UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Teoría homológica singular y cálculo de algunos grupos de homología"

Tesis
Para obtener el título profesional de
Licenciado en Matemáticas

presentado por:

Bach. Mat. Edwin Jhon Núñez Mendoza

Asesor
Dr. Mat. Burga Barboza Rubén Esteban

Lambayeque – Perú
Febrero 2015

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Escuela Profesional De Matemática

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “Teoría homológica singular y cálculo de algunos grupos de homología”, presentado por el Bach. Mat. Edwin Jhon Núñez Mendoza en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Dr. Andrés Heleodoro Figueroa Alvarado
Presidente del Jurado

M.Sc.Betty Rimarachín López
Secretario del Jurado

Mg. Adelmo Pérez Herrera
Vocal del Jurado

Fecha de defensa: 18 de agosto de 2015

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

“TEORÍA HOMOLÓGICA SINGULAR Y CÁLCULO DE ALGUNOS GRUPOS DE HOMOLOGÍA”

Bach. Mat. Edwin Jhon Núñez Mendoza

Autor

Dr. Mat. Burga Barboza Rubén Esteban

Asesor

Lambayeque – Perú

Febrero del 2015

Acta de Sustentación Nº 079-2015 – D/FACFyM
(Sustentación Autorizada por Resolución Nº 936-2015-D/FACFyM

En la ciudad de Lambayeque, siendo las 12:00 m del día 18 de Agosto del 2015, se reunieron en la sala de sustentaciones los miembros del Jurado designados mediante Resolución Nº 360-2014-D/FACFyM los docentes

Dr Andrés Heleodoro Figueroa Alvarado — Presidente
M.Sc Betty Rimarachin López — Secretario
Mg. Adelmo Pérez Herrera — Vocal

Para recibir el trabajo de tesis titulado:

"Teoría Homológica Singular y cálculo de algunos grupos de Homología"

desarrollado por el Bachiller en Matemáticas, Edwin Jhon Nuñez Mendoza.

Despues de escuchar la exposición y las respuestas a las preguntas formuladas por los miembros del Jurado se acordó aprobar el trabajo por mayoría con el calificativo de BUENO.

En consecuencia, el Bachiller en referencia queda apto para recibir el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas, de acuerdo a la Ley Universitaria, el Estatuto y Reglamento de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Lambayeque.

OBSERVACIONES:

No asistio a la sustentación el profesor Magister Adelmo Perez Herrera.

Para constancia del hecho firman

Dr. Andrés Heleodoro Figueroa Alvarado

M.Sc. Betty Rimarachin López
Secretaria

CERTIFICO: Que, es copia fiel del original
Fecha: 02 / 02 / 2024
Dr. Marco Antonio Martin Peralta Lui
SECRETARIO DOCENTE - FACFyM
VÁLIDO PARA TRÁMITES INTERNOS DE LA UNPRG

CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, **Dr. Mat. Burga Barboza Rubén Esteban**, usuario revisor del documento titulado: **"Teoría homológica singular y cálculo de algunos grupos de homología"**, cuyo autor es: Bach. **Nuñez Mendoza Edwin Jhon** identificado con DNI 44494126, ha arrojado un porcentaje de similitud de 17%, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 22 de febrero de 2024

Dr. Mat. Burga Barboza Rubén Esteban
DNI: 16561069
Asesor

AGRADECIMIENTOS

Es mi deseo como sencillo gesto de agradecimiento, dedicarles mi humilde obra de Trabajo de tesis en primera instancia a Dios quien me dio la fortaleza, fe, salud y esperanza para alcanzar este anhelo que se vuelve una realidad tangible, siempre estuvo a mi lado y me doto de grandes dones y talentos que hoy puedo utilizar en mi vida, luego a mis padres, quienes permanentemente me apoyaron con espíritu alentador, contribuyendo incondicionalmente a lograr las metas y objetivos propuestos.

Dedico este trabajo de igual manera a mi asesor Dr. Rubén Burga Barboza a quien me han orientado en todo momento en la realización de este proyecto y cuyas aportaciones ayudaron a convertirme en una gran persona y profesional en un futuro no muy lejano.

A los docentes que me han acompañado durante el largo camino,brindándome siempre su orientación con profesionalismo ético en la adquisición de conocimientos y afianzando mi formación como estudiante universitario.

DEDICATORIA

Con todo mi cariño y mi amor para Dios y las personas que hicieron todo en la vida para que yo pudiera lograr mis sueños, por motivarme y darme la mano cuando sentía que el camino se terminaba, a ustedes por siempre mi corazón y mi agradecimiento.

A tu paciencia y comprensión, preferiste sacrificar tu tiempo para que yo pudiera cumplir con el mío. Por tu bondad y sacrificio me inspiraste a ser mejor para tí, ahora puedo decir que esta tesis lleva mucho de tí, gracias por estar siempre a mi lado, Katerynne.

A mis maestros que en este andar por la vida, influyeron con sus lecciones y experiencias en formarme como una persona de bien y preparada para los retos que pone la vida, a todos y cada uno de ellos les dedico cada una de estás páginas de mi tesis.

Resumen

El trabajo de investigación abordó aspectos avanzados de la teoría homológica singular y el cálculo de grupos de homología en contextos topológicos específicos. Se inicia definiendo una categoría admisible como una subcategoría de pares topológicos que cumple con ciertas propiedades estructurales. Este enfoque permitió refinar y extender el uso de categorías en topología algebraica. El estudio detalló los axiomas de Eilenberg-Steenrod, fundamentales en la teoría de homología y cohomología. Además se expone cómo estos axiomas establecen un marco para entender las relaciones entre diferentes tipos de homologías y la estructura subyacente de espacios topológicos. Mediante la utilización de funtores entre dos categorías relevantes, la de espacios topológicos y la de grupos abelianos, se ha desarrollado una teoría de homología singular. Se verificó que la homología singular cumple con los axiomas de Eilenberg-Steenrod, reforzando su validez y aplicabilidad en un marco teórico amplio. Finalmente, el estudio logró aplicaciones concretas al calcular los grupos de homología para objetos topológicos fundamentales como el punto, la esfera, el plano proyectivo real y el toro. Estos cálculos no solo ilustran la utilidad de la teoría desarrollada, sino que también proporcionan ejemplos claros de cómo se pueden manejar espacios de diferente complejidad dentro del mismo marco teórico.

Palabras clave: Homológica singular, grupos de homología, funtores y axiomas de Eilenberg-Steenrod.

Abstract

The research work addressed advanced aspects of singular homology theory and the computation of homology groups in specific topological contexts. It starts by defining an admissible category as a subcategory of topological pairs satisfying certain structural properties. This approach allowed refining and extending the use of categories in algebraic topology. The study detailed the Eilenberg-Steenrod axioms, fundamental in homology and cohomology theory. In addition, it is shown how these axioms establish a framework for understanding the relationships between different types of homologies and the underlying structure of topological spaces. By using functors between two relevant categories, that of topological spaces and that of abelian groups, a singular homology theory has been developed. It was verified that singular homology complies with the Eilenberg-Steenrod axioms, reinforcing its validity and applicability in a broad theoretical framework. Finally, the study achieved concrete applications by calculating homology groups for fundamental topological objects such as the point, the sphere, the real projective plane and the torus. These calculations not only illustrate the usefulness of the developed theory, but also provide clear examples of how spaces of different complexity can be handled within the same theoretical framework.

Keywords: Singular homology, homology groups, functors and Eilenberg-Steenrod axioms.

Índice general

Introducción

En la Topología Algebraica existen diferentes teorías de homología. Entre las más conocidas se encuentran la homología: singular, simplicial y celular. La idea de homología singular es introducida en 1944 por S.Eilenberg (1913-1998). Lefschetz había dado en 1933 la definición de símplice singular con algunas imperfecciones, por lo que Eilenberg la modifica más adelante dando lugar a las definiciones que actualmente conocemos de homología singular (con coeficientes en un anillo R) de X, $H_n(X;R)$. Lefschetz define además la noción de homología relativa $H_i(K,L)$ donde K es un complejo finito, y L un subcomplejo de K. Este nuevo concepto engloba a la homología singular y la homología de Cech. Ese mismo año Eilenberg trabaja también con Steenrod; ambos deciden comenzar a estudiar la homología desde un punto de vista diferente: en lugar de analizar la manera de construir grupos de homología y definir así nuevos grupos, se concentran en estudiar las propiedades que cumplen los grupos ya definidos hasta entonces. De esta manera seleccionan varias propiedades comunes a todos ellos, y las denominan axiomas de la teoría de la homología. Los nuevos axiomas de homología se introducen en su artículo “Axiomatic approach to homology theory”. Eilenberg y Steenrod prueban también que muchas de las propiedades demostradas para las diferentes teorías son consecuencia de estos axiomas. Su resultado más interesante es la prueba de que en la categoría de los espacios compactos triangulables, todas las teorías de homología que verifican los axiomas son isomorfas. Aunque los axiomas de Eilenberg y Steenrod caracterizan muchas de las teorías de homología utilizadas, existen otras no menos importantes denominadas homologías generalizadas en las que alguno de los axiomas de Eilenberg-Steenrod no se verifica (en general, suele ser el axioma de dimensión). Algunos ejemplos de estas teorías son : La homología cíclica,la homología de Hochschild y la K-homología.En esta tesis solo vamos a estudiar la homología singular, la razón es que la homología singular está definida sobre toda la categoría de los espacios topológicos $(Top_1.)$ Otra ventaja importante que esta teoría nos ofrece, es la de establecer un funtor que relaciona la categoría (Top_1) con la categoría de los grupos abelianos (Ab). El objetivo de este capítulo es exponer todos los resultados necesarios de la teoría de homología singular para poder desarrollar algunas de las aplicaciones presentadas en el capitulo final.

En el primer capitulo presentamos los axiomas de Eilenberg y Steenrod para la teoría de homología y daremos una demostración de sus consecuencias que serán de gran utilidad para el cálculo de algunos grupos de homología.

En el segundo capitulo presentaremos la teoría de homología singular el cual se construirá a través de funtores de homología cuyos resultados están dadas con muchos detalles así también se comprobará que los axiomas de Eilenberg y Steenrod satisface para esta homología pero el resultado más importante es el axioma de la excisión que establece una relación entre la homología singular de un espacio topológico y la homología singular de sus subespacios, de tal forma que si la unión abierta de estos subespacios es todo el espacio topológico y la intersección es no vacía, entonces es fácil determinar la homología de algunos espacios en términos de la homología singular de sus subespacios.

Por último, el capitulo tres se presentan algunas aplicaciones de la homología singular como por ejemplo el cálculo de algunos grupos de homología y la invariancia topológica.

Capítulo 1

Axiomas de Eilemberg-Steerod

En este capitulo ahondaremos detalladamente lo que es una categoría admisible ,luego definiremos los axiomas de Eilemberg-Steerod para luego enunciar una teoría homológica.

1.1 Categoría Admisible

Definición 1.1. *Sea* X *un espacio topológico y* A *un subespacio* $(A \subset X)$ *entonces el par* (X, A) *se le llama* ***par topológico****. En particular si* $A = \emptyset$ *entonces* $(X, \emptyset)$ *es un caso importante para nuestro tema.*

Ejemplo 1.1. *En el* (x, y, z)*-espacio* $\mathbb{R}^3$ *y el subespacio obtenido al empalmar de los extremos de una cuerda para hacer un lazo simple .*

Ejemplo 1.2. *El espacio topológico* $X = \mathbb{R}^3$ *y el subespacio obtenido al hacer un lazo en* $\mathbb{R}^3$ *atando un nudo en la cuerda antes de empalmar sus extremos.*

Ejemplo 1.3. *Sea* X *un espacio métrico y* A *un subconjunto con la topología asociada a la distancia inducida es un subespacio topológico.*

Ejemplo 1.4. *El producto topológico de la circunferencia unitaria* $\mathbf{S}^1$ *con la recta real* $\mathbb{R}$ *es un subespacio topológico de* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Definición 1.2. *Sean* (X, A) *y* (X', A') *pares topológicos . Si* $X' \subset X$ *y* $A' \subset A$ *entonces* (X', A') *es el* ***subpar*** *del par topológico* (X, A)*. La representación simbólica :*

$$(X', A') \subset (X, A) \leftrightarrow X' \subset X \wedge A' \subset A.$$

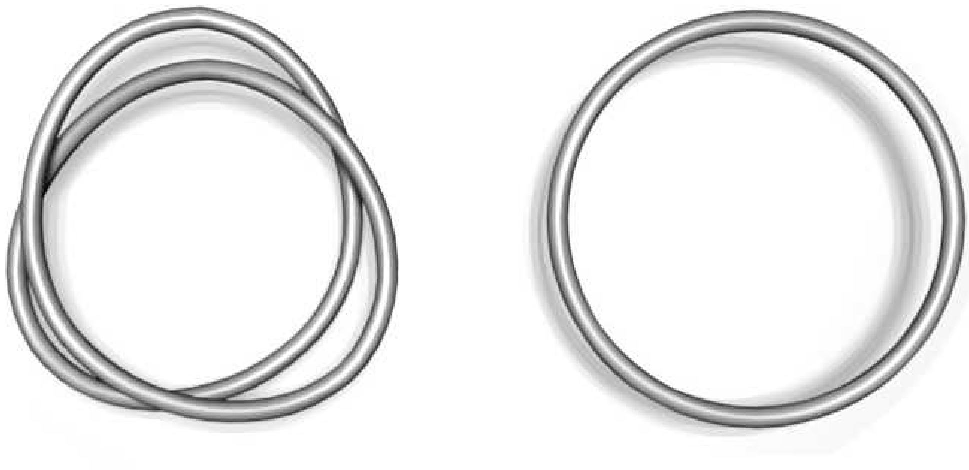


Figura 1.1: Nudos topológicos en $\mathbb{R}^3$

resume la definición anterior.

Dado un par topológico arbitrario $(X, A),$ se tiene la siguiente relación de inclusion:

$$\emptyset \subset A \subset X$$

y de ella se puede formar los seis pares topológicos, los cuales son:

$$(\emptyset, \emptyset), (A, \emptyset), (X, \emptyset), (A, A), (X, A), (X, X)$$

llamados **pares topológicos** asociados al par topológico (X, A). En el caso de que $A = \emptyset$ ó $X = A$, algunos de estos pares son iguales.

Definición 1.3. *Si* (X, A) *y* (Y, B) *son pares topológico, entonces una función continua* $f : X \to Y$ *es llamada una aplicación de pares si*

$$f(A) \subset B.$$

y escribimos $f : (X, A) \to (Y, B)$.

Observación 1.1. *La función* f *definida en líneas atrás se denota como :*

$$f : (X, A) \to (Y, B)$$

que hace que el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[r, "(f/A)"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Nota 1.1. *De aquí en adelante un "**aplicación continua**" entre pares topológicos, lo llamaremos simplemente "**aplicación**" entre pares topológicos.*

Observación 1.2. *Suponiendo que* $A = \emptyset$, *la condición* $f(A) \subset B$ *siempre se satisface y por lo tanto cualquier aplicación de* $(X, \emptyset)$ *en* (Y, B) *es sólo un aplicación* $f : X \to Y$. *Por ejemplo: La función constante y la función identidad. Particularmente, no se distinguirá la aplicación* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *con la aplicación* $f : X \to Y$.

Ejemplo 1.5. *Sea* $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *y* $p(t) = (\cos(2\Pi t), \operatorname{sen}(2\Pi t))$ *satisfaciendo que* $p(\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}^1$ *entonces es una aplicación continua de espacios topológicos.*

Ejemplo 1.6. *Sea* $f : (\mathbb{R}^3, \mathbb{S}_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, B)$ *donde* B *es cualquier elipsoide de* $\mathbb{R}^3$ *satisfaciendo que* $f(\mathbb{S}_2) \subset B$ *entonces es una aplicación continua de pares topológicos.*

Ejemplo 1.7. *Sea* $f : (\mathbb{R}^3, A) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ *donde* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0\}$ *llamado cono , satisfaciendo que* $f(A) \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *entonces es una aplicación continua de pares topológicos.*

Observación 1.3. *Sea cualquier **subpar*** (X', A') *de un par topológico* (X, A) *por la definición1.3, se tiene :*

1. *Sea la aplicación* $i : X' \to Y$ *tal que* $i(A') \subset A$ *entonces nos induce una aplicación*

$$f = i : (X', A') \to (X, A)$$

*de pares topológicos llamado **aplicación inclusion.***

2. *Si* $(X', A') = (X, A)$ *esta aplicación inclusion **i** sera llamado **aplicación identidad** del par topológico* (X, A).

Definición 1.4. *Sean tres pares topológicos :* (X, A), (Y, B) *y* (Z, C). *Si* $f : (X, A) \to (Y, B)$; $g : (Y, B) \to (Z, C)$ *son dos aplicaciones de pares topológicos entonces la composición*

$$h = g \circ f : X \to Z$$

de las aplicaciones $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$, *satisfaciendo la siguiente condición*

$$h(A) = g[f(A)] \subset g(B) \subset C$$

$$h(A) \subset C$$

esto significa que $g \circ f : (X, A) \to (Z, C)$ *es una aplicación de pares topológicos.*
Considere un aplicación arbitraria

$$f : (X, A) \to (Y, B),$$

sean $(X'A') \subset (X, A)$ *y* $(Y', B') \subset (Y, B)$ *los subpares que satisfacen:*

$$f(X') \subset Y', \quad f(A') \subset B'.$$

esto nos induce una aplicación

$$g : (X', A') \to (Y', B'),$$

que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(X, A) \arrow[r, "f"] & (Y, B) \\
(X', A') \arrow[u, "i"] \arrow[r, "g"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & (Y', B') \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

tal que $f \circ i = j \circ g$
definido por $g(x) = f(x)$ *para cualquier* $x \epsilon X'$ *entonces la aplicación "*g*" es inducido por* f.

Observación 1.4. *En el caso de que* $(Y', B') = (Y, B)$ *entonces* g *es llamado la* ***restricción*** *de la aplicación* f *sobre el subpar* (X', A') *del par* (X, A) *y se denota por:*

$$g = f_{|(X', A')}.$$

Definición 1.5. *Sea* (X, A) *un par topológico arbitrario.El siguiente diagrama :*

$$\begin{tikzcd} & & (X,\emptyset) \arrow[dr, "i"] & & \\ (\emptyset,\emptyset) \arrow[r, "i"] & (A,\emptyset) \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"'] & & (X,A) \arrow[r, "i"] & (X,X) \\ & & (A,A) \arrow[ur, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

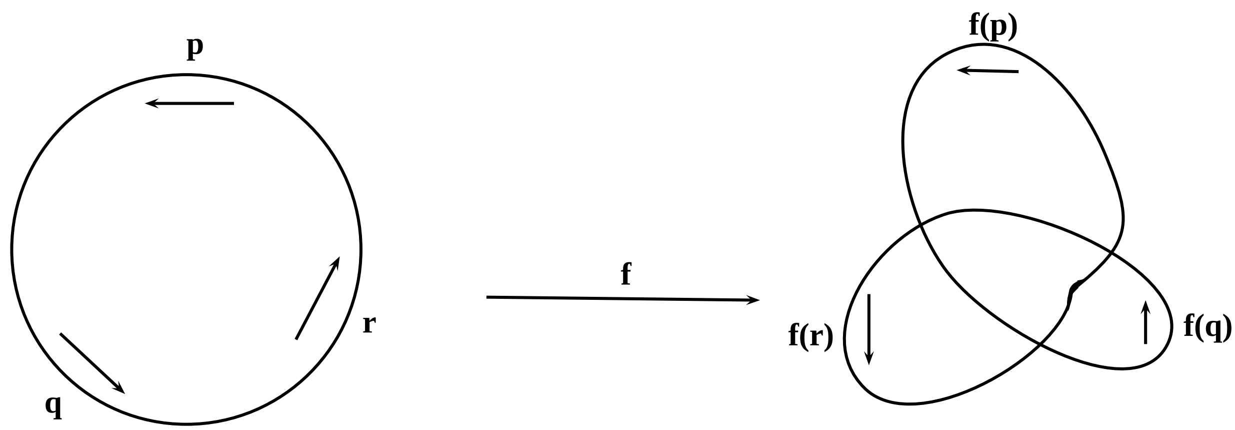
Se llama red asociado al par topológico (X, A).

Definición 1.6. *Sea* $X \times I$ *el producto topológico del espacio* X *con el intervalo unitario cerrado* $I = [0, 1]$ *y este con el subespacio* A $(A \times I)$ *entonces el par* $(X \times I, A \times I) = (X, A) \times I$ *es un par topológico llamado cilindro.*
Las aplicaciones
$(X, A) \overset{k_0}{\underset{k_1}{\rightrightarrows}} (X \times I, A \times I)$ $\quad definida \quad por \quad$ $k_0(x) = (x, 0)$ *y* $k_1(x) = (x, 1)$
para cualquier $x \in X$. *Son evidentemente imbeddings .Las aplicaciones* k_0 *y* k_1 *se llaman imbeddings canónicas.*

Definición 1.7. *Para una aplicación* $f : X \to Y$ *entre espacios topológicos es un imbedding si* $f : X \to f(X)$ *es un homeomorfismo .(Aquí,* $f(X)$ *tiene la topología del subespacio que recibe como un subconjunto de* Y*). Por lo tanto* $f : X \to Y$ *es un imbedding si y solo si* f *es inyectivo y continuo y* $f^{-1} : f(X) \to X$ *es continuo.Equivalentemente,* $f : X \to Y$ *es un imbedding si y solo si* f *es inyectiva y continuo y* $f : X \to f(X)$ *es abierto .*

Ejemplo 1.8. *Cualquier aplicaciones inclusion es una inmersión .*

Ejemplo 1.9. *Recordemos que* $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_2 = 1\}$*es un circulo de radio* 1 *en* $\mathbb{R}^2$. *La siguiente figura ilustra un imbedding* $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *cuya imagen* $f(\mathbb{S}^1)$ *es un nudo de trébol.*



Ejemplo 1.10. *Se le asigna a* $\mathbb{N}$ *la topología discreta . Defina las funciones continuas inyectivas* f_1, f_2 *y* $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *por* $f_1(n) = n$*,*$f_2(n)\frac{1}{n}$ *y* $f_3(1) = 0$ *y* $f_3(n) = \frac{1}{n}$ *para* $n \geqslant 2$*. Entonces* f_1 *y* f_2 *son imbeddings. Por lo tanto* f_3 *no es un imbedding porque* $f_3^{-1} : f_3(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ *no es continuo.*

Definición 1.8. *Sea*

$$\boldsymbol{\mathfrak{C} := \{Obj[(X,A)], Mor[((X,A);(Y,B))], \circ\}}$$

una ***categoría admisible*** *cuyos* ***objetos*** *son pares topológicos (X,A) de un espacio topológico* X *con* $A \subset X$ *y cuyos* ***morfismos*** *son ciertas aplicaciones* $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ *con* $f : X \longrightarrow Y$ *and* $f(A) \subset B$ *que satisface las siguientes condiciones:*

AC1. *Si el par topológico* (X,A) *está en* $\mathfrak{C}$*, entonces todos los pares y las aplicación inclusiones de la red del par* (X,A)

$$\begin{tikzcd}
 & & (X,\emptyset) \arrow[dr, "i"] & & \\
(\emptyset,\emptyset) \arrow[r, "i"] & (A,\emptyset) \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"'] & & (X,A) \arrow[r, "i"] & (X,X) \\
 & & (A,A) \arrow[ur, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

está en $\mathfrak{C}$

AC2. *Si* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *es un morfismo que está en* $\mathfrak{C}$ *entonces* $(X, A), (Y, B)$ *esta en* $\mathfrak{C}$ *junto con todas las aplicaciones que f define los miembros de la red del par* (X, A) *sobre los miembros correspondientes de la red del par* (Y, B)*.*

AC3. *Si* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *y* $G : (Y, B) \to (Z, C)$ *son morfismos que están en* $\mathfrak{C}$*, entonces su composición* $gof : (X, A) \to (Z, C)$ *está en* $\mathfrak{C}$*.*

AC4. *Si I = [0,1] es un intervalo unitario cerrado y* (X, A) *está en* $\mathfrak{C}$ *entonces el producto cartesiano*

$$(X; A) \times I := (X \times I, A \times I)$$

está en $\mathfrak{C}$ *y las aplicaciones dadas por*

$$g_0; g_1 : (X; A) \longrightarrow (X; A) \times I$$

$$g_0(x) = (x, 0) \quad , \quad g_1(x) = (x, 1)$$

está en $\mathfrak{C}$*.*

AC5. *Si* $\mathfrak{C}$ *consiste de un espacio unitario. Si* $X, P \in \mathfrak{C}$ *y P es un espacio formado por un solo punto y cualquier aplicación* $f : P \longrightarrow X$ *entonces f está en* $\mathfrak{C}$

Ejemplo 1. La categoría $\mathfrak{C}_T$ de todos los pares topológicos (X, A) y cuyas aplicaciones de tales pares topológicos obviamente satisfacen las cinco condiciones de $AC1$ hasta $AC5$. y por lo tanto es una categoría admisible para la teoría homológica. Esto es claro por la definición de que $\mathfrak{C}_T$ es la categoría admisible mas grande, es decir, $\mathfrak{C}_T$ contiene cualquier categoría admisible como una subcategoria.

Ejemplo 2. La subcategoria de $\mathfrak{C}_T$, teniendo como objetos a todos los pares (X, A), donde X es localmente compacto y es hausdorff, y $A \in X$ es cerrado y los morfismos de todos los pares satisfacen que la preimagen de un subconjunto de un compacto es compacto.obviamente satisfacen las cinco condiciones de $AC1$ hasta $AC5$ por lo tanto es una categoría admisible para la teoría homológica.

Ejemplo 3. la categoría $\mathfrak{C}_{\mathfrak{f}}$ de los conjuntos finitos ,teniendo como objeto a todos los pares (X, A),donde X es finito y $A \in X$ es finito entonces $\mathfrak{C}_{\mathfrak{f}}$ no es una categoría admisible para la teoría homológica ya que el cilindro formado por $(X \times I, A \times I)$ no es finito por lo tanto no esta en $\mathfrak{C}_{\mathfrak{f}}$.

Definición 1.9. *Dada una* ***categoría admisible*** $\mathfrak{C}$ *entonces un par topológico* (X, A) *se llama* ***par topológico admisible*** *si y solamente si esté pertenece al* $Obj(\mathfrak{C})$.

Definición 1.10. *Dada una aplicación* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *y una categoría admisible* $\mathfrak{C}$ *arbitraria, se dice que es* ***una aplicación admisible*** *si y solamente si esté esta en* $Mor_{\mathfrak{C}}[(X, A), (Y, B)]$.

Definición 1.11. *Sean dos* ***aplicaciones admisibles*** *cualesquiera*

$$f, g : (X, A) \to (Y, B)$$

entonces podemos decir que f *y* g *son* ***homotópicos*** *en* $\mathfrak{C}$ *si y solamente si existe una aplicación*

$$h : (X, A) \times I \to (Y, B),$$

tal que $f = h \circ k_0$ *y* $g = h \circ k_1$ *donde* k_0 *y* k_1 *son las inbeddings del par topológico* (X, A) *sobre el cilindro* $(X, A) \times I$.

En el siguiente gráfico se resume la definición anterior :

$$\begin{tikzcd}
(X, A) \arrow[d, "k_0"] \arrow[dr, "f"] & \\
(X \times I, A \times I) \arrow[r, "\exists h"] & (Y, B) \\
(X, A) \arrow[u, "k_1"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que:
$f = h \circ k_0$ y $g = h \circ k_1$

Observación 1.5. *Si* $\mathfrak{C}$ *es una de las categorías admisibles en los ejemplos dados anteriormente, entonces* f *y* g *son homotópicos en* $\mathfrak{C}$.

1.2 Los axiomas de Eilenberg-Steenrod

Definición 1.12. Dada $\mathfrak{C}$ una categoría admisible arbitraria,se le llama teoría homológica para $\mathfrak{C}$ a la siguiente colección

$$\mathcal{K} = \{H, *, \partial\}$$

de tres funciones como sigue:

- La primera función H asigna a cada par topológico (X, A) de $\mathfrak{C}$ y cada $n \in \mathcal{Z}$ un grupo Abeliano

  $$H_n(X, A)$$

  que sera llamado el grupo de homología n-dimensional del par topológico (X, A) para la teoría homológica $\mathcal{K}$.

- La segunda función $*$ asigna a cada aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$ de $\mathfrak{C}$ y cada $n \in \mathcal{Z}$ un homomorfismo

  $$f_* = f_{*n} : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$$

  que será llamado el homomorfismo inducido por la aplicación f para la teoría homológica $\mathcal{K}$.

- La tercera función ∂ asigna a cada par topológico (X, A) en $\mathfrak{C}$ y cada $n \in \mathcal{Z}$ un homomorfismo:

  $$\partial = \partial(X, A, n) : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$$

  que será llamado el operador frontera en el grupo $H_n(X, A)$ para la teoría homológica $\mathcal{K}$.

Además requieren que estas tres funciones H, $*$ y ∂ satisfagan las siguientes siete axiomas para la teoría homológica.

Axioma 1.1. (Axioma de Identidad)
si $i : (X, A) \to (X, A)$ es la aplicación identidad de un par topológico (X, A) en $\mathfrak{C}$ entonces el homomorfismo inducido:

$$i_* : H_n(X, A) \to H_n(X, A),$$

es el automorfismo identidad del grupo $H_n(X, A)$ para cualquier $n \in \mathcal{Z}$.

Axioma 1.2. ***(Axioma de la composición)***
si $f : (X, A) \to (Y, B)$ *y* $g : (Y, B) \to (Z, C)$ *son aplicaciones en* $\mathfrak{C}$ *entonces tenemos:*

$$(g \circ f)_{*n} = g_{*n} \circ f_{*n}$$

para cualquier $n \in \mathcal{Z}$.

Axioma 1.3. ***(Axioma de la conmutatividad)***
Si $f : (X, A) \to (Y, B)$ *y* $g : A \to B$ *son aplicación en* $\mathfrak{C}$ *definido por* $g(x) = f(x)\ \forall x \in A$ *entonces*

$$\partial \circ f_* = g_* \circ \partial$$

tal que los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\partial"] & H_n(Y,B) \arrow[d, "\partial"] \\ H_{n-1}(A) \arrow[r, "g_*"] & H_{n-1}(B) \end{tikzcd}$$

para cualquier $n \in \mathcal{Z}$ *. este axioma ata funtores de homología en la teoría homológica* $\mathcal{K}$ *por medio del* ***operador frontera*** ∂.

Los tres primeros axiomas son usualmente llamados **Axiomas Algebraicos** .

Axioma 1.4. ***(Axioma de exactitud)***
Si (X, A) *está en* $\mathcal{C}$ *e* $i : A \to X$ *,*$j : X \to (X, A)$ *las aplicaciones inclusiones entonces la sucesión infinita :*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \longrightarrow \cdots$$

de grupos y homomorfismo es exacta el cual es llamado la ***sucesión homológica*** *del* (X, A)

Axioma 1.5. ***(Axioma de la homotopía)***
Sea las aplicaciones $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ *son homotópicos en* $\mathfrak{C}$ *entonces tenemos :*

$$f_{*n} = g_{*n}$$

para cualquier $n \in \mathcal{Z}$.

Axioma 1.6. (Axioma de la excision)
Si U es un conjunto abierto de un espacio topológico X cuya clausura $Cl(U)$ esta contenida en el interior de un subespacio A de X y si la aplicación inclusion :

$$e : (X \backslash U, A \backslash U) \rightarrow (X, A)$$

está en $\mathcal{C}$, entonces el homomorfismo inducido :

$$e_{*n} : H_n(X \backslash U, A \backslash U) \rightarrow H_n(X, A)$$

es un isomorfismo para cualquier $n \in \mathcal{Z}$.

Axioma 1.7. (Axioma de la dimension)
Para cualquier conjunto unitario $X = \{p\}$ entonces tenemos

$$H_n(X) = 0 \qquad para \quad q \neq 0.$$

Esto completa la definición para una teoría homológica $\mathcal{K}$ dada para cualquier categoría admisible $\mathfrak{C}$.

Observación 1.6. Si $\mathcal{K}$ satisface solo los seis primeros axiomas entonces esto se conoce como una generalización de la teoría homológica para cualquier categoría admisible $\mathfrak{C}$.

El grupo de homología cero dimensional:

$$G = H_0(X)$$

del espacio unitario X en $\mathfrak{C}$ es llamado el coeficiente del grupo de la teoría homológica $\mathcal{K}$.
Así, el axioma de la dimension localiza el coeficiente del grupo de la dimension derecha .
La consistencia de los axiomas esta por la teoría homológica trivial $\mathcal{K}$, en la categoría admisible $\mathfrak{C}$ definida por:

$$H_q(X, A) = 0$$

para cualquier par topológico (X, A) en $\mathfrak{C}$ y cualquier $n \in \mathfrak{C}$. Esto también prueba la existencia de una teoría homológica con coeficientes del grupo trivial $G = 0$ en cualquier categoría admisible $\mathcal{C}$.

1.3 Algunas consecuencias de los axiomas de Eilenberg-Steenrod

Sea $\mathcal{K} = \{H, *, \partial\}$, una teoría homológica arbitraria en la categoría admisible $\mathfrak{C}_T$. Para establecer la **invariancia homotópica** de los grupos de homología en $\mathcal{K}$. Definamos primero la equivalencia homotópica en la categoría $\mathcal{C}_T$.

Definición 1.13. *Una aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$ en $\mathcal{C}_T$ se llama una equivalencia homotópica si y solo si existe una aplicación $g : (Y, B) \to (X, A)$ en $\mathcal{C}_T$ tal que la composición de aplicaciones $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicos (en $\mathcal{C}_T$).*

Observación 1.7. *En el caso de que $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$, esta noción de equivalencia de homotopía se reduce a una equivalencia homotópica entre los espacios topológicos X e Y.*

Definición 1.14. *Dos espacios topológicos X e Y son **homotópicamente equivalente** si existen aplicaciones $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tal que las composiciones de las aplicaciones:*

$$g \circ f : \ X \to X, \ f \circ g : \ Y \to Y$$

son homotópicos a las aplicaciones identidades en X e Y respectivamente.

Observación 1.8. *Si existe una equivalencia de homotopía $f : (X, A) \to (Y, B)$ entonces decimos que el par topológico (X, A) es **equivalente homotópicamente** al par topológico (Y, B) en símbolos:*

$$(X, A) \backsimeq (Y, B)$$

En el caso en que $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$ este se reduce a la notación:

$$X \backsimeq Y,$$

la cual denota que X e Y son homotópicamente equivalentes.

Proposición 1.1. *Si una aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$ en $\mathcal{C}_T$ es una equivalencia de homotopía, entonces el homomorfismo inducido:*

$$f_* : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$$

es un isomorfismo para cualquier q.

Demostración. Ya que f es una equivalencia de homotopía , existe una aplicación $g : (Y, B) \to (X, A)$ tal que la composición de las aplicaciones $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicos a las aplicaciones identidades de los pares topológicos (X, A) y (Y, B) respectivamente. De acuerdo con los axiomas 1.2,1.5 y 1.1 se deduce que la composición de homomorfismo:

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* : H_q(X, A) \to H_q(X, A)$$

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* : H_q(Y, B) \to H_q(Y, B)$$

son los automorfismos identidades de los grupos $H_q(X, A)$ y (Y, B) respectivamente. Por un teorema elemental en teoría de grupos implica que f_* es un isomorfismo con g_* como su inversa. Ya que esto es verdadero para cualquier entero q, tenemos completado la demostración.

■

En el caso $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$, tenemos el siguiente corolario :

Corolario 1.1. *Si dos espacios topológicos X y Y son* ***homotópicamente equivalentes****, es decir, $X \backsimeq Y$, entonces tenemos :*

$$H_q(X) \approx H_q(Y)$$

para cualquier entero q.

Para cualquier entero q, el grupo de homología q-dimensional $H_q(X)$ de un espacio topológico X es una **propiedad homotópica** de X, es decir que esta preservada por una equivalencia homotópica. (Ver Apéndice A.)
Sea X subespacio de un espacio Y. Una homotopía

$$\{h_t : \ X \to Y : \ t \in I = [0, 1]\},$$

es llamada **deformación** si y solo si h_0 es la aplicación inclusión. Además si h_1 es una aplicación constante, entonces la deformación $\{h_t\}$ es llamada una **contracción**. Si una contracción $\{h_t : \ X \to Y : \ t \in I\}$, decimos que el subespacio X es contractible en el espacio Y. En particular, si $X = Y$ entonces decimos que X es contractible.
Ya que cualquier espacio contractible X es homotópicamente equivalente al espacio unitario 0 (Ver Apéndice A), tenemos el corolario siguiente del axioma 1.7 de la dimension y del corolario 1.1:

Corolario 1.2. *Si un espacio topológico X es contractible,entonces tenemos :*

$$H_0(X) \approx G,$$

$$H_q(X) = 0 \qquad (q \neq 0),$$

donde G denota el coeficiente del grupo de la teoría homológica $\mathcal{K}$.

Ahora deduciremos algunos consecuencias del Axioma de la Exactitud.

Proposición 1.2. *Si la aplicación inclusion $i : A \subset X$ de un subespacio A de un espacio topológico X es una equivalencia de homotopía, entonces tenemos*

$$H_q(X, A) = 0$$

para cualquier entero q.

Demostración. Como $i : A \subset X$ es una equivalencia de homotopía, esto se debe por la Proposición 1.1 tal que el homomorfismo inducido

$$i_* : H_q(A) \approx H_q(X),$$

es un isomorfismo para cualquier entero q. Considere la secuencia homológica del par (X, A) es decir:

$$\ldots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X) \qquad \ldots$$

por lo tanto los dos homomorfismo i_* mostrados arriba son isomorfismo, esto sigue por una propiedad elemental de la secuencias exactas, que el grupo intermedio $H_q(X, A)$ consiste de un elemento unitario. Ya que esto es verdadero para cualquier entero q, esto completa la demostración de 1.2.

■

Aplicando la Proposición 1.2 para el caso en que $A = X$, obtenemos el siguiente Corolario:

Corolario 1.3. *Para cualquier espacio topológico X, tenemos*

$$H_q(X, X) = 0$$

para cualquier entero q.

Un subespacio A de un espacio topológico X es una **retracto** de X si y solo si existe una aplicación $r : X \to A$ tal que $r(x) = x$ es valido para cualquier $x \in A$. Dicho aplicación $r : X \to A$ es llamado una **retracción** de X en A.

Proposición 1.3. *Si un subespacio A de un espacio topológico X es una retracto de X, entonces la aplicación inclusion $i : A \subset X$ induce un monomorfismo*

$$i_* : H_q(A) \to H_q(X),$$

la aplicación inclusion $j : X \subset (X, A)$ esto induce un epimorfismo $j : H_q(X) \to H_q(X, A)$ y el operador borde $\partial : H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$ son homomorfismo triviales . Además, para cualquier entero q,$H_q(X)$ es isomórfica a la suma directa de $H_q(A)$ y $H_q(X, A)$,es decir,

$$H_q(X) \approx H_q(A) \bigoplus H_q(X, A)$$

Demostración. Como A es un retracto de X, existe una retracción $r : X \to A$ de X en A. Esto sigue por la definición de una retracción de que la aplicación composición $r_* \circ i_*$ es la aplicación identidad en A. Por el Axioma 1.1 y 1.2 esto implica que la composición $r_* \circ i_*$ del homomorfismo inducido:

$$H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{r_*} H_q(A)$$

es el automorfismo identidad del grupo $H_q(A)$ para cualquier entero q.
Por un teorema elemental en la teoría de grupos, de tiene que i_* es un monomorfismo ,que r_* es un epimorfismo y el grupo Abeliano $H_q(X)$ se descompone en la suma directa

$$H_q(X) = Im(i_*) \bigoplus Ker(r_*)$$

para cualquier entero q. Ahora consideremos la secuencia de homología para el par (X, A),es decir:

$$\cdots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Ya que el homomorfismo i_* a la derecha es un monomorfismo,se sigue por una propiedad elemental de secuencias, es decir, donde ∂ es un homomorfismo trivial y j_* es un epimorfismo. Queda por demostrar que:

$$H_q(X) \approx H_q(A) \bigoplus H_q(X, A).$$

Para este propósito, dado q un número entero arbitrariamente.

Ya que $i_* : H_q(A) \to H_q(X)$ es un monomorfismo,tenemos

$$Im(i_*) \approx H_q(A),$$

ya que la secuencia de homología es exacta, tenemos lo siguiente

$$\operatorname{Ker}(j_*) = Im(i_*),$$

ya que $H_q(X) = Im(i_*) \bigoplus \operatorname{Ker}(r_*)$ y j_* es un epimorfismo,tenemos

$$Ker(r_*) \approx H_q(X)/Im(i_*) = H_q(X)/\operatorname{Ker}(j_*) \approx H_q(X, A)$$

Por lo tanto se obtiene:

$$Hq(X) \approx H_q(A) \bigoplus H_q(X, A).$$

Con este se concluye la demostración 1.3.

■

Ya que cualquier subespacio unitario de un espacio topológico X es obviamente un retracto de X, tenemos el siguiente Corolario que se deduce de la Proporción 1.3 y del Corolario 1.2.

Corolario 1.4. *Para cualquier punto x_0 de un espacio topológico X, tenemos*

$$H_0(X) \approx G \bigoplus H_0(X, x_0),$$

$$H_q(X) \approx H_q(X, x_0) \qquad (q \neq 0),$$

donde G denota el coeficiente del grupo de la teoría de la homología $\mathcal{K}$.

Un espacio topológico X se llama **deformable sobre** un subespacio A de X si y solo si existe una homotopía, es decir

$$h_t : X \to X \qquad (t \in I),$$

tal que h_0 es la aplicación identidad en X y $h_1(X)$ esta contenido en el subespacio A.

Proposición 1.4. *Si un espacio topológico X es deformable en un subespacio A de X, entonces la inclusion $i : A \subset X$ induce un monomorfismo $i_* : H_q(A) \to H_q(X)$, la aplicación inclusion $j : X \subset (X, A)$ esto induce un epimorfismo $j : H_q(X) \to H_q(X, A)$ y el operador borde $\partial : H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$ son homomorfismo. Además, para cualquier entero q, $H_q(A)$ es isomórfica a la suma directa de $H_q(X)$ y $H_{q+1}(X, A)$,es decir,*

$$H_q(A) \approx H_q(X) \bigoplus H_{q+1}(X, A)$$

Demostración. Puesto que X es deformable en A, existe una homotopía

$$h_t : X \to X \qquad (t \in I),$$

tal que h_0 es la aplicación identidad en $h_1(X)$ esta contenido en A. Definir una aplicación $h : X \to A$ tomando $h(x) = h_1(x)$ para cualquier $x \in X$ entonces la composición

$$i \circ h = h_1 : X \to X$$

de h y la aplicación inclusion $i : A \subset X$ es homotópico a la aplicación identidad h_0 en X.
Por los Axiomas 1.1, 1.2 y 1.5, esto implica que la composición $i_* \circ h_*$ del homomorfismo inducido

$$H_q(X) \xrightarrow{h_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X)$$

es el automorfismo identidad del grupo $H_q(X)$ para cualquier entero q. Por un teorema elemental en la teoría de grupos, se tiene que h_* es un monomorfismo ,que i_* es un epimorfismo y el grupo Abeliano $H_q(A)$ se descompone en la suma directa

$$H_q(A) = Im(h_*) \bigoplus Ker(i_*)$$

para cualquier entero q.
Ahora consideremos la secuencia homológica para el par (X, A), es decir :

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Ya que el homomorfismo i_* es un epimorfismo, se sigue por una propiedad elemental de secuencias, es decir, donde j_* es un homomorfismo trivial y ∂ es un monomorfismo. Queda por demostrar que :

$$H_q(A) \approx H_q(X) \bigoplus H_{q+1}(X, A)$$

Para este propósito, dado q un número entero arbitrariamente. Ya que

$$h_* : H_q(X) \to H_q(A)$$

es un monomorfismo,tenemos

$$Im(h_*) \approx H_q(X).$$

Ya que la secuencia homológica es exacta,tenemos lo siguiente

$$Ker(i_*) = Im(\partial).$$

Ya que $\partial : H_{q+1} \to H_q(A)$ es un monomorfismo,tenemos

$$Im(\partial) \approx H_{q+1(X,A)}.$$

Consecuentemente obtenemos:

$$H_q(A) = Im(h_*) \bigoplus Ker(i_*) \approx H_q(X) \bigoplus H_{q+1}(X,A),$$

para cualquier entero q.

■

En particular, si X is un espacio topológico contractible ,tal como el n-espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ y si A es un subespacio no vacío de X, X es claramente deformable en A. Por lo tanto tenemos el siguiente Corolario de la Proposición 1.4 y Corolario 1.2.

Corolario 1.5. *Para cualquier subespacio A no vacío de un espacio topológico X contractible tenemos*

$$H_0(A) = G \bigoplus H_1(X,A),$$
$$H_q(A) \approx H_{q+1}(X,A) \qquad (q \neq 0)$$

donde G el coeficiente del grupo de la teoría homológica $\mathcal{K}$.

Finalmente estableceremos un avance de la Axioma de la excision.

Proposición 1.5. *Si U es un conjunto abierto de un espacio topológico X conteniendo a un subespacio A de X, entonces la excision*

$$e : (X \backslash U, A \backslash U) \to (X,A)$$

induce un isomorfismo

$$e_* : H_q(X \backslash U, A \backslash U) \approx H_q(X,A)$$

para cualquier entero q pruebe que existe un conjunto abierto V del espacio X tal que la clausura $\overline{X}$ esta contenida en U y la aplicación inclusion

$$h : (X \backslash U, A \backslash U) \to (X \backslash V, A \backslash V)$$

es una equivalencia homotópica.

Demostración. ya que $Cl(V) \subset U \subset A$ esta contenido en el interior de A. Por el Axioma de la excision,

$$k : (X \backslash V, A \backslash V) \approx (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$K_* : H_q(X \backslash V, A \backslash V) \approx H_q(X, A)$$

para cualquier entero q. En otras palabras,puesto que h es una equivalencia, esto se sigue de la Proposición 1.1 es decir h induce un isomorfismo

$$h_* : H_q(X \backslash V, A \backslash V)$$

para cualquier entero q. Debido a

$$e = k \circ h,$$

el axioma de la composición implica que

$$e_* = k_* \circ h_* : H_q(X \backslash U, A \backslash U) \to H_q(X, A)$$

es un isomorfismo para cualquier entero q.

■

Capítulo 2

Teoría de Homología Singular

En este capitulo veremos la construcción de la homología singular el cual se da a través de aplicaciones n -simplex unitarios de un espacio topológico, y componerlas en sumas formales, llamadas cadenas singulares. El operador frontera en un símplices induce un complejo de la cadena singular. La homología singular es entonces la homología del complejo de cadena. Los grupos de homología resultantes son los mismos para todos los espacios homotópicamente equivalentes, lo cual es el motivo de su estudio. Estas construcciones se pueden aplicar a todos los espacios topológicos, y así la homología singular se pueden expresar en términos de la teoría de categorías, donde el grupo de homología se convierte en un funtor de la categoría de los espacios topológicos a la categoría de los grupos abelianos graduados. Estas ideas se desarrollan en mayor detalle a continuación.

2.1 Complejo Singular de un Espacio

Definición 2.1. *"El conjunto, Δ_n, es definido por:*

$$\Delta_n := \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=0}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, n \right\},$$

*es llamado n-**símplice unitario** o simplemente n-**simplex**. "*

Observemos que:

1. Δ_n es subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$, además esté es compacto y metrizable.

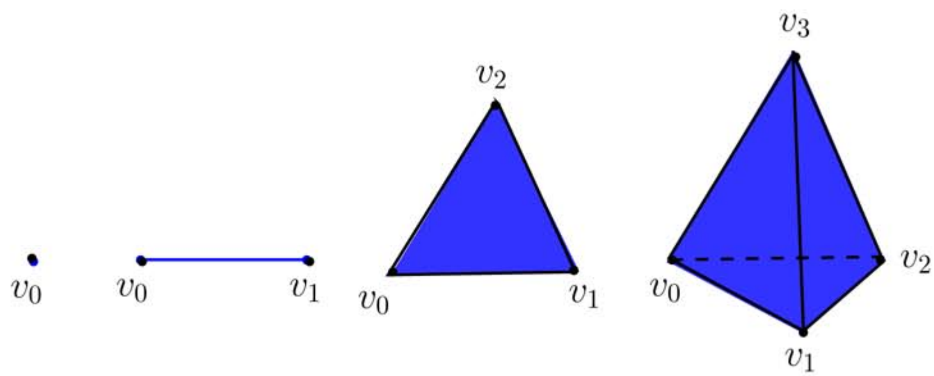
2. Para cada entero $i = 0, 1, \ldots, n$, el punto $v_i = (\delta_{i0}, \delta_{i1}, \ldots, \delta_{ij}, \ldots, \delta_{in})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ con

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad i = j, \\ 0 & \text{Si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

pertenece a Δ_n. Nos referiremos a v_i como el i-ésimo vértice de Δ_n, entonces el n-simplex Δ_n tiene $(n+1)$ vértices, $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

3. El conjunto Δ_n es el conjunto convexo mas pequeño que contiene al conjunto de vértices, $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$.

Así, Δ_0 es un punto, Δ_1 es el intervalo unidad, Δ_2 es un triángulo (incluido su interior), Δ_3 es un tetraedro, etc. Observar además que Δ_n es homeomorfo al disco cerrado unidad $\mathbb{D}^n$, para $n > 0$.



Definición 2.2. Sean $n > 0$ y $0 \leqslant i \leqslant n$. la aplicación $k_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$, definida por $k_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1})$, es decir

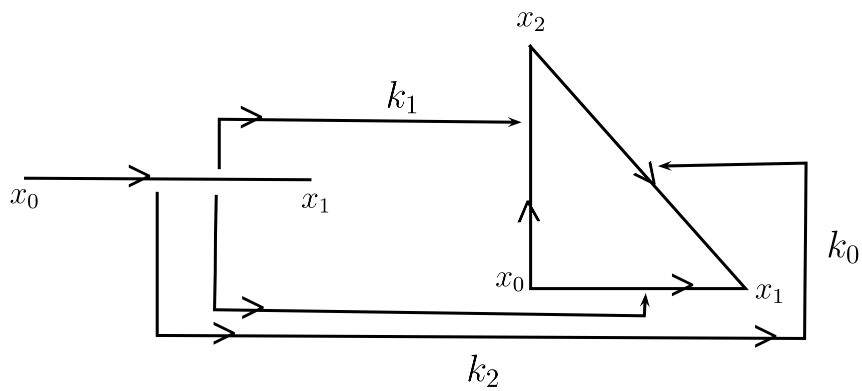
$$k_i(\Delta_{n-1}) = \Delta_n^{(i)} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_n / \ x_i = 0\},$$

llama la i-ésima cara de Δ_n, opuesta al i-ésima vértice v_i. Obviamente, v_i no está en $\Delta_n^{(i)}$.

Podemos fácilmente verificar que k_i es un homeomorfismo de Δ_{n-1} en Δ_n y su imagen

$$k_i(\Delta_{n-1}) = \Delta_n^{(i)}$$

es el i-ésima cara de Δ_n. Veamos gráficamente, para $n = 2$ tenemos:



Ejemplo 1 Sea $k_i : \Delta_1 \to \Delta_2$,, para $i = 0, 1, 2$. En la figura 1, se ilustra como actúa k_i, en $\Delta_1 = [x_0, x_1]$.

En siguiente se asume que $n > 1$ y consideremos las inmersiones

$$\Delta_{n-2} \xrightarrow{k_j} \Delta_{n-1} \xrightarrow{k_i} \Delta_n,$$

donde $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq n - 1$.

Lema 2.1. *Si* $0 \leq j < i \leq n$*, entonces tenemos que:*

$$k_i \circ k_j = k_j \circ k_{i-1} : \ \Delta_{n-2} \to \Delta_n.$$

Demostración. "Sea $x = (x_0, \ldots, x_{n-2})$ un punto arbitrario del $(n-2)$- simplex unitario Δ_{n-2}. Si $j \leq i - 2$, Entonces tenemos

$$\begin{aligned} k_i[k_j(x)] &= k_i(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, \ldots, x_{n-1}) \\ &= k_j(x_0, \ldots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, \ldots, x_{n-2}) \\ &= k_j[k_{i-1}(x)]. \end{aligned}$$

Ahora sumamos que $j = i - 1$. Entonces tenemos que $i = j + 1$, luego

$$\begin{aligned} k_i[k_j(x)] &= k_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-2}) \\ &= (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, 0, x_i, \ldots, x_{n-2}) \\ &= k_j(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1}) \\ &= k_j[k_{i-1}(x)]. \end{aligned}$$

esto completa de la demostración del Lema 2.1".

□

Ahora sea X un espacio topológico arbitrario y n cualquier entero no negativo.

Definición 2.3. Un n-símplice singular en X, es una aplicación

$$\xi :\ \Delta_n \to X,$$

del n-simplex unitario Δ_n hacia el espacio X.

Observación 2.1.Como Δ_n es compacto y conexo, se sigue que $\xi(\Delta_n) \subset \ X$ es compacto y conexo.

Aquí la palabra singular indica que ξ no tiene por que ser una inmersión. Sea

$$S_n(X) = Map(\Delta_n, X),$$

el conjunto total de n-símplice singulares en X. Si $m \neq n$, entonces por definición tenemos

$$S_m(X) \cap S_n(X) = \emptyset.$$

La unión

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(X),$$

es el conjunto de todos los símplices singulares en el espacio X y se hará referencia como el complejo singular de X.
Si $n = 0$, entonces Δ_n consiste de un solo punto. Por tanto, un 0-símplice singular

$$\xi :\ \Delta_0 \longrightarrow X$$

en X puede ser identificado con el punto $\xi(\Delta_0)$ de X. Una vez hecho esto tenemos que

$$S_0(X) = X.$$

Para $n = 1$, entonces Δ_1 es homeomórfica al intervalo unitario $I = [0, 1]$ de números reales bajo el homeomorfismo

$$\begin{array}{rccl} h: & I & \longrightarrow & \Delta_1 \\ & t & \longmapsto & h(t) = (1-t, t). \end{array}$$

Luego tenemos $h(0) = v_0$ y $h(1) = v_1$, por lo tanto un símplice singular

$$\xi :\ \Delta_1 \longrightarrow X,$$

en X, puede ser identificado como la composición

$$\xi \circ h: \; I \longrightarrow X,$$

en el espacio X. Después de haber hecho esto, obtenemos

$$S_1(X) = P(X),$$

donde $P(X)$ es el conjunto de todas los caminos en X.
En conclusión, un 0-símplice singular puede identificarse con un punto en X, un 1-símplice singular puede pensarse con un camino en X, un 2-símplice singular es una aplicación del triángulo estándar en X. Observar que $\xi(\Delta_n)$ puede incluso degenerar en un punto.
"Ahora asumamos que $n > 0$ y sea

$$\xi: \; \Delta_n \longrightarrow X$$

el cual denota un n-símplice singular en X. Para cualquier entero $i = 0, 1, \ldots, n$ la composición

$$\xi \circ k_i: \; \Delta_{n-1} \longrightarrow X$$

es un $(n-1)$-símplice singular en X, que sera llamado el i**-ésima cara** de ξ y será denotado por

$$\xi^{(i)} = \xi \circ k_i.$$

Las $(n+1)$ caras $\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)}$ de una n-símplice singular ξ en X pueden no ser distintos. De hecho, si $\xi : \Delta_n \to X$ es una aplicación constante, entonces todos sus $(n+1)$ caras $\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)}$ son el mismo $(n-1)$-símplice singular en X".

Definición 2.4. "*Para cualquier entero* $n > 0$ *y cada* $i = 0, 1, \ldots, n$*, definamos*

$$\begin{array}{rlcl} \sigma_i: & S_n(X) & \longrightarrow & S_{n-1}(X) \\ & \xi & \longmapsto & \xi^{(i)}. \end{array}$$

Llamado el i*-ésimo* ***operador cara*** *en* $S(X)$*.*

Precisamente para el complejo singular de un espacio X nos referimos al conjunto

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(X),$$

junto con sus operadores caras".

Proposición 2.1. Si $n > 1$ y $0 \leq j < i \leq n$, entonces tenemos

$$\left[\xi^{(i)}\right]^{(j)} = \left[\xi^{(j)}\right]^{(i-1)},$$

para cualquier n-símplice singular ξ en X.

Demostración. Según la Definición 2.2 y la Proposición 2.1, tenemos

$$\begin{aligned}\left[\xi^{(i)}\right]^{(j)} &= g^{(i)} \circ k_j = \xi \circ k_i \circ k_j = \xi \circ k_j \circ k_{i-1} \\ &= \xi^{(j)} \circ k_{i-1} = \left[g^{(i)}\right]^{(i-1)}.\end{aligned}$$

esto prueba la Proposición.

□

Sea un subespacio arbitrario A del espacio topológico X y la aplicación inclusión $i:\ A \subset X$. Entonces para Cualquier n-símplice singular $\xi:\ \Delta_n \to A$ la composición

$$i \circ \xi:\ \Delta_n \longrightarrow X,$$

puede identificarse con el n-símplice singular del espacio X . Así tenemos

$$S_n(A) \subset S_n(X)$$

Observación 2.2. Además, para cualquier $\xi \in S_n(X)$ y para todo $n > 0$ entonces el $\xi \in S_n(A)$ implica que $\xi^{(i)} \in S_{n-1}(A)$ debido a esta propiedad, $S(A)$ es el subcomplejo del complejo singular de $S(X)$. Es decir,

$$S(A) \subset S(X).$$

2.2 Complejos de Cadenas Singulares

Sea X un espacio topológico arbitrario y consideremos su complejo singular

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(X), \qquad \text{para cualquier } n \geqslant 0,$$

Definición 2.5. Se define a $C_n(X) = \{\sum_\xi n_\xi \xi\ :\ \ \xi$ es un n-símplice síngular, $n_\xi \in \mathbb{Z},\ \ n_\xi = 0\ \}$ como el grupo abeliano libre generado por $S_n(X)$ (n-símplices singulares.)

Los elementos de $C_n(X)$ son combinaciones lineales formales finitas del tipo $\sum_\xi n_\xi \xi$. Es decir, de n-símplices singulares ξ y cuyos coeficientes $n_\xi \in \mathbb{Z}$ son todos nulos, salvo una familia finita de ellos, observar que la única manera de que una tal suma sea nula, es que lo sean todos sus coeficientes.

Nota 2.1. El conjunto $C_n(X)$ se le llama el grupo abeliano libre de las n-cadenas singulares.

Definición 2.6. Para cada $n > 0$, definamos la función

$$\begin{array}{rlcl} \sigma: & S_n(X) & \to & C_{n-1}(X) \\ & \xi & \longmapsto & \sigma(\xi) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma_i(\xi) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \xi^{(i)}, \end{array}$$

para cualquier n-símplice singular $\xi : \Delta_n \to X$

Ya que $C_n(X)$ es un grupo abeliano libre generado por el conjunto $S_n(X)$, la función σ extiende un único homomorfismo

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\sigma"'] & C_n(X) \arrow[d, "\exists!\, \partial_n"] \\ & C_{n-1}(X) \end{tikzcd}$$

tal que el diagrama es conmutativo.

Definición 2.7. La frontera de un n-símplice singular ξ, es la $(n-1)$- cadena singular definida por $\partial_n(\xi) = \sigma(\xi) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \xi^{(i)}$, es decir, es la suma formal de sus caras, dotadas de signo.

Nota 2.2. El homomorfismo $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ que se conoce como operador borde o frontera.

Ejemplo 2.1. La frontera de 2-símplices $(e_0e_1e_2)$ es $\partial_2(e_0e_1e_2) = (e_1e_2) - (e_0e_2) + (e_0e_1)$ y puede interpretarse como la suma algebraica de los bordes del triángulo estándar, con los signos elegidos de modo que se empieza por e_0 y se viaja alrededor de un lazo hasta volver a llegar a e_0. Observar que en realidad no se trata de un lazo, sino de una suma formal con signo de tres caminos.

Observación 2.3. La frontera de una 0-cadena, se define como 0, es decir, convenimos que $C_n(X) = 0$.

Proposición 2.2. *Para cualquier entero* n*, la composición de homomorfismo*

$$\partial^2 = (\partial_{n+1} \circ \partial_n) =: C_n(X) \longrightarrow C_{n-2}(X),$$

de los operadores borde

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(X)$$

es un homomorfismo trivial, es decir:

$$\partial^2 = 0.$$

Demostración. Si $n < 2,$ entonces tenemos $C_{n-2}(X) = 0,$ luego la Proposición se satisface. Por lo tanto, podemos asumir $n \geq 2.$
Sea $\xi : \Delta_n \to X,$ cualquier n-símplice en $X.$ Entonces tenemos

$$\xi \in S_n(X) \subset C_n(X).$$

Conforme a la Definición del operador borde, $\partial,$ tenemos

$$\partial(\xi) = \sigma(\xi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \xi^{(i)},$$

donde

$$\xi^{(i)} \in S_{n-1}(X) \subset C_{n-1}(X) \qquad \forall i = 0, \ldots, n$$

Denotamos la i-ésima cara o lado de $\xi.$ Ya que ∂ es un homomorfismo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\partial^2(\xi) &= \partial[\partial(\xi)] = \partial\left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \xi^{(i)}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial\left[\xi^{(i)}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left[\xi^{(i)}\right]^{(j)} \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \left[\xi^{(i)}\right]^{(j)} + \sum_{0 \leq j < i < n} (-1)^{i+j} \left[\xi^{(i)}\right]^{(j)}.
\end{aligned}$$

De la Proposición 2.2, tenemos

$$\sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \left[\xi^{(i)}\right]^{(j)} = \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \left[\xi^{(j)}\right]^{(i-1)}.$$

Si sustituimos $i-1$ por j y j por i, el miembro derecho de la ecuación anterior llega hacer:

$$-\sum_{0 \leq j < i < n} (-1)^{i+j} \left[\xi^{(i)}\right]^{(j)}.$$

Así las dos sumas en $\partial^2(\xi)$ se cancelan mutuamente. Esto prueba $\partial^2(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in S_n(X)$.

□

De líneas anteriores se deduce una sucesión semi-exacta larga

$$C(X): \quad \ldots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

Nota 2.3. $C(X)$ es llamada el complejo de cadena singular del espacio X.

Nota 2.4. Los elementos del grupo $C_n(X)$ son llamadas las n-cadenas singulares en el espacio X. El subíndice se le llama la dimensión.

Por lo tanto el operador borde o frontera

$$\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

reduce la dimension por 1. Para cualquier $\gamma \in C_n(X)$, el elemento $\partial\gamma \in C_{n-1}(X)$ es llamado la frontera de la cadena γ.
Ahora se considera un subespacio arbitrario A del espacio topológico X. Ya que $S_n(A)$ es un subconjunto de $S_n(X)$, esto se prueba que $C_n(A)$ es el sumando directo de $C_n(X)$ generado por el conjunto $S_n(A)$. El grupo cociente

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$$

es llamado el grupo de cadena singular n-dimensional del par topológico (X, A) los elementos de $C_n(X, A)$ son llamados n-cadenas singulares de (X, A) o las n-cadenas singulares de X modulo A. Dado que $C_n(A)$ es el sumando directo de $C_n(X)$ generado por $S_n(A)\backslash S_n(A)$. De la definición, uno puede fácilmente ver que el operador borde

$$\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

envía el subgrupo $C_n(A)$ de $C_n(X)$ hacia el subgrupo $C_{n-1}(A)$ de $C_{n-1}(X)$. Luego este induce un homomorfismo de grupo cociente $C_n(X, A)$ sobre el grupo cociente $C_{n-1}(X, A)$ que será denotado por

$$\partial : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A),$$

entonces $\partial^2 = 0$.
Luego obtenemos una sucesión semi-exacta larga

$$\ldots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \ldots$$

que será llamado como el complejo de cadena singular del par topológico (X, A) y será denotado por el símbolo $C(X, A)$. En particular, si A es el subespacio vacío del espacio X, entonces tenemos $C_n(A) = 0$ y luego

$$C_n(X, A) = C_n(X),$$

para cualquier entero n, esto prueba que $C(X, \emptyset) = C(X)$.

2.3 Grupos de Homología Singular

Sea (X, A) un par topológico arbitrario y su respectivo complejo de cadena singular $C(X, A)$. Es decir, para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\ldots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \ldots$$

Definición 2.8. Definamos el

$$kernel(\partial_n) = Z_n(X, A) = \{c \in C_n(X) : \ \partial_n(c) \in C_{n-1}(A)\}.$$

es llamado el grupo de n-ciclos singulares de (X, A).

Definición 2.9. Definamos la

$$Imagen(\partial_{n+1}) = B_n(X, A). = \{b \in C_n(A) : \ b = \partial_{n+1}(c') \text{ para alguna } c' \in C_{n+1}(X)\},$$

es llamado grupo de n-fronteras singulares de (X, A).

Ya que $C(X, A)$ es semi-exacta, se sigue $B_n(X, A)$ es un submódulo $Z_n(X, A)$ y podemos formar el módulo cociente

$$H_n(X, A) = \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)},$$

el cual es llamado i-ésima grupo de homología singular del par topológico (X, A).

Observación 2.4. Si $A = \emptyset$, entonces $C_n(A) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, luego por definición

$$H_n(X, \emptyset) = H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)},$$

y se llama i-ésima grupo de homología singular del espacio topológico X.

Ya que $C_n(X,A) = 0$, para cualquier $n < 0$. Entonces la siguiente Proposición es obvia.

Proposición 2.3. *Para cualquier par topológico (X,A) y cualquier entero $n < 0$, tenemos que $H_n(X,A) = 0$.*

Observación 2.5. *Sea el grupo abeliano libre $F[\pi_0(X)]$ generado por el conjunto $\pi_0(X)$ de todas las componentes conexas del espacio X.*

Definición 2.10. *Se define la función $f: X \to F[\pi_0(X)]$ que asigna a cada $x \in X$ la componente conexa*

$$f(x) \in \pi_0(X) \subset F[\pi_0(X)]$$

el cual contiene a x.

Puesto que $C_0(X)$ es el grupo abeliano libre generado por $S_0(X) = X$, la función f extiende un único morfismo

$$h: C_0(X) \longrightarrow F[\pi_0(X)].$$

Es decir,

$$\begin{tikzcd} S_0(X) = X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & C_0(X) \arrow[d, "\exists!\, h"] \\ & F[\Pi_0(X)] \end{tikzcd}$$

Lema 2.2. *El morfismo $h: C_0(X) \longrightarrow F[\pi_0(X)]$ está bien definida.*

Demostración. Sea ψ un elemento arbitrario del grupo abeliano libre $F[\pi_0(X)]$. De acuerdo a la construcción de $F[\pi_0(X)]$, ψ puede ser considerado como una función

$$\psi: \pi_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

de $\pi_0(X)$ sobre $\mathbb{Z}$ el cual es cero casi en **todas partes** cero,es decir, $\psi(s) = 0$ para todo excepto a lo más número finito de elementos s de $\pi_0(X)$. Construiremos una función $\phi: X \to \mathbb{Z}$ de la siguiente manera. En cada componente conexa $s \in \pi_0(X)$ del espacio X, elegimos un punto $x_s \in s \subset X$. Entonces definimos ϕ tomando

$$\phi(x) = \begin{cases} \psi(s) & \text{si} \quad x = x_s \text{ para algún } s \in \pi_0(X), \\ 0 & \text{si} \quad x \neq x_s \text{ para todo } s \in \pi_0(X), \end{cases}$$

para cada punto x de X. Ya que ψ es cero en casi todas partes, obviamente lo es la función ϕ. Por tanto ϕ es un elemento del grupo abeliano libre $C_0(X)$ generado por X. Luego se tiene que

$$\phi = \sum_{x \in X} \phi(x) i(x),$$

donde $i: X = S_0(X) \to C_0(X)$ es la aplicación inclusión. Esto implica que

$$\begin{aligned} h(\phi) &= h\left(\sum_{x \in X} \phi(x) i(x)\right) \\ \Rightarrow h(\phi) &= \sum_{x \in X} \phi(x) h \circ i(x) = \sum_{x \in X} \phi(x) f(x), \end{aligned}$$

donde $h \circ i = f : X \to F[\pi_0(X)]$. Esta sumatoria está bien definida ya que hay a lo más un número finito de términos diferentes de cero, por tanto h está bien definida.

□

Lema 2.3. *El morfismo* $h: C_0(X) \longrightarrow F[\pi_0(X)]$ *es un homomorfismo.*

Demostración: Puesto que $C_0(X)$ es el grupo abeliano libre generado por $S_0(X) = X$, la función f extiende un único morfismo

$$h: C_0(X) \longrightarrow F[\pi_0(X)].$$

Como $C_{-1}(X) = 0$, para el operador borde

$$\partial: C_0(X) \longrightarrow C_{-1}(X),$$

el $Ker(\partial_0) = Z_0(X) = C_0(X)$. Por tanto h es un homomorfismo de $Z_0(X)$ hacia $F[\pi_0(X)]$.

□

Lema 2.4. *El homomorfismo* $h: C_0(X) \longrightarrow F[\pi_0(X)]$ *es un epimorfismo.*

Demostración: Como la función $\pi_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es cero casi en todas partes, el elemento $h(\phi)$ de $F[\pi_0(X)]$ es dado por

$$[h(\phi)](s) = \sum_{x \in X} \phi(x)\{[f(x)](s)\},$$

para cada elemento $s \in \pi_0(X)$. Debido a que

$$[f(x)](s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in s, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin s, \end{cases}$$

obtenemos

$$[h(\phi)](s) = \sum_{x \in s} \phi(x).$$

Por la construcción de ϕ, tenemos que:

$$\phi(x) = \begin{cases} \psi(s) & \text{si} \quad x \in x_s, \\ 0 & \text{si} \quad x \in s \backslash \{x_s\}. \end{cases}$$

Esto implica

$$[h(\phi)](s) = \sum_{x \in s} \phi(x) = \psi(s),$$

para cada $s \in \pi_0(X)$. Por tanto $h(\phi) = \psi$. Esto prueba que h es un epimorfismos.

$\square$

Lema 2.5. *Sea* $h: \ Z_0(X) \to F[\pi_0(X)]$ *entonces* $Im(\partial_1) = B_0(X) \subset Ker(h)$.

Demostración. Considere la siguiente función

$$S_1(X) \xrightarrow{\sigma} C_0(X) \xrightarrow{h} F[\pi_0(X)].$$

Sea $\xi \in S_1(X)$ elemento arbitrario, siendo $\xi: \ \Delta_1 \to X$. Por definición de la función σ tenemos

$$\sigma(\xi) = \xi^{(0)} - \xi^{(1)} = \xi(v_1) - \xi(v_0) \in C_0(X).$$

Puesto que los puntos $\xi(v_0)$ y $\xi(v_1)$ de X son conectados por una curva ξ, tenemos $f[\xi(v_0)] = f[\xi(v_1)]$ y por tanto

$$h[\sigma(\xi)] = f[\xi(v_1)] - f[\xi(v_0)] = 0.$$

Esto prueba

$$(h \circ \sigma)[S_1(X)] = 0.$$

Ya que la composición

$$h \circ \partial: \ C_1(X) \longrightarrow F[\pi_0(X)]$$

es una extensión de la función

$$h \circ \sigma: \ S_1(X) \to \ F[\pi_0(X)]$$

y puesto que $C_1(X)$ es generado por $S_1(X)$, se sigue que:

$$h \circ \partial = 0.$$

Esto implica

$$h[B_0(X)] = h\{\partial[C_1(X)]\} = 0.$$

y por tanto el subgrupo $B_0(X)$ de $Z_0(X)$ esta contenido en el Kernel de h.

$\square$

Lema 2.6. *Sea* $h: Z_0(X) \to F[\pi_0(X)]$ *entonces* $Ker(h) \subset B_0(X) = Im(\partial_1)$.

Demostración. Sea un elemento arbitrario $\phi \in Ker(h) \subset Z_0(X) = C_0(X)$. Entonces tenemos

$$h(\phi) = 0 \in F[\pi_0(X)].$$

Como $\phi: X \longrightarrow \mathbb{Z}$ es una función casi nula en todas partes puesto que $C_0(X)$ es libre y es generado por $S_0(X)$. Por la construcción de h, tenemos

$$h(\phi) = \sum_{x \in X} \phi(x) f(x).$$

Puesto que $h(\phi) = 0$ entonces

$$\sum_{x \in s} \phi(x) = 0 \quad \text{para cualquier } s \in \pi_0(X).$$

Elegimos un punto $x_s \in s$, para cada $s \in \pi_0(X)$. $\forall x \in s$ con $\phi(x) \neq 0$, escojamos una 1-simplex singular $\xi_x: \Delta_1 \longrightarrow X$ tal que $\xi_x(v_0) = x_s$ y $\xi_x(v_1) = x$.
Hacemos esto para todo $s \in \pi_0(X)$. Por tanto ξ_x es definida para cada punto $x \in X$ con $\phi(x) \neq 0$. Sea $\psi \in C_1(X)$ definida por

$$\psi = \sum_{\phi(x) \neq 0} \phi(x) \xi_x.$$

Esto tiene sentido por que esto es casi cero en todas partes. Ahora probemos que:

$$\phi = \partial(\psi).$$

Para esto, consideremos la cadena

$$x = \phi - \partial\psi \in C_0(X).$$

Como un elemento de $C_0(X)$, χ es un función casi nula en todas partes $\chi: X \to \mathbb{Z}$. Para cada punto y de X, tenemos

$$\begin{aligned}
\chi(y) &= \phi(y) - [\partial\psi](y) \\
&= \phi(y) - \sum_{\phi(x) \neq 0} \phi(x)[(\partial \xi_x)(y)] \\
&= \phi(y) - \sum_{\phi(x) \neq 0} \phi(x)[(x - x_s)(y)].
\end{aligned}$$

Si $\phi(y) = 0$ y $y \neq x_s$ para todo $s \in \pi_0(X)$, tenemos

$$\chi(y) = 0.$$

Si $\phi(y) = 0$ y $y = x_s$ para algún $s \in \pi_0(X)$, entonces tenemos

$$\chi(y) = \sum_{x \in s} \phi(x) = 0.$$

Si $\phi(y) \neq 0$ y $y \neq x_s$ para todo $s \in \pi_0(X)$, tenemos

$$\chi(y) = \phi(y) - \phi(y) = 0.$$

Finalmente, si $\phi(y) \neq 0$ y $y = x_s$ para algún $s \in \pi_0(X)$, entonces tenemos

$$\chi(y) = \phi(y) - \phi(y) + \sum_{x \in s} \phi(x) = 0.$$

Consecuentemente, $\chi(y) = 0$ para cada $y \in X$. Esto prueba $\chi = 0$ y por tanto

$$\phi = \partial(\psi) \in B_0(X).$$

Por lo tanto $Ker(h) \subset B_0(X) = Im(\partial_1)$.

□

Observación 2.6. *El* $Ker(h) = B_0(X) \subset Z_0(X)$

Teorema 2.1. *El grupo de homología singular cero-dimensional* $H_0(X)$ *de un espacio topológico* X *es isomorfo al grupo abeliano* $F[\pi_0(X)]$ *generado por el conjunto* $\pi_0(X)$ *de todos los componentes conexa del espacio* X.

Demostración Consideremos el homomorfismo $h : Z_0(X) \longrightarrow F[\pi_0(X)]$ lo cual es extendido por la función $f : X \rightarrow F[\pi_0(X)]$. Por el Lema 2.2, tenemos que h es un epimorfismo, y por la observación 2.6 afirmamos que el Kernel de h es igual a $B_0(X)$. Por una propiedad elemental en Teoría de Grupos, podemos inducir un isomorfismo

$$h_* : H_0(X) \longrightarrow F[\pi_0(X)]$$

del grupo cociente

$$H_0(X) = \frac{Z_0(X)}{B_0(X)}$$

sobre el grupo abeliano libre $F[\pi_0(X)]$. Esto prueba nuestro Teorema.

□

2.4 Grupos de Homología Singular sobre G

Sea X un espacio topológico arbitrario y G cualquier grupo abeliano.

Definición 2.11. Considere un complejo de cadena singular $C(X)$ de un espacio topológico X. Sea

$$C_n(X;G) = C_n(X) \otimes G \qquad \text{para cualquier } n \in \mathbb{Z}$$

el producto tensorial de los grupos Abelianos $C_n(X)$ y G.

Si $n < 0$,tenemos

$$C_n(X;G) = C_n(X) \otimes G = 0 \otimes G = 0$$

Para cualquier $n \geq 0$ se tiene un grupo abeliano libre $C_n(X)$ generado por $S_n(X)$ i.e $S_n(X) \subset C_n(X)$ en consecuencia los elementos de $C_n(X;G)$ pueden ser considerados como las funciones casi cero en todas partes:

$$\gamma : S_n(X) \to G$$

o equivalentemente esta representada en forma lineal finita

$$\gamma = a_1\xi_1 + \cdots + a_k\xi_k$$

Donde $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ es un subconjunto finito arbitrario de $S_n(X)$ y $a_1, \ldots, a_k$ son elementos de G.

Observación 2.7. Los elementos de $C_n(X;G)$ son llamados las cadenas singulares n-dimensional de X sobre G.

Considere el operador frontera

$$\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X) \qquad \text{para cualquier } n \in \mathbb{Z}$$

y el automorfismo identidad

$$i : G \longrightarrow G$$

su producto tensorial es

$$\partial \otimes i : C_n(X) \otimes G \to C_{n-1}(X) \otimes G,$$

representada por

$$\partial : C_n(X;G) \to C_{n-1}(X;G) \qquad \text{para cualquier } n \in \mathbb{Z}$$

Proposición 2.4. *Sea*

$$C_n(X;G) \xrightarrow{\ \partial\ } C_{n-1}(X;G) \xrightarrow{\ \partial\ } C_{n-2}(X;G)$$

Entonces $\partial^2 = 0$ *o, más explícitamente,* $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$.

Demostración: Dejando aparte los casos triviales, para cualquier $c \in C_n(X)$ y cualquier $g \in G$,tenemos

$$\begin{aligned} \partial[\partial(c \otimes g)] &= \partial[(\partial c) \otimes g)] \\ &= (\partial^2 c) \otimes g \\ &= 0 \otimes g \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Nota 2.5. *Para un* $n \in \mathbb{Z}$ *se obtiene una sucesión larga semi-exacta*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X;G) \xrightarrow{\ \partial_{n+1}\ } C_n(X;G) \xrightarrow{\ \partial_n\ } C_{n-1}(X;G) \longrightarrow \cdots$$

al que se denominara ***complejo de cadena singular*** *de* X *sobre* G *y se denotara por* $C(X;G)$.

Observación 2.8. *Sea* $G = \mathbb{Z}$ *entonces tenemos* $C(X;\mathbb{Z}) = C(X)$ *donde* $\mathbb{Z}$ *es el grupo de todos los enteros.*

Definición 2.12. *Sea* $\partial_n : C_n(X;G) \to C_{n-1}(X;G)$ *para cualquier* $n \in \mathbb{Z}$ *el* $Ker(\partial_n) = \mathrm{Z}_n(X;G)$ *el cual será llamado el* ***grupo de ciclos singular n-dimensional*** *de X sobre G.*

Definición 2.13. *Sea* $\partial_{n+1} : C_{n+1}(X;G) \to C_n(X;G)$ *para cualquier* $n \in \mathbb{Z}$ $Im(\partial_{n+1}) = \mathrm{B}_n(X;G)$, *será llamado el* ***grupo de fronteras singular n-dimensional*** *de X sobre G.*

ya que $C(X;G)$ es semi-exacta entonces la inclusion $\mathrm{B}_n(X;G)\subset \mathrm{Z}_n(X;G)$ se da. El grupo cociente

$$H_n(X;G)=\frac{\mathrm{Z}_n(X;G)}{\mathrm{B}_n(X;G)}$$

el cual es llamado el grupo de homología singular n-dimensional del espacio X sobre el grupo abeliano G.

Observación 2.9. Si $G=\mathbb{Z}$ (números enteros) entonces tenemos $H_n(X;\mathbb{Z})=H_n(X)$.

Ahora consideremos el subespacio A del espacio topológico X, por lo tanto $C_n(A)$ es el sumando directo de $C_n(X)$ generado por el subconjunto $S_n(A)$ de $S_n(X)$ y como el producto tensorial se puede calcular tan solo a partir de sus generadores entonces el grupo

$$C_n(A;G)=C_n(A)\otimes G$$

este puede ser considerado como el sumando directo de de $C_n(X;G)$ consiste de una forma lineal

$$\gamma=a_1\xi_1+\ldots+a_k\xi_k$$

donde $\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$ es un subconjunto finito arbitrario de $S_n(A)\subset S_n(X)$ y $a_1,\ldots a_k$ son elementos de G. El grupo cociente

$$C_n(X,A;G)=\frac{C_n(X;G)}{C_n(A;G)}$$

es llamado el grupo de cadenas singulares n-dimensionales del par topológico (X,A) sobre G

Observación 2.10. Se observa que el operador frontera $\partial_n:C_n(X;G)\to C_{n-1}(X;G)$ envía el subgrupo $C_n(A;G)$ de $C_n(X;G)$ hacia el subgrupo $C_{n-1}(A;G)$ de $C_{n-1}(X;G)$.

De la observación anterior se induce un homomorfismo definido de la siguiente manera

$$\partial_n:C_n(X,A;G)\longrightarrow C_{n-1}(X,A;G)$$

Entonces $\partial^2=0$ de ello se obtiene una sucesión larga semi-exacta

$$\cdots\longrightarrow C_{n+1}(X,A;G)\xrightarrow{\partial_{n+1}}C_n(X,A;G)\xrightarrow{\partial_n}C_{n-1}(X,A;G)\longrightarrow\cdots$$

llamada complejo de cadena singular de (X,A) sobre G y será denotado por $C(X,A;G)$.

Observación 2.11. Son obvios los siguientes casos especiales:

$$C(X, \emptyset; G) = C(X; G),$$

$$C(X, A; \mathbb{Z}) = C(X, A).$$

Definición 2.14. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, sea $\partial_n : C_n(X, A; G) \longrightarrow C_{n-1}(X, A; G)$ el $Ker(\partial_n) = \mathrm{Z}_n(X, A; G)$ denominada el grupo de ciclos singulares n-dimensionales de (X, A) sobre G.

Definición 2.15. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, sea $\partial_{n+1} : C_{n+1}(X, A; G) \longrightarrow C_n(X, A; G)$ la $Im(\partial_{n+1}) = \mathrm{B}_n(X, A; G)$ se denominada el grupo de fronteras singulares n-dimensionales de (X, A) sobre G.

Como $C(X, A; G)$ es una cadena semi-exacta,lo cual se deduce la siguiente inclusion

$$\mathrm{B}_n(X, A; G) \subset \mathrm{Z}_n(X, A; G)$$

Nota 2.6. El grupo cociente $H_n(X, A; G) = \dfrac{\mathrm{Z}_n(X, A; G)}{\mathrm{B}_n(X, A; G)}$ es llamado el n-ésimo grupo de homología singular de (X, A) sobre el grupo abeliano G o el grupo de homología singular n-dimensional de $X\ modulo\ A$ sobre G

Observación 2.12. De la definición se sigue:

$$H_n(X, \emptyset; G) = H_n(X; G),$$

$$H_n(X, A; \mathbb{Z}) = H_n(X, A).$$

Finalmente tenemos la siguiente proposición

Proposición 2.5. Si $n < 0$, entonces

$$H_n(X, A; G) = 0$$

para cualquier par topológico (X, A) sobre el grupo abeliano G.

Demostración: Sea $\partial : C_n(X, A; G) \longrightarrow C_{n-1}(X, A; G)$
por definición se tiene :

$$\begin{aligned} C_n(X, A; G) &= C_n(X, A) \otimes G \\ &= 0 \otimes G \qquad \forall n < 0 \\ C_n(X, A; G) &= 0 \qquad \forall n < 0 \end{aligned}$$

luego $Ker(\partial) = \mathrm{Z}_n(X, A; G) = 0 \qquad \forall n < 0$
por lo tanto

$$\begin{aligned} H_n(X, A; G) &= \frac{\mathrm{Z}_n(X, A; G)}{\mathrm{B}_n(X, A; G)} \\ &= \frac{0}{\mathrm{B}_n(X, A; G)} \qquad \forall n < 0 \\ H_n(X, A; G) &= 0 \qquad \forall n < 0 \end{aligned}$$

□

2.5 Homomorfismos inducidos

Sean dos pares topológicos (X, A) y (Y, B) y su respectiva aplicación $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$.

Definición 2.16. *Se define* $f \circ \xi : \Delta_n \longrightarrow Y$ *un n-símplice singular en Y . Luego* $f : X \longrightarrow Y$ *induce una aplicación* $S_n(f) : S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$ *definido por* $[S_n(f)](\xi) = f \circ \xi : \Delta_n \longrightarrow Y$. *Además su restricción* $f|A : A \longrightarrow B$ *induce una función continua* $S_n(f|A) : S_n(A) \longrightarrow S_n(B) \qquad \forall n \geqslant 0$

Definición 2.17. *Sea* $C_n(X)$ *es el grupo abeliano libre generado por* $S_n(X)$, *definamos el homomorfismo*

$$C_n(f) : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y),$$

como la extensión de $S_n(f) : S_n(X) \longrightarrow S_n(Y) \subset C_n(Y)$. *Además* $C_n(A)$ *es generado por* $S_n(A)$ *y su restricción* $S_n(f|A) : S_n(A) \longrightarrow S_n(B)$, *es obvio que extiende un único homomorfismo* $C_n(f) : C_n(A) \longrightarrow C_n(B)$. *Luego el homomorfismo se define de la siguiente manera*

$$C_n(f) : [C_n(X), C_n(A)] \longrightarrow [C_n(Y), C_n(B)] \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Observación 2.13. *Para* $\forall n < 0$, *tenemos que* $C_n(X) = 0$ *y* $C_n(Y) = 0$*; en este caso* $C_n(f)$ *denota un homomorfismo trivial.*

Tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.7. *El siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
C_n(X) \arrow[r, "\partial_X"] \arrow[d, "C_n(f)"] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "C_{n-1}(f)"] \\
C_n(Y) \arrow[r, "\partial_Y"] & C_{n-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración: Para esta demostración se va hacer en dos pasos:

- Para $n \leq 0$ el lema satisface ya que $C_{n-1}(Y) = 0$.
- Para $n > 0$, se observa que $C_n(X)$ es un grupo abeliano libre generado por $S_n(X)$. Sea $\xi : \Delta_n \longrightarrow X$ denotamos cualquier símplices singular n-dimensional en X

$$\begin{tikzcd}
C_n(X) \arrow[r, "\partial_X"] \arrow[d, "C_n(f)"] \arrow[dr, shift left, "C_{n-1}(f)\circ\partial_X"] \arrow[dr, shift right, "\partial_Y\circ C_n(f)"'] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "C_{n-1}(f)"] \\
C_n(Y) \arrow[r, "\partial_Y"] & C_{n-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos $[C_n(f)](\xi) = f \circ \xi$ por lo tanto:

$$\begin{aligned}
[\partial_Y \circ C_n(f)](\xi) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(f \circ \xi \circ k_i) \\
&= C_{n-1}(f)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\xi \circ k_i) \\
&= C_{n-1}(f)\partial_X(\xi) \\
&= [C_{n-1}(f) \circ \partial_X](\xi)
\end{aligned}$$

Esto prueba

$$[\partial_Y \circ C_n(f)](\xi) = [C_{n-1}(f) \circ \partial_X](\xi) \qquad para\ cualquier\ \xi \in S_n(X),$$

puesto que $S_n(X)$ es el generador de $C_n(X)$ lo cual queda demostrado .

$\square$

Sean $C(X;G)$ y $C(Y;G)$ complejos de cadenas singulares y G un grupo abeliano su producto tensorial del homomorfismo $C_n(f) : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$ con el automorfismo $i : G \longrightarrow G$ es un homomorfismo

$$C_n(f) \otimes i : C_n(X;G) \longrightarrow C_n(Y;G)$$

ya que su restricción $C_n(f|A) : C_n(A) \longrightarrow C_n(B)$ y su homomorfismo respectivo $C_n(f) \otimes i : C_n(A;G) \longrightarrow C_n(B;G)$ entonces tenemos el siguiente homomorfismo inducido lo cual es

$$C_n(f;G) : C_n(X,A;G) \longrightarrow C_n(Y,B;G).$$

La siguiente proposición es una consecuencia del lema anterior.

Proposición 2.6. *El rectángulo*

$$\begin{array}{ccc} C_n(X,A;G) & \xrightarrow{\partial_X} & C_{n-1}(X,A;G) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle C_n(f;G)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle C_{n-1}(f;G)} \\ C_n(Y,B;G) & \xrightarrow{\partial_Y} & C_{n-1}(Y,B;G) \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: Sea la red siguiente de homomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow C_{n+1}(X,A;G) & \xrightarrow{\partial_X} & C_n(X,A;G) & \xrightarrow{\partial_X} & C_{n-1}(X,A;G) \longrightarrow \cdots \\ \Big\downarrow{\scriptstyle C_n(f;G)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle C_n(f;G)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle C_{n-1}(f;G)} \\ \cdots \longrightarrow C_{n+1}(Y,B;G) & \xrightarrow{\partial_{Y|}} & C_n(Y,B;G) & \xrightarrow{\partial_Y} & C_{n-1}(Y,B;G) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Las dos líneas horizontales son los complejos de cadenas singulares $C(X,A;G)$ y $C(Y,B;G)$ y por lo tanto semi-exacta entonces los rectángulos son conmutativos. Porque las sucesiones de homomorfismos $C(f;G) = \{C_n(f;G)/n \in \mathbb{Z}\}$ es llamada la transformación de cadenas

$$C(f;G) : C(X,a;G) \longrightarrow C(Y,B;G)$$

inducido por la aplicación $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$

$\square$

Proposición 2.7. Para $n \in \mathbb{Z}$,el homomorfismo

$$C_n(f;G) : C_n(X,A;G) \longrightarrow C_n(Y,B;G)$$

lleva $Z_n(X,A;G)$ en $Z_n(Y,B;G)$ y $B_n(X,A;G)$ en $B_n(Y,B;G)$.

Demostración: Sea $z \in Z_n(X,A;G) = ker(\partial_X) \Longrightarrow \partial_X(z) = 0$ por definición.
Luego:

$$\begin{aligned}
\partial_Y[C_n(f;G)(z)] &= C_{n-1}(f;G)[\partial_X(z)] \\
&= C_{n-1}(f;G)(0) \\
\partial_Y[C_n(f;G)(z)] &= 0 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow C_n(f;G)(z) \in ker(\partial_Y) = Z_n(Y,B;G)$
$\therefore \quad C_n(f;G)(z) \in Z_n(Y,B;G) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$

Sea $w \in Im(\partial_X) = B_n(X,A;G)$ por definicion
$\exists\, v \in C_{n+1}(X,A;G) \quad tal\ que \quad \partial_X(v) = w.$
Sea $u = [C_{n+1}()f;G](v) \in C_{n+1}(Y,B;G)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad \partial_Y(u) &= \partial_Y[C_{n+1}(f;G)(v)] \\
&= C_n(f;G)[\partial_X(v)] \\
\partial_Y(u) &= C_n(f;G)(w)
\end{aligned}$$

$\therefore \quad C_n(f;G)(w) \in Im(\partial_Y) = B_n(Y,B;G) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$

□

de la Proposición 2.7 se deduce que $C_n(f;G)$ induce un homomorfismo

$$f_* = H_n(f;G) : H_n(X,A;G) \longrightarrow H_n(Y,B;G)$$

que será llamado el homomorfismo inducido por la aplicación

$$f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$$

del grupo de homología singular n-dimensional $H_n(X,A;G)$.

Proposición 2.8. Sean las aplicaciones de pares topológicos

$$f : (X,A) \longrightarrow (Y,B) \qquad y \qquad g : (Y,B) \longrightarrow (Z,C)$$

tenemos

$$H_n(g \circ f; G) = H_n(g; G) \circ H_n(f; G) : H_n(X, A; G) \longrightarrow H_n(Y, B; G)$$

para cualquier G y $n \in \mathbb{Z}$

Demostración: Sea $g \circ f : (X, A) \longrightarrow (Z, C)$ la composición de aplicaciones entre pares topológicos, definición 2.16 y 2.17 lo cuál induce un homomorfismo

$$C_n(f; G) : C_n(X, A; G) \longrightarrow C_n(Z, C; G)$$

por la Proposición 2.7 este induce un homomorfismo de homología
$H_n(g \circ f; G) = H_n(g; G) \circ H_n(f; G) : H_n(X, A; G) \longrightarrow H_n(Z, C; G)$ □

Proposición 2.9. *Sea* $i : (X, A) \longrightarrow (X, A)$ *es la aplicación identidad. Entonces el homomorfismo induce*

$$i_* = H_n(i; G) : H_n(X, A; G) \longrightarrow H_n(X, A; G)$$

es el automorfismo identidad del $H_n(X, A; G)$ *para cualquier grupo abeliano G y* $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Sea $i : (X, A) \longrightarrow (X, A)$ aplicación identidad del par topológico (X, A), por la definición 2.16 y 2.17 lo cuál induce un homomorfismo

$$C_n(i; G) : C_n(X, A; G) \longrightarrow C_n(X, A; G)$$

por la Proposición 2.7 este induce un homomorfismo de homología
$i_* = H_n(i; G) : H_n(X, A; G) \longrightarrow H_n(X, A; G)$

□

2.6 Operador frontera

Sea (X, A) cualquier par topológico y G un grupo abeliano. El objetivo de esta sección es construir un homomorfismo $\partial = \partial(X, A; G, n) : H_n(X, A; G) \longrightarrow H_{n-1}(A; G)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. el cual se llamara el **operador frontera de** $H_n(X, A; G)$.
Se considera un grupo de cadena n-singular $C_n(X, A; G) = \dfrac{C_n(X; G)}{C_n(A; G)}$ y la proyección natural $\Pi_n : C_n(X; G) \longrightarrow C_n(X, A; G)$ Para construir el operador frontera de $H_n(X, A; G)$,

definamos una función $\varphi : Z_n(X,A;G) \longrightarrow H_{n-1}(A;G)$. Sea un $z \in Z_n(X,A;G)$ y como $C_n(X,A;G) \supset Z_n(X,A;G)$ entonces existe un elemento $u \in C_n(X;G)$ tal que $\Pi_n(u) = z$.

Considere el elemento $\partial(u) \in C_{n-1}(X;G)$ donde $\partial = \partial_n : C_n(X;G) \longrightarrow C_{n-1}(X;G)$ el cual es el operador frontera de $C_n(X;G)$.

Lema 2.8. El elemento $\partial(u)$ esta contenido en el subgrupo $C_{n-1}(A;G) \subset C_{n-1}(X;G)$.

Demostración: Consideremos el siguiente rectángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C_n(X;G) \arrow[r, "\Pi_n"] \arrow[d, "\partial"] & C_n(X,A;G) \arrow[d, "\partial"] \\
C_{n-1}(X;G) \arrow[r, "\Pi_{n-1}"] & C_{n-1}(X,A;G)
\end{tikzcd}$$

de homomorfismos. Ya que el diagrama es conmutativo entonces tenemos

$$\Pi_{n-1}[\partial(u)] = \partial[\Pi_n(u)] = 0.$$

Esto demuestra que $\partial(u) \in C_{n-1}(A;G)$.

□

Lema 2.9. El elemento $\partial(u)$ esta contenido en el subgrupo $Z_{n-1}(A;G) \subset C_{n-1}(A;G)$.

Demostración: Ya que el operador frontera en $C_{n-1}(A;G)$ es la restricción de $C_{n-1}(X;G)$, tenemos

$$\partial[\partial(u)] = (\partial \circ \partial)(u) = 0.$$

Por lo tanto $\partial(u)$ esta contenido en $Z_{n-1}(A;G)$.

□

Definición 2.18. Se considera la proyección natural $p : Z_{n-1}(A;G) \longrightarrow H_{n-1}(A;G)$ de $Z_{n-1}(A;G)$ sobre su cociente $H_{n-1}(A;G) = \dfrac{Z_{n-1}(A;G)}{B_{n-1}(A;G)}$.

Lema 2.10. El elemento $p[\partial(u)] \in H_{n-1}(A;G)$ es independiente de la elección de $u \in C_n(X;G)$.

Demostración: Sean dos elementos cualesquiera $u, v \in C_n(X;G)$ satisfaciendo que $\Pi_n(u) = z = \Pi_n(v)$.
Consideremos el elemento $u - v \in C_n(X;G)$. Entonces

$$\Pi_n(u-v) = \Pi_n(u) - \Pi_n(v) = z - z = 0,$$

por lo tanto $u - v \in C_n(A;G) \subset C_n(X;G)$. Esto implica que $\partial(u-v) \in B_n(A;G)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} p[\partial(u)] - p[\partial(v)] &= p[\partial(u-v)] \\ &= p[0] \\ &= 0 \\ p[\partial(u)] &= p[\partial(v)] \end{aligned}$$

□

Definición 2.19. *Se define la función* $\varphi : Z_n(X,A;G) \longrightarrow H_{n-1}(A;G)$ *como* $\varphi(z) = p[\partial(u)] \in H_{n-1}(A;G)$ *donde* $z \in Z_n(X,A;G)$ *y* $\Pi_n(u) = z$, *para cualquier* $u \in C_n(X;G)$.

Lema 2.11. *La función* $\varphi : Z_n(X,A;G) \longrightarrow H_{n-1}(A;G)$ *es un homomorfismo.*

Demostración: Sean dos elementos cualesquiera $y, z \in Z_n(X,A;G)$. Elijamos dos elementos $u, v \in C_n(X;G)$ satisfaciendo $\Pi_n(u) = y$ y $\Pi_n(v) = z$. por definición tenemos

$$\varphi(y) = p[\partial(u)] \qquad \text{y} \qquad \varphi(z) = p[\partial(v)].$$

Ya que $\Pi_n(u+v) = y + z$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(y+z) &= p[\partial(u+v)] \\ &= p[\partial(u)] + p[\partial(v)] \\ &= \varphi(y) + \varphi(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto φ es un homomorfismo.

□

Lema 2.12. *Si* $\varphi : Z_n(X,A;G) \longrightarrow H_{n-1}(A;G)$ *entonces* $Ker(\varphi) \supset B_n(X,A;G)$.

Demostración: Sea un elemento arbitrario $z \in B_n(X,A;G)$. Por definición de $B_n(X,A;G)$, existe un elemento $y \in C_{n+1}(X,A;G)$ tal que $\partial(y) = z$. Por Definamos de $\Pi_{n+1} : C_{n+1}(X;G) \longrightarrow C_{n+1}(X,A;G)$, existe un elemento $w \in C_{n+1}(X;G)$ tal que $\Pi_{n+1}(w) = y$. Sea $u = \partial(w)$. De la conmutatividad

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1}(X;G) & \xrightarrow{\Pi_{n+1}} & C_{n+1}(X,A;G) \\ \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ C_n(X;G) & \xrightarrow{\Pi_n} & C_n(X,A;G) \end{array}$$

del rectángulo obtenemos

$$\Pi_n(u) = \Pi_n[\partial(w)] = \partial[\Pi_{n+1}(w)] = \partial(y) = z.$$

Por la definición de φ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= p[\partial(u)] \\ &= p[\partial^2(w)] \\ &= p(0) \\ &= 0 \qquad \text{lo que queda demostrado} \end{aligned}$$

□

Definición 2.20. *El homomorfismo* $\varphi : Z_n(X,A;G) \longrightarrow C_{n-1}(A;G)$ *induce un homomorfismo* $\partial : H_n(X,A;G) \longrightarrow H_{n-1}(A;G)$ *como* $\partial(w) = \varphi(z)$.

Sea $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ una aplicación entre pares topológico y sea $g : A \longrightarrow B$ una aplicación definida por f. Entonces tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.10. *Para todo* $n \geqslant 0$ *y* G *cualquier grupo abeliano, el rectángulo*

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A;G) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A;G) \\ \downarrow{\scriptstyle H_n(f;G)} & & \downarrow{\scriptstyle H_{n-1}(g;G)} \\ H_n(Y,B;G) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B;G) \end{array}$$

es conmutativo, es decir , tenemos

$$\partial \circ H_n(f;G) = H_{n-1}(g;G) \circ \partial.$$

Demostración: Sea un elemento arbitrario $x \in H_n(X, A; G)$ con la proyección natural $p : Z_n(X, A; G) \longrightarrow H_n(X, A; G)$. Entonces Existe un elemento $z \in Z_n(X, A; G)$ tal que $p(z)$. considerando el homomorfismo $\Pi_n : C_n(X; G) \longrightarrow C_n(X, A; G)$ definido anteriormente y como $Z_n(X, A; G) \subset C_n(X, A; G)$, entonces existe un elemento $u \in C_n(X; G)$ tal que $\Pi_n(u) = z$. Sea

$$v = [C_n(h; G)](u) \quad \text{y} \quad w = [C_{n(f;G)}](z)$$

donde $h : X \longrightarrow Y$ definida por la aplicación f. Por la conmutatividad del rectángulo

$$\begin{tikzcd}
C_n(X;G) \arrow[r, "\Pi_n"] \arrow[d, "C_n(h;G)"] & C_n(X,A;G) \arrow[d, "C_n(f;G)"] \\
C_n(Y;G) \arrow[r, "\omega_n"] & C_n(Y,B;G)
\end{tikzcd}$$

donde ω_n es la proyección natural, tenemos

$$\begin{aligned}
\omega_n(v) &= \omega_n[C_n(h; G)(u)] \\
&= C_n(f; G)[\Pi_n(u)] \\
&= [C_n(f; G)](z) \\
&= w.
\end{aligned}$$

En otras palabras, del rectángulo

$$\begin{tikzcd}
C_n(X;G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "C_n(h;G)"] & C_{n-1}(X;G) \arrow[d, "C_{n-1}(h;G)"] \\
C_n(Y;G) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(Y;G)
\end{tikzcd}$$

obtenemos

$$C_{n-1}(h; G)[\partial(u)] = \partial[C_n(h; G)(u)] = \partial(v).$$

Entonces $\partial(u) \in C_{n-1}(A; G)$ por lema 2.9, tenemos $\partial(u) = C_{n-1}(g; G)[\partial(u)]$.
Ahora, por definición, $\partial(x \in H_{n-1}(A; G))$ conteniendo el ciclo singular

$$\partial(u) \in Z_{n-1}(A; G).$$

Por lo tanto se sigue que $H_{n-1}(g; G)[\partial(x)] \in H_{n-1}(B; G)$ conteniendo al ciclo singular

$$C_{n-1}(g; G)[\partial(u)] \in Z_{n-1}(B; G).$$

En otras palabras, $H_n(f;G) \in H_n(Y,B;G)$ conteniendo el ciclo singular

$$[C_n(f;G)](z) = w \in Z_n(Y,B;G).$$

Por lo tanto $\omega_n(w)$, esto sigue por la definición de que $\partial[H_n(f;G)(x)] \in H_{n-1}(B;G)$ conteniendo el ciclo singular

$$\partial(v) \in Z_n(B;G).$$

Por que de

$$\partial(v) = C_{n-1}(g;G)[\partial(u)],$$

Se llegó a demostrar que $H_{n-1}(g;G)[\partial(x)] = \partial[H_n(f;G)]$. Entonces x es un elemento arbitrario de $H_n(X,A;G)$, lo cual queda demostrado.

$\square$

2.7 Sucesiones de homología singular

Consideremos un par topológico (X,A) y G un grupo abeliano arbitrario. Sean las aplicaciones inclusiones $j : X \longrightarrow (X,A)$ e $i : A \longrightarrow X$ por definición de homomorfismo inducidos se tiene $H_n(j;G) = j_* : H_n(X;G) \longrightarrow H_n(X,A;G)$ e $H_n(i;G) = i_* : H_n(A;G) \longrightarrow H_n(X;G)$, $\forall n \geqslant 0$. La propiedad más importante de los grupos de homología singular relativa es la existencia de un homomorfismo de enlace, $\partial(X,A;G,n) = \partial : H_n(X,A;G) \longrightarrow H_{n-1}(A;G)$ $\forall n \geqslant 0$, gracias al cual va a obtenerse una sucesión infinita de homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow H_n(A;G) \xrightarrow{H_n(i;G)=i_*} H_n(X;G) \xrightarrow{H_n(j;G)=j_*} H_n(X,A;G) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A;G) \longrightarrow \cdots$$

llamada **sucesión de la homología singular del par** (X,A) sobre G. Este homomorfismo de enlace se define por $\partial(X,A;G,n)(z+B_n(X,A)) = \partial_n(z) + B_{n-1}(A)$, para $z \in Z(X,A)$.

Lema 2.13. *Si* $H_n(A;G) \xrightarrow{i_*} H_n(X;G) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A;G)$ *entonces* $Im(i_*) \subset Ker(j_*)$.

Demostración: Sea $\alpha \in Im(i_*) \subset H_n(X;G)$ entonces por definición de $Im(i_*)$, existe un elemento $\beta \in H_n(A;G)$ tal que $i_*(\beta) = \alpha$.

Elijamos un ciclo singular $z \in \beta \subset C_n(A;G)$. Por la definición de i_* tenemos $[C_n(i;G)](z) \in \alpha \subset C_n(X;G)$.
Por la definición de j_*, tenemos $C_n(j;G)[C_n(i;G)(z)] \in j_*(\alpha) \subset C_n(X,A;G)$. Ahora se tiene $C_n(i;G) : C_n(A;G) \longrightarrow C_n(X;G)$ es claramente el homomorfismo inclusión y $C_n(j;G) : C_n(X;G) \longrightarrow C_n(X,A;G)$ es claramente la proyección natural del cual se deduce que $C_n(j;G)[C_n(i;G)(z)] = 0 \in C_n(X,A;G)$. Esto implica que $j_*(\alpha) = 0 \in H_n(X,A;G)$ y por lo tanto $\alpha \in Ker(j_*)$. Ya que α es un elemento arbitrario de $Im(i_*)$, lo cual queda demostrado.

$\square$

Lema 2.14. *Si* $H_n(A;G) \xrightarrow{i_*} H_n(X;G) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A;G)$ *entonces* $Ker(j_*) \subset Im(i_*)$.

Demostración: Sea α cualquier elemento de $Ker(j_*) \subset H_n(X;G)$ del homomorfismo inducido j_*. Elijamos un ciclo singular $z \in \alpha \subset C_n(X;G)$. Por lo tanto $j_*(\alpha) = 0$ tenemos $\Pi_n(z) = [C_n(j;G)](z) \in B_n(X,A;G)$. Entonces existe un elemento $y \in C_{n+1}(X,A;G)$ tal que $\partial(y) = \Pi_n(z)$, donde ∂ representa al operador frontera $\partial : C_{n+1}(X,A;G) \longrightarrow C_n(X,A;G)$ ya que $\Pi_{n+1} = C_{n+1}(j;G) : C_{n+1}(X;G) \longrightarrow C_{n+1}(X,A;G)$ es un epimorfismo entonces existe un elemento $x \in C_{n+1}(X;G)$ tal que $\Pi_{n+1}(x) = y$. entonces tenemos

$$\begin{aligned} \Pi_n[z - \partial(x)] &= \Pi_n(z) - \Pi_n[\partial(x)] \\ &= \Pi_n(z) - \partial[\Pi_{n+1}(x)] \\ &= \Pi_n(z) - \partial(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $z - \partial(x) \in C_n(A;G)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \partial[z - \partial(x)] &= \partial(z) - \partial^2(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

tenemos $z - \partial(x) \in Z_n(A;G)$.
Sea $\beta \in H_n(A;G)$ que contiene a un ciclo singular $z - \partial(x)$. Ya que $z \in \alpha$ y $\partial(x) \in B_n(X;G)$, entonces tenemos

$$z - \partial(x) \in \alpha \subset C_n(x;G).$$

Esto implica $i_*(\beta) = \alpha$ y por lo tanto $\alpha \in Im(i_*)$. Luego α es un elemento arbitrario de $Ker(j_*)$, lo cual queda demostrado.

□

Lema 2.15. Si $H_n(X;G) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A;G) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A;G)$ entonces $Im(j_*) \subset Ker(\partial)$.

Demostración: Sea $\alpha \in Im(j_*) \subset H_n(X,A;G)$. Entonces por la definición de $Im(j_*)$, existe un elemento $\beta \in H_n(X;G)$ tal que $j_*(\beta) = \alpha$. Se elija un ciclo singular $z \in \beta \subset C_n(X;G)$ por la definición de j_* tenemos $[C_n(j;G)]((z) \in \alpha \subset C_n(X,A;G)$. Puesto que $C_n(j;G) : C_n(X;G) \longrightarrow C_n(X,A;G)$ es la proyección natural,resulta de la definición de operador frontera $\partial : H_n(X,A;G) \longrightarrow H_{n-1}(A;G)$ que tenemos $\partial(z) \in \partial(\alpha) \subset C_{n-1}(A;G)$. Puesto que $z \in Z_n(X;G)$, tenemos $\partial(z) = 0$. Esto implica que $\partial(\alpha) = 0 \in H_{n-1}(A;G)$ y por lo tanto $\alpha \in Ker(\partial)$. Puesto que α es cualquier elemento de la $Im(j_*)$, lo cual queda demostrado.

□

Lema 2.16. Si $H_n(X;G) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A;G) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A;G)$ entonces $Ker(\partial) \subset Im(j_*)$.

Demostración: Sea α cualquier elemento del $Ker(\partial) \subset H_n(X,A;G)$ del operador frontera ∂. Elija un ciclo singular $z \in \alpha \subset C_n(X,A;G)$. Ya que

$$C_n(j;G) = \Pi_n : C_n(X;G) \longrightarrow C_n(X,A;G)$$

tal que $\Pi_n(u) = z$. De acuerdo con la definición del operador frontera $\partial : H_n(X,A;G) \longrightarrow H_{n-1}(A;G)$, tenemos

$$\partial(u) \in \partial(\alpha) \subset C_{n-1}(A;G).$$

Puesto que $\partial(\alpha) = 0 \in H_{n-1}(A;G)$, existe un elemento $v \in C_n(A;G)$ tal que $\partial(u) = \partial(v)$. Sea $y = u - v \in C_n(X;G)$. Entonces tenemos

$$\partial(y) = \partial(u) - \partial(v) = 0.$$

Esto implica que $y \in Z_n(X;G)$. Sea $\beta \in H_n(X;G)$ que contiene el ciclo singular y. Pues $v \in C_n(A;G)$, tenemos

$$\begin{aligned} \Pi_n(y) &= \Pi_n(u) - \Pi_n(v) \\ &= \Pi_n(u) \\ &= z. \end{aligned}$$

Esto implica $j_*(\beta) = \alpha$ y por lo tanto $\alpha \in Im(j_*)$. Como α es un elemento arbitrario de $Ker(\partial)$, esto queda demostrado.

□

Lema 2.17. *Si* $H_n(X,A;G) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A;G) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X;G)$ *entonces* $Im(\partial) \subset Ker(i_*)$.

Demostración: Sea α cualquier elemento de $Im(\partial) \subset H_{n-1}(A;G)$. Entonces por la definición de $Im(\partial)$, existe un elemento $\beta \in H_n(X;A;G)$ con $\partial(\beta)$. Elija un ciclo singular

$$z \in \beta \subset C_n(X,A;G).$$

Puesto que la proyección natural

$$\Pi_n = C_n(j;G) : C_n(X;G) \longrightarrow C_n(X,A;G)$$

es un epimorfismo, existe un elemento $u \in C_n(X;G)$ con $\Pi_n(u) = z$. Por la definición del operador frontera ∂,

$$\partial(u) \in \alpha \subset C_{n-1}(A;G).$$

Ya que $C_{n-1}(i;G) : C_{n-1}(A;G) \longrightarrow C_{n-1}(X;G)$ es el homomorfismo inclusión, dado por la definición de i_* tenemos

$$\partial(u) \in i_*(\alpha) \subset C_{n-1}(X;G).$$

Puesto que $\partial(u) \in B_{n-1}(X;G)$, esto implica $i_*(\alpha) = 0 \in H_{n-1}(X;G)$ y por lo tanto $\alpha \in Ker(i_*)$. Dado que α es un elemento arbitrario de $Im(\partial)$, lo cual queda demostrado.

□

Lema 2.18. *Si* $H_n(X,A;G) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A;G) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X;G)$ *entonces* $Ker(i_*) \subset Im(\partial)$.

Demostración: Sea α cualquier elemento del $Ker(i_*) \subset H_{n-1}(A;G)$ del homomorfismo inducido i_*. Elija un ciclo singular

$$z \in \alpha \subset C_{n-1}(A;G).$$

Puesto que $i_*(\alpha) = 0$, existe un elemento $u \in C_n(X;G)$ que satisface $\partial(u) = z$.
Sea $y = \Pi_n(u) \in C_n(X,A;G)$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \partial(y) &= \partial[\Pi_n(u)] \\ &= \Pi_{n+1}[\partial(u)] \\ &= \Pi_{n+1}(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $y \in Z_n(X, A; G)$. Sea β un elemento de $H_n(X, A; G)$ que contiene el ciclo singular y. Puesto que $\Pi_n(u) = y$, dado por la definición de $\partial(\beta)$ tenemos

$$z = \partial(u) \in \partial(\beta) \subset C_{n-1}(A; G).$$

Esto implica $\partial(\beta) = \alpha$ y por lo tanto $\alpha \in Im(\partial)$. Dado que α es un elemento arbitrario de $Ker(i_*)$, lo cual queda demostrado.

$\square$

Definición 2.21. *Una sucesión de homomorfismos*

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} H_n \xrightarrow{\alpha_n} H_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} H_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

es exacta si $Ker(\alpha_n) = Im(\alpha_{n+1})$ *para todo n*

Teorema 2.2. *La sucesión larga*

$$\cdots \xrightarrow{H_n(i;G)=i_*} H_n(X; G) \xrightarrow{H_n(j;G)=j_*} H_n(X, A; G) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A; G) \longrightarrow \cdots \tag{2.1}$$

es exacta.

Demostración: De la sucesión larga de homología singular se tiene:

i) Del Lema 2.13 y 2.14 de deduce que $Im(i_*) = Ker(j_*)$

ii) Del Lema 2.15 y 2.16 de deduce que $Im(j_*) = Ker(\partial)$

iii) Del Lema 2.13 y 2.14 de deduce que $Im(\partial) = Ker(i_*)$

Por lo tanto de la definición 2.22, la sucesión larga es exacta por i) ,ii) y iii) para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$\square$

Ejemplo 2.2. *Veamos algunos ejemplos que se obtienen estudiando la sucesión (1.1)*

a) *Si* X *es conexo por caminos y* $A = \{x_0\}$, $\forall n > 0$, *la aplicación inducida sobre loos grupos de homología,* $H_n(1_X) : H_n(X, \emptyset) \longrightarrow H_n(X, A)$, *es un isomorfismo.*

b) *Para* $n \geq 1$, $H_n(\mathbb{S}^{n-1})$ *y* $H_{n+1}(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ *son isomorfos.*

c) *Para* $n > 1$, $H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$

d) *Para* $n = 1$, $H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \backsimeq \mathbb{Z}$.

2.8 Verificación de que la homología singular es un teoría homológica

Ahora demostraremos en esta sección que la homología singular satisface los axiomas de Eilenberg-Steenrod.

2.8.1 La homología singular satisface el Axioma de la funtorialidad de homología

Definición 2.22. *Una sucesión de grupos de la forma* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ *se llama una sucesión exacta corta.En tal caso, es fácil comprobar que i es un monomorfismo y j un epimorfismo. Además* $C \simeq B/Ker(j) \simeq B/Im(i) \simeq B/A.$

Sea el par (X, A) el cuál da lugar a una sucesión exacta corta de complejos de cadenas:

$$0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{i} C_n(X) \xrightarrow{\Pi} C_n(X)/C_n(A) \longrightarrow 0$$

Sea $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ una aplicación de pares y su diagrama de cadenas inducidas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "C_n(f/A)"] & C_n(X) \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "C_n(f)"] & C_n(X)/C_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "C_n(f)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n(B) \arrow[r, "i"] & C_n(Y) \arrow[r, "\Pi"] & C_n(Y)/C_n(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

LEMA DEL ZIG-ZAG

Ahora probaremos la exactitud de una sucesión de homológica de un par topologico.Reformularemos este resultado como un teorema sobre complejos de cadenas y demostrar como se forman.Primero necesitamos una definición.

Lema 2.19. *(El lema del zig-zag).*
Supongamos un complejo de cadenas $\mathfrak{C} = \{C_p, \partial_C\}$, $\mathfrak{D} = \{D_p, \partial_E\}$,*y las aplicaciones de cadenas* ϕ, ψ *tal que la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{C} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{D} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{E} \longrightarrow 0$$

Teorema 2.3. *Si* $0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{i} C_n(X) \xrightarrow{\Pi} C_n(X)/C_n(A) \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de complejo de cadenas Entonces existen homomorfismos*

$$\partial : H_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$$

tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Demostración:

Teorema 2.4. ***(Axioma de conmutatividad).*** *El homomorfismo conector* $\partial : H_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$ *es natural en el par* (X,A), *es decir, si* $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ *es una aplicación de pares topológicos entonces el diagrama siguiente conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial"] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & H_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & \cdots, \\
\cdots \arrow[r, "\partial"] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(B) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

para todo $n \geq 0$.

Demostración: Como $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ es una aplicación de pares con $f : X \longrightarrow Y$ y $g = f/A : A \longrightarrow B$ definida por $g(x) = f(x) \quad \forall x \in A$, además las dos sucesiones largas de homología horizontales son exactas

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial"] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & H_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial"] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(B) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

entonces para todo $n \geq 0$ los diagramas son conmutativos. Es decir,

$$\partial \circ H_n(f) = H_n(f) \circ \partial, \qquad \text{para todo } x \in A.$$

$\square$

2.8.2 La homología singular satisface el Axioma de la homotopía

En esta sección probaremos unos de los axiomas de Eilenberg-Steenrod el cual se refiere que dos espacios homotópicos tienen los mismos grupos de homología.

Definición 2.23. *Diremos que dos aplicaciones* $f, g : X \longrightarrow Y$ *son homotópicos si existe una aplicación continua* $F : X \times I \longrightarrow Y$ *tal que, para todo* $x \in X,$ *se cumple* $F(x, 0) = f(x)$ *y* $F(x, 1) = g(x)$.

Sean $i, j : X \longrightarrow X \times I$ definidas por

$$i(x) = (x, 0) \qquad y \qquad j(x) = (x, 1)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & X \times I \arrow[r, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces el diagrama es conmutativo,es decir,

$$F \circ i = f \qquad y \qquad F \circ j = g$$

Por el axioma de la composición entre pares topológicos en la homología para el resultado anterior se tiene :

$$H_n(F) \circ H_n(i) = H_n(f) \qquad y \qquad H_n(F) \circ H_n(j) = H_n(g).$$

Luego basta probar que $H_n(i) = H_n(j) : H_n(X) \longrightarrow H_n(X \times I) \qquad \forall n \geqslant 0.$

Lema 2.20. *Decimos que* $C_n(i), C_n(j) : C_n(X) \longrightarrow C_n(X \times I)$ *son cadenas homotópicas si existe un homomorfismo* $D_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X \times I)$ *tal que* $\partial \circ D_n + D_{q-1}\partial = C_n(j) - C_n(i)$.

Demostración: Sea el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial"] & C_2(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "C_n(j)"'] \arrow[d, shift left, "C_n(i)"] & C_1(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "D_1"'] \arrow[d, shift right, "C_n(j)"'] \arrow[d, shift left, "C_n(i)"] & C_0(X) \arrow[r] \arrow[dl, "D_0"'] \arrow[d, shift right, "C_n(j)"'] \arrow[d, shift left, "C_n(i)"] & 0 \\ \cdots \arrow[r, "\partial"'] & C_2(X \times I) \arrow[r, "\partial"'] & C_1(X \times I) \arrow[r, "\partial"'] & C_0(X \times I) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

En particular para n=0, comenzamos definiendo $D_0 : C_0(X) \longrightarrow C_1(X \times I)$ por $D_0(\xi) = \xi \times I,$ donde $\xi : \Delta_0 \longrightarrow X$ es un 0-símplice singular en X y $\xi \times I$ denota el 1-símplice singular en $X \times I$. Entendemos D_0 a las 0-cadenas por linealidad. Entonces para todo $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}\partial[D_0(\xi)] &= \partial(\xi \times I)\\ &= (x,1) - (x,0)\\ &= j(x) - i(x)\end{aligned}$$

Luego, $\partial[D_0] = j_{\#,0} - i_{\#,0}$.

Lema 2.21. *Notemos que D_0 es una aplicación natural en el siguiente sentido. Si $h : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entonces el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} C_0(X) \arrow[r, "D_0"] \arrow[d, "h_\#"] & C_1(X \times I) \arrow[d, "(h\times 1)_\#"] \\ C_0(Y) \arrow[r, "D_0"] & C_1(Y \times I) \end{tikzcd}$$

Demostración: En efecto, para un 0-símplice singular ξ en X , tenemos

$$\begin{aligned}(h \times I)_\# \circ D_0(\xi) &= (h \times I) \circ (\xi \times I)\\ &= (h \circ \xi) \times I\\ &= D_0(h(\xi))\\ &= D_0 h_\#(\xi).\end{aligned}$$

La definición de homotopía de espacios topológicos se generaliza de forma natural a pares de espacios. El teorema principal es el siguiente:

Proposición 2.11. ***(Axioma de homotopía)*** *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones homotópicas. Entonces, para todo $q \geqslant 0$, se tiene que $H_n(f) = H_n(g) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$.*

Demostración: Ahora pasamos a definir $D_j : C_j(X) \longrightarrow C_{j+1}(X \times I)$ inductivamente y satisfaciendo las siguientes propiedades

a). $\partial_{j+1} \circ D_j + D_{j-1} \circ \partial_j = i_\# - j_\#$.

b). Para cada aplicación continua $h : X \longrightarrow Y$, se tiene que $D_j h_\# = (h \times I)_\# D_j$.

Observemos que desde (a) se tiene para $j = q - 1$,

$$\partial_n(i_\# - j_\#) = (i_\# - j_\#)\partial_n = \partial D_{n-1}\partial_n,$$

de donde $\partial_n(i_\# - j_\# - D_{n-1}\partial_n) = 0$.
Construcción de D_n. Sea $\delta_n : \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ la aplicación identidad. Entonces

$$(i_\# - j_\# - D_{n-1}\partial_n)(\delta_n)$$

es un q-ciclo. Como el complejo de cadena $\Delta_n \times I$ es acíclico (es decir, $\widetilde{H}_n^\#(\Delta_n \times I) = 0$ para todo $n \geqslant 0$), existe $w \in C_{n+1}(\Delta_n \times I)$ tal que

$$\partial_{n+1}(w) = (i_\# - j_\# - D_{n-1}\partial_n)(\delta_n).$$

Definimos $D_n(\delta_n) = w$. Tenemos así que

$$\partial_{n+1}D_n(\delta_n) + D_{n-1}\partial_n(\delta_n) = (i_\# - j_\#)(\delta_n).$$

Definimos, para un q-símplice singular $\xi \in C_n(X)$,

$$D_n(\xi) = (\xi \times I)_\#(D_n(\delta_n)),$$

y extendemos por linealidad a las q-cadenas complejas. Esto de?ne un homomorfismo

$$D_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X \times I)$$

que satisface las propiedades (a) y (b) anteriores. En efecto, para verificar la condición (b), tenemos

$$\begin{aligned} D_n h_\#(\xi) &= D_n(h\xi) \\ &= (h\xi \times I)_\# D_n(\delta_n) \\ &= (h \times I)_\#(\xi \times I)_\# D_n(\delta_n) \\ &= (h \times I)_\# D_n(\xi). \end{aligned}$$

Para verificar (a), tenemos

$$\partial_{n+1}D_n(\xi) = \partial_{n+1}((\xi \times I)_\# D_n(\delta_n)) \tag{2.2}$$
$$= (\xi \times I)_\#\partial_{n+1}D_n(\delta_n). \tag{2.3}$$

Escribiendo $\xi = \xi_\#(\delta_n)$ y aplicando ∂_n obtenemos

$$\partial_n \xi = \xi_\# \partial_n(\delta_n).$$

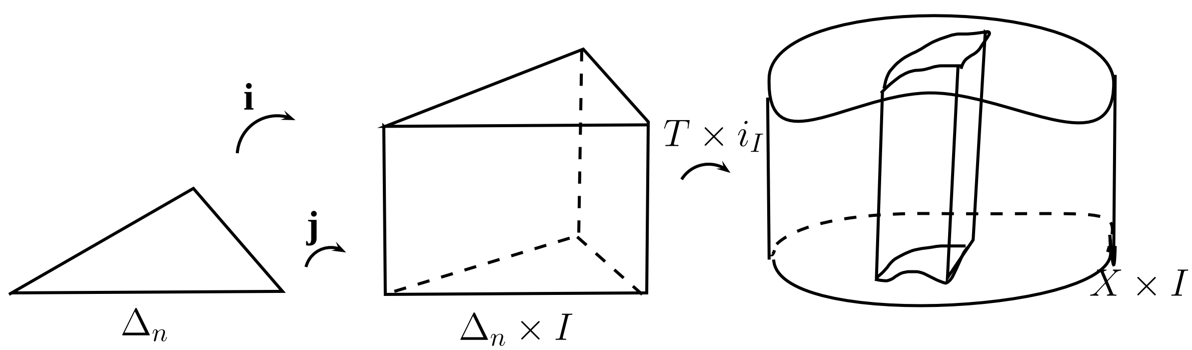
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_{n-1}\partial(\xi) &= D_{n-1}\xi_\#\partial_n(\delta_n) &\quad (2.4)\\ &= (\xi \times I)_\# D_{n-1}\partial_n(\delta_n). &\quad (2.5)\end{aligned}$$

De (2.2) y (2.4) obtenemos,

$$\begin{aligned} (\partial_{n+1}D_n + D_{n-1}\partial_n)(\xi) &= (\xi \times I)_\#(\partial_{n+1}D_n + D_{n-1}\partial_n)\\ &= (\xi \times I)_\#(i_\# - j_\#)(\delta_n)\\ &= (i_\# - j_\#)\xi_\#(\delta_n)(yaque(\xi \times I)i_j = i_j \circ \xi, j = 0, 1)\\ &= (i_\# - j_\#)(\xi).\end{aligned}$$

Por lo tanto, D_n es una homotopía de cadena entre $i_\#$ y $j_\#$ y tenemos completada la demostración lo cual queda demostrado de que $f_* = g_*$.



Teorema 2.5. *Si* $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ *son homotópicos, entonces* $f_* = g_*$

Demostración: Sea $F : (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y, B)$ es la homotopía entre $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$. Sea $i, j : (X, A) \longrightarrow (X \times I, A \times I)$ dado por $i(x) = (x, 0)$ y $j(x) = (x, 1)$. Sea $D_X : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X \times I)$ la homotopía de cadena del lema anterior. De la naturalidad de D_X con respecto a la inclusión $A \longrightarrow X$ se muestra que la restricción de $D_X|C_n(A)$ es igual $D_A : C_n(A) \longrightarrow C_{n+1}(A \times I)$. Este D_X lleva $C_n(A)$ hacia $C_{n+1}(A \times I)$, y esto induce una homotopía de cadenas

$$D_{X,A} : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n+1}(X \times I, A \times I)$$

para cualquier nivel.Por la formula (a) del lema 30.6 porque $D_{X,A}$ es inducido por D_X. Se define D de la composición de $D_{X,A}$ y el homomorfismo

$$F_{\#} : C_{n+1}(X \times I, A \times I) \longrightarrow C_{n+1}(Y, B).$$

Entonces calculamos

$$\begin{aligned}
\partial D &= \partial F_{\#} D_{X,A} \\
&= F_{\#} \partial D_{X,A} \\
&= F_{\#}(j_{\#} - i_{\#} - D_{X,A}\partial) \\
&= (F \circ j)_{\#} - (F \circ i)_{\#} - F_{\#} D_{X,A}\partial \\
&= f_{\#} - g_{\#} - D\partial.
\end{aligned}$$

2.8.3 La homología singular satisface el Axioma de la excisión

Sea $U \subset A \subset X$. Decimos que la aplicación inclusión $(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ es una excisión si induce un isomorfismo

$$H_n(X - U, A - U) \longrightarrow H_n(X, A) \qquad \text{para todo } n \geqslant 0.$$

Decimos en este caso que U puede ser cortado desde X, sin afectar la homología.

Nota 2.7. *Sea $\mathcal{U}$ es una colección de conjuntos con cubrimientos en X.*

Sea el conjunto $C_n^{\mathcal{U}}(X) := \{\xi : \Delta_n \longrightarrow X/\ Im\ \xi \subset A$ para algún $A \in \mathcal{U}\}$ es un grupo abeliano libre, además $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ es un subgrupo de $C_n(X)$.
Notemos que si la $Im\ \xi \subset A$ entonces escribimos $\partial\xi = \sum n_i \xi_i,$ para cada i la $Im\ \xi_i \subset Im\ \xi \subset A$ así que $\partial\xi \in C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$. Así la restricción de ∂ en $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ en términos hacia un complejo de cadenas y la aplicación inclusión se convierte en una aplicación de cadena.
Observemos también que si ξ es un generador de $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ entonces $D_X\xi \in C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ porque:
si $D_{\Delta_n}(\iota_n) = \sum n_i S_i$ entonces

$$D_X\xi = \xi_* D_{\Delta_n}(\iota_n) = \sum n_i \xi_* S_i = \sum n_i(\xi \circ S_i).$$

Pero la $Im\ \xi \subset A$ para algún $A \in \mathcal{U}$ y la $Im\ \xi \circ S_i \subset Im\ \xi$.

Observación 2.14. *La siguiente afirmación fuerte de que* $i_* : C_*^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow C_*(X)$ *es una equivalencia de cadenas homotópicas es verdadera, pero no será demostrado esta.*

Proposición 2.12. *Sea* $\mathcal{U}$ *una colección de subconjuntos de* X *cuyos interiores cubren* X*. Entonces*

$$H_*(i_*) : H_*(C_*^{\mathcal{U}}(X), \partial) \longrightarrow H_*(C_*(X), \partial)$$

es un isomorfismo.

Demostración: La sucesión exacta corta de complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow C_*^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\quad i \quad} C_*(X)(X) \xrightarrow{\quad q \quad} \frac{C_*(X)}{C_*^{\mathcal{U}}(X)} \longrightarrow 0$$

induce una sucesión de homología larga. Para demostrar que i_* es un isomorfismo en homología $\forall n \in \mathbb{Z}$ es equivalente a demostrar que $H_n(\dfrac{C_*(X)}{C_*^{\mathcal{U}}(X)}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.
Sea $qc \in \dfrac{C_*(X)}{C_*^{\mathcal{U}}(X)}$ es un ciclo representando un elemento de $H_n(\dfrac{C_*(X)}{C_*^{\mathcal{U}}(X)})$, donde $c \in C_n(X)$. Es decir, $\partial qc = 0$ o equivalentemente $\partial c \in C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$.
Deseamos demostrar que existe un $d \in C_{n+1}(X)$ se tiene $\partial qd = qc$ o equivalentemente $c - \partial d \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$.
Ya que c es la suma finita de generadores $c = \sum n_j \xi_j$, encontrar N es decir podemos escribir $sd^N \quad \xi_j = \sum n_{ij}\xi_{ij}$ donde $\forall i, j \exists A \in \mathcal{U}$ (dependiente de i y j) con $Im\ \xi_{ij} \subset A$.
Sea D_X es la homotopía de cadena $D_X : 1 \simeq sd^N$ para este N. Demostrar que $c + \partial D_X c \in C_{n^{\mathcal{U}}}(X)$ y entonces $d = -D_X C$.

$$\partial D_X c + D_X \partial c = sd^N\ c - c \text{ es decir } c + \partial D_X c = sd^N\ c - D_X \partial c.$$

Por definición de N, $sd^N c \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. También $\partial c \in C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ como notamos primero y $D_X \partial x \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Así se requiere que d exista. Por lo tanto ∂c es la clase de homología cero en $H_n(\dfrac{C_*(X)}{C_*^{\mathcal{U}(X)}})$

Corolario 2.1. *Sea* $\phi : C_*^{\mathcal{U}}(X, B) \longrightarrow C_*(X, B)$ *induce un isomorfismo en homología.*

Demostración:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_*^{\mathcal{U}\cap B}(B) \arrow[r] \arrow[d] & C_*^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_*^{\mathcal{U}}(X,B) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*(B) \arrow[r] & C_*(X) \arrow[r] & C_*(X,B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_{n+1}^{\mathcal{U}}(X,B) \arrow[r] \arrow[d] & H_n^{\mathcal{U}\cap B}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n\mathcal{U}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n^{\mathcal{U}}(X,B) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}^{\mathcal{U}}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & {} \\
{} \arrow[r] & H_{n+1}(X,B) \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,B) \arrow[r] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & H_{n-1}(X) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Ya que las aplicaciones marcadas son isomorfismos para dicho teorema, el resto de aplicaciones verticales son también isomorfismos, por el lema de los cinco.

Proposición 2.13. *Sea $A \subset X$. Si U es un subconjunto de X tal que $\overline{U} \subset Int\ A$. entonces la inclusión*

$$j : (X-U, A-U) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomomorfismo en homología singular.

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ la colección $\{X-U; A\}$. El $Int(X-U) = X - \overline{U}$ ya que $\overline{U} \subset Int\, A$, los interiores de $X-U$ y A son un cubrimientos de X. Por lo tanto $C_*^{\mathcal{U}}(X,A) \longrightarrow C_*(X,A)$ induce un isomorfismo en homología. Para concluir la demostración deberemos de demostrar que $C_*(X-U, A-U) \cong C_*^{\mathcal{U}}(X,A)$ como complejo de cadenas.
Sea el homomorfismo

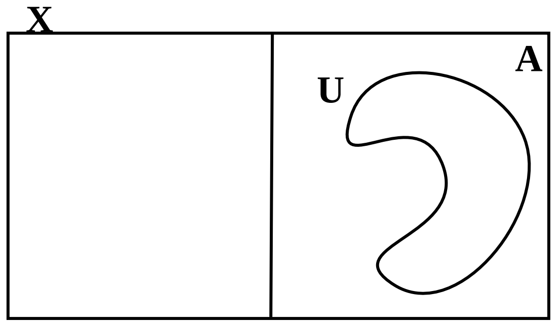
$$\psi : C_n(X-U) \longrightarrow \frac{C_n^{\mathcal{U}}(X)}{C_n^{\mathcal{U}\cap A}(A)}$$

definido de la siguiente manera $\psi(\xi) = [\xi]$ ya que la $Im\ \xi \subset (X-U)$ pertenece a $\mathcal{U}$.
Cada elemento de $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ puede escribirse como $c = \sum m_i S_i + \sum n_i \xi_j$ donde $Im\ S_i \subset A \quad \forall i$ y $Im\ \xi_i \subset (X-U) \quad \forall i.$
Ya que $\sum m_i S_i \in C_n^{\mathcal{U}\cap A}(A)$, en $\dfrac{C_n^{\mathcal{U}}(A)}{C_n^{\mathcal{U}\cap A}(A)}$, $[c] = [\sum n_j \xi_j] = \psi(\sum_j \xi_j)$. Por lo tanto ψ es sobreyectivo.
Sea el $Ker(\psi) = C_n(X-U) \cap C_n^{\mathcal{U}\cap A}(A)$, se nota que $\mathcal{U} \cap A = \{(X-U)\cap A,\ A \cap A\} = \{A-U, A\}$ y entonces la colección incluye a A y así mismo, $C_n^{\mathcal{U}\cap A}(A) = C_n(A)$.
En general $C_n(A) \cap C_n(B) = C_n(A \cap B)$ ya que un símplice tiene como imagen en A y B si y solamente si su imagen esta en $A \cap B$. Por lo tanto

$$ker(\psi) = C_n(X-U) \cap C_n^{\mathcal{U}\cap A}(A) = C_n((X-U)\cap A) = C_n(A-U).$$

Así tenemos

$$C_n(X-U, A-U) \cong \frac{C_n(X-U)}{C_n(A-U)} \cong \frac{C_n^{\mathcal{U}}(X)}{C + p^{\mathcal{U}\cap A}} = C_n^{\mathcal{U}}(X,A).$$



2.8.4 La homología singular satisface el Axioma de la dimensión

Proposición 2.14. *Sea X un espacio topológico formado por un punto. Entonces tenemos*

$$H_n(X;G) = \begin{cases} G & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Demostración: Sea G un grupo abeliano arbitrario, si $n \neq 0$ entonces se tiene los siguientes casos:

a) Para $n < 0$, tenemos el homomorfismo

$$\partial : C_n(X;G) \longrightarrow C_{n-1}(X;G)$$

ya que $C_n(X;G) = 0 \ \ \forall n < 0$, esto nos conlleva $B_n(X,G) = Z_n(X;G) = C_n(X;G)$. Por lo tanto $H_n(X;G) = 0$

b) Para $n > 0$, como $X = \{q\}$ tiene solo un n-símplices singular

$$\xi_n : \Delta_n \longrightarrow X$$

para cada n (aplicación constante en X). Por lo tanto, $C_n(X)$ grupo cíclico infinito generado por ξ_n y los elementos del grupo

$$C_n(X;G) = C_n(X) \otimes G \approx G$$

puede ser considerado como $g\xi_n$ para todo $g \in G$, tenemos

$$\partial : C_n(X;G) \longrightarrow C_{n-1}(X;G)$$

definido por $\partial(g\xi_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i g\xi_n^i = [\sum_{i=0}^{n}(-1)^i]\, g\xi_{n-1}$. Esto implica

$$\partial(g\xi_n) = \begin{cases} 0 & \text{, si n es par} \\ g\xi_{n-1} & \text{, si n es impar} \end{cases}$$

consecuentemente, el operador frontera o borde

$$\partial : C_n(X;G) \longrightarrow C_{n-1}(X;G)$$

1. Asumamos que n es un número entero par positivo entonces:
   - *a*) El ∂ es el homomorfismo trivial. Luego se deduce que $Z_n(X;G) = C_n(X;G)$.
   - *b*) El ∂ es un isomorfismo . Luego se deduce que $B_n(X;G) = C_n(X,G)$. Esto implica
   $$H_n(X;G) = \frac{Z_n(X;G)}{B_n(X;G)} = 0.$$
2. Asumamos que n es un número entero impar positivo entonces:
   - *a*) El ∂ es un isomorfismo. Luego se deduce que $Z_n(X;G) = C_n(X;G)$.
   $$H_n(X;G) = \frac{Z_n(X;G)}{B_n(X;G)} = 0.$$

En conclusión $H_n(X;G) \approx 0 \qquad \forall n \neq 0$

c) Para $n = 0$, tenemos los siguientes homomorfismos triviales

$$C_1(X;G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X;G) \xrightarrow{\partial_0} C_{-1}(X;G) = 0$$

del cual se deduce que :

$$Z_0(X;G) = C_0(X;G) \qquad \text{y} \qquad B_0(X;G) = 0$$

Por lo tanto obtenemos

$$H_0(X;G) = C_0(X;G) \approx G.$$

Capítulo 3

Cálculo de algunos grupos de homología

En esta sección se demostrará los grupos de homología de ciertos espacios topológico como por ejemplo el punto, el circulo, la esfera n-dimensional, el espacio proyectivo y el toro.

3.1 Grupo de homología del Punto

Proposición 3.1. *Sea X un espacio con un solo punto. Entonces* $H_n(X) = 0 \quad \forall n \neq 0$ *y* $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Tomemos un espacio de un solo punto $X = \{x_0\}$ y tenemos para toda dimensión un único n-símplice $\xi_n : \Delta_n \longrightarrow \{x_0\}$, entonces

$$\xi_n \circ k_i = \xi_{n-1} \qquad \text{para } i = 0, \ldots, n.$$

Así $\partial \xi_{2n} = \xi_{2n-1}$ y $\partial \xi_{2n-1} = 0 \quad \forall n \geqslant 0$. En cada dimensión $C_n(\{x_0\}) = \mathbb{Z}[x_0] \cong \mathbb{Z}$, así en dimensión par $\partial : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es el homomorfismo identidad y es el homomorfismo trivial cuando la dimensión es impar. El complejo de cadenas singulares asociado al espacio de un solo punto tiene el siguiente aspecto.

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

Para $n = 0$ tenemos que $Z_0(\{x_0\}) = C_0(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$ y $B_0(\{x_0\}) = 0$ de donde $H_0(\{x_0\}) = 0$. Para $n > 0$ par tenemos que $Z_n(\{x_0\}) = 0$ y $B_n(\{x_0\}) = 0$ y en este caso $H_n(\{x_0\}) = 0$. Para n impar es fácil ver que $Z_n(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$ y $B_n(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$ de donde concluimos que $H_n(\{x_0\}) = 0$.

$$H_n(\{x_0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

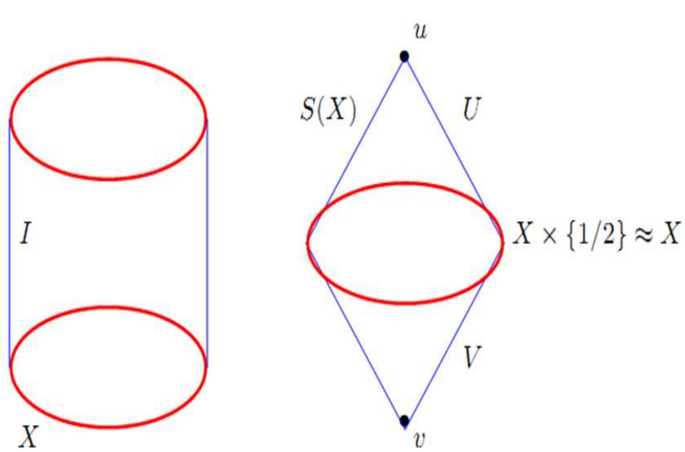
3.2 Grupo de homología del esfera

En esta parte calcularemos la homología de la esfera para ello daremos algunas definiciones para luego dar su respectiva demostración.

3.2.1 Suspensión

Sea X es un espacio topológico no vació y sea I el intervalo unitario $[0,1] = I$ de números reales. En el producto topológico $X \times I$ identificamos, respectivamente, los subespacios $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$ a un sólo punto u y v, obteniendo el espacio cociente $S(X)$, los puntos u y v son llamados polos sur y polo norte de $S(X)$, respectivamente mediante la relación.

Nota 3.1. *El espacio cociente $S(X)$ es llamado la suspensión del espacio topológico X.*



Sea $p: \ X\times I \longrightarrow S(X)$ la proyección canónica y sea $i: \ X \hookrightarrow S(X)$ la inclusión $i(x)=p(x,1/2)$. Claramente usando i podemos identificar X con $p(X,1/2)\subseteq S(X)$. Sean $U,V\subseteq S(X)$ los subespacios definidos por

$$\begin{aligned} U &= \{p(x,t) : x\in X, 1/2\leqslant t\leqslant 1\} \\ V &= \{p(x,t) : x\in X, 0\leqslant t\leqslant 1/2\}. \end{aligned}$$

Entonces U y V son claramente espacios contráctiles. Además tenemos las relaciones $U\cap V=X \quad U\cup V=S(X)$.

Definición 3.1. *Para un par topológico arbitrario (X,A), donde X y A son no vacíos, existe una y solo una aplicación $\theta: \ (X,A)\to(0,0)$. Establecemos*

$$\widetilde{H}_n(X,A)=Kernel(\theta_*: \ H_n(X,A)\to H_n(0,0)).$$

*la cual se llamará el **grupo de homología reducida**.*

Definición 3.2. *La sucesión del núcleo de esta aplicación θ*

$$\cdots\longrightarrow \tilde{H}_n(A)\xrightarrow{i_*}\tilde{H}_n(X)\xrightarrow{j_*}\tilde{H}_n(X,A)\xrightarrow{\partial}\tilde{H}_{n-1}(A)\longrightarrow\cdots$$

*es llamada **La sucesión de homología reducida** del par topológico (X,A).*

Teorema 3.1. *Para cualquier par (X,A) con $X\neq\emptyset$ y $A\neq\emptyset$, la sucesión de homología reducida del (X,A)*

$$\cdots\longrightarrow \widetilde{H}_n(A)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_n(X)\xrightarrow{j_*}\widetilde{H}_n(X,A)\xrightarrow{\partial}\widetilde{H}_{n-1}(A)\longrightarrow\cdots$$

es exacta.

Demostración. Puesto que la secuencia homológica reducida de (X,A) defiere de la secuencia homológica usual solo en los dos grupos $\widetilde{H}_0(A)$ y $\widetilde{H}_0(X)$, luego es suficiente verificar la exactitud de la siguiente parte de la secuencia:

$$\widetilde{H}_1(X,A)\xrightarrow{\widetilde{\partial}}\widetilde{H}_0(A)\xrightarrow{\widetilde{i}_*}\widetilde{H}_0(X)\xrightarrow{\widetilde{j}_*}\widetilde{H}_0(X,A)$$

donde la tilde sobre ∂, i_* y j_* se agregan para evitar ambigüedades.
Para este propósito, comparemos con la parte correspondiente a la secuencia homológica usual de (X,A):

$$H_1(X,A)\xrightarrow{\partial}H_0(A)\xrightarrow{i_*}H_0(X)\xrightarrow{j_*}H_0(X,A)\ .$$

Puesto que $\widetilde{H}_1(X,A) = H_1(X,A)$ y $\widetilde{\partial}$ es definida por ∂, tenemos

$$\text{Im}(\widetilde{\partial}) = \text{Im}(\partial).$$

El homomorfismo $i_* : H_0(A) \to H_0(X)$ lleva $\widetilde{H}_0(A)$ sobre $\widetilde{H}_0(X)$ y envía Im(ν_*) isomorficamente sobre Im(μ_*). Entonces se sigue de la descomposición en suma directa de $H_0(A)$ y $H_0(X)$ del cual tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\widetilde{i}_*) &= \mathrm{Ker}(i_*), \\ \text{Im}(\widetilde{i}_*) &= \text{Im}(i_*) \cap \widetilde{H}_0(X). \end{aligned}$$

Finalmente, ya que $\widetilde{j}_*$ es la restricción de j_* a $\widetilde{H}_0(X)$, tenemos

$$\mathrm{Ker}(\widetilde{j}_*) = \mathrm{Ker}(j_*) \cap \widetilde{H}_0(X).$$

Por tanto, de esto se sigue la exactitud de la secuencia homológica usual de (X,A), así tenemos

$$\text{Im}(\widetilde{\partial}) = \text{Im}(\partial) = \mathrm{Ker}(i_*) = \mathrm{Ker}(\widetilde{i}_*),$$

$$\text{Im}(\widetilde{i}_*) = \text{Im}(i_*) \cap \widetilde{H}_0(X) = \mathrm{Ker}(j_*) \cap \widetilde{H}_0(X) = \mathrm{Ker}(\widetilde{j}_*).$$

Esto prueba la exactitud de la secuencia homológica reducida de (X,A).

■

Consideremos la sucesión de homología reducida exacta del par topológico (U,X). Entonces para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\partial : \; H_{n+1}(U,X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X)$$

o también

$$\partial : \; H_{n+1}(U,X) = \widetilde{H}_{n+1}(U,X) \approx \widetilde{H}_n(X)$$

es un isomorfismo.Considerando la sucesión exacta de homología reducida del par $(S(X),V)$. Como V es subespacio contráctil y $S(X)$ es un espacio topológico, se tiene que

$$j_* : \; H_{n+1}(S(X)) = \widetilde{H}_{n+1}(S(X)) \longrightarrow H_{n+1}(S(X),V)$$

es un isomorfismo para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Ahora, sea $e : \; (U,X) \longrightarrow (S(X),V)$ la aplicación de inclusión. Se tiene que e es una excisión del conjunto abierto $M = Int(V) =$

$S(X) - U$ del par $(S(X), V)$
Consideremos el conjunto abierto $N \subseteq S(X)$ definido por

$$N = \{p(x,t) : \; x \in X, \; 0 \leqslant t < 1/3\}.$$

Se tiene que $\overline{N} \subseteq M$ y la aplicación inclusión $h : \; (U, X) \longrightarrow (S(X) - N, V - N)$ es una equivalencia homotópica. Luego para cada $n \geqslant 0$

$$e_* : \; H_{n+1}(U, X) \longrightarrow H_{n+1}(S(X), V)$$

es un isomorfismo. Tenemos el siguiente diagrama de isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(U,X) \arrow[r, "e_*"] \arrow[d, shift left, "\partial"] & H_{n+1}(S(X),V) \arrow[d, "j_*"] \\
\widetilde{H}_n(X) \arrow[r, "\tau"] \arrow[u, shift left, "\partial^{-1}"] & \widetilde{H}_{n+1}(S(X))
\end{tikzcd}$$

$$\tau = j_* \circ e_* \circ \partial_* : H_n(X) \longrightarrow H_{n+1}[S(X)]$$

es un isomorfismo, llamado isomorfismo de suspensión en la teoría de homología $\mathfrak{K}$.

Proposición 3.2. *Para cualquier $n \geqslant 0$, los grupos de homología reducida de la esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$, son los siguientes:*

$$\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^n) \approx \begin{cases} G & (\text{si } q = n) \\ 0 & (\text{si } q \neq n) \end{cases}$$

donde G es grupo de coeficiente de la teoría de homología $\mathfrak{K}$

Demostración. Se demostrara para dos casos

- Para n=0, la esfera 0-dimensional $\mathbb{S}^0$ pueden ser identificado con el subespacio de la recta real, consideremos dos números reales “0” y “1”.
  Para determinar los grupos de homología reducida de $\mathbb{S}^0$, consideremos la sucesión de homología reducida de $(\mathbb{S}^0, 0)$ como $\{0\}$ es un subespacio de un espacio contráctil $\mathbb{S}^0$, tenemos un isomorfismo

$$j_* : \widetilde{H}_{q+1}[\mathbb{S}^0] \longrightarrow H_q[\mathbb{S}^0, \{0\}]$$

para cualquier entero q. Puesto que $\{0\}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{S}^0$ con $\overline{\{0\}} \subset Int(\{0\})$, la excisión

$$e : \{1\} = (\{1\}, \emptyset) \longrightarrow (\mathbb{S}^0, \{0\})$$

induce un isomorfismo

$$e_* : H_q(\{1\}) = H_q(\{1\}, \emptyset) \longrightarrow H_q(\mathbb{S}^0, \{0\})$$

para cualquier entero n. Luego como $\mathbb{S}^0$ es contráctil

$$\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^0) \approx \widetilde{H}_q(\mathbb{S}^0, \{0\}) \approx \widetilde{H}_q(\{1\}) \approx \begin{cases} G & (\text{si } q = 0) \\ 0 & (\text{si } q \neq 0) \end{cases}$$

■

- Para $n > 0$, demostraremos por inducción matemática, asumiremos que se cumple para $n = K$ entonces consideremos la suspensión de $S(X)$ de la k-esfera $\mathbb{S}^k$. Puesto que $S(\mathbb{S}^k)$ es homeomorfo a la (k+1) esfera $\mathbb{S}^{k+1}$ y ambos son hotopicamente equivalentes, es decir tenemos

  $$\widetilde{H}_q[S(\mathbb{S}^k)] \approx \widetilde{H}_q(\mathbb{S}^{k+1})$$

  para cualquier entero q.Finalmente tenemos la suspensión isomórfica

  $$\tau : \widetilde{H}_q(\mathbb{S}^k) \approx \widetilde{H}_q[S(\mathbb{S}^k)] \approx \widetilde{H}_q(\mathbb{S}^{k+1}).$$

  Esto demuestra que $n = k + 1$.

■

3.3 Grupo de homología del plano proyectivo

Sea $W = \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$, donde $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ denota el origen de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se define la relación de equivalencia $\backsim$ en el espacio W, como $x \backsim y$ si y solo si $y_i = \lambda x_i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Sea $\mathbb{RP}^n = W/ \backsim$ es el espacio cociente W sobre la relación de equivalencia con la topología cociente.

Nota 3.2. *El espacio topológico $\mathbb{RP}^n$ es llamado el espacio proyectivo n-dimensional.*

Sea

$$\Pi : W \longrightarrow \mathbb{RP}^n$$

denota la proyección natural del espacio W hacia su espacio cociente $\mathbb{RP}^n$. Uno puede claramente observar que $\pi^{-1}(p)$ es una linea recta en $\mathbb{R}^{n+1}$ pasando a través del origen 0 y con el origen eliminado. Por lo tanto $\mathbb{RP}^n$ puede ser considerado como el espacio de todas las líneas rectas en $\mathbb{R}^{n+1}$ pasando a través del origen. Definamos los siguientes subespacios del espacio $\mathbb{R}^{n+1}$ como sigue :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{n+1} &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1}/\|x\| \leq 1\} \\
\mathbb{S}^n &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1}/\|x\| = 1\} \\
\mathbb{E}^n &= \{x \in \mathbb{E}^{n+1}/x_0 = 0\} \\
U^n &= \{x \in \mathbb{S}^{n+1}/x_0 \leq 0\} \\
V^n &= \{x \in \mathbb{S}^{n+1}/x_0 \geq 0\{ \\
\mathbb{S}^{n-1} &= \{x \in \mathbb{S}^{n+1}/x_0 = 0\}
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} = W,$ tenemos la siguiente restricción de π:

$$\sigma = \pi|\mathbb{S}^n : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n.$$

Lema 3.1. *La aplicación $\sigma :\ \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ es una identificación.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{RP}^n$. Entonces $\pi^{-1}(p)$ es una línea recta en $\mathbb{R}^{n+1}$ a través del origen $\overrightarrow{0}$ con ella eliminada. Por lo tanto $\pi^{-1}(p) \cap \mathbb{S}^n$ de un par de puntos antípodas de $\mathbb{S}^n$. Sea x uno de esos dos puntos. Entonces obtenemos

$$\sigma(x) = \pi(x) = p.$$

Por lo tanto σ es una aplicación sobreyectiva.Luego $\mathbb{S}^n$ es compacto y $\mathbb{RP}^n$ es un espacio de Hausdorff, entonces la aplicación sobreyectiva σ es una aplicación cerrada,es decir, cuya inversa de un cerrado es cerrado. Por lo tanto σ es una identificación.

■

Para cada punto $p \in \mathbb{RP}^n,$ la imagen inversa $\sigma^{-1}(p)$ es un par de puntos antípodas de $\mathbb{S}^n$. de ahí podemos considerar $\mathbb{RP}^n$ como el espacio cociente de la n-esfera $\mathbb{S}^n$ obtenidas por identificación de puntos antípodas y la aplicación $\sigma :\ \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ como la proyección natural.

Observación 3.1. *Se puede observar que :*

- *Si* $n = 1,$ *entonces* $\sigma(\mathbb{S}^{n-1})$ *es un solo punto* P^0 *de* P^n.
- *Si* $n > 1,$ *entonces el subespacio* $\sigma(\mathbb{S}^{n-1})$ *de* P^n *obviamente puede ser identificado con el espacio proyectivo real (n-1)-dimensional* P^{n-1}.

Así, σ define una aplicación

$$\rho : (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1}).$$

Ya que U^n y V^n son subespacios de $\mathbb{S}^n$ conteniendo a $\mathbb{S}^{n-1}$, ρ define dos aplicaciones

$$\zeta : (U, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1}) \quad \text{y} \quad \eta : (V, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1}).$$

Para otra representación del espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n$ consideremos el n-elemento E^n junto con su frontera $(n-1)$-esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Se define la siguiente aplicación $\theta : (E^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1})$ tal que $\theta(x) = \sigma[\sqrt{(1 - \|x\|^2)}, x_1, \ldots, x_n]$ para cualquier $x = (0, x_1, \ldots, x_n)$ de E^n.

Lema 3.2. *La aplicación* $\theta : E^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ *es una identificación.*

Demostración. Como en la demostración anterior, es suficiente demostrar que θ es sobreyectiva. Para esto supongamos, sea $p \in \mathbb{RP}^n$. ya que σ es sobreyectiva, existe un punto $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n$ con $\sigma(x) = p$. Ya que $\sigma(-x) = \sigma(x)$, podemos asumir $x \geq 0$. Sea $w = (0, x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Entonces tenemos $\theta(w) = \sigma(x) = p$. Por lo tanto θ es sobreyectiva.

■

Sea $p \in \mathbb{RP}^n$. Si $p \in \mathbb{RP}^n \backslash \mathbb{RP}^{n-1}$, la imagen inversa $\theta^{-1}(p)$ consiste en un solo punto de $E^n \backslash \mathbb{S}^{n-1}$. En otras palabras, si $p \in \mathbb{RP}^{n-1}$, $\theta^{-1}(p)$ consiste en un par de puntos antípodas de la esfera. Ahí podemos considerar $\mathbb{RP}^n$ como el espacio cociente de los n-elementos E^n obtenido por puntos antípodas identificando la frontera de la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ de E^n. Consecuentemente, $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{RP}^2$ es el plano proyectivo.

Definición 3.3. *Sea* $\mathbb{RP}^{n-1}$ *el espacio proyectivo real (n-1)-dimensional y* $\mathbb{S}^{n-1} \subset E^n$, *la aplicación* $\theta | \mathbb{S}^{n-1} : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ *es una aplicación característica.*

Nota 3.3. *Por razones obvias, denotaremos a esta aplicación* $\theta | \mathbb{S}^{n-1}$ *como* σ.

Definición 3.4. *El espacio proyectivo real n-dimensional* $\mathbb{RP}^n$ *es la aplicación cono de* $\sigma : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$.

Lema 3.3. *Para cualquier* $n > 1$, *el grupo de homología de* $\mathbb{RP}^n$ *satisface la siguiente relación:*

$$H_q(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} H_q(\mathbb{RP}^{n-1}) & (\textit{si} \quad q < n-1), \\ Coker(\sigma_*) & (\textit{si} \quad q = n-1), \\ Ker(\sigma*) & (\textit{si} \quad q = n), \\ 0 & (\textit{si} \quad q > n). \end{cases}$$

Donde $\sigma*$ *es el homomorfismo inducido*

$$\sigma* : H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1}).$$

Demostración. Para todo $q > n$ $H_q(\mathbb{RP}^n) = 0$, luego el homomorfismo inducido

$$i* : H_q(\mathbb{RP}^{n-1}) \longrightarrow H_q(\mathbb{RP}^n) \quad \text{para todo } \ q < n-1$$

es un isomorfismo. Por lo tanto $H_q(\mathbb{RP}^{n-1}) \approx H_q(\mathbb{RP}^n)$ para todo $q < n-1$.
Esto sigue para determinar $H_{n-1}(\mathbb{RP}^n)$ y $H_n(\mathbb{RP}^n)$. Para esto supongamos, usaremos la sucesión de homología de Puppe respecto ala aplicación $\sigma : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$.
Ya que de $H_n(\mathbb{RP}^{n-1}) = 0$ y $\widetilde{H}_{n-2}(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\tau} H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\sigma_*} H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathbb{RP}^n) \longrightarrow 0 \ .$$

De la exactitud de la sucesión, se sigue inmediatamente que

$$H_{n-1}(\mathbb{RP}^n) \approx Coker(\sigma_*), \qquad H_n(\mathbb{RP}^n) \approx Ker(\sigma_*).$$

Esto demuestra dicho lema.

■

Este lema da un método inductivo de calculo del grupo de homología de $\mathbb{RP}^n$ y reduce el problema de la determinación del Núcleo y del Conúcleo de σ_*. Para determinar este, consideremos la homología de homomorfismo,

$$H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\theta_*} H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1})$$

donde $j : \mathbb{S}^n \longrightarrow (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ es la aplicación inclusión y $\theta : (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1})$ es la aplicación definida arriba.

Definición 3.5. *Un homeomorfismo relativo es una aplicación* $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ *tal que* $f : X - A \longrightarrow Y - B$ *es un homeomorfismo.*

Ejemplo 3.1. *Sea cualquier conjunto* U *del subespacio* A *para el par topológico* (X, A) *entonces la aplicación inclusión* $e : (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$ *es un homeomorfismo relativo.*

Definición 3.6. *Un par de Hausdorff compacto es un par topológico* (X, A) *donde* X *es un espacio de Hausdorff compacto y* A *es un subespacio cerrado de* X.

Definición 3.7. *Una vecindad abierta regular* V *de* A *en el espacio* X *es regular si y solamente si existe una aplicación* $\phi : \partial V = Cl(V) - V \longrightarrow A$ *tal que la* $Cl(V)$ *en el espacio* X *es homeomorfica a la aplicación cilindro* $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}(\phi)$ *de la aplicación* ϕ *bajo un homeomorfismo* $h : Cl(V) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *que coincide con la aplicación inclusión en* A *y* ∂V*. Luego para este caso consideremos la aplicación cilindro* $\mathbb{Z}$ *como una vecindad cerrada de* A *en* X.

Definición 3.8. *Un par topológico* (X, A) *es regular si y solamente si* $A \neq \emptyset$ *y existe una vecindad abierta regular* V *de* A *en el espacio* X.

Lema 3.4. *Existe un isomorfismo* $h : H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1})$ *para cualquier* $n \geqslant 1$*, satisfaciendo la relación* $\theta_* \circ j_* = h + (-1)^{n+1} h$.

Demostración. Considerar el hexágono siguiente de homomorfismos inducido:

$$
\begin{tikzcd}
 & & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[dll, "e_*"'] \arrow[drr, "d_*"] \arrow[dd, "j_*"] & & \\
H_n(\mathbb{S}^n, V^n) & & & & H_n(\mathbb{S}^n, U^n) \\
 & & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[ull] \arrow[urr] \arrow[dd, "\theta_*"] & & \\
H_n(U^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[uu, "\alpha_*"] \arrow[urr] \arrow[drr, "\xi_*"'] & & & & H_n(V^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[uu, "\beta_*"'] \arrow[ull] \arrow[dll, "\eta_*"] \\
 & & H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1}) & &
\end{tikzcd}
$$

Aquí las dos diagonales son partes de la sucesión de homología de los dos triples $(\mathbb{S}^n, U^n, \mathbb{S}^{n-1})$ y $(\mathbb{S}^n, V^n, \mathbb{S}^{n-1})$ que son exactas.Puesto que θ, ξ, η están definidas por la misma aplicación σ y otros homomorfismos son inducidas por las aplicaciones inclusión, los seis triángulos son conmutativos. Luego la triada $(\mathbb{S}^n; U^n, V^n)$ es exacta, esto sigue de que α_* y β_* son homomorfismo. Por lo tanto, se sigue del lema hexagonal (Véase apéndice B) tenemos

$$\theta_* \circ j_* = h + k$$

donde h y k están definidas por

$$h = \xi_* \circ \alpha_*^{-1} \circ e_*, \qquad k = \eta_* \circ \beta_*^{-1} \circ d_*.$$

Como $\mathbb{S}^n$ es contráctil y U^n, V^n son subespacios de $\mathbb{S}^n$, entonces d_* y e_* son isomorfismo. Ya que ξ y η son homeomorfismos relativos, además $(U^n, \mathbb{S}^{n-1})$, $(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1})$ y $(V^n, \mathbb{S}^{n-1})$ son pares de Hausdorff compactos regulares, se concluye que ξ_* y η_* son isomorfismos. Esto prueba que h y k son isomorfismos. Sea $\tau : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ representa la aplicación antípoda , el homomorfismo inducido

$$\tau_* : H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$$

esta definido por $\tau_*(x) = (-1)^{n+1}x \quad \forall x \in H_n(\mathbb{S}^n)$. Puesto que $k = h \circ \tau_*$ obviamente implica que $k = (-1)^{n+1}h$ y por lo tanto obtenemos

$$\theta_* \circ j_* = h + (-1)^{n+1}h.$$

■

Lema 3.5. *Para cualquier entero par* $n > 1$, *el homomorfismo inducido* $\sigma_* : H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{RP}^n)$ *es un homomorfismo trivial, es decir* $\sigma_* = 0$.

Demostración. Sea un elemento arbitrario $x \in H_n(\mathbb{S}^n)$. Es suficiente demostrar que $\sigma_* = 0$. Para esto se considera el siguiente diagrama de homomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
0 = H_n(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\sigma_*"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[d, "\theta_*"] \\
0 = H_n(\mathbb{RP}^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] & H_n(\mathbb{RP}^n) \arrow[r, "j_*"] & H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1})
\end{tikzcd}$$

esta es una parte de la escala de homología de la aplicación θ. Por lo tanto las filas son exactas y el rectángulo es conmutativo. Puesto que n es par, a partir del Lema (3.4) tenemos

$$\theta_* \circ j_* = h - h = 0.$$

Esto implica que

$$j_*[\sigma_*(x)] = \theta_*[j_*(x)] = 0.$$

Por que de la exactitud, j_* es un monomorfismo. Esto implica que $\sigma_* = 0$.

■

Lema 3.6. *Para cualquier entero impar* $n > 2,$ *tenemos* $H_n(\mathbb{RP}^n) \approx G$ *y el homomorfismo inducido* $i_* : H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{RP}^n)$ *de la aplicación inclusión* $i : \mathbb{RP}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Se considera la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\tau} H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\sigma_*} H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathbb{RP}^n) \longrightarrow 0$$

Como en la demostración del Lema (3.3). Puesto que n es par , $n-1$ es impar. Por lo tanto esto sigue del Lema (3.5) lo cual $\sigma_* = 0.$ Esto implica que

$$H_n(\mathbb{RP}^n) \approx Ker(\sigma_*) = H_n(\mathbb{S}^{n-1}) \approx G$$

y entonces i_* es un isomorfismo.

■

Lema 3.7. *Para cualquier par entero* $n > 2$ *existe un isomorfismo* $g : H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{RP}^n)$ *satisfaciendo la relación* $\sigma_* = 2g.$

Demostración. Se considera una parte de la escala de homología de la aplicación θ:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\sigma_*"] & H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[d, "\theta_*"] & & \\
0 \arrow[r] & H_n(\mathbb{RP}^n) \arrow[r, "j_*"] & H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1}) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1}) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(\mathbb{RP}^n)
\end{tikzcd}$$

En ambas filas, $i*$ es un isomorfismo por el Lema 3.6 . Por la exactitud, esto implica que

$$j_* : H_n(\mathbb{RP}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1})$$

es también un isomorfismo.
De acuerdo a Lema 3.4, existe un isomorfismo $h : H_*(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1})$ satisface la relación

$$\theta_* \circ j_* = h + (-1)^{n+1} h = 2h.$$

Entonces la composición $g = j_*^{-1} \circ h : H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{RP}^n)$ es también un isomorfismo.Además tenemos

$$\sigma_* = j_*^{-1} \circ \theta_* \circ j_* = j_*^{-1} \circ 2h = 2(j_*^{-1} \circ h) = 2g.$$

■

Ahora podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sea* $\mathbb{RP}^n$ *el espacio proyectivo real n-dimensional .Entonces*

$$H_q(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} 0 & si \quad q > n \\ G_2 & si \quad \text{q es par tal que} \quad 1 < q \leq n, \\ T_2(G) & si \quad \text{q es impar tal que} \quad 1 \leq q \leq n-1, \\ G & si \quad q = 0 \;\; y \;\; q = n \quad \text{si q es par} \end{cases}$$

Donde G *es el grupo de coeficientes de una teoría homológica* $\mathcal{K}$ *y* $G_2,\ T_2(G)$ *son los grupos definidos de la siguiente manera:*

$$G_2 = G/2G, \qquad 2G = \{2g|g \in G\}; \qquad T_2(G) = \{g \in G|2g = 0\}.$$

(Donde G_2 *es el submódulo de* G *aniquilado por la multiplicación por 2) Así, la homología con coeficientes en el campo de los números racionales parece diferente para la homología con coeficientes en un campo de característica 2.*

Demostración. Por inducción sobre n.

- Para n=0,1, se tiene que $(\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1)$ es trivial por la sección anterior.
- Para probar el teorema por inducción en la dimensión n, asumiremos para $n > 2$ ya que el teorema esta bien establecido para cualquier espacio proyectivo real de dimension inferior a n.
  - Si n es par, entonces por el Lema 3.6 para este teorema afirma que $\mathbb{RP}^n$. Se asume que n es impar. De acuerdo al Lema 3.1, esto sigue para demostrar

    $$Ker(\sigma_*) \approx T_2(G), \qquad\qquad Coker(\sigma_*) \approx G_2$$

    para el homomorfismo inducido $\sigma_* : \ H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1})$.
  - Para n impar, se sigue $n-1$ es par.De acuerdo al Lema 3.7, existe un isomorfismo

    $$g : \ H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1})$$

    satisfaciendo $\sigma_* = 2g$.
    Para establecer que $Ker(\sigma_*) \approx T_2(G)$, sea un elemento arbitrario $x \in H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$.

Entonces si $x \in Ker(\sigma_*)$ si y solo si $g(2x) = \sigma_*(x) = 0$. Puesto que g es un isomorfismo, esto es equivalente a $2x = 0$. Esto prueba que

$$ker(\sigma_*) = T_2[H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})] \approx T_2(G).$$

Para establecer que el $Coker(\sigma_*) \approx G_2$, esto es suficiente probar que $Im(\sigma_*) = 2[H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1})]$.

- Demostrar que $Im(\sigma_*) \subset 2[H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1})]$ Sea un elemento arbitrario $y \in Im(\sigma_*)$. Entonces existe un elemento $x \in H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ con $y = \sigma_*(x) = 2[g(x)]$. Por lo tanto $y \in 2[H_{n-1}(\mathbb{S})^{n-1}]$.
- Demostrar $2[H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1})] \subset Im(\sigma_*)$ Sea cualquier elemento $w \in 2[H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1})]$. Entonces hay un elemento $v \in H_{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1})$ tal que $w = 2v$. Puesto que g es un isomorfismo, entonces existe un elemento $u \in H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ tal que $g(x) = v$. Luego tenemos

$$\sigma_*(x) = 2[g(u)] = 2v = w.$$

  Por lo tanto $w \in Im(\sigma_*)$.

Ejemplo 3.2. *Para $G = Z$, tenemos:*

$$H_q(P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, \\ \mathbb{Z}_2 & q = 1, \\ 0 & q \geq 2, \end{cases}$$

$$H_q(P^3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, \\ \mathbb{Z}_2 & q = 1, \\ 0 & q = 2, \\ \mathbb{Z} & q = 3, \\ 0 & q \geq 4, \end{cases}$$

Para $G = Z/2$, tenemos:

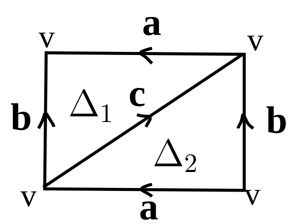
$$H_q(P^n) \cong \begin{cases} Z/2 & q \leq n, \\ 0 & q > n, \end{cases}$$

3.4 Grupo de homología del toro

Teorema 3.3. *Sea $\mathbb{T}^2$ el toro 2-dimensional. Entonces*

$$H_n(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} G & \textit{si q=0 y q=2 ,} \\ G \times G & \textit{si q=1,} \\ 0 & \textit{si } q \geqslant 2. \end{cases}$$

Demostración.



generadores

C_0 = $< \mathbf{v} >$

C_1 = $< a, b, c >$

C_2 = $< \Delta_1, \Delta_2 >$

$$\begin{aligned} \partial_1 : C_1 &\longrightarrow C_0 \\ a &\longrightarrow x - x = 0 \\ b &\longrightarrow x - x = 0 \\ c &\longrightarrow x - x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 : C_2 &\longrightarrow C_1 \\ \Delta_1 &\longrightarrow a - b + c \\ \Delta_2 &\longrightarrow a - b + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Im(\partial_2) &= \langle a - b + c \rangle \\ Ker(\partial_2) &= \langle \Delta_1 - \Delta_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Im(\partial_1) &= \langle 0 \rangle \\ Ker(\partial_1) &= \langle a, b, c \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)} = \frac{\langle x \rangle}{\langle 0 \rangle} \cong \mathbb{Z} \\ H_1 &= \frac{Ker(\partial_1)}{Im(\partial_2)} = \frac{\langle a, b, c \rangle}{\langle a - b + c \rangle} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ H_2 &= \frac{Ker(\partial_2)}{Im(\partial_3)} = \frac{\langle \Delta_1 - \Delta_2 \rangle}{\langle 0 \rangle} \cong \mathbb{Z} \\ H_i &= 0 \quad \forall i > 2 \end{aligned}$$

Capítulo 4

Apéndice A

En este apéndice algunos resultados respecto a temas de topología general.

4.1 Conexidad

Sea X un espacio topológico.

Proposición 4.1. *Las siguientes condiciones son equivalente*

(i) *No existe un subconjunto* A *de* X, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$, *tal que* A *sea abierto y cerrado.*

(ii) *No existen subconjuntos* A *y* B *de* X *tal que* A *y* B *sean abiertos y no vacíos,* $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$.

(iii) *No existen subconjuntos* A *y* B *de* X *tal que* A *y* B *sean cerrados y no vacíos,* $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$.

la demostración es obvia.

Definición 4.1. *Sea* X *un espacio topológico.*

(a) *Se dice que X es conexo si una de las condiciones equivalentes en Proposición 4.1 es satisfecha.*

(b) *Se dice que X es localmente conexo si todo* $x \in X$ *admite un sistema fundamental fundamental de vecindades conexas.*

Uno debe tener en cuenta que existen espacios que están conexos sin ser localmente conexo (ver Ejemplo 4.2).

Teorema 4.1. *El espacio $\mathbb{R}$ es conexo.*

Demostración. Sea por contradicción asumiendo que $\mathbb{R}$ no es conexo. Sea $A \in \mathbb{R}$ tal que $\emptyset \neq A$, $\mathbb{R} \neq A$, A es cerrado y abierto en $\mathbb{R}$. Sea $X \in \mathbb{R}\backslash A$ y asuma por ejemplo que $A \cap [x, +\infty[\neq \emptyset$. Denote por B el conjunto $A \cap [x, +\infty[$. Entonces B no es vacía, cerrada y acotada desde abajo. Por lo tanto, este admite un elemento pequeño, digamos b. En otras palabras, ya que $x \leq A$, $A \cap [x, +\infty[= A \cap]x, +\infty[$. Por lo tanto, B es abierto. Por consiguiente existe $\varepsilon > 0$ tal que $]b - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset B$. Esto contradice el hecho de que b es el elemento mas pequeño en B.

■

- Un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ es conexo. Es decir, si este no es vacío, entonces es isomorfo a $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ no es conexo, pero $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ es conexo para $n > 1$.

Se dice que un subconjunto A de un espacio topológico X es conexo si este es conexo para la la topología inducida.

Proposición 4.2. *Sea $A \subset B \subset \overline{A} \subset X$ y asumiendo que A es conexo. Entonces B es conexo.*

Demostración. Asumiendo que $B = U_1 \cup U_2$ con U_i $(i = 1, 2)$ abierto en B y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Vamos a demostrar que U_1 o bien U_2 es vacía. Existe un abierto U_i' $(i = 1, 2)$ en X tal que $U_i' \cap B = U_i$. En otras palabras, $A \cap U_i$ es abierto en A, $A = (U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A)$ y $A = (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = \emptyset$. Por lo tanto $A \cap U_1$ o $A \cap U_2$ es vacía. Por ejemplo, $A \cap U_1 = \emptyset$. Ya que $A \cap U_1 = A \cap U_1' = \emptyset$, A esta contenido en $X \setminus U_1'$ que es cerrado y esto implica que $\overline{A} \subset X \setminus U_1'$. Por lo tanto , $B \subset X \setminus U_1'$ y $B \cap U_1' = B \cap U_1 = \emptyset$.

■

Corolario 4.1. *Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si y solo si este es un intervalo.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Ya vimos que un intervalo abierto es conexo. Ya que, cualquier intervalo es conexo por la Proposición 4.1. $(\Leftarrow)$ recíprocamente, sea A un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Utilizando la aplicación $t \mapsto \tan(t)$, podemos asumir que A esta contenido en el intervalo

$]-1,+1[$. El conjunto $a = \text{ínf}\, A$, $b = \sup A$. Entonces $A \subset [a,b]$ y este es suficiente para demostrar que $]a,b[\subset A$. Vamos a sostener por el absurdo y asuma que existe $x \in]a,b[$ con $x \notin A$. Entonces $A =]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$. Por lo tanto, A sería la unión de dos subconjuntos abiertos no vacíos con intersección vacía. Esto contradice la hipótesis de que A es conexo.

■

Observación 4.1. *La clausura de* $\overline{A}$ *de un conjunto* A *puede ser conexo aunque* A *no es conexo. Por ejemplo* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *no es conexo y* $\mathbb{R}$ *es conexo.*

Proposición 4.3. *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *sea una aplicación continua y asuma que* X *es conexo. Entonces* $f(X)$ *es conexo.*

Demostración. Sea V_1 y V_2 dos subconjuntos abiertos no vacíos de Y tal que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $f(X) \subset V_1 \cup V_2$. Entonces $X = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$. Por lo tanto, o bien $f^{-1}(V_1)$ o $f^{-1}(V_2)$ es vacío. Entonces o bien $f(X) \subset V_1$ o $f(X) \subset V_2$.

■

Corolario 4.2. *Sea* $f : X \to \mathbb{R}$ *una aplicación continua y asuma que* X *es conexo. Entonces para cualquier* $x, x' \in X$, f *toma todos los valores entre* $f(x)$ *y* $f(x')$.

Componentes Conexas:

Proposición 4.4. *Sea* $\{A_i\}_{i\in I}$ *una familia de subconjuntos conexos de* A, *sea* $A = \bigcup_i A_i$ *y asuma que para cualquier* $i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. *Entonces* A *es conexa.*

Demostración. Vamos a suponer por contradicción. Asumamos que U_1 y U_2 son dos subconjuntos no vacíos abiertos de tal manera que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $U_1 \cup U_2 = \emptyset$. Ya que A_i' es conexo y $A_i = (A_i \cap U_1) \cup (A_i \cap U_2)$, cualquier A_i esta contenido bien en U_1 o en U_2. Sea $I = I_1 \bigsqcup I_2$, con $i \in I_j \Leftrightarrow A_i \subset U_j (j = 1, 2)$. Entonces $A_l \cap A_k = \emptyset$ si $l \in I_1$ y $k \in I_2$. Estos contradicen las hipótesis.

■

Definición 4.2. *Sea* $x \in X$. *Denote por* $\mathcal{C}_x$ *a la union de todos los subconjuntos conexos de* X *que contienen a* x. *Entonces* $\mathcal{C}_x$ *es llamado el componente conexo de* x *en* X *y también es llama "una componente conexa de* X*".*

Observemos:

- Una componente conexa es conexa ya ya que la union de todos los subconjuntos conexos de X que contienen al punto x es conexo por la Proposición 4.4.
- Cualquier componente conexa de X es cerrada en X por la Proposición 4.2. Uno debe tener en cuenta que una componente conexa de X no es necesariamente abierta en X como se ve en el Ejemplo 4.1.
- Dos componentes conexos son iguales o disjuntos (de nuevo por la Proposición 4.4) y la relación $x \sim y$ si y solo si pertenecen a la misma componente conexa, es una relación de equivalencia. Por lo tanto X es la union disjunta de estas componentes conexas.

Ejemplo 4.1. (i) *Sea X un espacio topológico y sea $a \in X$ un punto aislado, es decir, el conjunto $\{a\}$ es abierto y cerrado en X. Asuma que $X \neq \{a\}$. Entonces $X = (X \backslash \{a\}) \sqcup \{a\}$ es la unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos, por lo tanto no es conexo.*

(ii) *Sea X el conjunto $\{0\} \sqcup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ dotado con la topología inducida por $\mathbb{R}$. Sea A la componente conexa de 0. Si algún punto $\frac{1}{n}$ pertenece a A, entonces A no es conexo por **(i)**. Por lo tanto, $\{0\}$ es la componente conexo del punto $0 \in X$, Aunque este conjunto no es abierto en X.*

Proposición 4.5. *El espacio X es localmente conexo si y solo si, para cada conjunto abierto U de X, la componente conexa del espacio U es abierto.*

Demostración. Sea las siguientes afirmaciones

(i) Asuma que X es localmente conexo, sea U un subconjunto abierto de X y sea $\mathcal{C} \subset U$ una componente conexa de U. Sea $x \in \mathcal{C}$. Por la hipótesis, existe una vecindad conexa V de x contenida en U. Ya que $\mathcal{C} \cup V$, es conexa, V esta contenida en $\mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es abierta en cada vecindad de sus puntos.

(ii) Vamos a demostrar el recíproco. Sea $x \in X$ y sea U una vecindad abierta de x. Denote por V la componente conexa de x en U. Por la hipótesis, V es abierta. Por lo tanto, V es una vecindad conexa de x contenido en U.

■

Corolario 4.3. *Asuma que X es compacto y localmente conexo. Entonces X tiene solamente un número finito de componentes conexa.*

Demostración. Considere el recubrimiento de X por sus componentes conexa. Por la hipótesis y la Proposición 4.5, este es una cubrimiento abierto. El espacio X es compacto, podemos extraer una cobertura finita.

■

Ejemplo 4.2. *Sean los conjuntos:*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y = \operatorname{sen}(\frac{1}{t})\},$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0,\ \|y\| \leq 1\}.$$

(i) *El conjunto A es conexo. De hecho, esto se sigue de la Proposición 4.3 ya que A es la imagen de $\mathbb{R}^+$ por la aplicación continua $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, \operatorname{sen}(1/x))$. Entonces $X = A \sqcup B$ es conexo. De hecho, $X = \overline{A}$ y podemos aplicar la Proposición 4.2.*

(ii) *X no es localmente conexo. De hecho considere el conjunto abierto $U = X \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0,\ |y| < 1/2\}$ es una componente conexo de U y no es abierto.*

4.2 Homotopía

Sea I el intervalo cerrado $I = [0,1]$.

Definición 4.3. *Sea X y Y dos espacios topológicos.*

(i) *Sea f_0 y f_1 dos aplicaciones continuas de X hacia Y. Se dice que f_0 y f_1 son homotópica si existe una aplicación continua $h : I \times X \to Y$ tal que $h(0,.) = f_0$ y $h(1,.) = f_1$.*

(ii) *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Se dice que f es una equivalencia de homotopía si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g$ es homotópico a id_y y $g \circ f$ es homotópica a id_x. En ese caso se dice que X y Y son homotópicamente equivalente, o simplemente, son homotópicos.*

(iii) *Se dice que un espacio topológico* X *es contractible si* X *es homotópico a un punto* $\{x_0\}$.

Lema 4.1. *La relación "f_0 es homotópico a f_1" es una relación de equivalencia.*

Demostración.

(i) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces f es homotópico a f. En efecto, defina $h : I \times X \longrightarrow Y$ por $h(t, x) = f(x)$.

(ii) Sea f_0 y f_1 aplicaciones continuas de X hacia Y. Asuma que f_0 y f_1 son homotópicos por una aplicación $h : I \times X \longrightarrow Y$. Entonces f_0 y f_1 son homotópicos por la aplicación $\widetilde{h}$ dado por $\widetilde{h}(t, x) = h(1 - t, x)$.

(iii) Si f_0 y f_1 son homotópicos por una aplicación $h_1 : I \times X \longrightarrow Y$ y f_1 y f_2 son homotópicos por una aplicación $h_2 : I \times X \longrightarrow Y$, entonces f_0 y f_2 son homotópicos por la aplicación $h : I \times X \longrightarrow Y$ dado por $h(t, x) = h_1(2t, x)$ por $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ y $h(t, x) = h_2(2t - 1, x)$ por $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

■

Desde luego, la relación de ser homotópicos es mucho más débil que la relación de ser topológicamente isomorfo. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ es homotópico a $\{0\}$, pero ciertamente no isomorfos topológicamente. Un espacio topológico es contráctil si y sólo si existe $g : \{x_0\} \longrightarrow X$ y $f : X \longrightarrow \{x_0\}$ tal que $f \circ g$ es homotópico a id_X, sustituyendo x_0 con $g(x_0)$, esto significa que existe $h : I \times X \longrightarrow X$ tal que $h(1, x) = id_X$ y $h(0, x)$ es la aplicación $x \longmapsto x_0$. Nótese que contráctil implica no vacío.

Ejemplo 4.3. **(i)** *Sea* V *un espacio vectorial real. Recordemos que un conjunto* A *es convexo si para cualquier* $a, b \in A$ *tenemos* $[a, b] \subset A$. *Recordemos que el segmento* $[a, b]$ *denota el conjunto*

$$[a, b] = \{ta + (1 - t)b; 0 \leq t \leq 1\}.$$

también recordemos que un conjunto A es en forma de estrella, si existe un $a \in A$ tal que para cualquier $b \in A$, el segmento $[a, b]$ *esta contenida en* A. *Un conjunto convexo no vacío es en forma de estrella y una forma de estrella es contráctil. De hecho, elija un* $a \in A$. *Entonces* $h(t, x) = ta + (1 - t)x$ *es una homotopía. En particular, sea* $\gamma \subset V$ *un cono cerrado no vacío. Entonces* γ *es contráctil. De hecho,* γ *es en forma de estrella a* 0.

(ii) *Sea* $X = \mathbb{S}^n$ *la esfera unitaria del espacio euclidiano* $\mathbb{R}^{n+1}$ *y* $Y = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$. *La inmersión* $f : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ *es una equivalencia de homotopía. De hecho, denotamos por* $g = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ *la aplicación* $x \longmapsto x/\|x\|$. *Entonces* $g \circ f = id_X$ *y* $f \circ g$ *es homotópico a* id_Y. *La homotopía es dada por la aplicación* $h(x,t) = (t/\|x\| + 1 - t)x$.

(iii) *Considere el cono truncado cerrado*

$$A = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 = x_3^2, 0 \leq x_3 \leq 1\}$$

Está claro que es homotópica al origen, la homotopía viene dada por $x \longmapsto tx$. *Sin embargo, el círculo* $\{x, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ *no es homotópica a un punto.*

Espacios Arco-conexo:

Definición 4.4. *Sea X espacio topológico.*

(a) *Una curva en* X *es una aplicación continua* $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$. *Uno llamadas* $\gamma(0)$ *y* $\gamma(1)$ *los extremos de la curva. Uno también llama* $\gamma(0)$ *el inicio y* $\gamma(1)$ *el final de la curva.*

(b) *Se dice que* X *es un arco conexo si para cualquier* x *y* y *en* X, *existe una curva en* X *con* x *y* y *como sus extremos.*

(c) *Se dice que* X *localmente arco conexo si cada* $x \in X$ *admite un sistema fundamental de vecindades arco -conexas.*

Con frecuencia se identifica un camino con su imagen $\gamma([0,1])$ en X Una camino es conexo por la Proposición 4.3.

Lema 4.2. *La relación en* X *dado por* $x_0 \sim x_1$ *si hay una camino que comienza en* x_0 *y termina en* x_1 *es una relación de equivalencia.*

Demostración. Denote por pt a un conjunto con un solo punto. Un punto $x \in X$ puede ser considerado como un aplicación continuo $f : pt \longrightarrow X$. Por dicha identificación, una curva de x_0 a x_1 puede ser considerada considerada como una homotopía para la aplicación constante $f_0 : pt \longrightarrow X$, $f_0 = x_0$, a la aplicación constante $f_1 : pt \longrightarrow X$, $f_1(pt) = x_t$. por lo tanto,el resultado se deduce por el Lema 4.1.

Proposición 4.6. *Si* X *es un arco-conexo, entonces* X *es conexo.*

Demostración. Podemos asumir que X no es vació. Sea $x_0 \in X.$ Por la hipótesis, para cualquier $x \in X,$ existe una curva γ_x con extremos x_0 y $x.$ Entonces $X = \bigcup_{x\in X} \gamma_x$ es conexo por la Proposición 4.4.

■

Proposición 4.7. *Si X es localmente arco conexo y conexo, entonces X es arco conexo.*

Demostración. Asumamos que X es no vacía. Sea $x_0 \in X$ y se denota por A al conjunto de puntos x tal que existe una curva con extremos x_0 y $x.$

(i) Por la hipótesis, para cualquier $x \in X$ existe una vecindad abierta U_x de x tal que cualquier punto $y \in U_x$ pueden estar unidos a X por un curva. Por lo tanto, si $x \in A$ y $y \in U_x,$ y puede estar unido a x_0 por una curva, lo que demuestra que A es abierto.

(ii) Falta demostrar que A es cerrado. Sea $z \in \overline{A}$ y sea U_z dos vecindades arco conexas de $z.$ Sea $y \in V_z \cap A.$ existe una curva con externos z y y y existe una curva con extremos x_0 y $y.$ Por lo tanto, existe una curva con extremos x_0 y z.

Considere la hipótesis 4.7, X es localmente arco conexo.

Definición 4.5. *El conjunto de componentes conexas de X es denotada por $\pi_0(X)$.*

Sea X y Y dos espacios topológicos satisfaciendo 4.7 y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces f define una aplicación.

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y) \tag{4.1}$$

Es decir, si x_1 y x_2 en X son conexo por una curva $\gamma : I \longrightarrow X,$ entonces $f(x_1)$ y $f(x_2)$ en Y son conexos por el camino $f \circ \gamma$.

- Si f_0 y f_1 son homotópicos, ellos definen el mismo aplicación:

  $$\pi_0(f_0) = \pi_0(f_1) : \pi_0(X, x_0) \longrightarrow \pi_0(Y, y_0), \tag{4.2}$$

  Es decir, considere una homotopía $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ para f_0 a $f_1.$ Sea $x \in X.$ Entonces $f_0(x)$ y $f_1(x)$ pertenecen a la misma componente conectado de Y ya que ellos son conexos por el arco γ donde $\gamma(t) = f_t(x)$.

- Si $g : Y \longrightarrow Z$ es una aplicación continua y Z satisface 4.7, entonces

$$\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f) \tag{4.3}$$

  Esto significa que para $x \in X,$ la componente conexa de $(g \circ f)(x)$ es la imagen por g de la componente conexa de $f(x),$ que es evidente.

Usando (4.2) y (4.3), obtenemos que el grupo $\pi_0(\cdot)$ es una invariancia homotópica. Mas precisamente:

Proposición 4.8. *Sea X y Y dos espacios topológicos satisfaciendo 4.7. Asuma que RX y Y son homotópicos. Entonces los conjuntos $\pi_0(X)$ y $\pi_0(Y)$ son isomorfos.*

En otras palabras, los cardinales del conjunto de las componentes conexas de X y Y son iguales.

Capítulo 5

Apéndice B

A continuación definiremos algunos conceptos de suma importancia.

5.1 Cilindro de una aplicación

Definición 5.1. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Consideremos la suma topológica $W = X \times I + Y$. Para cada $x \in X$, identificamos los puntos $(x,1) \in X \times \{1\}$ con $f(x) \in Y$. El espacio cociente $Z = Z(f)$ es llamado el cilindro de la aplicación $f : X \longrightarrow Y$.

Sea $\pi : W \longrightarrow Z$ la proyección canónica. Consideremos los espacios X e Y como subespacios de Z por medio de las incrustaciones $i : X \longrightarrow Z$, y $h : Y \longrightarrow Z$, definidas por $i(x) = \pi(x,0)$ y $h(y) = \pi(y)$, respectivamente. De esta forma X e Y pueden ser considerados subespacios disjuntos de Z.

Lema 5.1. El subespacio Y de $Z(f)$ es un retracto de deformación fuerte.

Demostración. Geométricamente, $\pi(X \times I)$ se retracta sobre la parte de Y correspondiente a $f(X)$. Para definir la retracción consideremos la aplicación $d_t : Z \longrightarrow Z$ definida por

$$d_t(z) = \begin{cases} \pi(x, s + t(1-s)) & \text{si } z = \pi(x,s) \in \pi(X \times I), \\ z & \text{si z} \in Y. \end{cases}$$

Es claro que $d_0 = Id$ y que d_1 aplica Z en Y, ahora es inmediato ver que $d_t(z) = z$ para todo $z \in Y$ y cada $t \in I$.

■

5.2 Cono de una aplicación

Definición 5.2. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua, y sea $Z(f)$ el cilindro de $f.$ Si identificamos el subespacio X de $Z(f)$ a un punto, digamos u , obtenemos un espacio cociente, $C(f)$ llamado el cono de la aplicación $f.$ El punto u es llamado el vértice de $C(f).$

Sea $w : Z(f) \longrightarrow C(f)$ la proyección canónica.

Observación 5.1. El cono $C(f)$ de f puede ser obtenido directamente definiendo el espacio cociente de $W = X \times I + Y$ e identificando $X \times \{0\} \sim u$ y $(x, 1) \sim f(x),$ para cada $x \in X.$

Sea $\rho : \omega \longrightarrow C(f)$ la proyección canónica. Tenemos $\rho = \omega \circ \pi.$ El espacio Y puede ser considerado como subespacio de $C(f)$ por medio de la aplicación $P(f) : Y \longrightarrow C(f)$ definida por $P(f)(y) = \rho(y).$ La aplicación $P(f)$ es llamada inscrustación asociada a la aplicación $f : X \longrightarrow Y.$ Como $P(f) = \rho|Y$ y $h = p|Y$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "P(f)"] & \\ Z(f) \arrow[rr, "\omega"] & & C(f) \end{tikzcd}$$

Para cada $n \geqslant 0,$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & H_n(Y) \arrow[dl, "h_*"'] \arrow[dr, "P(f)_*"] & \\ Z(f) \arrow[rr, "\omega_*"] & & C(f) \end{tikzcd}$$

Proposición 5.1. Sea $f : X \longrightarrow Y,$ con $X \neq \emptyset,$ entonces para cada $n \geqslant 0,$ la sucesión

$$\widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_n(Y) \xrightarrow{P(f)_*} \widetilde{H}_n(C(f))$$

es exacta.

Demostr ación. Consideremos la aplicación del cilindro $Z = Z(f)$ de f junto con los subespacios definidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} K &= \{\pi(x,t) \,:\, x \in X,\ 0 \leqslant t \leqslant 1/2\} \\ H &= Int(K) = \{\pi(x,t) \,:\, x \in X,\ 0 < t < 1/2\} \\ B &= \partial K = \{\pi(x,t) \,:\, x \in X,\ t = 1/2\} \\ T &= Z - H \end{aligned}$$

La parte

$$\widetilde{H}_n(B) \xrightarrow{c_*} \widetilde{H}_n(T) \xrightarrow{d_*} H_n(T,B)$$

de la sucesión exacta del par (T,B) es exacta, es decir, $Im(c_*) = ker(d_*)$, donde $c : B \hookrightarrow T$ y $d : T \hookrightarrow (T,B)$ son la aplicación inclusión. Sea $k : X \longrightarrow B$ definida por $k(x) = \pi(x, 1/2)$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "c"] & T \end{tikzcd} \quad \text{inclusión}$$

se tiene que $c \circ k \neq g \circ f$. Por otra parte, $F : X \times I \longrightarrow T$ definida por $F(x,t) = \pi(x, (t+1)/2)$ satisface $F(x,0) = c \circ k(x)$ y $F(x,1) = g \circ f(x)$. Luego el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H}_n(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "k_*"'] & \widetilde{H}_n(Y) \arrow[d, "g_*"] \\ \widetilde{H}_n(B) \arrow[r, "c_*"] & \widetilde{H}_n(T) \end{tikzcd} \quad \text{inclusión}$$

Ahora, como k es un homeomorfismo e Y es un retracto de deformación de T, se tiene que k_* y g_* son isomorfismos. Luego $Im(f_*) = g_*^{-1}(Im(c_*))$. Ahora sean M, $U \subset C(f)$ los subespacios definidos por $U = \omega(K)$ y $M = \omega(H)$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "l"] \arrow[d, "d"'] & Z(f) \arrow[r, "\omega"] & C(f) \arrow[d, "j"] \\ (T,B) \arrow[r, "\theta"] & (C(f)-M, U-M) \arrow[r, "e"] & (C(f), U) \end{tikzcd}$$

donde θ es definido por la proyección ω y d, e, j, l son las respectivas inclusiones. Tenemos que el rectángulo es conmutativo, es decir, $e \circ \theta \circ d = j \circ \omega \circ l$. Luego, tenemos el rectángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{H}_n(T) & \xrightarrow{l_*} & \widetilde{H}_n(Z(f)) & \xrightarrow{\omega_*} & \widetilde{H}_n(C(f)) \\
{\scriptstyle d_*}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle j_*} \\
H_n(T,B) & \xrightarrow{\theta_*} & H_n((C(f)-M, U-M)) & \xrightarrow{e_*} & H_n((C(f),U))
\end{array}$$

Tenemos que e_* es un isomorfismo. Como U es contractivo, se tiene que j_* es un isomorfismo. Finalmente, θ_* es un isomorfismo, pues θ es homeomorfismo. Luego, $ker(d_*) = l_*^{-1}(ker(\omega_*))$. Como $P(f) = \omega \circ l \circ g$ se sigue que $P(f)_* = \omega_* \circ l_* \circ g_*$ y siendo l_* y g_* isomorfismos, tenemos que

$$\begin{aligned}
Ker(P(f)_*) &= g_*^{-1}(l_*^{-1}(Ker(\omega_*))) \\
&= g_*^{-1}(Ker(d_*)) \\
&= g_*^{-1}(Im(c_*)) \\
&= Im(f_*).
\end{aligned}$$

■

5.3 Sucesión de homología de Puppe

Durante toda la presente seccion, consideremos una aplicación arbitraria $f : X \longrightarrow Y$. Para esta aplicación, tenemos la siguiente sucesión de Puppe:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{P(f)} C(f) \xrightarrow{Q(f)} S(X) \xrightarrow{S(f)} S(Y)$$

de aplicaciones, donde $P(f)$ es la inmersión asociado de Y sobre la aplicación cono $C(f)$ de f, $Q(f)$ es la proyección natural de $C(f)$ sobre su espacio cociente $S(X)$ obtenido mediante la identificación de $[P(f)](Y)$ a un solo punto v, y $S(f)$ es la suspensión de f.

Proposición 5.2. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, la sucesión

$$\widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_n(Y) \xrightarrow{[P(f)]_*} \widetilde{H}_n[C(f)] \xrightarrow{[Q(f)]_*} \widetilde{H}_n[S(X)] \xrightarrow{[S(f)]_*} \widetilde{H}_n[S(Y)]$$

de homomorfismos inducidos es exacta.

Demostración. Considere la siguiente sucesión

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} C(f) \xrightarrow{h} C(g) \xrightarrow{i} C(h)$$

de espacios y aplicaciones, donde $g = P(f),\ \ h = P(g),$ y $i = P(h)$ denota las inmersiones asociadas a las aplicaciones $f,\ \ g$ y h respectivamente. Sea

$$\omega : (Y \times I) + C(f) \longrightarrow C(g)$$

representa la proyección natural de l suma topológica $(Y\times I)+C(f)$ sobre su espacio cociente $C(g)$. Si identificamos el subespacio $\omega(Y \times I)$ de $C(g)$ a un solo punto $v,$ obtenemos $S(X)$ como el espacio cociente. Sea

$$k : C(g) \longrightarrow S(X)$$

denota la proyección natural de $C(g)$ sobre su espacio cociente $S(X)$ del mismo modo, sea

$$\pi : [C(f) \times I] + C(g) \longrightarrow C(h)$$

denota la proyección natural. Si identificamos el subespacio $\pi[C(f) \times I]$ de $C(h)$ como un solo punto, obtenemos $S(Y)$ como el espacio cociente.Sea

$$l : C(h) \longrightarrow S(Y)$$

denota la proyección natural de $C(h)$ sobre su espacio cociente $S(Y)$. Así obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & C(g) \arrow[r, "i"] \arrow[dd, "k"] & C(h) \arrow[dd, "l"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & C(f) \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "Q(f)"'] & & \\
 & & & S(X) \arrow[r, "S(f)"] & S(Y)
\end{tikzcd}$$

Dado que ambos $Q(f)$ y k son proyecciones naturales, el triángulo es claramente conmutativo. El cuadrado es no conmutativo;sin embargo este no es dificultosos demostrar que $S(f)\circ k$ y $l\circ i$ son homotópicos.En otras palabras, uno también se puede demostrar fácilmente que k y l son equivalencia homotópicos.Por lo tanto, este diagrama da lugar al siguiente diagrama de homomorfismos inducidos:

$$\begin{tikzcd}
& & & \widetilde{H}_n[C(g)] \arrow[r, "i_*"] \arrow[dd, "k_*"] & \widetilde{H}_n[C(h)] \arrow[dd, "l_*"] \\
\widetilde{H}_n(X) \arrow[r, "f_*"] & \widetilde{H}_n(Y) \arrow[r, "g_*"] & \widetilde{H}_n[C(f)] \arrow[ur, "h_*"] \arrow[dr, "{[Q(f)]_*}"] & & \\
& & & \widetilde{H}_n[S(X)] \arrow[r, "{[S(f)]_*}"] & \widetilde{H}_n[S(Y)]
\end{tikzcd}$$

donde los homomorfismos k_*, l_* son isomorfismos y tanto el triángulo como el cuadrado son conmutativa, es decir,

$$[Q(f)]_* = k_* \circ h_*, \qquad [S(f)]_* \circ k_* = l_* \circ i_*.$$

Debido a $g = P(f)$, $h = P(g)$, y $i = P(h)$, se deduce a partir de La proposición 4.1 que la secuencia de la parte superior

$$\widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{\quad f_* \quad} \widetilde{H}_n(Y) \xrightarrow{\quad g_* \quad} \widetilde{H}_n[C(f)] \xrightarrow{\quad h_* \quad} \widetilde{H}_n[C(g)] \xrightarrow{\quad i_* \quad} \widetilde{H}_n[C(h)]$$

es exacta. De aquí se sigue que la secuencia inferior

$$\widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{\quad f_* \quad} \widetilde{H}_n(Y) \xrightarrow{\quad g_* \quad} \widetilde{H}_n[C(f)] \xrightarrow{[Q(f)]_*} \widetilde{H}_n[S(X)] \xrightarrow{[S(f)]_*} \widetilde{H}_n[S(Y)]$$

es también exacta. Puesto que $g = P(f)$ y $n \in \mathbb{Z}$, esto demuestra dicha proposición.

■

Para cada entero $n \in \mathbb{Z}$, sea

$$\tau = \sigma^{-1} \circ [Q(f)]_* : \widetilde{H}_n[C(f)] \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(X)$$

donde $\sigma : \widetilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \widetilde{H}_n[S(X)]$ denota la suspensión isomórfica. A continuación, el siguiente corolario es una consecuencia inmediata de La proposición 4.2.

Corolario 5.1. *La siguiente sucesión infinita*

$$\cdots \xrightarrow{\tau} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_n(Y) \xrightarrow{[P(f)]_*} \widetilde{H}_n[C(f)] \xrightarrow{\tau} \widetilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

es exacta y se refiere a la sucesión de la homología de Puppe de la aplicación f.

Como una aplicación del corolario anterior, consideremos el espacio adjunción X obtenido por adjunción del n-simplex unitario Δ^n a un espacio topológico dado A por medio de un mapa dada

$$f : \partial\Delta^n \longrightarrow A.$$

En otras palabras, X es el espacio cociente de la suma disjunta topológica $W = \Delta^n + A$ obtenido por identificación para cualquier punto $s \in \partial\Delta^n$ con $f \in A$. Puesto que Δ^n puede ser considerado como el cono $Con(\partial\Delta^n)$ sobre $\partial\Delta^n$, X es esencialmente la aplicación cono $C(f)$ de la aplicación f; en símbolos tenemos $X = C(f)$. La aplicación $f : \partial\Delta^n \longrightarrow A$ sera llamada la aplicación característica del espacio abducción de X. El par topológico (X, A) es usualmente llamado $n - cell$ relativo.

5.4 Sucesión de Mayer -Vietoris

Con el fin de construir la sucesión de Mayer Vietoris de una triada exacta $(X; A, B)$ con

$$X = A \cup B, \qquad C = A \cap B,$$

primero estableceremos el siguiente lema.

Lema 5.2. *(EL LEMA HEXAGONAL.) Si en el siguiente diagrama de grupos abelianos y homomorfismos*

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "l_1"'] \arrow[dr, "l_2"] \arrow[dd, "f"] & \\
A_1 & & A_2 \\
 & G \arrow[ul, "j_1"] \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[dd, "g"] & \\
B_1 \arrow[uu, "k_1"] \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & & B_2 \arrow[uu, "k_2"'] \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "h_2"] \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

los triángulos son conmutativos, k_1 y k_2 son isomorfismos, y

$$Im(i_1) = Ker(j_2), \qquad Im(i_2) = Ker(j_1),$$

entonces tenemos

$$h_1 \circ k_1^{-1} \circ l_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ l_2 = g \circ f.$$

Demostración. Primero demostraremos que el homomorfismo $e = i_1 \circ k_1^{-1} + i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2 \ :$ $G \longrightarrow G$ es el homomorfismo identidad de G. Para este propósito, sea x un elemento arbitrario de G. luego el homomorfismo $\phi = i_1 + i_2 : B_1 \oplus B_2 \longrightarrow G$ es un isomorfismo. Por lo tanto existe un elemento $u_1 \in B_1$ y $u_2 \in B_2$ tal que $x = \phi(u_1, u_2) = i_1(u_1 + i_2(u_2))$. Por medio de las condiciones del lema, obtenemos

$$\begin{aligned}
(i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1)(x) &= (i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 \circ i_1)(u_1) + (i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 \circ i_2)(u_2) \\
&= (i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1) \\
&= i_1(u_1).
\end{aligned}$$

Similarmente también tenemos $(i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(x) = i_2(u_2)$. Por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned}
e(x) &= (i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1)(x) + (i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(x) \\
&= i_1(u_1) + i_2(u_2) \\
&= x
\end{aligned}$$

Esto demuestra que e es el automorfismo identidad del grupo G.
La composición de e con f y g , obtenemos

$$\begin{aligned}
g \circ f &= g \circ e \circ f \\
&= g \circ i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 \circ f + g \circ i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2 \circ f \\
&= h_1 \circ k_1^{-1} \circ l_i + h_2 \circ k_2^{-1} \circ l_2.
\end{aligned}$$

■

Aplicando para el caso en que la diagonal vertical, es semi exacta, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.2. *Si* $g \circ f = 0$ *mantiene además de las condiciones del Lema 4.2,entonces tenemos*

$$-h_1 \circ k_1^{-1} \circ l_1 = h_2 \circ k_2^{-1} \circ l_2.$$

Ahora consideremos una triada topológica exacta $(X; A, B)$ tal que

$$X = A \cup B, \qquad\qquad C = A \cap B,$$

y construimos su sucesión de Mayer- Vietoris de la siguiente manera. En primer lugar, para cada entero n, defina un homomorfismo $\psi : H_n(C) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B)$ tomando $\psi(u) = [H_n(h_1(u)) - H_n(h_2(u))]\ \forall u \in H_n(C)$, donde

$$H_n(h_1) : H_n(C) \longrightarrow H_n(A), \qquad H_n(h_2) : H_n(C) \longrightarrow H_n(B)$$

son los homomorfismos inducidos por la aplicación inclusión $h_1 : C \longrightarrow A$ y $h_2 : C \longrightarrow B$. A continuación, para cada entero n, defina un homomorfismo $\phi : H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X)$ tal que

$$\phi(\xi, \eta) = H_n[m_1](\xi) + H_n[m_2](\eta)$$

para cualquier $(\xi, \eta) \in H_n(A) \oplus H_n(B)$, donde $H_n(m_1) : H_n(A) \longrightarrow H_n(X), \qquad H_n(m_2) : H_n(B) \longrightarrow H_n(X)$ son los homomorfismos inducidos de las aplicación inclusiones $m_1 : A \longrightarrow X$ y $m_2 : B \longrightarrow X$. Por último, para cada entero n, considere el siguiente hexágono de homomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
 & & H_n(X) \arrow[dll, "l_{1*}"'] \arrow[drr, "l_{2*}"] \arrow[dd, "j_*"] & & \\
H_n(X,A) & & & & H_n(X,B) \\
 & & H_n(X,C) \arrow[ull, "j_{1*}"] \arrow[urr, "j_{2*}"'] \arrow[dd, "\partial"] & & \\
H_n(B,C) \arrow[uu, "k_{1*}"] \arrow[urr, "i_{1*}"] \arrow[drr, "\partial_1"'] & & & & H_n(A,C) \arrow[uu, "k_{2*}"'] \arrow[ull, "i_{2*}"'] \arrow[dll, "\partial_2"] \\
 & & H_{n-1}(C) & &
\end{tikzcd}$$

Aquí ∂, ∂_1, ∂_2 son operadores fronteras, mientras que los restantes son homomorfismos inducidos por las aplicaciones de inclusión. Las condiciones del Lema 5.2 y corolario 5.2 son obviamente probadas. Por lo tanto podemos definir un homomorfismo $\triangle : H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(C)$ tomando

$$\triangle = -\partial_{-1} \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*} = \partial_2 \circ k_{2*}^{-1} \circ l_{2*}$$

debido al corolario 5.2. De esta forma obtenemos una secuencia infinita

$$\cdots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{\psi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\phi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

llamada la sucesión de Mayer -Vietoris de la triada topológica exacta $(X; A, B)$.

Lema 5.3. *Si* $H_n(C) \xrightarrow{\psi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\phi} H_n(X)$ *entonces* $Im(\psi) \subset Ker(\phi)$.

Demostración. Sea cualquier elemento $(\xi, \eta) \in Im(\psi) \subset H_n(A) \oplus H_n(B)$. Por definición, existe un elemento $u \in H_n(C)$ tal que $(\xi, \eta) = \psi(u) = [h_{1*}(u), -h_{2*}(u)]$. Esto implica $\xi = h_{1*}(u)$ y $n = -h_{2*}(u)$. Puesto que los dos triángulos en el siguiente diagrama de los homomorfismos inducidos de las aplicaciones de inclusión son conmutativa

$$\begin{tikzcd} & H_n(C) \arrow[dl, "h_{1*}"'] \arrow[dr, "h_{2*}"] \arrow[dd, "i_*"] & \\ H_n(A) \arrow[dr, "m_{1*}"'] & & H_n(B) \arrow[dl, "m_{2*}"] \\ & H_n(X) & \end{tikzcd}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) &= m_{1*}(\xi) + m_{2*}(\eta) \\ &= m_{1*}[h_{1*}(u)] - m_{1*}[h_{2*}(u)] \\ &= i_*(u) - i_*(u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\xi, \eta) \in Ker(\phi)$.

■

Lema 5.4. *Si* $H_n(C) \xrightarrow{\psi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\phi} H_n(X)$ *entonces* $Ker(\phi) \subset Im(\psi)$.

Demostración. Sea un elemento arbitrario $(\xi, \eta) \in ker(\phi) \subset H_n(A) \oplus H_n(B)$. Entonces tenemos $(\xi, \eta) = m_{1*}(\xi) + m_{2*}(\eta)$. Esto implica

$$\begin{aligned} i_{1*}[n_{2*}(\eta)] + i_{2*}[n_{1*}(\xi)] &= j_*[m_{2*}(\eta)] + j_*[m_{1*}(\xi)] \\ &= j_*[m_{1*}(\xi) + m_{2*}(\eta)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

El homomorfismo $i_{1*} + i_{2*} : H_n(B, C) \oplus H_n(A, C) \longrightarrow H_n(X, C)$ es un isomorfismo. Por lo tanto tenemos $n_{1*}(\xi) = 0$, $n_{2*}(\eta) = 0$. Por las exactitudes de las sucesiones de homología de los pares (A, C) y (B, C), hay elementos u y v de $H_q(C)$ tal que $h_*(u) = \xi$, $h_{2*}(v) = \eta$. Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(\xi, \eta) \\ &= m_{1*}[h_{1*}(u)] + m_{2*}[h_{2*}(v)] \\ &= i_*(u + v). \end{aligned}$$

Por la exactitud de la sucesión de homología del par (X, C), existe un elemento $x \in H_{n+1}(X, C)$ con $\partial(X) = u + v$. por ser espacios separados , existe un elemento $\xi' \in H_n(A, C)$ y $\eta' \in H_n(B, C)$ satisfaciendo $x = i_{1*}(\eta') + i_{2*}(\xi')$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} u + v &= \partial(X) \\ &= \partial[i_{1*}(\eta') + i_{2*}(\xi')] \\ &= \partial_1(\eta') + \partial_{2*}(\xi'). \end{aligned}$$

Sea $w = u - \partial_2(\xi') = -[v - \partial_1(\eta')]$. Entonces obtenemos

$$h_{1*}(w) = h_*(u) - h_{1*}[\partial_2(\xi')] = h_{1*}(u) = \xi,$$

$$h_{2*}(w) = -h_{2*}(v) + h_{2*}[\partial_1(\eta')] = -h_{2*}(v) = -\eta.$$

Esto implica $\psi(w) = [h_{1*}(w) - h_{2*}(w)] = (\xi, \eta)$. Por lo tanto $(\xi, \eta) \in Im(\psi)$.

■

Lema 5.5. *Si* $H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\phi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C)$ *entonces* $Im(\phi) \subset Ker(\Delta)$.

Demostración. Sea un elemento arbitrario $x \in Im(\phi) \subset H_n(X)$. Por definición, existe un elemento $(\xi, \eta) \in H_n(A) \oplus H_n(B)$. con $x = (\xi, \eta) = m_{1*}(\xi) + m_{2*}(\eta)$. Debido a la exactitud de las secuencias de homología de los pares (X, A) y (X, B), tenemos $l_{1*} \circ m_{1*} = 0$ y $l_{2*} \circ m_{2*} = 0$. Por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \Delta[m_{1*}(\xi)] + \Delta[m_{2*}(\eta)] \\ &= (-\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*} \circ m_{1*})(\xi) + (\partial_2 \circ k_{2*}^{-1} \circ l_{2*} \circ m_{2*})(\eta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in Ker(\Delta)$.

■

Lema 5.6. *Si* $H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\phi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C)$ *entonces* $Ker(\Delta) \subset Im(\phi)$.

Demostración. Sea un elemento arbitrario $x \in Ker(\Delta) \subset H_n(X)$. Entonces tenemos $\Delta(x) = 0$. Esto implica $\partial_1\{k_{1*}^{-1}[l_{1*}(x)]\} = 0 = \partial_2\{k_{2*}^{-1}[l_{2*}(x)]\}$. Debido a la exactitud de las sucesiones de homología de los pares (A, C) y (B, C), existen elementos $\xi \in H_n(A)$ y $\eta \in H_n(B)$ que satisface

$$n_{1*}(\xi) = k_{2*}^{-1}[l_{2*}(x)], \quad n_{2*}(\eta) = k_{1*}^{-1}[l_{1*}(x)],$$

Donde n_{1*} y n_{2*} son homomorfismos inducidos de las aplicaciones de inclusión $n_1 : A \longrightarrow (A, C), \quad n_2 : B \longrightarrow (B, C)$. Como en la demostración de (1.1), el homomorfismo

$$e = i_{1*} \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} + i_{2*} \circ k_{2*}^{-1} \circ j_{2*}$$

es el automorfismo identidad de $H_n(X, C)$. Por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} j_*(x) &= e[j_*(x)] \\ &= (i_{1*} \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} \circ j_* + i_{2*} \circ k_{2*}^{-1} \circ j_{2*} \circ j_*)(x) \\ &= (i_{1*} \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*})(x) + (i_{2*} \circ k_{2*}^{-1} \circ l_{2*})(x) \\ &= i_{1*}[n_{2*}(\eta)] + i_{2*}[n_{1*}(\xi)] \\ &= j_*[m_{2*}(\eta)] + j_*[m_{1*}(\xi)], \end{aligned}$$

debido a las relaciones obvias $i_1 \circ n_2 = j \circ m_2, \quad i_2 \circ n_1 = j \circ m_1$. Esto implica $j_*[x - m_{1*}(\xi) - m_{2*}(\eta)] = 0$. Por exactitud de la sucesión de homología del par (X, C), existe una elemento $u \in H_n(C)$ tal que $i_*(u) = x - m_{1*}(\xi) - m_{2*}(\eta)$.
Sea $\xi' = \xi + h_{1*}(u)$ y $\eta' = \eta$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \phi(\xi', \eta') &= m_{1*}(\xi') + m_{2*}(\eta') \\ &= m_{1*}(\xi) + m_{1*}[h_{1*}(u)] + m_{2*}(\eta) \\ &= i_*(u) + m_{1*}(\xi) + m_{2*}(\eta) \\ &= x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in Im(\phi)$.

Lema 5.7. *Si* $H_{n+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_n(C) \xrightarrow{\psi} H_n(A) \oplus H_n(B)$ *entonces* $Im(\Delta) \subset Ker(\psi)$.

Demostración. Sea un elemento arbitrario $u \in Im(\Delta) \subset H_{n-1}(C)$. Por definición, hay un elemento $x \in H_n(X)$ con $u = \Delta(x)$. Debido a la exactitud de las sucesiones de homología de los pares (A, C) y (B, C), tenemos $h_{1*} \circ \partial_2 = 0$ y $h_{2*} \circ \partial_1 = 0$. De ahí obtenemos

$$h_{1*}(u) = h_{1*}[\Delta(x)] = (h_{1*} \circ \partial_2 \circ k_{2*}^{-1} \circ l_{2*})(x) = 0,$$

$$h_{2*}(u) = h_{2*}[\Delta(x)] = -(h_{2*} \circ \partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*})(x) = 0.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} \psi(u) &= [h_{1*}(u), -h_{2*}(u)] \\ &= (0, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u \in Ker(\psi)$.

■

Lema 5.8. *Si* $H_{n+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_n(C) \xrightarrow{\psi} H_n(A) \oplus H_n(B)$ *entonces* $Ker(\psi) \subset Im(\Delta)$.

Demostración. Sea un elemento arbitrario $u \in Ker(\psi) \subset H_n(C)$. Entonces tenemos $\psi(u) = [h_{1*}(u), -h_{2*}(u)] = 0$. Esto implica $h_{1*}(u) = 0$ y $h_{2*}(u) = 0$.
Por exactitud de la homología de las sucesiones de los pares (A, C) y (B, C), existe un elemento $a \in H_{n+1}(A, C)$ y $b \in H_{n+1}(B, C)$ que satisfacen $\partial_1(b) = u$, $\partial_2(a) = -u$. Esto implica

$$\begin{aligned} \partial[i_{1*}(b) + i_{2*}(a)] &= \partial[i_{1*}(b)] + [i_{2*}(a)] \\ &= \partial_1(b) + \partial_2(a) \\ &= u - u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por la exactitud de la sucesión de la homología del par (X, C), existe un elemento $x \in H_{n+1}(X)$ tal $j_*(x) = -i_{1*}(b)] - i_{2*}(a)$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= -(\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*})(x) \\ &= -(\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} \circ j_*)(x) \\ &= (\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*})[i_{1*}(b) + i_{2*}(a)] \\ &= (\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} \circ i_{1*})(b) + (\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} \circ i_{2*})(a) \\ &= (\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ k_{1*})(b) + 0 \\ &= \partial_1(b) \\ &= u, \end{aligned}$$

Ya que $j_{1*} \circ i_{1*} = k_{1*}$ y $j_{1*} \circ i_{2*} = 0$. Por lo tanto $u \in Im(\Delta)$.

■

Teorema 5.1. *La sucesión de Mayer - Vietories para cualquier triada topológica exacta* $(X; A, B)$ *con* $X = A \cup B$ *es exacta.*

Demostración. Para demostrar que una sucesión de Mayer - Vietories para cualquier triada topológica $(X; A, B)$ con $X = A \cup B$ sea exacta es equivalente a demostrar los siguientes resultados:

1. $Im(\psi) = Ker(\phi)$
   Por el lema 5.3 y 5.4 la premisa se satisface.

2. $Im(\phi) = Ker(\Delta)$

   Por el lema 5.5 y 5.6 la premisa se satisface.

3. $Im(\Delta) = Ker(\psi)$

   Por el lema 5.7 y 5.8 la premisa se satisface.

■

Conclusiones

1. Sea a logrado definir lo que es una categoría admisible como una subcategorias de todos los pares topológicos con ciertas propiedades.
2. Sea a logrado definir lo que son los axiomas de Eilemberg- Steenrod y las consecuencias que de ellas se desprenden.
3. Sea a construido una teoría de homológica singular a través de funtores entre dos categorías como la categoría de espacios topológicos y la categoría de grupos Abelianos.
4. Sea a demostrado que la homología singular satisface los axiomas de Eilemberg- Steenrod.
5. Se a logrado calcular los grupos de homología para el punto ,la esfera, el plano proyectivo real y el toro.

Bibliografía

[H1] Hu, S.-T.: Elements of General Topology. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1964.

[H2] Hu, S.-T.: Elements of Modern Algebra. Holden-Day, Inc., SanFrancisco, 1965.

[H3] Hu, S.-T.: Homotopy Theory. Academic Press, New York, 1959.

[E-S] Eilenberg, S., and Steenrod, N. E.: Foundations of AlgebraicTopology. Princeton Univ. Press, Princeton, 1952.

[M] MacLane, S.: Homology. Academic Press, New York, 1963.

[G] Cairns, S. S.: Introductory Topology. Ronald Press, New York, 1961.

[Wh] Whitehead, G. W.: Homotopy Theory. Mimeographed notes, M.I.T., 1953.

[Mu] Munkres, James R. :General topology.

turnitin

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Edwin Jhon Núñez Mendoza
Título del ejercicio:	Quick Submit
Título de la entrega:	Teoría homológica singular y cálculo de algunos grupos de ...
Nombre del archivo:	TESIS-Edwin_Jhon_N_ez_Mendoza.pdf
Tamaño del archivo:	5.01M
Total páginas:	112
Total de palabras:	22,693
Total de caracteres:	92,948
Fecha de entrega:	01-feb.-2024 12:09a. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre...	2283522724

UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Teoría homológica singular y cálculo de algunos grupos de homología"

Tesis
Para obtener el título profesional de
Licenciado en Matemáticas

presentado por:

Bach. Mat. Edwin Jhon Núñez Mendoza

Asesor
Dr. Mat. Rubén Burga Barboza

Lambayeque – Perú
Febrero 2015

Dr. Mat. Rubén Burga Barboza
Asesor

Teoría homológica singular y cálculo de algunos grupos de homología

INFORME DE ORIGINALIDAD

17%	17%	4%	4%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	fermat.usach.cl Fuente de Internet	3%
2	mat.ufcg.edu.br Fuente de Internet	2%
3	www.ehu.eus Fuente de Internet	2%
4	ima.epfl.ch Fuente de Internet	1%
5	www.yumpu.com Fuente de Internet	1%
6	pt.scribd.com Fuente de Internet	1%
7	repositorio.ucsg.edu.ec Fuente de Internet	1%
8	fdocument.org Fuente de Internet	1%
9	hdl.handle.net Fuente de Internet	

Dr. Mat. Rubén Burga Barboza
Asesor

1 %

10	uvadoc.uva.es Fuente de Internet	1 %
11	www.math.clemson.edu Fuente de Internet	1 %
12	docplayer.es Fuente de Internet	<1 %
13	mateinsebas.files.wordpress.com Fuente de Internet	<1 %
14	prezi.com Fuente de Internet	<1 %
15	www.ehu.es Fuente de Internet	<1 %
16	Submitted to Universidad de Cantabria Trabajo del estudiante	<1 %
17	Submitted to University of Nottingham Trabajo del estudiante	<1 %
18	www.um.es Fuente de Internet	<1 %
19	w3.impa.br Fuente de Internet	<1 %
20	webusers.imj-prg.fr Fuente de Internet	<1 %

Dr. Mat. Rubén Burga Barboza
Asesor

21	nozdr.ru Fuente de Internet		<1 %
22	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo Trabajo del estudiante		<1 %
23	arxiv.org Fuente de Internet		<1 %
24	investigacion.unirioja.es Fuente de Internet		<1 %
25	repositorio.unap.edu.pe Fuente de Internet		<1 %
26	Karl Heinz Mayer. "Algebraische Topologie", Springer Science and Business Media LLC, 1989 Publicación		<1 %
27	fdocuments.ec Fuente de Internet		<1 %
28	qdoc.tips Fuente de Internet		<1 %
29	Submitted to Unviersidad de Granada Trabajo del estudiante		<1 %
30	www.math.cornell.edu Fuente de Internet		<1 %
31	vdoc.pub Fuente de Internet	Dr. Mat. Rubén Burga Barboza Asesor	<1 %

32	aaltodoc.aalto.fi Fuente de Internet	<1 %
33	Submitted to Universidad de Oviedo Trabajo del estudiante	<1 %
34	Jonathan A. Barmak. "h-Regular Complexes and Quotients", Lecture Notes in Mathematics, 2011 Publicación	<1 %
35	Roland Huber. "Étale Cohomology of Rigid Analytic Varieties and Adic Spaces", Springer Nature, 1996 Publicación	<1 %
36	vixra.org Fuente de Internet	<1 %
37	folk.ntnu.no Fuente de Internet	<1 %
38	pdfcoffee.com Fuente de Internet	<1 %
39	Joseph J. Rotman. "Homology and Groups", An Introduction to Homological Algebra, 2009 Publicación	<1 %
40	vdocuments.mx Fuente de Internet	<1 %
41	followscience.com Fuente de Internet	<1 %

Dr. Mat. Rubén Burga Barboza
Asesor

42	friedl.app.uni-regensburg.de Fuente de Internet	<1 %

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 15 words
Excluir bibliografía	Activo		

Dr. Mat. Rubén Burga Barboza
Asesor