

despejando $f(x) - p(x)$, se obtiene

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

que es (1.8). □

Teorema 1.9. Sea $\Delta : \{x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y supongamos que f es una función cuya n -ésima derivada satisface:

$$\| f^{(n)} \| = M$$

sobre $[a, b]$. Entonces para cada x en el intervalo $[a, b]$,

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_n)}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

para algún $\xi \in [a, b]$ que depende de x ; por lo tanto

$$\| f - L_{n-1} \| \leq \| (x - x_1) \dots (x - x_n) \| \frac{M}{n!},$$

en donde $L_{n-1}(x)$ es el polinomio de Lagrange que interpola a f en Δ .

Ver demostración en Santos y Mimbela (2015).

Capítulo 2:

Teoría de los Splines Cúbicos

2.1 Aproximación de Splines Cúbicos

Padilla y Sernaqué (2014) mencionaron que la interpolación de una función real f en $[a, b]$ por S , significa la construcción de S tal que en cada uno de los nodos x_0, x_1, \dots, x_n de la partición de $[a, b]$, la función f tiene el mismo valor de S . La interpolación clásica significaría que usemos una de las fórmulas de interpolación (por ejemplo, por Lagrange, Newton o Everett) para obtener un sólo polinomio en $[a, b]$ de grado n cuyo valor en cada nudo es el mismo que el de f . Este polinomio se aproxima a f bastante cerca en nodos, pero puede diferir considerablemente en los puntos muy alejados de los nodos, debido a su naturaleza oscilatoria cuando presentan alto grado. Por lo tanto, en lugar de aproximar f por un solo polinomio en todo el intervalo $[a, b]$, se aproxima f por n polinomios que se unen entre si obedeciendo ciertas condiciones de continuidad.

Supongamos que se desea encontrar una función $S \in C[a, b]$ que se aproxime a otra función f de la cual solo se conocen los puntos $f(x_i) = y_i$ $i = 0, 1, \dots, n$ donde $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$.

Lo mas fácil seria trazar una curva suave que pase por los puntos $(x_i, f(x_i))$, pero una forma más analítica seria unir cada par de puntos consecutivos utilizando gráficas de

funciones continuas, por ejemplo rectas.

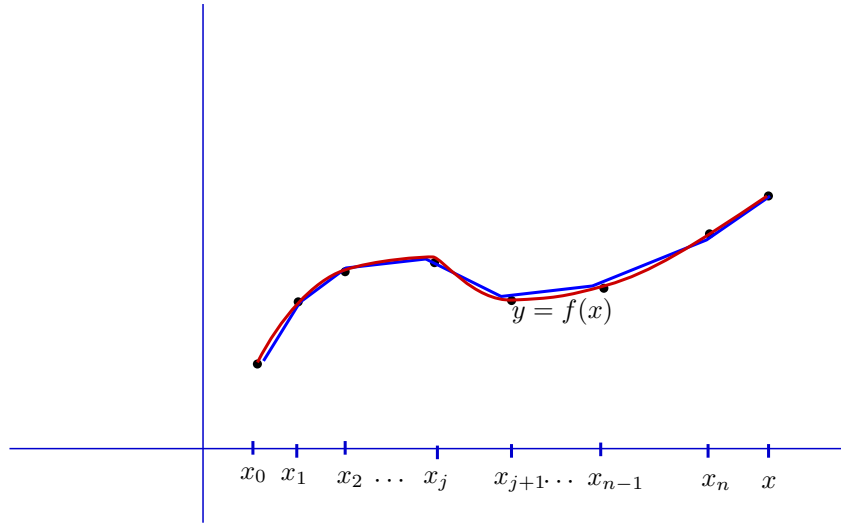


Figura 2.1: Spline de primer grado

Como se ve en la Figura (2.1) cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tiene una línea recta que pasa por los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Así

$$S(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}(x - x_i) + f(x_i); \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

cuando S se define de esta manera se le conoce con el nombre de spline de primer grado o línea poligonal. El problema que presentan estos, es que es evidente la falta de uniformidad, por que la pendiente del spline lineal puede cambiar abruptamente de un valor a otro en cada nudo.

El tipo más simple de función de polinomio fragmentario diferenciable en un intervalo $[x_0, x_n]$ es la función obtenida al ajustar un polinomio cuadrático entre cada par consecutivo de nudos. Esto se hace construyendo una cuadrática en $[x_0, x_1]$ que concuerde con la función en x_0 y en x_1 ; y así sucesivamente. Un polinomio cuadrático general tiene tres constantes arbitrarios: el término constante, el coeficiente de x y el coeficiente de x^2 ; y únicamente se requieren dos condiciones para ajustar los datos en los extremos de cada intervalo, por ello, existe flexibilidad que permiten seleccionar la cuadrática de

modo que la interpolante tenga derivada continua en $[x_0, x_n]$.

Padilla y Sernaqué (2014) definieron

Definición 2.1. “Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$ y sea la partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ en $[a, b]$. Una función spline interpolante de grado $m \geq 0$, con nodos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$, es una función S definida a trozos”, ver Figura (2.2), por polinomios de grado a lo más m y se tiene las siguientes condiciones de continuidad:

- 1). “ $S(x)$ es un polinomio de grado a lo más m en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para cada $i = 0, 1, \dots, n - 1$.”
- 2). “ $S(x)$ es $m - 1$ diferenciable en $[x_i, x_{i+1}]$, para cada $i = 0, 1, \dots, n - 1$.”

La aproximación polinómica segmentaria más común recibe el nombre de interpolación por spline cúbico, que ofrece flexibilidad para garantizar que el interpolante no sea continuamente diferenciable en el intervalo. Sin embargo, las derivadas del interpolante no concuerdan con las de la función, ni siquiera en los nodos.

2.2 Splines cúbicos

Padilla y Sernaqué (2014) interpolaron una función f dada por los datos (x_i, f_i) , $i = 0, \dots, n$, donde $f_i = f(x_i)$ y los puntos x_i forman una secuencia ordenada $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Este problema de interpolación puede resolverse de manera eficiente mediante el uso de spline cúbico.

Definición 2.2. Una interpolación por splines cúbicos es una función $S \in C^2[a, b]$ tal que

- (i) En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ la función S es un polinomio cúbico

$$S(x) = S_i(x) = a_i(x)^3 + b_i(x)^2 + c_i(x) + d_i$$

para $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

(ii) Las condiciones de interpolación se satisfacen

$$S(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

(iii) Polinomios consecutivos se ajustan sin problemas

$$\begin{aligned} S_{i-1}(x_i) &= S_i(x_i) \\ S'_{i-1}(x_i) &= S'_i(x_i) \\ S''_{i-1}(x_i) &= S''_i(x_i) \end{aligned} \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n-1,$$

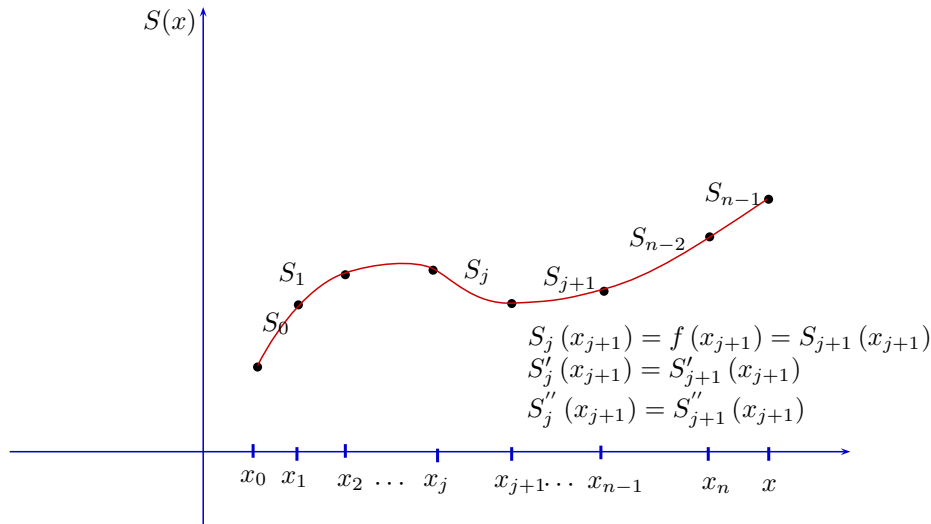


Figura 2.2: Spline Cúbico

De acuerdo con esta definición, una interpolación por spline cúbico S es un conjunto ordenado de polinomios cúbicos los cuáles coinciden con suavidad y forman una función dos veces continuamente diferenciable como se ve en la Figura (2.2).

Los puntos $x_i, i = 1, \dots, n-1$ donde los polinomios están emparejados, son llamados nodos del spline.

Cada uno de los n polinomios que forman un spline tiene cuatro coeficientes, que dan un total de $4n$ parámetros.

De este número, hay que restar $3(n-1)$ condiciones de suavidad y $n+1$ condiciones de

interpolación. Quedan 2 parámetros libres ($4n - 3(n - 1) - n - 1 = 2$) y se determinan por lo general de las restricciones sobre los valores del spline de selección y sus derivadas en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$ (o cerca de sus extremos). Estas restricciones se denominan limitaciones en el punto final. Existen varios tipos diferentes de restricciones de punto final, entre los cuales los más comunes son las siguientes tres condiciones en los extremos:

1). Condiciones de la 1^{ra} derivada en los extremos:

$$S'(x_0) = f'_0 \quad \text{y} \quad S'(x_n) = f'_n;$$

2). Condiciones de la 2^{da} derivada en los extremos:

$$S''(x_0) = f''_0 \quad \text{y} \quad S''(x_n) = f''_n;$$

3). Condiciones periódicas en los extremos (esta condición se puede considerar para funciones periódicas):

$$S^{(k)}(x_0) = S^{(k)}(x_n), \quad k = 0, 1, 2;$$

Es natural considerar condiciones periódicas en los extremos suponiendo que la función interpolada f es periódica, con periodo $b - a$.

2.2.1 Construcción de los splines cúbicos

Deducimos ahora la ecuación para $S_i(x)$ en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Puesto que S'' es continua en cada nudo interior, los números $Z_i = S''(x_i)$; ($0 \leq i \leq n$) Están bien definidos. Como S_i es un polinomio cúbico en $[x_i, x_{i+1}]$, S''_i es una función lineal que satisface $S''_i(x_i) = Z_i$ y $S''_i(x_{i+1}) = Z_{i+1}$ y por tanto corresponde a la línea recta entre Z_i y Z_{i+1}

$$S''(x) = S''_i(x) = Z_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + Z_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (2.1)$$

donde $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, n-1$. Si integramos dos veces (2.1) obtenemos:

$$S_i(x) = Z_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + \frac{Z_{i+1}}{6h_i} (x - x_i)^3 + c(x_{i+1} - x) + d(x - x_i), \quad (2.2)$$

donde c y d son constantes de integración y $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Sustituyendo x_i y x_{i+1} en la ecuación (2.2) y usando los valores de $f_i = S_i(x_i)$ y $f_{i+1} = S_i(x_{i+1})$ da las siguientes ecuaciones que involucran a c y d respectivamente:

$$f_i = Z_i \frac{h_i^2}{6} + ch_i, \quad f_{i+1} = Z_{i+1} \frac{h_i^2}{6} + dh_i.$$

Estas dos ecuaciones se resuelven fácilmente para c y d y cuando estos valores se sustituyen en la ecuación (2.2), el resultado es la siguiente expresión para la función cúbica S en $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} S_i(x) = & Z_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + Z_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \left(f_i - Z_i \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \\ & + \left(f_{i+1} - Z_{i+1} \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_i}{h_i}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ordenando, obtenemos:

$$\begin{aligned} S_i(x) = & \frac{1}{6h_i} (Z_{i+1} - Z_i) x^3 + \frac{1}{2h_i} (Z_i x_{i+1} - Z_{i+1} x_i) x^2 \\ & + \left[\frac{1}{2h_i} (Z_{i+1} x_i^2 - Z_i x_{i+1}^2) + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} (Z_i - Z_{i+1}) \right] x \\ & + \frac{1}{6h_i} (Z_i x_{i+1}^3 - Z_{i+1} x_i^3) + \left(f_i - Z_i \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} - \left(f_{i+1} - Z_{i+1} \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_i}{h_i}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ahora de esta última ecuación tomamos:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{6h_i} (Z_{i+1} - Z_i) \\ b_i &= \frac{1}{2h_i} (Z_i x_{i+1} - Z_{i+1} x_i) \\ c_i &= \left[\frac{1}{2h_i} (Z_{i+1} x_i^2 - Z_i x_{i+1}^2) + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} (Z_i - Z_{i+1}) \right] \\ d_i &= \frac{1}{6h_i} (Z_i x_{i+1}^3 - Z_{i+1} x_i^3) + \left(f_i - Z_i \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} - \left(f_{i+1} - Z_{i+1} \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_i}{h_i} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Con estos valores obtenidos construimos el polinomio cúbico

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i.$$

Para encontrar los coeficientes desconocidos $Z_i, i = 0, \dots, n$, se debe utilizar la derivada de (2.3), que es:

$$S'_i(x) = -Z_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + Z_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} - \left(\frac{f_i}{h_i} - Z_i \frac{h_i}{6} \right) + \left(\frac{f_{i+1}}{h_i} - Z_{i+1} \frac{h_i}{6} \right) \quad (2.6)$$

Evalutando (2.6) en x_i y simplificando resulta

$$S_i^+(x_i^+) = -Z_i \frac{h_i}{3} - Z_{i+1} \frac{h_i}{6} + f[x_i, x_{i+1}], \quad \text{donde} \quad f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$$

Del mismo modo, podemos reemplazar i por $i - 1$ en (2.6) para obtener una expresión para S'_{i-1} y evaluarla en x_i para obtener

$$S'_{i-1}(x_i^-) = Z_{i-1} \frac{h_{i-1}}{6} + Z_i \frac{h_{i-1}}{3} + f[x_{i-1}, x_i]$$

como $S'_{i-1}(x_i^-) = S'_i(x_i^+)$, $i = 1, \dots, n - 1$, obtenemos

$$h_{i-1}Z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)Z_i + h_iZ_{i+1} = 6(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]), \quad (2.7)$$

El sistema (2.7) es indeterminado ya que contiene solamente $n - 1$ ecuaciones para encontrar $n + 1$ coeficientes desconocidos Z_i . Con el fin de completar este sistema uno necesita dos ecuaciones adicionales como se muestran en las condiciones en los extremos

2.2.2 Condiciones en los extremos

Usando las ecuaciones (2.1) y (2.6) se pueden reescribir las condiciones en los extremos de la siguiente forma:

1). De la ecuación (2.6), tenemos:

■ Para $S'(x_0) = f'_0$

$$\begin{aligned} S'(x_0) = S'_0(x_0) &= -z_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{2h_0} - \frac{f_0}{h_0} + z_0 \frac{h_0}{6} + \frac{f_1}{h_0} - z_1 \frac{h_0}{6} \\ 6f'_0 &= -3z_0h_0 - 6\frac{f_0}{h_0} + z_0h_0 + 6\frac{f_1}{h_0} - z_1h_0 \\ 2z_0h_0 + z_1h_0 &= 6(f[x_0, x_1] - f'_0) \\ 2z_0 + z_1 &= \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f'_0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

- Para $S'(x_n) = f'_n$

$$\begin{aligned}
S'(x_n) = S'_{n-1}(x_n) &= z_n \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2h_{n-1}} - \frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} + z_{n-1} \frac{h_{n-1}}{6} + \frac{f_n}{h_{n-1}} - z_n \frac{h_{n-1}}{6} \\
6f'_n &= 3z_n h_{n-1} - 6 \frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} + z_{n-1} h_{n-1} + 6 \frac{f_n}{h_{n-1}} - z_n h_{n-1} \\
6(f'_n - f[x_{n-1}, x_n]) &= 2z_n h_{n-1} + z_{n-1} h_{n-1} \\
2z_n + z_{n-1} &= \frac{6}{h_{n-1}} (f'_n - f[x_{n-1}, x_n])
\end{aligned} \tag{2.9}$$

2). $Z_0 = 0$ y $Z_n = 0$;

3). Para la tercera condición obtenemos de la ecuación (2.3):

$$\begin{aligned}
\blacksquare S(x_0) = S_0(x_0) &= z_0 \frac{(x_1 - x_0)^3}{6h_0} + \left(f_0 - z_0 \frac{h_0^2}{6} \right) \frac{x_1 - x_0}{h_0} \\
\blacksquare S(x_n) = S_{n-1}(x_n) &= z_n \frac{(x_n - x_{n-1})^3}{6h_{n-1}} + \left(f_n - z_n \frac{h_{n-1}^2}{6} \right) \frac{x_n - x_{n-1}}{h_{n-1}}
\end{aligned}$$

igualando ambas ecuaciones, se tiene:

$$z_0 \frac{h_0^2}{6} + f_0 - z_0 \frac{h_0^2}{6} = z_n \frac{h_{n-1}^2}{6} + f_n - z_n \frac{h_{n-1}^2}{6}$$

de donde se obtiene:

$$f_0 = f_n \tag{2.10}$$

De la ecuación (2.6), tenemos:

$$\begin{aligned}
\blacksquare S'(x_0) = S'_0(x_0) &= -z_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{2h_0} - \frac{f_0}{h_0} + z_0 \frac{h_0}{6} + \frac{f_1}{h_0} - z_1 \frac{h_0}{6} \\
\blacksquare S'(x_n) = S'_{n-1}(x_n) &= z_n \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2h_{n-1}} - \frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} + z_{n-1} \frac{h_{n-1}}{6} + \frac{f_n}{h_{n-1}} - z_n \frac{h_{n-1}}{6}
\end{aligned}$$

igualando ambas ecuaciones, se tiene:

$$\begin{aligned}
-z_0 \frac{h_0}{2} - \frac{f_0}{h_0} + \frac{z_0 h_0}{6} + \frac{f_1}{h_0} - z_1 \frac{h_0}{6} &= z_n \frac{h_{n-1}}{2} - \frac{f_{n-1}}{h_{n-1}} + z_{n-1} \frac{h_{n-1}}{6} + \frac{f_n}{h_{n-1}} - z_n \frac{h_{n-1}}{6} \\
-\frac{1}{3} z_0 h_0 + f[x_0, x_1] - z_1 \frac{h_0}{6} &= \frac{1}{3} z_n h_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n] + z_{n-1} \frac{h_{n-1}}{6} \\
f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n] &= \frac{h_{n-1}}{6} (2z_n + z_{n-1}) + \frac{h_0}{6} (2z_0 + z_1) \\
6(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]) &= h_{n-1} (2z_n + z_{n-1}) + h_0 (2z_0 + z_1) \quad (2.11)
\end{aligned}$$

y por ultimo

- $S''(x_0) = z_0$
- $S''(x_n) = z_n$

Luego:

$$z_0 = z_n \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.11), obtenemos:

$$6(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]) = h_0 z_1 + h_{n-1} z_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_0) z_n$$

Vamos a considerar los sistemas para cada caso como resultado de las ecuaciones lineales y así calcular las incógnitas $Z_i, i = 0, 1, \dots, n$.

- 1). Considerando las condiciones de la primera derivada en los extremos, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \\ Z_n \end{bmatrix} = b, \quad (2.13)$$

donde:

$$b = \begin{bmatrix} 6 \left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f'_0 \right) \\ 6 \left(\frac{f_2 - f_1}{h_1} - f'_1 \right) \\ \vdots \\ 6 \left(\frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-2}} - f'_{n-2} \right) \\ 6 \left(f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \end{bmatrix}$$

$$b = 6 \begin{bmatrix} \frac{f_1 - f_0}{h_0} - f'_0 \\ \frac{f_2 - f_1}{h_1} - f'_1 \\ \vdots \\ \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-2}} - f'_{n-2} \\ f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

- 2). Considerando las condiciones de la 2^{da} derivada en los extremos, se obtiene un sistema el cual tiene una matriz que difiere sólo por su primera y última ecuación. En este caso el spline interpolante, es llamado **spline cúbico natural**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \left(\frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0} \right) \\ 6 \left(\frac{f_3 - f_2}{h_2} - \frac{f_2 - f_1}{h_1} \right) \\ \vdots \\ 6 \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-2}} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

- 3). Para las condiciones periódicas en los extremos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales de orden $n \times n$, debido a que $z_0 = z_n$

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & h_0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_0 & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \bar{b}, \quad (2.15)$$

donde:

$$\bar{b} = 6 \begin{bmatrix} f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix}$$

Los sistemas (2.13), (2.14) y (2.15) tienen la forma de matriz tridiagonal.

Como ya hemos mostrado con las condiciones en los extremos del spline cúbico, podemos obtener para cada uno de los tres casos un sistema lineal asociado a una matriz cuadrada. De este desarrollo se mostrará la existencia y la unicidad del spline cúbico.

Ahora se verificará que si los sistemas (2.13), (2.14) y (2.15) tienen soluciones únicas. Padilla y Sernaqué (2014) demostraron el siguiente teorema:

Teorema 2.1. “(*Teorema de existencia y unicidad*) Supongamos que tenemos una partición Δ de $[a, b]$

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

$f \in C^2[a, b]$ y $f(x_i) = y_i$ para $i = 0, \dots, n$. Para cualquiera de las tres condiciones finales que se imponga, el spline cúbico interpolante de f existe y es único”.

Demostración. Basta observar que los sistemas de ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15) resultantes al imponer cualquier condición en los extremos son equivalente a un sistema el cual tiene una matriz con diagonal estrictamente dominante, definición (1.1).

En el caso del sistema de ecuaciones con condiciones de la primera derivada en los extremos (2.13), uno tiene

$$r_0 = 2h_0 - h_0 = h_0 > 0,$$

$$r_i = 2(h_{i-1} + h_i) - h_{i-1} - h_i = h_{i-1} + h_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$r_n = 2h_{n-1} - h_{n-1} = h_{n-1} > 0.$$

Por lo tanto la matriz de este sistema tiene diagonal estrictamente dominante.

Al observar las ecuaciones (2.14) y (2.15) obtenidas al considerar las condiciones de

la segunda derivada y periódica en los extremos, se puede ver fácilmente que también forman sistemas de ecuaciones con matriz de diagonal estrictamente dominante.

Dado que toda matriz de diagonal estrictamente dominante es no singular, por el teorema (1.1), los sistemas de ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15) tienen una única solución.

Por lo tanto el spline cúbico interpolante a f existe y es único. \square

2.3 Error del splines cúbicos natural.

Padilla y Sernaqué (2014) mencionaron el siguiente teorema:

Teorema 2.2. Suavidad del spline cúbico

Si S es la función spline cúbico natural que interpola una función dos veces derivable f en los nudos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, entonces

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

Demostración. Para comprobar el enunciado acerca de $[S''(x)]^2$, hacemos

$$g(x) = f(x) - S(x)$$

de modo que $g(x_i) = 0$ para $0 \leq i \leq n$ y

$$f'' = S'' + g''$$

Ahora

$$\int_a^b (f'')^2 dx = \int_a^b (S'')^2 dx + \int_a^b (g'')^2 dx + 2 \int_a^b S'' g'' dx \quad (2.16)$$

Si la última integral fuese 0, podríamos terminar y

$$\int_a^b (f'')^2 dx = \int_a^b (S'')^2 dx + \int_a^b (g'')^2 dx \geq \int_a^b (S'')^2 dx$$

Aplicando la técnica de integración por partes a la última integral de (2.16), mostraremos que esta es 0. Tenemos

$$\int_a^b S'' g'' dx = S'' g' \Big|_a^b - \int_a^b S''' g' dx = - \int_a^b S''' g' dx$$

Aquí, se ha usado el hecho de que S es un spline cúbico natural, es decir, $S''(a) = 0$ y $S''(b) = 0$. Continuando, tenemos

$$\int_a^b S''' g' dx = - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S''' g' dx.$$

Puesto que S es un polinomio cúbico en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, su tercera derivada es una constante, digamos c_i . Así

$$\int_a^b S''' g' dx = - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} g' dx = - \sum_{i=0}^{n-1} c_i [g(t_{i+1}) - g(t_i)] = 0$$

ya que g es igual a cero en cada nudo.

□

Definición 2.3. Módulo de continuidad Supongamos que f se define en un intervalo $[a, b]$. El **módulo de continuidad** de f es $\omega(f; \delta) = \sup\{|f(u) - f(v)| : a \leq u \leq v \leq b, |u - v| \leq \delta\}$.

Aquí, \sup es el **supremo**, que es el límite superior mínimo del conjunto dado de números reales. La cantidad $\omega(f; \delta)$ mide cuánto puede cambiar f en un pequeño intervalo de ancho δ .

Teorema 2.3. Sean $f \in C^2[a, b]$ y $s \in S$ un spline de grado 3 que satisfacen

$$\begin{aligned} s(x_i) &= f_i, & i &= 0, 1, \dots, n, \\ y \quad s'(a) &= f'(a), & s'(b) &= f'(b), \end{aligned}$$

entonces para cada $x \in [a, b]$

$$|f^{(r)}(x) - s^{(r)}(x)| \leq 5\delta^{2-r} \omega(f''; \delta), \quad r = 0, 1, 2.$$

Donde $\delta = \max_{i=1, \dots, n} h_i$ y $\omega(f''; \delta)$ es el **módulo de continuidad** de f'' sobre $[a, b]$ para δ .

Demostración. Supongamos que $[a, b] = [0, 1]$. considerando la ecuación (2.7) tenemos:

$$h_{i-1}Z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)Z_i + h_iZ_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.17)$$

Para $i = 1, \dots, n-1$ consideremos:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) + f_{i-1} \\ L(x) &= f_{i+1} \frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + f_{i-1} \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_{i-1}} \\ &= \frac{1}{h_i + h_{i-1}} [f_{i+1}(x - x_{i-1}) + f_{i-1}(x_{i+1} - x)] \end{aligned}$$

es el polinomio lineal interpolante a $f(x)$ en x_{i-1} y x_{i+1} , entonces

$$\begin{aligned} f(x_i) - L(x_i) &= f_i - \frac{[f_{i+1}(x - x_{i-1}) + f_{i-1}(x_{i+1} - x)]}{h_i + h_{i-1}} \\ f(x_i) - L(x_i) &= \frac{1}{h_i + h_{i-1}} [f_i(h_i + h_{i-1}) - f_{i+1}(x_i - x_{i-1}) - f_{i-1}(x_{i+1} - x_i)] \\ &= \frac{f_i(h_i + h_{i-1}) - f_{i+1}h_{i-1} - f_{i-1}h_i}{h_i + h_{i-1}}, \end{aligned}$$

pero por el teorema (2.1.4), “existe $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ tal que”:

$$\begin{aligned} f(x_i) - L(x_i) &= \frac{f''(\xi_i)}{2}(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \\ f(x_i) - L(x_i) &= \frac{-f''(\xi_i)}{2}(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i) \\ f(x_i) - L(x_i) &= -h_{i-1}h_i \frac{f''(\xi_i)}{2}. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{-f_{i+1}h_{i-1} + f_i(h_i + h_{i-1}) - f_{i-1}h_i}{h_i + h_{i-1}} = -h_{i-1}h_i \frac{f''(\xi_i)}{2}. \quad (2.18)$$

Supongamos que $A_i = Z_i - f_i''$ y reescribimos la ecuación (2.17) utilizando A_i y la relación (2.18)

Para $i = 1, \dots, n-1$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}h_{i-1}Z_{i-1} + \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)Z_i + \frac{1}{6}h_iZ_{i+1} &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \frac{1}{6}h_{i-1}A_{i-1} + \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)A_i + \frac{1}{6}h_iA_{i+1} &= -\frac{1}{6}h_{i-1}f_{i-1}'' - \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)f_i'' - \frac{1}{6}h_i f_{i+1}'' \\ &\quad + \frac{h_{i-1}f_{i+1} - f_i(h_{i-1} + h_i) + h_i f_{i-1}}{h_i h_{i-1}} \\ &= -\frac{1}{6}h_{i-1}f_{i-1}'' - \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)f_i'' - \frac{1}{6}h_i f_{i+1}'' \\ &\quad + (h_{i-1} + h_i) \frac{f''(\xi_i)}{2} \\ &= -\frac{1}{6}h_{i-1}f_{i-1}'' - \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)f_i'' - \frac{1}{6}h_i f_{i+1}'' \\ &\quad + \frac{1}{6}(h_{i-1} + h_i)f''(\xi_i) + \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)f''(\xi_i) \\ &= -\frac{1}{6}h_{i-1}f_{i-1}'' + \frac{1}{6}h_{i-1}f''(\xi_i) + \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)f''(\xi_i) \\ &\quad - \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)f_i'' - \frac{1}{6}h_i f_{i+1}'' + \frac{1}{6}h_i f''(\xi_i) \\ &= \frac{1}{6}h_{i-1}[f''(\xi_i) - f_{i-1}''] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)[f''(\xi_i) - f''_i] \quad (2.19)$$

donde $x_0 \leq \xi_0 \leq x_1$ y $x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n$.

Para $i = 1, \dots, n-1$ tenemos:

$$“ | f''(\xi_i) - f''_{i-1} | \leq w(f''; 2\delta) ”$$

debido que $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i+1}$; de la misma forma:

$$“ | f''(\xi_i) - f''_{i+1} | \leq w(f''; 2\delta) ”$$

y

$$“ | f''(\xi_i) - f''_i | \leq w(f''; \delta) ”.$$

Utilizando las últimas desigualdades tenemos de la ecuación (2.19) que

$$\begin{aligned} & | \frac{1}{6}h_{i-1}[f''(\xi_i) - f''_{i-1}] + \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)[f''(\xi_i) - f''_i] + \frac{1}{6}h_i[f''(\xi_i) - f''_{i+1}] | \\ & \leq \frac{1}{6}h_{i-1}\omega(f''; 2\delta) + \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)\omega(f''; \delta) + \frac{1}{6}h_i\omega(f''; 2\delta) \\ & = \frac{1}{6}(h_{i-1} + h_i)\omega(f''; 2\delta) + \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)\omega(f''; \delta) \\ & \leq \frac{2}{3}(h_{i-1} + h_i)\omega(f''; \delta) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que:

$$| A_k | = \max_{i=0, \dots, n} | A_i |$$

y consideramos la k -ésima ecuación (2.19), entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} & | \frac{1}{6}h_{k-1}A_{k-1} + \frac{1}{3}(h_{k-1} + h_k)A_k + \frac{1}{6}h_kA_{k+1} | \\ & = | \frac{1}{6}h_{k-1}[f''(\xi_k) - f''_{k-1}] + \frac{1}{3}(h_{k-1} + h_k)[f''(\xi_k) - f''_k] + \frac{1}{6}h_k[f''(\xi_k) - f''_{k+1}] | \\ & \leq \frac{1}{6}h_{k-1}\omega(f''; 2\delta) + \frac{1}{3}(h_{k-1} + h_k)\omega(f''; \delta) + \frac{1}{6}h_k\omega(f''; 2\delta) \\ & = \frac{1}{6}(h_{k-1} + h_k)\omega(f''; 2\delta) + \frac{1}{3}(h_{k-1} + h_k)\omega(f''; \delta) \\ & \leq \frac{2}{3}(h_{k-1} + h_k)\omega(f''; \delta), \end{aligned}$$

aplicando $|| a | - | b || \leq | a + b |$ a la desigualdad anterior

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{6}h_{k-1}A_{k-1} + \frac{1}{3}(h_{k-1} + h_k)A_k + \frac{1}{6}h_kA_{k+1} \right| &\geq \left| \frac{1}{3}(h_{k-1} + h_k)A_k \right| - \left| \frac{1}{6}h_{k-1}A_{k-1} + \frac{1}{6}h_kA_{k+1} \right| \\
&\geq \frac{1}{3}(h_{k-1} + h_k) |A_k| - \frac{1}{6}h_{k-1} |A_{k-1}| - \frac{1}{6}h_k |A_{k+1}|
\end{aligned}$$

De la desigualdad anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{6}h_{k-1} |A_{k-1}| + \frac{1}{3}(h_{k-1} + h_k) |A_k| - \frac{1}{6}h_k |A_{k+1}| &\leq \frac{2}{3}(h_{k-1} + h_k)\omega(f''; \delta) \\
\frac{1}{3}(h_{k-1} + h_k) |A_k| &\leq \frac{2}{3}(h_{k-1} + h_k)\omega(f''; \delta) + \frac{1}{6}h_{k-1} \\
&\quad |A_{k-1}| + \frac{1}{6}h_k |A_{k+1}|;
\end{aligned}$$

$$\text{luego} \quad \frac{1}{3}(h_{k-1} + h_k)|A_k| \leq \frac{2}{3}(h_{k-1} + h_k)\omega(f''; \delta) + \frac{1}{6}(h_{k-1} + h_k) |A_k|$$

$$\text{o bien} \quad \frac{1}{6}(h_{k-1} + h_k) |A_k| \leq \frac{2}{3}(h_{k-1} + h_k)\omega(f''; \delta).$$

de lo que concluimos de que para $i = 1, \dots, n-1$,

$$|A_i| = |Z_i - f''_i| \leq |A_k| \leq 4\omega(f''; \delta).$$

Ahora, $s''(x)$ es lineal en cada $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, por lo tanto en cada subintervalo se tiene alguna de las siguientes desigualdades

$$Z_i \leq s''(x) \leq Z_{i+1}$$

$$\text{o bien} \quad Z_{i+1} \leq s''(x) \leq Z_i,$$

y esto implica que

$$Z_i - f''_i + f''_i - f''(x) \leq s''(x) - f''(x) \leq Z_{i+1} - f''_{i+1} + f''_{i+1} - f''(x)$$

o

$$Z_{i+1} - f''_{i+1} + f''_{i+1} - f''(x) \leq s''(x) - f''(x) \leq Z_i - f''_i + f''_i - f''(x),$$

de lo cual podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
|s''(x) - f''(x)| &\leq |Z_i - f''_i| + |f''_i - f''(x)| \\
&\leq 4\omega(f''; \delta) + \omega(f''; \delta) \\
&= 5\omega(f''; \delta),
\end{aligned}$$

esto último para cada $x \in [0, 1]$.

Finalmente, para $x \in [x_i, x_{i+1}]$ se tiene que $f_i = s_i$ y $f_{i+1} = s_{i+1}$; por el Teorema (1.2) existe $x_i \leq \eta_i \leq x_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$ satisface $f'(\eta_i) - s'(\eta_i) = 0$, luego

$$\begin{aligned} \text{" } | f'(x) - s'(x) | &= \left| \int_{\eta_i}^x [f''(t) - s''(t)] dt \right| \\ &\leq 5w(f''; \delta) |x - \eta_i| \\ &\leq 5w(f''; \delta) \delta, \\ \text{y tambi3n } | f(x) - s(x) | &= \left| \int_{x_i}^x [f'(t) - s'(t)] dt \right| \\ &\leq 5\omega(f''; \delta) \delta |x - x_i| \\ &= 5\omega(f''; \delta) \delta^2 \text{"} \end{aligned}$$

es v3lido para $i = 0, \dots, n - 1$, por lo que queda demostrado.

□

Capítulo 3:

Aplicación

3.1 Ingresos Tributarios 1994-2019

Incluye el Impuesto General a las Ventas por Cuenta Propia, No Domiciliados y liquidaciones de compra-retenciones, operaciones internas arroz, Impuesto Especial a las Ventas, Decreto de Urgencia N° 089-97(DCTP Fertilizantes) e Impuesto Promoción Municipal.

Tabla 3.1:

Ingresos Tributarios Recaudados por la SUNAT-Impuesto General a las Ventas Interno, Enero 1994-Diciembre 2019 (Miles de millones de soles).

Lambayeque	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Oct.	Nov.	Dic.
1994	2,721	2,739	2,983	2,504	2,745	3,291	3,610	4,003	4,790	4,008	4,788	4,460
1995	5,519	5,579	4,919	5,873	4,435	3,578	5,537	6,654	5,783	5,286	4,080	3,479
1996	4,871	5,691	3,844	5,220	4,691	4,316	5,446	4,455	3,870	4,843	5,294	3,877
1997	4,353	4,323	3,994	4,530	3,940	4,638	4,919	4,778	7,517	5,620	5,073	5,142
1998	7,228	4,951	3,190	3,441	3,682	3,986	4,691	4,824	5,561	5,396	6,033	4,537
1999	6,049	5,374	4,463	5,187	5,127	5,559	5,008	4,709	5,039	5,177	4,991	5,457
2000	4,584	5,402	4,786	3,073	5,003	4,186	4,219	4,954	4,856	5,188	4,940	4,269
2001	3,930	5,593	2,519	3,629	3,814	7,384	4,315	5,621	3,824	5,533	5,302	6,169
2002	5,044	5,028	3,396	4,602	3,547	4,131	4,787	4,617	4,526	5,636	5,097	4,770
2003	6,584	4,811	4,629	4,336	4,268	5,936	5,049	5,805	5,490	4,684	5,099	6,474
2004	6,228	5,927	4,463	4,396	5,172	6,244	4,971	4,833	4,867	4,236	5,426	5,619
2005	5,451	5,692	4,609	4,837	6,527	6,060	5,477	7,465	6,310	3,854	6,189	8,724
2006	8,001	6,697	7,139	5,802	7,784	8,484	8,769	8,970	7,502	8,607	7,641	8,594
2007	9,659	6,285	5,938	6,035	5,870	9,099	8,460	7,816	6,414	7,192	7,239	7,573
2008	11,330	8,491	7,809	6,871	6,989	9,484	9,539	8,410	7,670	11,465	8,636	7,981
2009	11,469	10,504	9,033	9,478	9,343	12,099	10,216	9,515	9,680	11,513	9,051	12,012
2010	16,207	12,037	10,848	8,474	9,091	16,008	15,386	10,620	13,335	11,724	15,600	13,460
2011	17,633	15,091	12,223	12,822	15,625	14,811	14,129	13,597	13,452	14,573	19,852	23,763
2012	17,934	16,508	13,944	13,502	12,325	13,679	18,158	17,187	15,328	20,568	18,464	18,147
2013	21,257	26,387	17,162	19,080	14,320	17,816	20,188	16,884	19,968	19,537	22,453	23,664
2014	26,853	23,199	21,663	19,720	18,082	21,076	19,925	22,677	28,912	21,721	20,486	21,386
2015	24,621	18,971	17,010	18,886	18,319	16,497	16,150	17,487	21,681	19,489	22,994	19,825
2016	27,815	20,414	20,659	15,704	19,614	20,490	18,897	26,390	21,911	16,552	16,306	18,510
2017	37,731	20,899	11,744	13,609	14,042	14,797	16,057	22,867	22,991	23,652	19,428	16,563
2018	26,516	24,343	18,631	19,756	19,936	19,564	21,832	26,645	24,788	19,916	18,755	22,232
2019	32,180	24,263	19,582	23,676	23,422	23,762	25,554	29,036	22,559	23,640	23,961	23,125

3.2 Ingreso tributario mensual mediante Spline Cúbicos

A continuación en la Tabla (3.2) se muestra los ingresos tributarios recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 1994, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, obteniendo como resultado una función polinómica por tramos.

Tabla 3.2:

Ingresos Tributarios Recaudados por la SUNAT-Impuesto General a las Ventas Interno, 1994

Lambayeque	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Oct.	Nov.	Dic.
1994	2,721	2,739	2,983	2,504	2,745	3,291	3,610	4,003	4,790	4,008	4,788	4,460

1. Definamos un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos que se forman:

$$\begin{aligned}
 "S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3 & \text{sí } x \in [1, 2] \\ S_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3 & \text{sí } x \in [2, 3] \\ S_2(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 & \text{sí } x \in [3, 4] \\ S_3(x) = a_3 + b_3x + c_3x^2 + d_3x^3 & \text{sí } x \in [4, 5] \\ S_4(x) = a_4 + b_4x + c_4x^2 + d_4x^3 & \text{sí } x \in [5, 6] \\ S_5(x) = a_5 + b_5x + c_5x^2 + d_5x^3 & \text{sí } x \in [6, 7] \\ S_6(x) = a_6 + b_6x + c_6x^2 + d_6x^3 & \text{sí } x \in [7, 8] \\ S_7(x) = a_7 + b_7x + c_7x^2 + d_7x^3 & \text{sí } x \in [8, 9] \\ S_8(x) = a_8 + b_8x + c_8x^2 + d_8x^3 & \text{sí } x \in [9, 10] \\ S_9(x) = a_9 + b_9x + c_9x^2 + d_9x^3 & \text{sí } x \in [10, 11] \\ S_{10}(x) = a_{10} + b_{10}x + c_{10}x^2 + d_{10}x^3 & \text{sí } x \in [11, 12] \end{cases} \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

2. A continuación hacemos que se cumpla la condición de que la spline cúbica debe pasar por los puntos dados en la tabla (3.2), se tiene:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(1) = a_0 + b_0(1) + c_0(1)^2 + d_0(1)^3 & \text{sí } x \in [1, 2] \\ S_1(2) = a_1 + b_1(2) + c_1(2)^2 + d_1(2)^3 & \text{sí } x \in [2, 3] \\ S_2(3) = a_2 + b_2(3) + c_2(3)^2 + d_2(3)^3 & \text{sí } x \in [3, 4] \\ S_3(4) = a_3 + b_3(4) + c_3(4)^2 + d_3(4)^3 & \text{sí } x \in [4, 5] \\ S_4(5) = a_4 + b_4(5) + c_4(5)^2 + d_4(5)^3 & \text{sí } x \in [5, 6] \\ S_5(6) = a_5 + b_5(6) + c_5(6)^2 + d_5(6)^3 & \text{sí } x \in [6, 7] \\ S_6(7) = a_6 + b_6(7) + c_6(7)^2 + d_6(7)^3 & \text{sí } x \in [7, 8] \\ S_7(8) = a_7 + b_7(8) + c_7(8)^2 + d_7(8)^3 & \text{sí } x \in [8, 9] \\ S_8(9) = a_8 + b_8(9) + c_8(9)^2 + d_8(9)^3 & \text{sí } x \in [9, 10] \\ S_9(10) = a_9 + b_9(10) + c_9(10)^2 + d_9(10)^3 & \text{sí } x \in [10, 11] \\ S_{10}(11) = a_{10} + b_{10}(11) + c_{10}(11)^2 + d_{10}(11)^3 & \text{sí } x \in [11, 12] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 + c_0 + d_0 &= 2,721 \\ a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 &= 2,739 \\ a_2 + 3b_2 + 9c_2 + 27d_2 &= 2,983 \\ a_3 + 4b_3 + 16c_3 + 64d_3 &= 2,504 \\ a_4 + 5b_4 + 25c_4 + 125d_4 &= 2,745 \\ a_5 + 6b_5 + 36c_5 + 216d_5 &= 3,291 \\ a_6 + 7b_6 + 49c_6 + 343d_6 &= 3,610 \\ a_7 + 8b_7 + 64c_7 + 512d_7 &= 4,003 \\ a_8 + 9b_8 + 81c_8 + 729d_8 &= 4,790 \\ a_9 + 10b_9 + 100c_9 + 1000d_9 &= 4,008 \\ a_{10} + 11b_{10} + 121c_{10} + 1331d_{10} &= 4,788 \\ a_{10} + 12b_{10} + 144c_{10} + 1728d_{10} &= 4,460 \end{aligned}$$

3. Igualando

$$S_0(2) = S_1(2)$$

$$a_0 + b_0(2) + c_0(2)^2 + d_0(2)^3 = a_1 + b_1(2) + c_1(2)^2 + d_1(2)^3$$

$$a_0 + 2b_0 + 4c_0 + 8d_0 = a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1$$

$$a_0 + 2b_0 + 4c_0 + 8d_0 - a_1 - 2b_1 - 4c_1 - 8d_1 = 0$$

$$S_1(3) = S_2(3)$$

$$a_1 + b_1(3) + c_1(3)^2 + d_1(3)^3 = a_2 + b_2(3) + c_2(3)^2 + d_2(3)^3$$

$$a_1 + 3b_1 + 9c_1 + 27d_1 = a_2 + 3b_2 + 9c_2 + 27d_2$$

$$a_1 + 3b_1 + 9c_1 + 27d_1 - a_2 - 3b_2 - 9c_2 - 27d_2 = 0$$

$$S_2(4) = S_3(4)$$

$$a_2 + b_2(4) + c_2(4)^2 + d_2(4)^3 = a_3 + b_3(4) + c_3(4)^2 + d_3(4)^3$$

$$a_2 + 4b_2 + 16c_2 + 64d_2 = a_3 + 4b_3 + 16c_3 + 64d_3$$

$$a_2 + 4b_2 + 16c_2 + 64d_2 - a_3 - 4b_3 - 16c_3 - 64d_3 = 0$$

$$S_3(5) = S_4(5)$$

$$a_3 + b_3(5) + c_3(5)^2 + d_3(5)^3 = a_4 + b_4(5) + c_4(5)^2 + d_4(5)^3$$

$$a_3 + 5b_3 + 25c_3 + 125d_3 = a_4 + 5b_4 + 25c_4 + 125d_4$$

$$a_3 + 5b_3 + 25c_3 + 125d_3 - a_4 - 5b_4 - 25c_4 - 125d_4 = 0$$

$$S_4(6) = S_5(6)$$

$$a_4 + b_4(6) + c_4(6)^2 + d_4(6)^3 = a_5 + b_5(6) + c_5(6)^2 + d_5(6)^3$$

$$a_4 + 6b_4 + 36c_4 + 216d_4 = a_5 + 6b_5 + 36c_5 + 216d_5$$

$$a_4 + 6b_4 + 36c_4 + 216d_4 - a_5 - 6b_5 - 36c_5 - 216d_5 = 0$$

$$S_5(7) = S_6(7)$$

$$a_5 + b_5(7) + c_5(7)^2 + d_5(7)^3 = a_6 + b_6(7) + c_6(7)^2 + d_6(7)^3$$

$$a_5 + 7b_5 + 49c_5 + 343d_5 = a_6 + 7b_6 + 49c_6 + 343d_6$$

$$a_5 + 7b_5 + 49c_5 + 343d_5 - a_6 - 7b_6 - 49c_6 - 343d_6 = 0$$

$$S_6(8) = S_7(8)$$

$$a_6 + b_6(8) + c_6(8)^2 + d_6(8)^3 = a_7 + b_7(8) + c_7(8)^2 + d_7(8)^3$$

$$a_6 + 8b_6 + 64c_6 + 512d_6 = a_7 + 8b_7 + 64c_7 + 512d_7$$

$$a_6 + 8b_6 + 64c_6 + 512d_6 - a_7 - 8b_7 - 64c_7 - 512d_7 = 0$$

$$S_7(9) = S_8(9)$$

$$a_7 + b_7(9) + c_7(9)^2 + d_7(9)^3 = a_8 + b_8(9) + c_8(9)^2 + d_8(9)^3$$

$$a_7 + 9b_7 + 81c_7 + 729d_7 = a_8 + 9b_8 + 81c_8 + 729d_8$$

$$a_7 + 9b_7 + 81c_7 + 729d_7 - a_8 - 9b_8 - 81c_8 - 729d_8 = 0$$

$$S_8(10) = S_9(10)$$

$$a_8 + b_8(10) + c_8(10)^2 + d_8(10)^3 = a_9 + b_9(10) + c_9(10)^2 + d_9(10)^3$$

$$a_8 + 10b_8 + 100c_8 + 1000d_8 = a_9 + 10b_9 + 100c_9 + 1000d_9$$

$$a_8 + 10b_8 + 100c_8 + 1000d_8 - a_9 - 10b_9 - 100c_9 - 1000d_9 = 0$$

$$S_9(11) = S_{10}(11)$$

$$a_9 + b_9(11) + c_9(11)^2 + d_9(11)^3 = a_{10} + b_{10}(11) + c_{10}(11)^2 + d_{10}(11)^3$$

$$a_9 + 11b_9 + 121c_9 + 1331d_9 = a_{10} + 11b_{10} + 121c_{10} + 1331d_{10}$$

$$a_9 + 11b_9 + 121c_9 + 1331d_9 - a_{10} - 11b_{10} - 121c_{10} - 1331d_{10} = 0$$

4. Derivando $S(x)$

$$S'(x) = \begin{cases} S'_0(x) = b_0 + 2c_0(x) + 3d_0(x)^2 & \text{sí } x \in [1, 2] \\ S'_1(x) = b_1 + 2c_1(x) + 3d_1(x)^2 & \text{sí } x \in [2, 3] \\ S'_2(x) = b_2 + 2c_2(x) + 3d_2(x)^2 & \text{sí } x \in [3, 4] \\ S'_3(x) = b_3 + 2c_3(x) + 3d_3(x)^2 & \text{sí } x \in [4, 5] \\ S'_4(x) = b_4 + 2c_4(x) + 3d_4(x)^2 & \text{sí } x \in [5, 6] \\ S'_5(x) = b_5 + 2c_5(x) + 3d_5(x)^2 & \text{sí } x \in [6, 7] \\ S'_6(x) = b_6 + 2c_6(x) + 3d_6(x)^2 & \text{sí } x \in [7, 8] \\ S'_7(x) = b_7 + 2c_7(x) + 3d_7(x)^2 & \text{sí } x \in [8, 9] \\ S'_8(x) = b_8 + 2c_8(x) + 3d_8(x)^2 & \text{sí } x \in [9, 10] \\ S'_9(x) = b_9 + 2c_9(x) + 3d_9(x)^2 & \text{sí } x \in [10, 11] \\ S'_{10}(x) = b_{10} + 2c_{10}(x) + 3d_{10}(x)^2 & \text{sí } x \in [11, 12] \end{cases} \quad (3.2)$$

Igualando

$$S'_0(2) = S'_1(2)$$

$$b_0 + 2c_0(2) + 3d_0(2)^2 = b_1 + 2c_1(2) + 3d_1(2)^2$$

$$b_0 + 4c_0 + 12d_0 = b_1 + 4c_1 + 12d_1$$

$$b_0 + 4c_0 + 12d_0 - b_1 - 4c_1 - 12d_1 = 0$$

$$S'_1(3) = S'_2(3)$$

$$b_1 + 2c_1(3) + 3d_1(3)^2 = b_2 + 2c_2(3) + 3d_2(3)^2$$

$$b_1 + 6c_1 + 27d_1 = b_2 + 6c_2 + 27d_2$$

$$b_1 + 6c_1 + 27d_1 - b_2 - 6c_2 - 27d_2 = 0$$

$$S'_2(4) = S'_3(4)$$

$$b_2 + 2c_2(4) + 3d_2(4)^2 = b_3 + 2c_3(4) + 3d_3(4)^2$$

$$b_2 + 8c_2 + 48d_2 = b_3 + 8c_3 + 48d_3$$

$$b_2 + 8c_2 + 48d_2 - b_3 - 8c_3 - 48d_3 = 0$$

$$S'_3(5) = S'_4(5)$$

$$b_3 + 2c_3(5) + 3d_3(5)^2 = b_4 + 2c_4(5) + 3d_4(5)^2$$

$$b_3 + 10c_3 + 75d_3 = b_4 + 10c_4 + 75d_4$$

$$b_3 + 10c_3 + 75d_3 - b_4 - 10c_4 - 75d_4 = 0$$

$$S'_4(6) = S'_5(6)$$

$$b_4 + 2c_4(6) + 3d_4(6)^2 = b_5 + 2c_5(6) + 3d_5(6)^2$$

$$b_4 + 12c_4 + 108d_4 = b_5 + 12c_5 + 108d_5$$

$$b_4 + 12c_4 + 108d_4 - b_5 - 12c_5 - 108d_5 = 0$$

$$S'_5(7) = S'_6(7)$$

$$b_5 + 2c_5(7) + 3d_5(7)^2 = b_6 + 2c_6(7) + 3d_6(7)^2$$

$$b_5 + 14c_5 + 147d_5 = b_6 + 14c_6 + 147d_6$$

$$b_5 + 14c_5 + 147d_5 - b_6 - 14c_6 - 147d_6 = 0$$

$$S'_6(8) = S'_7(8)$$

$$b_6 + 2c_6(8) + 3d_6(8)^2 = b_7 + 2c_7(8) + 3d_7(8)^2$$

$$b_6 + 16c_6 + 192d_6 = b_7 + 16c_7 + 192d_7$$

$$b_6 + 16c_6 + 192d_6 - b_7 - 16c_7 - 192d_7 = 0$$

$$S'_7(9) = S'_8(9)$$

$$b_7 + 2c_7(9) + 3d_7(9)^2 = b_8 + 2c_8(9) + 3d_8(9)^2$$

$$b_7 + 18c_7 + 243d_7 = b_8 + 18c_8 + 243d_8$$

$$b_7 + 18c_7 + 243d_7 - b_8 - 18c_8 - 243d_8 = 0$$

$$S'_8(10) = S'_9(10)$$

$$b_8 + 2c_8(10) + 3d_8(10)^2 = b_9 + 2c_9(10) + 3d_9(10)^2$$

$$b_8 + 20c_8 + 300d_8 = b_9 + 20c_9 + 300d_9$$

$$b_8 + 20c_8 + 300d_8 - b_9 - 20c_9 - 300d_9 = 0$$

$$S'_9(11) = S'_{10}(11)$$

$$b_9 + 2c_9(11) + 3d_9(11)^2 = b_{10} + 2c_{10}(11) + 3d_{10}(11)^2$$

$$b_9 + 22c_9 + 363d_9 = b_{10} + 22c_{10} + 363d_{10}$$

$$b_9 + 22c_9 + 363d_9 - b_{10} - 22c_{10} - 363d_{10} = 0$$

5. Derivando $S''(x)$

$$S''(x) = \begin{cases} S''_0(x) = 2c_0 + 6d_0(x) & \text{sí } x \in [1, 2] \\ S''_1(x) = 2c_1 + 6d_1(x) & \text{sí } x \in [2, 3] \\ S''_2(x) = 2c_2 + 6d_2(x) & \text{sí } x \in [3, 4] \\ S''_3(x) = 2c_3 + 6d_3(x) & \text{sí } x \in [4, 5] \\ S''_4(x) = 2c_4 + 6d_4(x) & \text{sí } x \in [5, 6] \\ S''_5(x) = 2c_5 + 6d_5(x) & \text{sí } x \in [6, 7] \\ S''_6(x) = 2c_6 + 6d_6(x) & \text{sí } x \in [7, 8] \\ S''_7(x) = 2c_7 + 6d_7(x) & \text{sí } x \in [8, 9] \\ S''_8(x) = 2c_8 + 6d_8(x) & \text{sí } x \in [9, 10] \\ S''_9(x) = 2c_9 + 6d_9(x) & \text{sí } x \in [10, 11] \\ S''_{10}(x) = 2c_{10} + 6d_{10}(x) & \text{sí } x \in [11, 12] \end{cases} \quad (3.3)$$

Para lograr la continuidad se tiene:

$$S''_0(2) = S''_1(2)$$

$$2c_0 + 6d_0(2) = 2c_1 + 6d_1(2)$$

$$2c_0 + 12d_0 = 2c_1 + 12d_1$$

$$2c_0 + 12d_0 - 2c_1 - 12d_1 = 0$$

$$S_1''(3) = S_2''(3)$$

$$2c_1 + 6d_1(3) = 2c_2 + 6d_2(3)$$

$$2c_1 + 18d_1 = 2c_2 + 18d_2$$

$$2c_1 + 18d_1 - 2c_2 - 18d_2 = 0$$

$$S_2''(4) = S_3''(4)$$

$$2c_2 + 6d_2(4) = 2c_3 + 6d_3(4)$$

$$2c_2 + 24d_2 = 2c_3 + 24d_3$$

$$2c_2 + 24d_2 - 2c_3 - 24d_3 = 0$$

$$S_3''(5) = S_4''(5)$$

$$2c_3 + 6d_3(5) = 2c_4 + 6d_4(5)$$

$$2c_3 + 30d_3 = 2c_4 + 30d_4$$

$$2c_3 + 30d_3 - 2c_4 - 30d_4 = 0$$

$$S_4''(6) = S_5''(6)$$

$$2c_4 + 6d_4(6) = 2c_5 + 6d_5(6)$$

$$2c_4 + 36d_4 = 2c_5 + 36d_5$$

$$2c_4 + 36d_4 - 2c_5 - 36d_5 = 0$$

$$S_5''(7) = S_6''(7)$$

$$2c_5 + 6d_5(7) = 2c_6 + 6d_6(7)$$

$$2c_5 + 42d_5 = 2c_6 + 42d_6$$

$$2c_5 + 42d_5 - 2c_6 - 42d_6 = 0$$

$$S_6''(8) = S_7''(8)$$

$$2c_6 + 6d_6(8) = 2c_7 + 6d_7(8)$$

$$2c_6 + 48d_6 = 2c_7 + 48d_7$$

$$2c_6 + 48d_6 - 2c_7 - 48d_7 = 0$$

$$S_7''(9) = S_8''(9)$$

$$2c_7 + 6d_7(9) = 2c_8 + 6d_8(9)$$

$$2c_7 + 54d_7 = 2c_8 + 54d_8$$

$$2c_7 + 54d_7 - 2c_8 - 54d_8 = 0$$

$$S_8''(10) = S_9''(10)$$

$$2c_8 + 6d_8(10) = 2c_9 + 6d_9(10)$$

$$2c_8 + 60d_8 = 2c_9 + 60d_9$$

$$2c_8 + 60d_8 - 2c_9 - 60d_9 = 0$$

$$S_9''(11) = S_{10}''(11)$$

$$2c_9 + 6d_9(11) = 2c_{10} + 6d_{10}(11)$$

$$2c_9 + 66d_9 = 2c_{10} + 66d_{10}$$

$$2c_9 + 66d_9 - 2c_{10} - 66d_{10} = 0$$

6. Se agregan las siguientes 2 condiciones:

$$\blacksquare S''_0(x_0) = 0$$

$$S''(1) = 0$$

$$2c_0 + 6d_0(1) = 0$$

$$2c_0 + 6d_0 = 0$$

$$\blacksquare S''_{10}(x_{11}) = 0$$

$$S''(12) = 0$$

$$2c_{10} + 6d_{10}(12) = 0$$

$$2c_{10} + 72d_{10} = 0$$

Se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ll}
a_0 + b_0 + c_0 + d_0 & = 2,721 \\
a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 & = 2,739 \\
a_2 + 3b_2 + 9c_2 + 27d_2 & = 2,983 \\
a_3 + 4b_3 + 16c_3 + 64d_3 & = 2,504 \\
a_4 + 5b_4 + 25c_4 + 125d_4 & = 2,745 \\
a_5 + 6b_5 + 36c_5 + 216d_5 & = 3,291 \\
a_6 + 7b_6 + 49c_6 + 343d_6 & = 3,610 \\
a_7 + 8b_7 + 64c_7 + 512d_7 & = 4,003 \\
a_8 + 9b_8 + 81c_8 + 729d_8 & = 4,790 \\
a_9 + 10b_9 + 100c_9 + 1000d_9 & = 4,008 \\
a_{10} + 11b_{10} + 121c_{10} + 1331d_{10} & = 4,788 \\
a_{10} + 12b_{10} + 144c_{10} + 1728d_{10} & = 4,460 \\
a_0 + 2b_0 + 4c_0 + 8d_0 - a_1 - 2b_1 - 4c_1 - 8d_1 & = 0 \\
a_1 + 3b_1 + 9c_1 + 27d_1 - a_2 - 3b_2 - 9c_2 - 27d_2 & = 0 \\
a_2 + 4b_2 + 16c_2 + 64d_2 - a_3 - 4b_3 - 16c_3 - 64d_3 & = 0 \\
a_3 + 5b_3 + 25c_3 + 125d_3 - a_4 - 5b_4 - 25c_4 - 125d_4 & = 0 \\
a_4 + 6b_4 + 36c_4 + 216d_4 - a_5 - 6b_5 - 36c_5 - 216d_5 & = 0 \\
a_5 + 7b_5 + 49c_5 + 343d_5 - a_6 - 7b_6 - 49c_6 - 343d_6 & = 0 \\
a_6 + 8b_6 + 64c_6 + 512d_6 - a_7 - 8b_7 - 64c_7 - 512d_7 & = 0 \\
a_7 + 9b_7 + 81c_7 + 729d_7 - a_8 - 9b_8 - 81c_8 - 729d_8 & = 0 \\
a_8 + 10b_8 + 100c_8 + 1000d_8 - a_9 - 10b_9 - 100c_9 - 1000d_9 & = 0 \\
a_9 + 11b_9 + 121c_9 + 1331d_9 - a_{10} - 11b_{10} - 121c_{10} - 1331d_{10} & = 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}b_0 + 4c_0 + 12d_0 - b_1 - 4c_1 - 12d_1 &= 0 \\b_1 + 6c_1 + 27d_1 - b_2 - 6c_2 - 27d_2 &= 0 \\b_2 + 8c_2 + 48d_2 - b_3 - 8c_3 - 48d_3 &= 0 \\b_3 + 10c_3 + 75d_3 - b_4 - 10c_4 - 75d_4 &= 0 \\b_4 + 12c_4 + 108d_4 - b_5 - 12c_5 - 108d_5 &= 0 \\b_5 + 14c_5 + 147d_5 - b_6 - 14c_6 - 147d_6 &= 0 \\b_6 + 16c_6 + 192d_6 - b_7 - 16c_7 - 192d_7 &= 0 \\b_7 + 18c_7 + 243d_7 - b_8 - 18c_8 - 243d_8 &= 0 \\b_8 + 20c_8 + 300d_8 - b_9 - 20c_9 - 300d_9 &= 0 \\b_9 + 22c_9 + 363d_9 - b_{10} - 22c_{10} - 363d_{10} &= 0 \\2c_0 + 12d_0 - 2c_1 - 12d_1 &= 0 \\2c_1 + 18d_1 - 2c_2 - 18d_2 &= 0 \\2c_2 + 24d_2 - 2c_3 - 24d_3 &= 0 \\2c_3 + 30d_3 - 2c_4 - 30d_4 &= 0 \\2c_4 + 36d_4 - 2c_5 - 36d_5 &= 0 \\2c_5 + 42d_5 - 2c_6 - 42d_6 &= 0 \\2c_6 + 48d_6 - 2c_7 - 48d_7 &= 0 \\2c_7 + 54d_7 - 2c_8 - 54d_8 &= 0 \\2c_8 + 60d_8 - 2c_9 - 60d_9 &= 0 \\2c_9 + 66d_9 - 2c_{10} - 66d_{10} &= 0 \\2c_0 + 6d_0 &= 0 \\2c_{10} + 72d_{10} &= 0\end{aligned}$$

[illegible]

Utilizando Matlab

```
format long
b=[2721;
2739;
2983;
2504;
2745;
3291;
3610;
4003;
4790;
4008;
4788;
```

4790;

4008;

4788;

```
4460;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
```

```
0;
0;
0]
x=inv(A)*b

x =

    1.0e+06 *

    0.002703000000000
    0.000266995004595
   -0.000373492506893
    0.000124497502298
    0.006870880110285
   -0.005984825160832
    0.002752417575821
   -0.000396487511488
   -0.017670501378561
    0.018556556328014
   -0.005428042920461
    0.000512452543654
    0.028587111855632
   -0.016136653597630
    0.003245259560950
   -0.000210322663130
    0.013067015356326
   -0.006824595698040
    0.001382847981030
   -0.000086161891135
   -0.010505522305691
```

```
0.004961673133032
-0.000581530157477
0.000022970227670
-0.103908110509785
0.044991353791935
-0.006300055965893
0.000295280980452
0.499931956015239
-0.181448671154973
0.022004947152480
-0.000884094149480
-1.076304384088576
0.343963442212878
-0.036374176555073
0.001278095617467
1.299079553764086
-0.368651739142874
0.034887341580505
-0.001097288320386
-0.748458951556466
0.189767853217271
-0.015878075906779
0.000441057664077
```

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2703 + 266.995004595x - 373.492506893x^2 + 124.497502298x^3 & \text{sí } x \in [1, 2] \\ S_1(x) = 6870.880110285 - 5984.825160832x + 2752.417575821x^2 - 396.487511488x^3 & \text{sí } x \in [2, 3] \\ S_2(x) = -17670.501378561 + 18556.556328014x - 5428.042920461x^2 + 512.452543654x^3 & \text{sí } x \in [3, 4] \\ S_3(x) = 28587.111855632 - 16136.653597630x + 3245.259560950x^2 - 210.322663130x^3 & \text{sí } x \in [4, 5] \\ S_4(x) = 13067.015356326 - 6824.595698040x + 1382.847981030x^2 - 86.161891135x^3 & \text{sí } x \in [5, 6] \\ S_5(x) = -10505.522305691 + 4961.673133032x - 581.530157477x^2 + 22.970227670x^3 & \text{sí } x \in [6, 7] \\ S_6(x) = -103908.110509785 + 44991.353791935x - 6300.055965893x^2 + 295.280980452x^3 & \text{sí } x \in [7, 8] \\ S_7(x) = 499931.956015239 - 181448.671154973x + 22004.947152480x^2 - 884.094149480x^3 & \text{sí } x \in [8, 9] \\ S_8(x) = -1076304.384088576 + 343963.442212878x - 36374.176555073x^2 + 1278.095617467x^3 & \text{sí } x \in [9, 10] \\ S_9(x) = 1299079.553764086 - 368651.739142874x + 34887.341580505x^2 - 1097.288320386x^3 & \text{sí } x \in [10, 11] \\ S_{10}(x) = -748458.951556466 + 189767.853217271x - 15878.075906779x^2 + 441.057664077x^3 & \text{sí } x \in [11, 12] \end{cases} \quad (3.4)$$

Para poder simplificar todo el proceso algebraico, se ha realizado una interfaz gráfica de usuario simple, de tal manera que solamente se pueda ingresar los datos, con dar clic me muestre los coeficientes de los polinomios, el valor a encontrar y su gráfica, tal como se muestra en la Figura (3.1).

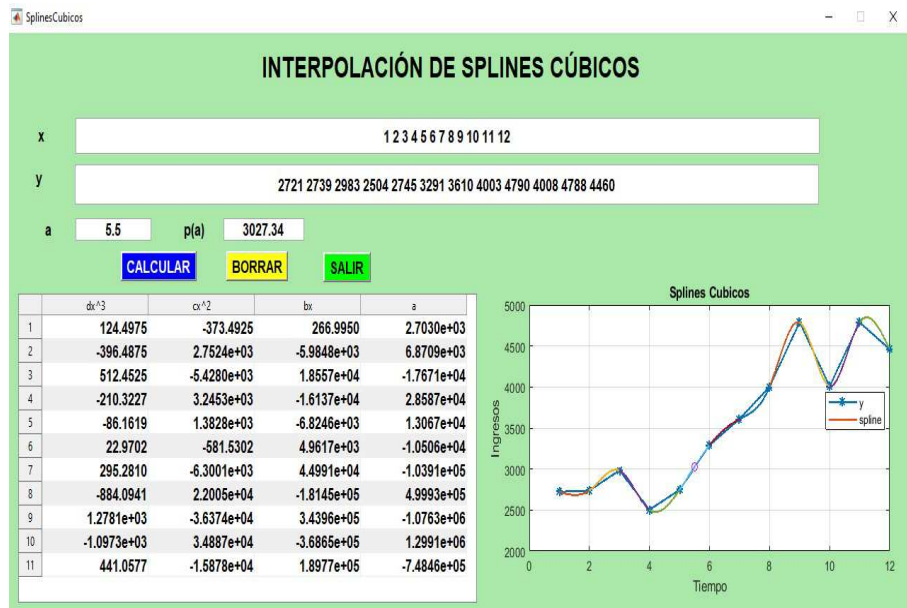


Figura 3.1: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 1994*

Se debe tener en cuenta que los coeficientes que muestra la interfaz son de orden descendente o sea $d_ix^3 + c_ix^2 + b_ix + a_i$ por lo que las ecuaciones (3.4) y (3.5) son iguales. De la Figura (3.1) se procede a formar el $S(x)$ de la siguiente manera:

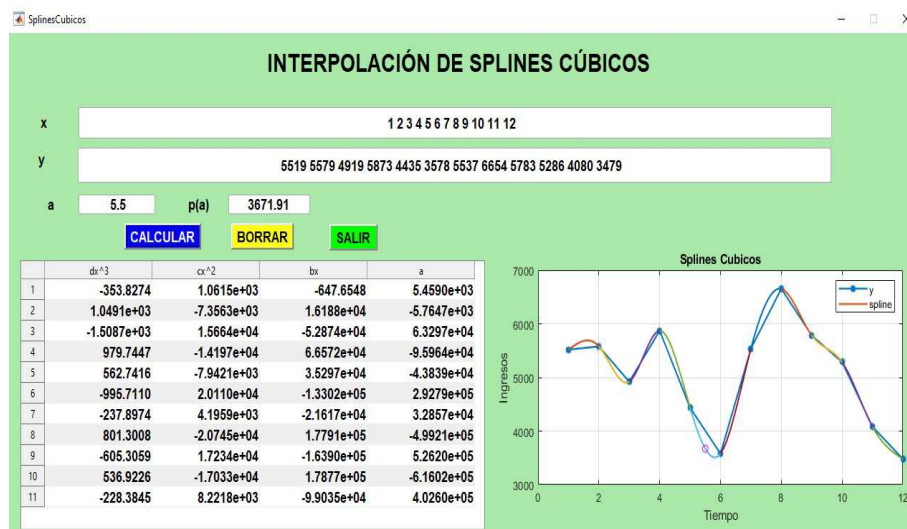
$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 124,4975x^3 - 373,4925x^2 + 266,9950x + 2,7030e + 03 & \text{sí } x \in [1, 2] \\ S_1(x) = -396,4875x^3 + 2,7524e + 03x^2 - 5,9848e + 03x + 6,8709e + 03 & \text{sí } x \in [2, 3] \\ S_2(x) = 512,4525x^3 - 5,4280e + 03x^2 + 1,8557e + 04x - 1,7671e + 04 & \text{sí } x \in [3, 4] \\ S_3(x) = -210,3227x^3 + 3,2453e + 03x^2 - 1,6137e + 04x + 2,8587e + 04 & \text{sí } x \in [4, 5] \\ S_4(x) = -86,1619x^3 + 1,3828e + 03x^2 - 6,8246e + 03x + 1,3067e + 04 & \text{sí } x \in [5, 6] \\ S_5(x) = 22,9702x^3 - 581,5302x^2 + 4,9617e + 03x - 1,0506e + 04 & \text{sí } x \in [6, 7] \\ S_6(x) = 295,2810x^3 - 6,3001e + 03x^2 + 4,4991e + 04x - 1,0391e + 05 & \text{sí } x \in [7, 8] \\ S_7(x) = -884,0941x^3 + 2,2005e + 04x^2 - 1,8145e + 05x + 4,9993e + 05 & \text{sí } x \in [8, 9] \\ S_8(x) = 1,2781e + 03x^3 - 3,6374e + 04x^2 + 3,4396e + 05x - 1,0763e + 06 & \text{sí } x \in [9, 10] \\ S_9(x) = -1,0973e + 03x^3 + 3,4887e + 04x^2 - 3,6865e + 05x + 1,2991e + 06 & \text{sí } x \in [10, 11] \\ S_{10}(x) = 441,0577x^3 - 1,5878e + 04x^2 + 1,8977e + 05x - 7,4846e + 05 & \text{sí } x \in [11, 12] \end{cases} \quad (3.5)$$

Ingreso tributario mensual del año 1995

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 1995, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de mayo.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 1995.

Figura 3.2: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 1995.*



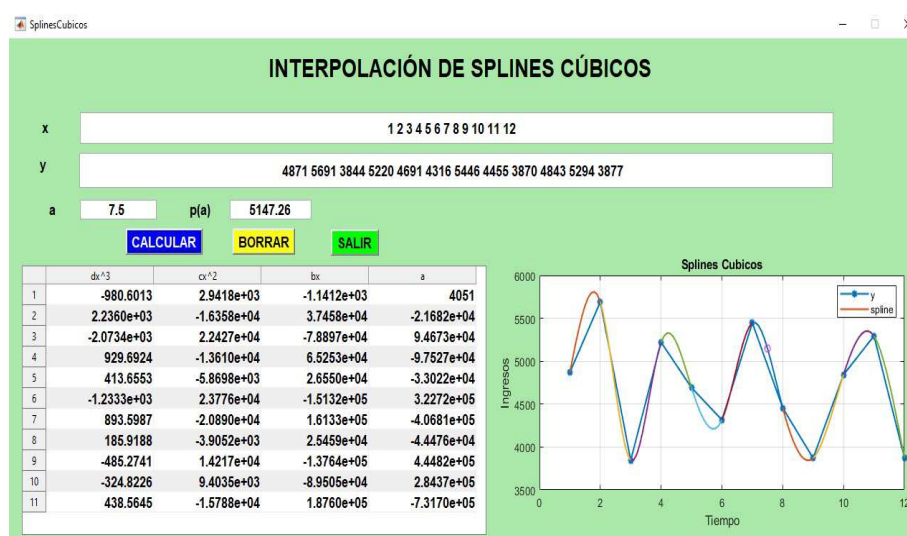
Como se puede observar en la Figura (3.2) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 3671.91 (millones de soles) en el mes de mayo.

Ingreso tributario mensual del año 1996

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 1996, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de julio.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 1996.

Figura 3.3: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 1996.*



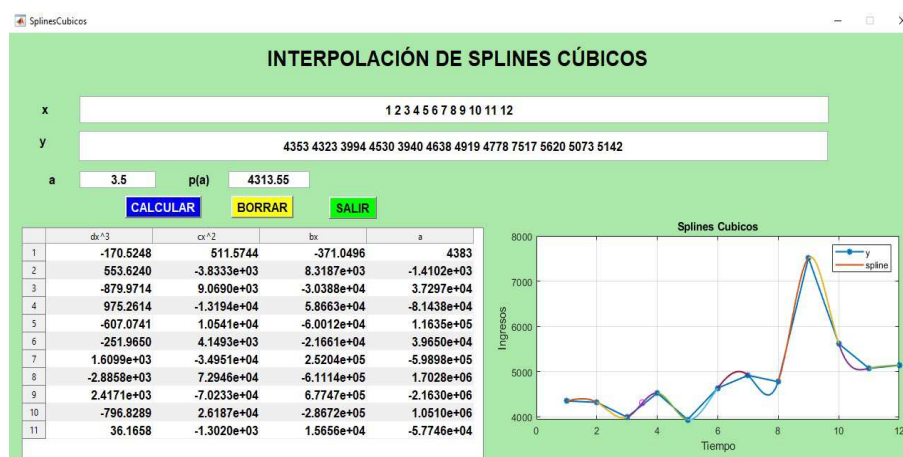
Como se puede observar en la Figura (3.3) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 5147.26 (millones de soles) en el mes de julio.

Ingreso tributario mensual del año 1997

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 1997, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de marzo.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 1997.

Figura 3.4: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 1997.*



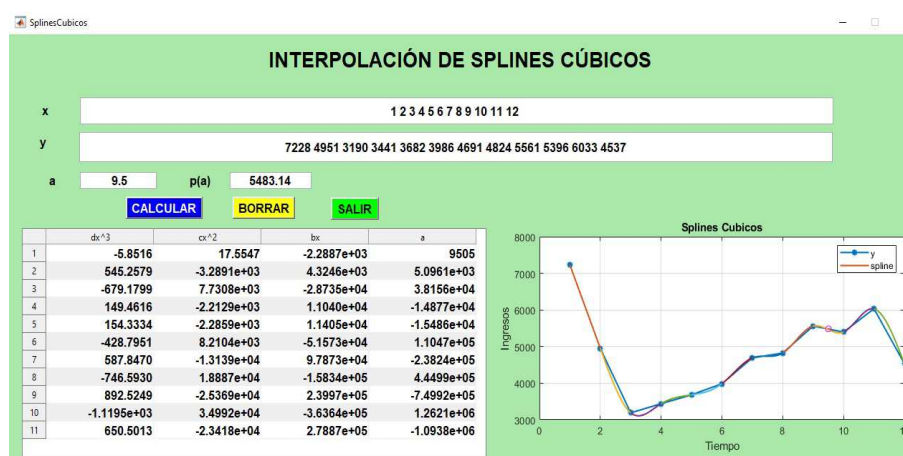
Como se puede observar en la Figura (3.4) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 4313.56 (millones de soles) en el mes de marzo.

Ingreso tributario mensual del año 1998

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 1998, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de septiembre.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 1998.

Figura 3.5: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 1998.*



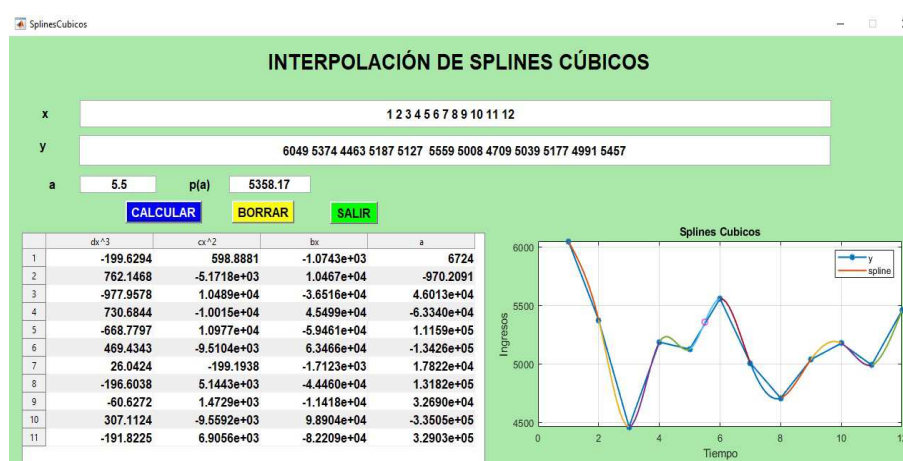
Como se puede observar en la Figura (3.5) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 5483.14 (millones de soles) en el mes de septiembre.

Ingreso tributario mensual del año 1999

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 1999, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de mayo.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 1999.

Figura 3.6: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 1999*



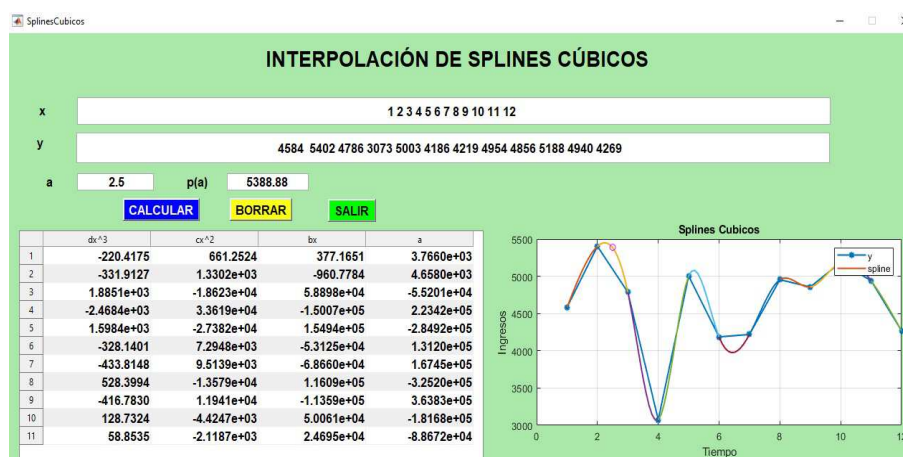
Como se puede observar en la Figura (3.6) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 5358.17 (millones de soles) en el mes de mayo.

Ingreso tributario mensual del año 2000

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2000, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de febrero.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2000.

Figura 3.7: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2000.*



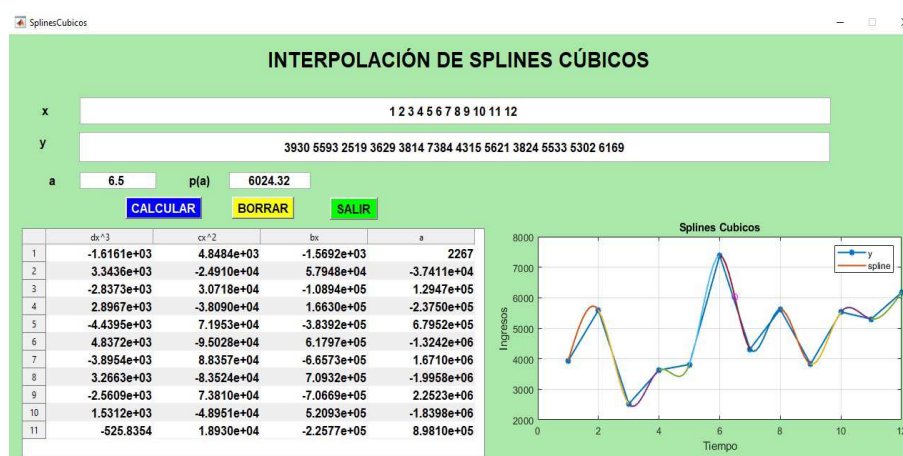
Como se puede observar en la Figura (3.7) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 5388.88 (millones de soles) en el mes de febrero.

Ingreso tributario mensual del año 2001

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2001, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de junio.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2001.

Figura 3.8: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2001.*



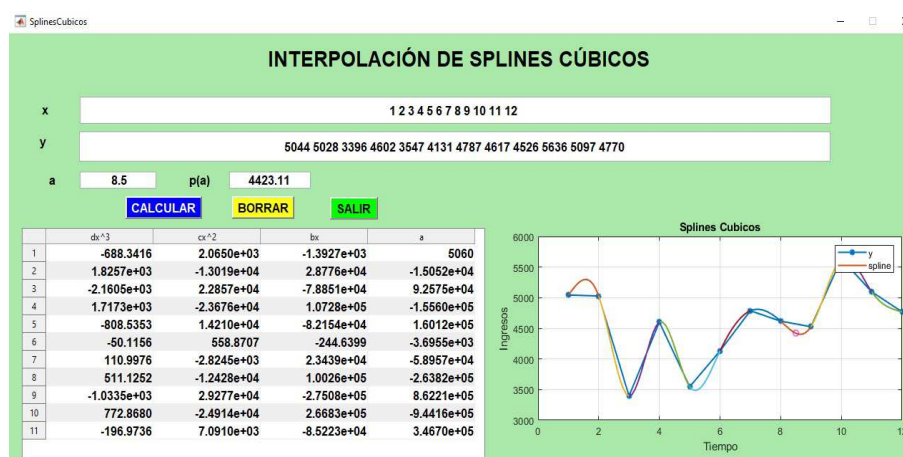
Como se puede observar en la Figura (3.8) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 6024.32 (millones de soles) en el mes de junio.

Ingreso tributario mensual del año 2002

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2002, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de agosto.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2002.

Figura 3.9: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2002.*



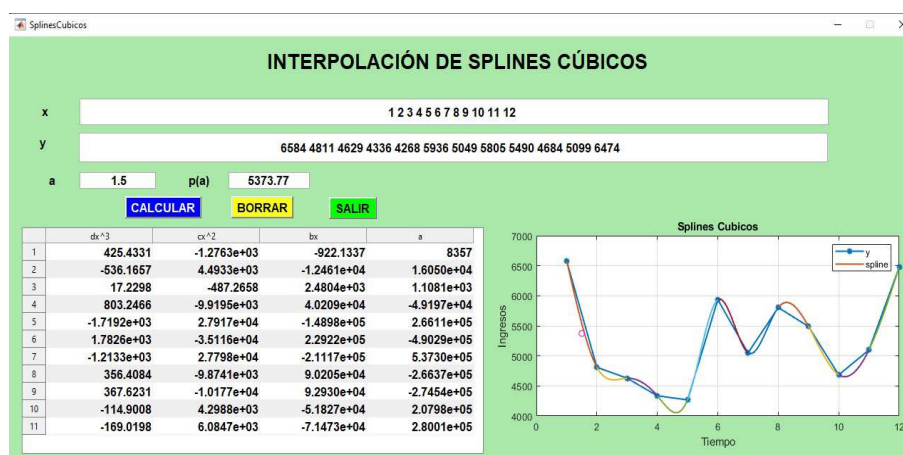
Como se puede observar en la Figura (3.9) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 4423.11 (millones de soles) en el mes de agosto.

Ingreso tributario mensual del año 2003

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2003, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de enero.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2003.

Figura 3.10: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2003.*



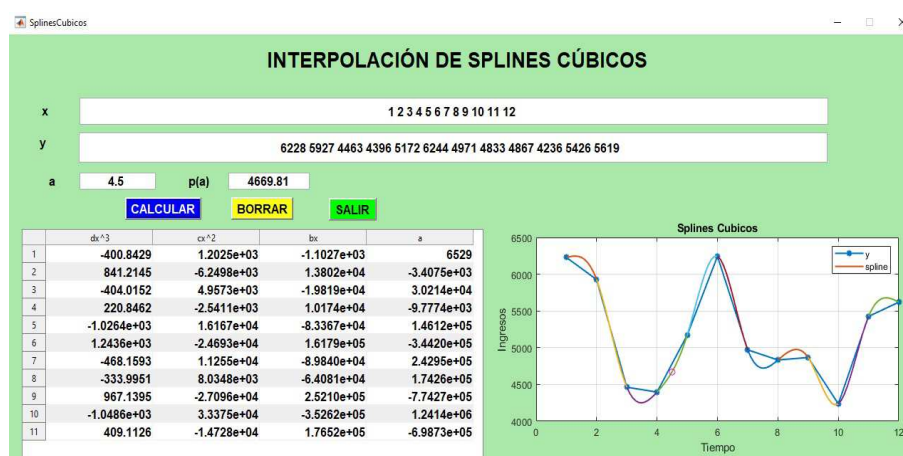
Como se puede observar en la Figura (3.10) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 5373.77 (millones de soles) en el mes de enero.

Ingreso tributario mensual del año 2004

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2004, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de abril.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2004.

Figura 3.11: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2004.*



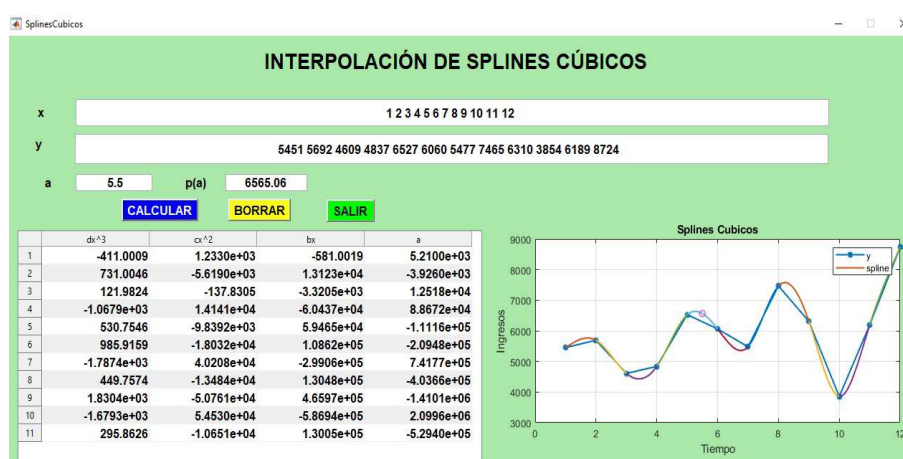
Como se puede observar en la Figura (3.11) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 4669.81 (millones de soles) en el mes de abril.

Ingreso tributario mensual del año 2005

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2005, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de mayo.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2005.

Figura 3.12: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2005.*



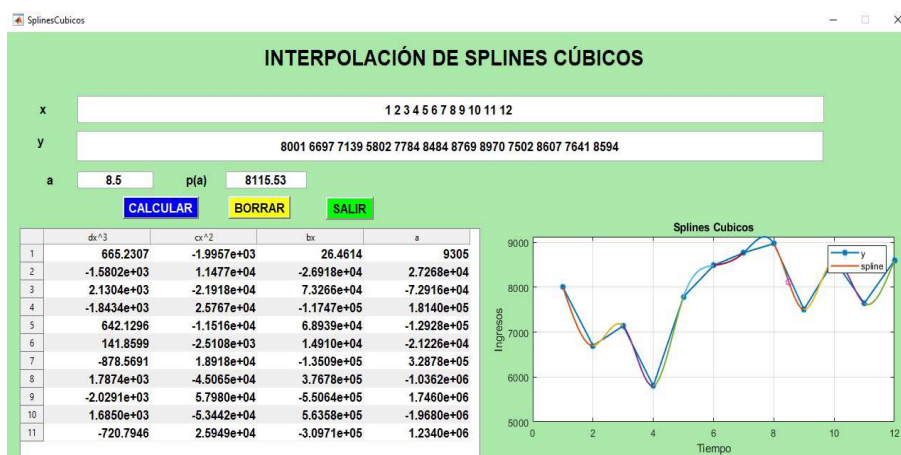
Como se puede observar en la Figura (3.12) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 6565.06 (millones de soles) en el mes de mayo.

Ingreso tributario mensual del año 2006

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2006, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de agosto.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2006.

Figura 3.13: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2006.*



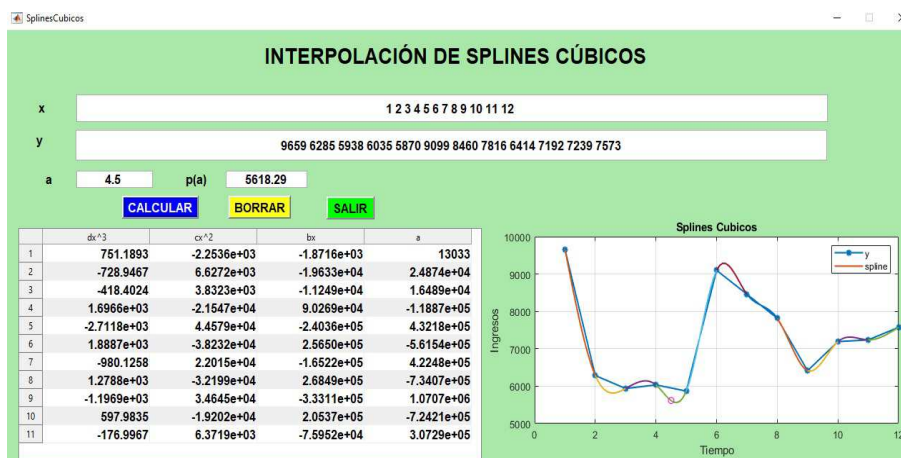
Como se puede observar en la Figura (3.13) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 8115.53 (millones de soles) en el mes de agosto.

Ingreso tributario mensual del año 2007

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2007, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de mayo.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2007.

Figura 3.14: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2007.*



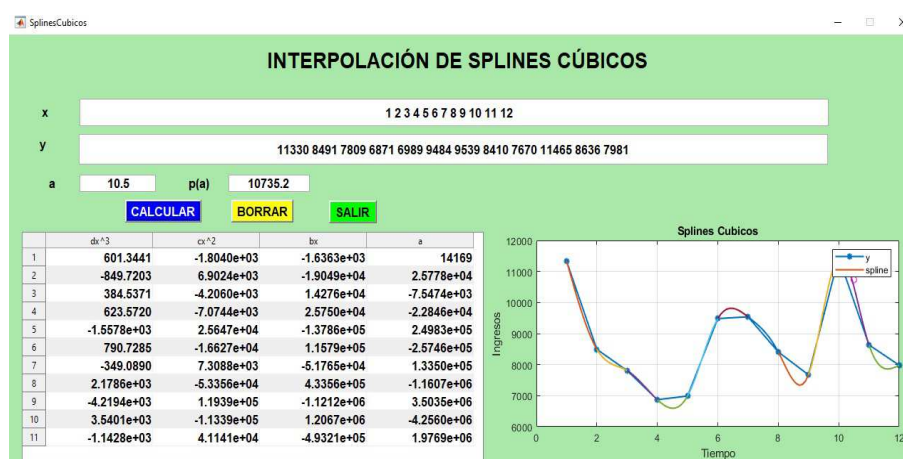
Como se puede observar en la Figura (3.14) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 5618.29 (millones de soles) en el mes de mayo.

Ingreso tributario mensual del año 2008

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2008, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de octubre.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2008.

Figura 3.15: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2008.*



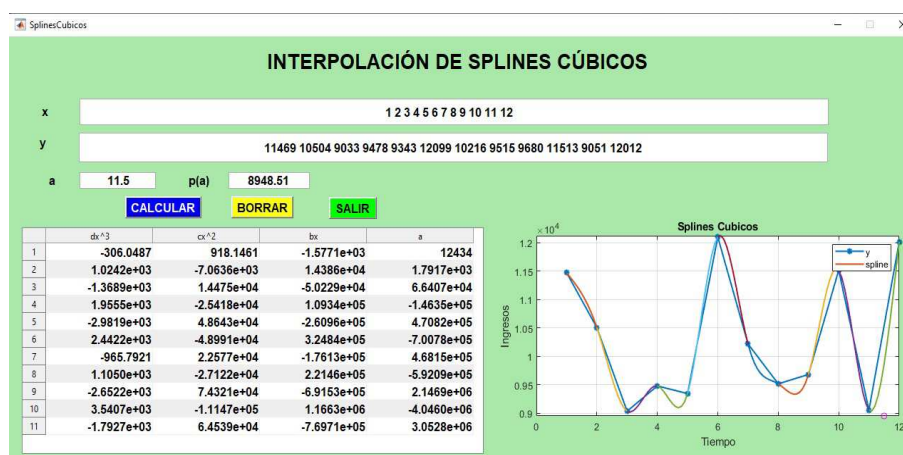
Como se puede observar en la Figura (3.15) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 10735.2 (millones de soles) en el mes de octubre.

Ingreso tributario mensual del año 2009

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2009, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de noviembre.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2009.

Figura 3.16: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2009.*



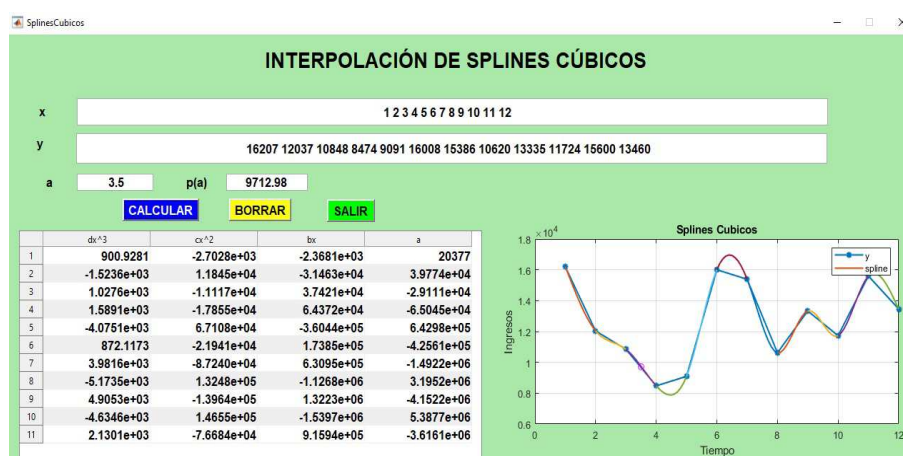
Como se puede observar en la Figura (3.16) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 8948.51 (millones de soles) en el mes de noviembre.

Ingreso tributario mensual del año 2010

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2010, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de marzo.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2010.

Figura 3.17: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2010.*



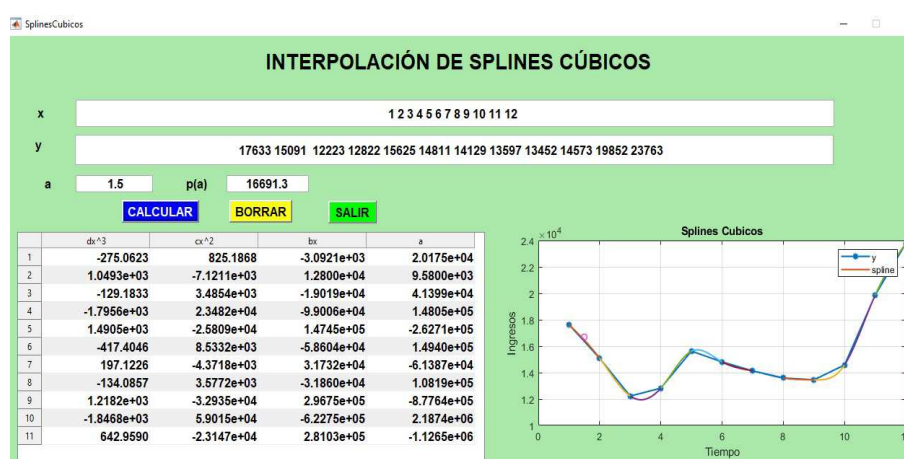
Como se puede observar en la Figura (3.17) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 9712.98 (millones de soles) en el mes de marzo.

Ingreso tributario mensual del año 2011

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2011, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de enero.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2011.

Figura 3.18: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2011.*



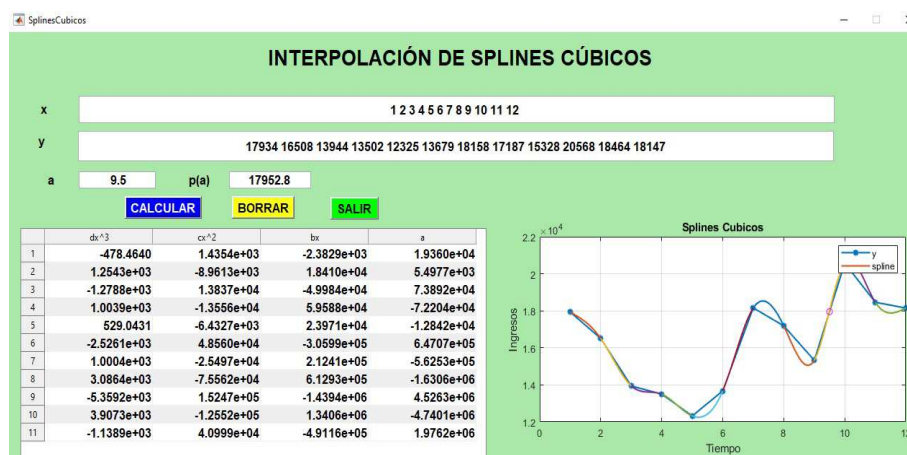
Como se puede observar en la Figura (3.18) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 16691.3 (millones de soles) en el mes de enero.

Ingreso tributario mensual del año 2012

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2012, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de septiembre.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2012.

Figura 3.19: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2012.*



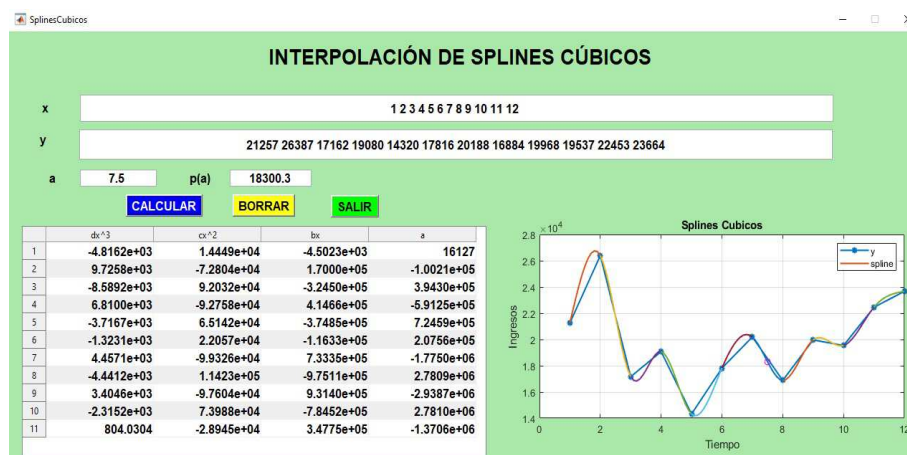
Como se puede observar en la Figura (3.19) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 17952.8 (millones de soles) en el mes de septiembre.

Ingreso tributario mensual del año 2013

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2013, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de julio.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2013.

Figura 3.20: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2013.*



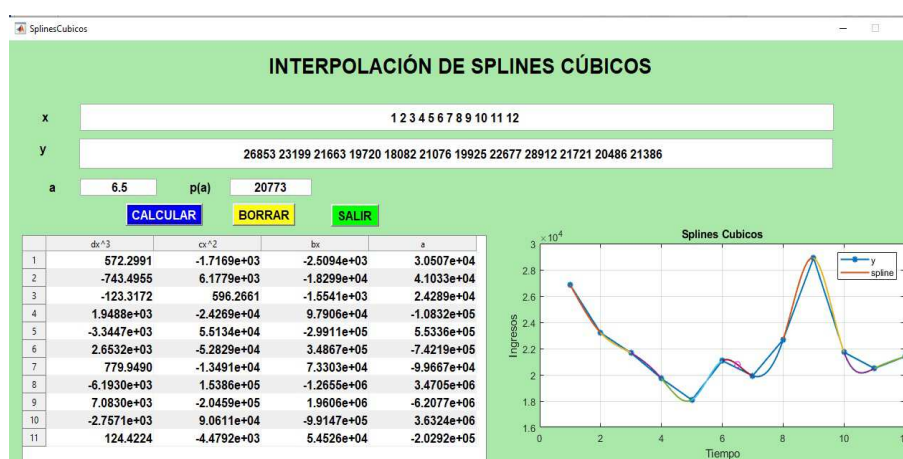
Como se puede observar en la Figura (3.20) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 18300.3 (millones de soles) en el mes de julio.

Ingreso tributario mensual del año 2014

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2014, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de junio.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2014.

Figura 3.21: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2014.*



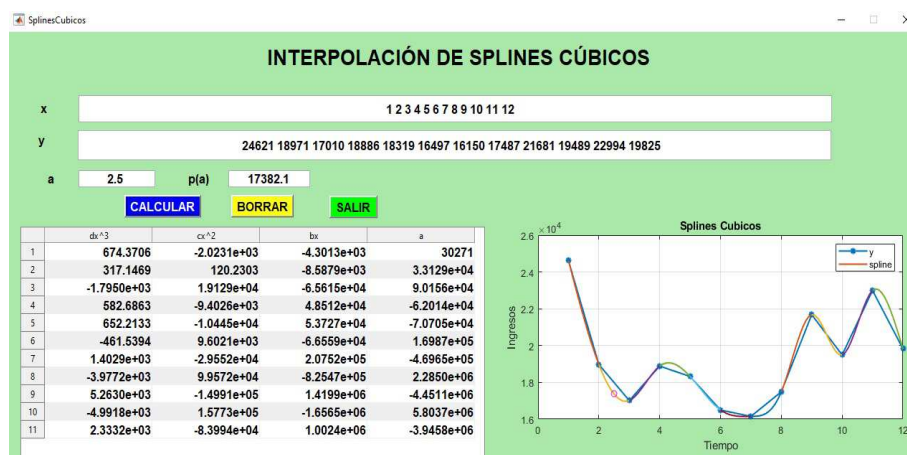
Como se puede observar en la Figura (3.21) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 20773 (millones de soles) en el mes de junio.

Ingreso tributario mensual del año 2015

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2015, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de febrero.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2015.

Figura 3.22: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2015.*



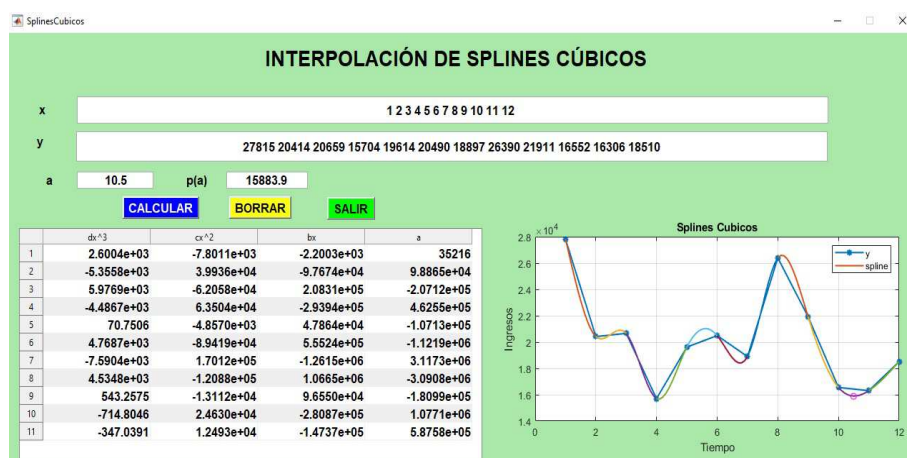
Como se puede observar en la Figura (3.22) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 17382.1 (millones de soles) en el mes de febrero.

Ingreso tributario mensual del año 2016

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2016, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de octubre.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2016.

Figura 3.23: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2016.*



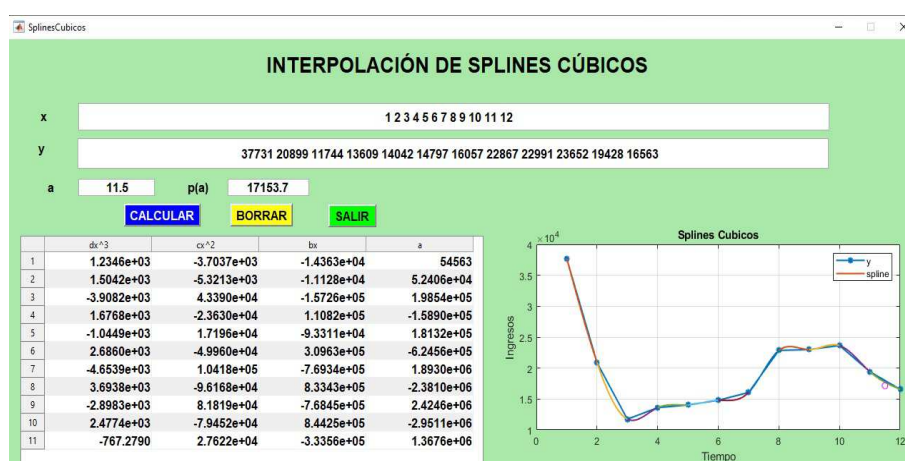
Como se puede observar en la Figura (3.23) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 15883.9 (millones de soles) en el mes de octubre.

Ingreso tributario mensual del año 2017

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2017, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de noviembre.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2017.

Figura 3.24: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2017.*



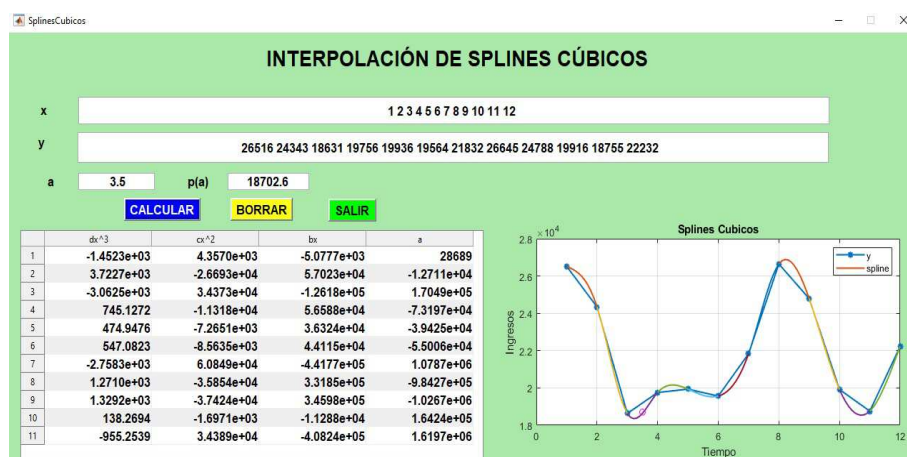
Como se puede observar en la Figura (3.24) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 17153.7 (millones de soles) en el mes de noviembre.

Ingreso tributario mensual del año 2018

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2018, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de marzo.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2018.

Figura 3.25: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2018.*



Como se puede observar en la Figura (3.25) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 18702.6 (millones de soles) en el mes de marzo.

Ingreso tributario mensual del año 2019

A continuación mediante la interfaz gráfica de usuario analizaremos el ingreso tributario recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno - 2019, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, además se podrá hallar cuanto se va recaudando la mitad del mes de julio.

Ingresando los datos de la Tabla (3.1) del año 2019.

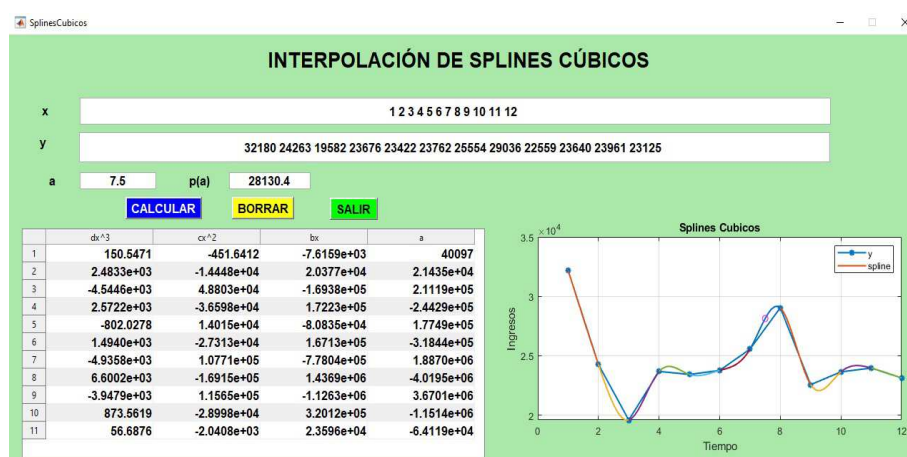


Figura 3.26: *Splines Cúbicos del ingreso tributario mensual del año 2019*

Como se puede observar en la Figura (3.26) utilizando la interpolación de Spline Cúbico se a recaudado aproximadamente 28130.4 (millones de soles) en el mes de julio.

Para más detalle de lo que se muestra en la interfaz gráfica de usuario en los coeficientes, mediante Spline Cúbicos, queda formulada en la ecuación (3.6) de la siguiente manera:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 150.5471x^3 - 451.6412x^2 - 7615.9x + 40097 & x \in [1, 2] \\ S_1(x) = 2483.3x^3 - 14448x^2 + 20377x + 21435 & x \in [2, 3] \\ S_2(x) = -4544.6x^3 + 48803x^2 - 169380x + 211190 & x \in [3, 4] \\ S_3(x) = 2572.2x^3 - 36598x^2 + 172230x - 244290 & x \in [4, 5] \\ S_4(x) = -802.0278x^3 + 14015x^2 - 80835x + 177490 & x \in [5, 6] \\ S_5(x) = 1494x^3 - 27313x^2 + 167130x - 318440 & x \in [6, 7] \\ S_6(x) = -4935.8x^3 + 107710x^2 - 778040x + 1887000 & x \in [7, 8] \\ S_7(x) = 6600.2x^3 - 169150x^2 + 1436900x - 4019500 & x \in [8, 9] \\ S_8(x) = -3947.9x^3 + 115650x^2 - 1126300x + 3670100 & x \in [9, 10] \\ S_9(x) = 873.5619x^3 - 28998x^2 + 320120x - 1151400 & x \in [10, 11] \\ S_{10}(x) = 56.6876x^3 - 2040.8x^2 + 23596x - 64119 & x \in [11, 12] \end{cases} \quad (3.6)$$

3.3 Ingreso tributario anual de los años 1994-2019

A continuación en la Tabla (3.4) se muestra los ingresos tributarios recaudados por la SUNAT-Impuesto general a las ventas interno 1994-2019, donde se analizará los datos y procederá a realizar la interpolación mediante Splines Cúbicos, obteniendo como resultado una función polinómica por tramos.

Tabla 3.4:

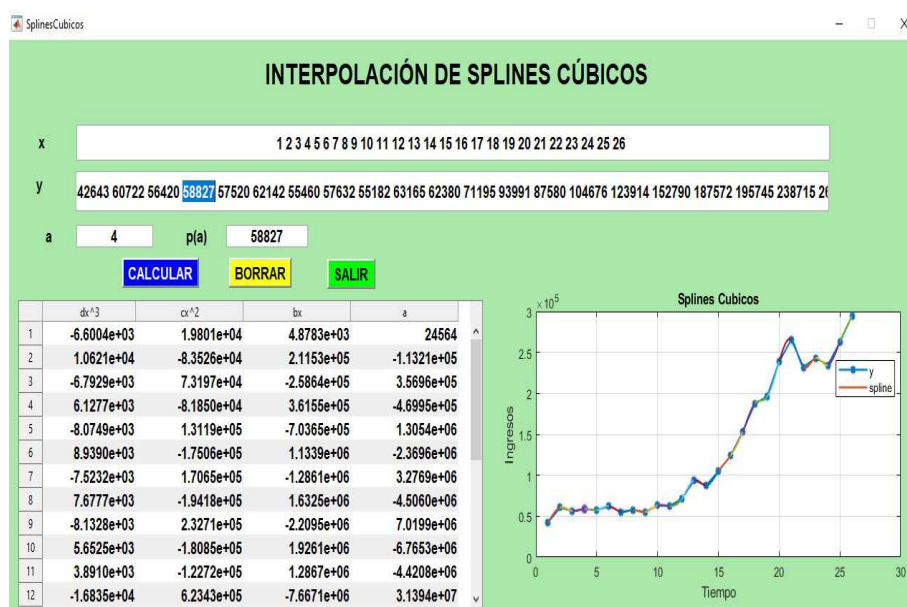
Ingresos Tributarios Recaudados por la SUNAT-Impuesto General a las Ventas Interno 1994-2019.

Año	Ingreso Anual
1994	42,643
1995	60,722
1996	56,420
1997	58,827
1998	57,520
1999	62,142
2000	55,460
2001	57,632
2002	55,182
2003	63,165
2004	62,380
2005	71,195
2006	93,991
2007	87,580
2008	104,676
2009	123,914
2010	152,790
2011	187,572
2012	195,745
2013	238,715
2014	265,700
2015	231,931
2016	243,262
2017	234,379
2018	262,913
2019	294,761

La Tabla (3.4) muestra la cantidad recaudada anual de los años 1994-2019 en miles de millones de soles como se muestra en la Tabla (3.1).

Para poder simplificar el proceso de solución del método de Spline Cúbico se procede a utilizar la interfaz gráfica de usuario, la cual simplifica todo el proceso y muestra los coeficientes de cada polinomio cúbico, su gráfica y el valor no encontrado en el intervalo de tiempo.

Figura 3.27: *Splines Cúbicos del ingreso tributario anual del año 1994-2019.*



En la Figura (3.27) verificamos el valor del año 1997 lo cual garantiza que utilizando la interpolación de Spline Cúbicos resulta el mismo valor.

Conclusiones

1. En este trabajo de investigación se logró utilizar el método de interpolación de Splines Cúbicos aplicado a la estimación de ingresos tributarios recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque 1994-2019, donde se logró encontrar un conjunto de funciones cúbicas que verifican los datos dados y por consiguiente encontrar otros valores aproximados que se encuentran dentro [1994,2019].
2. El software Matlab permitió implementar su interfaz gráfica de usuario del método de interpolación de Splines Cúbicos.
3. Se realizó un análisis detallado de ingresos tributarios recaudados por la SUNAT impuesto general a las ventas interno 1994-2019, en el año 1994 los datos fueron analizados de manera mensual, donde se detalló paso a paso el proceso de solución del método de interpolación de Splines Cúbicos comparándose el resultado con la interfaz gráfica de usuario garantizando su correcto funcionamiento.
4. Con la interfaz gráfica de usuario SUNAT podrá analizar los ingresos tributarios recaudados por meses o años utilizando el método de interpolación de Splines Cúbicos de manera rápida y sencilla.

Recomendaciones

1. Dar a conocer a los estudiantes y docentes de la FACHyM para que puedan utilizar la interfaz gráfica de usuario en Matlab en las diferentes aplicaciones relacionado con la interpolación.
2. Dar a conocer a la SUNAT para que pueda utilizar la interfaz gráfica de usuario en Matlab, analizar el ingreso tributario mensual y anual de los años 1994-2019 de la otras regiones del Perú de forma rápida y sencilla.

Referencias Bibliográficas

- Alhiet O., Cristian M. & Alfonso V. (2010) *Software para ciencia e ingeniería MATLAB*. Empresa Editora MACRO.
- Bracamonte, W. & Llontop, A. (2015). *Sistemas de Ecuaciones Lineales de dos a más Variables para la Solución de Problemas de Redes Eléctricas*[Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio Institucional de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.
- Burden, R. & Faires, J. (2011). *“Análisis Numérico”*. 9ª ed. Cengage.
- Canizales, C. (2016). *Interpolación de splines cúbicos para estimaciones en elaboración de tablas de mortalidad para Honduras*. Innovare: Revista de ciencia y tecnología, 5(2), 41-60. Obtenido de <https://n9.cl/6xl1l>
- Chapra, S. & Canale, R. (2010). *“Numerical Methods for Engineers”*, 6 edición Mcgraw-Hill.
- Curtis, F. (1991). *Análisis Numérico*, segunda edición, Ediciones Alfaomega S.A., México.
- De Castro, C. (2014) *“Métodos Numéricos Básicos para Ingeniería con Implementaciones en Matlab y Excel*. Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería.
- Esquerro, J. (2012) *“Iniciación a los métodos numéricos”*. Universidad de la Rioja, servicio de publicaciones.

- Frias, M. & Pardo, M.(2022). *Interpolación Polinómica de Lagrange y su Implementación en la Interfaz Gráfica de Usuario de Matlab* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio Institucional de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.
- Gonzales, E. (2017). *Funciones Splines* [Tesis de grado, Universidad de la Laguna]. Repositorio Institucional. <https://n9.cl/x11r>
- Gutiérrez, R. (2022). *Impacto del Uso de Software Matlab en el Curso de Cálculo Diferencial e Integral como Beneficio para el Fortalecimiento de Competencias Específicas de los Estudiantes de Ingeniería Electrónica de la Fiee-Unac, Callao 2021*. Repositorio Institucional <https://n9.cl/t1f06>
- Kharab, A. & Guenther, R. (2012). *An introduction to numerical methods a Matlab approach*. CRC Pres, New York, USA.
- Kurtis, D. (2000) *Métodos Numéricos con Matlab*, tercera edición, Prentice Hall Iberia S.R.L., Madrid- España.
- MathWorks, (2023). *GUI de MATLAB*. Recuperado de <https://n9.cl/2m35g>
- Melvin J. Maron & Robert J. López. (1995) *Análisis Numérico en un enfoque práctico*, tercera edición, Compañía Editorial Continental S.A.
- Meza, L. (2013). *Regresión no paramétrica utilizando spline para la suavización de la estructura de la mortalidad en el Perú*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.
- Nakamura, S. (1997). *Análisis Numérico y Visualización Grafica con Matlab Prentice - Hall Hispanoamericana*, México.
- Oyola, D. & Parraguez, P. (2020). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en la Solución de Problemas de Oferta y Demanda Asistidos con Matlab* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio Institucional de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.
-

- Padilla, K. & Sernaqué, C. (2014). *Aproximación de funciones en \mathbb{R}^2 mediante splines cúbicos* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio Institucional de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.
- Quinteros, E., Ardila, W. & Gallego, H. (2010). *Interfaz Gráfica para la interpolación de datos a través de splines cúbicos*. Scientia et Technica, 16(44), 195-200. <https://n9.cl/whzrx>
- Rodriguez L., Guerrero A., Villalobos C. y Ramirez A. (2010). *Software para ciencia e ingeniería Matlab*.
- Santos, J. & Mimbela, R. (2015). *Métodos de Interpolación de Lagrange y Diferencias Divididas en una serie de tiempo para determinar funciones polinómicas en la estimación del crecimiento poblacional de la Región Lambayeque* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo], Repositorio Institucional. <https://n9.cl/3ev2d>
- Suclupe, G. & Chilcón, M. (2015). *Métodos de Diferencias Divididas con Aproximación Polinomial para la variación de Temperatura en Lambayeque (2000 - 2014)* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio Institucional. <https://n9.cl/lamogj>
-

Anexo

```
function varargout = SplinesCubicos(varargin)
% SPLINESCUBICOS MATLAB code for SplinesCubicos.fig
%     SPLINESCUBICOS, by itself, creates a
%new SPLINESCUBICOS or raises the existing
%     singleton*.
%
%     H = SPLINESCUBICOS returns the handle to
% a new SPLINESCUBICOS or the handle to
%     the existing singleton*.
%
%     SPLINESCUBICOS('CALLBACK',hObject,eventData,handles,
%...) calls the local
%     function named CALLBACK in SPLINESCUBICOS.M
%with the given input arguments.
%
%     SPLINESCUBICOS('Property','Value',...)
%creates a new SPLINESCUBICOS or raises the
%existing singleton*. Starting from the left,
% property value pairs are
%     applied to the GUI before
%$SplinesCubicos_OpeningFcn gets called. An
%     unrecognized property name or invalid value
```

```
%makes property application
%      stop.  All inputs are passed to
% SplinesCubicos_OpeningFcn via varargin.
%
%      *See GUI Options on GUIDE's Tools menu.
% Choose "GUI allows only one
%      instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES

% Edit the above text to modify the response to
% help SplinesCubicos

% Last Modified by GUIDE v2.5 26-Jul-2022 15:16:17

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                  'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @SplinesCubicos_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn', ...
                  @SplinesCubicos_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                  'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State,
```

```
        varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT

% --- Executes just before SplinesCubicos is made visible.
function SplinesCubicos_OpeningFcn(hObject, eventdata,
    handles, varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future
% version of MATLAB
% handles     structure with handles and user data
% (see GUIDATA)
% varargin    command line arguments to
% SplinesCubicos (see VARARGIN)

% Choose default command line output for SplinesCubicos
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes SplinesCubicos wait for user
% response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);
```

```
% --- Outputs from this function are returned to
% the command line.
function varargout = SplinesCubicos_OutputFcn(hObject,
    eventdata, handles)
% varargout    cell array for returning output args
% (see VARARGOUT);
% hObject      handle to figure
% eventdata    reserved - to be defined in a future
% version of MATLAB
% handles       structure with handles and user data
% (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles
structure
varargout{1} = handles.output;

% --- Executes on button press in pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to pushbutton1 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future
% version of MATLAB
% handles       structure with handles and user
% data (see GUIDATA)

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to edit1 (see GCBO)
```

```
% eventdata reserved - to be defined in a
% future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data
% (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of
% edit1 as text
%str2double(get(hObject,'String')) returns contents of
% edit1 as a double

% --- Executes during object creation, after setting
% all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future
% version of MATLAB
% handles empty - handles not created until
% after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background
% on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
    get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
% future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
% data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of
% edit2 as text
%          str2double(get(hObject,'String')) returns
% contents of edit2 as a double

% --- Executes during object creation, after
% setting all properties.
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
% future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created until
% after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
% background on Windows.
%          See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
    get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
% --- Executes on button press in calcular.
function calcular_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to calcular (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future
% version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
% data (see GUIDATA)
format long
x=str2num(get(handles.edit1,'String'));
y=str2num(get(handles.edit2,'String'));
ya=str2num(get(handles.a,'String'));

n=length(x)-1
% Matriz A de orden (n+1)x(n+1)
for k=1:n
h(k)=x(k+1)-x(k);
end
A=zeros(n+1,n+1);
A(1,1)=1;A(n+1,n+1)=1;
%Coeficientes que están por debajo y por
% encima de la diagonal principal de la matriz
for k=1:n-1
    A(k+1,k)=h(k);
    A(k+1,k+2)=h(k+1);
end
%Coeficientes de la diagonal principal
for k=2:n
A(k,k)=2*(h(k-1)+h(k));
end
```

```

A
b=zeros(n+1,1);
%Formacion de la matriz de terminos independientes
for k=2:n
b(k)=6*(((y(k+1)-y(k))/h(k))-((y(k)-y(k-1))/h(k-1))));
end
b
z=inv(A)*b
C=zeros(n,4)
%Coeficientes de los "n" splines cúbicos
for k=1:n
    C(k,1)=(z(k+1)-z(k))/(6*h(k));
    C(k,2)=((z(k)*x(k+1))-(z(k+1)*x(k)))/(2*h(k));
    C(k,3)=(z(k+1)*(x(k)^2)-z(k)*(x(k+1)^2))/(2*h(k))+
        (y(k+1)-y(k))/h(k) + h(k)*(z(k)-z(k+1))/6;
    C(k,4)=(z(k)*(x(k+1)^3)-z(k+1)*(x(k)^3))/(6*h(k))+
        (y(k)-(z(k)*(h(k)^2)/6))*(x(k+1)/h(k))-y(k+1);

end
C
plot(x,y,'-*','LineWidth',1.5)
hold on
%polinomios splines cúbicos
for k=1:n
    t=x(k):0.1:x(k+1);
    w=C(k,1)*(t.^3)+C(k,2)*(t.^2)+C(k,3)*t+C(k,4);
    plot(t,w,'LineWidth',1.5);
end

```

```
valor=spline(x,y,ya)

plot(ya,valor,'mo')
grid on
title('Splines Cubicos')
xlabel('Tiempo')
ylabel('Ingresos')
legend('y','spline')
zoom on
hold off

%plot(t,w,ya,valor,'+')

set(handles.pa,'String',valor);
set(handles.uitable1,'Data',C);

function a_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to a (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
% future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
% data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents
of a as text
%          str2double(get(hObject,'String'))
% returns contents of a as a double
```

```
% --- Executes during object creation, after
% setting all properties.
function a_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to a (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future
% version of MATLAB
% handles      empty - handles not created until
% after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
% background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
    get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function pa_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to pa (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future
% version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
% data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents
% of pa as text
%         str2double(get(hObject,'String')) returns
```

```
% contents of pa as a double

% --- Executes during object creation, after
% setting all properties.
function pa_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pa (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
% future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created until
% after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
% background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
    get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in borrar.
function borrar_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to borrar (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
% future version of MATLAB
% handles     structure with handles and user
% data (see GUIDATA)
set(handles.edit1,'String',' ');
set(handles.edit2,'String',' ');
```

```
set(handles.a,'String',' ');
set(handles.pa,'String',' ');
set(handles.uitable1,'Data',[ ]);

% --- Executes on button press in salir.
function salir_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to salir (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
% future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
% data (see GUIDATA)
opc=questdlg('¿Desea salir del
    programa?', 'SALIR', 'Si', 'No', 'No');
if strcmp(opc, 'No')
return;

else
    msgbox({'Gracias por usar nuestra Aplicación',...
        'Desarrollado por: Fiorella Salazar
        Cornejo',...
        'Elvis Delgado Bustinza'},
        'Acerca de');
end
clear,clc,close(gcf)
```



Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Fiorella Yanina Salazar Cornejo
Título del ejercicio: tesis
Título de la entrega: Interpolación de Splines Cúbicos y su Aplicación en la Estim...
Nombre del archivo: TESIS_FINAL.pdf
Tamaño del archivo: 3.05M
Total páginas: 102
Total de palabras: 21,713
Total de caracteres: 85,156
Fecha de entrega: 23-feb.-2023 12:01a. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre... 2021030900



Interpolación de Splines Cúbicos y su Aplicación en la Estimación de los Ingresos Tributarios Recaudados por SUNAT en la Región Lambayeque, 1994-2019

INFORME DE ORIGINALIDAD

18%	17%	4%	5%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	1library.co	Fuente de Internet	2%
2	www.sunat.gob.pe	Fuente de Internet	1%
3	jupiter.utm.mx	Fuente de Internet	1%
4	repositorio.unac.edu.pe	Fuente de Internet	1%
5	www.gob.pe	Fuente de Internet	1%
6	hdl.handle.net	Fuente de Internet	1%
7	es.scribd.com	Fuente de Internet	1%
8	idoc.pub	Fuente de Internet	1%