UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO.
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS.

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA.

TESIS

“Construcción + de Quillen. ”

Presentado para optar el título profesional de: Licenciado en Matemáticas

INVESTIGADOR:

Gersson Daniel Sánchez Mejía

ASESOR:

Dr. Rubén Esteban Burga Barboza

Lambayeque - Perú - 2023

Dr. Leandro Agapito Aznarán Castillo.
Presidente

Dr. Marco Antonio Martín Peralta Lui.
Secretario

M.Sc. Betty Rimarachín López.
Vocal

Dr. Rubén Esteban Burga Barboza.
Asesor

Declaración Jurada de Originalidad

Yo, Gersson Daniel Sánchez Mejía y Dr. Rubén Esteban Burga Barboza, asesor del trabajo de investigación: “La construcción + de Quillen. ” Juro que este trabajo no esta plagiado, ni contiene datos falsos. En caso se demostrara lo contrario, asumo responsabilidad sobre la anulación de este informe y, por ende, el proceso administrativo a que hubiera lugar. Que puede conducir a la anulación del título o grado emitido como consecuencia de este informe.

Lambayeque, 12 de Junio de 2023

Gersson Daniel Sánchez Mejía.
Dr. Rubén Esteban Burga Barboza.

Dedicatoria

Dedicado a mis padres por su apoyo y en especial a mi madre. Y mi esposa e hijo por su comprensión quien con su motivación y sus consejos me ayudo a llegar a culminar mi tesis.

Dedicada también a mi asesor, por sus sugerencias y correcciones puestas en mi tesis, así como por sus consejos.

Agradecimiento

Agradezco a Dios y a mis padres y esposa Wendy e hijo Daniel por su apoyo incondicional que hicieron posible poder culminar este tesis.

También me gustaría agradecer al profesor Rubén Burga por todo su guía en el progreso de esta tesis y su infinita paciencia y su incondicional soporte.

Contenido

Resumen

En el presente trabajo, dado un CW-complejo conexo X, relataremos la construcción de un nuevo CW-complejo, denotado como X^+, el cual, en pocas palabras, es obtenido al adjuntar celdas de dimensión 2 y 3 a X, de tal manera que la aplicación inclusión $i : X \hookrightarrow X^+$ es acíclica e induce la proyección $\pi \to \pi/N$, donde N subgrupo perfecto y normal de $\pi_1(X)$.

La obtención de X^+ es conocida como construcción + de Quillen. Para este objetivo, haremos una breve abordaje a la teoría que contiene al grupo fundamental de un espacio topológico, recubrimiento. También abordaremos la teoría de Homología y que son los CW-complejos. Finalmente, daremos una breve aplicación de esta construcción.

Palabras Claves:
CW-complejo, espacio de adjunción, Homología reducida, Teorema + de Quillen.

Abstract

In the present work, given a connected CW-complex X, we will explain the construction of a new CW-complex, denoted as X^+, which, in short, is obtained by attaching cells of dimension 2 and 3 to X, such that the inclusion application $i : X \hookrightarrow X^+$ is acyclic and induces the projection $\pi \to \pi/N$, where N is a perfect and normal subgroup of $\pi_1(X)$.

Obtaining the CW-complex X^+ is known as Quillen's + construction. For this objective, we will make a brief approach to the theory that contains the fundamental group of a topological space and covering spaces. We will also address the theory of Homology and what are the CW-complexes. Finally, we will give a brief application of this construction.

Keywords:
CW-complex, adjunction space, Reduced homology, Quillen's + Theorem.

Introducción

Dentro de la topología algebraica, existen muchos casos donde el obtener un grupo fundamental no trivial puede complicar demasiado nuestro trabajo.

En el presente trabajo abordaremos la técnica conocida como construcción plus que, en términos simples, permite de alguna manera simplificar el grupo fundamental de un espacio sin modificar su homología.

Esta técnica fue introducida por primera vez en [Ker69], y definida con más profundidad por Quillen en [Qui73], con el objetivo de definir la K-teoría algebraica para ordenes superiores.

En el capítulo 1 se presentan las preliminares que serán utilizadas a lo largo del trabajo. Como parte de estas, incluimos la teoría de homotopía, donde destacamos el cálculo del primer grupo de homotopía de un espacio topológico y espacios de recubrimiento. También abordamos la teoría de homología simplicial y la construcción de estructura llamadas CW-complejos.

En el capítulo 2 abordamos la teoría de Homología con coeficientes locales. En este capítulo destacamos los conceptos de levantamiento, G-cubrimiento y algunas aplicaciones que involucran grupo fundamental. También abordamos brevemente fibraciones e introducimos lo que es un grupo perfecto.

En el capítulo 3 abordamos la construcción + de Quillen. El Teorema principal de este capítulo originalmente fue enunciado en [Lod76], y abordado en [Shah12]. También brindaremos una pequeña aplicación de la construcción.

En el capítulo 4 otorgaremos nuestras conclusiones del trabajo, y concluiremos en el capítulo 5 con recomendaciones generales.

Capítulo 1

Preliminares

El estudio de la construcción + de Quillen esta fundamentado principalmente en el álgebra homología, específicamente lo concerniente a CW-complejo, grupo fundamental, conjuntos simpliciales y teoría de categorías. El propósito principal de este capítulo es brindar a los lectores ilustraciones conceptuales a lo largo de la Tesis, que incluyen homotopía, conjuntos simples, complejos CW, grupos fundamentales y categorías.y se encuentra basada principalmente en los textos [Hat02], [Mun02], [May92], y [GJ99]

1.1. Homotopía de aplicaciones Continuas.

Introduciremos un tipo de relación en las aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos, que es muy importante en las siguientes secciones, especialmente cuando se consideran caminos .

El siguiente *I* representará el intervalo [0,1] con las conexiones topológicas usuales. X e Y representaran espacios topológicos

Definición 1.1. *Las funciones $h_0, h_1 : X \longrightarrow Y$ continuas se llaman homotópicas si existe :*

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

continua que cumple:

1. $H(x,0) = h_0(x)$, *para todo* $x \in X$*;*
2. $H(x,1) = h_1(x)$, *para todo* $x \in X$.

H es llama homotopía de h_0 ***a*** h_1.*La relación de homotopía la denotada por* $h_0 \simeq h_1$.

OBSERVACIÓN 1.1. Para todo $t \in I$ definimos la familia de funciones continuas $f_t := F(x,t)$. Esto nos dice que F deforma de manera continua la aplicación f_0 en la aplicación f_1.

EJEMPLO 1.1. Ilustraremos esta definición mediante los siguientes ejemplos:

1. Sean $f_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la inclusión de la circunferencia unitaria a $\mathbb{R}^2$, y $f_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la función constante igual a 0. Una homotopía entre ambas aplicaciones es dada por:

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{S}^1 \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) = (1-t)x \end{array}$$

   Note que F é una aplicación continua. Además, es fácil ver que

   - $F(x,0) = f_0(x) = x, \forall x \in \mathbb{S}^1$;

   - $F(x,1) = f_1(x) = 0, \forall x \in \mathbb{S}^1$.

   Geométricamente, Lo que hacemos es reducir poco a poco el perímetro del dispositivo hasta reducirlo a un punto.

2. Sean las aplicaciones f y g en cualquier espacio X en $\mathbb{R}^n$, entonces f y g son homotópicas considerando la aplicación definida por:

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + (t)g(x) \tag{1.1}$$

   Se llama homotopía de la recta porque sigue el punto $f(x)$ hasta el punto $g(x)$ conectando los segmentos de recta.

3. Sean las funciones continuas $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la aplicación identidad en $\mathbb{R}$, y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.. La aplicación continua:

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & F(x,t) = x^2(1-t) + tx \end{array}$$

   es una homotopía por rectas, pues

$$F(x,0) = x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$F(x,1) = x = 1_{\mathbb{R}}(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

4. Dadas las funciones continuas $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por:

$$f(x) = (x, x^2); g(x) = (x, x)$$

entonces la aplicación continua

$$H(x,t) = (x, (1-t)x^2 + tx) \tag{1.2}$$

es una homotopía entre f y g.

OBSERVACIÓN 1.2. Existe un concepto más general que el de homotopía, es la ***homotopía relativa*** al subconjunto ***A*** de un espacio topológico X, que en cierto sentido, se trata de que la homotopía se mantenga fija en el subconjunto ***A***.

DEFINICIÓN 1.2. *Sean $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Enunciamos que f_0 y f_1 son homotópicas relativamente al subconjunto A de X si y solo si existe una función continua $F : X \times I \longrightarrow Y$, satisfaciendo:*

1. $F(x, 0) = f_0(x), \forall x \in X$
2. $F(x, 1) = f_1(x), \forall x \in X$
3. $F(a, t) = f_0(a) = f_1(a), \forall a \in A, t \in I$

Obsérve que la última condición implica que $f_0|_A = f_1|_A$.
Usaremos la notación $f_0 \simeq f_1 rel\{A\}$ para decir que f_0 y f_1 son homotópicas relativamente al subconjunto A de X.

DEFINICIÓN 1.3. *Si X e Y son dos espacios topológicos*

1. *La función $H : i_x \simeq c$ que define la homotopía se le conoce como contracción. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua. Se dice que f es homotópicamente nula si existe una función constante $c : X \longrightarrow Y$, tal que $f \simeq c$.*

2. *Se dice que es contractible o contráctil, si la función identidad $i_x : X \longrightarrow X$ es homotópicamente nula.*

EJEMPLO 1.2. 1. I y $\mathbb{R}$ son contráctibles.

2. Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es contráctible.

Notación: Dados dos espacios topológicos X e Y, Indicado al conjunto de funciones continuas de X e Y como **Conj(X,Y)** .

TEOREMA 1.1. *La relación homotópica $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre el $Conj(X, Y)$.*

Demostración. Debemos demostrar que la relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: Sea $f \in C(X, Y)$. Note que la aplicación dada por $H(x, t) = f(x), \forall t \in I$, es una homotopía entre f y f, pues claramente es continua y $H(x, 0) = H(x, 1) = f(x), \forall x \in X$. Así $f \simeq f$.

Simétrica: Sean $f, g \in C(X, Y)$,. Suponiendo que $f \simeq g$, probemos que $g \simeq f$. En efecto:
Sea H una homotopía entre f y g. Definamos:

$$\begin{aligned} G : X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto G(x, t) = H(x, 1 - t) \end{aligned}$$

Es fácil ver que G es una homotopía entre g y f, pues es claramente continua y

$$G(x, 0) = H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$$

$$G(x, 1) = H(x, 0) = f(x), \forall x \in X$$

Así $g \simeq f$.

Transitiva: Supongamos que $f \simeq g$ y $g \simeq h$. Vamos a mostrar que $f \simeq h$. En efecto, Si F es una homotopía entre f y g, y G una homotopía entre g y h. Definimos la aplicación $H : X \times I \to Y$ determinada por:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1), & si \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Note que si $t = \dfrac{1}{2}$ entonces

$$F(x, 2t) = g(x) = G(x, 2t - 1).$$

Luego la aplicación esta bien definida. Dado que H es continua en cada subconjunto cerrado $X \times [0, 1/2]$ y $X \times [1/2, 1]$ de $X \times I$, tenemos que H es continua en $X \times I$, por el teorema del pegamento.
Además:

$$H(x, 0) = F(x, 0) = f(x), \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = G(x, 1) = h(x), \forall x \in X$$

Por tanto H es una homotopía entre f y h. Así $f \simeq h$. ∎

Notacioń: Dados dos espacios topológicos X , Y. Denotamos a [X,Y] como el conjunto de todas las clases de homotopía entre funciones continuas de X en Y. Es decir:

$$[X,Y] = \{[f] : f \in C(X,Y)\},$$

donde

$$[f] = \{g \in C(X,Y) : g \simeq f\}.$$

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea X un espacio topológico y f, g son caminos continuos en X, $[f] = [g]$ si, y solamente si, $f \simeq g$.*

Demostración. Veamos en primer lugar:
$\Rightarrow]$ Sea $h \in [f]$. Entonces $h \simeq f$. Luego como $[f] = [g]$, tenemos que $h \in [g]$. Así $h \simeq g$. Por simetría y transitividad concluimos que $f \simeq g$.
$\Leftarrow]$ Sea $h \in [f]$. Entonces $h \simeq f$. Como $f \simeq g$, sigue que $h \simeq g$. Luego $h \in [g]$. O sea $[f] \subseteq [g]$.

Por otro lado, sea $h \in [g]$. Entonces $h \simeq g$. Como $f \simeq g$, por simetría obtenemos que $h \simeq f$. Luego $h \in [f]$. O sea $[g] \subseteq [f]$. Por tanto $[f] = [g]$. ∎

La relación de homotopía mantiene la composición:

PROPOSICIÓN 1.2. *Sean los espacios topológicos X, Y, Z además*

$$f_0, f_1 : X \to Y \quad ; \quad g_0, g_1 : Y \to Z$$

son funciones continuas : $f_0 \simeq f_1$ y $g_0 \simeq g_1$, entonces $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

Demostración. Vamos a suponer que $f_0 \simeq f_1$ y $g_0 \simeq g_1$, entonces va a existe una función continua

$$F : X \times I \to Y$$

tal que:

$$F(x,0) = f_0(x), \forall x \in X \quad ; \quad F(x,1) = f_1(x), \forall x \in X$$

y existe una homotopía G tal que:

$$G(x,0) = g_0(x), \forall x \in Y \quad ; \quad G(x,1) = g_1(x), \forall x \in Y$$

Definimos $H_1 : X \times I \to Z$ dada por

$$H_1(x,t) = G(f_0(x),t)$$

para todo $(x,t) \in X \times I$

Note que $H_1 = G\backslash_{f_0(x)\times I}$. Entonces G es continua sigue H_1 es continua. Además:

$$H_1(x,0) = G(f_0(x),0) = g_0(f_0(x)) = (g_0 \circ f_0)(x); \forall x \in X$$

$$H_1(x,1) = G(f_0(x),1) = g_1(f_0(x)) = (g_0 \circ f_0)(x); \forall x \in X$$

O sea, tenemos que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_0$

Por otro lado, definimos $H_2 : XxI \to Z$ dada por

$$H_2(x,t) = g_1(F(x,t)), \forall (x,t) \in XxI$$

Note que $H_2 = g_1 \circ F$. Entonces como g_1 y F son continuas sigue que H_2 es continua.Además:

$$H_2(x,0) = g_1(F(x,0)) = g_1(f_0(x)) = (g_1 \circ f_0)(x); \forall x \in X$$
$$H_2(x,1) = g_1(F(x,1)) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x); \forall x \in X$$

Es decir, tenemos que $g_1 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$, por la propiedad simétrica concluimos que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ ∎

Debido a la ***Proposición 1.1,*** podemos considerar una operación entre las clases de homotopía de la siguiente manera: dados

$$f : X \longrightarrow Y \quad ; \quad g : Y \longrightarrow Z \ ,$$

aplicaciones continuas, definimos

$$[g] \circ [f] = [g \circ f].$$

La clase $[g \circ f]$ no necesita de los representantes g, f de las clases $[g]$ y $[f]$, respectivamente.

1.1.1. Homotopía de Caminos.

En esta sección consideramos un caso particular del concepto general de homotopía, que es la conocida ***Homotopía de de caminos***. Luego, definimos una operación sobre la colección de las clases de equivalencia que la convertirá en lo que en topología álgebra se conoce como grupoide.Denotemos a $I = [0, 1]$

DEFINICIÓN 1.4. *Sea X es un espacio topológico, f_0, f_1 caminos continuos sobre X. Los caminos f_0 y f_1 son homotópicos por caminos si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1,entonces existe una aplicación continua H :*

$$H : I \times I \quad \longrightarrow \quad X$$

que satisface:

$$H(s,0) = f_0(s) \quad ; \quad H(s,1) = f_1(s); \forall s \in I$$

$$H(0,t) = f_0(0) = f_1(0) = x_0 \quad ; \quad H(1,t) = f_0(1) = f_1(1) = x_1; \forall t \in I$$

La aplicación H se llama homotopía de caminos entre f_0 ***y*** f_1

Notación: Usaremos la notación $f_0 \simeq_c f_1$ cuando f_0 sea homotópico por caminos a f_1.
Observación. De la definición dada anteriormente podemos notar que la primera condición nos dice simplemente que f_0 y f_1 son homotópicos y que H es la homotopía respectiva entre ellas. Por otro lado, la segunda condición nos dice que, $\forall t \in I$, f_t la función definida por $f_s = H(s,t)$, es un camino continuo que va desde x_0 hasta x_1.

LEMA 1.1. *La homotopía de caminos* $\simeq_c$ *es un relación .*

Demostración. La demostración se desprender del Teorema 1.1 donde se demuestra que la homotopía $\simeq$ es una relación de equivalencia. ∎

Si f es un camino continuo de un espacio topológico X, denotaremos las clases de equivalencias de homotopías de caminos por $[f]$, esto es:

$[f]$={g: g es un camino continuo en X y $g \simeq_c f$}

PROPOSICIÓN 1.3. *Sea* X *un espacio topológico,* f *y* g *caminos continuos en* X*,* $[f] = [g]$ *si, y solamente si,* $f \simeq_c g$.

Demostración. La demostración se debe a la Proposición 1.1 donde se dice que las clases de homotopía entre aplicaciones continuos, si y solo si existe una homotopía entre f y g. a $h \in [g]$. Entonces $h \simeq_c g$. Como $f \simeq_c g$, por simetría obtenemos que $h \simeq_c f$. Luego $h \in [f]$. Ósea $[g] \subseteq [f]$. Por tanto $[f] = [g]$. ∎

EJEMPLO 1.3. Dados f y g caminos continuos cualesquiera en $\mathbb{R}^n$, hay similitud en los puntos extremos x_0 y x_1, entonces son homotópicos definida por:

$$H(s,t) = (1-t)f(s) + tg(s).$$

En efecto, la continuidad de H se sigue directamente de la continuidad de f y g, además tenemos:

1. $H(s,0) = f(s)$ y $H(s,1) = g(s), \forall s \in I$

2. Para todo $t \in I$ tenemos:
   $H(0,t) = (1-t)f(0) + tg(0) = (1-t)x_0 + tx_0 = x_0 = f(0) = g(0);$
   $H(1,t) = (1-t)f(1) + tg(1) = (1-t)x_1 + tx_1 = x_1 = f(1) = g(1).$

Esta homotopía es conocida como homotopía lineal pues conduce el punto $f(s)$ al punto $g(s)$ a través del segmento de recta que las une.

Está construcción demuestra generalmente que para un subespacio convexo $X \subset \mathbb{R}^n$, dos caminos continuos f y g en X, con extremos x_0 y x_1, son homotópicos por caminos en X, ya que la homotopía por rectas entre ellos mantiene su imagen en X.

EJEMPLO 1.4. Sea $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ (conocido como el plano agujereado). Considere los siguientes caminos de I en X:

$$f(s) = (cos(s\pi), sen(s\pi)) \quad ; \quad g(s) = (cos(s\pi), 2sen(s\pi))$$

f y g son homotópicos por caminos mediante la homotopía lineal. En efecto: Consideremos la aplicación:

$$H : I \times I \longrightarrow X$$

definida por:

$$H(s,t) = (1-t)f(s) + tg(s)$$

En primer lugar, note que si $(1-t)f(s)+tg(s) = 0$, para algún $t \in [0,1]$, entonces

$$(1-t)cos(\pi s) + tcos(\pi s) = 0 \quad ; \quad (1-t)sen(\pi s) + 2tsen(\pi s) = 0$$

Luego $cos(\pi s) = 0$ y así $s = \frac{1}{2}$. Luego

$$(1-t)sen\frac{\pi}{2} + 2tsen\frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 - t + 2t = 1 + t = 0.$$

Así tendríamos que $t = -1$, lo que no puede ser pues $t \in [0,1]$. Luego $H(s,t) \neq (0,0)$, para todo $(s,t) \in I \times I$.
Además,note que H es continua puesto que f y g lo son, y tenemos:

1. Para todo $s \in I$ tenemos:
$$H(s,0) = f(s), H(s,1) = g(s)$$

2. Para todo $t \in I$ tenemos:
$$H(0,t) = (1-t)f(0)+tg(0) = (1-t)(1,0)+t(1,0) = (1,0) = f(0) = g(0)$$
$$H(1,t) = (1-t)f(1)+tg(1) = (1-t)(-1,0)+t(-1,0) = (-1,0) = f(1) = g(1).$$

EJEMPLO 1.5. La homotopía lineal de caminos entre el camino f como se define en el ejemplo anterior y el camino

$$h(s) = (\cos(\pi s), -sen(\pi s)).$$

es inválido, puesto que

$$H(1/2, 1/2) = (1/2)f(1/2) + (1/2)h(1/2) = (0, 1/2) + (0, -1/2) = (0, 0).$$

Podemos concluir que no existe una homotopía por rectas en X entre f y h. Es decir, no es posible deformar f pasando por el agujero en 0 sin introducir una discontinuidad.

Este ejemplo ilustra el hecho de que es necesario conocer el espacio donde son definidos los caminos antes de poder decir si ellos son homotópicos linealmente por caminos o no.

Los caminos f y h podrían ser homotópicos linealmente si estuvieran definidos en $\mathbb{R}^2$

DEFINICIÓN 1.5. *Sea X un espacio topológico y f un camino continuo en X que inicia en x_0 a x_1 y g es un camino en X de x_1 a x_2, definimos el productos de caminos $f * g$ como el camino dado por:*

$$h(s) = (f * g)(s) = \begin{cases} f(2s), & si \quad \forall s \in [0, 1/2] \\ g(2s-1), & si \quad \forall s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 1.3. Sea $f * g : I \longrightarrow X$ esta bien definida y es continua (por el lema del pegamento), además es un camino en X de x_0 a x_2. Por la forma como esta definida h, podemos decir que es el camino en donde primera mitad es el camino f y la segunda mitad es el camino g.

OBSERVACIÓN 1.4. Ahora la operación $*$ es el producto sobre caminos que induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación.

$$[f] * [g] = [f * g]$$

DEFINICIÓN 1.6. *Sea X un espacio topológico, f y g caminos continuos sobre X. Definimos una operación producto en las clases de homotopía de caminos entonces considerando la ecuación:*

$$[f] * [g] = [f * g].$$

PROPOSICIÓN 1.4. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $k : X \longrightarrow Y$:*

(1) Si k una función continua y H es una homotopía de caminos entre dos caminos continuos f y g; entonces $k \circ H$ es una homotopía de caminos entre los caminos continuos $k \circ f$ y $k \circ g$.

(2) Si k una función continua y f y g son caminos continuos en X con $f(1) = g(0)$, entonces:

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$$

Demostración. Por hipótesis H es una homotopía de caminos entre f y g, entonces $K \circ H$ es una homotopía de caminos en Y entre los caminos $k \circ f$ y $k \circ g$ como se puede apreciar en la Figura 1.1 ∎

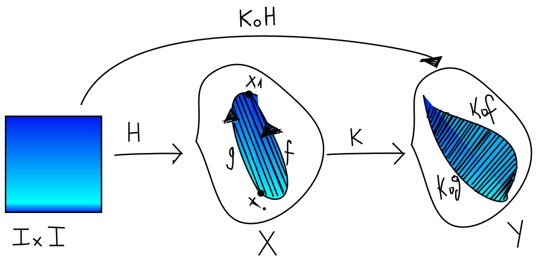


Figura 1.1: Homotopía de Caminos

TEOREMA 1.2. *Sean X un espacio topológico, f, g y h caminos en X. La operación producto $*$ con respecto a caminos induce una operación bien definida en las clases de homotopía de caminos entonces tiene las siguientes propiedades:*

(1) ***Asociatividad****: Si $[f] * ([g] * [h])$ está definida, igualmente lo esta $([f] * [g]) * [h]$ y tenemos:*

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$$

(2) ***Elemento neutro*** *: Dado $x \in X$, denotemos por e_x al camino continuo:*

$$e_x : I \longrightarrow X$$

dado por

$$e_x(s) = x$$

Si f es un camino continuo en X que inicia en x_0, hasta x_1, entonces:

$$[e_{x_0}] * [f] = [f] \qquad [f] * [e_{x_1}] = [f]$$

*(3)****Elemento Inverso****: Tomemos el camino f en X que inicia en x_0 y termina x_1. Sea $\overline{f}$ el camino inverso de f, definido por $\overline{f}(s) = f(1 - s)$,*

$$[f] * [\overline{f}] = [e_{x_0}] \qquad [\overline{f}] * [f] = [e_{x_1}]$$

Demostración. Ver ([10], Teorema 51.2, página 370). ∎

1.2. El Grupo Fundamental.

En la sección anterior, vimos que las clases de equivalencia de caminos continuos de un espacio topológico X satisface casi todos los axiomas de grupo. El problema es que el producto no esta siempre definido. La manera de resolver este problemas es usar el concepto de lazo.

Supongamos que tomamos un punto base $x_0 \in X$ y que nos restringimos a aquellos caminos que comienzan y acaban en x_0. En este caso solo tendremos clases de homotopía, que será un conjunto con la operación $*$, el cual es denominado *Grupo Fundamental* del espacio topológico X.

Empezaremos con algunas definiciones:

DEFINICIÓN 1.7. *Sea X un espacio topológico y x_0 es un punto base, $x_0 \in X$ y f un camino continuo en X que comienza y termina en x_0 se llama* ***lazo*** .

OBSERVACIÓN 1.5. Dicho de otra manera se dice que f es un $lazo$ con respecto al punto base en x_0. Si $f : I \longrightarrow X$ es una función continua, con $f(0) = f(1) = x_0$, donde $I = [0, 1]$

OBSERVACIÓN 1.6. Sea f un lazo sobre X y $\overline{f}$ el lazo definido por $\overline{f}(s) = f(1-s), \forall s \in I$. Este lazo se conoce como lazo inverso.

EJEMPLO 1.6. Consideramos el lazo, con punto base $(1, 0)$, definido por

$$f(s) = (cos2\pi s, sen2\pi s).$$

Entonces

$$\overline{f}(s) = f(1-s) = (cos2\pi(1-s), sen2\pi(1-s)) = (cos2\pi s, -sen2\pi s).$$

Analizamos para algunos puntos de $I = [0, 1]$:

- Para $s = 0$ tenemos $f(0) = (cos0, sen0) = (1, 0)$.
- Si $s = \frac{1}{4}$ entonces $f(\frac{1}{4}) = (\cos\frac{\pi}{2}, sen\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$.
- En $s = \frac{1}{2}$ tenemos $f(\frac{1}{2}) = (cos\pi, sen\pi) = (-1, 0)$.
- Si $s = \frac{3}{4}$ entonces $f(\frac{3}{4}) = (cos\frac{3\pi}{2}, sen\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$.
- Para $s = 1$ tenemos $f(1) = (cos2\pi, sen2\pi) = (1, 0)$.

Análogamente, si consideramos el lazo:

$$g(s) = (cos2\pi s^2, sen2\pi s^2),$$

se deduce que:

$$\overline{g}(s) = (cos2\pi(s^2 - 2s), sen2\pi(s^2 - 2s))$$

OBSERVACIÓN 1.7. Tanto f como g representan círculos que se mueven en sentido antihorario una vez,mientras que $\overline{f}$ y $\overline{g}$ recorren la circunferencia en sentido horario.

DEFINICIÓN 1.8. *Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$. El grupo fundamental de X relativo al punto base x_0 de las clases de equivalencia de lazos con punto base en x_0 bajo la relación de homotopía, dotado con la operación $*$.*

El grupo fundamental es escrito como $\pi_1(X, x_0)$. Este grupo también es conocido como el *grupo de poincare* o algunas veces se conoce como *primer grupo de homotopía*, lo cual implica que existe un segundo grupo de homotopía.

DEFINICIÓN 1.9. *Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ entonces el grupo fundamental de X relativo al punto x_0, es trivial si consiste de un único elemento.*

Ahora denotaremos a $\pi_1(X, x_0)$ como el grupo fundamental trivial o simplemente $\pi_1(X, x_0) = 0$.

EJEMPLO 1.7. Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ entonces el grupo fundamental de $\mathbb{R}^n$ relativo al punto base x_0, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$ donde e_{x_0} es el lazo constante x_0. Este grupo fundamental es tambié llamado grupo trivial cualquier lazo f en $\mathbb{R}^n$ con punto base en x_0 es una homotópia por caminos a e_{x_0} via la homotopía por rectas definida por:

$$H(s,t) = (1-t)f(s) + te_{x_0}(s).$$

EJEMPLO 1.8. Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$,$\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial. , la n-bola unitaria B^n de $\mathbb{R}^n$ dada por:

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

tiene grupo fundamental trivial.

DEFINICIÓN 1.10. *Sea X un espacio topológico, que inicia en x_0 hacia x_1 y α es un camino continuo en X . Ahora definimos la función:*

$$\widehat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

dada por.

$$\widehat{\alpha}([f]) = [\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

Veamos que esta aplicación esta bien definida. La expresión

$$[\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha] = [\overline{\alpha} * f * \alpha]$$

esta bien dado pues, como f es un lazo con un punto base x_0 y $f(1) = \alpha(0) = x_0$, entonces $f * \alpha$ es un camino que va de x_0 a x_1. Entonces $\overline{\alpha} * (f * \alpha)$ es un lazo con un punto base x_1. Ahora, si $[f] = [g]$ entonces $f \simeq_c g$. Entonces existe H homotopía de caminos a través de f y g. Note que, para todo $t \in I$, H_t es un lazo con un punto base en x_0. Entonces $\bar{\alpha} H_t \alpha$ es un lazo con punto base en x_1, para todo $t \in I$.Entonces la función

$$G(s,t) = \bar{\alpha} * H_t * \alpha$$

es una homotopía de caminos a través de $\bar{\alpha} * f * \alpha$ y $\bar{\alpha} * g * \alpha$. Así

$$\hat{\alpha}([f]) = \hat{\alpha}([g])$$

TEOREMA 1.3. *La aplicación $\widehat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Sea $\widehat{\alpha}$ la a función entre grupos definido anteriormente.

1) sea $\widehat{\alpha}$ es un homomorfismo de grupos.

Sean $[f], [g] \in \pi(X, x_0)$. Afirmamos que:

$$\widehat{\alpha}([f]) * \widehat{\alpha}([g]) = \widehat{\alpha}([f] * [g])$$

Además, utilizando el Teorema 1.2 tenemos:

$$\widehat{\alpha}([f]) * \widehat{\alpha}([g]) = ([\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\overline{\alpha}] * [g] * [\alpha])$$

$$\begin{aligned}
&= ([\overline{\alpha}] * [f]) * ([\alpha] * ([\overline{\alpha}] * [g] * [\alpha])) \\
&= ([\overline{\alpha}] * [f]) * (([\alpha] * ([\overline{\alpha}]) * ([g] * [\alpha])) \\
&= ([\overline{\alpha}] * [f]) * ([e_{x_0}] * ([g] * [\alpha])) \\
&= ([\overline{\alpha}] * [f]) * ([g] * [\alpha])) \\
&= [\overline{\alpha}] * ([f] * [g]) * [\alpha].
\end{aligned}$$

Luego

$$\widehat{\alpha}([f]) * \widehat{\alpha}([g]) = \widehat{\alpha}([f] * [g]).$$

2) Demostraremos que si $\beta = \overline{\alpha}$, que es el camino inverso de α, entonces $\widehat{\beta}$ es el inverso para $\widehat{\alpha}$. Sea $[f] \in \pi(X, x_1)$, entonces:

$$\overline{\beta}([f]) = [\overline{\beta}] * [f] * [\beta] = [\overline{\overline{\alpha}}] * [f] * [\overline{\alpha}] = [\alpha] * [f] * [\overline{\alpha}].$$

Luego $\overline{\beta}([f]) = [\alpha] * [f] * [\overline{\alpha}]$. Entonces, por medio del Teorema 1.2 tenemos:

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}(\overline{\beta}([f])) &= \widehat{\alpha}([\alpha] * [f] * [\overline{\alpha}]) \\
&= [\overline{\alpha}] * ([\alpha] * [f] * [\overline{\alpha}]) * [\alpha] \\
&= ([\overline{\alpha}] * [\alpha]) * [f] * ([\overline{\alpha}] * [\alpha]) \\
&= [e_{x_1}] * [f] * [e_{x_1}] \\
&= [f] * [e_{x_1}] \\
&= [f]
\end{aligned}$$

Así $(\widehat{\alpha} \circ \widehat{\beta})([f]) = [f]; \forall f \in \pi_1(X, x_1)$

Análogamente podemos mostrar que $(\widehat{\beta} \circ \widehat{\alpha})[f] = [f], \forall f \in \pi_1(X, x_1)$.

Por tanto $\widehat{\alpha}$ es un morfismo biyectivo de grupos .

∎

COROLARIO 1.1. *Sea X conexo por caminos y x_0, x_1 son dos puntos cualesquiera de X, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.*

Demostración. Ver ([10], Corolario 52.2, página 377). ∎

DEFINICIÓN 1.11. *Un espacio X es simplemente conexo si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para algún $x_0 \in X$.*

LEMA 1.2. *Sea X simplemente conexo entonces dos caminos cualquiera con los mismos puntos iniciales y finales son homotópicos por caminos.*

Demostración. Sean f y g dos caminos en X con el mismo punto inicial y final, digamos x_0, x_1, ósea, $f(0) = g(0) = x_0$ y $f(1) = g(1) = x_1$. Denotamos $\overline{g}$ como el camino inverso de g, definido como $\overline{g}(s) = g(1 - s)$, para todo $s \in I$.

Po hipótesis tenemos que X es simplemente conexo, entonces dado un lazo en X con punto base en x_0 es homotópico por caminos al lazo constante e_{x_0}, esto es:

$$[f * \overline{g}] = [e_{x_0}]$$

Luego:

$$\begin{aligned}
[f * \overline{g}] * [g] &= [e_{x_0}] * [g] \\
[(f * \overline{g}) * g] &= [e_{x_0}] * [g] \\
[f * (\overline{g} * g)] &= [g] \\
[f * e_{x_0}] &= [g]
\end{aligned}$$

$$[f] * [e_{x_0}] = [g]$$
$$[f] = [g]$$

Por tanto f es homotópico por caminos a g ∎

El grupo fundamental es un invariante topológico de X. Una forma conveniente de demostrar este hecho es introducir el concepto de homomorfismo inducido por una aplicación continua.

Sean X, Y dos espacios topológicos. Supongamos que $h : X \to Y$ es una aplicación continua que lleva el punto x_0 de X al punto de y_0 de Y. Es decir:

$$h(x_0) = y_0$$

Denotaremos este hecho por:

$$h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

Sea f el lazo en X con punto base x_0,:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h\circ f"'] & (X, x_0) \arrow[r, "h"] & (Y, y_0) \end{tikzcd}$$

Es decir, la composición $h \circ f : I \longrightarrow (Y, y_0)$, es un lazo de Y con un punto base y_0. La correspondencia entre f y $h \circ f$ nos conduce a una aplicación que lleva $\pi(X, x_0)$ a $\pi(Y, y_0)$.

DEFINICIÓN 1.12. *Sean X, Y espacios topológicos y $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una función continua. Definimos la función :*

$$h_* : \pi(X, x_0) \longrightarrow \pi(Y, y_0)$$

dada por:

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

la aplicación h_* se denomina homomorfismo inducido por h, relativo al punto base x_0.

OBSERVACIÓN 1.8. 1) La aplicación h_* esta bien definida: Sean $[f], [g] \in \pi(X, x_0)$ tales que $[f] = [g]$. Afirmamos que $h_*([f]) = h_*([g])$, es decir $[h \circ f] = [h \circ g]$.

Tenemos que existe una homotopía H entre f y g digamos:

$$H : I \times I \longrightarrow X$$

Como h es una aplicación continua, sigue que $h \circ H$ es una aplicación continua. Además: $h \circ H(x, 0) = h(H(x, 0)) = h \circ f$; $h \circ H(y, 1) = h(H(y, 1)) = h \circ g$ Así, tenemos que $[h \circ f] = [h \circ g]$. Por tanto $h_*([f]) = h_*([g])$.

2) h_* es un morfismo inyectivo de grupos homotópicos entre $\pi(X, x_0)$ y $\pi(Y, y_0)$. En efecto: Sabemos que h es una aplicación continua y además f y g son lazos con punto base x_0, por la Proposición 1.3 tenemos que:

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} h_*([f] * [g]) &= [h \circ (f * g)] \\ &= [(h \circ f) * (h \circ g)] \\ &= [h \circ f] * [h \circ g)] \\ &= h_*([f]) * h_*([g]). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$h_*([f] * [g]) = h_*([f]) * h_*([g]).$$

Digamos que x_0 y x_1 son dos puntos distintos de X, no usaremos el mismo símbolo h_* para indicar los dos homomorfismos obtenido, el primero tendrá como dominio $\pi_1(X, x_0)$ y el otro $\pi_1(X, x_1)$. Ahora si X fuera conexo por caminos estos grupos podrán ser isomorfos pero no son el mismo grupo. Pues, utilizaremos la notación:

$$(h_{x_0})_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

para el primer homomorfismo y $(h_{x_1})_*$ para el segundo.

TEOREMA 1.4. *Con la notación anterior se tiene los siguientes resultados:*

(1) Sean

$$h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \quad ; \quad K : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$$

son funciones continuas, entonces:

$$(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$$

(2) Si $i : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ es la función identidad entonces i_* es el homomorfismo identidad .

Demostración. (Ver [10], Teorema 52.4., página 379) ∎

Este Teorema es muy importancia para probar algunas implicaciones con respecto al grupo fundamental del circulo unitario $\mathbb{S}^1$.

COROLARIO 1.2. *Si $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo entre X e Y, h_* es un morfismo biyectivo entre $h_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$*

Demostración. : Sea h es un homeomorfismo entonces existe su inversa y es continua. Sea $k : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ la inversa de h. Entonces, por el Teorema 1.4 se tiene:

$$k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$$

donde i es la identidad de (X, x_0) e i_* es el homomorfismo identidad en $\pi_1(X, x_0)$. Por otro lado:

$$h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$$

donde j es la función identidad de (Y, y_0) y j_* es homomorfismo identidad en $\pi_1(Y, y_0)$. Por tanto, i_* y j_* son los homomorfismos identidad de los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ respectivamente, tenemos que k_* es la inversa de h_*. Por lo tanto h_* es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$. ∎

OBSERVACIÓN 1.9. Así, pues, el grupo fundamental nos proporciona un puente para pasar desde la topología hacia el álgebra. Este proceso se caracteriza por lo siguiente:

1) Un espacio topológico con un punto base x_0 podemos obtener un grupo.

2) En cada función continua entre espacios topológicos hay un homomorfismo entre los grupos fundamentales.

3) Sean f y g aplicaciones continuas y $f \circ g$ es continuo entonces induce a la $f_* \circ g_*$ de dos homomorfismos inducidos.

4) La aplicación identidad i induce un homomorfismo identidad i_* .

1.3. Espacio de Recubrimiento.

Ahora introduciremos un concepto que es muy útil en una variedad de situaciones. Una comprensión de la teoría del espacio recubridor es importante no solo en la topología sino también en disciplinas relacionadas, como la geometría diferencial, la teoría de grupos de Lie y las variables complejas.

DEFINICIÓN 1.13. *Sean $\widetilde{X}$ y X espacios topológico, $p : \widetilde{X} \to X$ una función continua y sobreyectiva. Un conjunto abierto U de X esta regularmente cubierto por p si:*

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha,$$

donde:$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *es una familia de subconjuntos abiertos, dos a dos disjuntos, de* $\widetilde{X}$ *tal que para cada* $\alpha \in \Lambda$*:*

$$p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$$

es un homeomorfismo.

La colección $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ sera llamada una partición de $p^{-1}(U)$ en partes iguales
.

Si U es un conjunto abierto en X además esta regularmente cubierto por p,entonces dibujamos al conjunto $p^{-1}(U)$ como un fila de capas una puesta sobre la otra, cada una con la misma forma y tamaño que U flotando en el aire sobre U.

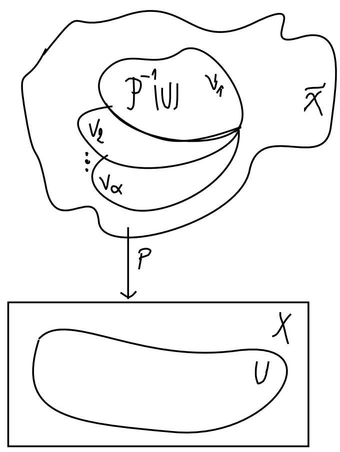


Figura 1.2: Espacio Recubridor

Observación 1.10. Si U esta regularmente cubierto p y W es un conjunto abierto conteniendo a U, entonces W esta también regularmente cubierto por p

Definición 1.14. *Si* $\widetilde{X}$ *y* X *son espacio topológicos y* $p : \widetilde{X} \to X$ *una función continua y sobreyectiva. Si todo punto* $x \in X$ *tiene un entorno* U_x *que esta regularmente cubierto por* p *se dice que* p *es una aplicación recubridora y* $\widetilde{X}$ *un espacio recubridor de* X.

En la siguiente proposición damos los resultados que nos servirán en el cálcuo del grupo fundamental del circulo $\mathbb{S}^1$

Proposición 1.5. *Sean* $\widetilde{X}$ *y* X *dos espacios topológicos:*

1. *Si* $p : \widetilde{X} \to X$ *es una aplicación recubridora entonces, para cada* $x \in X$*, el subespacio* $p^{-1}(x)$ *de* $\widetilde{X}$ *tiene la topología discreta.*

2. *Si* $p : \widetilde{X} \to X$ *es una aplicación recubridora entonces* p *es una aplicación abierta.*

Demostración. 1) Sea $x \in X$. Por hipótesis tenemos que $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación recubridora, luego se tiene que U_x esta generalmente cubierta por p, esto es:

$$p^{-1}(U_x) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

tal que:

$$p|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U_x$$

es un homeomorfismo (en particular es biyectiva), donde $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de abiertos en $\widetilde{X}$. Tenemos que $p^{-1}(x)$ es un subespacio de $\widetilde{X}$. Así, para cada $\alpha \in I$, $V_\alpha \cap p^{-1}(x)$ es un solo punto; por tanto es abierto en $p^{-1}(x)$. Luego $p^{-1}(x)$ tiene la toplogía discreta.

2) Sea A es un subconjunto abierto de $\widetilde{X}$. Dado $x \in p(A)$, elijamos un entorno U de x que esté regularmente cubierto por p. Sea $\{V_\alpha\}$ una partición de $p^{-1}(U)$ en partes iguales . Existe un punto $y \in A$ tal que $p(y) = x$. Sea V_β la rebanada que contiene a y. El conjunto $V_\beta \cap A$ es un abierto en $\widetilde{X}$ y, por tanto, abierto en V_β. Como p aplica V_β homeomórficamente en U, el conjunto $p(V_\beta \cap A)$ es abierto en U y, por tanto, abierto en X. Así $p(V_\beta \cap A)$ es un entorno de x contenido en $p(A)$. Ósea, $p(A)$ es abierto

Ahora vamos a probar que $p(A)$ es un abierto en X,esto equivale a probar que $\forall x \in p(A)$, existe un abierto W contenido en $p(A)$ que contiene a x.

Sea A un abierto en $\widetilde{X}$,

$$x \in p(A) \subset X$$

entonces U_x es un abierto contenido en $P(A)$. Sea $x \in p(A)$,entonces existe U_x que es un abierto contenido en X tal que

$$p^{-1}(U_x) = \bigcup V_\beta$$

unión disjunta en rebanadas puesto que p es sobreyectiva. Si V_β es un abierto contenido en $\widetilde{X}$ entonces $\exists y \in V_\beta$ tal que $p(y) = x$.

Sea

$$p_{|V_\beta} : V_\beta \longrightarrow U_x$$

es un homeomorfismo. Si $y \in W$, W es un abierto contenido en V_β entonces W es un abierto contenido en $\widetilde{X}$ entonces $p(W) \subset U_x$, es un abierto en U_x además $p(W) \subset p(A)$ es un abierto en $p(A)$.

Sea $A \cap W \subset V_\beta$, entonces p es un homeomorfismo donde $x \in P(A \cap V_\beta)$ es un abierto contenido en $p(A)$ entonces $A \cap V_\beta$ es un abierto contenido en X entonces $x \in p(A)$.

Sea V_β la rebanada que contiene a y, como $A \subset \widetilde{X}$, es abierto entonces por la topología del subespacio $V_\beta \cap A$ es un abierto en $\widetilde{X}$ y por tanto abierto en V_β y como p es una aplicación recubridora:

$$p_{|V_\beta} : V_\beta \longrightarrow U_x$$

es un homeomorfismo y $V_\beta \cap A$ es un abierto de V_β, por lo tanto $p(V_\beta \cap A)$ es un abierto en U_x y en consecuencia , es un abierto en X, además observamos que si $V_\beta \cap A$ es un entorno de X contenido en $p(A)$, por lo tanto $p(A)$ es abierto. ∎

EJEMPLO 1.9. Si X es un espacio topológico y $i : X \longrightarrow X$ es la identidad. Entonces i es una aplicación recubridora.

TEOREMA 1.5. *La función* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ *dada por:*

$$p(x) = (cos(2\pi(x)), sen(2\pi(x))$$

es una aplicación recubridora. Representamos a p *como una aplicación que enrolla la recta* $\mathbb{R}$ *alrededor del circulo* $\mathbb{S}^1$.

Demostración. Note que p é continua y sobreyectiva, pues sus funciones coordenadas lo son.

Sea $U = \{(x', y') \in \mathbb{S}^1 : x' > 0\} \subset \mathbb{S}^1$ el conjunto consistente en aquellos puntos que tienen la primera coordenada positiva. Entonces $p^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} : cos 2\pi x > 0\}$ es el conjunto de aquellos puntos x para los cuales $cos 2\pi x$ es positivo.

Luego:

$$x \in \cdots \langle \frac{-9}{4}, \frac{-7}{4} \rangle \cup \langle \frac{-5}{4}, \frac{-3}{4} \rangle \cup \langle \frac{-1}{4}, \frac{1}{4} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \rangle \cup \langle \frac{7}{4}, \frac{9}{4} \rangle \cdots$$

o equivalentemente:

$$x \in \cdots \langle -1 - \frac{1}{4}, -1 + \frac{1}{4} \rangle \cup \langle 0 - \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4} \rangle \cup \langle 1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4} \rangle$$

Así, tomando: $V_n = \langle n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \rangle, \forall n \in \mathbb{Z}$ obtenemos:

$$p^{-1}(U_x) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

Representamos lo dicho anteriormente mediante una gráfica.

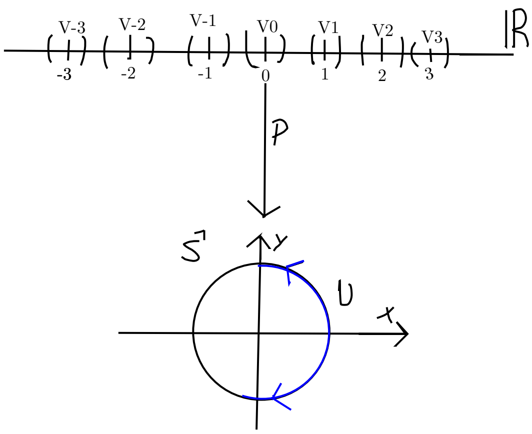


Figura 1.3

Ahora probaremos que para cada $n \in \mathbb{Z}$, tenemos:$p|_{\overline{V}_n} : \overline{V}_n \to \overline{U}$ es un homeomorfismo, entonces tendremos que $p|_{V_n} : V_n \to U$ es un homeomorfismo.

Probaremos que $p|_{\overline{V}_n} : \overline{V}_n \to \overline{U}$ es inyectiva.

Observamos que la función $sen2(\pi x)$ es monótona creciente y por consiguiente esto nos ayuda en la inyectividad de la función $p|_{V_n}$, es decir : que para $x_1, x_2 \in \overline{V}_n$ con $x_1 \neq x_2$ entonces $p|_{V_n}(x_1) \neq p|_{V_n}(x_2)$.

Observando además que si para algunos puntos de $\overline{V}_n$ obtenemos que que la función $cos(2\pi x)$ coincida, no se pierde la inyectividad de la función.Además, por el teorema de valor intermedio, $p|_{\overline{V}_n}$ es sobreyectiva.

Dado que $\overline{V_n}$ es compacto, puesto que es cerrado y acotado, y además como $\overline{U}$ es un espacio de Hausdorff con la topología del orden.

Por el Teorema de los valores intermedios tenemos que $p|_{V_n}$ es un homeomorfismo entre $\overline{V_n}$ y $\overline{U}$.

Estos conjuntos abiertos recubren $\mathbb{S}^1$ y cada uno de ellos esta regularmente cubierto por p. Por lo tanto, $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es una aplicación recubridora. ∎

OBSERVACIÓN 1.11. Si $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ es un cubrimiento entonces p es un homeomorfismo local entre $\widetilde{X}$ y X. Es decir: Para cada punto $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ existe un entorno que es aplicado por p homeomorficamente sobre un conjunto abierto de X.

EJEMPLO 1.10. Sea la aplicacón :

$$q : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{S}$$

dada por:

$$q(x) = (cos2(\pi x), sen2(\pi x))$$

Sabemos que para una función $f : X \to Y$ sobreyectiva y $A \subset X$ entonces $f|_A : A \longrightarrow Y$ no necesariamente es sobreyectiva, pero este es un caso particular a esta afirmación. Además es un homeomorfismo local.

Pero q no es una aplicación recubridora.Pues si tomamos el punto $b_0 = (1, 0)$ entonces no tiene una vecindad en U que este regularmente cubierto por q.

Ahora supongamos que existiese ese entorno U entonces su inversa $p^{-1}(U)$ consiste en la unión de pequeños entornos V_n con un pequeño intervalo $V_0 = (0, \epsilon)$, para $\epsilon > 0$ sumamente pequeño (Vea Figura 1.3).

Para cada uno de los intervalos $V_n, n > 0$ es homeomorfo a U relativo a la función p, pero el intervalo V_0 esta únicamente inmerso en U mediante q, esto quiere decir que q es un homeomorfismo entre V_0 y su respectiva imagen, pero no sobre todo U.

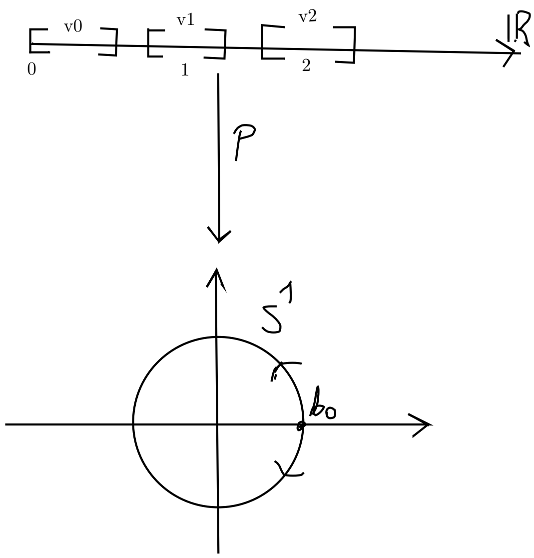


Figura 1.4

EJEMPLO 1.11. La recta real $\mathbb{R}$ no es el único espacio recubridor conexo del circulo $\mathbb{S}^1$. Podemos considerar la aplicación:

$$p : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

dada por:

$$p(z) = z^2$$

OBSERVACIÓN 1.12. La aplicación obtenida al restringir una aplicacón recubridora puede no ser una recubridora, como muestra el Ejemplo 1.13. Sin embargo el siguiente Teorema nos muestra una situación en la cual, si adherimos unas cuantas condiciones, encontraremos este tipo de caso.

OBSERVACIÓN 1.13. Vamos a demostrar que una restricción de recubrimiento es también una aplicación recubridora. Para ello vamos a establecer algunas notaciones e hipótesis . Dado p un aplicación de recubierto de $\widetilde{X}$ hacia X y X_0 un subespacio de X, denotemos a la preimagen de X_0 por p como $\widetilde{X}_0$.

TEOREMA 1.6. *Bajo la hipótesis de la observación 1.13, la aplicación restricción $p_0 : \widetilde{X}_0 \to X_0$ es una aplicación de cubrimiento.*

Demostración. Como X_0 es un subespacio de X, entonces X_0 es un abierto en si mismo y como p es continua y $p^{-1}(X_0) = \widetilde{X}_0$, entonces $p_0 = p|_{\widetilde{X}_0} : \widetilde{X}_0 \longrightarrow X_0$ es continua. Además p_0 es sobreyectiva.

Sea $x_0 \in X_0$, como $X_0 \subset X$, $x_0 \in X$ además U es un conjunto abierto en X que contiene a x_0 que esta regularmente cubierto por el cubrimiento entonces

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha,$$

donde $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ (son abiertos de $\widetilde{X}$) es una partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas, tal que $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_{\widetilde{x}}$ es un homeomorfismo, para cada $\alpha \in \Lambda$.

Ahora probaremos lo siguiente: cada $x_0 \in X_0$, posee una vecindad en X_0 que esta regularmente cubierto por p_0, entonces la imagen inversa de este conjunto abierto es igual a la unión disjunta de abiertos de $\widetilde{x}_0$, tal que al restringir p_0 a cada uno de los abiertos de $\widetilde{X}_0$ expresados anteriormente, sea homeomorfo al conjunto abierto de X_0.

En efecto: Como X_0 es un subespacio de X, y además U es abierto en X por la topología del subespacio tenemos que $U \cap X_0$ es un abierto de X_0 y es una

vecindad de x_0 en X_0.
Entonces:

$$p_0^{-1}(U \cap X_0) = p^{-1}(U \cap X_0)$$
$$p_0^{-1}(U \cap X_0) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(X_0)$$
$$p_0^{-1}(U \cap X_0) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (V_\alpha \cap \widetilde{X}_0).$$

Además, para $\alpha, \beta \in \Lambda$, con $\alpha \neq \beta$, tenemos:

$$(V_\alpha \cap \widetilde{X}_0) \cap (V_\beta \cap \widetilde{X}) = (V_\alpha \cap V_\beta) \cap \widetilde{X}_0 = \emptyset \cap X = \emptyset$$

Es decir, los conjuntos $(V_\alpha \cap \widetilde{X}_0)$ son abiertos, dos a dos, disjuntos en $\widetilde{X}_0$. Así, esta es una partición de $p_0^{-1}(U \cap V_0)$ en rebanadas, y cada uno de ellos se aplica homeomorficamente sobre $U \cap \widetilde{X}_0$ mediante p_0, puesto que $V_\alpha \cap X_0$ y $U \cap \widetilde{X}_0$, son abiertos de V_α y U, respectivamente, y como $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ es un homeomorfismo, para cada $\alpha \in \delta$, proporciona una correspondencia biunívoca, no solo entre V_α y U, si no entre sus conjuntos abiertos (es decir, $V_\alpha \cap \widetilde{X}_0$ y $U \cap X_0$ respectivamente).

Luego $p_0|_{V_\alpha} : V_\alpha \cap \widetilde{X}_0 \to U \cap \widetilde{X}_0$ es biyectiva. Además probamos que p_0 es continua, en particular $p_0|_{U \cap X_0}$ lo es y vemos que la inversa de esta función también es continua. ∎

El siguiente teorema nos permite ver que el producto de dos aplicaciones recubridores es nuevamente una aplicación recubridora:

TEOREMA 1.7. *Si $p : \widetilde{X} \to X$ y $p' : \widetilde{X'} \to X'$ son funciones recubridoras, entonces:*

$$p \times p' : \widetilde{X} \times \widetilde{X'} \longrightarrow X \times X'$$

es una funciones recubridora.

Demostración. La continuidad de $p \times p'$ deriva del Teorema 1.17. Veamos la sobreyectividad: Como $p : \widetilde{X} \to X$ y $p' : \widetilde{X'} \to X'$ son sobreyectivas tenemos que $p(\widetilde{X}) = X$ y $p'(\widetilde{X'}) = X'$, luego:

$$p \times p'(\widetilde{X} \times \widetilde{X'}) = p(\widetilde{X}) \times p'(\widetilde{X}) = \widetilde{X'} \times \widetilde{X'}$$

Dados $x \in X$ y $x' \in X$, y sean U y U' entornos de x y x' respectivamente. Entonces:

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

y

$$(p')^{-1}(U') = \bigcup_{\beta \in I} V_\beta,$$

donde $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{V'_\beta\}_{\beta\in I}$ secciones en homeomorfas de $p^{-1}(U)$ y $(p')^{-1}(U')$, respectivamente.

Sea $U \times U'$ es un abierto de $X \times X'$ y es una vecindad de $x \times x'$. Probaremos que esta regularmente cubierto por $p \times p'$; pero antes recordemos que la inversa para el producto de dos aplicaciones continuas de la siguiente forma:

$$(p \times p')^{-1} = p^{-1} \times (p')^{-1}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
(p \times p')^{-1}(U \times U') &= p^{-1} \times (p')^{-1}(U \times U') \\
&= P^{-1}(U) \times (p')^{-1}(U') \\
&= \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha \times \bigcup_{\beta\in I} V'_\beta \\
&= \bigcup_{\beta,\alpha\in I} (V_\alpha \times V'_\beta)
\end{aligned}$$

Además, si $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in I$ son tales que $\alpha \neq \alpha', \beta \neq \beta'$ tenemos:

$$\begin{aligned}
(V_\alpha \times V'_\beta) \cap (V_{\alpha'} \times V'_{\beta'}) &= (V_\alpha \cap V_{\alpha'}) \times (V'_\beta \cap V'_{\beta'}) \\
&= \emptyset \times \emptyset \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Es decir los conjuntos $V_\alpha \times V'_\beta$ son abiertos disjuntos dos a dos en $\widetilde{X} \times X$, y cada uno de ellos aplica homeomorficamente sobre $U \times U'$ por $p \times p'$ ∎

EJEMPLO 1.12. Sea el cubrimiento :

$$p \times i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+,$$

donde i es la la aplicación identidad de $\mathbb{R}_+$ y p es la aplicación del Teorema 1.5. Si tomamos el homeomorfismo entre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, que lleva (x, t) a tx, con la composición se obtiene un cubrimiento:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

dada entre el plano agujereado con el semiplano abierto superior. Esta aplicación recubridora aparece en el estudio de variables complejas como la superficie de Riemman correspondiente a la función logaritmo complejo.

EJEMPLO 1.13. Tomemos el espacio $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, donde $p \times p'$ es el cubrimiento del Toro en el plano $\mathbb{R}^2$, donde p es la un cubrimiento dado en el Teorema 1.5. Cada uno de los cuadrados unidad $[n, n+1] \times [m, m+1]$ se enrolla completamente alrededor del toro, por medio de $(p \times p')$.

DEFINICIÓN 1.15. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ y la inclusión $i_A : A \longrightarrow X$. se dice que A es una* ***retración*** *de X en A, si existe una aplicación continua:*

$$\Gamma : X \longrightarrow A,$$

la retracción, tal que $\Gamma \circ i_A = 1_A$. Donde Γ es siempre sobreyectiva.

1.4. El espacio recubridor universal

Cuando consideramos espacios recubridores simplemente conexos, podemos obtener:

DEFINICIÓN 1.16. *Al único espacio recubridor simplemente conexo y localmente conexo por caminos $\widetilde{X}$ con recubrimiento $p : \widetilde{X} \to X$, se le llama espacio recubridor universal o cubierta universal de X*

En otras palabras un espacio recubridor se llama universal si es simplemente conexo, ósea, su primer grupo de homotopía es trivial.

EJEMPLO 1.14. Algunos ejemplos de cubrimientos universales :

- El espacio recubridor universal del toro $\mathbb{T}^n$ es $\mathbb{R}^n$, ya que la aplicación:

  $$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$$

  dada por

  $$p(x_1, ..., x_n) = (\exp(x_1), ..., \exp(x_n))$$

  es un recubrimiento y $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo y localmente conexo por caminos.

- El espacio recubridor universal de $\mathbb{RP}^n$ es $\mathbb{S}^n$.

DEFINICIÓN 1.17. *X es semilocalmente simplemente conexo, si admite una base de conjuntos abiertos U, con la propiedad de que, todo lazo en U es homotópico en X a una constante.*

Como resultado del teorema a seguir, tenemos que todo espacio razonable, incluyendo las variedades conexas, posee un espacio recubridor universal. La prueba es complicada y puede encontrarse en [Mas2].

1.5. CW-complejo

Las estructuras celulares juegan un rol esencial en las áreas de topología, análisis y geometría, en la forma de CW - complejos, conjuntos simpliciales. La idea de esta sección es dar un trato unificado de sus propiedades fundamentales, geométricas y topológicas (en el sentido de la topología general).

La noción de CW-complejo fue introducida formalmente en 1949 por el destacado matemático inglés Jhon H.C Whitehead. lo que hizo Whitehead fue imponer una estructura combinatoria en los espacios y así obtener una comprensión mucho más profunda.

DEFINICIÓN 1.18. *Sean X y B espacios topológicos y A un subespacio de B y $f : A \longrightarrow X$, una función continua. El espacio de adjunción $B \cup_f X$ se define a partir de la unión disjunta $X \sqcup B$ identificando los puntos $a \in A$ con los puntos $f(a) \in X$. Exactamente*

$$X \cup_f B = X \sqcup B / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por la relación $a \sim f(a)$, $\forall a \in A$. La función

$$f : A \longrightarrow X$$

se llama función de adjunción.
Sea $i : A \longrightarrow B$ la inclusión. Definimos $\pi_2 : X \longrightarrow X \cup_f B$, con $\pi_2(x) = \overline{x}$ (la clase de x en el cociente), es decir π_2 es la composición de la inclusión de X en $X \sqcup B$ con la función cociente

$$q : X \sqcup B \longrightarrow X \cup_f B$$

Simuladamente definimos $\pi_1 : B \longrightarrow X \cup_f B$ con $\pi_1(b) = \overline{b}$. Notar que $a \in A$,

$$\pi_1(a) = \overline{a} = \pi_2(f(a)) = \overline{f(a)}$$

entonces se tiene un cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "\pi_2"] \\ B \arrow[r, "\pi_1"'] & X \cup_f B \end{tikzcd}$$

Donde $X \cup_f B$ se llama espacio adjunto.

OBSERVACIÓN 1.14. $*$ Sean $X \cup_f B$ y

$$q : X \sqcup B \longrightarrow X \cup_f B$$

la aplicación cociente de la topología cociente.

Sabemos que un subconjunto $U \subset X \cup_f B$ es abierto (Cerrado) en $X \cup_f B$ si y solo si, $q^{-1}(U)$ es abierto (cerrado) en $X \sqcup B$.

Y esta última afirmación se mantiene si y solo si $q^{-1}(U) \cap X$ es abierto (cerrado) en X y $q^{-1}(U) \cap B$ es abierto (Cerrado) en B, o equivalentemente, $(\pi_2)^{-1}(U)$ es abierto (Cerrado) en X y $(\pi_1)^{-1}(U)$ es abierto (cerrado) en B.

$*$ Si $x, x' \in (B - A)$, entonces $\overline{x} = \overline{x'}$ si y solo si $x = x'$ (La relación $\sim$ solo puede identificar puntos de A).

$*$ Si $b, b' \in B$, entonces $\overline{b} = \overline{b'}$ si y solo si $b = b'$ (Es decir como conjuntos, no como espacios topológicos.)

$*$ $X \cup_f B$ es la unión disjunta de B y $(B - A)$

$$X \cup_f B = X \sqcup (B - A)$$

Los puntos de A quedan pegados con su imagen $f(a) \in X$

DEFINICIÓN 1.19. ***(Push Out)*** *Se dice que un cuadro conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & X \arrow[d, "\pi_2"] \\ B \arrow[r, "\pi_1"'] & X \cup_f B \end{tikzcd}$$

es un push out cuando para todo par de morfismo α, β.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\ B \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & X \cup_f B \arrow[dr, "\exists! H"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

tal que :

$$\alpha \circ i = \beta \circ f$$

existe un único morfismo

$$H : X \cup_f B \longrightarrow Y$$

verificando

$$H \circ \pi_1 = \alpha \text{ y } H \circ \pi_2 = \beta$$

PROPOSICIÓN 1.6. *El espacio de adjunción $X \cup_f B$ cumple la siguiente propiedad universal: Para todo Y espacio topológico y para todo par de morfismos α, β.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\
B \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & X \cup_f B \arrow[dr, "\exists! H"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

tal que :

$$\alpha \circ i = \beta \circ f$$

existe un único morfismo

$$H : X \cup_f B \longrightarrow Y$$

verificando

$$H \circ \pi_1 = \alpha \text{ y } H \circ \pi_2 = \beta$$

Demostración. Consideramos dos caso Si $a \sim b$ ocurre

$$a = b \to H(\bar{a}) = H(\bar{b})$$

$$f(a) = b \to H(\bar{a}) = H(\bar{b})$$

Ahora que ocurre si $a \in X, H(\bar{a}) = f(a)$ o si $a \in B, H(\bar{a}) = a$. Si $a \in A \subset X, a \in X$.Ahora $H(\bar{b}) = b$, por que $b \subset B$ por hipótesis $f(a) = b$. Ahora se tiene que $H(\bar{a}) = H(\bar{b})$ siempre y cuando $a \sim b$ esto significa que las imagines son las mismas H induce una aplicación en el cocientes, automáticamente esa aplicación es continua.

Demostramos que H es único :Sea

$$H : X \cup_f B \to Y;$$

$$X \cup_f B = \{\bar{a}; a \in X \sqcup B\}$$

$$H \circ \pi_1 = \alpha \text{ y } H \circ \pi_2 = \beta$$

Como

$$a \in X \cup_f B = X \sqcup B/\sim \Rightarrow a \in \bar{a}; a \in A \subset X \subset X \sqcup B \to a \subset X \sqcup B$$

Tomamos dos casos

$$a \in A \to \bar{a} = \{a, f(a)\}$$

$$a \notin A \to \bar{a} = \{a\}$$

Si $a \in A$; $H(\bar{a}) = H \circ \pi_1(a) = \alpha(a)$
$g(\bar{a}) = g \circ \pi_1(a) = \alpha(a)$

Si $a \notin A$; $H(\bar{a}) = H \circ \pi_1(a) = H \circ \pi_1 \circ i(a) = \alpha(a)$ $g(\bar{a}) = g \circ \pi_1(a) = \alpha(a)$, entonces $H = g.\forall a \in A$ o $\forall a \notin A$. Por lo tanto el morfismo es único

∎

EJEMPLO 1.15. Sean A y X espacios topológicos y $f : A \longrightarrow X$ una aplicación continua. El cilindro de f, denotado por Z_f, es un espacio adjunto:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & X \arrow[d] \\ A \times I \arrow[r] & Z_f \end{tikzcd}$$

EJEMPLO 1.16. Si $A = \mathbb{S}^{n-1}$, con $n \in \mathbb{N}$, y $g : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X$ es una función continua, entonces el espacio Cg se le conoce como X con una n-celda unida y denotada por $X \cup e^n$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & X \arrow[d] \\ \mathbb{D}^n \arrow[r] & C_g \end{tikzcd}$$

Normalmente, el espacio X será un espacio de Hausdorff. Este ejemplo será de absoluta utilidad e importancia en la siguiente sección.

PROPOSICIÓN 1.7. *Sea $X \cup_f B$ el espacio adjunto. Entonces:*
a) $\pi_2 : X \longrightarrow X \cup_f B$ *es una aplicación cerrada.*
b) $\pi_1|_{B-A} : B - A \longrightarrow X \cup_f B$ *es una aplicación abierta.*

Demostración. Para el primer enunciado, tenemos que probar que π_1 es inyectivo y cerrado. Es claro que π_1 es continuo e inyectivo. Así es suficiente probar que π_1

es cerrado.
Sea

$$q : X \sqcup B \longrightarrow X \cup_f B$$

una aplicación cociente en la topología cociente. Si U es un subconjunto cerrado en $X \cup_f B$ si y solo si $q^{-1}(U)$ es cerrado en $X \sqcup B$. o equivalentemente $\pi_2^{-1}(U)$ es cerrado en X y $\pi_1^{-1}(U)$ es cerrado en B.

Sea $F \subseteq X$ un subespacio cerrado y $\pi_2(F) \subset X \cup_f B$, entonces $q^{-1}(\pi_2(F))$ es cerrado en $X \sqcup B$. Tenemos que

$$(\pi_2)^{-1}(\pi_2(F)) = F$$

es cerrado en X

$$(\pi_1)^{-1}(\pi_2(F)) = f^{-1}(F)$$

es cerrado en B.
Si X y B es cerrado, entonces $X \sqcup B$ es cerrado . Luego $\pi_1(F)$ es cerrado en $X \cup_f B$.

De manera similar, para la segunda afirmación es suficiente mostrar que $\pi_1|_{B-A}$ es una aplicación abierta.
Sea $U \subseteq (B - A)$ un subespacio abierto, entonces $\pi_1|_{B-A}(U) \subset X \cup_f B$ es abierto en $X \cup_f B$ entonces $q^{-1}(\pi_1|_{(B-A)}(U))$ es abierto en $X \sqcup B$.
Además

$$(\pi_2)^{-1}(\pi_1|_{B-A}(U)) = \emptyset$$

es abierto en X

$$(\pi_1)^{-1}(\pi_1|_{B-A}(U)) = U$$

es abierto en B. Si X y B es abierto, entonces $X \sqcup B$ es abierto . Por tanto, $\pi_1|_{B-A}(U)$ es abierto en $X \cup_f B$ ∎

La siguiente proposición establece condiciones que aseguran que el espacio adjunto es un espacio de Hausdorff.

PROPOSICIÓN 1.8. *Sean X,B espacios topológicos de Hausdorff y $A \subseteq B$ un subespacio cerrado. Si $f : A \longrightarrow X$ una aplicación continua. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*
(a) Para cada $b \in B \backslash A$ existe una vecindad cerrada C_b en B tal que $C_b \cap A = \emptyset$
(b) Existe un subconjunto abierto $U \subseteq B$ y una retracción $r : U \to A$.
Entonces el espacio adjunto $X \cup_f B$ es Hausdorff.

Demostración. Sean $\pi_1 : X \to X \cup_f B$, $\pi_2 : B \to X \cup_f B$ como en la definición de espacio adjunto y $x_1, x_2 \in X \cup_f B$. Debemos encontrar subconjuntos abiertos disjuntos $V_1, V_2 \subseteq X \cup_f B$ tales que $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in V_2$. Dividimos la prueba en tres casos:

Sea

$$q : X \sqcup B \longrightarrow X \cup_f B$$

una aplicación cociente en la topología cociente. Si U es un subconjunto cerrado en $X \cup_f B$ si y solo si $q^{-1}(U)$ es cerrado en $X \sqcup B$. o equivalentemente $\pi_1^{-1}(U)$ es cerrado en X y $\pi_2^{-1}(U)$ es cerrado en B.

(1) Sean $x_1, x_2 \in (B - A) \subset X \cup_f B$. Como $x_1, x_2 \in (B - A) \subset B$ es abierto, además es Hausdorff, entonces existen subconjuntos abiertos y disjuntos $V_1, V_2 \subseteq B$, no se intersectan en A e identificando $V_1, V_2 \subset X \cup_f B$ tales que $x_1, x_2 \in V_1; V_2$ y $V_1 \cap V_2 \doteq \emptyset$. Por lo tanto es Hausdorff.

(2) Sean $x_1 \in X$ y $x_2 \in (B - A)$ y $(B - A) \subset X \cup_f B$, existe el interior de $(C_{x_2})^\circ \subset B$, pero como no intersecta a A lo podemos escribir como $(C_{x_2})^\circ \subset X \cup_f B$. Tomemos a un cerrado $C_{x_2} \subset (B - A)$,pero como es cerrado en $(B - A)$ también lo es en $X \cup_f B$, entonces $C_{x_2} \subset X \cup_f B$, donde $x_2 \in C_{x_2} \subset X \cup_f B$, luego el $x_1 \in C'_{x_2} \subset X \cup_f B$ complemento, denotamos a $V_2 = (C_{x_2})^\circ$; $V_1 = C'_{x_2}$ y $V_1 \cap V_2 \doteq \emptyset$. Por lo tanto es Hausdorff.

(3) Sean $x_1, x_2 \in X$. Como X es Hausdorff, existen subconjuntos abiertos y disjuntos $W_1, W_2 \subseteq X$ tales que $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$. Pero W_1 y W_2 podrían ser abiertos en $X \cup_f B$.
Usando la retracción r ampliaremos los subconjuntos W_1 y W_2 para que sean abiertos en $X \cup_f B$ y permanezcan disjuntos. Existe un subconjunto abierto $U \subseteq B$ Tomamos $V_1 = W_1 \cup (r^{-1} f^{-1}(W_1))$, donde W_1 es un abierto en X y $r^{-1} f^{-1}(W_1)$ es un abierto en B, entonces V_1, es una abierto.Luego $V_2 = W_2 \cup (r^{-1} f^{-1}(W_2))$, W_2 es un abierto en X y $r^{-1} f^{-1}(W_2)$ es un abierto en B, entonces V_2 es un abierto en la unión disjunta.

$$(\pi_2)^{-1}(V_1) = W_1; (\pi_2)^{-1}(V_2) = W_2$$

y

$$(\pi_2)^{-1}(V_1) = r^{-1} f^{-1}(W_1); (\pi_2)^{-1}(V_2) = r^{-1} f^{-1}(W_2)$$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y que V_1 y V_2 son abiertos en $X \cup_f B$. Por lo tanto es Hausdorff.

∎

OBSERVACIÓN 1.15. Si tomamos $A = \mathbb{S}^{n-1}$ y $B = \mathbb{D}^n$ entonces las condiciones (a) y (b) de la proposición anterior son satisfechas. Lo mismo sucede si tomamos $A = \bigcup_{i\in I} \mathbb{S}^{n-1}$ y $B = \bigcup_{i\in I} \mathbb{D}^n$.

1.5.1. Definición de CW-complejo.

Los CW- complejos son espacios que se construyen pegando celdas de distintas dimensiones. Adjuntar una $n-$ celda a un espacio B es unir una copia del disco $\mathbb{D}^n$ pegando el borde $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ a B de alguna manera.

Definamos formalmente esto. Para todo $n \geq 0$ consideremos $\mathbb{D}^n$ y las esferas $\mathbb{S}^{n-1}$. Por convención tomamos $\mathbb{D}^0 = *$ y $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ (que es el borde del punto)

DEFINICIÓN 1.20. *Sea $n \in \mathbb{N}$ llamamos n-celda o n-celda abierta a cualquier espacio topológico homeomorfo a $e^n = \mathbb{D}^n - \partial\mathbb{D}^n$ donde $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ la frontera del n- disco*

DEFINICIÓN 1.21. *Un espacio X se obtiene de un espacio B adjuntando una n - celda si se tiene un Push Out*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & B \arrow[d, "\pi_2"] \\ \mathbb{D}^n \arrow[r, "\pi_1"'] & X \end{tikzcd}$$

donde $i : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{D}^n$ es la inclusión en el borde.

OBSERVACIÓN 1.16. Es decir, X se construye tomando la unión disjunta de B y $\mathbb{D}^n$ e identificando luego los puntos del borde del disco con su imagen de B.Esto se nota generalmente con

$$X = B \cup_f \mathbb{D}^n$$

La función f se denomina función de adjunción de la celda. La celda es la imagen del disco en X y la denotamos $e^n = \pi_1(\mathbb{D}^n)$ y la función π_1 se llama función característica de la celda.

EJEMPLO 1.17. $\mathbb{D}^n$ se obtiene de $\mathbb{S}^{n-1}$ adjuntado una n - celda tomando como función de adjunción a la identidad $l_f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$

EJEMPLO 1.18. $\mathbb{S}^n$ se obtiene de un punto $*$ adjuntando una n - celda.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & * \arrow[d] \\ \mathbb{D}^n \arrow[r, "\pi_1"'] & \mathbb{S}^n \end{tikzcd}$$

La función característica $\pi_1 : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ resulta ser la función cociente.

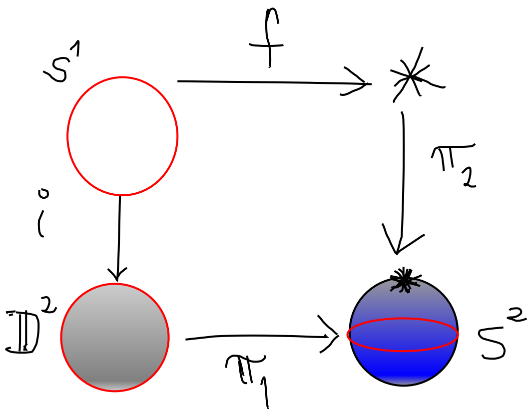


Figura 1.5: Cw Complejo

OBSERVACIÓN 1.17. (a) Adjuntar una 0-celda significa agregar puntos distintos.

(b) El interior de la $n-$ celda es homeomorfa a $Int(\mathbb{D}^n) = \mathbb{D}^n - \mathbb{S}^{n-1}$.

(c) El espacio X de la definición anterior es el espacio adjunto $X = B \cup_g \mathbb{D}^n$. También se puede ver como la función cono de g.

Se pueden adjuntar varias n - celdas de B al mismo tiempo considerando varias copias de $\mathbb{S}^{n-1}$ y $\mathbb{D}^n$, la adjunción sera el espacio que cumple el Push Out

$$\begin{tikzcd} \bigcup \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\bigcup g_\alpha"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & B \arrow[d] \\ \bigcup \mathbb{D}^n \arrow[r, "\bigcup f_\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

Las n- celdas adjuntadas serán $e^n_\alpha = f_\alpha(\mathbb{D}^n)$

observación la construcción que se dio anteriormente. Consideramos a X un espacio topológico.

DEFINICIÓN 1.22. *X es un CW-complejo si existe una sucesión $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X^n \subseteq X^{n+1} \subseteq \cdots$ tal que las siguientes tres condiciones se cumplen:*

(a) Donde X^0 es un espacio discreto, cuyos puntos se consideran 0 -celdas.

(b) Por inducción, el espacio X^n se obtiene de X^{n-1} adjuntando n- celdas e^n_α a través de la aplicación

$$\varphi_\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$$

(c) *Uno puede detener este proceso inductivo en una etapa final, estableciendo $X = X^n$ para algún $n < \infty$, o uno puede continuar indefinidamente , estableciendo*

$$X = \bigcup_n X^n$$

. En este ultimo caso, X tiene la topología final.

Un espacio X construido de esta manera se llama Complejo Celular o CW-complejo

OBSERVACIÓN 1.18. Un conjunto $A \subseteq X$ es abierto en X si y solo si $A \cap X^n$ es abierto en X^n, para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & X^{n-1} \arrow[d] \\
\mathbb{D}^n \arrow[r, "f"'] & X^n
\end{tikzcd}$$

EJEMPLO 1.19. (a) $\mathbb{S}^n$ es un CW-complejo. Consideraremos dos estructuras diferentes:

1) El m-esqueleto de $\mathbb{S}^n$ es $*$ para todo $0 \leq m < n$ y $\mathbb{S}^n$ para $m \geq n$. En esta estructura tenemos una 0-celdas y una n-celda y el n-esqueleto se obtiene del $(n-1)$-esqueleto adjuntando una $n-$celda:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "push"] & * \arrow[d] \\
\mathbb{D}^n \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^n
\end{tikzcd}$$

como se muestra en la figura 1.4

2) $(\mathbb{S}^n)^m = \mathbb{S}^m$ para todos $m \leq n$. El $(m-1)$- esqueleto $\mathbb{S}^{m-1}$ es el ecuador del m-esqueleto $\mathbb{S}^m$ para todo $m \leq n$ y el último se obtiene del primero mediante la unión de $2m$-celdas, que corresponden a los hemisferios norte y sur de $\mathbb{S}^m$.

(b) El n-disco $\mathbb{D}^n$ es un CW complejo . Consideraremos dos diferentes estructuras de CW-complejo en $\mathbb{D}^n$, las cuales satisfacen que $(\mathbb{D}^n)^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1}$ y que la n-celda esta junto a la aplicación de identidad. Estas dos estructuras diferentes se obtienen dando a cada una las estructuras del ejemplo anterior. Por lo tanto una de ellas tiene una 0-celda , una $(n-1)$- celda y una n-celda y la otra tiene $2k$-celdas, para cada $0 \leq k \leq (n-1)$, y una n-celda.

(c) Los poliedros son CW-complejo con estructura de CW-complejo inducida por la estructura simple.

(d) El toro es un CW-complejo con una 0-celda, dos 1-celda y una 2-celda . El 1-esqueleto, es una cuña de 2 copias de $\mathbb{S}^1$.

(e) La esfera infinita $\mathbb{S}^\infty$ es un CW-complejo. Recordemos que $\mathbb{S}^\infty$ se define de la siguiente manera: sea $\mathbb{R}^{(n)}$ el conjunto de secuencias de números reales de soporte finito. Damos a $\mathbb{R}^{(n)}$ la topología final respecto a las inclusiones:

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq ...$$

La esfera de dimensión infinita se define como $\mathbb{S}^\infty := \{x \in \mathbb{R}^{(n)} : \|x\|_2 = 1\}$. Damos a S^∞ la siguiente estructura CW-complejo: su n-esqueleto es S^n para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y es el ecuador del $(n+1)$-esqueleto, como antes.
Por tanto $\mathbb{S}^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{S}^n$. El n-esqueleto $\mathbb{S}^n$ se obtiene del $(n-1)$ esqueleto $\mathbb{S}^{n-1}$ uniendo dos n-celdas como en la segunda estructura del ejemplo (a).

(f) Sea $\mathbb{P}^2$(El plano proyectivo real) es un CW-complejo con una 0-celda, una 1-celda y una 2-celda. El 1-esqueleto de esta estructura es $\mathbb{S}^1$ y las 2-celdas están unidas por la aplicación $g : \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z^2$

(g) De manera general, el espacio proyectivo real n-dimensional $\mathbb{P}^n$ es un CW-complejo con una m-celda, para cada $m \leq n$. Por otra parte, el m-esqueleto de esta estructura de CW-complejo es $\mathbb{P}^m$, para todo $2 \leq m \leq n$.

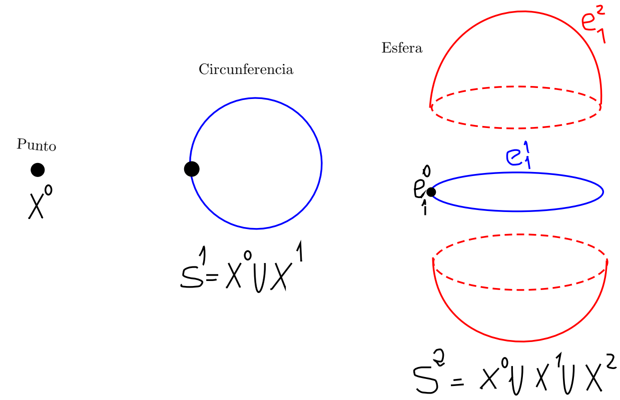
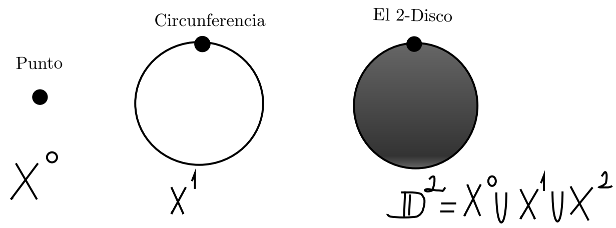


Figura 1.6: La esfera $\mathbb{S}^2$ es un Cw Complejo



$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "id"] \arrow[d, hook, "i"'] & S^1 \arrow[d] \\ \mathbb{D}^2 \arrow[r] & \mathbb{D}^2 \end{tikzcd}$$

Figura 1.7: El 2-disco $\mathbb{D}^2$ es un Cw Complejo

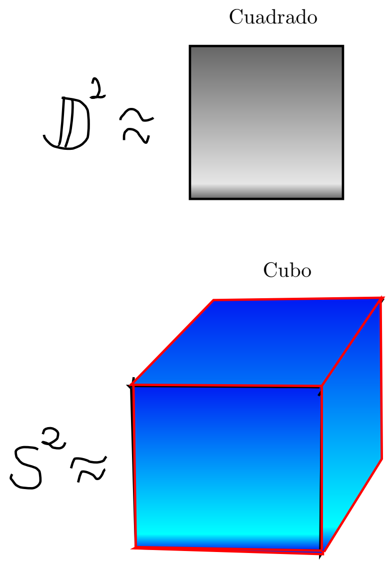


Figura 1.8: El cubo es un Cw Complejo

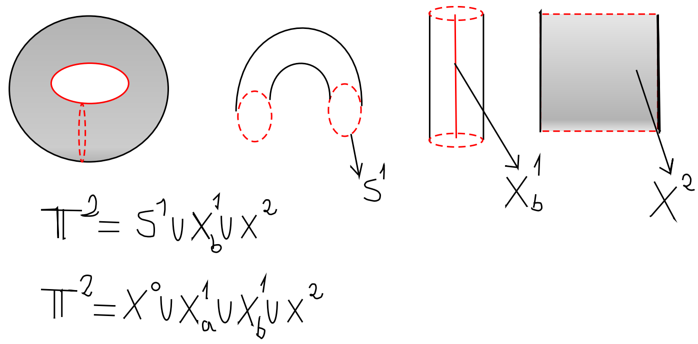


Figura 1.9: El toro es un Cw Complejo

DEFINICIÓN 1.23. *Sea X un CW-complejo no vacío. Se define la dimensión de X de la forma siguiente:*

$$dimX := sup\{n \in \mathbb{N}_0 : X^{n-1} \neq X^n\}.$$

Note que la dimensión puede ser $+\infty$.

Debemos mencionar que la dimensión de un CW-complejo está bien definida, es decir, que no depende de la estructura del CW-complejo que sea dado. Esto se puede probar usando la invariación del Teorema de dominio.

Si X es un CW-complejo entonces, Por la Proposición 1.7, obtenemos que X^n es un subespacio cerrado de X, para todo n.

PROPOSICIÓN 1.9. *Si X es un CW-complejo, entonces X es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Por la Proposición 1.8 e inducción obtenemos que el n-esqueleto X^n es un espacio de Hausdorff, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, si X es dimensional finito hemos acabado.
Para el caso general, sean x e y puntos distintos en X. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x, y \in X^n$. Dado que X^n es Hausdorff, existen subconjuntos abiertos y disjuntos $U_n, V_n \subseteq X^n$ tales que $x \in U_n$, $y \in V_n$. Sin embargo, U_n y V_n podrían no ser abiertos en X.

Ya que estamos bajo la hipótesis de la Proposición 1.8, podemos ampliar U_n y V_n para obtener subconjuntos U_{n+1} y V_{n+1} de X^{n+1} tales que $U_{n+1} \cap X^n = U_n$, $V_{n+1} \cap X^n = V_n$ y $U_{n+1} \cap V_{n+1} = \emptyset$.
Repitiendo este proceso inductivamente obtenemos secuencias $(U_j)_{j>n}$ y $(V_j)_{j>n}$ satisfaciendo que

$$U_j; V_j \text{ son abiertos en } X^j$$

$$U_{j+1} \cap X^j = U_j,\, V_{j+}1 \cap X^j = V_j$$

$$U_j \cap V_j = \emptyset, \text{ para todo } j \geq n.$$

Sean $U = \bigcup_{j \geq n} U_j$ y $V = \bigcup_{j \geq n} V_j$. Entonces $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

como, para todo $m \geq n$, $U \cap X^m = U_m$ es abierto en X^m, tenemos que U es abierto en X. De la misma manera obtenemos que V es abierto en X. Esto concluye la prueba. ∎

1.6. Conjuntos Simpliciales

En esta sección desarrollaremos un estudio detallado sobre las propiedades básicas de los conjuntos simpliciales. Además, explicaremos que los conjuntos simpliciales modelan ciertos espacios topológicos que se pueden formar pegando símplíces de distintas dimensiones.

DEFINICIÓN 1.24. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Un n-simplex es un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$, definido por*

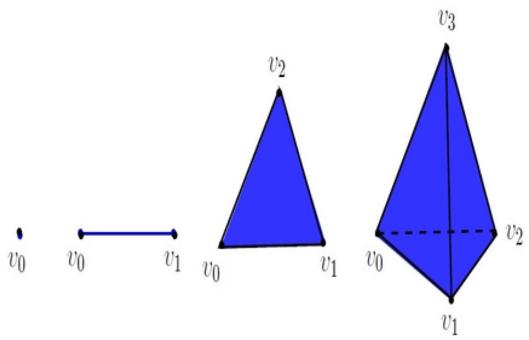
$$\Delta^n = \left\{ (t_0, t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

Los conjuntos

$$f_k = \left\{(t_0, t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_k = 0, t_i \geq 0\right\},$$

son llamados las k-enésimas caras de la n-simplex.

Note que Δ^n está orientado por el orden natural de sus vértices y cualquier cara abarcada por un subconjunto de los vértices hereda una orientación como un subconjunto de los vértices de Δ^n. Por lo tanto, cada cara es canónicamente isomorfa a Δ^{n-1}, preservando el orden.



EJEMPLO 1.20.

- Para $n = 0$, tenemos $\Delta^0 = \{1\}$.
- El 1-simplex stándar es el segmento orientado de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$.
- El 2-simplex estándar es el triángulo en $\mathbb{R}^3$. con vértices $e_0 = (1, 0, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0)$ y $e_2 = (0, 0, 1)$. Sus bordes son los segmentos orientados $[e_0e_1], [e_1e_2]$ y $[e_0e_2]$

DEFINICIÓN 1.25. *Un **conjunto simplicial** K es una familia de conjuntos $\{K_n\}_{n\geq 0}$ junto con aplicaciones*

$$\partial_i : K_n \to K_{n-1}$$

y

$$\delta_j : K_n \to K_{n+1},$$

para todo $0 \leq i, j \leq n$, *que satisfacen la siguientes identidades simpliciales:*

1. $\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i$, *si* $i < j$;
2. $\delta_i \circ \delta_j = \delta_{j+1} \circ \delta_i$, *si* $i \leq j$;
3. $\partial_i \circ \delta_j = \delta_{j-1} \circ \partial_i$, *si* $i < j$;
4. $\partial_j \circ \delta_j = id = \partial_{j+1} \circ \delta_j$;
5. $\partial_i \circ \delta_j = \delta_j \circ \partial_{i-1}$, *si* $i > j + 1$.

Los elementos de K_n se llaman **n-símplex**. Los ∂_i son llamados caras y δ_i los operadores de degeneración. Un símplex x es degenerado si $x = \delta_i(y)$ para algunos símplex y y operador de degeneración δ_i, de lo contrario, se dice que es no degenerado.

DEFINICIÓN 1.26. *Si* K, L *son conjuntos simpliciales, un morfismo simplicial* $f : K \to L$ *es una familia de funciones* $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *tales que* $f_n : K_n \to L_n$ *y conmutan con los operadores* ∂_i, δ_i. *Es decir*

$$f_n \circ \partial_i = \partial_i \circ f_{n+1}$$

$$f_n \circ \delta_i = \delta_i \circ f_{n-1}$$

DEFINICIÓN 1.27. *Un conjunto simplicial* K *satisface la condición de extensión si, para cada colección de* $n + 1$ n*-simplex,* $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_{n+1}$ *que satisfacen la condición de compatibilidad:* $\partial_i(x_j) = \partial_{j-1}(x_i)$, *con* $i < j$, $i \neq k$ $j \neq k$, *existe un* $(n-1)$*-simplex* x *tal que* $\partial_i(x) = x_i$, *para* $i \neq k$.

EJEMPLO 1.21. Un complejo simplicial K es un conjunto de subconjuntos finitos, denominados símplices, de un conjunto dado $\overline{K}$ sujeto a la condición de que cada subconjunto no vacío de un elemento de K sea un elemento de K. Un conjunto simplicial $\widetilde{K}$ surge de K en la siguiente manera: Un n- simplex de $\widetilde{K}$ es una secuencia finita $(a_0 \cdot \cdot\cdot, a_n)$ de elementos de $\overline{K}$ tal que el conjunto $\{a_0, \cdot \cdot \cdot \cdot, a_n\}$ es un m-simplex de K, para algún $m \leq n$. Los operadores de cara y degeneración de $\widetilde{K}$ están definidos por:

$$\partial_i(a_0, ..., a_n) = (a_0, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$$

y

$$\delta_i(a_0, ..., a_n) = (a_0, ..., a_i, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)$$

Si los elementos de $\overline{K}$ están ordenados y requerimos que $\widetilde{K}$ consista de la secuencia $(a_0, ..., a_n)$ de modo que $a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n$ y $\{a_0, ..., a_n\}$ es un m-simplex de K, para algún $m \leq n$, entonces habrá exactamente un n- simplex no degenerado de $\widetilde{K}$ por cada n-simplex de K.

1.6.1. Objetos Simpliciales en Categorías

DEFINICIÓN 1.28. *Una categoría $\mathcal{C}$ es un triplete $\mathcal{C}$ =(ob($\mathcal{C}$); $Hom(A, B)$; $\circ$) satisfaciendo que:*

1. *Los elementos en ob($\mathcal{C}$) se denotan por letras mayúsculas $A;B;C;...$.*
2. *Para todo A y B se tiene el conjunto $Hom(A, B)$ de morfismos de A en B.*
3. *Para cada tres objetos A, B, C se tiene la siguiente ley de composición bien definida:*

$$\begin{array}{rcl} \circ : Hom(A, B) \times Hom(B, C) & \longrightarrow & Hom(A, C) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

sujeta a los siguientes axiomas:

1. *$Hom(A, B) = Hom(C, D)$ si, y solo sí, $A = C; B = D$;*
2. *Si $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$, entonces*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

   (Ley asociativa de la composición);
3. *Para todo $A \in obj(\mathcal{C})$ existe un único elemento $1_A : A \longrightarrow A$, tal que daos $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow A$, tenemos:*

$$f \circ 1_A = f \ , \ 1_A \circ g = g.$$

   El elemento 1_A se llama morfismo identidad de A.

DEFINICIÓN 1.29. *El opuesto $\mathcal{C}^*$ de la categoría $\mathcal{C}$ tiene un objeto A^* para cada objeto A de $\mathcal{C}$ y un morfismo $\alpha \in Hom(B^*, A^*)$ para cada morfismo $\alpha \in Hom(A, B)$ y $\alpha^* \circ \beta^*$ es definido e igual a $(\beta \circ \alpha)^*$, siempre que se defina $(\beta \circ \alpha)$.*

DEFINICIÓN 1.30. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un funtor Covariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es una aplicación que asocia a cada objeto A de $\mathcal{C}$ un objeto $\mathcal{F}(A)$ de $\mathcal{D}$ y a cada morfismo $f \in Hom(A, B)$ un morfismo $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{D}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$, sujeto a los siguientes axiomas:*

1. $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$.
2. $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$.

DEFINICIÓN 1.31. *Sean $\mathcal{C}$y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es una regla que asocia cada objeto A de $\mathcal{C}$ un objeto $\mathcal{F}(A)$ de $\mathcal{D}$ y a cada morfismo $f \in Hom(A, B)$ un morfismo $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{D}(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A))$, sujeto a los siguientes axiomas:*

1. $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.
2. $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$.

DEFINICIÓN 1.32. *Si $T, L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ son dos funtores entre dos categorías. Llamamos como transformación natural de T en L, denotada por $\tau : T \to L$, a una familia de morfismos $\{\tau_A\}_{A \in \mathcal{C}}$, tales que, para todo $f : A \to A'$, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\tau_A"'] & TA' \arrow[d, "\tau_{A'}"] \\ LA \arrow[r, "Lf"'] & LA' \end{tikzcd} ,$$

es decir: $Lf \circ \tau_A = \tau_{A'} \circ Tf$.

Ahora definiremos una categoría $\triangle^*$ de la siguiente manera:

†

EJEMPLO 1.22. Los objetos $\triangle_n$ de $\triangle^*$ son sucesiones finitas enteras $\triangle_n = (0, 1, \cdot \cdot \cdot, n)$, $n \geq 0$. Los morfismos de $\triangle^*$ son las aplicaciones monótonas dada por $\mu : \Delta_n \to \Delta_m$, es decir, las aplicaciones μ son tales que $\mu(i) \leq \mu(j)$, si $i < j$.
Definimos los morfismos $\delta_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ y $\sigma_1 : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$, con $0 \leq i \leq n$, de la siguiente manera:

$$(1)\ \delta_i(j) = j,\ si\ j < i \qquad \wedge \qquad \delta_i(j) = j + 1,\ si\ j \geq i$$

$$(2)\ \sigma_i(j) = j,\ si\ j \leq i \qquad \wedge \qquad \sigma_i(j) = j - 1,\ si\ j > i$$

Si $\mu \in Hom(\Delta_n, \Delta_m)$, entonces μ no es una identidad. Suponga $(i_1, \cdots\cdot, i_s)$ en orden inverso, este será elemento de Δ_m, pero no de $\mu(\Delta_n)$ y $(j_1, \cdot\cdot\cdot, j_t)$ en orden, será elemento de Δ_n tal que $\mu(j) = \mu(j+1)$. entonces:

(3) $\mu = (\delta_{i_1}, \cdot\cdot\cdot, \delta_{i_s}\sigma_{j_1}, \cdot\cdot\cdot, \sigma_{j_t})$, cuando $0 \leq i_s < \cdots < i_1 \leq m$, $0 \leq j_1 < \cdots < j_t < n$ y $n - t + s = m$

DEFINICIÓN 1.33. *Definimos la categoría $\triangle^*$ cómo el Ejemplo 1.22.*

1.6.2. Homotopía de complejo Kan

DEFINICIÓN 1.34. *Sea K un complejo. Decimos que dos n-simples x y x' en K son homotópicos, escribimos como $x \sim x'$, si $\partial_i(x) = \partial_i(x')$, $0 \leq i \leq n$, y existe un simples* **y** $\in K_{n+1}$ *tal que*

$$\partial_n(y) = x,$$

$$\partial_{n+1}(y) = x'$$

y

$$\partial_i(y) = s_{n-1}(\partial_i(x)) = s_{n-1}(x'),$$

con $0 \leq i < n$.
El simples **y** *es llamado una homotopía de x a x'.*

PROPOSICIÓN 1.10. *Si K es un complejo Kan, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia sobre los n- simples de K, con $n \geq 0$.*

Demostración. La relación $\sim$ es reflexiva, pues:

$$\partial_n(s_n(x)) = x = \partial_{n+1}(s_n(x))$$

y

$$\partial_i(s_n(x)) = s_{n-1}(\partial_i(x)),$$

para $0 \leq i < n$.
Suponga ahora que $x \sim x'$ y $x' \sim x''$.Entonces existe y' tal que:

$$\partial_n(y') = x,\ \partial_{n+1} \circ y' = x' \qquad y \qquad \partial_i(y') = s_{n-1}(\partial_i(x)); i < n.$$

También existe y'' tal que:

$$\partial_n(y'') = x',\ \partial_{n+1}(y'') = x'' \qquad y \qquad \partial_i(y'') = s_{n-1} \circ \partial_i(x'),\ si\ i < n.$$

Luego los $n+2$ $(n+1)$-simples

$$\partial_0 \circ s_n \circ s_n \circ x', ..., \partial_{n-1} \circ s_n \circ s_n \circ x', y', y''$$

satisfacen la condición de compatibilidad. Por lo tanto existe un $(n+2)$- simples z tal que $\partial_i \circ z = \partial_i \circ s_n \circ s_n \circ x',\ si\ 0 \leq i < n$,$\partial_{n+1} \circ z = y''$ y $\partial_n \circ z = y'$. De esto resulta que:

$$\partial_{n+1} \circ \partial_{n+2} \circ z = s_{n-1} \circ \partial_i \circ x',\ si\ 0 \leq i < n$$

$$\partial_n \circ \partial_{n+2} \circ z = x' \qquad y \qquad \partial_{n+1} \circ \partial_{n+2} \circ z = x''\ .$$

Por tanto $x' \sim x''$. Esto demuestra la transitividad. ∎

DEFINICIÓN 1.35. *Sea L un subcomplejo de K. Decimos que dos n-simples x y x', con $n > 0$, son homotópicos relativos a L, escribimos por $x \sim x$ rel L, si:*

- $\partial_i \circ x = \partial_i \circ x'$, *si* $1 \leq i \leq n$*;*
- *Existe una homotopía* **y** *de $\partial_0 x$ a $\partial_0 x'$ en L y un simples $w \in K_{n+1}$ tal que*

$$\partial_0 \circ w = y,$$

$$\partial_n \circ w = x,$$

$$\partial_{n+1} \circ w = x'$$

y

$$\partial_i \circ w = s_{n-1} \circ \partial_i \circ x = s_{n-1} \circ \partial_i \circ x',$$

para $1 \leq i < n$*.*

El simples w es llamado una homotopía relativa de x a x'.

PROPOSICIÓN 1.11. *Si L es un subcomplejo Kan de K, entonces $\sim relL$ es una relación de equivalencia sobre los n- simples de K, con $n \geq 1$.*

Demostración. Ver ([6], Proposición 3.4) ∎

OBSERVACIÓN 1.19. Sean K un complejo y $\phi \in K_0$. ϕ genera un subcomplejo de K que tiene exactamente un simple $s_{n-1}, ..., s_n\phi$ en cada dimensión n. Abusaremos de la notación dejando que ϕ denote ambiguamente este subcomplejo o cualquiera de sus simplificadores. Nosotros llamaremos a (K, ϕ) un par de Kan, si es un complejo de Kan. Llamaremos a (K, L, ϕ) el triple de kan, si $\phi \in L_0$ y L es un subcomplejo de Kan de el complejo K.

DEFINICIÓN 1.36. *Sea (K, ϕ) un par de Kan. $\overline{K}_n$, con $n \geq 0$, denotará el conjunto de todos los elementos $x \in k_n$ tale que que satisface*

$$\partial_i \circ x = \phi,\ si\ 0 \leq i \leq n.$$

Definimos

$$\pi_n(K,\phi) = \overline{K}_n/(\sim).$$

$\pi_0(K,\phi)$ es llamado el conjunto de componentes de puntos de K, donde K esta conectada, si $\pi_0(K,\phi) = \phi$ (donde estamos dejando que ϕ denote sus clases de equivalencia). Decimos que K está n-conectada, si $\pi_i(K,\phi) = \phi$, para $0 \leq i \leq n$

DEFINICIÓN 1.37. *Sea (K,L,ϕ) un triple de kan. $\overline{K}(L)_n$, con $n \geq 1$, denotará el conjunto de todos los elementos $x \in K_n$ tales que $\partial \circ x \in L_{n-1}$ y*

$$\partial_i \circ x = \phi, \ si \ 1 \leq i \leq n.$$

Definimos

$$\pi_n(K,L,\phi) = \overline{K}(L)_n/(\sim relL)$$

Note que $\pi_n(K,L,\phi) = \pi_n(K,\phi)$, con $n \geq 1$. $\pi_0(K,\phi)$ es llamado el conjunto de componentes de puntos de k. Nuevamente decimos que K esta conectada, si $\pi_0(K,\phi) = \phi$ (donde estamos dejando que ϕ denote sus clases de equivalencia). Decimos nuevamente que K esta n-conectada, si $\pi_i(K,\phi) = \phi$, para $0 \leq i \leq n$.

TEOREMA 1.8. *Sea (k,L,ϕ) un triple de kan. entonces la secuencia:*

$$\ldots \longrightarrow \pi_{n+1}(K,L,\phi) \xrightarrow{\partial} \pi_n(L,\phi) \xrightarrow{i} \pi_n(K,\phi) \xrightarrow{j} \pi_n(K,L,\phi) \longrightarrow \ldots$$

es exacta, donde las aplicaciones i y j son inducidos por la inclusiones.

Demostración. Ver ([6], Teorema 3.7) ∎

PROPOSICIÓN 1.12. *$\pi_n(K,\phi)$ es un grupo abeliano, si $n \geq 2$*

Demostración. Ver ([6], Proposición 4.4) ∎

1.6.3. El Teorema de Hurewicz

En esta sección obtendremos algunos grupos de homotopía en comparación de resultados clásicos con grupos homología. A lo largo de esta sección, homología significa homología con coeficientes enteros.

PROPOSICIÓN 1.13. *Sea K un complejo, entonces $H_0(K) = F(\pi_0(k))$ es el grupo abeliano libre generado por $\pi_0(K)$.*

Demostración. Ver ([6], Proposición 13.1) ∎

PROPOSICIÓN 1.14. *El homomorfismo de Hurewicz define la transformación natural de funtores. Si (K, L, ϕ) es un triple de kan, entonces el siguiente diagrama de secuencias exactas es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & \pi_{n+1}(K,L,\phi) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(L,\phi) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(K,\phi) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(K,L,\phi) \arrow[r] \arrow[d] & ... \\
.... \arrow[r] & H_{n+1}(K,L) \arrow[r] & H_n(L) \arrow[r] & H_n(K) \arrow[r] & H_n(K,L) \arrow[r] & ...
\end{tikzcd}$$

Demostración. Ver ([6], Proposición 13.4) ∎

TEOREMA 1.9. *Sean (K, ϕ) y una $(n-1)$-conectada al par de kan, con $n \geq 2$, entonces $H_i(K) = 0$, para $0 \leq i \leq (n-1)$, y $\pi_n(K) \cong H_n(K)$*

Demostración. Ver ([6], Teorema 13.6) ∎

1.7. Complejo Singular de un Espacio.

DEFINICIÓN 1.38. *Sean $n > 0$ y $0 \leq i \leq n$. La aplicación $k_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ definida por $k_i(x_0, ..., x_{n-1}) = (x_0, ..., x_{i-1}, 0, x_i, ..., x_{n-1})$, es decir,*

$$k_i(\Delta^{n-1}) = \Delta^n_i = \{(x_0, ..., x_{n-1}) \in \Delta_n : x_i = 0\}$$

es llamada la i-ésima cara de Δ^n, opuesta a la i-ésima vértice v_i que no está en Δ^n_i.

Podemos fácilmente verificar que k_i es un homeomorfismo entre Δ^{n-1} en Δ^n.

Ahora sean X un espacio topológico arbitrario y n cualquier entero no negativo.

DEFINICIÓN 1.39. *Un n-símplice singular en X, es una aplicación*

$$\xi : \Delta^n \to X,$$

del n-simplex unitario Δ^n hacia el espacio X.

Como Δ^n es compacto y conexo, se sigue que $\xi(\Delta^n) \subset X$ es compacto y conexo. Aquí la palabra singular indica que ξ no tiene por que ser una inmersión. Sea

$$S_n(X) = Map(\Delta^n, X)$$

el conjunto total de n-simplices singulares en X. Si $m \neq n$, entonces, por definición,

$$S_m(X) \cap S_n(X) = \emptyset.$$

La unión
$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(X)$$
es el conjunto de todos los símplices singulares en el espacio X y se llamará el complejo singular de X.
Si $n = 0$, entonces Δ^0 consiste de un solo punto. Por tanto, un 0-símplice singular
$$\xi : \Delta^0 \to X$$
puede ser identificado con el punto $\xi(\Delta^0)$ de X. Así tenemos que
$$S_0(X) = X.$$
Para $n = 1$, tenemos que Δ^1 es homeomorfo a I bajo el homeomorfismo
$$h : I \to \Delta^1$$
definido por:
$$t \mapsto h(t) = (1 - t, t).$$
Por tanto un símplice singular
$$\xi : \Delta^1 \to X$$
puede ser identificado como la composición
$$\xi \circ h : I \to X,$$
en el espacio X. Así,
$$S_1(X) = P(X),$$
donde $P(X)$ es el conjunto de todos los caminos en X.

Ahora asumamos que $n > 0$ y sea
$$\xi : \Delta^n \to X$$
un n-símplice singular. Para cualquier entero $i = 0, 1, ..., n$, la composición
$$\xi \circ k_i : \Delta^{n-1} \to X$$
es un $(n-1)$-símplice singular en X, que sera llamada la i-ésima cara de ξ y será denotada por
$$\xi^i = \xi \circ k_i.$$
Las $(n+1)$ caras $\xi^0, ..., \xi^n$ de un n-simplice singular ξ pueden no ser distintas. De hecho, si $\xi : \Delta^n \to X$ es una aplicación constante, entonces todas sus $(n+1)$ caras $\xi^0, ..., \xi^n$ son el mismo $(n-1)$-simplice singular en X.

DEFINICIÓN 1.40. *Para cualquier entero $n > 0$ y cada $i = 0, 1, \cdots, n$, definimos*

$$\sigma_i : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$

dado por

$$\sigma(\xi) = \xi^i,$$

llamado el i-esimo operador cara en $S(X)$.

Para el complejo singular de un espacio X, nos referiremos al conjunto

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(X)$$

junto con sus operadores cara.

1.8. Complejo de Cadenas Singulares

Sea X un espacio topológico arbitrario y consideremos su complejo singular

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(X).$$

DEFINICIÓN 1.41. *Definimos el conjunto:*

$C_n(X) = \{\sum_\xi \eta_\xi \xi : \xi$ *es un símplice singular,* $\eta_\xi \in \mathbb{Z}, \eta_\xi = 0$ *salvo un número finito de ellos.*$\}$

como el grupo abeliano libre generado por $S(X)$.

Los elementos de $C_n(X)$ son combinaciones lineales formales finitas del tipo $\Sigma_\xi \eta_\xi \xi$. Observar que la única manera que una tal suma sea nula, es que sean todos sus coeficientes nulos.

OBSERVACIÓN 1.20. El conjunto $C_n(X)$ es llamado el grupo abeliano libre de las n-cadenas singulares.

DEFINICIÓN 1.42. *Para cada $n > 0$, definimos la función*

$$\sigma : S_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

dada por:

$$\sigma(\xi) = \sigma(\xi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_i(\xi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \xi^{(i)},$$

para todo n-símplice singular ξ.

DEFINICIÓN 1.43. *La frontera de un n-símplice singular ξ es la $(n-1)$- cadena singular definida por: $\partial_n(\xi) = \sigma(\xi) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \xi^{(i)}$ es decir, es la suma formal de sus caras, dotadas de signo.*

OBSERVACIÓN 1.21. El homomorfismo $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ es conocido como el operador borde o frontera.

EJEMPLO 1.23. La frontera de un 2-símplice $\Delta^2 = [v_0, v_1, v_2]$ es:

$$\partial_2[v_0, v_1, v_2] = \xi^{(0)} - \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$$

o, equivalentemente:

$$\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

EJEMPLO 1.24. La frontera de un 1 -símplice $\Delta^1 = [v_0, v_1]$ es:

$$\partial_1[v_0, v_1] = \xi^{(0)} - \xi^{(1)}$$

o, equivalentemente:

$$\partial_1[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$$

OBSERVACIÓN 1.22. La frontera de una 0-celda, se define como 0, es decir, $C_n(X) = 0$.

PROPOSICIÓN 1.15. *Para cualquier entero n, la composición de homomorfismos*

$$\partial^2 = \partial_{n+1} \circ \partial_n : C_n(X) \to C_{n-2}(X)$$

de los operadores borde

$$C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(X)$$

es el homomorfismo trivial, es decir:

$$\partial^2 = \partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$$

EJEMPLO 1.25.

$$\begin{aligned}
\partial \circ \partial([v_0, v_1, v_2]) &= \partial([v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]) \\
&= \partial([v_1, v_2]) - \partial([v_0, v_2]) + \partial([v_0, v_1]) \\
&= [v_2] - [v_1] - ([v_2] - [v_0]) + [v_1] - [v_0] \\
&= [v_2] - [v_1] - [v_2] + [v_0] + [v_1] - [v_0] \\
&= 0
\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1.23.

- $C(X)$ es llamado el complejo de cadenas singular del espacio X.
- Los elementos del grupo $C_n(X)$ son llamados las n-cadenas singulares en el espacio X. El subíndice es llamado dimensión.

Por tanto el operador borde o frontera

$$\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X),$$

reduce la dimensión por uno. Para cualquier $\gamma \in C_n(X)$, el elemento $\partial \circ \gamma \in C_{n-1}(X)$ es llamado la frontera de la cadena γ.

Ahora se considera un subespacio arbitrario A del espacio topológico X. Ya que $S_n(A)$ es un subconjunto de $S_n(X)$, entonces $C_n(A)$ es el sumando directo de C_n, generado por el conjunto $S_n(A)$. El grupo cociente

$$C_n(X,A) = C_n(X)/C_n(A)$$

es llamado el grupo de cadenas singulares n- dimensionales del par topológico (X,A). Los elementos de $C_n(A,X)$ son llamados n-cadenas singulares de (X,A).

1.9. Grupos de Homología Singular

Sea (X,A) un par topológico arbitrario y su respectivo complejo de cadenas singulares $C(X,A)$. Es decir, para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$C_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(X,A)$$

DEFINICIÓN 1.44. *El conjunto:*

$$Ker(\partial_n) = Z_n(X,A) = \{\bar{c} : c \in C_n(X) : \partial_n(c) \in C_{n-1}(A)\}$$

es llamado el grupo de n-ciclos singulares de (X,A)

DEFINICIÓN 1.45. *El conjunto:*

$$Img(\partial_{n+1}) = B_n(X,A) = \{\bar{b} : b \in C_n(A) : b = \partial_{n+1}(c'), \textit{ para algún } c' \in C_{n+1}(X)\},$$

es llamado grupo de n-fronteras singulares de (X,A)

Ya que $C(X, A)$ es semi-exacta, se sigue $B_n(X, A)$ es un submódulo de $Z_n(X, A)$ y, así, podemos formar el módulo cociente

$$H_n(X, A) = \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)},$$

el cual es llamado el n-ésimo grupo de homología singular del par topológico (X, A).

OBSERVACIÓN 1.24. Si $A = \emptyset$, entonces $C_n(A) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego definimos:

$$H_n(X, \emptyset) = H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)},$$

y se llama el n-ésimo grupo de homología singular del espacio topológico X.

PROPOSICIÓN 1.16. *Para cualquier par topológico (X, A) y cualquier entero $n < 0$, tenemos que $H_n(X, A) = 0$.*

EJEMPLO 1.26. (**Homología de un espacio unipuntual**) Sea $X = \{*\}$, siendo $*$ un punto singular. Veamos primero cómo son los símplices en este caso. Fijamos $n \geq 0$ y consideramos $\sigma_n \in S_n(X)$, haciendo

$$\sigma_n : \Delta^n \to \{*\} \text{ continua, dada por } \sigma_n(\vec{t}) = *; \text{ para todo } \vec{t} \in \sigma_n$$

Por tanto, $S_n(X) = \{\sigma_n\}$, es decir, para todo $n \geq 0$ existe un único símplex singular n-dimensional, luego

$$C_n(X) = \{a\sigma_n : \forall a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Calculamos ahora la frontera para cada n-símplex, con $n \geq 1$

$$\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$
$$a\sigma_n \to \partial(a\sigma_n) = a(\partial\sigma_n)$$

donde

$$\partial\sigma_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial^i\sigma_n = \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\right)\sigma_{n-1} = \begin{cases} 0; n & impar \\ \sigma_{n-1}; n & par \end{cases}$$

pues $\partial^i\sigma_n \in S_{n-1}(X) = \{\sigma_{n-1}\}$.Es decir,

$$\sigma_{n-1} = \begin{cases} 0; n & impar \\ a\sigma_{n-1}; n & par. \end{cases}$$

En este caso, ∂ es un isomorfismo. con lo cual el complejo de cadenas que nos queda es el siguiente:

$$C_2(X, A) \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1 = 1} C_0 \xrightarrow{\partial_0 = 0} 0$$

EJEMPLO 1.27. $H_n(\mathbb{S}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , si \quad n=0 \\ 0 & , si \quad n=1 \\ \mathbb{Z} & , si \quad n=2 \\ 0 & , \quad otros\ casos. \end{cases}$

EJEMPLO 1.28. $H_n(\mathbb{T}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , si \quad n=0 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & , si \quad n=1 \\ \mathbb{Z} & , si \quad n=2 \\ 0 & , \quad otros\ casos. \end{cases}$

EJEMPLO 1.29. $H_n(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , si \quad n=0 \\ \mathbb{Z} & , si \quad n=1 \\ 0 & , \quad otros\ casos. \end{cases}$

EJEMPLO 1.30. Sea X =Cilindro. Entonces: $H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , si \quad n=0 \\ \mathbb{Z} & , si \quad n=1 \\ 0 & , \quad otros\ casos. \end{cases}$

EJEMPLO 1.31. Sea M =Cinta de Möbius. Entonces: $H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , si \quad n=0 \\ \mathbb{Z} & , si \quad n=1 \\ 0 & , \quad otros\ casos. \end{cases}$

EJEMPLO 1.32.

$$H_n(\mathbb{D}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , si \quad n=0 \\ 0 & , \quad otros\ casos. \end{cases}$$

1.10. Grupo de Homología sobre G

Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano.

DEFINICIÓN 1.46. *Sea $C(X)$ el complejo de cadenas singulares de X. Definimos*

$$C_n(X;G) = C_n \otimes G,$$

para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, como el grupo tensorial de los grupos abelianos $C_n(X)$ y G.

OBSERVACIÓN 1.25. (a) Si $n < 0$, tenemos:

$$C_n(X;G) = C_n \otimes G = 0 \otimes G = 0$$

(b) Para cualquier $n \geq 0$, se tiene que $C_n(X)$ es un grupo abeliano libre generado por $S_n(X)$, es decir $\langle S_n(X)\rangle = C_n(X)$. En consecuencia, los elementos de $C_n(X, G)$ pueden ser considerados como funciones casi nulas en todas partes:

$$\gamma : S_n(X) \to G.$$

O equivalentemente, pueden ser representados de la forma:

$$\gamma = a_1\xi_1 + \cdots + a_k\xi_k,$$

donde $\{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$ es un subconjunto finito de $S_n(X)$ y $a_1, ..., a_k$ son elementos de G. Los elementos de $C_n(X; G)$ son llamados cadenas singulares n- dimensionales de X sobre G.

Considere el operador frontera

$$\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X),$$

para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ y el automorfismo identidad

$$i : G \to G.$$

Su producto tensorial es dado por:

$$\partial \otimes i : C_n \otimes G \to C_{n-1} \otimes G,$$

representada por

$$\partial : C_n \otimes G \to C_{n-1} \otimes G,$$

para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 1.17. *Sea*

$$... \longrightarrow C_{n+1}(X; G) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X; G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X; G) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(X; G) \longrightarrow ...$$

entonces $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La secuencia larga semi-exacta obtenida arriba la denominaremos como **complejo de cadenas singular de** X **sobre** G, y se denotara por $C(X; G)$

OBSERVACIÓN 1.26. Si $G = \mathbb{Z}$ entonces tenemos $C(X; \mathbb{Z}) = C(X)$.

DEFINICIÓN 1.47. *Dada el complejo de cadenas:*

$$... \longrightarrow C_{n+1}(X; G) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X; G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X; G) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(X; G) \longrightarrow ...$$

Definimos el grupo de ciclos singulares n- dimensionales de X sobre G como $Z_n(X; G) = Ker(\partial_n)$, el grupo de fronteras singular n- dimensional de X sobre G como $B_n(X; G) = Im(\partial_{n+1})$.

Definimos el grupo de homología singular n-dimensional del espacio X sobre G.

$$H_n(X; G) = \frac{Z_n(X; G)}{B_n(X; G)}$$

La definición de la homología $H_n(X;G)$ esta bien definida debido a la inclusión $B_n(X;G) \subset Z_n(X;G)$

OBSERVACIÓN 1.27. Si $G = \mathbb{Z}$ entonces tenemos $H_n(X;\mathbb{Z}) = H_n(X)$

Si tomamos $A \subset X$, podemos considerar $C_n(A)$, generado por el subconjunto $S_n(A)$ de $S_n(X)$ y podemos definir

$$C_n(A;G) = C_n(A) \otimes G.$$

Este grupo puede ser considerado como el sumario directo de $C_n(X;G)$, compuesto de elementos de la forma:

$$\gamma = a_1\xi_1 + \cdots\cdots + a_k\xi_k,$$

donde $\{\xi_1, ..., \xi_k\}$ es un subconjunto finito arbitrario de $S_n(A) \subset S_n(X)$ y $a_1, ..., a_k$ son elementos de G.
Podemos definir también el grupo cociente

$$C_n(X, A; G) = \frac{C_n(X;G)}{C_n(A;G)},$$

que es llamado el grupo de cadenas singulares n-dimensionales del par topológico (X, A) sobre G.

OBSERVACIÓN 1.28. El operador frontera $\partial_n : C_n(X;G) \to C_{n-1}(X;G)$ envía el subgrupo $C_n(A;G)$ de $C_n(X;G)$ en el subgrupo $C_{n-1}(A;G)$ de $C_{n-1}(X;G)$

De la observación anterior se induce un homomorfismo definido de la siguiente manera:

$$\partial_n : C_n(X, A; G) \to C_{n-1}(X, A; G).$$

Entonces $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Así obtenemos una sucesión larga semi exacta:

$$C_{n+1}(X, A; G) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A; G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A; G) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(X, A; G)\ ,$$

la cual denominamos complejo de cadenas singular de (X, A) sobre G y será denotado por $C(X, A; G)$.

OBSERVACIÓN 1.29. Notemos que

$$C(X, \emptyset; G) = C(X; G),$$

$$C(X, A; \mathbb{Z}) = C(X, A).$$

La relación ∂_n y ∂_{n+1} nos indica que $ker(\partial_n) \subset Im(\partial_{n+1})$

DEFINICIÓN 1.48. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, sea $\partial_n : C_n(X, A; G) \to C_{n-1}(X, A; G)$. Definimos $Z_n(X, A; G) := ker(\partial_n)$, la cual denominamos el grupo de ciclos singulares n-dimensionales de (X, A) sobre G. Definimos también $B_n(X, A; G) := Im(\partial_{n+1})$, la cual denominamos como grupo de fronteras singulares n-dimensionales de (X, A) sobre G.*

Como $C(X, A; G)$ es una cadena semi-exacta, tenemos la siguiente inclusión:

$$B_n(X, A; G) \subset Z_n(X, A; G).$$

El grupo cociente dado por:

$$H_n(X, A; G) = \frac{Z_n(X, A; G)}{B_n(X, A; G)}$$

es llamado el n-ésimo grupo de homología singular de (X, A) sobre G o el grupo de homología singular n-dimensional de X modulo A sobre G.

OBSERVACIÓN 1.30. Se sigue de la definición:

$$H_n(X, \emptyset; G) = H_n(X; G),$$

$$H_n(X, A; \mathbb{Z}) = H_n(X, A).$$

DEFINICIÓN 1.49. ***Homología Relativa***

Los grupos de homología relativa se definen de la siguiente manera. Dado un espacio X y un subespacio $A \subset X$, sea $C_n(X, A)$ el grupo cociente $Cn(X)/Cn(A)$. Así, las cadenas en A son triviales en $C_n(X, A)$.

Dado que la función de borde $\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ toma $C_n(A)$ a $C_{n-1}(A)$, induce un función de borde del cociente $\partial : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A)$. Dejando que n varíe, tenemos una secuencia de funciones de borde

$$\longrightarrow C_{n+1}(X, A) \longrightarrow C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow$$

Entonces tenemos un complejo de cadena, y los grupos de homología

$$H_n(X, A) = Ker\partial / Im\partial$$

de este complejo de cadena son, por definición, los grupos de homología relativa $H_n(X, A)$.

OBSERVACIÓN 1.31. Una generalización fácil de la secuencia exacta larga de un par (X, A) es la secuencia exacta larga de un triple (X, A, B), donde $B \subset A \subset X$:

$$\longrightarrow H_n(A,B) \xrightarrow{i_*} H_n(X,B) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A,B)$$

Esta es la secuencia exacta larga de grupos de homología asociados a la secuencia exacta corta de complejos de cadena formados por las secuencias exactas cortas

$$\longrightarrow C_n(A,B) \xrightarrow{i} C_n(X,B) \xrightarrow{j} C_n(X,A) \xrightarrow{\delta} C_{n-1}(A,B)$$

DEFINICIÓN 1.50. ***Homología Reducida***
Sea X un espacio topológico R un anillo en $\mathbb{Z}$. Los grupos de homología reducida de X con coeficientes en R, que se denota por $\widetilde{H}_n(X,R)$, son los grupos de homología del siguiente complejo

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Donde $\varepsilon(\Sigma n_i \sigma_i) = \Sigma n_i$ Homomorfismo de aumentación .Para X en general denotemos que

$$H_n(X,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}_n(X,\mathbb{Z}), \forall, n \geq 1$$

PROPOSICIÓN 1.18. *Si $X = \{x_0\}$,entonces su homología*

$$H_n(X,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , si \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n > 0 \,. \end{cases}$$

$$H_n(X,\mathbb{Z}) = \frac{C_0(X)}{Im(\partial_1)} \simeq \mathbb{Z}$$

Demostración. Ver ([4], Proposición 2.8, pag. 110) ∎

OBSERVACIÓN 1.32. Para X en general denotemos que

$$H_n(X,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}_n(X,\mathbb{Z}), \forall, n \geq 1$$

Ahora formamos la secuencia exacta:

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{Im\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$\widetilde{H}_0(X,\mathbb{Z}) = 0$$

Para X en General

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

con el $ker(\varepsilon) = \widetilde{H}_0(X)$

$$H_0(X,\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}_0(X,\mathbb{Z}) \bigoplus \mathbb{Z}$$

Relación con la homología reducida de los espacios topológicos del cociente

DEFINICIÓN 1.51. *Una inclusión de subespacio topológico $A \hookrightarrow X$ se llama un buen par si:*

1. *A es un subespacio cerrado no vació de X*
2. *A tiene una vecindad en X que es una retracción por deformación de A.*

EJEMPLO 1.33. Sea X un CW complejo, la inclusión de cualquier subcomplejo $A \hookrightarrow X$ es un buen par (llamado CW - par (A,X))

PROPOSICIÓN 1.19. *Si $A \hookrightarrow X$ es una inclusión de subespacio topológico que es buen par en el sentido de la Definición1.51, entonces la homología singular relativa A de X coincide con la homología singular reducida del espacio cociente X/A:*

$$H_n(X,A) \simeq \widetilde{H}_n(X/A)$$

Demostración. Ver ([5], Proposición 2.22, página 124). ∎

EJEMPLO 1.34. La homología singular reducida de la $n-$esfera $\mathbb{S}^n$ es igual a la $\mathbb{S}^{n-1}$ homología relativa del n -disco con respecto a la inclusión de la frontera canónico $\mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{D}^n$: para todo $n \in \mathbb{N}$

$$H_n(\mathbb{S}^n;\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \widetilde{H}_n(\mathbb{D}^n;\mathbb{S}^{n-1})$$

Demostración. ∎

La $n-$esfera es homeomorfa al $n-$disco con todo su límite identificado con un punto:

$$\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1}$$

Además, la inclusión de borde es evidentemente un buen par en el sentido de la Definición1.51. Por lo tanto, el ejemplo sigue con la Proposición1.19.

Capítulo 2

Homología con coeficientes locales

El grupo de homología con coeficientes locales se puede definir para un espacio topológico X arco-conexo de tal forma que su revestimiento universal existe. Esta clase de grupo generaliza el concepto de grupo de homología con coeficientes en un grupo abeliano G.

El sistema de coeficientes locales se puede ver de dos maneras: como un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-módulo o como un cierto G-fibrado que vamos a definir más adelante.

DEFINICIÓN 2.1. *Sean X,Y y Z espacios topológicos. Si $p : Y \to X$ es un cubrimiento y $f : Z \to X$ es una aplicación continua, entonces una aplicación continua $\bar{f} : Z \to Y$ tal que $p \circ \bar{f} = f$ es llamada un levantamiento de f, es decir el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

El siguiente lema discute la unicidad

LEMA 2.1. *Sean X,Y espacios topológicos, $p : Y \longrightarrow X$ un cubrimiento y Z espacio topológico conexo. Si $\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$ son aplicaciones continuas de Z a Y tales que $p \circ \bar{f}_1 = p \circ \bar{f}_2$, entonces $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$.*

Demostración. Basta mostrar que el conjunto en Z donde las aplicaciones concuerdan es abierto, y su complemento donde no concuerdan también es abierto.

Si w es el conjunto donde concuerdan, tome una vecindad N de $p \circ \bar{f}_i(w)$ que esté uniformemente cubierta por p. Sea $p^{-1}(N)$ una unión disjunta de conjuntos abiertos N_α, con cada N_α, aplicación homeomorfa a N por p. Por continuidad, $\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$ deben aplicar una vecindad V de w en el mismo N_α, y dado que $p\circ\bar{f}_1 = p\circ\bar{f}_2$, $\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$ deben concordar en V. De manera similar, si w está en el conjunto donde las aplicaciones no concuerdan, $\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$ deben aplicar una vecindad V de w en dos N_α diferentes (y por lo tanto disjuntos), por lo que no concuerdan en V ∎

PROPOSICIÓN 2.1. *Sean X,Y espacios topológicos. Sea $p : Y \longrightarrow X$ un cubrimiento y $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ un camino contínuo en X. Sea y un punto de Y tal que $p(y) = \gamma(a)$. Entonces existe un único camino contínuo $\tilde{\gamma} : [a,b] \longrightarrow Y$ tal que $\tilde{\gamma}(a) = y$ y $p\circ\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$, para todo t en el intervalo $[a,b]$. Osea, obtenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ {[a,b]} \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & X \end{tikzcd}$$

En particular, se deduce que el punto final $\tilde{\gamma}(b)$ del levantamiento esta determinado por γ y por el punto inicial y. Denotamos este punto por $y * \gamma$, esto es:

$$y * \gamma = \tilde{\gamma}(b)$$

PROPOSICIÓN 2.2. *Sean X,Y espacios topológicos, $p : Y \longrightarrow X$ un cubrimiento y H una homotopía de caminos en X (es decir, $H : [a,b]\times[0,1] \longrightarrow X$ es una aplicación continua). Sea*

$$\gamma_0(t) = H(t,0); a \le t \le b,$$

el camino inicial.Supongamos $\tilde{\gamma}_0$ es un levantamiento de γ_0, entonces existe un único levantamiento $\tilde{H}$ de H cuyo punto inicial es $\tilde{\gamma}_0$. Es decir, existe una aplicación:

$$\tilde{H} : [a,b]\times[0,1] \longrightarrow Y$$

continua, tal que

$$p\circ\tilde{H} = H \;;\; \tilde{\gamma}_0(t) = \tilde{H}(t,0), a \le t \le b$$

Ósea, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ {[a,b]\times[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración es muy parecida a la de la proposición. Primero aplica el lema de lebesgue para saber que hay subdivisiones $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ y $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ de modo que si $R_{i,j}$ es el rectángulo$[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$,entonces cada $H(R_{i,j})$ está contenido en un conjunto abierto cubierto de manera uniforme.Luego se construye el levantamiento $\tilde{H}$ sobre cada pieza $R_{i,j}$, digamos primero trabajando a través de la fila inferior, levantando la restricción de H a $R_{1,1}, R_{2,1}, \cdots R_{n,1}$, luego haciendo lo mismo para la siguiente fila $R_{1,2}, R_{2,2}, \cdots R_{n,2}$, y así sucesivamente hasta que se haya cubierto todo el rectángulo.

∎

LEMA 2.2. *(Lema de lebesgue) Dado cualquier recubrimiento de un espacio métrico compacto K por conjuntos abiertos, existe un $\varepsilon > 0$ tal que cualquier subconjunto de K de diámetro menor que ε está contenido en algún conjunto abierto en el recubrimiento*

OBSERVACIÓN 2.1. Si H es una homotopía de caminos de x a x' en X. Es decir $H(a, s) = x$ y $H(b, s) = x'$, para todo $0 \leq s \leq 1$, y $\tilde{\gamma}_0$ es un camino de y a y', entonces el levantamiento homotópico $\tilde{H}$ es una homotopía de caminos de y en y'. (El hecho de que H sea constante en los lados del rectángulo esta garantizado por la unicidad del levantamiento de las restricciones a estos lados.) En particular, si H es una homotopía de γ_0 a γ_1, entonces:

$$y * \gamma_0 = y * \gamma_1$$

2.1. G-cubrimiento

Muchos recubrimientos importantes surgen de una acción sobre un espacio topológico Y, siendo X el espacio de orbitas. Recordemos que una acción (a la izquierda) de un grupo G sobre un espacio topológico Y es una aplicación

$$\begin{array}{ccc} G \times Y & \longrightarrow & Y \\ (g, y) & \longmapsto & g \cdot y \end{array}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $g \cdot (h \cdot y) = (g \cdot h) \cdot y, \forall\, g, h \in G$;

2. $e \cdot y = y, \forall\, y \in Y$, donde e es la identidad en G;

3. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y \\ y & \longmapsto & g \cdot y \end{array}$$

es un homeomorfismo de Y, $\forall g \in G$.

En otras palabras, G define un grupo de homeomorfismo sobre Y. Dos puntos y e y' están en la misma orbita si existe $g \in G$ tal que

$$y' = g \cdot y,\, g \in G \text{ es la orbita de } y$$

Dado que G es un grupo, además es es una relación de equivalencia. El conjunto de orbitas o clases de equivalencia se denotara como $X = Y/G$.

Existe una aplicación proyección orbital $p : Y \longrightarrow Y/G$, donde $p(y) = \overline{g \cdot y}$ que asigna cada punto de Y a la orbita que lo contiene.

Así, podemos equipar al espacio X con la topología cociente, es decir, un conjunto U es abierto en X si, y solamente si, $p^{-1}(U)$ es abierto en Y.

El cubrimiento trivial de X será dado por el producto $X \times G \longrightarrow X$, donde G actúa por multiplicación sobre el segundo factor.

DEFINICIÓN 2.2. *Decimos que un grupo G actúa uniformemente si para cualquier punto $a \in Y$, existe una vecindad V tal que $g \cdot V$ y $h \cdot V$ no se intersectan para cualquier elemento g diferente de h en G.*

LEMA 2.3. *Si un grupo G actúa uniformente en Y, entonces la proyección $p : Y \longrightarrow Y/G$ es una aplicación recubridora.*

Demostración. La aplicación p es continua y abierta, ya que para un abierto V en Y el conjunto $p^{-1}(p(V))$ es unión de los conjuntos abiertos $g \cdot V$.

Si tomamos V como en la definición de acción uniforme, entonces esta unión es una unión disjunta.

Es suficiente demostrar que para tal V, la aplicación de $g.V$ a $p(V)$ inducido por p es una biyección. Con esto se deducirá que p esta cubierto uniformemente sobre $p(V)$.

Esta es una verificación sencilla dado que la aplicación

$$p(g \cdot y) = p(y); \forall\, y \in V$$

es sobreyectiva.

Si $p(g \cdot y_1) = p(g \cdot y_2)$, entonces para algún h en G tenemos que $h \cdot g \cdot y_1 = g \cdot y_2$. El hecho que la acción sea uniforme implica que h es la identidad.

∎

DEFINICIÓN 2.3. *Un cubrimiento $p : Y \longrightarrow X$ es llamado G- cubrimiento, si G actúa uniformemente en Y y $p : Y \longrightarrow Y/G$ es una recubrimiento que se tiene en el lema anterior.*

DEFINICIÓN 2.4. *Un isomorfismo de G-cubrimientos $p : Y \longrightarrow X$ y $p' : Y' \longrightarrow X$ es homeomorfismo de $\varphi : Y \longrightarrow Y'$ tal que $p' \circ \varphi = p$, Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "p'"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

Además se cumple que $\varphi(g \cdot y) = g \cdot \varphi(y)$, para $g \in G$ e $y \in Y$

LEMA 2.4. *Cualquier G-cubrimiento es localmente trivial como un G- cubrimiento.*

Es decir si $p : Y \longrightarrow X$ es un G-cubrimiento entonces cualquier punto en X tiene una vecindad N tal que el G -cubrimiento $p^{-1}(N) \to N$ es isomorfo al G-cubrimiento trivial: $N \times G \longrightarrow N$

Demostración. En efecto, si $N = p(V)$ es como en la prueba del lema 2.3, tal trivialización local viene dada por:

$$g \cdot v \in p^{-1}(N) \longmapsto (p(v), g) \in N \times G.$$

∎

2.2. Grupo fundamental y Cubrimiento

En esta sección, la proposición de inyectividad caracterizará el homomorfismo inducido sobre los grupos fundamentales por una aplicación recubridora.

PROPOSICIÓN 2.3. *Si $p : Y \longrightarrow X$ es un cubrimiento y $p(y) = x$, entonces el homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ es una inyección.*

Demostración. Esto es una consecuencia de las propiedades de elevación. En efecto: debemos demostrar que el núcleo de p_* es dado por $\{e\}$. Si σ es un lazo en y, y $p_*([\sigma]) = e$, existe una homotopía H desde $p \circ \sigma$ al camino constante ε_x en x.

Por levantamiento homotópico, H se eleva a una homotopía $\tilde{H}$ desde σ a algún camino. Dado que H asigna los lados y la parte superior del cuadrado unitario al punto x, su elevación $\tilde{H}$ (por la singularidad de la elevación de la trayectoria) asigna los lados y la parte superior del cuadrado al punto y. Entonces $\tilde{H}$ es una homotopía de σ al camino constante ε_y, y así $[\sigma] = e$. ∎

OBSERVACIÓN 2.2. Dado un cubrimiento $p : Y \longrightarrow X$ para cualquier punto con $p(y) = x$, y se cualquier lazo σ en X. Definimos $y * \sigma$ como el punto final de elevación de σ que comienza en y. Este punto pertenecerá a $p^{-1}(x)$.
Si σ' es un lazo homotópico a σ, entonces $y * \sigma' = y * \sigma$, para cualquier clase de homotopía $[\sigma]$ en $\pi_1(X, x)$, por lo tanto podemos definir $y * [\sigma]$ como $y * \sigma$.
Esto da acción bien definida en el grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ en la fibra $p^{-1}(x)$, ósea tenemos la aplicación:

$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \longrightarrow p^{-1}(x)$$

$$y \times [\sigma] \longmapsto y * [\sigma],$$

llevando $y \times [\sigma]$ hasta el punto final de la elevación de σ que comienza en y.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sean X, Y espacios topológicos, $p : Y \longrightarrow X$ es un cubrimiento, y $f : Z \longrightarrow X$ es una aplicación continua, donde Z es un espacio conexo y localmente arco-conexo. Sean $x \in X, y \in Y, z \in Z$ puntos tales que $p(y) = f(z) = x$. Para que exista una aplicación continua $\bar{f} : Z \longrightarrow Y$, con $p \circ \bar{f} = f$ y $\tilde{H}(z) = y$, es necesario y suficiente que, $f_*(\pi_1(Z, z))$ está contenido en $p_*(\pi_1(Y, y))$. Ósea, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

si, y solamente si, $f_*(\pi_1(Z, z)) \subseteq p_*(\pi_1(Y, y))$ en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, y) \arrow[d, hook, "p_*"] \\ \pi_1(Z, z) \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(X, x) \end{tikzcd}$$

y, si tal levantamiento $\bar{f}$ existe, es único.

Demostración. La necesidad se desprende de la funcionalidad del grupo fundamental, y la unicidad es un caso especial del lema 2.1. Por el contrario, para construir $\tilde{f}$, dado un punto w en Z, elija un camino γ en Z de z a w, y sea $\sigma = f \circ \gamma$, que es un camino que comienza en x en X. Defina $\tilde{f}(w)$ como $y * \sigma$; es decir, $\tilde{f}(w)$ es el punto final de la trayectoria que levanta σ y comienza en y. Primero debemos mostrar que esto es independiente de la elección del camino. Si γ' es otro camino de z a w, entonces

$$f \circ (\gamma'.\gamma^{-1}) = \sigma'.\sigma^{-1}$$

es un bucle en x. Por la hipótesis $[\gamma'.\gamma^{-1}]$ está en la imagen de p_*.Por la proposición anterior $y * \sigma = y * \sigma'$ entonces $[\sigma', \sigma^{-1}]$, siguen $\bar{\sigma'}$ y $\bar{\sigma}'$ terminan en el mismo punto

Sea N cualquier entorno donde queremos verificar que la función $\tilde{f}$ sea continua en el punto w. Sea N cualquier vecindad de $\tilde{f}(w)$ que esté cubierto uniformemente por p, sea V el conjunto abierto en $p^{-1}(N)$ que aplicación homeomórficamente sobre N y que contiene $\tilde{f}(w)$, y elija un camino conectado con el vecindad U de w para que $f(U) \subset N$. Necesitamos mostrar que la aplicación $\tilde{f}$ de U en V . Para todos los puntos w' en U, podemos encontrar un camino α de w a w' en U, y luego podemos usar $\gamma \cdot \alpha$ como el camino de z a w'. El levantamiento de

$$f \circ (\gamma.\alpha) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \alpha)$$

se obtiene elevando primero $f \circ \gamma$ a $\tilde{\sigma}$, luego elevando $f \circ \alpha$ Como el último levantamiento permanece en V, esto muestra que $f(U) \subset V$

∎

COROLARIO 2.1. *Sea X un espacio topológico conexo y localmente arco-conexo. Sean $p : Y \longrightarrow X$ y $p' : Y' \longrightarrow X$ dos aplicaciones recubridoras, con Y e Y' conectados, y sean $p(y) = x$ y $p'(y') = x$. Para que exista un isomorfismo entre los recubrimientos conservando los puntos de base, es necesario y suficiente que,*

$$p_*(\pi_1(Y, y)) = p'_*(\pi_1(Y', y'))$$

Demostración. La necesidad es aclara, que si estos subgrupos están de acuerdo, la proposición de aplicaciones $\varphi : Y \longrightarrow Y'$ y $\psi : Y' \longrightarrow Y$ que conservan los puntos base y son compatibles con las proyecciones (Notar que X siendo localmente conexo por caminos implica que cubriendo el espacio Y e Y' también están localmente conectados por caminos).Aplicando el lema 2.1 muestra que son isomorfismos

∎

2.3. Automorfismos de recubrimiento

Nuestro próximo objetivo es relacionar el grupo fundamental de X con el grupo de automorfismo de una cobertura de X. Sea $p : Y \to X$ un recubrimiento, con punto base y elegido en Y de modo que $p(y) = x$, y suponga que Y es conexo por caminos. Queremos hacer que $\pi_1(X,x)$ actúe a la izquierda de Y.

Dado un elemento $[\sigma]$ en $\pi_1(X,x)$ y un punto z en Y. Sea $y' = y * [\sigma]$, el punto final de la elevación de σ a un camino que comienza en y por lo tanto queremos definir un punto $[\sigma] \cdot z$ en Y. Elijamos una ruta γ de y a z en Y. Dado que $p(y') = p(y) = x$, y $p \circ \gamma$ es un camino que comienza en x, tenemos un punto $y' * (p \circ \gamma)$ que es el punto final de la elevación del camino $p \circ \gamma$ que comienza en y'. Definimos $[\sigma] \cdot z$ como el punto $y' * (p \circ \gamma)$. Denotemos este punto $y' * (p \circ \gamma)$ por $w(z, \sigma, \gamma)$;

Equivalentemente,

$$w(z, \sigma, \gamma) = (y * \sigma) * (p \circ \gamma) = y * (\sigma \cdot (p \circ \gamma)).$$

Supongamos que elegimos otro camino γ' de y a z. Para tener

$$w(z, \sigma, \gamma') = w(z, \sigma, \gamma),$$

queremos que los levantamientos de $\sigma \cdot (p \circ \gamma')$ y $\sigma \cdot (p \circ \gamma)$ que comienzan en y terminen en el mismo punto. Este será el caso precisamente si la clase

$$[(\sigma \cdot (p \circ \gamma')) \cdot (\sigma \cdot (p \circ \gamma))^{-1}]$$

pertenece a $p_*(\pi_1(Y, y))$. Tenga en cuenta que $\gamma' \cdot \gamma^{-1}$ es un lazo en y, entonces:

$$\begin{aligned}[(\sigma \cdot (p \circ \gamma')) \cdot (\sigma \cdot (p \circ \gamma))^{-1}] &= [(\sigma \cdot (p \circ \gamma')) \cdot ((p \circ (\gamma^{-1})) \cdot \sigma^{-1}] \\ &= [\sigma] \cdot [(p \circ (\gamma' \cdot \gamma^{-1})] \cdot [\sigma]^{-1} \\ &= [\sigma] \cdot p_*([\gamma' \cdot \gamma^{-1}]) \cdot [\sigma]^{-1},\end{aligned}$$

que es un elemento de $[\sigma] \cdot p_*(\pi_1(Y, y)) \cdot [\sigma]^{-1}$.

Para saber que esto está en $p_*(\pi_1(Y, y))$, necesitamos que $p_*(\pi_1(Y, y))$ sea un subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$. En este caso vemos que $w(z, \sigma, \gamma)$ es independiente de la elección de γ, y depende solo de z y de la clase de homotopía $[\sigma]$ de σ.

OBSERVACIÓN 2.3. Suponga que $p_*(\pi_1(Y, y))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$. La construcción anterior determina una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X, x) \times Y & \longrightarrow & Y \\ ([\sigma], z) & \longmapsto & [\sigma] \cdot z, \end{array}$$

donde $[\sigma] \cdot z = w(z, \sigma, \gamma)$. Tenga en cuenta que $[\sigma] \cdot z$ pertenece a la misma fibra de p, como de Z.

2.4. Coeficientes locales vía módulos.

Sea X un espacio arco-conexo. Supongamos que su revestimiento universal existe y lo denotaremos por $p : \widetilde{X} \to X$. Sea $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0)$.

El grupo de transformaciones del revestimiento $p : \widetilde{X} \to X$ actúa en $\widetilde{X}$ por evaluación. Dicho grupo de transformaciones se identifica con el grupo fundamental porque el revestimiento es universal.

Recordemos como es la acción de π en $\widetilde{X}$. Elegimos puntos base $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ y $x_0 \in X$ tales que $p(\widetilde{x}_0) = x_0$. Sean $[\gamma] \in \pi(X)$ y $z \in \widetilde{X}$. Por propiedad del revestimiento universal, existe una aplicación continua $\widetilde{\gamma} : I \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ y $\gamma(0) = \widetilde{x}_0$, más aún $\widetilde{\gamma}$ es único a menos de homotopía. Sea $w : I \to \widetilde{X}$ un camino entre $\widetilde{x}_0$ y z. Consideremos $v : I \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ v = p \circ w$ y $v(0) = \widetilde{\gamma}(1)$. Se prueba que la siguiente es una acción de $\pi(X)$ en $\widetilde{X}$, bien definida:

$$[\gamma].z = w(z, \gamma, \varphi)$$

$$[\gamma].z = \varphi_\gamma(z) := v(1).$$

La acción de $\pi(X)$ en $\widetilde{X}$ induce una acción en las n- cadenas singulares de $C_n(\widetilde{X})$ de la siguiente manera: Si $\sigma : \Delta^n \to \widetilde{X}$ es un n-simplex singular y $\varphi_\gamma : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ es la transformación del revestimiento asociado a $\gamma \in \pi(X)$. Definimos:

$$\varphi_\gamma \cdot \sigma := \varphi_\gamma \circ \sigma.$$

Extendemos la acción a $\mathbb{Z}[\pi(X)]$, obteniendo así una estructura de $\mathbb{Z}[\pi(X)]$-módulo a izquierda de $C_n(\widetilde{X})$.

Sea M un $\mathbb{Z}[\pi(X)]$-módulo a izquierda. Definimos

$$C_n(X, M) = C_n(\widetilde{X})_{\otimes_{\mathbb{Z}[\pi(X)]}} M.$$

Observamos que podemos ver a $C_n(\widetilde{X})$ como un $\mathbb{Z}[\pi(X)]$-módulo derecha redefiniendo la acción $\tilde{x}.\gamma = \gamma^{-1}.x$. Sea ∂_s el morfismo diferencial en las cadenas singulares. Observemos que $\partial_s : C_n(\widetilde{X}) \to C_{n-1}(\widetilde{X})$ es equivalente. En efecto, sean $\gamma \in \pi$ y $\sigma : |\Delta^n| \to \widetilde{X}$. Luego

$$\partial_s(\gamma \cdot \sigma) = \partial_s(\varphi_\gamma \circ \sigma) = \varphi_\gamma \circ \sigma_{|\partial|\Delta^n|} = \gamma \cdot \partial_s(\sigma)$$

Definimos

$$\partial := \partial_s \otimes id_M : C_n(X; M) \to C_{n-1}(X; M).$$

La homología de X con coeficientes locales en el módulo M es la homología del complejo de cadenas $\{C_\bullet(X; M), \partial\}$, la cual denotamos por $H_\bullet(X; M)$.

EJEMPLO 2.1. *Si M es un $\mathbb{Z}[\pi(X)]-$ módulo trivial, entonces $H_n(X;M)$ es la homología de X con coeficientes en el grupo abeliano M.*

EJEMPLO 2.2. Si $M = \mathbb{Z}[\pi(X)]$ con la acción regular, entonces $C_n(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi(X)]} \mathbb{Z}[\pi(X)] \cong C_n(\widetilde{X})$ luego

$$H_n(X;\mathbb{Z}[\pi(X)]) \cong H_n(\widetilde{X};\mathbb{Z})$$

EJEMPLO 2.3. Sea $p : X' \to X$ el revestimiento asociado a un subgrupo normal N de $\pi(X)$ .Entonces el grupo abeliano $\mathbb{Z}[\pi(X)/N]$ libremente generado por las coclases γN es un $\mathbb{Z}[\pi(X)]$-módulo. Como

$$C_n(\widetilde{X})_{\bigotimes \mathbb{Z}[\pi(X)]}\mathbb{Z}[\pi(X)/N] \cong C_n(X'),$$

tenemos que:

$$H_n(X;\mathbb{Z}[\pi(X)/N]) \cong H_n(X';\mathbb{Z}).$$

En general, si M es un $\mathbb{Z}[\pi(X)]$-módulo, N es el núcleo del siguiente morfismo:

$$\rho : \pi \to Aut_{\mathbb{Z}} \qquad\qquad \rho(\gamma)(m) = \gamma \cdot m$$

y $p : X' \longrightarrow X$ el revestimiento asociado a N, entonces

$$C_n(\widetilde{X})_{\bigotimes \mathbb{Z}[\pi(X)]}M \cong C_n(\widetilde{X})_{\bigotimes \mathbb{Z}[\pi(X)]}\mathbb{Z}[\pi(X)/N]_{\bigotimes \mathbb{Z}[\pi(X)/N]}M \cong C_n(X')_{\bigotimes \mathbb{Z}[\pi(X)/N]}M.$$

De ahora en más $\bigotimes_\pi$ denotará el producto $\bigotimes \mathbb{Z}[\pi(X)]$.

DEFINICIÓN 2.5. *(Espacio débilmente simple) Decimos que un espacio X es débilmente simple si la acción de $\pi_1(X)$ en $H_n(\widetilde{X};\mathbb{Z})$ es trivial.*

2.5. Propiedades de Levantamiento.

Para los siguientes resultados necesitamos trabajar con espacios topológicos punteado. Un espacio topológico punteado es un par (X, x_0), con X espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea $f : Y \longrightarrow X$ una función, $y_0 \in Y$. Entonces la notación $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ indicará que $f(y_0) = x_0$

LEMA 2.5. *Sean $(\tilde{X}, p)$ un espacio de recubrimiento de X, Y un espacio conexo y $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una función continua. Dado $\tilde{x}_0$ en la fibra de p sobre x_0, existe a lo más una función continua $\bar{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (\tilde{X}, x_0)$ con $p \circ \bar{f} = f$.*

Demostración. Ver ([3], Lema 2.20, página 19). ∎

DEFINICIÓN 2.6. *Sean $(\tilde{X}, p)$ un espacio de recubrimiento de X y $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una función continua. Un levantamiento de f es una aplicación continua $\bar{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \bar{f} = f$.*

TEOREMA 2.1. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X y $f : (I, 0) \to (X, x_0)$ un camino. Si $\tilde{x}_0$ es un elemento de la fibra de p sobre x_0, entonces existe una única función continua $\bar{f} : (I, 0) \to (\tilde{X}\tilde{x}_0)$ tal que $p \circ \bar{f} = f$.*

Demostración. Ver ([3], Teorema 2.22, página 20). ∎

TEOREMA 2.2. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio de recubrimiento de X y sea Y un espacio topológico. Consideremos el diagrama conmutativo de funciones continuas:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"'] & X \end{tikzcd} ,$$

donde $h_0(y) = (y, 0)$, para cada$y \in Y$. Entonces existe una función continua $\tilde{F} : Y \times I \to X$, de tal forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, "\tilde{F}"] & X \end{tikzcd} .$$

Además si Y es conexo, entonces $\tilde{F}$ es único.

Demostración. Ver ([3], Teorema 2.23, página 21). ∎

2.6. Fibraciones

DEFINICIÓN 2.7. ***(PLH)*** *Sean E y B espacios topológicos. Una función continua $p : E \to B$ tiene la propiedad de levantamiento de homotopía con respecto a un espacio X, si para toda función $f : X \to E$ y homotopía $G : X \times I \to B$ de $p \circ f$ existe una homotopía $F : X \times I \to E$ tal que $F \circ i = f$ y $p \circ F = G$. Osea, cada triangulo en el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, "F"] & B \end{tikzcd} .$$

En este caso, decimos que F es el levantamiento de G.

DEFINICIÓN 2.8. *(Fibración) Decimos que $p : E \longrightarrow B$ es una fibración si tiene la LPH para todo espacio X.*

DEFINICIÓN 2.9. *(Fibración de Serre). Decimos que $p : E \to B$ es una fibración de Serre, si tiene la LPH para todo $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$, con $n \geq 0$.*
El espacio E se denomina espacio total de p y B es el espacio base de p.

DEFINICIÓN 2.10. *(Fibra) Si $p : E \to B$ es una función continua, decimos que $F_b = p^{-1}(b)$ es la fibra de p sobre b.*

PROPOSICIÓN 2.5. *Si $p : E \to B$ es una fibración, las fibras $F_b = p^{-1}(b)$ sobre cada componente arco-conexa de B son homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Ver ([5], Proposición 4.61, pag. 405) ∎

A una fibración de Serre con espacio total E, espacio base B arco-conexo y fibra F la denotamos por:

$$F \to E \to B$$

DEFINICIÓN 2.11. *(Fibración homotópica).Decimos que $F \to E \to B$ es una fibración con fibra débilmente homotópica a F.*

OBSERVACIÓN 2.4. Sean $p : E \to B$ es una Fibración de Serre con fibra F y $f : A \to B$ una función continua, entonces $\overline{p} : E \times_B A \to A$ es una fibración con fibra F.

LEMA 2.6. *Si $\pi_n : S^n \to S^k$, entonces $\pi_n(S^k) = 0, \forall\, k > n$.*

LEMA 2.7. *Si $\pi_n : S^n \to S^1$, entonces $\pi_n(S^1) = 0, \forall\, n > 1$.*

EJEMPLO 2.4. Si $\pi_2 : S^2 \to S^1$, entonces $\pi_2(S^1) = 0, \forall\, n > 1$.

EJEMPLO 2.5. Si $\pi_1 : S^1 \to S^2$, entonces $\pi_1(S^2) = 0, \forall\, k > n$

DEFINICIÓN 2.12. ***(Secuencia exacta larga de grupos de homotopía.)***
Sea $p : E \longrightarrow B$ una fibración que conserva un punto base $b_0 \in B$. Supongamos que F se refiere a la fibra sobre b_0, es decir, $F = p^{-1}(\{b_0\})$, y sea la inclusión $i : F \hookrightarrow E$. Elija un punto tal que $e_0 = i(f_0)$. En términos de estos puntos bases,

la secuencia de Puppe se puede usar para mostrar que hay una secuencia exacta larga dada por:

$$\cdots\cdot \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots\cdot\cdot \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to 0.$$

Se construye a partir de los grupos de homotopía de la fibra F, espacio total E, y el espacio base B. Los homomorfismos $\pi_n(F) \to \pi_n(E)$ y $\pi_n(E) \to \pi_n(B)$ son solo los homomorfismos inducidos de i y p, respectivamente.
Las aplicaciones que involucran a π_0 no son homomorfismos de grupo porque π_0 no es grupo, pero son exactos en el sentido de que la imagen es igual al núcleo (aquí el elemento neutral es el componente conectado que contiene el punto base).

EJEMPLO 2.6. La fibración de Hopf. Sea $B = S^2$ y $E = S^3$. Sea p la fibración de Hopf, que tiene fibra S^1. De la secuencia larga exacta.

$$\cdots \to \pi_n(S^1) \to \pi_n(S^3) \to \pi_n(S^2) \to \pi_{n-1}(S^1) \to \cdots$$

y el hecho de que $\pi_n(S^1) = 0$ para $n \geq 2$, encontramos que $\pi_n(S^3) = \pi_n(S^2)$ para $n \geq 3$. En particular:

$$\pi_3(S^2) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$$

DEFINICIÓN 2.13. ***(La secuencia larga exacta de una fibración de Serre)***
Una secuencia $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$ de base B de un espacio topológico es llamado una libración de Serre si F es la imagen inversa de $\pi^{-1}(b)$ del punto base de B y si π tiene la siguiente propiedad de levantamiento homotópico: Si P es un poliedro finito y I es el intervalo unitario $[0,1]$; $g : P \to E$ es una función y $H : P\times I \to B$ es una homotopía entre $\pi g = H(-,0)$ y $h_1 = H(-,1)$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ P \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "G"] & B \end{tikzcd}$$

hay una homotopía $G : P \times I \to E$ entre g y la función $g_1 = G(-,1)$ que levanta H en el sentido que $\pi \circ G = H$. los espacios F, E y B son llamados la fibra, del espacio total de un espacio base, respectivamente.

OBSERVACIÓN 2.5. Una secuencia $F \overset{i}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{\pi} B$ de base B de un espacio topológico es llamado una Fibración de Serre si F es la imagen inversa de $\pi^{-1}(b)$ del punto base de B donde B es simplemente conexo, es decir $\pi_1(B) = 0$. La importancia de la fibración de Serre radica en que asocia a cada fibración una secuencia exacta larga de homotopía de grupos

$$\cdots\cdot \pi_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F) \xrightarrow{i} \pi_n(E) \xrightarrow{\pi} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(B) \cdots\cdot$$

DEFINICIÓN 2.14. ***(Aplicación de Huerwicz)*** *Se define la $n-$ ésima aplicación de Huerwicz entre el $n-$ésimo grupo de homotopía del espacio topológico X y el $n-$ésimo grupo de homología entera*

$$h : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X, \mathbb{Z})$$

como la función que lleva la clases de homotopía de $\gamma : [0,1]^n \to X$ (basada en x_0, .e. la frontera topológica del $n-$cubo va por γ al punto $x_0 \in X$) en la clase de homología del n-símplece singular γ

TEOREMA 2.3. *Existe un homomorfismo de grupos*

$$\mathcal{H} : \pi_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z}),$$

la aplicación de Huerwicz, que lleva la clase de homotopia de un camino γ basado en x_0 en la clase de homología del 1- simplice singular γ. Si X es conexos por camino, se verifica que

1. *$\mathcal{H}$ es sobreyectiva*
2. *$Ker(\mathcal{H})$ es el subgrupo conmutador de $\pi_1(X; x_0)$, es decir,*

$$[\pi_1(X; x_0), \pi_1(X; x_0)] = \langle aba^{-1}b^{-1} : a, b \in \pi_1(X; x_0) \rangle$$

De otro modo, $H_1(X, \mathbb{Z})$ es el grupo abelianizado de $\pi_1(X; x_0)$

$$\pi_1(X; x_0)^{ab} = \pi_1(X; x_0)/[\pi_1(X; x_0), \pi_1(X; x_0)]$$

Demostración. Ver ([6], Corolario 5.9, pag.45) ∎

TEOREMA 2.4. *Sea $X = U \cup V$, donde U y V son espacios abiertos y conexos por caminos en X. Supongamos que U, V y $U \cap V$ es no vació y conexo por caminos. Sea $x_0 \in U \cap V$ y H un grupo. Sean además $\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow H$ y $\phi_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow H$ homomorfismos. Sean también i_1, i_2, j_1, j_2 los morfismos indicados en el siguiente diagrama, cada uno de ellos inducidos por la inclusión:*

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r] \arrow[dr, "i_2"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\phi"] & H \\
& \pi_1(V, x_0) \arrow[u, "j_2"'] \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, entonces existe un único homomorfismo $\phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H$ tal que $\phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\phi \circ j_2 = \phi_2$

COROLARIO 2.2. *Supongamos las hipótesis del Teorema de Seifert- Van Kampen. Si V es simplemente conexo, existe un isomorfismo*

$$k : \pi_1(U, x_0)/N \to \pi_1(X, x_0)$$

donde N es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0)$ que contiene la imagen del homomorfismo

$$i_1 : \pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(U, x_0)$$

Demostración. Ver ([10], Corolario 70.4, pag. 490) ∎

OBSERVACIÓN 2.6. Del corolario 2.2 contextualizamos tomamos $U = X$; $V = \sqcup_\lambda e^2_\lambda$; donde $X_1 = U \cup_{g_\alpha} V$ y debido que V es simplemente conexo .Ahora j es sobreyectivo y $N \subset \pi_1(X, x_0)$

$$j : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X_1, x_0)$$

donde

$$\frac{\pi_1(X, x_0)}{N} \simeq \pi_1(X_1, x_0)$$

Ahora tomamos

$$i_* : \pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(U, x_0)$$

donde $U = X$, $V = D^2_1 \cup D^2_2$ donde $U \cap V = S^1_1 \cup S^1_2$ tomamos a $\bar{g}_1$ hacia $\bar{g}_1 \in N$ y $\bar{g}_2$ hacia $\bar{g}_2 \in N$ Donde $U \cap V = \cup S^1_\lambda$ que va hacia $\bar{g}_\lambda$ y su $Im(i_*) = N$ es el menor subgrupo perfecto y normal

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "j_1"] \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[r] \arrow[dr, "i_2"'] & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(V, x_0) \arrow[u, "j_2"']
\end{tikzcd}$$

Capítulo 3

Construcción Plus de Quillen

3.1. Construcción Plus de Quillen

En esta sección definiremos la construcción de ”+” de un CW- complejo X para un sub espacio perfecto y normal N de $\pi_1(X)$.

DEFINICIÓN 3.1. *Decimos que un espacio X es acíclico si $\widetilde{H}_n(X,\mathbb{Z}) = 0$, para todo $n \geq 0$.*

DEFINICIÓN 3.2. *Una función acíclica es una función continua $f : X \to Y$ que verifica la siguiente condicion:*

Si $M = \mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$ es el $\mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$-módulo con la acción regular entonces $f_* : H_*(X; f^*(M)) \to H_*(Y; M)$ es un isomorfismo.

DEFINICIÓN 3.3. *Un par (X, A) es una adjunción de n-celdas, $n \in N$, si X puede verse como un espacio de adjunción*

$$X = A \bigcup_f (\sqcup_\lambda \mathbb{D}^n_\lambda)$$

Si X viene dado por un Pushout de la forma como se puede ver en le siguiente diagram a.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1}_\lambda \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ \mathbb{D}^n_\lambda \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Con $\mathbb{D}^n_\lambda$ una n-bola y $\mathbb{S}^{n-1}_\lambda$, para todos los índices λ en un conjunto de índice arbitrario Λ.

Si $n = 0$, la definición significa simplemente que X es una suma topológica de A y un espacio discreto.

Si (X, A) es una adjunción de $n-$celdas, cualquier componente de camino de $X \backslash A$ es una $n-$celda abierta en X, llamada n-celda de (X, A).

Cada aplicación inducida $\mathbb{D}^n_\lambda \longrightarrow X$se llama un aplicación característica para la λ-ésima celda; cada aplicación inducida $\mathbb{S}^{n-1}_\lambda \longrightarrow A$ es un aplicación adjunta para la celda λ-ésima.

Si A es un espacio con base y toda aplicación $\mathbb{S}^{n-1}_\lambda \longrightarrow A$ tiene una base, se dice que el par (X, A) es una adjunción con base de n- celdas.

LEMA 3.1. *El par (X, A) es una adjudicación de una sola n-celda si y solo si*

1. *A es cerrada en X*

2. *Existe una función $\mathbb{D}^n \longrightarrow X$ que induce un homeomorfismo $Int(\mathbb{D}^n) \longrightarrow X \backslash A$*

Demostración. Ver ([2], Lema1.1.5, pag.16)

∎

PROPOSICIÓN 3.1. 1. *Sea (X, A) una adjunción de n-células y sea $p : \widetilde{X} \to X$ un recubrimiento. Entonces el par $(\widetilde{X}, \widetilde{A})$ con $\widetilde{A} = p^{-1}(A)$ es también una adjunción de n- células;*

2. *Sea (X,A) una adjunción de n-células con $n > 2$, y sea $p : \widetilde{A} \to A$ un recubrimiento. Entonces existe una adjunción de n- células $(\widetilde{X}, \widetilde{A})$ y un recubrimiento $q : \widetilde{X} \to X$, tales que $p = q|_{\widetilde{A}}$. En particular, si p es el recubrimiento universal de A entonces q es el recubrimiento universal de X.*

Demostración. 1. Sea Λ el conjunto de indices de las $n-$celdas pegadas en la adjunción (X, A),

$$X = A \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e^n_\lambda$$

Como se puede ver en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1} \times \Lambda \arrow[r, "g"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
\mathbb{D}^n \times \Lambda \arrow[r] & X = A \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e^n_\lambda
\end{tikzcd}$$

Para cada $\lambda \in \Lambda$, elegimos una función características

$$c_\lambda : \mathbb{D}^n \to X$$

de la celda e^n_λ. Sean $e_0 = (1, 0, \cdots, 0)$ el punto distinguido del borde de $\mathbb{D}^n$,

$$\tilde{\Lambda} = \{(z, \lambda) \in \tilde{X} \times \Lambda : p(z) = c_\lambda(e_0)\}$$

y para $\tilde{\lambda} = (z, \lambda)$ sea $c_{\tilde{\lambda}}$ el único levantamiento de c_λ con $c_{\tilde{\lambda}}(e_0) = z$.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{D}^n \arrow[ur, "c_{\tilde{\lambda}}"] \arrow[r, "c_\lambda"'] & X \end{tikzcd}$$

Sea

$$\mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda} = \coprod_{\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}} \mathbb{D}^n; \tilde{f} : \mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda} \to \tilde{X}; \tilde{f}(s, \tilde{\lambda}) = c_{\tilde{\lambda}}(s)$$

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{D}^n \times \widetilde{\Lambda} \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Observemos que si $(s, \tilde{\lambda}) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \tilde{\Lambda}$ entonces $p(c_{\tilde{\lambda}}(s)) = c_\lambda(s) \in A$ y por lo tanto $\tilde{f}(s, \tilde{\lambda}) = c_{\tilde{\lambda}}(s) \in \tilde{A}$.

Sea $f = \tilde{f} \upharpoonright_{\mathbb{S}^{n-1} \times \tilde{\Lambda}}$. Veamos que

$$\tilde{X} = \tilde{A} \bigcup_f (\mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda}) = \tilde{A} \bigcup_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} e^n_\lambda$$

Como se puede ver en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1} \times \widetilde{\Lambda} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] & \widetilde{A} \arrow[d, "h"'] \arrow[ddr, bend left, "i"] & \\ \mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda} \arrow[r, "g"] \arrow[drr, bend right, "\tilde{f}"'] & \widetilde{A} \cup_f (\mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda}) \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & & \widetilde{X} \end{tikzcd}$$

Sea $Y = \tilde{A} \bigcup_f (\mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda})$. Demostraremos que α es una biyección En un primer momento veamos que α es inyectivo.

Tomamos $a', b' \in \widetilde{A}$, $a = h(a'); b = h(b') \in Y$,

$$\begin{aligned} \alpha(a) = \alpha(b) &\implies \alpha(h(a')) = \alpha(h(b'));\ \text{el diagrama conmuta} \\ &\implies i(a') = i(b'); \text{i es inyectiva} \\ &\implies a' = b' \\ &\implies h(a') = h(b') \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

α es inyectivo.

Sea $(a, \lambda); (b, \lambda_1) \in \mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda}$ tal que $a' = g((a, \lambda)); b' = g((b, \lambda_1)) \in Y$,

$$\begin{aligned} \alpha(a') = \alpha(b') &\implies \alpha(g((a, \lambda))) = \alpha(g((b, \lambda_1)));\ \text{el diagrama conmuta} \\ &\implies \tilde{f}((a, \lambda)) = \tilde{f}((b, \lambda_1)); \tilde{f} \text{ es inyectiva} \\ &\implies (a, \lambda) = (b, \lambda_1) \\ &\implies g(a, \lambda) = g(b, \lambda_1) \\ &\implies a' = b' \end{aligned}$$

α es inyectivo.

Sea $a, b \in \tilde{A} \bigcup_f (\mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda})$; $a = g(a_1, \lambda) \in \mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda}$ y $b = h(b_1) \in \tilde{A}$

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} = \tilde{A} \bigcup_f (\mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda}) \arrow[d, "p"] \\ X = A \bigcup_f (\mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda}) \end{tikzcd} .$$

Ahora $p(\alpha(a)) = p(\alpha(b))$, al momento de proyectar en su cubrimiento universal, lo proyectamos en su base, sus imágenes están en A o en su $\mathbb{D}^n \times \Lambda$, la única forma que coincidan es que estén es en la intersección es decir en el borde donde se están pegando en $\mathbb{S}^{n-1} \times \tilde{\Lambda}$. Si esto ocurre (a_1, λ) y b_1 caen un mismo punto y esto necesariamente proviene un $w \in \mathbb{S}^{n-1} \times \tilde{\Lambda}$,

$$f(w) = b_1; i_1 = (a_1, \lambda)$$

. Ahora como el diagrama conmuta

$$\begin{aligned} &\implies g(i_1(w)) = h(f(w));\ \text{el diagrama conmuta} \\ &\implies g(a_1, \lambda) = h(b_1) \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Por lo tanto la aplicación α es inyectivo.

Veamos que α es sobreyectivo.

Sea $\tilde{x} \in \widetilde{X} - \widetilde{A}$ entonces $p(x) \notin A$, $s = p(\tilde{x}) \in Int(\mathbb{D}^n \times \Lambda)$. Como $p(x) \notin A$, existe un único $\bar{\lambda} \in \Lambda$ y un único $s \in Int(\mathbb{D}^n)$ tales que $p(\tilde{x}) = c_{\bar{\lambda}}(s) \in Int(e^n_{\bar{\lambda}})$.

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{D}^n \arrow[ur, "c_{\tilde{\lambda}}", "w"'] \arrow[r, "c_{\bar{\lambda}}"] & X
\end{tikzcd}$$

Sea L el segmento en $\mathbb{D}^n$ que une s con e_0, $w : L \longrightarrow \widetilde{X}$ el único levantamiento de $c_{\bar{\lambda}}$ con $w(s) = \tilde{x}$ y $\tilde{\lambda} = (w(e_0), \lambda) \in$. además $p(w(e_0)) = c_{\bar{\lambda}}(e_0)$ entonces $\lambda \in \tilde{\Lambda}$. Ahora consideremos $c_{\tilde{\lambda}}$ que es el único levantamiento de $c_{\bar{\lambda}}$ tal que $c_{\tilde{\lambda}}(e_0) = w(e_0)$, entonces tenemos $c_{\tilde{\lambda}}(s) = w(s) = \tilde{x}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^n \times \tilde{\Lambda} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\widetilde{f}"'] & \widetilde{A} \cup_f \mathbb{D}^n \times \widetilde{\Lambda} \arrow[d, "\alpha"] \\
 & \widetilde{X}
\end{tikzcd}$$

Ahora tomamos $y = (s, \tilde{\lambda}) \in \mathbb{D}^n \times \widetilde{\Lambda}$ y

$$z = g(y) \in \widetilde{A} \cup_f \mathbb{D}^n \times \widetilde{\Lambda}$$

Ahora $\widetilde{f}(y) = c_{\tilde{\lambda}}(s) = \tilde{x}$ como el diagram es conmutativo

$$\alpha(z) = \alpha(g(y)) = \widetilde{f}(y) = \tilde{x}.$$

Por lo tanto la aplicación α es sobreyectivo.

Ahora demostramos la continuidad

Sea U un abierto en $\widetilde{X}$, entonces $\alpha^{-1}(U)$ es un abierto en Y, luego como el diagrama conmuta

$$h^{-1}(\alpha^{-1}(U)) = (\alpha \circ h)^{-1}(U) = i^{-1}(U)$$

es un abierto en $\widetilde{A}$, además $g^{-1}(\alpha^{-1}(U))$ es un abierto en

$$\mathbb{D}^n \times \widetilde{\Lambda} = (\alpha \circ g)^{-1}(U) = \widetilde{f}^{-1}(U)$$

es un abierto en $\mathbb{D}^n \times \widetilde{\Lambda}$

LEMA 3.2. *$U \subset \widetilde{X}$ es abierto, entonces $U \cap \tilde{A}$ es abierto en $\tilde{A}$ y $c_{\tilde{\lambda}}^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{D}^n$ para cada $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$.*

Demostración. La implicación directa es trivial

∎

LEMA 3.3. *Si $U \cap \tilde{A}$ es abierto en $\tilde{A}$ y $c_{\tilde{\lambda}}^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{D}^n$ para cada $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$, entonces $U \subset \tilde{X}$ es abierto.*

Demostración. probemos la otra implicación. como p es un cubrimiento, existe un cubrimiento de abiertos $\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $\tilde{X}$ tal que $V_\lambda \to p(V_\lambda)$ es un homeomorfismo y $p(V_\lambda)$ es abierto en X para todo $\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{tikzcd} U \subset V_\lambda \subset \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ p(V_\lambda) \subset X \end{tikzcd}$$

donde $U \cap V_\lambda$ es abierto en $\widetilde{X}$ la unión de infinitos de abiertos es abierto $\bigcup(U \cap V_\lambda) = V_\lambda$, entonces podemos suponer que $U \subset V_\lambda$

$$\begin{tikzcd} U \subset \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ p(U) \subset X \end{tikzcd}$$

como p es un homomorfismo su imagen también es abierto en A

$$\begin{gathered} p : \widetilde{A} \longrightarrow A; \\ U \cap \widetilde{A} \longrightarrow p(U) \cap A; \end{gathered}$$

luego U es abierto en $\widetilde{X}$ si y solo si $p(U)$ es abierto en X. Por hipótesis tenemos que $U \cap \tilde{A}$ es abierto en $\tilde{A}$. Sea $p(U) \cap A = p(U \cap \widetilde{A})$, donde $U \cap \widetilde{A}$ es un abierto en $\widetilde{A}$, entonces $p(U) \cap A$ es un abierto en A.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{D}^n \arrow[ur, "c_{\tilde{\lambda}}"] \arrow[r, "c_\lambda"'] & X = A \cup_f \mathbb{D}^n \end{tikzcd}$$

además el siguiente conjunto resulta ser abierto en $\mathbb{D}^n$

$$c_\lambda^{-1}(p(U)) = (p \circ c_{\tilde{\lambda}})^{-1} p(U)$$

$$
\begin{aligned}
&= c_{\tilde{\lambda}}^{-1} \circ p^{-1} \circ p(U) \\
&= \bigcup_{\tilde{\lambda}=(z,\lambda)} c_{\tilde{\lambda}}^{-1}(U)
\end{aligned}
$$

∎

2.Como cada celda pegada en la adjunción (X, A) es de dimensión mayor que dos, las funciones de pegado tienen dominio simplemente conexo, luego tienen levantados a $\tilde{A}$. Usando estas funciones continuas construimos $\tilde{X}$. ∎

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1}_{\lambda} \times \tilde{\Lambda} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathbb{D}^n_{\lambda} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \widetilde{A} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \widetilde{X} \arrow[dd, "p"] \\
\mathbb{S}^{n-1}_{\lambda} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{D}^n_{\lambda} \arrow[dr] & \\
& A \arrow[rr] & & X
\end{tikzcd}
$$

OBSERVACIÓN 3.1.

$$
\begin{tikzcd}
& 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & C_{n-1}(\widetilde{X}_1; \widehat{X}; \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u] & C_{n-1}(\widetilde{X}^+; \widehat{X}; \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u] & C_{n-1}(\widetilde{X}^+; \widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n(\widetilde{X}_1; \widehat{X}; \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, "\partial_n"] & C_n(\widetilde{X}^+; \widehat{X}; \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, "\partial_n"] & C_n(\widetilde{X}^+; \widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, "\partial_n"] & 0 \\
& \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Tomamos un elemento $a \in C_n(\widetilde{X}^+; \widetilde{X}_1; \mathbb{Z})$ que proviene de algún $b \in C_n(\widetilde{X}^+; \widehat{X}; \mathbb{Z})$, es sobreyectivo, por que es exacto donde $a \in Ker(\partial_n)$ y $\partial_n(a) \in C_{n-1}(\widetilde{X}^+; \widetilde{X}_1; \mathbb{Z})$; $\partial_n(b) \in C_{n-1}(\widetilde{X}^+; \widehat{X}; \mathbb{Z})$, va al 0 por que el diagrama conmuta, pero esta secuencia es exacta (Ker= Im) esto proviene de $s \in C_{n-1}(\widetilde{X}_1; \widehat{X}; \mathbb{Z})$, entonces $\partial_n(a) = s$. Las filas son exactas y las columnas son complejos de cadenas.

Ahora el $C_n(X) = \langle S_n \rangle$ es el grupo libre generado por

$$
S_n = \{\sigma : \Delta_n \longrightarrow X\},
$$

y $C_n(X, A, \mathbb{Z})$ es el producto tensorial. El par

$$C_n(X, A) = \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$$

es decir de todos los morfismos que van hacia X vamos a eliminar a los que están en A

$$C_n(X, A) = \{[\bar{\sigma}], \sigma : \Delta_n \longrightarrow X/A\}$$

Las clases de las clases de homotopía para las cuales σ cae en en X/A

OBSERVACIÓN 3.2. Sea $a_\lambda \in C_n(\widetilde{X}^+; \widetilde{X}_1; \mathbb{Z})$ definimos

$$a_\lambda : \Delta_n \longrightarrow \widetilde{X}^+/\widetilde{X}_1 = D_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} \mathbb{D}^3_\lambda$$

Donde D se puede entender como las uniones de $\mathbb{D}^3_\lambda$ que surge al cocientar $\widetilde{X}^+$ con $\widetilde{X}_1$ que se convierte en un solo punto, como Δ_n es simplemente conexo va a caer en algún $\mathbb{D}^3_\lambda$ el cual proviene un elemento b_λ y sabemos que caerá en algún L^3_λ; ahora

$$s_\lambda : \Delta_{n-1} \longrightarrow \widetilde{X}_1/\widehat{X} = L_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} \mathbb{D}^2_\lambda$$

Donde L se puede entender como la uniones de $\mathbb{D}^2_\lambda$ que surge al cocientar $\widetilde{X}_1$ con $\widehat{X}$ se convierte en un solo punto, Δ_n es simplemente conexo va a caer en algún $\mathbb{D}^2_\lambda$,cada generador de C_{n-1} van a caer en C_n.

$$\delta : H_n \longrightarrow H_{n-1}$$

donde H_n tiene generadores $\bar{a}_\lambda$ y que van a cierto $\bar{s}_\lambda$, como ambos tienen $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ generadores y como va de clase en clase δ es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & H_{n-1}(\widetilde{X}_1; \widehat{X}; \mathbb{Z}) \arrow[u] \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(\widetilde{X}^+; \widehat{X}; \mathbb{Z}) \arrow[u] \arrow[r, "j_*"] & H_{n-1}(\widetilde{X}^+; \widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_n(\widetilde{X}_1; \widehat{X}; \mathbb{Z}) \arrow[u] \arrow[r, "i_*"] & H_n(\widetilde{X}^+; \widehat{X}; \mathbb{Z}) \arrow[r, "j_*"] & H_n(\widetilde{X}^+; \widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \arrow[u] \arrow[ull, "\delta"'] \arrow[r] & 0 \\
 & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 3.2. *Si X es un CW complejo finito con cubrimiento universal $\widetilde{X}$ y grupo fundamental π, entonces para todo n, $H_n(X, \mathbb{Z}[\pi])$ es isomorfo a $H_n(\widetilde{X}, \mathbb{Z})$,cohomología de X con soportes compactos y coeficientes enteros ordinarios.*

Demostración. Ver ([5], Proposición 3H.5. pag.334) ∎

EJEMPLO 3.1. Sea considere el toroide n dimensional T^n, el producto de n círculos, con grupo fundamental $\pi = \mathbb{Z}^n$ y cubrimiento universal $\mathbb{R}^n$. Tenemos

$$H_i(T^n; \mathbb{Z}[\pi]) \simeq H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}),$$

que es cero excepto por una $\mathbb{Z}$en dimensión 0.

TEOREMA 3.1. *Sean X un CW- complejo conexo, y N un subgrupo perfecto y normal de $\pi = \pi_1(X)$. Entonces, podemos obtener un nuevo CW complejo X^+ mediante la adjunción de células de dimensión 2 y 3 a de modo que satisfagan la siguiente condición:*

1. *El morfismo $i_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X^+)$ inducido por la inclusión es la proyección $\pi \longrightarrow \pi(X)/N$.*
2. *La inclusión $i : X \to X^+$ es acíclica.*

Demostración. Sea $g_\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ las funciones continuas de las clases de homotopía que son los generadores de N, un subgrupo perfecto normal de $\pi_1(X)$ es decir N es igual a

$$N =< [g_\alpha] : \alpha \in \Lambda >$$

Para cada $\alpha \in \Lambda$ adjuntamos a X una celda de dimensión 2 via función continua g_α obteniendo así un CW- complejo X_1.
Como se puede ver en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \sqcup_\lambda \mathbb{S}^1_\lambda \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d] \\ \sqcup_\lambda \mathbb{D}^2_\lambda \arrow[r] & X_1 \end{tikzcd} .$$

La inclusión $i : X \to X_1$, induce a nivel de grupos fundamentales el morfismo proyección $i_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X)/N = \pi_1(X_1)$ hecho garantizado por el Corolario 2.2.

Sea $p_{X_1} : \widetilde{X}_1 \to X_1$ el revestimiento universal de X_1. Consideremos $\widehat{X} = p^{-1}_{X_1}(X)$ y $p_X = p_{X_1}|_{\widehat{X}}$. Como se representa en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{X} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p_X"'] & \widetilde{X}_1 \arrow[d, "p_{X_1}"] \\ X \arrow[r, hook, "i"] & X_1 \end{tikzcd}$$

Observemos que p_X es un revestimiento dado que p_{X_1} lo es, por el Teorema1.6.

En particular es una fibración con la misma fibra que p_{X_1} que es revestimiento universal y $\pi_1(X_1) = \pi_1(X)/N$.

Consideramos la sucesión exacta de homotopía asociada a la fibración de Serre es decir $F = P_X^{-1}(x_0)$, punto base $x_0 \in X$

$$F \overset{i}{\hookrightarrow} \widehat{X} \xrightarrow{p_X} X$$

donde F es una familia de conjunto de punto aislados, entonces $\pi_n(F) = 0, \forall n \geq 1$, como $\pi_0(F)$ representa el grupo de componentes conexas de F. podemos escribir a $F = \pi/N$

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(\widehat{X}) \xrightarrow{pX_*} \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow 0\ .$$

Como F es un conjunto de punto aislados tenemos que $\pi_n(F) = 0$, para $n \geq 1$ De ello obtenemos la siguiente secuencia exacta corta.

$$0 \longrightarrow \pi_1(\widehat{X}) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

como $\pi_1(X) = \pi$ tenemos la siguiente secuencia

$$0 \longrightarrow \pi_1(\widehat{X}) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi/N \longrightarrow 0$$

Luego $\pi_1(\widehat{X}) = N$.

Como (X_1, X) es una adjunción de celdas de dimension 2.

$$X_1 = X \cup_{g_\alpha} \bigcup_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha^2$$

Por la Proposición 3.1, $(\widetilde{X}_1, \widehat{X})$ es también una adjunción de celdas de dimension 2

$$\widetilde{X}_1 = \widehat{X} \cup_{g_\alpha} \bigcup_{(i,\alpha) \in F \times \Lambda} e_{i,\alpha}^2$$

Sea $\overline{c}_\alpha$ la función característica asociado a la célula e_α^2 y

$$\overline{\Lambda} = \{(z, \alpha) \in \widetilde{X}_1 \times \Lambda : p_{X_1}(z) = \overline{c}_\alpha(e_0)\}$$

Como para cada α existe únicamente F elemento de $\widetilde{X}_1$ tal que $p_{X_1}(z) = \overline{c}_\alpha(e_0)$ tenemos que $\widetilde{\Lambda} = F \times \Lambda$.

Denotamos por $[e^2_\alpha]$ a la clase de homología del ciclo relativo $\overline{c}_\alpha : \mathbb{D}^2 \to \widetilde{X}_1$. Como $(\widetilde{X}_1, \widehat{X})$ es un buen par, entonces

$$H_n(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}_n(\widetilde{X}_1/\widehat{X}; \mathbb{Z}) = \widetilde{H}_n(\bigvee_{(i,\alpha)\in\pi/N\times\Lambda} S^2_\alpha; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{Z}[\pi/N][e^2_\alpha] & , \text{ si } n = 2 \\ 0 \quad \text{si } n \neq 2 \end{cases}$$

......(a)

esta garantizado por la homología reducida de los espacios topológicos del cociente dada en la Proposición 1.19.

$\bigvee$ es la suma de uniones de disco. La homología seria la suma directa de cada una de las homologías de los S^2_α y solo existe homología en la dimension $n = 2$. Cuando la dimensión es mayor que $n = 2$ todo es homotópicamente equivalente a un punto

Observemos que $H_3(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) = 0$ por (a) y

$$H_1(\widehat{X}, \mathbb{Z}) = \pi_1(\widehat{X})_{ab} = N/[N, N] = 0,$$

puesto que N es perfecto.

$$H_2(\widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H_2(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\widehat{X}; \mathbb{Z}) = 0$$

Esto implica que j es sobreyectivo, $H_2(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z})$; es un $\mathbb{Z}[\pi/N]-$ módulo proyectivo libre, entonces existe un S que hace que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & H_2(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \arrow[dl, "S"'] \arrow[d, "id"] \\ H_2(\widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \arrow[r, "j"] & H_2(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) = \bigoplus \mathbb{Z}[\pi/N] \end{tikzcd}$$

conmute es decir $j \circ S = id$

Sea la sucesión exacta de la homología asociada al par $(\widetilde{X}_1, \widehat{X})$

$$... \longrightarrow H_3(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H_2(\widehat{X}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \underset{j}{\overset{S}{\rightleftarrows}} H_2(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z})^{\delta} \longrightarrow H_1\ (\widehat{X}; \mathbb{Z}) \tag{3.1}$$

La sucesión (3.1) es exacta corta que se parte porque $H_2(X_1, \widehat{X}; \mathbb{Z})$ es un $\mathbb{Z}[\pi/N]$-módulo libre en $[e^2_\alpha]$ generadores. Como $\widetilde{X}_1$ es simplemente conexo, el morfismo de Hurewicz

$$\mathcal{H}_2 : \pi_2(\widetilde{X}_1) \to H_2(\widetilde{X}_1, \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo.

Como p_{X_1} es un revestimiento entonces es un isomorfismo.Sea S$[e^2]$ esta en $H_2(X_1, X, \mathbb{Z})$, como $\mathcal{H}_2$ y p_{X_1} es un isomorfismo va existir una clase que va a representar a h_α

$$p_{X_1}* : \pi_2(\widetilde{X}_1) \longrightarrow \pi_2(X_1)$$

Sean $h_\alpha : S^2 \to X_1$ tal que $\mathcal{H}_2(pX_1)^{-1}_*([h_\alpha]) = S([e^2_\alpha])$ y $[S^2]$ el generador estándar de $H_2(S^2; \mathbb{Z})$ $[h_\alpha] \in \pi_2(X_1)$

$$\begin{array}{ccccc} \pi_2(X_1) & \xrightarrow{p^{-1}_{X_{1*}}} & \pi_2(\widetilde{X}_1) & \xrightarrow{\mathcal{H}_2} & H_2(\widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \\ [h_\alpha : S^2 \to X_1] & \longrightarrow & [\tilde{h}_\alpha : S^2 \to \widetilde{X}_1] & \longrightarrow & (\tilde{h}_\alpha) * ([S^2]) = S([e^2_\alpha]) \end{array}$$

Consideremos

$$0 \longrightarrow H_2(\widehat{X}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \underset{j}{\overset{S}{\rightleftarrows}} H_2(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

$$S : H_2(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\widetilde{X}_1; \mathbb{Z})$$

observe que $[h_\alpha] \in \pi_2(X_1) \simeq \pi_2(\widetilde{X}_1) \simeq H_2(\widetilde{X}_1; \mathbb{Z})$ y $[e^2_\alpha] \in H_2(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z})$. Para cada $\alpha \in \Lambda$ adjutamos a X_1 una célula de dimensión 3 vía la función h_α obteniendo un CW- complejo.

$$X^+ = X_1 \cup_{h_\alpha} \bigcup_{\alpha \in \Lambda} e^3_\lambda$$

Por la Proposición 3.1, parte (2), podemos construir $p_{\widetilde{X}^+} : \widetilde{X}^+ \to X^+$ tal que $p_{\widetilde{X}^+}$ es el revestimiento universal de X^+, $(\widetilde{X}^+, \widetilde{X}_1)$ es una adjunción de células y $p_{X_1} = p_{X^+}|_{\widetilde{X}_1}$.

Vamos a probar que $H_n(\widetilde{X}^+, \widehat{X}; \mathbb{Z}) = 0$, es decir que el complejo $C_\bullet(\widetilde{X}^+, \widehat{X}; \mathbb{Z})$ es acíclico.

La sucesión exacta asociada a la terna $(\widetilde{X}^+, \widetilde{X}_1, \widehat{X})$ como en la observación3.2 :

$$... \to H_n(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_n(\widetilde{X}^+, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{j_*} H_n(\widetilde{X}^+, \widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \to ... \tag{3.2}$$

Observe que:

$$H_n(\widetilde{X}^+, \widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{Z}[\pi/N][e^3_\alpha] & , \text{ si } n = 3 \\ 0 \quad , \text{ si } n \neq 3 \end{cases}$$

y

$$H_n(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{Z}[\pi/N][e^2_\alpha] & , \text{ si } n = 2 \\ 0 \quad , \text{ si } n \neq 2 \end{cases}$$

y $\delta : H_3(\widetilde{X}^+, \widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z})$ es un isomorfismo tal que $\delta([e^3_\alpha]) = [e^2_\alpha]$(por construcción del morfismo de conexión de la sucesión en cuestión Observación3.2). Sabemos que

$$H_n(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) = 0 \quad ; \quad H_n(\widetilde{X}^+, \widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) = 0$$

Concluimos que

$$H_n(\widetilde{X}^+, \widehat{X}; \mathbb{Z}) = 0, \forall n \geq 0$$

. Por lo tanto la siguiente sucesión es exacta:

$$... \to C_n(\widetilde{X}^+, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \to ... \to C_2(\widetilde{X}^+, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \stackrel{\partial_2}{\to} C_1(\widetilde{X}^+, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \stackrel{\partial_1}{\to} C_0(\widetilde{X}^+, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \to 0 \tag{3.3}$$

Concluimos que si $M = \mathbb{Z}[\pi/N]$ es el $\mathbb{Z}[\pi/N]$-módulo con la acción regular el morfismo

$$i_* : H_n(X; i^*(M)) \to H_n(X^+; M)$$

es un isomorfismo por la Proposición 3.2

$$H_n(X, \mathbb{Z}[\pi_1(X)]) \simeq H_n(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \simeq H_n(\widetilde{X}^+, \mathbb{Z}) \simeq H_n(X^+, \mathbb{Z}[\pi_1(X^+)])$$

Por tanto $i : X \to X^+$ es una función acíclica. ∎

3.2. Aplicación.

TEOREMA 3.2. *Sea X un complejo CW conexo con $H_1(X) = 0$. Entonces existe un CW complejo X^+ simplemente conexo y una aplicación $X \longrightarrow X^+$ que induce isomorfismos en todos los grupos de homología.*

Demostración. Por hipótesis se tiene que X un complejo CW conexo,la condición $H_1(X) = 0$ significa que $N = \pi_1(X)$ es igual a su conmutador, es decir, $N = \pi_1(X)$ es un grupo perfecto y normal, por el Teorema 3.1, entonces existe un X^+ que cumple las siguientes condiciones

1. El morfismo $i_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X^+)$ inducido por la inclusión es la proyección $\pi \longrightarrow \pi(X)/N$.

2. La inclusión $i : X \to X^+$ es acíclica.

La condición (2)significa que inducе isomorfismos en todos los grupos de homología. ∎

DEFINICIÓN 3.4. *Un espacio conexo por caminos cuyo grupo fundamental es isomorfo a un grupo G dado y que tiene un espacio de cobertura universal contráctil se denomina espacio K(G,1).*

Esta construcción $X \longrightarrow X^+$, que elimina un subgrupo perfecto y normal de $\pi_1(X)$ conservando la homología, se conoce como la construcción plus de Quillen. En algunas de las aplicaciones principales, X es un $K(G,1)$ donde G tiene un subgrupo de conmutador perfecto, por lo que la aplicación $X \longrightarrow X^+$ abelianiza $\pi_1(X)$ conservando la homología.

El espacio X^+ ya no necesita ser un $K(G,1)$, y de hecho sus grupos de homotopía pueden ser bastante interesantes. El ejemplo más sorprendente es $G = S_8$, el grupo simétrico infinito que consta de permutaciones de $1, 2, \cdots$ fijando todos menos un número finito de n, con el subgrupo conmutador del grupo infinito alternante A_∞, que es perfecto. En este caso, un famoso teorema de Barratt, Priddy y Quillen dice que los grupos homotópicos $\pi_i(K(\sum_\infty, 1)^+)$ son los grupos homotópicos estables de las esferas.

Sin embargo, existen límites en los que los subgrupos de $\pi_1(X)$ pueden eliminarse sin afectar la homología de X. Por ejemplo, para $X = S^1 \vee S^1$ es imposible eliminar el subgrupo del conmutador de $\pi_1(X)$ conservando la homología. Todo espacio con grupo fundamental $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ debe tener H_2 no trivial.

Capítulo 4

Conclusiones

- Se utilizo la propiedad universal del Phus Out, para poder adjuntar celdas y eliminan los generadores del grupo normal N. Se demostró que una restricción de cubrimiento universal es también una aplicación recubridora el cual se utilizo en un diagrama de la demostración.

- Se demostró que (X, A) es una adjunción de n-celdas y sea $p : \widetilde{X} \to X$ un recubrimiento universal, entonces el par $(\widetilde{X}, \widetilde{A})$ con $\widetilde{A} = p^{-1}(A)$ es también una adjunción de n- células, la cual se utilizo en la adjunción de celdas de dimension 2 y 3 para construir el X^+.

- A partir de X se construyo, un CW complejo X^+ con $N \subset \pi_1(X)$, $\alpha \in \Lambda$ le adjuntamos una celda de dimensión 2 via funciones continuas g_α obteniendo un CW complejo X_1. Además, se utilizo el cubrimiento universal para hallar una fibración, la sucesión exacta de homotopía asociada a la fibración de Serre y la sucesión exacta corta de homotopía, la cual se utilizó para representar a una familia de puntos aislados. Asimismo como (X_1, X) es una adjunción de celdas de dimensión 2 lo denotaremos como

  $$X_1 = X \cup_{g_\alpha} \bigcup_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha^2.$$

  En efecto, denotamos por $[e_\alpha^2]$ a la clase de homología del ciclo relativo $\overline{c}_\alpha : \mathbb{D}^2 \to \widetilde{X}_1$. Así pues, como $(\widetilde{X}_1, \widehat{X})$ es un buen par, entonces

  $$H_n(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}_n(\widetilde{X}_1/\widehat{X}; \mathbb{Z})$$

  es la homología reducida de los espacios topológicos del cociente al buen par. Ya que $\widetilde{X}_1$ es simplemente conexo, el morfismo de Hurewicz

  $$\mathcal{H}_2 : \pi_2(\widetilde{X}_1) \to H_2(\widetilde{X}_1, \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo.Tambien, adjuntamos a X_1 una celda de dimensión 3 via funciones h_α obteniendo un CW complejo X^+ denotado por

$$X^+ = X_1 \cup_{h_\alpha} \bigcup_{\alpha \in \Lambda} e^3_\lambda.$$

En segundo lugar, se demostró la inclusion $i : X \to X^+$ es acíclica. Es decir, que su enésimo grupo de homología es igual a cero. Además, se utilizo la sucesión asociada ala terna $(\widetilde{X}^+, \widetilde{X}_1; \mathbb{Z})$ y

$$\delta : H_3(\widetilde{X}^+, \widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo tal que $\delta([e^3_\alpha]) = [e^2_\alpha]$ (por construcción del morfismo de conexión de la sucesión). Se utilizó que δ es un isomorfismo para ver que,

$$H_n(\widetilde{X}_1, \widehat{X}; \mathbb{Z}) = 0 \quad ; \quad H_n(\widetilde{X}^+, \widetilde{X}_1; \mathbb{Z}) = 0 \ .$$

Concluimos que

$$H_n(\widetilde{X}^+, \widehat{X}; \mathbb{Z}) = 0, \forall n \geq 0$$

, la cual se utilizo para poder demostrar que la inclusión $i : X \to X^+$ es acíclica.

Capítulo 5

Recomendaciones

- A partir de este estudio se puede realizar un trabajo especifico acerca de la funtorialidad de la construcción ”+”.

- Extender los estudios expuestos en esta tesis al estudio acerca de la construcción ”+” en fibraciones.

Apendice

Apéndice A

Grupo perfecto

A.1. Grupos Perfectos.

DEFINICIÓN A.1. *(**Grupo perfecto.**) Un grupo G es perfecto si es igual a su conmutador, ósea,*

$$G = [G, G] =< aba^{-1}b^{-1}; a, b \in G >$$

EJEMPLO A.1. El grupo trivial es perfecto, trivialmente.

Ahora daremos un ejemplo de grupo perfecto donde su grupo fundamental es no trivial

EJEMPLO A.2. El grupo alternado de cinco elementos A_5 es el grupo perfecto no trivial más pequeño.

El subgrupo de simetrías que conservan la orientación del icosaedro es el grupo alterno A_5 cuyo orden es 60. El grupo icosaédrico completo es isomorfo al producto cartesiano $A_5 \times \mathbb{Z}_2$ (con el grupo de orden 2). El grupo icosaédrico es el grupo de simetrías de un icosaedro.

EJEMPLO A.3. El grupo icosaédrico binario 2I es un grupo perfecto: su abelianización es el grupo trivial.

Por lo tanto, el orden del grupo icosaédrico completo es $60 \times 2 = 120$, al igual que el del grupo icosaédrico binario 2I. De hecho, salvo isomorfismo, el grupo icosaédrico binario es el único grupo finito de orden 120 que es un grupo perfecto.

DEFINICIÓN A.2. *(Clausura Perfecta.) La clausura perfecta de un grupo G es el mayor subgrupo perfecto contenido en G, y lo denotamos por $\mathcal{PG}$*

Apéndice B

Topología

DEFINICIÓN B.1. ***(Topología de Subespacio)*** *Sea (X,τ) un espacio topológico, S un subconjunto de X e $i : S \hookrightarrow X$ la función inclusión es definida como $i(x) = x$, para todo $x \in S$. Entonces la colección*

$$i^*\tau = \{i^{-1}(V) \subseteq S : V \in \tau\} = \{V \cap S : V \in \tau\}$$

es una topología sobre S, la cual es llamada topología de subespacio. En este caso, el par $(S, i^*\tau)$ es llamado subespacio topológico de (X,τ).

En el caso de definir otra topología sobre S, digamos $\mathfrak{R}$, la continuidad de la inclusión $i : (S,\mathfrak{R}) \hookrightarrow (X,\tau)$ solamente es valida cuando $\mathfrak{R}$ contiene a $i^*\tau$. Esto significa, por tanto, que $i^*\tau$. es la topología más pequeña (en el sentido de la inclusión de conjuntos) respecto a la cual $i : S \hookrightarrow X$ es continua.

DEFINICIÓN B.2. ***(Topología de Identificación)*** *Sea (X,τ) un espacio topológico, Y un conjunto arbitrario y $p : (X,\tau) \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva. Entonces la colección*

$$p_*\tau = \{B \subseteq Y : p^{-1}(B) \in \tau\}$$

es una topología sobre Y. En este caso, $p_*\tau$ se denomina topología de identificación sobre Y, determinada por τ y p. El respectivo par $(Y, p_*\tau)$ recibe el nombre de espacio identificación, y la función $p : (X,\tau) \longrightarrow (Y, p_*\tau)$
Esto significa, por tanto, que $i_*\tau$. es la topología más grande (en el sentido de la inclusión de conjuntos) respecto a la función sobreyectiva $p : (X,\tau) \longrightarrow (Y, p_*\tau)$ es continua.

DEFINICIÓN B.3. ***(Espacios Cocientes)*** *Sea (X,τ) un espacio topológico y $\sim$ sobre X.El conjunto cociente resultante, denotado por $X/\sim$, puede ser visto* *como un espacio identificación, considerando para ello la función*

$$q : X \longrightarrow X/\sim$$

que cada $x \in X$ *le asocia la clase de equivalencia*

$$q(x) = \{y \in X : x \sim y\} \equiv [x].$$

El espacio identificación $(X/\sim, q_*\tau)$ *es llamado espacio cociente de* X*módulo* $\sim$*, y la respectiva función identificación* $q : (X, \tau) \longrightarrow (X/\sim, q_*\tau)$ *es llamada función cociente.*

Bibliografía

[1] Ellis, E. (2007). *Tesis:"K-teoría algebraica y la construcción + de Quillen"*. Sustentado para obtener el grado de Doctor en Matemática.Valladolid, España.

[2] Goerss, P. G. y Jardine, J. F. (1999). *Simplicial homotopy theory* (1^{da} Ed. Vol 2). Progress in Mathematics (Boston, Mass):Birkhäuser Verlag AG.

[3] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology.* (1^{da} Ed. Vol 2). Noida, India: Cambridge University Press.

[4] May, J. P. (1992). *Simplicial objects in algebraic topology.* (2^{da} Ed. Vol 3). Chicago: The University of Chicago Press. Chicago Lectures in Mathematics.

[5] Kervaire, M. (1969). *Smooth homology spheres and their fundamental groups.* Trans. Amer. Math. Soc. 144. pp. 67-72.

[6] Loday, J-L. (1976). *K-théorie algébrique et représentations de groupes.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. vol 9(4). pp. 309-377.

[7] Munkres, J. R. (2000). *Topology.* (2^{nd} Ed.). Massachusetts Institute of Technology. Prentice Hall.

[8] Quillen, D. (1973). *Cohomology of groups.* Actes Congrès Internat. Math. 2. Gauthier-Villars. pp. 47–51.

[9] Rosenberg, J. (1994).*Algebraic K-theory and its applications.* Graduate Texts in Mathematics. 147. New York, Springer-Verlag.

[10] Shah, S.(2012) *The Quillen plus-construction in algebraic K- theory* http://www.staff.science.uu.nl/ henri105/Seminars/AlgKthy2011Talk9.pdf.

TESIS FINAL

Rubén Esteban Burga Barboza
DNI:16761647
Asesor

INFORME DE ORIGINALIDAD

17%	16%	2%	2%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	www.iam.conicet.gov.ar Fuente de Internet	2%
2	ri.ues.edu.sv Fuente de Internet	2%
3	mate.dm.uba.ar Fuente de Internet	1%
4	hdl.handle.net Fuente de Internet	1%
5	www.yumpu.com Fuente de Internet	1%
6	cms.dm.uba.ar Fuente de Internet	1%
7	www.ehu.eus Fuente de Internet	1%
8	www.repositorio.unach.mx:8080 Fuente de Internet	1%
9	mat.ufcg.edu.br Fuente de Internet	1%

Rubén Esteban Burga Barboza
DNI:16761647
Asesor

10	www.ehu.es Fuente de Internet	1 %
11	cybertesis.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	1 %
12	repositorio.unp.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
13	repositorio.unican.es Fuente de Internet	<1 %
14	www.um.es Fuente de Internet	<1 %
15	kupdf.net Fuente de Internet	<1 %
16	investigacion.unirioja.es Fuente de Internet	<1 %
17	Submitted to Universidad de Oviedo Trabajo del estudiante	<1 %
18	docplayer.es Fuente de Internet	<1 %
19	epdf.pub Fuente de Internet	<1 %
20	Progress in Mathematics, 1996. Publicación	<1 %
21	ciencias.bogota.unal.edu.co Fuente de Internet	<1 %

22	uvadoc.uva.es Fuente de Internet	<1 %
23	pt.scribd.com Fuente de Internet	<1 %
24	folk.ntnu.no Fuente de Internet	<1 %
25	www.matcuer.unam.mx Fuente de Internet	<1 %
26	repositorio.ufscar.br Fuente de Internet	<1 %
27	www.scribd.com Fuente de Internet	<1 %
28	www.unirioja.es Fuente de Internet	<1 %
29	www.math.cornell.edu Fuente de Internet	<1 %
30	www.personal.psu.edu Fuente de Internet	<1 %
31	en.wikipedia.org Fuente de Internet	<1 %
32	Submitted to Jyväskyla University Trabajo del estudiante	<1 %
33	www.math.uni-bonn.de Fuente de Internet	<1 %

Rubén Esteban Burga Barboza
DNI:16761647
Asesor

Rubén Esteban Burga Barboza
DNI:16761647
Asesor

34	Submitted to University of Oxford Trabajo del estudiante	<1 %
35	zaguan.unizar.es Fuente de Internet	<1 %
36	Ross Geoghegan. "Topological Methods in Group Theory", Springer Nature, 2008 Publicación	<1 %
37	Submitted to Pontificia Universidad Catolica del Peru Trabajo del estudiante	<1 %
38	Submitted to University of Edinburgh Trabajo del estudiante	<1 %
39	HeeSook Park. "Free Groups in the Second Bounded Cohomology", Communications in Algebra, 2012 Publicación	<1 %
40	matematicas.uam.es Fuente de Internet	<1 %
41	treccani.it Fuente de Internet	<1 %
42	Submitted to The University of Manchester Trabajo del estudiante	<1 %
43	Submitted to University of Kent at Canterbury Trabajo del estudiante	<1 %

44	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo Trabajo del estudiante	<1 %
45	web.ujat.mx Fuente de Internet	<1 %

Rubén Esteban Burga Barboza
DNI:16761647
Asesor

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 15 words
Excluir bibliografía	Activo		

CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, Rubén Esteban Burga Barboza, usuario revisión del documento titulado: La construcción + de Quillen.

Cuyo autor es, Gersson Daniel Sánchez Mejía identificado con documento de identidad 45497432; declaro que la evaluación realizada por el Programa informático, ha arrojado un porcentaje de similitud de 17%, verificable en el Resumen de Reporte autorizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizo dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud no constituye plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el recibo digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque,16 de Marzo del 2023

………………………………………………………………

Rubén Esteban Burga Barboza

DNI: 16761647

ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO
Ciudad Universitaria - Lambayeque

ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL N° 025-2023-D/FACFyM

Siendo las 04:00 pm del día 12 de junio del 2023, se reunieron vía plataforma virtual, https://meet.google.com/vhb-ncwk-egz, los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada:

"La construcción + de Quillen"

Designados por Resolución N°1594-2018-D/FACFyM de fecha 14 de diciembre de 2018 con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la Tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

Dr. Lic. Mat. Leandro Agapito Aznarán Castillo	Presidente
Dr. Lic. Mat. Marco Antonio Martín Peralta Lui	Secretario
M.Sc. Betty Rimarachín López	Vocal

La tesis fue asesorada por el Dr. Lic. Mat Rubén Esteban Burga Barboza, nombrado por Resolución N° 928-2018-D/FACFyM de fecha 8 de agosto de 2018.

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N° 458-2023-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 7 de junio de 2023. La Tesis fue presentada y sustentada por el Bachiller Gersson Daniel Sánchez Mejía, y tuvo una duración de 1 hora y 12 minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de 18 (dieciocho) en la escala vigesimal, mención Muy Bueno.

Por lo que queda apto para obtener el Título Profesional de **Licenciado en Matemáticas** de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Siendo las 05:20 pm se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

Dr. Lic. Mat. Leandro Agapito Aznarán Castillo
Presidente

Dr. Lic. Mat. Marco Antonio Martín Peralta Lui
Secretario

M.Sc. Betty Rimarachín López
Vocal

Dr. Lic. Mat. Rubén Esteban Burga Barboza
Asesor