



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**Existencia de un Equilibrio Eficiente para Economías de
Intercambio Puro Utilizando el Teorema de Hahn-Banach**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN
MATEMÁTICAS**

AUTORES

BACH.MAT. DEYSI MARISOL ZEÑA ZEÑA

BACH.MAT. JOSÉ LUIS TANTAJULCA MESONES

ASESOR

DR. ELMER LLUEN CUMPA

LAMBAYEQUE-PERÚ

2015


UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “Existencia de un Equilibrio Eficiente para Economías de Intercambio Puro Utilizando el Teorema de Hahn-Banach”. Presentada por el Bach. Mat. Deysi Marisol Zeña Zeña y por el Bach. Mat. José Luis Tantajulca Mesones, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática.



Dr. Gonzalo Paredes Tirado

Presidente del Jurado



Mg. Adelmo Perez Herrera

Secretario del Jurado



Dr. Raúl Reupo Vallejos

Vocal del Jurado

Fecha de defensa: 23 de septiembre de 2015

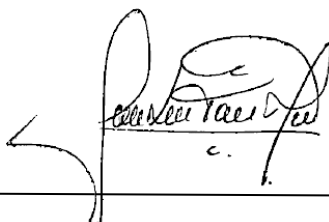
UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**Existencia de un Equilibrio Eficiente para Economías de
Intercambio Puro Utilizando el Teorema de Hahn-Banach**



Bach.Mat. Deysi Marisol Zeña Zeña

Autora



Bach.Mat. José Luis Tantajulca Mesones

Autor



Lic. Mat. Elmer Lluen Cumpa

Asesor

LAMBAYEQUE-PERÚ

2015



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO
Ciudad Universitaria - Lambayeque



ACTA DE SUSTENTACION N° 094-2015-D/FACFyM
(Sustentación Autorizada por Resolución N° 1193-2015-D/FACFyM)

En la ciudad de Lambayeque, siendo las... 9.10 am... del
día... 23 de Septiembre del 2015... se reunieron en
la Sala de Sustentaciones de la FACFyM... los miembros del
Jurado designados mediante Resolución N° 735-2013-D/FACFyM, los docentes:

Mg. Gonzalo Paredes Tirado	Presidente
Mg. Adelmo Pérez Herrera	Secretario
Mg. Raúl Eduardo Reupo Vallejos	Vocal

Para recibir el trabajo de tesis titulado:

"Existencia de un Equilibrio Eficiente para Economías de
Intercambio Puro Utilizando el Teorema de Hahn-Banach"

desarrollado por los Bachilleres en Matemáticas, Zeña Zeña Deysi Marisol y Tantajulca
Mesones José Luis.

Después de escuchar la exposición y las respuestas a las preguntas formuladas por los
miembros del Jurado, se acordó... APROBAR... el trabajo
por... UNAUNIMIDAD... con el calificativo de... BUENO...

En consecuencia, los Bachilleres en referencia quedan aptos para recibir el Título Profesional
de Licenciado en Matemáticas, de acuerdo a la Ley Universitaria, el Estatuto y Reglamento
de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Lambayeque.

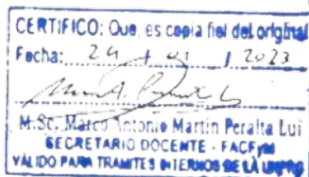
Observaciones:

Para constancia del hecho firman.

Mg. Gonzalo Paredes Tirado
Presidente

Mg. Adelmo Pérez Herrera
Secretario

Mg. Raúl Eduardo Reupo Vallejos
Vocal





CONSTANCIA DE SIMILITUD N° 001-2024- VIRTUAL-UI-FACFyM

El que suscribe, director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, hace constar:

Que, la Bachiller **ZEÑA ZEÑA DEYSI MARISOL**, de la Escuela Profesional de **MATEMÁTICA**, ha cumplido con presentar la **SIMILITUD DE ORIGINALIDAD DE LA TESIS (TURNITIN)**, como requisito indispensable para la sustentación de la tesis, según detalle:

- **TÍTULO DE LA TESIS:** “EXISTENCIA DE UN EQUILIBRIO EFICIENTE PARA ECONOMÍAS DE INTERCAMBIO PURO UTILIZANDO EL TEOREMA DE HAHN-BANACH”

- **ÍNDICE DE SIMILITUD:** 16%

- **ASESOR:** Dr. Elmer Lluen Cumpa

Se expide la presente constancia, para la tramitación del Título Profesional, dispuesto en la Directiva para la evaluación de originalidad de los documentos académicos, de investigación formativa y para la obtención de Grados y Títulos de la UNPRG.

Lambayeque, 23 de enero de 2024

Dr. WALTER ARRIAGA DELGADO
DIRECTOR - UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



CONSTANCIA DE SIMILITUD N° 002-2024- VIRTUAL-UI-FACFyM

El que suscribe, director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, hace constar:

Que, el Bachiller **TANTAJULCA MESONES JOSE LUIS**, de la Escuela Profesional de **MATEMÁTICA**, ha cumplido con presentar la **SIMILITUD DE ORIGINALIDAD DE LA TESIS (TURNITIN)**, como requisito indispensable para la sustentación de la tesis, según detalle:

- **TÍTULO DE LA TESIS:** “EXISTENCIA DE UN EQUILIBRIO EFICIENTE PARA ECONOMÍAS DE INTERCAMBIO PURO UTILIZANDO EL TEOREMA DE HAHN-BANACH”

- **ÍNDICE DE SIMILITUD:** 16%

- **ASESOR:** Dr. Elmer Lluen Cumpa

Se expide la presente constancia, para la tramitación del Título Profesional, dispuesto en la Directiva para la evaluación de originalidad de los documentos académicos, de investigación formativa y para la obtención de Grados y Títulos de la UNPRG.

Lambayeque, 23 de enero de 2024

Dr. WALTER ARRIAGA DELGADO
DIRECTOR - UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

DEDICATORIA

Primero, queremos expresar nuestra gratitud a Dios por sus bendiciones y guía. También agradecemos a nuestras familias por su incansable esfuerzo, y a la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo por brindarnos la oportunidad de aprender y desarrollarnos profesionalmente en sus instalaciones. De igual manera, extendemos nuestro agradecimiento a nuestros profesores, quienes han contribuido significativamente a nuestra educación durante nuestro tiempo en la universidad.

AGRADECIMIENTOS

Con profundo afecto, dedicamos este trabajo a nuestros padres, cuya fe en nosotros y constante apoyo nos han brindado ejemplos inspiradores de superación y dedicación. Es gracias a ellos, en gran medida, que hemos logrado alcanzar nuestras metas. Este logro es para ellos, en reconocimiento a su valor y las fortalezas que admiramos.

Extendemos también nuestra gratitud a nuestros maestros, quienes han sido guías esenciales en nuestro camino por la vida. Sus enseñanzas y experiencias han sido fundamentales en moldearnos como individuos íntegros y preparados para enfrentar los desafíos de la vida. A ellos les dedicamos cada página de esta tesis, como un tributo a su invaluable influencia.

RESUMEN

En la presente investigación, se realizó una revisión bibliográfica sobre el estudio de la existencia de un equilibrio eficiente en Economías de Intercambio Puro, donde solo intervienen bienes y consumidores, sin la participación de productores. En el desarrollo de esta tesis, se siguió la línea de Elvio Accinelli, pero se profundizó más en las demostraciones de los resultados que él expone en su texto "Elementos de Topología y de la Teoría de Conjuntos en la Teoría del Equilibrio General". Específicamente, se abordaron con mayor detalle los resultados que establecen las condiciones para la existencia del equilibrio Walrasiano y del óptimo en el sentido de Pareto. Se presentaron ejemplos detallados para las definiciones, facilitando así la comprensión del lector sobre la teoría expuesta en el trabajo. Además, se incluyeron demostraciones de teoremas fundamentales como el punto fijo de Brouwer y el teorema de Hahn Banach, así como la aplicación del teorema de Hahn Banach en su forma geométrica para demostrar el llamado segundo teorema del bienestar.

Palabras clave: Teoría de equilibrio, teorema de punto fijo, teorema de Hahn Banach.

ABSTRACT

In the present research, a bibliographic review was conducted on the study of the existence of an efficient equilibrium in Pure Exchange Economies, where only goods and consumers are involved, without the participation of producers. In the development of this thesis, the approach of Elvio Accinelli was followed, but there was a deeper focus on the demonstrations of the results he presents in his text "Elements of Topology and Set Theory in the Theory of General Equilibrium". Specifically, the results that establish the conditions for the existence of the Walrasian equilibrium and the Pareto optimum were addressed in greater detail. Detailed examples were presented for the definitions, thus facilitating the reader's understanding of the theory expounded in the work. In addition, demonstrations of fundamental theorems such as Brouwer's fixed point theorem and the Hahn Banach theorem were included, as well as the application of the Hahn Banach theorem in its geometric form to demonstrate the so-called second welfare theorem.

Keywords: Equilibrium theory, fixed point theorem, Hahn Banach theorem.

INTRODUCCIÓN

En la tesis que se analizó, se llevó a cabo una revisión bibliográfica enfocada en el estudio de la existencia de un equilibrio eficiente en Economías de Intercambio Puro, un tipo de economía donde solo intervienen los bienes y los consumidores, excluyendo la participación de los productores. Este enfoque es relevante en el campo de la economía teórica, ya que proporciona una comprensión más profunda de cómo los mercados pueden funcionar en condiciones ideales. El trabajo siguió la línea de investigación establecida por Elvio Accinelli. Sin embargo, se distinguió por una profundización en las demostraciones de los resultados que Accinelli presenta en su obra "Elementos de Topología y de la Teoría de Conjuntos en la Teoría del Equilibrio General". Esta profundización es significativa, ya que aporta claridad y comprensión a conceptos complejos en la teoría del equilibrio económico. En particular, la tesis abordó con mayor detalle los resultados relacionados con las condiciones necesarias para la existencia del equilibrio Walrasiano y del óptimo en el sentido de Pareto. Estos conceptos son cruciales en la economía del bienestar y la teoría del equilibrio general, ya que proporcionan un marco para entender cómo se pueden asignar recursos de manera eficiente y equitativa en una economía.

Además, la tesis destacó por presentar ejemplos detallados para las definiciones teóricas, lo que facilita la comprensión de los lectores. Esta aproximación práctica es particularmente útil en un campo tan abstracto como la teoría del equilibrio general. Otro aspecto notable de la tesis fue la inclusión de demostraciones de teoremas fundamentales como el punto fijo de Brouwer y el teorema de Hahn Banach, así como la aplicación del teorema de Hahn Banach en su forma geométrica en la demostración del segundo teorema del bienestar. Estos teoremas son piedras angulares en la matemática económica, y su aplicación en este contexto proporciona una base sólida para los argumentos teóricos presentados. Por lo tanto, la tesis representó una contribución valiosa al estudio de la teoría del equilibrio general, destacando por su enfoque detallado en la demostración de conceptos complejos y la aplicación práctica de teoremas matemáticos en la economía.

La tesis se divide en tres capítulos:

En el capítulo 1, Se estudió conjuntos, preferencias, convexidad de preferencias, continuidad de preferencias, representación de preferencias y espacios topológicos.

En el capítulo 2, se estudió el equilibrio walrasiano, elementos maximales de una preferencia, conjuntos compactos, existencia y unicidad maximal, funciones de demanda, la función exceso de demanda y existencia del equilibrio Walrasiano.

En el capítulo 3, se estudió el óptimo de Pareto y los teoremas del bienestar. Además las conclusiones y referencias.

Índice General

RESUMEN	iii
ABSTRACT	iv
INTRODUCCIÓN	v
Capítulo 1: Base Teórica	1
1.1. Conjuntos	2
1.1.1. Idea de Conjunto	3
1.1.2. Relaciones binarias	4
1.1.3. Relaciones de equivalencia y particiones	5
1.2. Preferencias	6
1.3. Convexidad de las preferencias	11
1.4. Continuidad de las preferencias	13
1.5. Representación de preferencias por funciones	17
1.6. Espacios topológicos	21
Capítulo 2: Equilibrio Walrasiano	27
2.1. Elementos maximales de una preferencia: La demanda	27
2.2. Conjuntos Compactos	29
2.3. Existencia y unicidad del maximal	30
2.4. Funciones de demanda	32
2.4.1. Región presupuestaria	33
2.4.2. Propiedades de la demanda	38
2.4.3. Continuidad de la función demanda	39
2.4.4. La demanda agregada y el agente representativo	41
2.5. La Función Exceso de Demanda	42

2.5.1. Propiedades de la función exceso de demanda.....	43
2.5.2. Equilibrio competitivo y el Teorema del punto Fijo de Brouwer	44
2.5.3. Teorema del punto Fijo de Brouwer	44
2.6. Existencia del Equilibrio Walrasiano	53
Capitulo 3: Asignaciones Pareto Optimales	56
3.1. Óptimo de Pareto	56
3.1.1. El Lema de Zorn	57
3.1.2. Existencia del Óptimo de Pareto	58
3.2. Teoremas del bienestar.....	59
3.2.1. Primer Teorema del bienestar	60
3.2.2. El Teorema de Hahn-Banach	61
3.2.3. Segundo Teorema del bienestar	70
CONCLUSIONES	75
REFERENCIAS.....	76

Capítulo 1: Base Teórica

En este capítulo, se realizará una revisión rápida de las definiciones y resultados fundamentales de la teoría económica y matemática. Este repaso es esencial para facilitar una mejor comprensión de la teoría más avanzada que se desarrollará en el capítulo siguiente. Se comenzará introduciendo definiciones clave de la teoría económica.

Definición 1.1 (Agentes Económicos): Son individuos o entidades, como personas u organizaciones, que ofrecen o consumen productos y servicios, generando un intercambio de riqueza.

Definición 1.2 (Mercado): Se refiere al grupo de individuos y organizaciones involucrados en la compra, venta o uso de bienes y servicios.

Definición 1.3 (Economía): Compuesta por los distintos agentes económicos que operan dentro de un mercado..

Definición 1.4 (Bienes): Objetos físicos que pueden satisfacer necesidades humanas debido a sus propiedades.

Definición 1.5 (Servicios): Actividades realizadas para satisfacer las necesidades de clientes o individuos.

Definición 1.6 (Canastas de Consumo): Conjunto de bienes y servicios seleccionados para su consumo.

Definición 1.7 (Preferencias): Criterios utilizados para evaluar y priorizar diferentes combinaciones de bienes en las canastas de consumo según su nivel de satisfacción.

Definición 1.8 (Agente económico racional): Según Krugman y Wells en "Economics", es un consumidor que entiende claramente sus deseos y aprovecha al máximo las oportunidades disponibles.

Definición 1.9 (Consumidor): Un agente económico racional que decide comprar ciertos bienes, basándose en sus preferencias, a un precio fijo y con un presupuesto limitado.

Definición 1.10 (Economía de intercambio puro): Tipo de economía donde solo intervienen bienes y consumidores, sin la presencia de empresas productoras. Un ejemplo son las comunidades andinas que intercambian bienes entre sí sin la intervención de empresas. Este tipo de economía es importante para el desarrollo nacional, ya que su desaparición podría causar migración masiva hacia ciudades costeras, generando problemas sociales y económicos (Romero, 2002)

.

1.1. Conjuntos

Esta sección se enfoca en demostrar cómo se puede organizar un conjunto arbitrario utilizando el concepto de relación binaria como herramienta clave. Se hará una conexión entre este tipo de ordenamiento y la manera en que un agente económico realiza selecciones entre diversas canastas de consumo según sus preferencias. Al asumir que el agente actúa racionalmente al elegir, se establece un orden en su espacio de consumo, que comprende el conjunto de canastas de bienes a su alcance.

Exploraremos cómo las relaciones binarias que crean un preorden en un espacio abstracto están vinculadas con las preferencias de cada agente, las cuales a su vez organizan su espacio de consumo. Empezaremos con el concepto de preferencias para entender cómo funcionan en el contexto de una economía.

1.1.1. Idea de Conjunto

Partiremos de la premisa de que existe, como mínimo, un conjunto no vacío, al cual nos referiremos con la letra A . Esto implica la presencia de una serie de objetos y una norma específica que determina si un objeto dado, denominado x , es o no parte de este conjunto. Utilizaremos la notación $x \in A$ para indicar que el objeto x es un elemento del conjunto A . Si es útil para nuestra comprensión, podemos considerar este conjunto como el grupo de bienes entre los cuales un agente específico realiza su elección.

“Partiremos de los siguientes axiomas:

1. **Axioma de Unicidad:** Si los conjuntos A y B tienen los mismos elementos, entonces son idénticos, es decir, $A = B$ si y solamente si cada vez que $x \in A$ entonces $x \in B$ y recíprocamente.
2. **Axioma de Unión:** Dados dos conjuntos A y B existe un conjunto que tiene todos los elementos de A o todos los de B y ningún otro, lo representamos por $A \cup B$.
3. **Axioma de Diferencia:** Para dos conjuntos cualesquiera A y B siempre existe otro que contiene los elementos de A que no están en B : Este conjunto sería representado por $A - B$.
4. **Axioma de Existencia:** Existe al menos un conjunto no vacío.

Se define la intersección de conjuntos, que se denota por $A \cap B$, como la diferencia entre los conjuntos A y $A - B$ es decir $A \cap B = A - (A - B)$, por lo que no hay necesidad de axiomatizar la existencia de la intersección de dos conjuntos A y B .

Llamaremos **producto cartesiano** $A \times B$ al conjunto de pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

Ejemplo 1.1. “Dado el siguiente cuadro de las opciones de compra de los productos: arroz y azúcar”.

	Cantidad de azúcar en kg	Cantidad de arroz en kg
Opción 1	$\frac{1}{2}$	5
Opción 2	1	4
Opción 3	1	11
Opción 4	5	5
Opción 5	5	12
Opción 6	12	5
Opción 7	1	7

Si se denota por $A = \text{Cantidad de azúcar en kg}$, $B = \text{Cantidad de arroz en kg}$ y si denota por X al conjunto formado por todas las opciones de compra se tiene que

$$X = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 5 \right), (1, 4), (1, 11), (5, 5), (5, 12), (12, 5), (1, 7) \right\} \subset A \times B. \blacksquare$$

1.1.2. Relaciones binarias

Con objeto de definir en un conjunto cualquiera una relación de orden introduciremos a seguir, “relación binaria.

Definición 1.1.2.1 (Relación Binaria): Una **relación binaria** en $A \times B$ es cualquier subconjunto de $A \times B$.

Una relación binaria ψ quedara entonces determinada si tenemos regla de correspondencia que nos permita decidir si dada una pareja (a, b) ella pertenece o no al subconjunto que define la relación ψ .

Ejemplo 1.2. Considerando el ejemplo 1.1. Defínase $\psi = \{(a, b) \in A \times B : a = 1\}$ es una relación binaria en $A \times B$ explícitamente se tiene que

$$\psi = \{(1,4), (1,11), (1,7)\} \subset A \times B". \blacksquare$$

Definición 1.1.2.2 (Preorden): Una relación binaria \succsim en $X \times X$ es un **preorden** en X si ella es:

- Reflexiva, si $(a, a) \in \succsim \quad \forall a \in X$.
- Transitiva, si $(a, b) \in \succsim \wedge (b, c) \in \succsim$ entonces $(a, c) \in \succsim \quad \forall a, b, c \in X$.

Definición 1.1.2.3 Diremos que una relación es **completa**, si para todo $a, b \in X$ se verifica que:

$$(a, b) \in \succsim \text{ o } (b, a) \in \succsim$$

Cuando un **preorden** es **completo**; diremos simplemente **preorden completo**.

1.1.3. Relaciones de equivalencia y particiones

“Una relación binaria ψ en $X \times X$, define una **relación de equivalencia** si y solamente si satisface las siguientes propiedades:

1. Reflexiva, si $(a, a) \in \psi, \forall a \in X$.
2. Transitiva, si $(a, b) \in \psi \wedge (b, c) \in \psi$, entonces $(a, c) \in \psi$.
3. Simétrica, si $(a, b) \in \psi$, entonces $(b, a) \in \psi$

Diremos que una relación binaria ψ es **Antisimétrica**, si cada vez que $(x, y) \in \psi \wedge (y, x) \in \psi$. Entonces $x = y$.

Entenderemos como **Orden** en un conjunto a una relación ψ : que es reflexiva, transitiva y Antisimétrica.

Definición 1.1.3.1 (Relación de Equivalencia): Una **relación de equivalencia** ψ divide al conjunto en clases disjuntas tales que la unión de ellas es todo el conjunto. Estas clases se llaman **clases de equivalencia** cada una de ellas queda definida a partir de un elemento arbitrario a de X ; siendo la clase de a , el conjunto de todos los elementos de X que están en relación con a , es decir $I_a = \{x \in X: (x, a) \in \psi\}$.

En la siguiente sección, como mencionamos en la parte introductoria de esta tesis, redefiniremos las preferencias de un consumidor.

1.2. Preferencias

El agente económico debe seleccionar bienes dentro de lo que llamaremos su conjunto de consumo (conjunto de opciones de compra, es decir su plan de consumo) al que representaremos por X . Es decir las preferencias es una forma de ordenación del “gusto” del consumidor.

Ejemplo 1.2.1: Sea X definida como en el ejemplo 1.1 es decir

$$X = \{(1/2, 5), (1, 4), (1, 11), (5, 5), (5, 12), (12, 5), (1, 7)\}$$

Es el espacio de consumo de un consumidor de azúcar y arroz. ■

En este espacio de consumo las **preferencias** del agente, a las que representaremos por \succsim ; introducen un preorden completo.

Definición 1.2.1: Una **preferencias** \succsim es una relación binaria sobre $X \times X$.

Ejemplo 1.2.2: Sea X como en el ejemplo 1.2.1 es decir:

$$X = \{a_1 = (1/2, 5), a_2 = (1, 4), a_3 = (1, 11), a_4 = (5, 5), a_5 = (5, 12), a_6 = (12, 5), a_7 = (1, 7)\}$$

El consumidor tiene preferencia sobre aquellas canastas que contengan exactamente 1 kg de azúcar, luego este consumidor define sobre $X \times X$ la siguiente relación

$$\succsim = \{(a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_7), (a_3, a_2), (a_3, a_3), (a_3, a_7), (a_7, a_2), (a_7, a_3), (a_7, a_7)\}. \blacksquare$$

Nos interesa limitar nuestro estudio a un tipo de preferencias particulares que llamaremos **preferencias racionales**, formalmente se tiene la siguiente definición”.

Definición 1.2.2: Se dice que una preferencia \succsim es **racional**, si ella es **completa, reflexiva y transitiva**, es decir \succsim es un preorden completo.

Ejemplo 1.2.3: “Si se tienen dos canastas cada una, con dos tipos de bienes (azúcar y arroz), digamos que, la primera canasta contiene 10 kilos de arroz y 10 kilos de azúcar, mientras que la segunda canasta contiene 5 kilos de arroz y 7 kilos de azúcar, si ambas canastas tienen el mismo precio, lógicamente un consumidor elegirá la primera canasta, este ejemplo se escribe en términos matemáticos como sigue.

1. Sea $X = \mathbb{R}_+^2$, escribimos: $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 \geq y_1$

Demostración, Sean $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2); z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^2$

Reflexividad, como $x_1 \in \mathbb{R} \rightarrow$ por reflexividad de \geq en \mathbb{R} : $x_1 \geq x_1$

De donde: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (x_1, x_2)$

Transitividad, supongamos $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \succcurlyeq (z_1, z_2)$, de donde:

$$x_1 \geq y_1 \wedge y_1 \geq z_1 \rightarrow x_1 \geq z_1$$

$$\rightarrow (x_1, x_2) \succcurlyeq (z_1, z_2)$$

Complejitud, sean $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 \rightarrow x_1 \geq y_1 \vee y_1 \geq x_1$

$$\rightarrow (x_1, y_1) \succcurlyeq (y_1, y_2) \vee (y_1, y_2) \succcurlyeq (x_1, x_2)". \blacksquare$$

El siguiente ejemplo es llamado el orden lexicográfico, este tiene que ver con el orden en que se busca una palabra en el diccionario, por ejemplo, las palabras “pericote” y “periscopio”, coinciden hasta la silaba “peri” pero como la letra “c” esta antes que la letra “s”, entonces en el diccionario primero aparece la palabra “pericote” antes que la palabra “periscopio”. Lo anterior se formaliza matemáticamente en el siguiente ejemplo.

2. Sea $X = \mathbb{R}_+^2$, escribimos: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)$.

Demostración, Sean $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2); z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^2$

Reflexividad, Denotemos $F = \text{falsedad}; P = \text{proposición}$; como $x_2 \in \mathbb{R} \rightarrow$
por reflexividad de \leq en \mathbb{R} : $x_2 \leq x_2$

Y por reflexividad de la igualdad en \mathbb{R} : $x_1 = x_1$, y como: $F \vee P \equiv P$

$$\rightarrow x_1 < x_1 \vee P \equiv P$$

Si definimos: $P: (x_1 = x_1 \wedge x_2 \leq x_2)$

$$\rightarrow x_1 < x_1 \vee (x_1 = x_1 \wedge x_2 \leq x_2) \equiv (x_1 = x_1 \wedge x_2 \leq x_2)$$

De donde: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (x_1, x_2)$

Transitividad, supongamos: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \succcurlyeq (z_1, z_2)$, de donde:

$$[x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)] \wedge [y_1 < z_1 \vee (y_1 = z_1 \wedge y_2 \leq z_2)]$$

$$\rightarrow [x_1 < y_1 \wedge y_1 < z_1] \vee [x_1 < y_1 \wedge (y_1 = z_1 \wedge y_2 \leq z_2)] \vee$$

$$\vee [(x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \wedge y_1 < z_1] \vee [(x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \wedge (y_1 = z_1 \wedge y_2 \leq z_2)]$$

$$\rightarrow [x_1 < y_1 \wedge y_1 < z_1] \vee [x_1 < z_1 \wedge y_2 \leq z_2] \vee [x_1 < z_1 \wedge x_2 \leq y_2] \vee$$

$$\vee [(x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \wedge (y_1 = z_1 \wedge y_2 \leq z_2)]$$

$$\rightarrow [x_1 < z_1] \vee [(x_1 < z_1) \vee (y_2 \leq z_2 \wedge x_2 \leq y_2)] \vee [(x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \wedge (y_1 = z_1 \wedge y_2 \leq z_2)]$$

$$\rightarrow [x_1 < z_1] \vee [(x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \wedge (y_1 = z_1 \wedge y_2 \leq z_2)]$$

$$\rightarrow (x_1 < z_1) \vee x_1 = z_1 \wedge x_2 \leq z_2$$

De donde: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (z_1, z_2)$

Antisimétrica, supongamos: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \succcurlyeq (x_1, x_2)$, de donde:

$$[x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)] \wedge [y_1 < x_1 \vee (y_1 = x_1 \wedge y_2 \leq x_2)]$$

$$\rightarrow [(x_1 < y_1) \wedge (y_1 < x_1)] \vee [(x_1 < y_1) \wedge (y_1 = x_1 \wedge y_2 \leq x_2)] \vee$$

$$\vee [(x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \wedge y_1 < x_1] \vee [(x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \wedge (y_1 = x_1 \wedge y_2 \leq x_2)]$$

Pero:

- $[(x_1 < y_1) \wedge (y_1 < x_1)] \equiv \text{Contradicción}$
- $[(x_1 < y_1) \wedge (y_1 = x_1 \wedge y_2 \leq x_2)] = x_1 < y_1 \wedge y_1 = x_1 \wedge y_2 \leq x_2 \equiv \text{Contradicción.}$
- $[(x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \wedge y_1 < x_1] = x_1 = y_1 \wedge y_1 < x_1 \wedge x_2 \leq y_2 \equiv \text{Contradicción.}$
- $[(x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2) \wedge (y_1 = x_1 \wedge y_2 \leq x_2)] = (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)$

De donde:

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

Por lo tanto \succsim es un orden completo, llamado **orden lexicográfico** ■

Canasta de bienes: “En esta tesis X el cual es el conjunto de consumo, es un subconjunto \mathbb{R}^l ; un elemento del conjunto X , se llama **canasta de bienes**, la cual se representará por $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)$, donde cada x_i es un real, si $X = \mathbb{R}_+^l$ entonces x_i será un real no negativo, que indica la cantidad del bien $i = 1, 2, \dots, l$ disponible en la canasta.

Ejemplo 1.2.1 Si se tiene una canasta conformada por dos bienes, azúcar y arroz y de cada bien se tiene 20 kg de arroz y 25 kg de azúcar, entonces esta canasta se representa por el vector $x = (20, 25)$. ■

Dadas dos canastas x e y ambas que pertenecientes al conjunto de consumo X , se sabe que el consumidor puede ordenarlas, según sea más **deseables o no** en el modo siguiente: El consumidor puede decidir que la canasta x es “estrictamente mejor” que la otra canasta y , o que le puede ser “indiferente” una canasta de la otra o por ultimo considerar que la

canasta x es “es tan buena como” la otra canasta y . Formalmente se tienen las siguientes definiciones:

Definición 1.2.3: La expresión “ x es al menos tan bueno como y ”, que se denota por $x \succsim y$, se define como sigue: $x \succsim y$ o bien $(x, y) \in \succsim$.

Definición 1.2.4: La expresión “ x es indiferente con y ”, que se denota por $x \sim y$, se define como sigue: $x \sim y \leftrightarrow (x, y) \in \succsim \wedge (y, x) \in \succsim$. Es decir ambas canastas satisfacen al consumidor.

Definición 1.2.4: Diremos que “ x es estrictamente preferido a y ”; lo que denotaremos por $x \succ y$, se define como sigue $x \succ y$; si $(x, y) \in \succsim$ pero no se cumple $(y, x) \in \succsim$.

Obsérvese que una relación de preferencia, define un orden completo sobre el espacio de las clases de indiferencia”.

1.3. Convexidad de las preferencias

Para establecer cuándo una combinación de dos canastas de consumo, ambas pertenecientes a la misma clase de indiferencia, es al menos tan preferible como cada una de ellas por separado, es esencial analizar los conjuntos convexos. En esencia, esta definición se centra en la característica de un conjunto según la cual, si se toman dos puntos cualesquiera dentro de él, el segmento de línea recta que los conecta (o su combinación convexa) también estará completamente incluido en el conjunto. “A continuación, se presenta una definición formal de este concepto.

Definición 1.3.1(Conjunto Convexo): Decimos que un conjunto X es **convexo** si y solamente si, para todo, $\lambda \in [0,1]$, siendo x e y elementos de X se cumple que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

Sea X convexo, decimos que una relación de preferencia \succsim sobre X es:

- **Convexa**, si cada vez que $x \succcurlyeq z$ e $y \succcurlyeq z$ y para todo $0 < \lambda < 1$ se tiene que: $\lambda x + (1 - \lambda)y \succcurlyeq z$.
- **Estrictamente Convexa**, si cada vez que $x \succcurlyeq z$ e $y \succcurlyeq z$ y para todo $0 < \lambda < 1$ se tiene que; $\lambda x + (1 - \lambda)y \succ z$.

La convexidad en las preferencias representa el gusto por la diversidad, dadas dos canastas cualesquiera en la misma clase de indiferencia, una combinación convexa de ellas es al menos tan buena como cada una de las anteriores para el agente con preferencias convexas, y estrictamente preferible para un agente con preferencias estrictamente convexas.

Ejemplo 1.3.1: La preferencia definida sobre $X = \mathbb{R}_+^2$, por: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 \geq y_1$ es convexa.

Demostración, sean $\lambda \in [0,1]$ y $(x_1, x_2) \succcurlyeq (z_1, z_2) \wedge (y_1, y_2) \succcurlyeq (z_1, z_2)$, de donde:

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (z_1, z_2) \leftrightarrow x_1 \geq z_1 \rightarrow \lambda x_1 \geq \lambda z_1$$

$$(y_1, y_2) \succcurlyeq (z_1, z_2) \leftrightarrow y_1 \geq z_1 \rightarrow (1 - \lambda)y_1 \geq (1 - \lambda)z_1$$

Luego: $\lambda x_1 \geq \lambda z_1 \wedge (1 - \lambda)y_1 \geq (1 - \lambda)z_1 \rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 \geq \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_1$

$$\rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 \geq z_1$$

$$\rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 \geq z_1 \rightarrow \lambda(x_1, x_2) + (1 - \lambda)(y_1, y_2) \succcurlyeq (z_1, z_2) \blacksquare$$

Un punto importante a resolver es el relacionado con las modificaciones en el comportamiento de un agente ocasionadas por modificaciones pequeñas en las canastas de bienes que le son ofrecidas. Supongamos que un agente prefiere estrictamente una canasta x a una canasta y : ¿Sera que si los componentes de x se modifican poco, la canasta x' conformada a partir de esta modificación seguirá siendo estrictamente preferida a la

canasta y? La respuesta depende ciertamente de las características de las preferencias y de lo que entendamos por pequeñas modificaciones.

Para responder en forma rigurosa a esta pregunta definiremos preferencias continuas en espacios topológicos. . A los efectos de hacer estas definiciones más intuitivas comenzaremos trabajando en espacios métricos, los que como veremos son un caso particular de los espacios topológicos.

Preferencias que impliquen comportamiento similar frente a modificaciones pequeñas de las canastas las llamaremos continuas. De éstas nos ocuparemos en las siguientes secciones.

1.4. Continuidad de las preferencias

La noción de distancia es la que nos permite decidir sobre la proximidad de distintos objetos. En nuestro caso la usaremos para definir lo que entenderemos por “proximidad” entre canastas de bienes. A efectos de ponernos de acuerdo sobre proximidades relativas entre elementos de un conjunto cualquiera precisaremos introducir una noción de distancia que nos sea común, esto lo haremos definiendo en un conjunto cualquiera X ; una función d a la que llamaremos métrica o distancia, y al par (X, d) lo llamaremos Espacio Métrico.

Definición 1.4.1 (Métrica y Espacio Métrico): Sea X es un conjunto cualquiera no vacío se dice que una función real $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, es una **métrica** sobre el conjunto X si satisface las siguientes condiciones:

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0$, si y solamente si $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$

Al par (X, d) se le llama **espacio métrico**.

Ejemplo 1.4.1: Sea $X = \mathbb{R}^n$ para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definamos $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, por $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$, no es difícil verificar que (\mathbb{R}^n, d) es un espacio métrico.

Demostración, ver [Munkres, pag. 122]

Volvamos ahora a las relaciones de preferencia, nuestro objetivo es analizar cuando dos canastas de bienes próximas en su composición lo están en los gustos del agente. Diremos que:

Definición 1.4.7 (Semicontinua Superior): Una preferencia es **semicontinua superior** si, $\forall x \in X \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto $S_x = \{y \in X: y \succsim x\}$ es cerrado.

La definición anterior implica que el complemento de S_x es abierto. Es decir que si un elemento $z \in X$ es tal que x es estrictamente preferido a z , entonces elementos próximos a z ; en el sentido de la métrica definida sobre X ; son estrictamente menos preferidos que x .

Ejemplo 1.4.2: Consideremos el conjunto de consumo para un consumidor formado por canastas que contienen arroz, azúcar y menestras, las cantidades de cada bien, expresadas en kilogramos, se muestran en la siguiente tabla.

	Arroz	Azúcar	Menestras
Canasta 1 = a	10	5	6
Canasta 2 = b	8	4	5
Canasta 3 = c	12	9	8

Del cuadro se observa que $a = (10, 5, 6), b = (8, 4, 5), c = (12, 9, 8)$, entonces el conjunto de consumo está formado por estas tres canastas, es decir:

$$X = \{a, b, c\}$$

Dotemos a X de la siguiente topología, $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$

Dadas dos canastas $x, y \in X$ diremos que $(x, y) \in \succsim \leftrightarrow x_i \geq y_i, i = 1, 2, 3$.

Consideremos la siguiente preferencia del consumidor sobre $X \times X$

$$\varphi = \{(a, a), (a, b), (c, a), (c, b)\} \subset X \times X$$

De donde

- i) $S_a = \{y \in X: y \succsim a\} = \{a, c\} = \{b\}^c$ entonces S_a es cerrado en τ .
- ii) $S_b = \{y \in X: y \succsim b\} = \{a, c\} = \{b\}^c$ entonces S_b es cerrado en τ .
- iii) $S_c = \{y \in X: y \succsim c\} = \emptyset = X^c$ entonces S_c es cerrado en τ .

De (i), (ii) e (iii) se sigue que φ satisface la condición de la definición de semicontinuidad superior, por lo tanto φ es semicontinua superior. ■

Definición 1.4.8 (Semicontinua Inferior): Una preferencia es **semicontinua inferior** si, $\forall x \in X \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto $L_x = \{y \in X: x \succ y\}$ es cerrado.

Análogamente, la definición anterior implica que el conjunto de las canastas de bienes estrictamente preferidas a x ; $\{y \in X: y \succ x\}$ es un conjunto abierto. Esto es si una canasta de bienes y es preferida a la canasta x entonces elementos en las proximidades de y seguirán siendo preferidas estrictamente a x .

Ejemplo 1.4.3: Sean X, τ, a, b, c y φ como en el ejemplo 1.4.2 entonces se tiene que.

- i) $L_a = \{y \in X: a \succcurlyeq y\} = \{a, b\} = \{c\}^c$ entonces L_a es cerrado en τ .
- ii) $L_b = \{y \in X: b \succcurlyeq y\} = \emptyset = X^c$ entonces L_b es cerrado en τ .
- iii) $L_c = \{y \in X: c \succcurlyeq y\} = \{a, b\} = \{c\}^c$ entonces L_c es cerrado en τ .

De (i), (ii) e (iii) se sigue que φ satisface la condición de la definición de semicontinuidad inferior, por lo tanto φ es semicontinua inferior. ■

Definición 1.4.9 (Preferencia Continua): Cuando una preferencia verifica ambas condiciones, es decir es semicontinua superior y semicontinua inferior, decimos que la preferencia es **continua**.

Ejemplo 1.4.4: Sean X, τ, a, b, c y φ como en el ejemplo 1.4.2 entonces por ejemplos 1.4.2 y 1.4.3 se tiene que φ es semicontinua superior y semicontinua inferior por lo tanto φ es una preferencia continua. ■

Sin embargo no todas las preferencias son continuas como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.5: El orden lexicográfico no es una preferencia continua.

Demostración, consideremos el caso cuando $X = \mathbb{R}_+^2, \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$, escribimos: $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)$. De donde:

$$S_x = \{\mathbf{y} \in X: \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}\} = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in X: x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)\}$$

Es claro, del gráfico que S_x no es un conjunto cerrado, puesto que si elegimos $r > d(z, FrS_x)$, entonces cualquier bola, con centro en un punto de $\mathbb{R}^n - S_x$ y radio r , no estará totalmente contenida en $\mathbb{R}^n - S_x$, luego $\mathbb{R}^n - S_x$ no es abierto, de donde S_x no es cerrado.

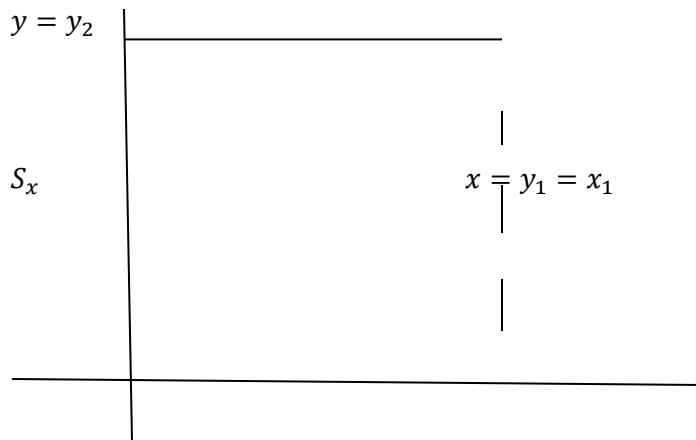


Gráfico del conjunto S_x

Luego \succsim no es preferencia semicontinua superiormente, por lo tanto \succsim no es una preferencia continua". ■

1.5. Representación de preferencias por funciones

La capacidad de expresar las preferencias mediante funciones amplía el uso de herramientas provenientes de la teoría de funciones y del análisis matemático en la teoría económica. Esto permite a la economía aprovechar un instrumento eficaz para abordar y resolver problemas específicos de su campo.

"Iniciaremos con la definición del concepto de función.

Definición 1.5.1: Sean A y B dos conjuntos. La correspondencia que asocia cada elemento $x \in A$ con un único elemento $f(x) \in B$ es llamada una función. Lo que escribiremos como

$$f: A \rightarrow B$$

El conjunto A es llamado **dominio** de la función f . Llamaremos **imagen** de f al subconjunto de B formado por aquellos $y \in B$ para los que existe $x \in A$ tales que $f(x) = y$. Decimos que una función f es de A en B si su dominio es A y su imagen es subconjunto de B . Si la imagen de f es todo B decimos que f es una función **sobre**.

Para $f: A \rightarrow B$ y $M \subset B$ definimos:

Definición 1.5.2 (Imagen Inversa): La imagen inversa de $M \subset B$, es el Conjunto preimagen de M , denotado por $f^{-1}(M)$, definido como:

$$f^{-1}(M) = \{x \in A: \exists b \in M, f(x) = b\}$$

Definición 1.5.3 (Función de Utilidad): Decimos que una preferencia es representable por una función $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ (a la que llamaremos función de **utilidad**) cuando:

$$x \succsim y \text{ si y solamente si } u(x) \geq u(y)$$

Una cuestión importante es la de obtener las condiciones que nos permitan tal representación.

Para ver que las cosas no son tan fáciles mostremos un contraejemplo, es decir mostremos que existen preferencias que no pueden ser representadas por funciones de utilidad. Para esto hablemos del orden lexicográfico ya considerado.

Antes recordamos que:

- $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice **monótona creciente** si y solamente si:

$$r \geq s \rightarrow f(r) \geq f(s); \forall r, s \in \mathbb{R}.$$

- $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice **creciente** si y solamente si:

$$r > s \rightarrow f(r) > f(s); \forall r, s \in \mathbb{R}.$$

Afirmación 1.5.1: El orden lexicográfico no puede ser representado por funciones de utilidad.

Demostración, Razonemos por el absurdo. Supongamos que existe una función $u: X = \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que representa al orden lexicográfico.

De acuerdo a las preferencias se tiene que: $(r, 1) \succ (r, 0)$ donde $r \in \mathbb{R}_+$; se sigue que $u(r, 1) > u(r, 0)$. Existe por lo tanto un racional $\phi(r)$ tal que $u(r, 1) > \phi(r) > u(r, 0)$: Sea ahora $r' > r$ se cumple que $u(r', 1) > \phi(r') > u(r', 0)$. Por lo tanto, como:

$$\phi(r') > u(r', 0) > u(r, 1) > \phi(r) \rightarrow \phi(r') > \phi(r)$$

Luego la función $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$, así definida es estrictamente creciente y por tanto inyectiva, lo que es un absurdo pues la cardinalidad de \mathbb{R}_+ es mayor que la de \mathbb{Q} . ■

Nota: Toda preferencia $\succsim \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ racional, continua y monótona es representable por una función de utilidad $u: \mathbb{R}_+^l \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Definición 1.5.3 (Continuidad de una Función): Sea $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ decimos que f es **continua** en $a \in (X, d)$ si para todo $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para todo $x \in (X, d)$:

$$d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Cada vez que: $d(x, a) < \delta$

Decimos que una función es **continua** en X si es continua para todo $a \in X$.

El siguiente teorema caracteriza a las funciones continuas en términos de abiertos, lo que nos va a permitir generalizar el concepto de continuidad a un conjunto de espacios más amplio que el de los Espacios Métricos, el de los llamados Espacios Topológicos.

Teorema 1.5.1: Sea $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$, f es continua en $x_0 \in X$ sí y solamente si para cada conjunto abierto O de Y , se tiene que $f^{-1}(O)$ es un subconjunto abierto de X .

Demostración, primero veamos la condición necesaria:

Dado O abierto y $x_0 \in f^{-1}(O)$, sea $y_0 = f(x_0)$ por la definición de continuidad, para $B(y_0, \varepsilon) \subset O$ existe $B(x_0, \delta)$ tal que $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$, por lo tanto $f^{-1}(O)$ es abierto.

Ahora, veamos la condición suficiente: Sea $y_0 = f(x_0)$, como cada conjunto abierto O de Y , se tiene que $f^{-1}(O)$ es un subconjunto abierto de X , en particular lo anterior se cumple para $O = f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ y como $x_0 \in O = f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$, de donde existe $B(x_0, \delta)$ tal que

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)) \rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

Por lo tanto, f es continua en $x_0 \in X$ ■

Esto sugiere que tal vez no sea imprescindible introducir una función de distancia para definir la continuidad de las funciones. Es suficiente conocer los conjuntos abiertos de los espacios que una función conecta y comprobar si la preimagen de un conjunto abierto es también un conjunto abierto en el espacio de origen.

Un espacio donde se han definido sus conjuntos abiertos se conoce como espacio topológico. A este tema le dedicaremos algunas líneas en la sección siguiente.

1.6. Espacios topológicos

Definición 1.6.3.1 (Homeomorfismo): Una función biyectiva continua $f: (X, T) \rightarrow (Y, T')$, con inversa f^{-1} también continua, se llama **homeomorfismo**, y cuando esto ocurre, se dice que los espacios topológicos (X, T) y (Y, T') son **homeomorfos**.

Definición 1.6.3.2 (Transformación Lineal): Sean X e Y dos espacios vectoriales, diremos que una función $T: X \rightarrow Y$, es una **transformación lineal**, si se cumple:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.6.3.1: Sea X , un espacio vectorial de dimensión n , definamos las funciones $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, del modo siguiente, $f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i, i = 1, \dots, n$

Solución, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in X \rightarrow \alpha x + \beta y \in X$

$$\rightarrow f_i(\alpha x + \beta y) = \alpha x_i + \beta y_i = \alpha f_i(x) + \beta f_i(y), \forall i = 1, \dots, n$$

Por lo tanto f_i es una transformación lineal ■

Nótese además, que toda transformación lineal es una función continua.

Teorema 1.6.3.1: En espacios vectoriales de dimensión finita todas las topologías vectoriales son equivalentes.

Demostración, Mostraremos que todo espacio vectorial topológico de dimensión finita n ; (X, ε) es homeomorfo a $(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ con ε la topología euclidiana, de esta manera los conjuntos abiertos en uno y otro espacio son los mismos.

Consideremos, $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base de X y $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base de \mathbb{R}^n y sea una transformación lineal $T: (\mathbb{R}^n, \varepsilon) \rightarrow (X, \varepsilon)$, tomemos un elemento arbitrario de \mathbb{R}^n , digamos $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, luego

$$T(y) = T(y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = y_1 T(e_1) + \dots + y_n T(e_n) = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$$

Es decir, T queda definida por $T(y) = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$

Puesto que (X, ε) es un espacio vectorial topológico, se tiene que T así definida es continua y como T es una biyección, solo resta verificar que T^{-1} , es también una función continua

Por otra parte, para todo $x \in X$ existen $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ tales que:

$x = f_1(x)u_1 + \dots + f_n(x)u_n$, las cuales como vimos en el ejemplo 1.6.3.1 son lineales y continuas, como existe T^{-1} , se tiene $T^{-1}(x) = T^{-1}(f_1(x)u_1 + \dots + f_n(x)u_n)$

$$\rightarrow T^{-1}(x) = f_1(x)T^{-1}(u_1) + \dots + f_n(x)T^{-1}(u_n) = f_1(x)e_1 + \dots + f_n(x)e_n$$

$$\rightarrow T^{-1}(x) = f_1(x)e_1 + \dots + f_n(x)e_n$$

Puesto $(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ es un espacio vectorial topológico, se tiene que T^{-1} es también continua, por lo tanto $(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ y (X, ε) son homeomorfos. ■

A continuación, exploraremos ciertos atributos de las preferencias que reflejan la tendencia de los agentes a buscar siempre algo superior, es decir, la existencia constante de una canasta que consideran más deseable que la que se les ofrece. Más adelante veremos que, cuando los agentes poseen este tipo de preferencias, solo se satisfarán con canastas de bienes que lleguen al límite de sus capacidades presupuestarias.

Definición 1.6.3.2 (Preferencia localmente no saciable): Diremos que una preferencia definida en X es **localmente no saciable** cuando para toda canasta de bienes x y toda vecindad U_x de x existe una canasta $y \in U_x \cap X$ tal que $y \succ x$.

Esta definición dice que para cualquier canasta de bienes existe en cualquier vecindad de ella otra canasta que es estrictamente preferible a la primera. Se dice que el agente presenta un comportamiento no saciable localmente.

Ejemplo 1.6.3.1: Consideremos el conjunto de consumo para un consumidor formado por canastas que contienen arroz, azúcar y menestras, las cantidades de cada bien, expresadas en kilogramos, se muestran en la siguiente tabla. Consideremos además una cantidad $\varepsilon > 0$ tan pequeña como queramos.

	Arroz	Azúcar	Menestras
Canasta 1 = a	10	5	6
Canasta 2 = b	8	4	5
Canasta 3 = c	12	9	8
Canasta 4 = d	$12 + \varepsilon$	$9 + \varepsilon$	$8 + \varepsilon$

Del cuadro se observa que $a = (10, 5, 6)$, $b = (8, 4, 5)$, $c = (12, 9, 8)$, $d = (12 + \varepsilon, 9 + \varepsilon, 8 + \varepsilon)$, entonces el conjunto de consumo está formado por estas cuatro canastas, es decir:

$$X = \{a, b, c, d\}$$

Dotemos a X de la siguiente topología, $\tau = \{\phi, X\}$

Dadas dos canastas $x, y \in X$ diremos que $(x, y) \in \succsim \Leftrightarrow x_i \geq y_i, i = 1, 2, 3$.

Consideremos la siguiente preferencia del consumidor sobre $X \times X$

$$\varphi = \{(a, a), (a, b), (c, a), (c, b), (d, c)\} \subset X \times X$$

Puesto que X es la única vecindad para todo punto de X , se tiene que:

- i) Para $a \in X \exists c \in X \cap X = X: c \succ a$ puesto que $c \succcurlyeq a$ sin embargo no se cumple que $a \succcurlyeq c$.
- ii) Para $b \in X \exists c \in X \cap X = X: c \succ b$ puesto que $c \succcurlyeq b$ sin embargo no se cumple que $b \succcurlyeq c$.
- iii) Para $c \in X \exists d \in X \cap X = X: d \succ c$ puesto que $d \succcurlyeq c$ sin embargo no se cumple que $c \succcurlyeq d$.
- iv) Para cada $\varepsilon > 0$ es posible construir un $d' \in X$ tal que para $d \in X \exists d' \in X \cap X = X: d' \succ d$ puesto que $d' \succcurlyeq d$ sin embargo no se cumple que $d \succcurlyeq d'$.

De (i), (ii), (iii) y (iv) se concluye que φ preferencia localmente no saciable. ■

Definición 1.6.3.3 (Canasta extremadamente deseable): Sea \succcurlyeq una relación de preferencias definida en un subconjunto X de un espacio vectorial ordenado E . Entonces una canasta $v \in X$ se dice ser una **canasta extremadamente deseable** para \succcurlyeq cada vez que:

- i) $x + \alpha v \in X; \forall x \in X, \forall \alpha > 0$.
- ii) $x + \alpha v \succcurlyeq x; \forall x \in X, \forall \alpha > 0$.

Nótese que si $v \neq 0$ es extremadamente deseable también lo será λv ; para todo $\lambda > 0$.

Ejemplo 1.6.3.2: Consideremos el conjunto de consumo para un consumidor formado por canastas que contienen arroz, azúcar y menestras. Entonces e tiene que el conjunto de consumos es $X = \mathbb{R}_+^3$, definamos sobre $X \times X$ la siguiente relación de preferencias.

$$\succsim = \{(a, b) \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}_+^3 : a_i \geq b_i, i = 1, 2, 3\}$$

- i) Sea $v \in \mathbb{R}_+^3$, por otra parte como \mathbb{R}_+^3 es un subespacio vectorial se tiene que para cualquier $x \in \mathbb{R}_+^3, \forall \alpha > 0$ el vector $\alpha x \in \mathbb{R}_+^3$, de donde nuevamente usando la el hecho que \mathbb{R}_+^3 es un subespacio vectorial se concluye que $x + \alpha v \in X; \forall x \in X, \forall \alpha > 0$.
- ii) Puesto que $x_i \geq x_i, i = 1, 2, 3$ entonces $x_i + \alpha v_i \geq x_i, i = 1, 2, 3$ de donde se sigue que $x + \alpha v \succsim x; \forall x \in X, \forall \alpha > 0$. Por lo tanto v es una canasta extremadamente deseable. ■

Definición 1.6.3.3 (Preferencias Monótonas): Una preferencia \succsim , se dice **monótona**, si para cada $x, y \in E$, con E espacio vectorial ordenado, con $x \geq y$ se tiene que $x \succsim y$.

Ejemplo 1.6.3.3: Consideremos el conjunto de consumo del ejemplo 1.6.3.2, para un consumidor con un conjunto de consumo formado por canastas que contienen arroz, azúcar y menestras. Entonces se tiene que el conjunto de consumos es $X = \mathbb{R}_+^3$, definamos sobre $X \times X$ la siguiente relación de preferencias.

$$\succsim = \{(a, b) \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}_+^3 : a_i \geq b_i, i = 1, 2, 3\}$$

Puesto que

$$a_i \geq b_i, i = 1, 2, 3 \rightarrow a \geq b \leftrightarrow a \succsim b$$

Por lo tanto la relación de preferencias \succsim es monótona. ■

Definición 1.6.3.3 (Preferencias Estrictamente Monótonas): Una preferencia \succsim , se dice **estrictamente monótona**, si para cada $x, y \in E$, con E espacio vectorial ordenado, con $x > y$ se tiene que $x \succ y$.

Es decir la canasta x posee más de todos los bienes que la canasta y .

Ejemplo 1.6.3.4: consideremos el siguiente conjunto de consumo de un consumidor de ropa: camisas y pantalones, cuyas canastas se muestran en el siguiente cuadro.

	Camisas	Pantalones
Canasta a	1	2
Canasta b	2	3
Canasta c	3	4
Canasta d	4	5

De acuerdo con el grafico se tiene que $X = \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}_+^2$, el cual es un subespacio vectorial ordenado, con el siguiente orden

$$x > y \leftrightarrow x_i > y_i, i = 1, 2$$

Si se define sobre $X \times X$ la relación $x \succcurlyeq y \leftrightarrow x \geq y$, entonces se tiene que

$$x \succ y \leftrightarrow x > y \leftrightarrow x_i > y_i, i = 1, 2$$

De donde se obtiene que

- i) $d > c \rightarrow d \succ c$
- ii) $c > b \rightarrow c \succ b$
- iii) $b > a \rightarrow b \succ a$
- iv) $d > b \rightarrow d \succ b$
- v) $d > a \rightarrow d \succ a$
- vi) $c > a \rightarrow c \succ a$

Es decir para cada $x, y \in X$, si $x > y \rightarrow x \succ y$ Por lo tanto \succcurlyeq es una preferencia estrictamente monótona". ■

Capítulo 2: Equilibrio Walrasiano

Este capítulo se enfoca en la eficiencia paretiana de los equilibrios Walrasianos y, de manera más general, en el concepto de asignación de recursos que es óptima o eficiente según Pareto. En las primeras seis secciones, se examina la existencia del equilibrio Walrasiano, analizando la función de demanda y sus características principales. Para ello, se utilizan herramientas matemáticas como los conjuntos compactos y los teoremas del gráfico cerrado y el teorema del punto fijo de Brouwer. Posteriormente, en las secciones siguientes, se aborda la existencia y las propiedades de los óptimos de Pareto, cuya presencia se demostrará a partir del lema de Zorn. También se investigará cómo definir precios de soporte para asignaciones de recursos que sean eficientes en términos de Pareto (también conocidas como asignaciones Pareto óptimas). Estos precios son aquellos que hacen que cualquier canasta de bienes que un agente prefiera sobre la asignación eficiente tenga un costo al menos igual a esta. La herramienta matemática clave aquí será el teorema de Hahn-Banach en su forma geométrica, centrándonos principalmente en la existencia de hiperplanos que separan conjuntos convexos disjuntos.

2.1. Elementos maximales de una preferencia: La demanda

El propósito del consumidor es seleccionar la mejor opción (la máxima) de acuerdo con sus preferencias dentro de un conjunto de posibilidades de consumo. Esta sección se centra en dichos elementos máximos.

Definiremos la demanda del agente como el conjunto de elementos máximos dentro de su relación de preferencias, situados en su área presupuestaria. Para ello, haremos un uso intensivo del concepto de compacidad en un subconjunto de un espacio topológico, que es donde se encuentra el conjunto de consumo del agente que busca maximizar.

Iniciaremos definiendo lo que es un elemento maximal de un preorden en un subconjunto. “Dada las siguientes definiciones:

Definición 2.1 (Elemento Maximal): Sea \succsim un preorden (por ejemplo una relación de preferencia) en un conjunto X y sea A un subconjunto no vacío de X . Decimos que $a \in A$ es un **elemento maximal** para \succsim en A cuando no existe $b \in A$ tal que $b \succ a$.

Si el preorden es completo entonces un elemento $a \in A$ es maximal si y solamente si $a \succsim x, \forall x \in A$.

Ejemplo 2.1: Consideremos el conjunto de consumo para un consumidor formado por canastas que contienen pantalones, camisas y chompas, las cantidades de cada bien, la cantidad de cada bien se muestran en la siguiente tabla.

	Pantalones	Camisas	Chompas
Canasta 1 = a	3	3	2
Canasta 2 = b	4	5	4
Canasta 3 = c	10	8	6

Del cuadro se observa que $a = (3,3,2), b = (4,5,4), c = (10,8,6)$, entonces el conjunto de consumo está formado por estas tres canastas, es decir:

$$X = \{a, b, c\}$$

Dadas dos canastas $x, y \in X$ diremos que $(x, y) \in \succsim \Leftrightarrow x_i \geq y_i, i = 1, 2, 3$.

Puesto que $c \succsim b, c \succsim a$ se deduce que la canasta c es un elemento maximal para \succsim en X . ■

Es importante reconocer que no siempre una relación de orden en un conjunto A específico tendrá un elemento maximal. Un ejemplo de esto es cuando no hay elemento maximal para una preferencia que es localmente insaciable en un conjunto donde todos sus puntos son interiores.

Además, en el caso de un preorden y un conjunto dados, puede haber más de un elemento maximal. Esto significa que todos los elementos maximales pertenecen a la misma clase de equivalencia. En términos económicos, esto implica que si un agente encuentra más de una canasta de bienes que maximizan sus preferencias, estas canastas serán consideradas indiferentes en cuanto a la satisfacción óptima de sus gustos.

En lo que sigue, haremos un uso intensivo de las propiedades de compacidad de ciertos conjuntos en espacios topológicos, por lo que dedicaremos la siguiente subsección a este concepto.

2.2. Conjuntos Compactos

Iniciaremos con la explicación del concepto de cubrimiento de un conjunto, una noción fundamental para los temas que abordaremos a continuación. “Dada las definiciones setiene:

Definición 2.2 (Cubrimiento): Sea X un espacio topológico, B un subconjunto de X ; y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia indexada de subconjuntos de X . La colección $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se dice un **cubrimiento** de B si $B \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Si el conjunto I es finito, entonces $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es llamado un **cubrimiento finito** de B .

Si los elementos de la familia indexada son abiertos, diremos que el cubrimiento es abierto.

Definición 2.3 (Conjunto Compacto): Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes en \mathbb{R}^l : un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^l$ se dice compacto si y solamente si:

1. De todo cubrimiento por abiertos X ; es posible obtener un subcubrimiento finito de X .
2. De toda red $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in X$ puede obtenerse una subred convergente.
3. X es cerrado y acotado. (Teorema de Heine- Borel).

Nota: En espacios más generales la propiedad de Heine-Borel no es válida.

Sea X un espacio topológico. Una familia $C_{\alpha \in I}$ de subconjuntos de X , se dice que posee la **propiedad de intersección finita (PIF)**, si para cada subconjunto finito $J \subset I$, $\bigcap_{\alpha \in J} C_{\alpha}$ es no vacío.

Teorema 2.2.1: Sea $C_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos cerrados en X ; con la propiedad de intersección finita, X es compacto si y solamente si la intersección $\bigcap_{\alpha \in I} C_{\alpha}$ es no vacío.

Demostración, Supóngase que X es compacto. Sea $C_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos cerrados en X ; con la PIF. Suponga que $\bigcap_{\alpha \in I} C_{\alpha}$ es vacío, por lo tanto su complemento $[\bigcap_{\alpha \in I} C_{\alpha}]^c = X$. Por la propiedad de Morgan:

$$\left[\bigcap_{\alpha \in I} C_{\alpha} \right]^c = \bigcup_{\alpha \in I} C_{\alpha}^c$$

Entonces $C_{\alpha \in I}$ es un cubrimiento por abiertos de X por la compacidad de X ; luego podemos extraerle un subcubrimiento finito, tal que $\bigcup_{\alpha \in J} C_{\alpha}^c = X; J \subset I$ finito. Obtenemos que: $\bigcap_{\alpha \in J} C_{\alpha}$ es vacío. Llegaremos entonces a una contradicción con la PIF supuesta para $C_{\alpha \in I}$.

Recíprocamente: Sea $A_{\alpha \in I}$ un cubrimiento de X : Suponga que no existe un subcubrimiento finito, es decir que para todo subconjunto finito $J \subset I$; $[\bigcup_{\alpha \in J} A_{\alpha}]^c$; es no vacío, equivalentemente: para todo $J \subset I$; $\bigcap_{\alpha \in J} A_{\alpha}^c$; es no vacío. Entonces $A_{\alpha \in I}^c$ es una colección de conjuntos cerrados con la PIF, de acuerdo a nuestro supuesto debe cumplirse que: $\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c$ es no vacío, luego usando las leyes de Morgan se concluye que $A_{\alpha \in I}$ no es un cubrimiento abierto de X . ■

2.3. Existencia y unicidad del maximal

El siguiente teorema prueba que el conjunto de los elementos maximales para relaciones de preferencias semicontinua superiormente en subconjuntos compactos es no vacío y muestra alguna de las características del mismo.

Teorema 12.6: El conjunto de los elementos maximales de una relación de preferencias semicontinua superiormente es no vacío y compacto.

Demostración, para cada $x \in X$ el conjunto $C_x = \{y \in X: y \succcurlyeq x\}$ es cerrado y por lo tanto compacto. El conjunto de los elementos maximales es precisamente el conjunto $\bigcap_{x \in X} C_x$. Mostraremos a continuación que este conjunto es no vacío.

Para esto comencemos considerando una colección finita de elementos $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, como el preorden \succcurlyeq es completo podemos asumir sin pérdida de generalidad que:

$x_1 \succcurlyeq x_2 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq x_n$, de donde se obtiene: $C_{x_1} \subseteq C_{x_2} \subseteq \dots \subseteq C_{x_n}$ y por lo tanto $\bigcap_{i=1}^n C_{x_i}$ es no vacío, por ser cada uno de estos conjuntos cerrados, poseer la **PIF** (propiedad de intersección finita) y ser X compacto, se tiene que $\bigcap_{x \in X} C_x$ es no vacía y además como todo conjunto cerrado en un compacto es compacto, se sigue $\bigcap_{x \in X} C_x$ es también compacto."■

El teorema confirma la existencia de un elemento maximal, pero no especifica si este es único o no. Para abordar esta cuestión, es importante notar que, en el caso de preferencias convexas aplicadas a conjuntos convexos, el conjunto de elementos maximales también es convexo.

Si consideramos que la preferencia es estrictamente convexa y asumimos la existencia de dos elementos maximales distintos, a y b , en X , al tomar una combinación convexa de ambos y debido a la convexidad de la relación de preferencias, esta combinación se incluiría en el conjunto de maximales y sería estrictamente preferida sobre los dos elementos maximales originales. Esto resulta en una contradicción. Por lo tanto, podemos concluir que: en el caso de preferencias estrictamente convexas sobre conjuntos convexos y compactos, existe un único elemento maximal.

En un mercado libre, cada agente económico intenta maximizar su bienestar dentro de su espacio de consumo, limitado por restricciones presupuestarias. La selección de bienes que el agente realiza constituye su demanda. La demanda se define como una función cuyo

dominio son los precios y cuyo rango es el espacio de consumo viable presupuestariamente. Así, dados los precios de los bienes, el agente elegirá aquellas canastas que maximicen sus preferencias. Este conjunto de canastas no necesariamente se limita a una única opción. La demanda del agente incluye todas aquellas canastas que, dados los precios de los bienes y sus restricciones presupuestarias, maximizan su relación de preferencias.

2.4. Funciones de demanda

Las preferencias y utilidades que fundamentan la teoría del agente maximizador no son directamente observables en la práctica económica. Lo que realmente se observa son individuos realizando transacciones comerciales, intercambiando bienes. Esto nos lleva a considerar el estudio del comportamiento económico y sus posibles leyes a través del análisis de los bienes demandados por los agentes. Por ello, esta sección se centrará en el estudio de la demanda, primero a nivel individual y luego en su forma agregada.

La demanda, un concepto derivado de las preferencias y del comportamiento racional del agente, es crucial tanto teóricamente como, en su forma agregada, para revelar el comportamiento económico de la sociedad. Sin embargo, es importante reconocer que la existencia de la demanda como función resultante de un plan optimizador de cada agente depende de ciertas condiciones sobre el conjunto de bienes elegidos y las características de las preferencias. Para ilustrar esto, presentaremos ejemplos de economías donde la demanda no es un resultado obvio del comportamiento racional de los agentes económicos.

También es crucial entender que algunas propiedades comúnmente aceptadas de la función de demanda, como la llamada ley de la demanda, no se cumplen automáticamente sin supuestos adicionales y restrictivos. Por lo tanto, cualquier predicción económica basada en estas supuestas propiedades universales debe tener en cuenta los supuestos del modelo, que a menudo no son tan generales como se cree.

Aunque los axiomas utilizados pertenecen a la teoría económica, la verificación de las propiedades requeridas en el modelo debe hacerse con herramientas del análisis

matemático, partiendo de la axiomatización original. De esta forma, la matemática se convierte en un valioso soporte para la economía, ayudando a evitar errores lógicos y formales, especialmente en la construcción y conclusiones del modelo. Además, la modelización y el análisis matemático pueden revelar aspectos de la realidad que de otro modo pasarían desapercibidos.

La confrontación con la realidad es la que finalmente determinará la validez del modelo y sus supuestos. Si no hay errores formales en la elaboración de las conclusiones, esta confrontación validará o refutará el modelo propuesto.

Sin embargo, es importante recordar que la "realidad" contra la que se compara el modelo es a menudo un constructo del pensamiento, influenciado por ideologías inherentes a todo proceso intelectual. Por lo tanto, incluso las creencias más simples y aparentemente no formales sobre el comportamiento de la realidad deben ser examinadas críticamente desde un punto de vista lógico y formal.

En definitiva, ningún modelo puede capturar completamente la realidad, pero sin modelarla de alguna manera, no es posible hacer afirmaciones sobre ella.

2.4.1. Región presupuestaria

En esta sección, las canastas de bienes estarán representadas por elementos de \mathbb{R}_+^l . “Se define lo siguiente:

Definición 2.4.1 (Canasta de bienes): Una **canasta de bienes** es un elemento del subespacio vectorial \mathbb{R}_+^l , es decir un vector $x = (x_1, \dots, x_l)$ de l coordenadas, alguna de las cuales pueden incluso ser cero.

Definición 2.4.1 (Dotaciones iniciales del Agente): Es la canasta de bienes con la cual cuenta originalmente el agente, para iniciar sus actividades económicas. Esta canasta de bienes está conformada por cantidades no negativas de todos los bienes de la economía,

entendiendo por tales no solamente aquellos bienes directamente consumibles, sino también las posibilidades de trabajar, habilidades, capacidades, etc. Es decir son los bienes susceptibles de ser intercambiados por otros en el mercado. Se representarán por la letra minúscula w . Cada una de ellas es un elemento de \mathbb{R}_+^l ; cada coordenada representara lo que el agente dispone originalmente de ese bien. Cada agente dispone de sus dotaciones iniciales, y no nos preguntamos acerca de cómo las adquirió.

Introduciremos también los **precios** de los bienes, cada bien tendrá su precio. Lo representaremos por p_h , es decir p_h será el precio del bien h , con $h = 1, 2, \dots, l$. **El valor de la canasta de bienes** x estará representado entonces por el producto escalar o Euclidiano de los vectores $p = (p_1, \dots, p_l)$ y $x = (x_1, \dots, x_l)$:

$$p \cdot x = p_1 x_1 + \dots + p_l x_l = \sum_{h=1}^l p_h x_h$$

Recordamos las siguientes propiedades de linealidad del producto Euclídeo:

- 1) $p(x + y) = px + py; \forall x, y \in X$.
- 2) $p(\alpha x) = \alpha p(x); ; \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

El valor de una canasta así definida, hace que los precios sean **funcionales lineales**, es decir **funciones lineales** con dominio en el espacio en el que está definido el conjunto de consumo y recorrido en los reales. Obsérvese que la definición de precios como funcionales lineales es natural, pues los precios asignan a cada canasta un valor, es decir un número real, además el valor de dos diferentes canastas es la suma de sus valores y análogamente el valor de n canastas de bienes, será n veces el valor de una de ellas. El conjunto de los funcionales lineales forma un espacio vectorial, el que se conoce como **espacio dual**.

En el caso de que el espacio sobre el que están definidos los funcionales lineales sea un espacio vectorial topológico de dimensión finita puede asegurarse la continuidad de los funcionales lineales, propiedad que aparece naturalmente vinculada al concepto de precios y

su comportamiento. No obstante, esto no es necesariamente cierto en espacios más generales, lo que obliga a un mayor cuidado en el momento de definir precios cuando modelamos economías en estos espacios.

Nótese que para cada funcional lineal de \mathbb{R}^l hay un vector del espacio que lo representa, ya que si consideramos un funcional lineal arbitrario $f: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$, con $\{e_1, \dots, e_l\}$ la base euclidiana de \mathbb{R}^l , sea $x = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l$, entonces:

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_l e_l) = x_1 f(e_1) + \dots + x_l f(e_l).$$

Si definimos $p_f = (f(e_1), \dots, f(e_l)) \rightarrow f(x) = p_f \cdot x$

Es decir para cada funcional lineal $f: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$, entonces existe $p_f \in \mathbb{R}^l$ tal que: $f(x) = p_f \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}^l$

De lo anterior se deduce que el espacio \mathbb{R}^l coincide con su dual. Así si f es un funcional lineal en \mathbb{R}^l entonces $f(x)$ para x en el espacio de consumo representara el valor de la canasta x a precios p_f ; siendo p_f el vector que representa a f y $f(x) = p_f x$.

Definición 2.4.1 (Región Presupuestaria): Llamaremos **región presupuestaria** a la que representaremos por $B_w(p)$ al conjunto:

$$B_w(p) = \{x \in \mathbb{R}_+^l : px \leq pw\}$$

De esta manera el valor de las dotaciones iniciales de cada agente queda representado por el número real $p w$. El vector $w \in (\mathbb{R}^l)^n$ representa las dotaciones iniciales de los agentes de la economía.

Se deduce inmediatamente que para todo $\lambda > 0$: $B_{\lambda w}(\lambda p) = B_w(p)$

Teorema 2.4.1: Si el precio p de cada bien está representado por un real estrictamente positivo, entonces la restricción o región presupuestaria $B_w(p)$ de cada agente con dotaciones iniciales en \mathbb{R}_+^l ; es un subconjunto compacto de \mathbb{R}_+^l .

Demostración, la continuidad del producto interno, permite concluir que la región presupuestaria $B_w(p)$ es cerrada.

De otro lado, sea $r = \min\{p_1, \dots, p_l\}$ y $x \in B_w(p)$, entonces:

$$0 \leq r \leq p_i, i = 1, 2, \dots, n \rightarrow 0 \leq rx_i \leq p_i x_i \leq px \leq pw, i = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow rx_i \leq pw \\ &\rightarrow x_i \leq \frac{pw}{r} < +\infty, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

De donde $B_w(p)$ es un conjunto acotado, luego $B_w(p)$ es cerrado y acotado en \mathbb{R}_+^l y por lo tanto es un subconjunto compacto. ■

Nótese que si el vector p de precios tiene alguna componente cero es decir si $p \in \mathbb{R}_+^l$; entonces la restricción presupuestaria para cualquier w será no acotada.

Como sabemos que en \mathbb{R}_+^l , acotado y cerrado equivale a compacto, siendo w un elemento del cono positivo \mathbb{R}_+^l ; se deduce que la región presupuestaria será un subconjunto compacto si y solamente si p es positivo en todas sus componentes.

Nos restringiremos por ahora al caso en que la única actividad económica de los agentes, es el intercambio de bienes en el mercado. Es decir que intentará intercambiar la canasta de bienes que él posee (sus dotaciones iniciales) por otra que le sea preferible, naturalmente que solo podrá elegir dentro del conjunto de canastas de bienes que le son admisibles, es decir aquellas cuyo valor no excede al de su dotación inicial. En definitiva: cada individuo

resolverá en el mercado el problema que consiste en maximizar sus preferencias, restringiéndose a su región presupuestaria.

Para precios estrictamente positivos y preferencias continuas en \mathbb{R}_+^l se tiene que:

- 1) Si la preferencia es además convexa, entonces la preferencia tiene al menos un elemento maximal en la región presupuestaria.
- 2) Si la preferencia es estrictamente convexa, entonces existe exactamente un elemento maximal.
- 3) Si la preferencia es localmente no saciable entonces los elementos maximales están en la frontera de la región presupuestaria.

La existencia y número de elementos maximales para determinadas preferencias dependen de propiedades de ellas, como continuidad y convexidad así como también de las propiedades del conjunto sobre el que están definidas (particularmente compacidad).

En el caso de que este elemento sea único, se define la demanda, como la función:

$x: \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}_+^l \rightarrow \mathbb{R}_+^l$, tal que:

$$x(p, w) \rightarrow \{x \in B_w(p): x \succcurlyeq y, \forall y \in B_w(p)\}$$

Preferencias estrictamente convexas son suficientes para la unicidad, mientras que la convexidad es suficiente para que el conjunto demanda sea convexo, pudiendo ser éste un conjunto con uno o varios elementos.

La siguiente definición nos será de utilidad en la siguiente subsección.

Definición 2.4.2 (Simplex l dimensional): Es el conjunto denotado por S^l y definido como sigue:

$$S_+^l = \left\{ p \in \mathbb{R}^{l+1} : \sum_{i=1}^{l+1} p_i = 1; p_i \geq 0, i = 1, \dots, l+1 \right\}$$

2.4.2. *Propiedades de la demanda*

Veamos a continuación algunas propiedades de la demanda:

1. **Homogeneidad de grado cero:** Para todo $\lambda > 0$, $x(p, w) = x(\lambda p, \lambda w)$, lo que se deduce de la propiedad análoga para la restricción presupuestaria.

Esta propiedad significa que si los precios y la renta cambian en la misma proporción, la elección de consumo del individuo no cambia. Es decir no produce ningún cambio en el conjunto de consumos factibles.

2. **Ley de Walras:** En el caso de estar definida la demanda a partir de preferencias localmente no saciables, se verifica que $px(p, w) = pw$.

La Ley de Walras significa que el individuo consume totalmente su renta. Este supuesto es razonable siempre que exista algún bien deseable.

Por otra parte, la homogeneidad de grado cero de la demanda, nos permite restringirnos a trabajar con precios en el simplex positivo S_+^{l-1} , es decir con vectores en el simplex, tales que sus coordenadas son no negativas $p_h \geq 0, h = 1, 2, \dots, l$ (donde l representa la cantidad de bienes existentes en el mercado) y tales que su suma $\sum_{h=1}^l p_h = 1$. Para ver que esto es posible basta con considerar $\lambda = \frac{1}{p}$, donde $p = \sqrt{\sum_{h=1}^l p_h^2}$.

Algunas otras propiedades de la función demanda no son tan obvias, por ejemplo la continuidad, a la cual le dedicaremos la siguiente subsección.

2.4.3. Continuidad de la función demanda

Consideremos preferencias estrictamente convexas, en \mathbb{R}_+^l con una canasta de bienes extremadamente deseable. Consideremos también dotaciones iniciales, representadas por un vector $w \in \mathbb{R}_+^l$ no nulo fijo. Estudiaremos la continuidad de la demanda del agente con tales preferencias y utilidades, la que representaremos por $x_w: S^{l-1} \rightarrow \mathbb{R}_+^l$ siendo $x_w(p) = x(p, w)$ la demanda del agente a precios p .

Demostraremos el teorema de continuidad de la demanda para precios estrictamente positivos, y dotaciones iniciales en \mathbb{R}_+^l . La demostración de este teorema la haremos a partir del teorema del grafico cerrado el que enunciaremos y demostramos a continuación.

Teorema 2.4.3.1 (Teorema del Grafico Cerrado): Sean X e Y dos espacios de Banach y sea $f: X \rightarrow Y$ una función lineal. Entonces f es continua si y solamente si su grafico $G_f = \{(x, f(x)): x \in X\}$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$.

Demostración, supongamos que f es continua, y consideremos una sucesión en G_f , digamos, $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset G_f$ tal que $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, y)$, es decir $x_n \rightarrow x$ y por ser f continua se deduce que: $f(x_n) \rightarrow f(x)$, luego como tanto X como Y son Banach, se tiene que $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$, es decir: $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, f(x)) \in G_f$, por lo tanto G_f es un conjunto cerrado en $X \times Y$.

Ahora demostremos la condición suficiente, consideremos en X , las dos normas siguientes:

$$\|x\|_1 = \|x\|_X + \|fx\|_Y; \quad \|x\|_2 = \|x\|_X$$

Como G_f es cerrado, entonces se tiene que $(X, \|\cdot\|_1)$ es también Banach, y como $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, luego ambas normas son equivalentes entonces existe una constante $c > 0$: $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$, de donde:

$$\|fx\|_Y \leq \|x\|_X + \|fx\|_Y = \|x\|_1 \leq c\|x\|_2 = c\|x\|_X$$

$$\rightarrow \|fx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

Por lo tanto f es continua. ■

Para verificar la continuidad de la función demanda, necesitamos de la siguiente definición.

Definición 2.4.3 (Preferencias Neoclásicas): Se llaman así a las preferencias que satisfacen la condición de no saciabilidad local y, son estrictamente convexas en todo \mathbb{R}_+^l o solamente en el interior de \mathbb{R}_+^l , pero todo punto en el interior es preferible a un punto sobre la frontera de \mathbb{R}_+^l .

El siguiente teorema garantiza la continuidad de la función demanda para preferencias neoclásicas.

Teorema 2.4.3.2: Toda función demanda $x_w: \mathbb{R}_{++}^l \rightarrow \mathbb{R}_+^l$ correspondiente a preferencias neoclásicas y dotaciones iniciales $w \in \mathbb{R}^l - \{0\}$ es continua.

Demostración, de acuerdo al teorema del grafico cerrado será suficiente demostrar que la función demanda x_w tiene gráfico cerrado.

Sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (p_n, x_w(p_n)) \subset G_{x_w}$ tal que $p_n \rightarrow p; x_w(p_n) \rightarrow x$, luego debemos mostrar que $x = x_w(p)$, para lo cual será suficiente demostrar que x es un elemento maximal del conjunto $B_w(p)$ y como este elemento maximal es único, debe ser la demanda $x_w(p)$, es decir $x = x_w(p)$.

Usando la Ley de Walras (pues las preferencias son localmente no saciables), se tiene que: $p_n x_w(p_n) = p_n w \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n x_w(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n w$, y de la continuidad del producto interno se sigue que $px = pw$.

Sea ahora $y \in B_w(p) \rightarrow py \leq pw$. Para $0 < \lambda < 1$, se tiene que $0 < \lambda y < y$, usando la linealidad del precio:

$$\rightarrow 0 < p(\lambda y) < p(y) \leq pw \rightarrow p(\lambda y) < pw = px; 0 < \lambda < 1$$

Usando la continuidad del producto interno, se tiene que existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ $p_n(\lambda y) < p_n w = p_n x_w(p_n) \rightarrow x_w(p_n) \succ \lambda y$. Ahora por la continuidad de las preferencias, para n suficientemente grande, $x \succcurlyeq \lambda y$ para todo $0 < \lambda < 1$, si hacemos tender λ hacia uno, se tiene $x \succcurlyeq y$, con y un elemento arbitrario de $B_w(p)$, luego x es su elemento maximal y por lo tanto $x = x_w(p)$.

Sea ahora $[r, s]$ un intervalo en el interior de \mathbb{R}_+^l , con $p \in [r, s]$. Sea $Y = x_w([r, s])$, luego Y es cerrado y acotado en \mathbb{R}_+^l , entonces $[r, s]; Y$ son espacios de Banach y como hemos mostrado que $x_w: [r, s] \rightarrow Y$ tiene grafico cerrado, entonces podemos aplicar el teorema del grafico cerrado para concluir que x_w es una función continua. ■

2.4.4. La demanda agregada y el agente representativo

Habitualmente la Macroeconomía trabaja con valores agregados, demanda agregada, riqueza agregada, bienestar social, etc; parece natural preguntarse entonces, hasta qué punto estos valores representan el comportamiento de los agentes económicos o son alguna medida del bienestar de la sociedad.

Supongamos que la sociedad se compone por n agentes poseedores de correspondientes relaciones de preferencias \succcurlyeq_i , su correspondiente demanda $x_i(p, w_i)$ la que dependerá de los precios y de sus dotaciones iniciales. En general dados los precios $p \in \mathbb{R}^l$ y una distribución de riquezas (w_1, \dots, w_n) puede definirse la **demanda agregada** como:

$$x(p, w_1, \dots, w_n) = \sum_{i=1}^n x_i(p, w_i)$$

De esta forma la demanda agregada depende no solo de precios y de la riqueza agregada, o total de la sociedad, sino también de su distribución inicial. Luego es natural preguntarse ¿tiene la función $x(p, w_1, \dots, w_n)$; es decir la demanda agregada, valor como índice del bienestar social? La respuesta es que al menos que la demanda individual sea independiente de la distribución inicial de la riqueza, es un índice muy relativo.

Tiene interés también la pregunta sobre el valor de la demanda agregada como representante del comportamiento de la sociedad en su conjunto. Es decir, ¿es válido considerar la demanda agregada como la demanda de un agente representativo de la sociedad y aplicar a ésta las técnicas y conclusiones obtenidas para la demanda de cada agente individual? Puede observarse que la continuidad, la ley de Walras y la homogeneidad en los precios de grado cero, son heredadas por la demanda agregada. No obstante la respuesta es afirmativa solamente en el caso en que exista una relación de preferencias \succsim racional, para la que la demanda agregada, represente precisamente el elemento maximal de esta preferencia, en la restricción presupuestaria generada por la riqueza agregada $\sum_{i=1}^n w_i$ a precios p .

2.5. La Función Exceso de Demanda

Comenzaremos esta sección definiendo la función exceso de demanda para una economía con preferencias \succsim_i determinadas y dotaciones iniciales (w_1, \dots, w_n) fijas, n representa el número de agentes de la economía.

Definición 2.5.1 (Función de Exceso de Demanda): Es una función, $z: \text{Int}(\mathbb{R}_+^l) \rightarrow \mathbb{R}^l$ definida por

$$z(p) = \sum_{i=1}^n x_i(p) - \sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n x_i(p) - W$$

Donde $W = \sum_{i=1}^n w_i$ es la oferta agregada, y $x_i(p)$ representa la demanda del agente i a precios p . La expresión en coordenadas de la función exceso de demanda viene dada por $z(p) = (z_1(p), \dots, z_n(p))$.

Un precio p^* para el que la función exceso de demanda se anula representa un precio para el que la oferta de bienes en la sociedad es igual a su demanda. Dado que para este precio los agentes tendrán una demanda $x_i(p^*)$ que garantiza la no existencia de excedente, p^* es un **precio de equilibrio**.

Definición 2.5.2 (Equilibrio Walrasiano): El par $(p^*, x(p^*))$ es un **equilibrio walrasiano** si y solamente si $z(p^*) = 0$.

Recuerde que p^* es un elemento del interior de \mathbb{R}_+^l y que $x(p^*)$ es un elemento de \mathbb{R}^{ln} pues es una asignación de recursos, y como tal se compone de n cestas de bienes, con l componentes (bienes) cada una, una para cada uno de los n agentes de la economía.

2.5.1. Propiedades de la función exceso de demanda

1. Es homogénea de grado cero.
2. Es continua y acotada inferiormente.
3. Satisface la ley de Walras $pz(p) = 0$, para todo precio p .
4. Si una sucesión de precios $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en el interior de \mathbb{R}_+^l converge a un precio p también en dicho interior, entonces la sucesión $(z(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ se mantiene acotada.
5. Si una sucesión de precios $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en el interior de \mathbb{R}_+^l converge a un precio p en el interior de \mathbb{R}_+^l converge a un precio p en la frontera de \mathbb{R}_+^l (es decir p tiene alguna coordenada igual a cero) entonces al menos una coordenada crece infinitamente.

Las propiedades indicadas pueden mostrarse a partir de las análogas satisfechas por la función demanda.

El siguiente paso es mostrar la existencia del precio p^* de equilibrio o equilibrio Walrasiano o equilibrio competitivo. Lo que se hará en la siguiente subsección.

2.5.2. Equilibrio competitivo y el Teorema del punto Fijo de Brouwer

La caracterización de equilibrio competitivo, como un sistema de ecuaciones simultaneas fue realizada por primera vez por Walras.

Walras partía de agentes maximizando su función de utilidad y productores maximizando beneficios por un lado, a la vez que entendía que el precio es independiente de la acción misma de cada agente económico por separado. Estos encuentran precios dados y actúan frente a ellos como frente a un dato económico. Si bien el método seguido por Walras, de contar ecuaciones e incógnitas como forma de asegurar la existencia de una solución del referido sistema es esencialmente correcto, no alcanza para justificar la existencia del equilibrio, debe también poder asegurarse la positividad de la solución.

La demostración de la existencia del equilibrio competitivo (o Walrasiano), es equivalente al problema de encontrar un punto fijo de una función continua de un conjunto compacto en sí mismo, y este resultado fue probado por primera vez en 1910 por Brouwer.

2.5.3. Teorema del punto Fijo de Brouwer

Presentamos una demostración breve y elegante del Teorema del punto fijo de Brouwer, por razones de simplicidad, lo haremos para el caso en que $n = 2$. En dicha demostración sólo se involucra el concepto de homotopia en términos de relación de equivalencia, sin necesidad de hablar de grupos de homotopia.

Definición 2.5.3.1 (Punto fijo): Sea A un subconjunto de X . Un **punto fijo** de una función $f: A \rightarrow X$ es un punto $x \in A$ para el que se cumple que $x = f(x)$.

Definición 2.5.3.2 (Homotopia): Sean X e Y espacios topológicos. Una **homotopia** de X a Y , es una función continua $H: X \times I = [0,1] \rightarrow Y$, definida por $H_t(x) = H(x, t) \forall x \in X, \forall t \in I$. Dos funciones continuas $f, g: X \rightarrow Y$ son homotópicas, y se denota $f \approx g$, si existe una homotopia H de X a Y tal que $H_0(x) = f(x)$ y $H_1(x) = g(x)$.

El primer resultado establece la propiedad básica del concepto de homotopia.

Lema 2.5.3.1: La relación de homotopia es de equivalencia.

Demostración, sean $f, g, h: X \rightarrow Y$ funciones continuas entre los espacios topológicos X e Y .

1. **Reflexividad,** basta definir $H_t(x) = H(x, t) = f(x), \forall x \in X, \forall t \in I$.

2. **Simetría,** si $f \approx g$ entonces existe $H: X \times I = [0,1] \rightarrow Y$, tal que:

$$H_0(x) = f(x) \text{ y } H_1(x) = g(x).$$

Definamos $G(x, t) = H_t(x) = H(x, 1 - t)$, luego H es una función continua y además, $H_0(x) = H(x, 1) = H_1(x) = g(x)$ y $H_1(x) = H(x, 0) = H_0(x) = f(x)$.

Por lo tanto $g \approx f$.

3. **Transitividad,** si $f \approx g \wedge$ si $g \approx h$, entonces existen funciones continuas:

$F, G: X \times I = [0,1] \rightarrow Y$, tales que: $F_0(x) = f(x)$ y $F_1(x) = g(x)$
 $G_0(x) = g(x)$ y $G_1(x) = h(x)$, definamos $H: X \times I = [0,1] \rightarrow Y$ como:

$$H_t(x) = \begin{cases} F(x, 2t); & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t); & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces H es continua y además:

$$H_0(x) = F(x, 0) = F_0(x) = f(x) \rightarrow H_0(x) = f(x)$$

$$H_1(x) = G(x, 1) = G_1(x) = h(x) \rightarrow H_1(x) = h(x).$$

Por lo tanto $f \approx h$. ■

El próximo lema es el primero de una serie de cuatro cuyo objetivo final es demostrar que la aplicación identidad de S^1 en S^1 no es homotópica a una función constante (lo que se llama una función esencial). Para ello, primero se prueba que las aplicaciones no sobreyectivas que llegan a S^1 tienen un logaritmo continuo, para a continuación determinar que la propiedad de tener un logaritmo continuo es invariante por homotopias (eso se llevará dos lemas) y obtener finalmente la equivalencia entre las propiedades de tener un logaritmo continuo y la de ser homotópica a una función constante, de donde el resultado deseado será un corolario.

Lema 2.5.3.2: Si $f: X \rightarrow S^1$ es una función continua con $f(X) \neq S^1$, entonces f tiene un logaritmo continuo. Es decir, existe $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) = e^{i\phi(x)}$ para todo $x \in X$.

Demostración, sea $q \in \mathbb{R}$ tal que $e^{iq} \notin S^1$, pues $f(X) \subsetneq S^1$.

La función $\exp:]q, q + 2\pi[\rightarrow S^1 - \{e^{iq}\}$, definida por $\exp(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$ es un homeomorfismo.

Luego su inversa, $\exp^{-1}: S^1 - \{e^{iq}\} \rightarrow]q, q + 2\pi[$ es también una función continua, definida por $\exp^{-1}(x) = -i \operatorname{Ln}(x)$, así podemos definir $\phi := \exp^{-1} \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$, por $\phi(x) = (\exp^{-1} \circ f)(x) = \exp^{-1}(f(x)) = -i \operatorname{Ln}(f(x))$, luego ϕ es una función continua, además: $e^{i\phi(x)} = e^{i(-i \operatorname{Ln}(f(x)))} = e^{-i^2 \operatorname{Ln}(f(x))} = e^{\operatorname{Ln} f(x)} = f(x)$

$$\rightarrow e^{i\phi(x)} = f(x) \blacksquare$$

Lema 2.5.3.3: Sean $f_1, f_2: X \rightarrow S^1$ continuas con

$$|f_1(x) - f_2(x)| = \sup\{|f_1(x) - f_2(x)|: x \in X\} \leq 1$$

Entonces f_1 tiene un logaritmo continuo si y solo si f_2 también lo tiene.

Demostración, como $f_1(x)$ y $f_2(x)$ pertenecen a S^1 , luego si los consideramos como números complejos, entonces el cociente $f_1(x)/f_2(x) \in S^1$, esto nos permite definir:

$h: X \rightarrow S^1$ Por $h(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, luego:

$$|h(x) - 1| = \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - 1 \right| = \left| \frac{f_1(x) - f_2(x)}{f_2(x)} \right| = \frac{|f_1(x) - f_2(x)|}{|f_2(x)|} = |f_1(x) - f_2(x)|, \text{ pues } |f_2(x)| = 1$$

$$\rightarrow |h(x) - 1| = |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1 - f_2| \leq 1$$

$$\rightarrow |h(x) - 1| \leq 1$$

De lo anterior se deduce que h no es sobreyectiva, puesto que de serlo $-1 \in h(X) \rightarrow |-1 - 1| = 2 > 1 (\rightarrow \leftarrow)$, luego $h(X) \neq S^1$, entonces por lema 2.5.3.2, existe una función continua, $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = h(x) = e^{i\phi(x)} \forall x \in X$

$$\rightarrow f_2(x) = f_1(x)e^{-i\phi(x)} = e^{i\theta(x)}e^{-i\phi(x)} = e^{i(\theta-\phi)(x)}$$

Con $\theta: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua, pues f_1 tiene un logaritmo continuo, por lo tanto f_2 también tiene un logaritmo continuo.

Recíprocamente, si f_2 tiene un logaritmo continuo, es decir existe $\phi_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f_2(x) = e^{i\phi_2(x)}, \forall x \in X$.

De otro lado, $h(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \rightarrow f_1(x) = f_2(x)h(x) = e^{i\phi_2(x)}e^{i\phi(x)} = e^{i(\phi+\phi_2)(x)}$

$$\rightarrow f_1(x) = e^{i(\phi+\phi_2)(x)}$$

Entonces existe $\phi + \phi_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f_1(x) = e^{i(\phi+\phi_2)(x)}, \forall x \in X.$$

Por lo tanto f_1 tiene un logaritmo continuo ■

Lema 2.5.3.4: Sea X compacto y $H: X \times I \rightarrow S^1$ una homotopia. Entonces H_0 tiene un logaritmo continuo si y solo si H_1 tiene un logaritmo continuo.

Demostración, como H es una función continua definida sobre el conjunto compacto $X \times I$, entonces H es uniformemente continua sobre $X \times I$, en particular para

$$\varepsilon = 1 \exists \delta = 1/n \text{ tal que } |s - t| \leq 1/n \rightarrow |H(x, s) - H(x, t)| < 1 \forall t, s \in I, \forall x \in X$$

Definamos $f_j = H_{j/n}$, entonces:

$$|f_{j+1}(x) - f_j(x)| = \left| H\left(x, j + 1/n\right) - H\left(x, j/n\right) \right| < 1 \text{ puesto que } \left| \frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

$$\rightarrow |f_{j+1}(x) - f_j(x)| < 1 \text{ para todo } x \in X$$

Luego usando el lema 2.5.3.3, se tiene que f_{j+1} tiene un logaritmo continuo si y solamente si f_j tiene un logaritmo continuo, reiterando el proceso desde 0 hasta n y usando la transitividad de la relación de homotopia, se obtiene que $f_0 = H_0$ tiene un logaritmo continuo si y solamente si $f_n = H_1$ tiene un logaritmo continuo. ■

Lema 2.5.3.5: Sea X compacto y $f: X \rightarrow S^1$ una función continua; f es homotópica a una función constante si y solo si f tiene un logaritmo continuo.

Demostración, supongamos que f es homotópica a una función constante $g(x) = a$, entonces existe una homotopia $H: X \times I \rightarrow S^1$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = a$.

Definamos $\phi(x) = q, \forall x \in X$, con $q \in \mathbb{R}$ tal que $e^{iq} = a$, luego $H_1 = a$ tiene un logaritmo continuo, de donde por lema anterior se tiene que $H_0 = f$ también tiene un logaritmo continuo.

Recíprocamente, supongamos que f tiene un logaritmo continuo, es decir existe:

$\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$, continua tal que $e^{i\phi(x)} = f(x)$, definamos: $H: X \times I \rightarrow S^1$, como:

$H_t(x) = H(x, t) = e^{it\phi(x)}$, para todo $x \in X$ y para todo $t \in I$, H así definida es una función continua y además, $H_0(x) = 1; H_1(x) = e^{i\phi(x)} = f(x)$, de donde f es homotópica a la función constante 1. ■

Corolario 2.5.1: Sea $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y sea $\psi_n: S^1 \rightarrow S^1$ definida por $\psi_n(z) = z^n$ para todo $z \in S^1$. Entonces ψ_n no es homotópica a una función constante.

Demostración, supongamos ψ_n es homotópica a una función constante, luego por lema 2.5.3.5 ψ_n tiene un logaritmo continuo, es decir existe $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$, continua tal que:

$\psi_n(x) = e^{2\pi i\phi(x)}$, basta con elegir como ϕ el resultado de dividir el logaritmo continuo que proporciona el lema anterior por 2π .

De otro lado dado $x \in S^1$ existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $x = e^{2\pi i\theta}$, y como $x^n = \psi_n(x) = e^{2\pi i\phi(x)}$

$$\rightarrow e^{2n\pi i\theta} = e^{2\pi i\phi(e^{2\pi i\theta})}$$

$$\rightarrow e^{2\pi i[\phi(e^{2\pi i\theta}) - n\theta]} = 1$$

Definamos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, por $f(\theta) = \phi(e^{2\pi i\theta}) - n\theta$, luego f así definida es continua y además cumple: $e^{2\pi if(\theta)} = 1$.

Recordemos que $e^{2\pi iz} = (\cos 2\pi z, \sin 2\pi z)$

Si $e^{2\pi if(\theta)} = 1 \rightarrow (\cos 2\pi f(\theta), \sin 2\pi f(\theta)) = (1, 0) \leftrightarrow f(\theta) \in \mathbb{Z} \rightarrow f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$

Ahora como f es continua y \mathbb{R} es conexo, se tiene que $f(\mathbb{R})$ es conexo en \mathbb{Z} y como las únicas componentes conexas de \mathbb{Z} son los puntos se sigue que f es constante. Usando la condición del logaritmo continuo, se tiene:

$$1 = \psi_n(1) = e^{2\pi i\phi(1)} \rightarrow e^{2\pi i\phi(1)} = 1 \leftrightarrow \phi(1) = 0$$

De donde: $f(0) = \phi(1) = 0$, y como también $f(1) = \phi(e^{2\pi i}) - n = \phi(1) - n = -n$

Tenemos que $f(0) = 0 \wedge f(1) = -n$, contradiciendo el hecho que f es constante. ■

Como consecuencia del resultado anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.5.2: La función identidad $Id: S^1 \rightarrow S^1$ no es homotópica a una función constante.

Demostración, haciendo $n = 1$ en el Corolario 2.5.1 ■

Este corolario resume todos los conocimientos de homotopías y del cuerpo de los números complejos que serán necesarios en la demostración que a continuación se presenta del Teorema del punto fijo de Brouwer.

Teorema 2.5.1. (Teorema del Punto Fijo de Brouwer en una bola cerrada unitaria de \mathbb{R}^2): Sea D una bola unitaria cerrada en \mathbb{R}^2 , con centro en el origen, y sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua con $f(S^1) \subset D$. Entonces existe un punto $x \in D$ tal que $f(x) = x$.

Demostración, supongamos que $f(x) \neq x, \forall x \in D \rightarrow f(x) - x \neq 0, \forall x \in D$, definamos: $r: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow S^1$, definido por $r(z) = z/\|z\|$ y como $u - f(u)$ no se anula en ningún punto de D , podemos definir la función $g: S^1 \rightarrow S^1$, por $g(u) = r \circ (Id - f)(u) = r(u - f(u))$ la cual es continua.

Nótese que:

- $u - tf(u) \neq 0$, para $t = 1$.
- $t < 1 \rightarrow tf(u) < f(u) \rightarrow \|tf(u)\| < \|f(u)\| \leq 1 \rightarrow \|tf(u)\| < 1$, luego $tf(u) \in \text{Int}D$ y como $u \in S^1$, se sigue que también $u - tf(u) \neq 0$

Lo anterior nos permite definir la función continua: $H: S^1 \times I \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$H(u, t) = H_t(u) = u - tf(u).$$

Usando la función H , podemos definir la composición: $r \circ H: S^1 \times I \rightarrow S^1$ que es una función continua, además:

- $(r \circ H)_0(u, t) = r(H_0(t)) = r(H(u, 0)) = r(u) = u/\|u\| = u = Id_{S^1}$

$$\rightarrow (r \circ H)_0 = Id_{S^1}$$
- $(r \circ H)_1(u, t) = r(H_1(t)) = r(H(u, 1)) = r(u - f(u)) = g(u) \rightarrow (r \circ H)_1 = g$

De donde, $r \circ H$ es una homotopia entre Id_{S^1} y g .

De otro lado, para $0 < t < 1 \rightarrow 0 < tu < u < 1 \rightarrow 0 < tu < 1$, así $tu \in D$ y como D no tiene puntos fijos, se sigue que, $tu - f(tu) \neq 0$, esto nos permite definir la función continua: $G: S^1 \times I \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$G(u, t) = G_t(u) = tu - f(tu).$$

Usando la función G , podemos definir la composición: $r \circ G: S^1 \times I \rightarrow S^1$ que es una función continua, además:

$$\bullet \quad (r \circ G)_0(u, t) = r(G(u, 0)) = r(-f(0)) = \frac{-f(0)}{\|f(0)\|}$$

$$\rightarrow (r \circ G)_0 = \text{constante}$$

$$\bullet \quad (r \circ G)_1 = r(u - f(u)) = g(u) \rightarrow (r \circ G)_1 = g$$

De donde, $r \circ G$ es una homotopia entre g y una función constante.

Por lema 2.5.3.1, la relación de homotopia es transitiva, como $Id_{S^1} \approx g$ y $g \approx cte$, entonces $Id_{S^1} \approx cte$, lo cual contradice al corolario 2.5.2. ■

Como se sabe que una bola unitaria cerrada es convexa y cerrada, el teorema anterior es generalizado por el siguiente resultado, cuya demostración de por sí es un trabajo de tesis y por lo cual omitiremos su demostración, sin embargo referenciamos la bibliografía para aquellos interesados en emprender esta empresa.

Teorema 2.5.1. (Versión general del Teorema del Punto Fijo de Brouwer): Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, compacto y convexo. Toda función continua de K en sí mismo, tiene un punto fijo.

Demostración, ver[Aliprantis, C. D. ; Border, K. C. ; pag. 583]

2.6. Existencia del Equilibrio Walrasiano

En esta sección se demuestra la existencia del equilibrio walrasiano, para el caso de las llamadas economías de intercambio puro, a partir de la función exceso de demanda.

Teorema 2.6.1. (Existencia del Equilibrio Walrasiano): Supongamos que las preferencias de los agentes económicos son continuas, estrictamente convexas y estrictamente crecientes. Suponga también que $w_i \in \mathbb{R}_+^l - \{0\}, i = 1, 2, \dots, n$. Entonces existe el equilibrio walrasiano.

Demostración, sea z_h la función exceso de demanda por el h –ésimo bien, con $h = 1, \dots, l$, siendo l el número de bienes presente en la economía, a pesar que por teorema 2.4.3.2, la función z_h es continua en el interior del simplex S^{l-1} , se sabe que si las preferencias son estrictamente monótonas, la demanda de algún bien crecerá indefinidamente al acercarse los precios a un valor en la frontera del simplex S_{++}^{l-1} , es decir la demanda es discontinua en dicho valor, es decir la función z_h resulta discontinua en la frontera de S^{l-1} , esto motiva que definamos la función: $\bar{z}_h(p) = \text{Min}\{z_h(p), 1\}$, la que resulta continua para todo precio $p \in S^{l-1}$, puesto que si $p \in \text{Front } S^{l-1} \rightarrow \bar{z}_h(p) = 1$, es decir el problema de discontinuidad de z_h en la frontera de S^{l-1} ya no lo tiene \bar{z}_h .

De donde, la función: $\text{Max}\{0, \bar{z}_h\}$ es también continua en S^{l-1} , luego podemos definir una función continua: $\zeta: S^{l-1} \rightarrow S^{l-1}$, por:

$$\zeta_h(p) = \frac{p_h + \text{Max}\{0, \bar{z}_h(p)\}}{1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(p)\}}$$

Verifiquemos que $\zeta(p) \in S^{l-1}$, es evidente que: $1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(p)\} \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\sum_{h=1}^l \frac{p_h + \text{Max}\{0, \bar{z}_h(p)\}}{1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(p)\}} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(p)\}} \sum_{h=1}^l p_h + \text{Max}\{0, \bar{z}_h(p)\}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \sum_{h=1}^l \frac{p_h + \text{Max}\{0, \bar{z}_h(p)\}}{1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(p)\}} \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(p)\}} \left[\sum_{h=1}^l p_h + \sum_{h=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_h(p)\} \right] \end{aligned}$$

Y como $p_h \in S^{l-1} \rightarrow \sum_{h=1}^l p_h = 1$ y $\sum_{h=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_h(p)\} = \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(p)\}$, se deduce que:

$$\sum_{h=1}^l \frac{p_h + \text{Max}\{0, \bar{z}_h(p)\}}{1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(p)\}} = 1 \rightarrow \sum_{h=1}^l \zeta_h(p) \rightarrow \zeta(p) \in S^{l-1}$$

Puesto que S^{l-1} es un subconjunto compacto y convexo de \mathbb{R}^n , entonces por teorema del punto fijo de Brouwer S^{l-1} tiene un punto fijo \bar{p} , es decir:

$$\begin{aligned} \zeta_h(p) &= p_h, h = 1, 2, \dots, l \rightarrow \frac{p_h + \text{Max}\{0, \bar{z}_h(p)\}}{1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(p)\}} = p_h, h = 1, \dots, l \\ &\rightarrow p_h \left(1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(p)\} \right) = p_h + \text{Max}\{0, \bar{z}_h(p)\}, h = 1, 2, \dots, l \dots (*) \end{aligned}$$

A continuación demostraremos que este es el precio de equilibrio.

Por la Ley de Walras $p_h z_h(p) = 0$ y como:

$$\bar{z}_h(p) \leq z_h(p) \rightarrow \sum_{h=1}^l p_h \bar{z}_h(p) \leq \sum_{h=1}^l p_h z_h(p) = 0 \dots (**)$$

De otro lado, multiplicando (*) por $\bar{z}_h(\bar{p})$ y sumando sobre $h = 1, \dots, l$; juntamente con la ecuación (**), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^l \bar{z}_h(\bar{p}) \text{Max}\{0, \bar{z}_h(\bar{p})\} &\leq \sum_{h=1}^l p_h \bar{z}_h(\bar{p}) + \sum_{h=1}^l \bar{z}_h(\bar{p}) \text{Max}\{0, \bar{z}_h(\bar{p})\} \\ &= \sum_{h=1}^l p_h \bar{z}_h(\bar{p}) \left[1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(\bar{p})\} \right] \\ &\leq \sum_{h=1}^l p_h \bar{z}_h(\bar{p}) \left[1 + \sum_{j=1}^l \text{Max}\{0, \bar{z}_j(\bar{p})\} \right] = 0, \end{aligned}$$

Es decir:

$$\sum_{h=1}^l \bar{z}_h(\bar{p}) \text{Max}\{0, \bar{z}_h(\bar{p})\} \leq 0$$

Puesto que cada término de la sumatoria es no negativo, se tiene que:

$$\bar{z}_h(\bar{p}) \text{Max}\{0, \bar{z}_h(\bar{p})\} = 0$$

De donde se sigue que: $\bar{z}_h(\bar{p}) \leq 0 \rightarrow \text{Min}\{1, \bar{z}_h(\bar{p})\} = \bar{z}_h(\bar{p}) \rightarrow \bar{z}_h(\bar{p}) = z_h(\bar{p})$

De acuerdo a la Ley de Walras:

$pz(p) = 0, \forall p$ de donde si $\bar{z}_h(\bar{p}) < 0 \rightarrow \bar{p} = 0 \rightarrow \bar{p}_h = 0$, usando la monotonía de las preferencias se sigue que $x_h(\bar{p}) > M, \forall M \in \mathbb{R}$, lo que contradice que $\bar{z}_h(\bar{p}) < 0$, entonces se tiene que $\bar{z}_h(\bar{p}) = 0 \rightarrow 0 = \bar{z}_h(\bar{p}) = z_h(\bar{p})$

Por lo tanto $z_h(\bar{p}) = 0$, con lo cual hemos probado que \bar{p} es un equilibrio Walrasiano". ■

Capítulo 3: Asignaciones Pareto Optimales

3.1. Óptimo de Pareto

En la próxima sección, nos enfocaremos en explorar la existencia y las características de lo que se conoce como óptimos de Pareto. Demostraremos su existencia a partir del Lema de Zorn, tema que abordaremos en detalle en la subsección siguiente.

“En este capítulo, consideraremos economías n agentes y l bienes, cada agente será representado por la letra $i = 1, 2, \dots, n$ y cada bien por la letra $j = 1, 2, \dots, l$; con el símbolo \succsim_i representaremos las preferencias del agente i . Todos los agentes, a menos que se explicita otra cosa, tendrán el conjunto \mathbb{R}_+^l como espacio de consumo. Las dotaciones iniciales de cada agente estarán representadas por $w_i \in \mathbb{R}_+^l$.

Por las consideraciones anteriores, una economía quedará representada por el conjunto:

$$\varepsilon = \{(\mathbb{R}_+^l, \succsim_i, w_i), i = 1, 2, \dots, n\}$$

Definición 3.1.1 (Asignación de recursos o asignación): Una Asignación de recursos o asignación es un vector x de \mathbb{R}_+^{ln} , la que se dirá **factible** si $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n w_i = w$.

Definición 3.1.2 (Asignación Factible Racional): Una Asignación de recursos factible x es **racional** si $x_i \succsim_i w_i$ para todo i , es decir si para cada agente resulta ser al menos tan buena como su dotación inicial.

Definición 3.2 (Asignación Pareto Óptima): Una Asignación de recursos factible x es **Pareto Óptima** si no existe otra asignación factible y tal que $y_i \succ x_i$ para todo i a la vez que estrictamente preferida para al menos un agente.

El criterio de Pareto optimalidad es un criterio mínimo de eficiencia, supone la no posibilidad de repartir los recursos de una nueva forma sin perjudicar a alguien, si hacer esto fuera posible

implicaría la posibilidad de hacer más feliz a la sociedad en su conjunto aumentando el bienestar de algunos (eventualmente todos) los integrantes de la sociedad sin perjudicar a ninguno. No obstante no es un criterio de justicia social, lejos de esto obsérvese que una sociedad que asigne todos sus recursos a uno de sus integrantes y cero a todos los demás es Pareto eficiente, no obstante parecería no ser muy justa en el sentido de la distribución social de la riqueza.

3.1.1. El Lema de Zorn

Una serie de axiomas equivalentes, aparentemente ingenuos y triviales juegan en la matemática moderna un papel central y generalmente oculto, uno de ellos es **el axioma de elección** (este dice que un producto cartesiano formado por infinitos subconjuntos no vacíos es el mismo no vacío, es decir que es posible **elegir** un elemento en cada uno de los infinitos subconjuntos).

Cada uno de ellos puede ser demostrado a partir de otro, no obstante alguno debemos aceptar con valor de axioma. En este trabajo admitiremos como axioma el llamado **el lema de Zorn**.

Antes de enunciar el Lema de Zorn, recordemos las siguientes definiciones.

Definición 3.1.1.1 (Conjunto Parcialmente Ordenado): Un conjunto X está **parcialmente ordenado**, cuando existe un preorden φ que es antisimétrico, esto es si $(x, y) \text{ e } (y, x) \in \varphi$, entonces $x = y$. En términos de preferencias: si cada vez que $x \in X$ es indiferente a $y \in X$ entonces $x = y$.

Recordamos que una relación de preferencias es un preorden completo que define un orden en el espacio de clases de indiferencia (es decir una relación binaria completa reflexiva, antisimétrica y transitiva).

Definición 3.1.1.2 (Subconjunto totalmente ordenado): Se dice que un subconjunto $Y \subset X$ está **totalmente ordenado** si para todo $a, b \in Y$ se tiene(al menos) una de las relaciones $(a, b) \in \varphi$ o $(b, a) \in \varphi$.

Definición 3.1.1.3 (Cota Superior y Cota Inferior): Un elemento $x \in X$ es una **cota superior (inferior)** para $A \subset X$ si no existe $a \in A$ tal que a siga (anteceda) a x según el orden definido en X .

Definición 3.1.1.4 (Elemento Maximal y Elemento Minimal): Un elemento $x \in X$ es **maximal (minimal)** para X si no existe $y \in X$ sucesor (antecesor) de x en el orden de X .

Definición 3.1.1.5 (Conjunto inductivo): Se dice X es **inductivo** si todo subconjunto totalmente ordenado de X admite una cota superior.

Como dijimos anteriormente en este trabajo asumimos como axioma el siguiente lema y por lo tanto lo aceptamos como una verdad sin necesidad de demostración.

Lema 3.1.1. (Lema de Zorn): Si todo conjunto ordenado, inductivo y no vacío admite un elemento maximal.

3.1.2. Existencia del Óptimo de Pareto

Nuestra afirmación siguiente dice que en economías como la que presentamos en la sección 3.1, el conjunto de los óptimos de Pareto es no vacío. Para demostrar esta afirmación nos valdremos del lema de Zorn.

El concepto de espacio cociente será necesario para la demostración del siguiente teorema. Recordamos que una relación de equivalencia particiona al conjunto en el que está definida en clases de equivalencia, (ver subsección (1.1.3)). Llamaremos **espacio cociente** al espacio conformado por dichas clases. Cualquier elemento de una clase puede ser considerado como representante de la misma, en el sentido de que todos los de su clase y solamente estos estarán

relacionados con él a través de la relación de equivalencia considerada. En el caso del teorema de existencia del óptimo de Pareto, particionaremos el conjunto de asignaciones factibles mediante la **relación de indiferencia**.

Teorema 3.1. (Existencia del óptimo de Pareto): Para toda economía de intercambio puro, existe una asignación Pareto optimal que es individualmente racional.

Demostración, Sea A el conjunto de todas las asignaciones factibles, notemos como:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A: x_i \succsim_i w_i \text{ para cada } i\}$$

Consideremos el espacio cociente \mathcal{H}/\sim , recordemos que dos elementos x e y de \mathcal{H} están la misma clase si y solamente si $x_i \sim_i y_i$ (es decir si $x_i \succsim_i y_i$ y además $y_i \succsim_i x_i$) para cada i . Definiendo como $x \geq y$ dos elementos de \mathcal{H}/\sim , cada vez que $x_i \succsim_i y_i$ para cada i ; tendremos un orden parcial en dicho espacio de clases. Es claro que el conjunto de los Pareto óptimos coincide con la clase de los maximales del espacio cociente. Si probamos que cada cadena en este espacio tiene una cota superior en \mathcal{H} , usando el lema de Zorn podemos garantizar la existencia de un maximal en el espacio cociente, es decir que el conjunto de cotas superiores en \mathcal{H} es no vacío.

Para probar la existencia de una cota superior para cada cadena C en \mathcal{H}/\sim , basta con considerar a C como una red, como \mathcal{H} es compacto, existe un punto límite c para una subsucesión de elementos en la red, sin dificultad se ve que este elemento es una cota superior para C . "■

3.2. Teoremas del bienestar

La obtención del bienestar económico se logra a través de una distribución eficiente de los recursos, lo que subraya la importancia de investigar las condiciones bajo las cuales se alcanza este bienestar. Por esta razón, la presente sección se dedica a los conocidos como

teoremas del bienestar económico. Estos teoremas establecen una relación entre el concepto de equilibrio walrasiano y la noción de optimalidad según Pareto.

3.2.1. Primer Teorema del bienestar

En esta subsección, abordaremos la demostración del conocido primer teorema del bienestar económico. Este teorema se basa en la premisa de que cada agente posee preferencias continuas y localmente insaciables, siendo este último requisito fundamental para cumplir con la ley de Walras, necesaria para la demostración del teorema.

El teorema, por ejemplo, ilustra cómo la cantidad de manzanas que los agricultores están dispuestos a vender a un precio determinado depende directamente de ese precio. Es común que muchos agricultores quieran vender manzanas a s/.1.00, pero pocos lo harían a 1 céntimo. Del mismo modo, la cantidad de manzanas que los consumidores desean comprar a un precio específico también varía con ese precio. La mayoría de nosotros no pagaría más de 1 céntimo por una manzana, pero seríamos menos los que pagaríamos s/.1.00.

Esta dinámica entre lo que los vendedores están dispuestos a ofrecer y lo que los compradores están dispuestos a pagar conduce a una negociación hasta alcanzar un precio de equilibrio. Este precio de equilibrio es aquel en el que la oferta de manzanas satisface completamente la demanda.

En este punto de equilibrio, cualquier cambio en el precio que beneficie a una parte inevitablemente perjudicará a la otra. Por ejemplo, si el precio de equilibrio aumenta para que los agricultores obtengan mayores ganancias por cada manzana, habrá menos consumidores dispuestos a comprarlas. Algunos agricultores más astutos podrían beneficiarse significativamente de esta situación, pero otros se quedarán con sus productos sin vender. Si el precio disminuye, sucederá lo contrario: no habrá suficientes agricultores dispuestos a vender y algunos consumidores se quedarán sin manzanas o con menos de las que deseaban comprar.

Por lo tanto, en el precio de equilibrio, no existe una decisión beneficiosa que no tenga un impacto negativo en otros. Así, el precio de equilibrio representa una distribución eficiente de manzanas en términos de Pareto, ya que cualquier decisión tomada, aunque beneficie a algunos, perjudicará a otros. “Formalmente se tiene el siguiente teorema

Teorema (Primer teorema del bienestar): Para economías con agentes cuyas preferencias son continuas y localmente no saciables, toda asignación de recursos que forma parte de un equilibrio walrasiano es un óptimo de Pareto.

Demostración, Sea x una asignación de recursos de un equilibrio walrasiano.

Supongamos que no es óptimo de Pareto, es decir que existe otra asignación factible y tal que $y_i \succsim_i x_i$ para todo i y Siendo las preferencias localmente no saciables, se verifica que:

$p \sum_{i=1}^n y_i = p \sum_{i=1}^n x_i = p \sum_{i=1}^n w_i$, donde w_i representa las dotaciones iniciales del agente i . Dado que x_h verifica el problema de optimización del agente h ; es decir si $y_h > x_h$ se tiene que $py_h > pw_h$. Luego por ser p un elemento del interior de \mathbb{R}_+^l debe existir al menos un agente $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ para el que a precios p se cumple $py_k < pw_k$. Por lo tanto y_k pertenece al interior de la región presupuestaria del agente k , como por hipótesis las preferencias son localmente no saciables, existe z_k presupuestariamente factible para el agente k , tal que z_k es estrictamente preferible a y_k y por lo tanto a x_k , lo cual junto al hecho que z_k es presupuestariamente factible, contradice el hecho que x_k es solución del problema optimizador del agente k . ■

3.2.2. El Teorema de Hahn-Banach

Sea un espacio vectorial sobre E . Recordemos que una **funcional lineal** es una aplicación lineal definida sobre E , o sobre un subespacio vectorial de E , con valores en \mathbb{R} . El teorema siguiente se refiere a la extensión de un funcional definido sobre un subespacio vectorial de E a un funcional lineal definido sobre todo E . En la demostración de este teorema, llamado **teorema de Hahn-Banach** usaremos el lema de Zorn.

Teorema de Hahn-Banach (forma analítica): Sea una aplicación $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in E, \lambda > 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E \dots \dots (2)$$

Sean también $G \subset E$ un subespacio vectorial y $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que

$$g(x) \leq p(x), \forall x \in G \dots \dots \dots (3)$$

Entonces existe una forma lineal f definida sobre E que extiende a g , es decir

$$g(x) = f(x), \forall x \in G$$

Y tal que

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in E \dots \dots \dots (4)$$

Demostración, Consideremos el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} P = \{ & h: h: D(h) \subset E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ con } D(h) \text{ subespacio vectorial de } E, h \text{ lineal}, G \\ & \subset D(E), h \text{ extiende a } g, h(x) \leq p(x) \forall x \in D(h) \} \end{aligned}$$

La estrategia de la demostración será comprobar que el conjunto P cumple las hipótesis del lema de Zorn, luego P tiene un elemento maximal que denotaremos por f , y después mostraremos que $D(f) = E$, con lo cual concluiremos la demostración del teorema.

➤ **Mostremos que el conjunto P cumple las hipótesis del lema de Zorn.**

1. $P \neq \emptyset$. En efecto como $g: D(g) = G \subset E \rightarrow \mathbb{R}$, g es lineal $g(x) \leq p(x) \forall x \in G$, es decir $g \in P$, por lo tanto $P \neq \emptyset$.

2. P es inductivo. En efecto sea P dotado de la relación de orden

$$h_1 \leq h_2 \leftrightarrow (D(h_1) \subset D(h_2), h_2(x) = h_1(x) \forall x \in D(h_1))$$

Sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado de P , denotado por $Q = (h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mostremos que Q posee una cota superior.

Definamos:

$$D(h) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D(h_i) ; h(x) = h_i(x), \text{ si } x \in D(h_i)$$

Mostremos que $h \in P$

Como la unión arbitraria de espacios vectoriales es también un espacio vectorial, de donde $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} D(h_i) = D(h)$ es también un subespacio vectorial. Por definición se tiene que $h = h_i$ sobre $D(h_i)$ y como para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que h_i es lineal se concluye que también h es lineal.

De otro lado $G \subset D(h_i), i \in \mathbb{N} \rightarrow G \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D(h_i) = D(h) \rightarrow G \subset D(h)$. De donde $g(x) = h_i(x), x \in G \rightarrow g(x) = h(x), x \in G$, es decir h extiende a G .

Además como $g(x) \leq p(x), \forall x \in D(h_i) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D(h_i) = D(h)$

$$\rightarrow g(x) \leq p(x), \forall x \in D(h)$$

Por lo tanto $h \in P$

Ahora mostremos que $h \in P$ es una cota superior de Q

Como $D(h_i) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D(h_i) = D(h) \rightarrow D(h_i) \subset D(h) \forall i \in \mathbb{N}$ y además por definición

$$h(x) = h_i(x), \text{ si } x \in D(h_i)$$

Entonces $h_i \leq h \forall i \in \mathbb{N}$ por lo tanto $h \in P$ es una cota superior de Q .

De 1 y 2, se sigue que P satisface las hipótesis del lema de Zorn, por lo tanto P tiene un elemento maximal que denotaremos por f .

➤ **Mostraremos que $D(f) = E$.** Razonemos por reducción al absurdo, supongamos que $D(f) \neq E$, luego $\exists x_0 \in (E - D(f))$.

Definamos un funcional lineal h poniendo $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$, con lo cual es un subespacio vectorial de E . Ahora como $G \subset D(f) \subset D(h) \rightarrow G \subset D(h)$. Para $x \in D(f)$, pongamos $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha, t \in \mathbb{R}$, con α una constante que determinaremos posteriormente de modo que $h \in P$.

Usando la definición dada anteriormente para h , para $x = x + 0x_0 \in G$. Entonces:
 $h(x) = h(x + 0x_0) = f(x) + 0\alpha = f(x) = g(x), \forall x \in G$, puesto que $f \in P$, de donde $h(x) = g(x), \forall x \in G$, es decir h extiende a g .

Para concluir que $h \in P$, solo nos resta comprobar que $h(x) \leq p(x), x \in D(h)$. Es decir para $x + tx_0 \in D(h)$, con $x \in D(f), t \in \mathbb{R}$, debemos comprobar que:

$$h(x + tx_0) \leq p(x + tx_0) \leftrightarrow f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \forall x \in D(h), t \in \mathbb{R} \dots (*_1)$$

La igualdad $(*_1)$ se cumple trivialmente para $t = 0$, puesto que como vimos líneas arriba que $h(x) = f(x) \leq p(x)$, pues $f \in P$, de donde se sigue que en este caso se cumple que $h(x) \leq p(x)$.

Nótese que por la hipótesis (1), se tiene:

$$p(x + tx_0) = tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right), t > 0$$

$$\text{Si } t < 0 \rightarrow -t > 0 \rightarrow p(x + tx_0) = p\left(x - (-tx_0)\right) = -tp\left(\frac{(-x)}{t} - x_0\right)$$

Usando las igualdades anteriores en $(*_1)$, se obtiene:

$$f(x) + t\alpha \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right), t > 0 \rightarrow f\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha \leq p\left(\frac{x}{t} + x_0\right), \forall x \in D(f)$$

Y para $t < 0$

$$f(x) + t\alpha \leq -tp\left(\frac{(-x)}{t} - x_0\right) \rightarrow f\left(\frac{-x}{t}\right) - \alpha \leq p\left(\frac{-x}{t} - x_0\right), \forall x \in D(f)$$

Lo cual permite reescribir $(*_1)$, del modo siguiente:

$$(*_2) \dots \dots \begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0), \forall x \in D(f) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0), \forall x \in D(f) \end{cases}$$

De donde se obtiene:

$$f(x) - p(x - x_0) \leq \alpha \leq p(x + x_0) - f(x), \forall x \in D(f)$$

Luego debemos elegir α de modo que verifique:

$$\sup_{y \in D(f)} \{f(y) - p(y - y_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} \{p(x + x_0) - f(x)\}$$

Lo cual se deduce como sigue:

$$x + y = (x + x_0) + (y - x_0)$$

Luego $\forall x, y \in D(f)$ se tiene:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \leq p(x + y) = p((x + x_0) + (y - x_0))$$

$$\rightarrow f(x) + f(y) \leq p((x + x_0) + (y - x_0)) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

$$\rightarrow f(x) + f(y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

$$\rightarrow f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x)$$

Usando la densidad en \mathbb{R} podemos elegir α de modo que:

$$\sup_{y \in D(f)} \{f(y) - p(y - y_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} \{p(x + x_0) - f(x)\}$$

De donde se cumple que $h(x) \leq p(x), x \in D(h)$ de donde $h \in P$ y como por definición $D(f) \subset D(h) \rightarrow f \leq h$, lo cual contradice la maximilidad de f , es decir debe cumplirse que $D(h) = E$, con lo cual concluimos la demostración del teorema de Hahn-Banach en su forma analítica. ■

Definición 3.2.2.1 (Subconjunto absorbente): Se dice un subconjunto U de un espacio vectorial E es **absorbente** cuando para cada $x \in E$ existe un número real positivo r tal que $x \in rU$, es decir, cuando $\mathbb{R}^+ U = E$. Es claro que entonces $0 \in U$ y además U debe contener un punto en cada dirección del espacio, podemos decir que 0 está “rodeado” por puntos de U .

Si U es un conjunto convexo y absorbente, para cada $x \in E$ tenemos un $r > 0$ tal que $\frac{x}{r} \in U$, con lo que el segmento de extremos 0 y $\frac{x}{r}$ estará contenido en U , luego U contiene un segmento no trivial en todas las direcciones del espacio E , si bien la longitud de dicho segmento depende de la dirección. Esto nos lleva a pensar que 0 es una especie de “punto interior” de U . De donde diremos que un subconjunto convexo U de un espacio vectorial E es absorbente si 0 es un punto interior de U . Naturalmente la misma idea se aplica salvo traslación a cualquier elemento del espacio: si A es un conjunto convexo y $a_0 \in A$, el hecho

de que $A - a_0$ sea absorbente significa que a_0 es un punto interior de A en el mismo sentido algebraico que en el elemento 0 .

Teorema de Hahn-Banach (forma geométrica: separación de convexos en espacios vectoriales): Sea E un espacio vectorial y A, B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de E . Supongamos que existe un punto $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente. Entonces existe un funcional lineal no nulo f en E que separa A y B .

Demostración, Empezamos con una observación sencilla: separar A y B es lo mismo que separar $A - B$ y $\{0\}$, siendo claro además que $A - B$ es convexo y que $0 \notin A - B$, ya que $A \cap B = \emptyset$. Así que separar dos conjuntos convexos es lo mismo que separar un conjunto convexo de un punto.

En nuestro caso hacemos además una traslación del problema. Concretamente, junto con el punto $a_0 \in A$ que por hipótesis hace que $A - a_0$ sea absorbente, fijamos un $b_0 \in B$ arbitrario y tomamos $U = (A - a_0) - (B - b_0)$. Es claro que U es un subconjunto convexo de E y también es absorbente, ya que $A - a_0 \subseteq U$. Escribiendo $x_0 = b_0 - a_0$, la condición $A \cap B = \emptyset$ nos asegura que $x_0 \notin U$, de donde nuestro problema se reduce a separar U del punto x_0 .

Usando que U es absorbente definimos una función $\rho: E \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\rho(x) = \inf\{r > 0: x \in rU\}, x \in E$$

Puesto que $\rho(x) \leq r, x \in E$. En particular para $x \in U$: $\rho(x) \leq 1$, de donde $\rho(x) \leq 1, \forall x \in U$.

De otro lado como $x_0 \notin U$, deducimos que $\rho(x_0) \geq 1$, puesto que si ocurre que $\rho(x_0) < 1$, existiría r con $0 < r < 1$ tal que $x_0 \in rU$, como $0 \in U$ (convexo) se tiene $0 \in rU$, de donde $x_0 \in rU \subseteq rU + (1 - r)U = U$, es decir $x_0 \in U$ ($\rightarrow \leftarrow$)

➤ **Mostremos que $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x), \lambda \in \mathbb{R}^+$**

Primero mostraremos que $\lambda \rho(x) \leq \rho(\lambda x)$

Sea $\bar{\gamma} = \rho(\lambda x) = \text{Inf}\{\gamma > 0: \lambda x \in \gamma U\}$, luego $\exists u_1 \in U: \lambda x = \bar{\gamma} u_1 \rightarrow x = \frac{\bar{\gamma}}{\lambda} u_1$

$$\rightarrow \frac{\bar{\gamma}}{\lambda} \in \{r > 0: x \in rU\}$$

Luego por definición de ínfimo se sigue que

$$\rho(x) = \text{Inf}\{r > 0: x \in rU\} \leq \frac{\bar{\gamma}}{\lambda}$$

$$\rightarrow \rho(x) \leq \frac{\bar{\gamma}}{\lambda}$$

$$\rightarrow \lambda \rho(x) \leq \bar{\gamma} = \rho(\lambda x)$$

$$\rightarrow \lambda \rho(x) = \rho(\lambda x)$$

Ahora mostraremos que $\rho(\lambda x) \leq \lambda \rho(x)$

Sea $\tilde{r} = \rho(x) = \text{Inf}\{r > 0: x \in rU\}$, luego $\exists u_1 \in U: x = \tilde{r} u_1 \rightarrow \lambda x = \lambda(\tilde{r} u_1)$

$$\rightarrow \lambda x = (\lambda \tilde{r}) u_1 \rightarrow \check{\gamma} = \lambda \tilde{r} \in \{\gamma > 0: \lambda x \in \gamma U\}$$

$$\rightarrow \rho(\lambda x) = \text{Inf}\{\gamma > 0: \lambda x \in \gamma U\} \leq \check{\gamma} = \lambda \tilde{r} = \lambda \rho(x)$$

De donde: $\rho(\lambda x) \leq \lambda \rho(x)$

Por lo tanto: $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x), \lambda \in \mathbb{R}^+$

➤ Sean $x, y \in E, \varepsilon > 0 \rightarrow \rho(x) < \rho(x) + \varepsilon \rightarrow \frac{\rho(x)}{\rho(x) + \varepsilon} < 1$

Puesto que: $\rho\left(\frac{x}{\rho(x) + \varepsilon}\right) = \frac{\rho(x)}{\rho(x) + \varepsilon} < 1 \rightarrow \frac{x}{\rho(x) + \varepsilon} \in U$

Análogamente se prueba que $\frac{y}{\rho(y) + \varepsilon} \in U$. Así usando el hecho que U es convexo se tiene que:

$\frac{tx}{\rho(x) + \varepsilon} + \frac{(1-t)y}{\rho(y) + \varepsilon}$. Para todo $t \in [0, 1]$, en particular lo anterior es válido cuando $t = \frac{\rho(x) + \varepsilon}{\rho(x) + \rho(y) + 2\varepsilon}$, se deduce que $\frac{x+y}{\rho(x) + \rho(y) + 2\varepsilon} \in U \rightarrow \rho\left(\frac{x+y}{\rho(x) + \rho(y) + 2\varepsilon}\right) \leq 1$. De donde:

$$\rightarrow \frac{\rho(x+y)}{\rho(x) + \rho(y) + 2\varepsilon} \leq 1$$

$$\rightarrow \rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y) + 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

$$\rightarrow \rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$$

Ahora consideramos el subespacio $\mathbb{R}x_0$ de E y el funcional lineal g definido en dicho subespacio por $g(\lambda x_0) = \lambda \rho(x_0) \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Observamos que g está dominado por ρ , ya que para $\lambda > 0$ tenemos $g(\lambda x_0) = \rho(\lambda x_0)$, mientras que para $\lambda \leq 0$, se tiene que $g(\lambda x_0) \leq 0 \leq \rho(\lambda x_0)$. Aplicando la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach tenemos un funcional lineal f en E que extiende a g y $g \leq \rho$.

Vamos a comprobar que f es el funcional que buscamos. En efecto, por una parte tenemos $f(x_0) = \rho(x_0) \geq 1$, en particular $f \neq 0$, mientras que para cualquier $x \in U$ será $f(x) \leq \rho(x) \leq 1$. Por tanto, f separa el conjunto U del punto x_0 . Finalmente, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, usando que $a - b + x_0 = (a - a_0) - (b - b_0) \in U$ tenemos:

$$f(a) - f(b) + f(x_0) = f((a - a_0) - (b - b_0)) \leq \rho((a - a_0) - (b - b_0)) \leq 1$$

$$\rightarrow f(a) - f(b) + f(x_0) \leq 1 \leq f(x_0)$$

$$\rightarrow f(a) - f(b) + f(x_0) \leq f(x_0)$$

$$\rightarrow f(a) - f(b) \leq 0$$

$$\rightarrow f(a) \leq f(b), a \in A \text{ y } b \in B$$

Como $a \in A$ y $b \in B$ son arbitrarios se tiene que f nos separa los conjuntos A y B .

3.2.3. Segundo Teorema del bienestar

El siguiente teorema es un recíproco parcial del primer teorema del bienestar.

Antes de enunciar y demostrar el **Segundo teorema del bienestar**, presentamos algunos resultados que nos ayudaran a explicar de mejor manera la demostración de este teorema.

Sean \bar{x} un óptimo de Pareto, y $w_i \in \mathbb{R}_+^L - \{0\}$ las dotaciones iniciales de los agentes cuyas preferencias son continuas, estrictamente crecientes y convexas.

Definamos los conjuntos:

$$A = \{z \in \mathbb{R}_+^L : z = \sum_{i=1}^n z_i, z_i \succeq_i \bar{x}_i \forall i; \text{ y } z_k \succ_k \bar{x}_k \text{ para algún } k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+^L : x = \sum_{i=1}^n w_i\}$$

Afirmación 1: A y B son conjuntos no vacíos.

Demostración, Por definición de óptimo de Pareto se tiene que $\bar{x} \in B \rightarrow B \neq \emptyset$, de otro lado si definimos $z' = \sum_{i=1}^n \bar{x}'_i$; $\bar{x}'_k = \bar{x}_k, \forall i \neq k; \bar{x}'_k = \bar{x}_k + e_j$; $e_j \in \mathbb{R}_+^l$ con ceros en todas sus coordenadas distinta de la j – ésima, a la cual le asignamos el valor 1. Luego se tiene que $\bar{x}'_k \geq \bar{x}_k; \forall i = \{1, 2, \dots, n\}$, luego usando la hipótesis que las preferencias son estrictamente crecientes se deduce que $\bar{x}'_i \succsim_i \bar{x}_i \forall i$; $y \bar{x}'_k \succ \bar{x}_k$; de donde se sigue que $z' \in A \rightarrow A \neq \emptyset$.

Afirmación 2: A y B son conjuntos disjuntos.

Demostración, En efecto supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces existe $x \in A \cap B$, luego existe otra asignación factible x tal que $x_i \succsim_i \bar{x}_i$ para todo i a la vez que estrictamente preferida para al menos un agente, lo cual contradice el hecho que \bar{x} es un óptimo de Pareto. Por lo tanto $A \cap B = \emptyset$.

Ahora demostremos que ambos conjuntos son convexos.

Afirmación 3: A y B son conjuntos convexos.

Demostración, Sea $\lambda \in \langle 0; 1 \rangle$.

➤ **Demostremos que A es un conjunto convexo,** elijamos dos elementos $a, b \in A$, de donde se obtiene:

$$a, b \in \mathbb{R}_+^l: a = \sum_{i=1}^n a_i, a_i \succsim_i \bar{x}_i \forall i; y z_k \succ_k \bar{x}_k \text{ para algún } k \in \{1, 2, \dots, n\}; y$$

$$b = \sum_{i=1}^n b_i, b_i \succsim_i \bar{x}_i \forall i; y z_m \succ_m \bar{x}_m \text{ para algún } m \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Puesto que $\lambda a + (1 - \lambda)b = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i + (1 - \lambda)b_i)$. Además como las preferencias $\succsim_i \forall i$ son convexas se tiene que:

$$\lambda a_i + (1 - \lambda)b_i \succsim_i \bar{x}_i \forall i; Y \text{ como } a_i \neq b_i \forall i (\text{si no } A \cap B \neq \emptyset) \rightarrow$$

$$\exists \tilde{k} \in \{1, 2, \dots, n\}: \lambda a_{\tilde{k}} + (1 - \lambda)b_{\tilde{k}} \succ_{\tilde{k}} \bar{x}_{\tilde{k}}$$

De lo anterior se deduce que $\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b} \in \mathbf{A}$; por lo tanto \mathbf{A} es un conjunto convexo.

➤ **Demostremos que \mathbf{B} es un conjunto convexo**, en efecto: Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B}$; $\lambda \in \langle 0; 1 \rangle$, luego se tiene que:

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda \mathbf{w}_i + (1 - \lambda) \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \in \mathbf{B}$$

Por lo tanto \mathbf{B} es un conjunto". ■

El segundo teorema del bienestar económico nos indica que, en un contexto de competencia perfecta (donde los precios se determinan sin la intervención de agentes económicos), como en una economía de intercambio puro, cualquier redistribución de riqueza efectuada por el Estado (a través de la recaudación de impuestos y su posterior inversión en infraestructuras como carreteras, hospitales, universidades, pensiones, etc.) será sostenida por el mercado, siempre y cuando sea eficiente en términos de Pareto. Esto significa que el mercado ajustará y encontrará nuevos precios de equilibrio que satisfacen la demanda total bajo esta nueva distribución de riqueza.

En otras palabras, el teorema sugiere que la responsabilidad principal del Estado debería ser la redistribución adecuada de la riqueza. Una vez que esta redistribución se ha realizado, los mercados por sí mismos se encargarán de alcanzar un punto de equilibrio acorde con esta nueva distribución. Diferentes formas de redistribución resultarán en diferentes equilibrios de mercado, pero el Estado no necesita intervenir en este proceso de ajuste del mercado. Su rol esencial es decidir la manera más apropiada de distribuir la riqueza, y luego dejar que los mercados se ajusten y alcancen el equilibrio por sí mismos. Ahora usando lo anterior y el teorema de separación estamos en condiciones no solo de enunciar sino también demostrar el llamado **Segundo teorema del bienestar**.

Teorema (Segundo teorema del bienestar): Para economías con agentes cuyas preferencias son continuas, estrictamente crecientes y convexas con dotaciones iniciales $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}_+^L - \{\mathbf{0}\}$; se cumple que si $\bar{\mathbf{x}}$ es un óptimo de Pareto entonces existe \mathbf{p} estrictamente positivo, tal que

el par (\bar{x}, p) es bajo una determinada redistribución de las dotaciones iniciales un equilibrio walrasiano.

Demostración, Sean los conjuntos:

$$A = \{z \in \mathbb{R}_+^l : z = \sum_{i=1}^n z_i, z_i \succsim_i \bar{x}_i \forall i; y z_k \succ_k \bar{x}_k \text{ para algún } k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+^l : x = \sum_{i=1}^n w_i\}$$

Por las **afirmaciones 1, 2 y 3** se tiene que **A y B**, son dos conjuntos no vacíos, disjuntos y convexos. Además como el interior de cualquier conjunto es también un subconjunto de dicho conjunto se tiene que tanto **Int A** como el **Int B** son no vacíos, de donde se cumplen las hipótesis del teorema de separación, es decir que existe un funcional **f** tal que **f(z) ≥ f(x)** para todo **z ∈ A** y para todo **x ∈ B**.

Como vimos en la sección **2.4.1**, todo funcional sobre \mathbb{R}_+^l , todo funcional puede ser representado por un elemento **p** del propio espacio tal que su producto interno **pz = f(z)**, de donde **pz ≥ px** para todo **z ∈ A** y para todo **x ∈ B**.

Ahora debemos demostrar que **p** puede ser interpretado como un precio, para lo cual será suficiente demostrar que **f(y) > 0, ∀ y ≠ 0, y ∈ ℝ₊^l**.

Si definimos como en la **afirmación 1** $z' = \sum_{i=1}^n \bar{x}'_i; \bar{x}'_k = \bar{x}_k, \forall i \neq k; \bar{x}'_k = \bar{x}_k + e_j; e_j \in \mathbb{R}_+^l$ con ceros en todas sus coordenadas distinta de la **j** –ésima, a la cual le asignamos el valor **1**, se tiene que **z' ∈ A y x' ∈ B → pz' ≥ px'**.

Puesto que $\bar{x}'_k = \bar{x}_k + e_j \rightarrow \bar{x}'_k - \bar{x}_k = e_j \rightarrow p(z' - \bar{x}') = pe_j = p_j > 0$, con **j** arbitrario por lo tanto **p** es siempre positivo, es decir puede ser interpretado como un precio.

Nótese que cada vez que para algún i exista una cesta de bienes x'_i tal que $x'_i \succsim_i \bar{x}_i$ se cumple que $px'_i \geq p\bar{x}_i$.

Ahora probaremos que efectivamente bajo una determinada redistribución del ingreso (dotaciones iniciales), el par (p, \bar{x}) es un equilibrio walrasiano.

Consideremos dotaciones iniciales \bar{w}_i tales que aseguren para cada agente, niveles de riqueza $p\bar{w}_i = p\bar{x}_i$; las que pueden lograrse con transferencia de riqueza entre los agentes de la economía.

De esta forma para la economía $\mathcal{E} = \{(\mathbb{R}_+^l, \succsim_i, \bar{w}_i), i = 1, 2, \dots, n\}$, se tiene que si $x_i \succ_i \bar{w}_i \rightarrow px_i \geq p\bar{w}_i$. Para que el par (p, \bar{x}_i) sea un equilibrio walrasiano hace falta probar la estricta desigualdad.

Puesto que consideremos que cada agente tiene dotaciones iniciales no nulas se deduce que x_i es no nulo y como p es un vector con coordenadas estrictamente positivas entonces usando la densidad en \mathbb{R} , existe para cada agente una canasta de bienes x''_i , tal que $px''_i < p\bar{x}_i = p\bar{w}_i$

Supongamos ahora que $px_i = p\bar{w}_i$ y consideremos la combinación convexa:

$y_i = \alpha x_i + (1 - \alpha)x''_i$, usando la continuidad de las preferencias, si α es cercano al valor 1 se tiene que $y_i \succ_i \bar{x}_i$.

$$\begin{aligned} \text{De otro lado, } py_i &= p(\alpha x_i + (1 - \alpha)x''_i) = \alpha px_i + (1 - \alpha)px''_i = \alpha p\bar{w}_i + (1 - \alpha)px''_i \\ &\rightarrow py_i = \alpha p\bar{w}_i + (1 - \alpha)px''_i < \alpha p\bar{w}_i + (1 - \alpha)p\bar{w}_i \end{aligned}$$

$$\rightarrow py_i < p\bar{w}_i$$

Es decir para el agente i , existe una canasta de bienes y_i , tal que $y_i \succ_i \bar{x}_i$; $py_i < p\bar{w}_i$; lo cual contradice la optimalidad de \bar{x}_i , pues y_i le gusta a i más que \bar{x}_i y le cuesta mucho menos. ■

CONCLUSIONES

1. En un estudio previo sobre una economía de intercambio puro, se encontró que si los agentes económicos disponían de dotaciones iniciales y tenían preferencias que eran continuas, estrictamente convexas y estrictamente crecientes, entonces dicha economía presentaba un equilibrio walrasiano.
2. En una economía de intercambio puro, se garantizó la existencia de un óptimo de Pareto mediante la aplicación del Lema de Zorn.
3. En un estudio realizado sobre una economía de intercambio puro, se observó que cuando los agentes económicos poseían preferencias continuas y localmente insaciabiles, cualquier asignación de recursos que formaba parte de un equilibrio walrasiano resultaba ser un óptimo de Pareto.
4. En el estudio de economías de intercambio puro, donde los agentes tenían preferencias continuas, estrictamente crecientes y convexas, junto con dotaciones iniciales específicas, se encontró que si existía un óptimo de Pareto, entonces, aplicando la forma geométrica del teorema de Hahn-Banach, se podía garantizar la existencia de un equilibrio eficiente..

REFERENCIAS

- Aliprantis, C. & Border K. (2006). *Infinite Dimensional Analysis*. Springer-Verlag, New York.
- Brezis, H. (1984). *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial S.A, Madrid.
- Debreu, G. (1973). *Teoría del Valor*, Bosch, Casa Editorial, Barcelona.
- Hervés, C. & García, E. (2004). *El poder de veto de la gran coalición, investigaciones económicas*. vol. XXVIII (3), 489-513.
- Lozano, F. (1997). *El modelo Arrow-Debreu es un modelo estático*. Cuadernos de Economía, v. XVI, n. 26, 21-46.
- Monsalve, S. (2010). *A cien años de la muerte de León Walras I: sobre su obra original*, Cuadernos de Economía; 29(53), 287-319.
- Munkres, J. (2002). *Topología, Segunda Edición*, Prentice Hall, Madrid.
- Mas-Colell, A. & Winston, J. (1995). *Green Microeconomic theory*, Oxford University Press.
- Royden, H. (1971). *Real Analysis*, the MacMillan Company, New York.
- Romero, A. (2002). *Primera edición: Marzo de 2002* © Alberto Romero 2002.
<https://n9.cl/nq3o1>

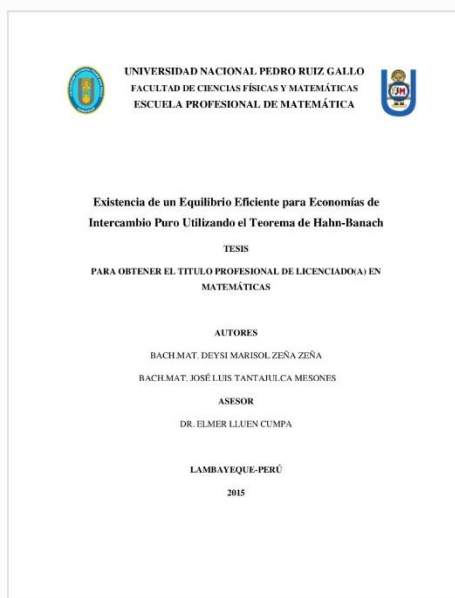


Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por **Turnitin**. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Deysi Marisol Zeña Zeña
Título del ejercicio: Quick Submit
Título de la entrega: Existencia de un Equilibrio Eficiente para Economías de Inte...
Nombre del archivo: EQUILIBRIO_EFICIENTE_PARA_ECONOM_AS_DE_INTERCAMBI...
Tamaño del archivo: 736.17K
Total páginas: 88
Total de palabras: 16,167
Total de caracteres: 89,074
Fecha de entrega: 08-ene.-2024 03:19a. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre... 2267819641



Dr. Luén Cumpa Elmer
Asesor

Existencia de un Equilibrio Eficiente para Economías de Intercambio Puro Utilizando el Teorema de Hahn-Banach

INFORME DE ORIGINALIDAD

16%

INDICE DE SIMILITUD

16%

FUENTES DE INTERNET

1%

PUBLICACIONES

1%

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	hdl.handle.net	11%
	Fuente de Internet	
2	repositorio.unprg.edu.pe	2%
	Fuente de Internet	
3	www.tptp.org	1%
	Fuente de Internet	
4	publicaciones.eco.uaslp.mx	1%
	Fuente de Internet	
5	decon.edu.uy	1%
	Fuente de Internet	
6	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo	<1%
	Trabajo del estudiante	
7	kipdf.com	<1%
	Fuente de Internet	
8	1library.co	<1%
	Fuente de Internet	

Dr. Lluén Cumpa Elmer
Asesor

9	iranapolinar.files.wordpress.com	<1 %
	Fuente de Internet	
10	documents.mx	<1 %
	Fuente de Internet	
11	A. D. DARBISHIRE. "ON THE RESULT OF CROSSING JAPANESE WALTZING WITH ALBINO MICE", Biometrika, 1904	<1 %
	Publicación	
12	Submitted to Universidad de Burgos UBUCEV	<1 %
	Trabajo del estudiante	

Excluir citas Activo
Excluir bibliografía Activo

Excluir coincidencias < 15 words



Dr. Lluén Cumpa Elmer
Asesor