



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ  
GALLO

FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Generalización de la ecuación de onda para “n”  
disipaciones puntuales

*Tesis presentada a la facultad de ciencias físicas y matemáticas como  
parte de los requisitos para la obtención del título de Licenciado en  
Matemática Pura.*

ROCÍO ESTRELLA RIVERA



Generalización de la ecuación de onda para “n”  
disipaciones puntuales

Jurados de tesis:



---

Dr. Leandro Aznarán Castillo

Jurado

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo



---

Lic. Marco Peralta Lui

Jurado

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo



---

MSc. Elmer Lluen Cumpa

Jurado

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo



# Dedicatoria

Dedico el presente trabajo a Jehová Dios y a mis maravillosos padres; Alfredo y Angélica.

**Rocío Estrella Rivera**



# Agradecimientos

A Jehová Dios por ser mi paz y guía para seguir adelante, por permitirme lograr mi objetivo y llegar hasta este momento especial de mi vida.

A mis padres Alfredo y Angélica por su gran amor, comprensión y apoyo, por haberme acompañado siempre en cada paso dándome aliento y mucha fuerza.

A mis hermanos; Brigitte, Ricardo y Jesús por ser muy importantes en mi vida, por demostrarme la gran confianza que tienen en mí.

A mi novio Jorge, por su apoyo en cada decisión que tomo, sobre todo por su paciencia y amor incondicional.

A los profesores de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, quienes han fortalecido mi formación profesional, en especial al profesor Oscar Santamaría Santisteban por su notable dedicación para con nosotros sus alumnos, por el gran apoyo brindado a lo largo de la tesis, por los conocimientos compartidos, por su tiempo y dedicación.

¡A todos los que de alguna manera me han apoyado, a todos ellos, muchas gracias!



# Resumen

En este trabajo estudiamos el efecto de la disipación puntual para la ecuación de onda, ecuación que modela el movimiento producido por vientos fuertes o sismos, para estructuras altas, como por ejemplo edificios, oficinas, hospitales, hoteles,, etc. Esta disipación puntual hace que la energía acumulada en dicha estructura se disipe, por ende no sufra daños.

En cuanto a la parte matemática, mostramos la buena colocación del problema usando la Teoría de semigrupos, esto es, caracterizamos los puntos estratégicos donde la disipación es efectiva en el sentido de que produce un decaimiento a cero de la energía total del sistema. Extendemos este resultado para el caso de  $n$ -disipaciones puntuales y damos condiciones necesarias y suficientes para que exista decaimiento a cero del correspondiente modelo.



# Abstract

In this work we consider the effect of the pointwise dissipative mechanism over the wave equation. We show the well posedness of the corresponding models by using the semigroup theory and we study the asymptotic behaviour of the model. We introduce a characterization of the strategical points, that is the points for which the pointwise dissipation is effective and we show that when applied the dissipative mechanism in such points the total energy of the system goes to zero. That is we show that the corresponding semigroup is strongly stable. Finally, we extend our result to the case of  $n$  pointwise dissipative mechanism.



# Introducción

Es sabido que nuestro país, se encuentra en una zona altamente sísmica, debido al proceso de subducción de la placa oceánica (Nazca) bajo la placa continental (Sudamericana). Este proceso genera una constante acumulación de energía que se libera en forma de sismos, según los estudios realizados en el 2012 se han registrado 225 sismos leves, principalmente en la costa peruana. Un sismo se manifiesta, generalmente, cuando las diferentes placas tectónicas chocan o se separan, produciendo un efecto de resonancia, fenómeno que se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a la acción de una fuerza periódica, cuyo periodo de vibración coincide con el periodo de vibración característico de dicho cuerpo, en el cual una fuerza relativamente pequeña es aplicada en forma repetida, hace que una amplitud de un sistema oscilante se haga muy grande. Entre muchos de los países propensos a sismos se encuentra Japón, Indonesia, México, Estados Unidos, Chile y Perú.

El terremoto de Ica en el año 2007, de magnitud  $8 M_w$ . dejó daños económicos, laborales y personales, 595 fallecidos, 2291 heridos, 76 000 viviendas destruidas e inhabitables y 431 000 personas afectadas, si hacemos una comparación con lo que pasó en Chile el 27 de febrero del 2010, a pesar de que ésta fue de magnitud  $8,8 M_w$  los daños fueron un tanto menores, pero aquí la gran diferencia es que hubieron edificios que no sufrieron daños, entonces la pregunta es ¿Por qué algunos edificios se derrumbaron y otros no?.

Gracias a la matemática, hoy existe una tecnología que protege a las construcciones contra los sismos, esta consiste en agregar un mecanismo disipativo de energía en los edificios, es una de las soluciones más efectivas en la construcción de los mismos, logrando que el movimiento disminuya hasta en un 80%, por suerte Chile contaba con este tipo de tecnología en algunos de sus edificios.

Estos mecanismos disipativos protegen por lo general estructuras altas o esbeltas, como ejemplo edificios, multifamiliares, oficinas, hospitales, hoteles, centros comerciales, etc.

En nuestro país, actualmente hay varias edificaciones con disipadores de energía, como por ejemplo, la Universidad de ingeniería y tecnología, la Universidad Nacional de Ingeniería, en su facultad de ingeniería Civil, inmobiliarias las cuales ofrecen departamentos antisísmicos, entre otros.

En este trabajo estudiamos la ecuación de onda, modelo de oscilaciones en estructuras por efecto de la resonancia, agregando disipaciones puntuales. Este mecanismo puntual ayuda a disipar la energía cinética y potencial de las estructuras modeladas por la ecuación de onda, dicha disipación puntual está modelada a través del Delta de Dirac  $\delta(x)$ , que es una distribución en el sentido estricto de ese concepto. En el caso unidimensional tenemos que  $\delta(x)$  está en el espacio  $H^{-1}(0, l)$  que es el espacio dual de  $H^1$ , el cual es un espacio de Hilbert, esto dificulta el problema, por lo que tratamos estos modelos definiendo un problema equivalente que nos posibilite usar la teoría de semigrupos para mostrar su buena colocación. Finalmente siguiendo los mismos argumentos verificamos la generalización de la ecuación de onda para “n” disipaciones puntuales.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma.

En el primer capítulo mostramos la ecuación de onda, resonancia y disipadores, esto con el fin de conocer los conceptos básicos y poder relacionarlos con las estructuras en la que se aplica la matemática, también mostramos resultados importantes que utilizamos en este trabajo, como Teoría de Distribuciones, Espacios de Sobolev, Teoría de Semigrupos, resultados de estabilización, entre otros.

En el segundo capítulo, estudiamos la función generalizada Delta de Dirac, su caracterización mediante dos funciones importantes que nos permite visualizar la deducción de la distribución Delta de Dirac como derivada de una función discontinua de primera especie.

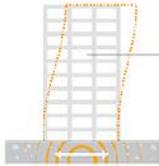
En el tercer capítulo estudiamos la ecuación de onda con disipación puntual, se muestra la buena colocación del problema usando teoría de semigrupos, ya que se trabaja con un problema equivalente. La estabilidad fuerte se obtiene como consecuencia del

teorema 9, de Batty-Duyckaerts [27].

En el cuarto capítulo, extendemos este resultado para el caso de  $n$ -disipaciones puntuales y damos condiciones necesarias y suficientes para que exista decaimiento a cero de la energía asociada al modelo correspondiente. Finalmente obtenemos puntos estratégicos, no necesariamente iguales, que producen el decaimiento a cero de la energía total del sistema.

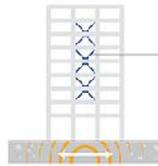
El número de disipaciones puntuales es secundario en relación a la ubicación de los mismos, la posición de dichos puntos es lo más importante y no la cantidad, en palabras simples, pueden haber millones de disipaciones puntuales, pero si no están ubicado estratégicamente no garantiza estabilidad.

### Edificio convencional



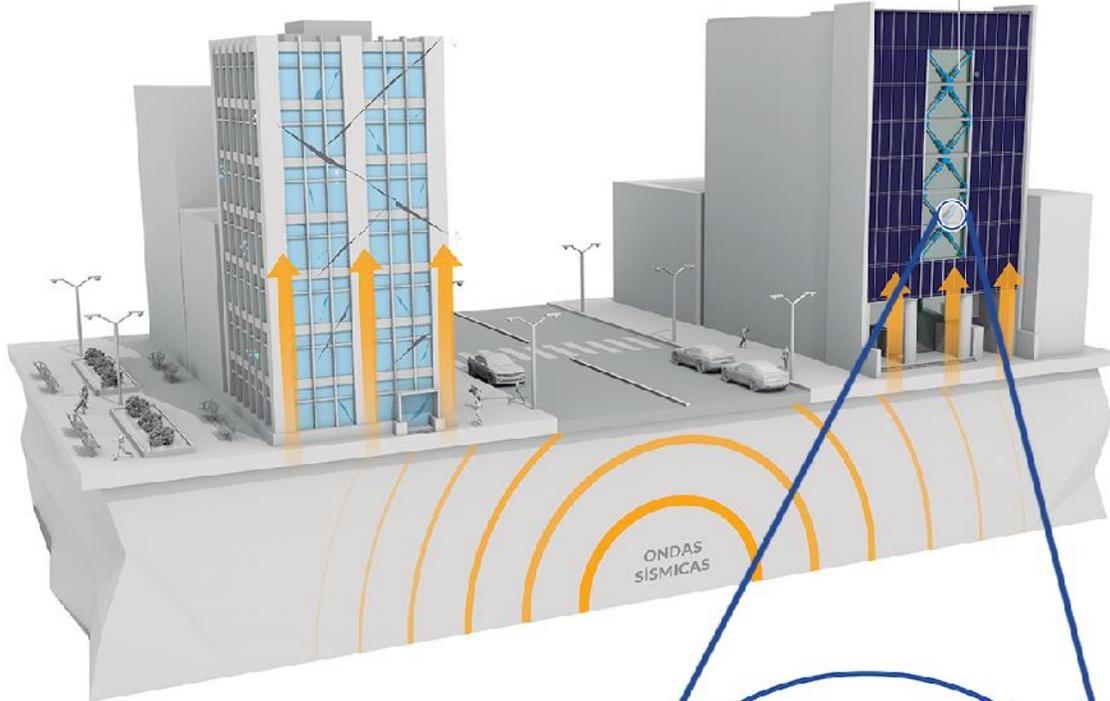
La estructura vibra y la deformación produce daño debido a que la energía sísmica se transfiere en un 100% a la estructura.

### Edificio con disipadores



Los disipadores reducen la vibración y las deformaciones.

Se instalan en edificaciones esbeltas.



### ¿Cómo funcionan los disipadores Taylor?

Durante un sismo el disipador funciona igual que un amortiguador de autos con la diferencia que debe garantizar cero reemplazos durante la vida útil del edificio.

El sello y el pistón del disipador garantizan cero mantenimiento, cero reemplazos, cero fugas.

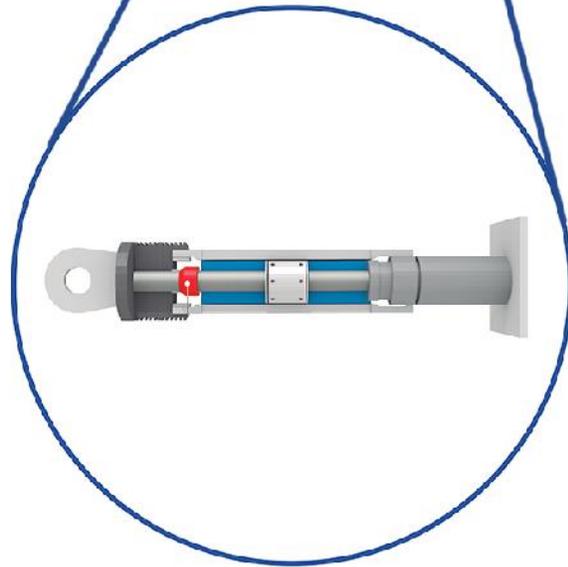
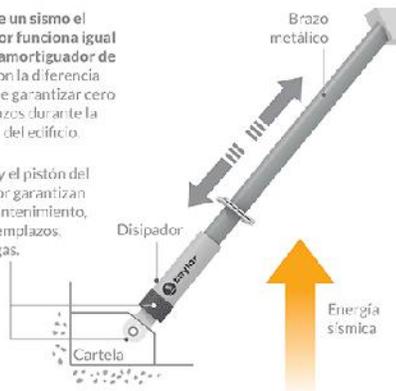


Figura 0.2: Demostración de un edificio convencional y otro con disipadores de energía sísmica

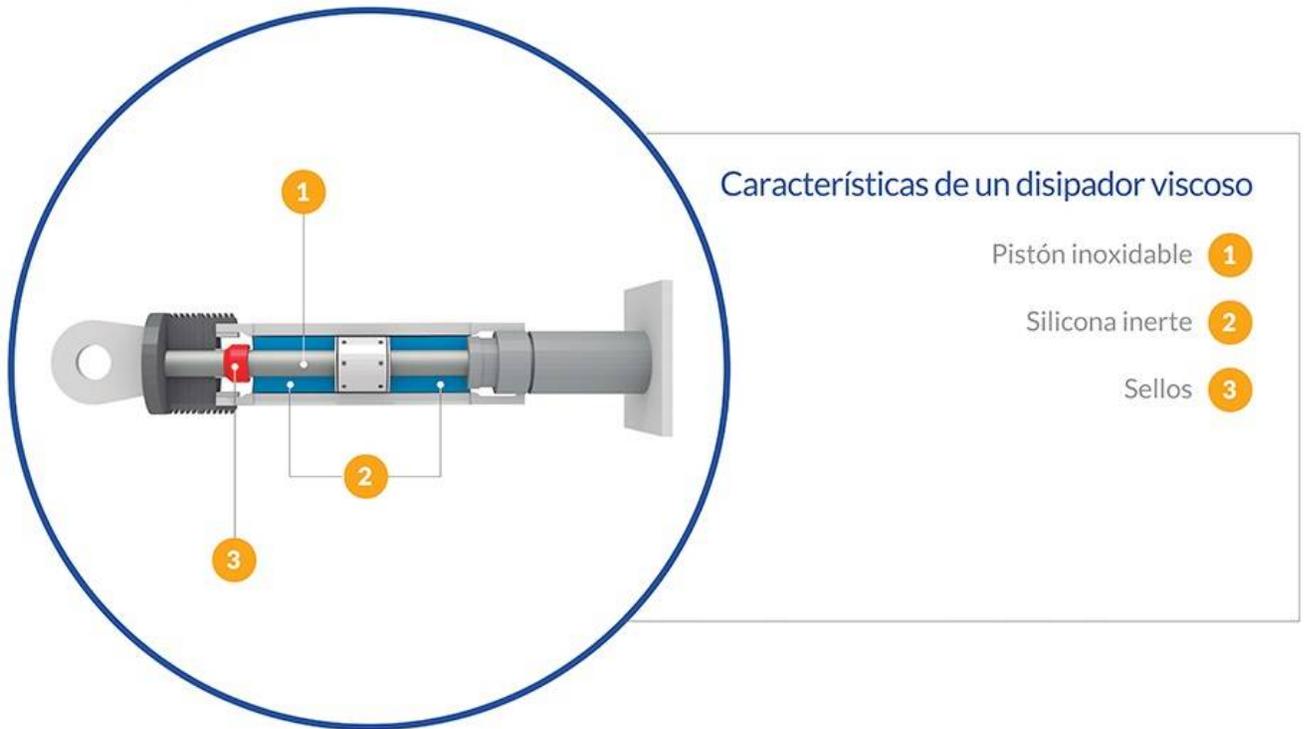


Figura 0.3: Disipador sísmico.



Figura 0.4: Disipador sísmico en curso.



# Contenido

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	Ecuación de onda . . . . .	1
1.2	Resonancia . . . . .	2
1.2.1	Disipación de energía . . . . .	6
1.3	Espacios $L^p$ . . . . .	6
1.4	Distribuciones . . . . .	13
1.5	Espacios de Sobolev . . . . .	16
1.5.1	Lema de Lax-Milgram . . . . .	17
1.6	Teoría de semigrupos . . . . .	18
1.7	El problema de Cauchy abstracto . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Delta de Dirac</b>	<b>27</b>
2.1	Delta de Dirac como distribución . . . . .	30
2.2	Caracterización la función Delta de Dirac . . . . .	31
2.2.1	La Función Valor Absoluto . . . . .	31
2.2.2	La Función de Heaviside . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Disipación puntual para la ecuación de onda</b>	<b>35</b>
3.1	Solución de una ecuación diferencial . . . . .	35
3.2	Resolución de la ecuación de onda con disipación puntual . . . . .	37
3.3	Buena colocación del problema . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Ecuación de onda para “<math>n</math>” disipaciones puntuales</b>	<b>47</b>
4.1	Resolución de la ecuación de onda para $n$ disipaciones puntuales . . . . .	47

4.2 Buena colocación del problema . . . . .	51
4.3 Estabilidad fuerte . . . . .	52
<b>5 Conclusiones</b>	<b>55</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Ecuación de onda

La ecuación de onda es una ecuación de tipo hiperbólico, este tipo de ecuaciones conducen a problemas de tipo oscilatorio (problemas de la cuerda, membrana, de oscilaciones electromagnéticas, etc). La particularidad característica de los procesos descritos por las ecuaciones de tipo hiperbólico es la velocidad finita de propagación de las perturbaciones.

La ecuación de onda es la que describe la transmisión de ondas en un medio, Como caso concreto se va a analizar la siguiente situación: se tiene una cuerda tensa sujeta entre los puntos  $x = 0$  y  $x = L$ , la cual se somete a una deformación inicial representada por una curva plana  $f(x)$ . La forma de la cuerda va a cambiar en función del tiempo y, por consiguiente, vendrá representada por una función  $y = y(x; t)$ . Tras hacer algunas hipótesis basadas en principios físicos se encuentra que la ecuación del movimiento de los puntos de la cuerda es la siguiente

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

en la cual  $a$  es una constante que depende de las características físicas del problema, aquí por ejemplo se tiene que  $a^2 = \frac{H}{\rho}$ , donde  $H$  es la componente horizontal de la tensión (que es constante si se asume que solo hay movimiento transversal) y  $\rho$  es la densidad. Este problema se denomina ecuación de la cuerda vibrante o ecuación de ondas unidimensional.

A continuación veremos un ejemplo sencillo, por ejemplo la cuerda de un violín

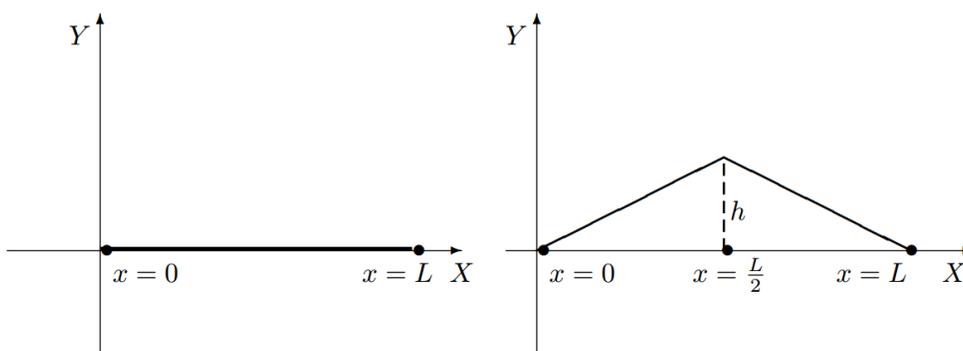


Figura 1.1: Cuerda tensa - cuerda alzada

En el tiempo  $t = 0$  la cuerda se alza por el punto medio, según la figura (1.2), una distancia que designamos por  $h$ . A continuación la cuerda se suelta. El problema, que involucra la vibración que se produce, es describir el movimiento resultante cuyo modelo matemático está dado por la ecuación de onda.

El efecto de las vibraciones sobre una estructura debe ser tenido en cuenta siempre, ya que suponen un serio problema, una vibración en términos muy generales es una fuerza aplicada cíclicamente, puede ocurrir que se produzca una **resonancia** y, en ese caso, los efectos suelen ser fulminantes.

## 1.2 Resonancia

La resonancia es un fenómeno que se produce cuando un sistema capaz de vibrar u oscilar, es sometido a la acción de una fuerza periódica externa, cuya frecuencia de vibración coincide con alguna de las frecuencias naturales del sistema. El sistema vibra aumentando progresivamente la amplitud del movimiento.

Un caso de resonancia, es cuando un cantante dirige su voz hacia una copa de cristal; es sabido que la copa es una estructura elástica que vibra a frecuencias claramente reconocibles por el oído humano, por tanto, si el cantante entona sonidos de la misma frecuencia, y los lanza contra la copa con un sonido potente se produce el fenómeno de resonancia que puede llegar a romper la copa.

Otro ejemplo muy conocido es, imaginar a un niño en un columpio. Éste está oscilando en el columpio con una frecuencia concreta. A esta frecuencia se la denominará frecuencia natural de oscilación. A continuación aparece el padre del niño y comienza a empujarle. ¿Que ocurre? La amplitud de la oscilación cada vez será mayor y el niño llegará mas alto. Si se aplica una fuerza periódica sobre un oscilador tendremos una oscilación forzada. En el caso de que la frecuencia de la fuerza periódica aplicada coincida con la frecuencia natural del oscilador aparecerá la denominada resonancia.

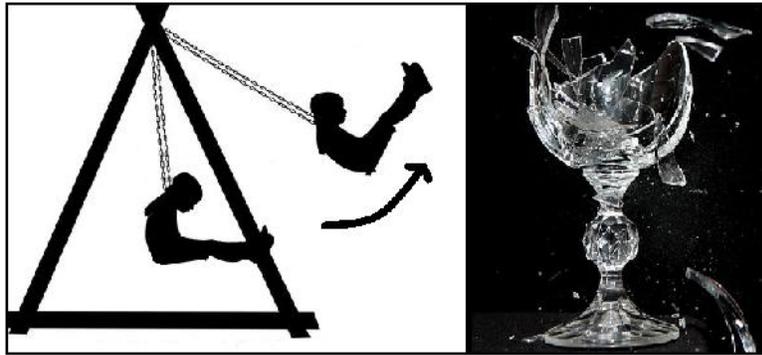


Figura 1.2: Ejemplos sobre el efecto de la resonancia

Ahora veremos un ejemplo desde el punto de vista matemático, consideremos la EDO lineal de segundo orden no homogénea

$$u'' + au' + bu = f$$

De la teoría de EDO lineales, sabemos que la solución general de esta EDO depende de la función  $f$ . Esta función puede ser vista como una fuerza externa, que actúa perturbando, por ejemplo, las oscilaciones de un sistema masa-resorte. Si esta fuerza es grande (pequeña), nuestro sentido común nos dice que la solución correspondiente de la EDO también debe ser grande (pequeña), en el sentido de las oscilaciones. Sin embargo, esto no es así, ya que para ciertas funciones  $f$  que son acotadas, las soluciones que se obtienen de la EDO resultan no ser acotadas. En el ámbito de las vibraciones mecánicas, este fenómeno se conoce como resonancia. El fenómeno físico de la resonancia se manifiesta cuando movimientos armónicos son perturbados por fuerzas externas que poseen la misma

frecuencia que dicho movimiento. En particular, nos referimos por resonancia mecánica, a la tendencia de un sistema mecánico a absorber energía cuando la frecuencia de las oscilaciones es igual a la frecuencia natural de las vibraciones. Por ejemplo, consideremos la EDO

$$u'' + \frac{k}{m}u = 0 \quad (1.1)$$

que modela un sistema masa-resorte, donde  $k$  es la constante de elasticidad del resorte y  $m$  es la masa en kg. Su solución general es

$$u(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

El término  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  nos da la frecuencia del movimiento del sistema. Si agregamos una fuerza externa que posea la misma frecuencia, por ejemplo

$$u'' + \frac{k}{m}u = \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

aparece un problema de resonancia. En la práctica, en una estructura modelada por esta EDO, ocurriría que las amplitudes de las oscilaciones crecerían de manera indeterminada, haciendo colapsar la estructura.

Este hecho es una de las razones que motiva la inclusión de mecanismos disipativos en estructuras elásticas. Veamos un ejemplo concreto. Supongamos que en 1.1, la masa es  $m = 1Kg$ , la constante del resorte es  $k = 5$ , y que actúa una fuerza externa dada por  $f(t) = \cos \sqrt{5}t$ , es decir, tenemos el problema

$$u'' + 5u = \cos \sqrt{5}t \quad (1.2)$$

sujeto a las condiciones iniciales  $u(0) = 0, u'(0) = 0$ . La solución de la EDO homogénea

asociada a este problema está dada por

$$u_h(t) = C_1 \cos \sqrt{5}t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{5}t$$

Notemos que la fuerza externa  $f$  tiene la misma frecuencia que el sistema, por lo que en este problema existe una resonancia. La teoría de EDO lineales nos dice que en este caso, para encontrar la solución general de este problema, debemos hallar primero una solución particular de la forma

$$u_p(t) = tA \cos \sqrt{5}t + B \operatorname{sen} \sqrt{5}t$$

con  $A$  y  $B$  constantes por determinar, para lo cual se usa el método de coeficientes indeterminados. Usando este método, vemos que  $A = 0$ ,  $B = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ , por lo que

$$u(t) = C_1 \cos \sqrt{5}t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{5}t + \frac{1}{2\sqrt{5}}t \operatorname{sen} \sqrt{5}t$$

y usando las condiciones iniciales, determinamos que las constantes son  $C_1 = 0,03$  y  $C_2 = 0$ , obteniéndose

$$u(t) = 0,03 \cos \sqrt{5}t + \frac{1}{2\sqrt{5}}t \operatorname{sen} \sqrt{5}t$$

La figura 1.3 muestra la gráfica de esta solución. Se observa la presencia de resonancia en el hecho que al aumentar  $t$ , aumenta lineal e indefinidamente la amplitud de las ondas.

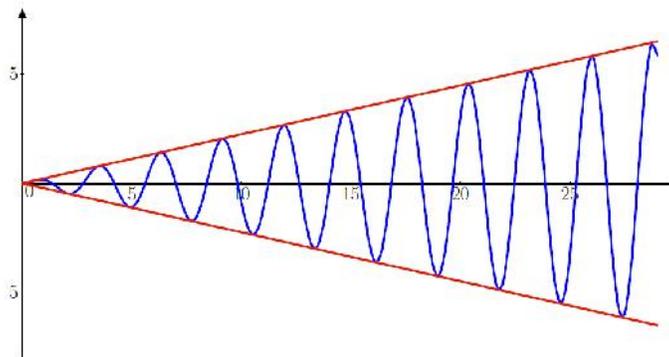


Figura 1.3: Gráfica de  $u(t) = 0,03 \cos \sqrt{5}t + \frac{1}{2\sqrt{5}}t \operatorname{sen} \sqrt{5}t$

Existen mecanismos disipativos de energía, de modo que las oscilaciones de estos sistemas se amortiguan, disminuyendo la amplitud en el transcurso del tiempo hasta que finalmente desaparecen.

### 1.2.1 Disipación de energía

La disipación de energía se logra mediante la introducción de dispositivos especiales en una estructura, con el fin de reducir las deformaciones y esfuerzos sobre ella. Estos dispositivos reducen la demanda de deformación y esfuerzos producidos por el sismo mediante el aumento del amortiguamiento estructural.

La idea de implementar estos disipadores de energía sísmica ubicados en puntos estratégicos en una estructura, radica en amplificar la capacidad de disipar energía durante un evento sísmico, ya que permitirá construir construcciones de alto nivel de seguridad, también son diseñados para disipar fenómenos de fuertes vientos, huracanes u otras sollicitaciones de origen dinámico. Cabe decir que toda estructura diseñada sismoresistentemente, tiene la propiedad de disipar energía mediante las deformaciones. Este dispositivo también llamado amortiguador sísmico, no impide el paso de las vibraciones a la estructura, si no que permite que la energía se concentre en los disipadores reduciendo paulatinamente el movimiento de la estructura.

Cuando hablamos de disipación puntual, nos referimos a que este dispositivo elegido para disipar la energía sea muy pequeño en comparación con la estructura, figura (1.4). En matemática se puede modelar una fuerza puntual, esto nos brinda una idea para modelar una disipación puntual mediante la función generalizada “Delta De Dirac”, para su mejor entendimiento se detallará este último concepto en el capítulo 2.

## 1.3 Espacios $L^p$

Como es habitual, si  $p$  y  $q$  son números reales tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , con  $1 < p, q < \infty$ , diremos que  $p$  y  $q$  son exponentes conjugados entre sí. Por otro lado, diremos que 1 y  $\infty$  son exponentes conjugados.



Figura 1.4: Edificio con disipaciones puntuales.

**Definición 1** Sea  $p \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  denótese por  $L^p(\Omega)$  a la clase de todas las funciones medibles  $u$ , para las cuales  $|u|^p$  es una función integrable sobre  $\Omega$ . Es decir,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ es medible } \int_{\Omega} |u(x)|^p < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

En  $L^p(\Omega)$  se define a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u(x)|^p dx, \quad 1 \leq p < \infty,$$

con esta norma  $L^p(\Omega)$  es un espacio de Banach. En el caso de  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  es un espacio formado por todas las funciones  $u$ , esencialmente limitadas sobre  $\Omega$ , esto es, funciones que son limitadas casi siempre. De esta forma  $L^\infty(\Omega)$  es un espacio de Banach y está dotada de la siguiente norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Cuando  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

y norma

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

### Desigualdad de Young

Si  $a, b$  son números reales no negativos, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

siempre que  $1 < p < \infty$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [4], pág 46. [3].

### Desigualdad de Hölder

Sea  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $v \in L^q(\Omega)$  con  $1 \leq p, q \leq \infty$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces  $uv \in L^1(\Omega)$  y

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [4] pág. 41, [3].

## Topología débil estrella

La topología débil estrella es una topología que se utiliza en los espacios duales. Dado un espacio normado  $E$ , podemos construir su espacio dual  $E^*$ , como un espacio formado por todas las funciones lineales y continuas definidas sobre  $E$ . Este espacio dual a su vez es un espacio normado, por tanto en este espacio podemos definir tanto la convergencia fuerte como la convergencia débil.

**Definición 2** (*Fuerte y débil \* convergencia de una secuencia de Funcionales*).

Sea  $f_n$  una secuencia de funcionales lineales acotados en un espacio normado  $E$ . Entonces:

a). La convergencia fuerte de  $f_n$  significa que existe un  $f \in E^*$  tal que  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ .

Esto se escribe

$$f_n \rightarrow f.$$

b). La convergencia débil de  $f_n$  significa que existe un  $f \in E^*$  tal que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in E$ . Esto se escribe

$$f_n \xrightarrow{*} f$$

$f$  en a). y b). se llama límite fuerte y límite débil de  $f_n$ , respectivamente.

Además, el dual de  $E$  denotado por  $E^*$  es un espacio normado, con una norma dada por

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|_E=1} |f(x)|.$$

**Definición 3** Diremos que un espacio normado  $E$  es separable, se existe un subconjunto numerable denso en  $E$ .

Por ejemplo los espacios  $L^p(\Omega)$  son separables para  $p \geq 1$ . En cambio el espacio  $L^\infty(\Omega)$  no es separable. La topología débil estrella es introducida porque ella nos brinda un criterio de compacidad. El siguiente teorema es de fundamental importancia en el Análisis Funcional.

**Teorema 1** Toda sucesión limitada de funciones lineales y continuas definidos sobre un espacio normado, posee una sub-sucesión que converge débil estrella.

DEMOSTRACIÓN.- Ver [4] pág 33.

## Espacios reflexivos

Los espacios reflexivos tienen un papel muy importante en el Análisis Funcional. Son aquellos espacios donde la bola cerrada y limitada es compacta con relación a la topología débil. Dado un espacio normado  $E$  siempre podemos construir su correspondiente espacio dual de la siguiente forma

$$E^* = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ con } f \text{ lineal y continua}\},$$

claramente este es un espacio vectorial. Podemos definir una norma en este espacio vectorial

$$\|f\|_* = \sup_{g \in E^*, \|g\|_* \leq 1} |f(g)|.$$

Es simple de verificar que la función definida anteriormente es una norma. Así tenemos que el espacio dual  $E^*$  es un espacio normado. Es importante recordar que el espacio dual así definido es siempre un espacio completo, a pesar de que el espacio original  $E$  no lo sea. De la misma forma podemos construir el espacio bidual, que lo denotaremos como  $E^{**}$  que es definido de forma semejante al espacio dual, es decir

$$E^{**} = \{f : E^* \rightarrow \mathbb{R}, \text{ con } f \text{ lineal y continua}\},$$

donde podemos definir la norma

$$\|f\|_{**} = \sup_{g \in E, \|g\| \leq 1} |f(g)|.$$

Un espacio normado está relacionado con su bidual de una forma natural a través de la siguiente función lineal, conocida como proyección canónica:

$$J : E \rightarrow E^{**}, \quad x \mapsto J(x) \in E^{**},$$

donde

$$\langle J(x), f \rangle = f(x), \quad \forall f \in E^*,$$

note que  $J$  es una isometría entre los espacios  $E$  y  $E^{**}$ . De hecho

$$\|J(x)\|_{**} = \sup_{f \in E^*, \|f\|_* \leq 1} \langle J(x), f \rangle = \sup_{f \in E^*, \|f\|_* \leq 1} \langle f, x \rangle = \|x\|,$$

esta última identidad es una consecuencia del Teorema de Hahn - Banach. La aplicación  $J$  es llamada proyección canónica. No es verdad en general que  $J$  sea sobreyectiva. Los espacios en la que  $J$  es sobreyectiva son llamados *Espacios reflexivos*

**Definición 4** *Un espacio  $E$  es llamado reflexivo si su proyección canónica sobre su bidual*

$J$  es sobreyectiva..

### Propiedades

- Si  $1 < p < \infty$  entonces  $L^p$  es reflexivo.
- $L^1$  no es reflexivo.
- $L^\infty$  no es reflexivo.
- $L^\infty(\Omega) = [L^1(\Omega)]^*$ .

Gracias a esta última caracterización podemos afirmar que toda secuencia de funciones limitadas en  $L^\infty(\Omega)$  posee una subsecuencia que converge débil estrella.

## Series de Fourier

Las series e integrales de Fourier constituyen un tema clásico del Análisis Matemático. Desde su aparición en el siglo XVIII en el estudio de las vibraciones de una cuerda, las series de Fourier se han convertido en un instrumento indispensable en el análisis de ciertos fenómenos periódicos de la Física y la Ingeniería. La idea fundamental se basa en aproximar la función, no por una serie de potencias (desarrollo de Taylor), sino por una serie de funciones periódicas (senos y cosenos). En lo que sigue consideraremos que las funciones con las que se trabaja son Riemann integrables en el intervalo correspondiente (bastaría, por ejemplo, suponer que son continuas salvo en un número finito de puntos donde presentan discontinuidades de salto).

El conjunto de funciones

$$\left\{1, \cos \frac{\pi}{p}x, \cos \frac{2\pi}{p}x, \cos \frac{3\pi}{p}x, \dots, \sin \frac{\pi}{p}x, \sin \frac{2\pi}{p}x, \dots\right\}, \quad (1.3)$$

es ortogonal en el intervalo  $[-p, p]$ . Así una función  $f$  definida en  $[-p, p]$  puede escribirse como una serie de Fourier.

**Definición 5 Serie de Fourier**

La serie de Fourier de una función  $f$  definida en el intervalo  $[-p, p]$  se determina mediante

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{n\pi}{p} x \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{p} x \right) \right),$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x dx \end{aligned}$$

**Definición 6 Condiciones de convergencia**

Sean  $f$  y  $f'$  continuas en tramos en el intervalo  $[-p, p]$ , esto es, sean continuas excepto en un número finito de puntos en el intervalo y con discontinuidad sólo finitas en esos puntos. Entonces, la serie de Fourier de  $f$  en el intervalo converge hacia  $f(x)$  en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad la serie de Fourier converge hacia el promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

en donde  $f(x+)$  y  $f(x-)$  representan el límite de  $f$  en  $x$ , desde la derecha y la izquierda respectivamente.

**Definición 7 Series de Fourier de cosenos y senos**

- La serie de Fourier de una función par en el intervalo  $[-p, p]$  es la serie de cosenos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{p} x \right),$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx. \end{aligned}$$

- La serie de Fourier de una función impar en el intervalo  $(-p, p)$  es la serie de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x,$$

donde

$$b_n = \frac{2}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x dx$$

**Observación 1** En conjunto definido en (1.3) es ortogonal y completo.

El teorema que sigue especifica las condiciones suficientes de convergencia de una serie de Fourier en un punto.

## 1.4 Distribuciones

Las distribuciones fueron introducidas por Serguei Sólbolev en 1935. Esta teoría fue motivada por la aparición de la función Delta de Dirac  $\delta(x)$  para modelar fuerzas puntuales.

El objetivo de esta teoría es definir correctamente lo que se entiende por funciones del tipo de Delta de Dirac, y extender el cálculo a una clase de nuevos objetos (distribuciones), más amplia que la clase de las funciones diferenciables. A finales de la década de 1940 Laurent Schwartz formalizó la **teoría de distribuciones**, lo que le valió la medalla Fields en 1950.

Empezamos esta sección con la siguiente definición

**Definición 8** Llamaremos *multiíndice* a  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,

Si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , el un operador  $D^\alpha$  derivada de orden  $|\alpha|$ , definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\alpha x_1^{\alpha_1} \alpha x_2^{\alpha_2} \dots \alpha x_n^{\alpha_n}},$$

Cuando  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$  se define  $D^\alpha u := u$ .

Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función dada. **El soporte de  $u$**  es el conjunto que se define de la siguiente manera

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}^\Omega.$$

Así mismo se define

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \in C^\infty(\Omega) \text{ con } \text{supp}(u) \text{ compacto } \subseteq \Omega\},$$

donde los elementos que están en  $C_0^\infty(\Omega)$  son denominados “funciones de prueba”.

**Definición 9** Consideremos la sucesión  $(\varphi_\nu)_{\nu \geq 1} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$  y  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Se dice que la sucesión  $(\varphi_\nu)_{\nu \geq 1}$  converge hacia  $\varphi$  si y solamente si:

1. Existe un subconjunto  $K$  compacto de  $\Omega$  tal que  $\text{supp}(\varphi_\nu - \varphi) \subseteq K, \forall \nu \geq 1$
2.  $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$  uniformemente en  $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ , es decir:

$$\max_{x \in K} |D^\alpha \varphi_\nu(x) - D^\alpha \varphi(x)| \rightarrow 0, \quad \text{si } \nu \rightarrow \infty, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

**Observación 2** El espacio  $C_0^\infty(\Omega)$ , dotado de la convergencia dada en la definición anterior se llama “Espacio de funciones de prueba”, denotado por  $\mathcal{D}(\Omega)$ , es decir  $\mathcal{D}(\Omega) := (C_0^\infty(\Omega), \rightarrow)$  con la convergencia anterior.

**Proposición 1** El espacio  $\mathcal{D}(\Omega)$  es denso en  $L^p(\Omega), \forall 1 \leq p < \infty$  es decir

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{| \cdot |_{L^p(\Omega)}} = L^p(\Omega), \quad \forall 1 \leq p < \infty.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightarrow T(\varphi) \end{aligned}$$

es continua en el sentido de la convergencia definida en  $\mathcal{D}(\Omega)$  se llama distribución en  $\Omega$ . Más precisamente, la aplicación  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  es una distribución si

$$\text{i) } T(\alpha\varphi + \psi) = \alpha T(\varphi) + T(\psi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

ii) Si  $(\varphi_\nu) \subset \mathcal{D}(\Omega)$  y  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  tal que  $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$  en  $\mathcal{D}(\Omega)$ , entonces

$$T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi)$$

El conjunto de las distribuciones es denotada por

$$\mathcal{D}'(\Omega) := \{T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}/T \text{ lineal y continua}\}.$$

**Ejemplo 1** Sea la función  $\text{sen} : (-\infty, \infty) \rightarrow [-1, 1]$ . Entonces asociamos a la función seno una distribución que la denotaremos como  $T_{\text{sen}}$ .

Es inmediato que la integral impropia siguiente converge ya que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi)\varphi(\xi)d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\xi)||\varphi(\xi)|d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)|d\xi < \infty,$$

luego, tiene sentido definir la distribución  $\text{sen}$

$$T_{\text{sen}} : \mathcal{D}(-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que, } T_{\text{sen}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

La distribución  $T_{\text{sen}}$  significa que a cada curva de  $\mathcal{D}(-\infty, \infty)$ , usando la convergencia de la integral impropia, se le asocia un número real. La propiedad de linealidad de  $T_{\text{sen}}$ , es consecuencia inmediata de las propiedades de las integrales convergencias y se tiene

$$\begin{cases} T_{\text{sen}}(\varphi + \psi) = T_{\text{sen}}(\varphi) + T_{\text{sen}}(\psi) \\ T_{\text{sen}}(\alpha\varphi) = \alpha T_{\text{sen}}(\varphi), \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases},$$

La distribución  $T_{\text{sen}}$ , se llama función seno generalizada.

## 1.5 Espacios de Sobolev

Toda función  $u \in L^p(\Omega)$  posee derivadas distribucionales de todos los órdenes, donde las derivadas de  $u$  no siempre pertenecen al espacio  $L^p(\Omega)$ , eso llevó a Serguéi Sóbolev en 1936, a idealizar una nueva clase de espacios vectoriales llamados “*Espacios de Sóbolev*”.

Consideramos  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^n$  con frontera  $\partial\Omega$  regular. Definimos el espacio de Sóbolev como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\} \subseteq L^p(\Omega),$$

donde  $D^\alpha$  es el operador de derivación de orden  $\alpha$ , en el sentido de las distribuciones. Este espacio está dotado de la siguiente norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|_{L^p(\Omega)}^p.$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)}^p = \sup_{|\alpha| \leq m} \sum |D^\alpha u(x)|.$$

• **Algunas propiedades:** Ver [5].

- a) El espacio de Sóbolev  $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ .
- b)  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$ , si  $m \geq k$ .
- c)  $C^m(\bar{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$ .
- d)  $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W^{m,p}(\Omega)$  es denso en  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Esta última propiedad permite definir un subespacio de clases de equivalencia de funciones que se anulan sobre la frontera, a partir de la clausura topológica,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{W^{m,p}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)} \simeq \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Cuando  $p = 2$ ,  $W^{m,2}(\Omega)$  es denotado por  $H^m(\Omega)$  este es un espacio de Hilbert

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

cuyo producto interno se define por

$$\langle u, v \rangle_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

con la siguiente norma

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx.$$

**Observación 3** Sea  $\Omega$  un abierto limitado en  $\mathbb{R}^n$ , de forma análoga al caso de  $W_0^{m,p}(\Omega)$  se define

$$H_0^m(\Omega) = \overline{H^m(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)}.$$

### Desigualdad de Poincaré clásica

Sea  $p$ , tal que  $1 \leq p < \infty$  y  $\Omega$  un conjunto abierto limitado en  $\mathbb{R}^n$ , al menos en una dirección. Entonces existe una constante  $C$ , dependiendo sólo de  $\Omega$  y  $p$ , tal que para cada función  $u$  del Espacio de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega)$  se tiene

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Para que la desigualdad de Poincaré sea válida es suficiente que  $u$  se anule en una componente abierta de la frontera de  $\Omega$ .

DEMOSTRACIÓN.- Ver [4], pág 125.

**Observación 4** La expresión  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  es una norma en  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , equivalente a la norma  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ , en  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

### 1.5.1 Lema de Lax-Milgram

#### Lema 1 Lax-Milgram

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert real,  $\mathcal{H}^*$  su espacio dual y sea  $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  una forma

bilineal, acotada y fuertemente coerciva con constantes  $M$  y  $\alpha$ , respectivamente. Entonces, para cada  $F \in \mathcal{H}^*$ , existe un único  $u \in \mathcal{H}$  tal que

$$a(u, v) = F(v), \forall v \in \mathcal{H},$$

que además implica la dependencia continua de los datos, mediante la desigualdad

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|$$

donde  $\alpha$  es la constante de la elipticidad.

DEMOSTRACIÓN.- Ver [23]

## 1.6 Teoría de semigrupos

En esta sección mostraremos algunos resultados importantes en el estudio de la teoría de semigrupos. Aquí denotaremos a  $X$  como un espacio de Banach.

**Definición 10** Una familia de operadores continuos  $T(t) : X \rightarrow X$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  que satisfice

$$i) T(0) = I$$

$$ii) T(t) \circ T(s) = T(t + s)$$

es llamado semigrupo.

Note que la función exponencial  $f(t) = e^{At}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  verifica las condiciones de familia de semigrupos para  $X = \mathbb{R}$ .

**Observación 5** Otra propiedad importante es que si  $A : X \rightarrow X$  es un operador limitado, entonces el semigrupo  $T(t)$  definido por

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!},$$

es también un semigrupo definido sobre  $X$ . De hecho, si  $A$  es limitado  $\|A\| < \infty$ , tenemos

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!},$$

luego definimos

$$S_n = \sum_{i=0}^n \frac{A^i t^i}{i!}.$$

Es simple verificar que  $S_n$  es una sucesión de Cauchy, pues

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{i=n}^m \frac{A^i t^i}{i!} \right| \leq \sum_{i=n}^m \frac{\|A\|^i t^i}{i!} \rightarrow 0,$$

pues

$$e^{\|A\|t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A\|^i t^i}{i!}.$$

En este caso decimos que

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!},$$

es un semigrupo generado por  $A$ .

**Observación 6** El operador  $T(t)$  es un semigrupo generado por el operador limitado  $A$ .

Es simple verificar las derivadas de orden  $k$

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t) = A^2 T(t), \quad \frac{d^k}{dt^k} T(t) = A^k T(t).$$

Por tanto, para calcular la derivada de orden  $k$  del operador  $T$ , basta componer el semigrupo con el operador  $A$ . Luego se puede escribir

$$\frac{d^k}{dt^k} T(t) = \left[ AT \left( \frac{t}{k} \right) \right]^k, \quad \text{o} \quad \frac{d^k}{dt^k} T(t) = \left[ \frac{d}{dt} T \left( \frac{t}{k} \right) \right]^k.$$

De las definiciones anteriores vemos que un semigrupo  $T(t)$  es una familia de operadores continuos para cada valor  $t \in \mathbb{R}$ . Interesa clasificar los semigrupos por la continuidad con relación a la variable  $t$ . Consideraremos dos casos. El primero cuando la función  $t \mapsto T(t)$ , o sea el semigrupo visto como una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{L}(X)$  sea continuo.

El segundo cuando la función  $t \mapsto T(t)x$ , es visto como una función de  $\mathbb{R}$  en  $X$  para  $x \in X$  sea una función continua.

En el primer caso diremos que el semigrupo es **uniformemente continuo**. En el segundo caso diremos que el semigrupo es **fuertemente continuo**. Esto es,

**Definición 11** *Un semigrupo  $T(t)$  es uniformemente continuo, o de clase  $C_0$  si*

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t) = I, \text{ en } \mathcal{L}(X).$$

**Definición 12** *Un semigrupo  $T(t)$  es fuertemente continuo, o de clase  $C_0$ , si*

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x, \text{ en } X.$$

Es simple verificar que todo semigrupo uniformemente continuo es de la clase  $C_0$ , su recíproco no es verdadero. Para semigrupos uniformemente continuos tenemos la siguiente caracterización.

**Teorema 2** *Un semigrupo  $T(t)$  es uniformemente continuo si y solamente si  $A$  es limitado.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [13]

**Definición 13** *Un semigrupo  $T(t)$  es limitado, si existe  $M \leq 1$ , tal que*

$$\|T(t)\| \leq M, \forall t$$

*Si  $M = 1$ , se dice que  $T(t)$  es un semigrupo de contracciones.*

Otra definición importante es

**Definición 14** Un operador  $A$  es generador infinitesimal de un semigrupo  $T$ , si

$$D(A) = \{x \in X; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ existe en } X, \}$$

y para cada  $x \in D(A)$  tenemos

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d}{dt} T(t)x \right|_{t=0}$$

Es simple verificar que dado un semigrupo podemos encontrar su generador, para esto es suficiente con evaluar el límite de la definición de generador infinitesimal.

El problema es su recíproco, es decir, ¿Dado un operador  $A$  es posible que la función exponencial  $e^{At}$  esté bien definida?. Verificamos que cuando  $A$  es un operador continuo esto es verdad. El problema es verificar en que condiciones existe este exponencial cuando el operador  $A$  no es limitado. Esta caracterización es dada por el teorema de Hille - Yosida. Antes de mostrar el teorema de Hille - Yosida, veremos algunas definiciones importantes.

**Definición 15** Sea  $A$  un operador definido sobre un espacio de Banach  $X$ . Denotamos por  $\rho(A)$ , al conjunto resolvente de  $A$  definido como

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

El espectro de  $A$ , denotado por  $\sigma(A)$ , es definido como

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

**Lema 2** Sea  $A$  un operador de  $X$ , entonces  $\rho(A)$  es un conjunto abierto, y por tanto, el espectro de  $A$ ,  $\sigma(A)$ , es un conjunto cerrado en  $\mathbb{C}$ .

DEMOSTRACIÓN.- Ver [5] pág 108.

**Lema 3** *Suponga que  $A$  es un operador continuo entonces, el espectro de  $A$  es un conjunto cerrado y limitado, esto es, un conjunto compacto. Más precisamente*

$$\rho(A) \subset B_{\|A\|}(0) = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| \leq \|A\|\}$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [5] pág 108.

**Observación 7** *Todo operador  $A$  limitado o no, conmuta con el operador resolvente.*

En efecto,

$$\begin{aligned} A(\lambda I - A)^{-1} &= -(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} + \lambda(\lambda I - A)^{-1} \\ &= -(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A) + (\lambda I - A)^{-1}\lambda I \\ &= [(\lambda I - A)^{-1}][-(\lambda I - A) + \lambda I] \\ &= (\lambda I - A)^{-1}A \end{aligned}$$

**Definición 16** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Un operador  $A$  es disipativo si*

$$\operatorname{Re}(AU, U)_H \leq 0, \quad \forall U \in D(A).$$

En siguiente teorema se establece una condición necesaria y suficiente para que un operador no limitado  $A$  sea el generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  de contracciones.

**Teorema 3 (Hille - Yosida)**

*Un operador lineal  $A$  no limitado es generador infinitesimal de un semigrupo de clase  $C_0$  de contracciones sí y solamente si*

a)  *$A$  es cerrado y  $\overline{D(A)} = X$ .*

b) *Los reales positivos están contenidos en el resolvente de  $A$ ,  $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$  y para todo  $\lambda > 0$  es válido,*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [13] pág 8.

Otro resultado muy útil, es el siguiente

**Teorema 4 (Lumner Phillips)**

Sea  $A$  un operador lineal con dominio denso en  $X$ . Entonces

- a) Si  $A$  es disipativo y existe  $\lambda_0 > 0$  tal que  $Im(\lambda_0 I - A) = X$ , entonces  $A$  es generador infinitesimal de un semigrupo de clase  $C_0$  de contracciones.
- b) Si  $A$  es generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  de contracciones sobre  $X$ , entonces  $Im(\lambda I - A) = X$  para todo  $\lambda > 0$  y  $A$  es disipativo.

DEMOSTRACIÓN.- Ver [13] pág 14.

**Teorema 5** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $T(t)$  un semigrupo generado por  $A$ , entonces  $T$  es un semigrupo de contracciones si y solamente si  $A$  es disipativo.

DEMOSTRACIÓN.- Suponga que  $T(t)$  es un semigrupo de contracciones, entonces  $\|T(t)\| \leq 1$  y además

$$\langle T(h)w - w, w \rangle_H = \langle T(h)w, w \rangle_H - \langle w, w \rangle_H \leq \|w\|_H^2 - \|w\|_H^2 = 0.$$

Dividiendo por  $h$  y tomando límite cuando  $h \rightarrow 0$ , para  $w \in D(A)$ , entonces

$$\langle Aw, w \rangle_H \leq 0.$$

Recíprocamente, para  $w \in D(A)$  se deduce que la función  $U(t) = T(t)w$  verifica

$$U_t = AU, \quad U(0) = w,$$

aplicando producto interno con  $U$  en la ecuación anterior, se obtiene

$$\langle U_t, U \rangle_H = \langle AU, U \rangle_H \leq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \|U\|_H^2 \leq 0,$$

de donde

$$\|U(t)\|_H \leq \|U(0)\|_H,$$

luego recordando la definición de  $U$ , tenemos

$$\|T(t)w\|_H \leq \|w\|_H \Rightarrow \|T(t)\|_H \leq 1.$$

Por tanto,  $T$  es un semigrupo de contracciones.

**Lema 4** *Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador lineal y continuo con inversa continua. Si  $B \in \mathcal{L}(B)$  es tal que*

$$\|B\| = \frac{1}{\|T^{-1}\|},$$

*entonces  $T + B$  es lineal continuo e inversible.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [5].

**Teorema 6** *Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $A$  generador infinitesimal de un semigrupo de clase  $C_0$ ,  $S(t) = e^{At}$  de  $X$ , satisfaciendo  $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$ . Si  $B$  es un operador lineal limitado de  $X$ , entonces  $A + B$  un generador infinitesimal de un semigrupo  $S(t)$  de clase  $C_0$ , satisfaciendo*

$$\|S(t)\| \leq Me^{(w+M\|B\|)t}.$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [5].

**Teorema 7** *Sea  $A$  un operador lineal no limitado, disipativo y con dominio denso en  $X$ . Si  $0 \in \rho(A)$ , entonces  $A$  es un generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  de contracciones.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [5].

## 1.7 El problema de Cauchy abstracto

Aquí aplicaremos los resultados del Teorema de Hille - Yosida para la resolución de los problemas de Cauchy.

**Teorema 8 (Teorema de la buena colocación)**

Si  $A$  es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase  $C_0$ , entonces el problema de valor inicial

$$U_t = AU, \quad U(0) = U_0,$$

posee una única solución  $U$ , tal que

$$\text{Si } U_0 \in \mathcal{H} \Rightarrow U \in C(0, T; \mathcal{H}), \text{ y}$$

$$\text{Si } U_0 \in D(\mathcal{A}) \Rightarrow U \in C^1(0, T; \mathcal{H}) \cap C(0, T; D(\mathcal{A})).$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [5].

**Definición 17** El radio espectral del operador  $T$ , denotado por

$$R_\sigma(T),$$

se define como el radio del menor círculo inferior centrado en el origen, que contiene al espectro de  $T$ .

**Lema 5 (Fórmula de Gerlfand)**

Para todo  $T$  un operador lineal y continuo, se tiene que  $R_\sigma(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ .

DEMOSTRACIÓN.- Ver [5].

**Observación:** Notemos que si  $i\lambda$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un autovalor de  $A$ , generador infinitesimal de un semigrupo  $T(t)$ . Entonces  $Aw = i\lambda w$ , aplicando  $e$  ambos lados, se tiene

$$e^{At}w = e^{i\lambda t}w,$$

luego

$$\|T(t)w\| = \|e^{At}w\| = \|e^{i\lambda t}w\| = \|w\|,$$

así, se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)w\| = \|w\| = \|T(0)w\|. \quad (1.4)$$

En resumen, si  $i\lambda \in \sigma(A)$  entonces existen datos iniciales que conservan la energía como (1.4). Si  $i\mathbb{R} \cap \sigma(A) = \emptyset$ , entonces

$$T(t)x \rightarrow 0.$$

El resultado que caracteriza la estabilidad fuerte, que utilizamos en este trabajo es el siguiente

**Teorema 9 *Batty-Duyckaerts***

Sea  $T(t) = e^{At}$  un semigrupo de contracciones en un espacio de Hilbert  $H$ .

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \Leftrightarrow T(t)x \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [27].

Finalizaremos este capítulo introductorio enunciando el teorema de punto Fijo de Banach.

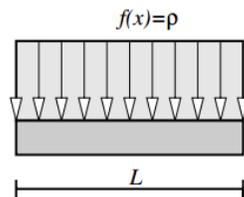
**Teorema 10** Sea  $X$  un espacio de Banach y  $F : X \rightarrow X$  una contracción. Entonces  $F$  posee un único punto fijo, esto es, existe un único punto  $x \in X$ , tal que  $F(x) = x$ .

# Capítulo 2

## Delta de Dirac

Delta de Dirac es una distribución o función generalizada, introducida por primera vez por el físico inglés Paul Dirac, en tanto que ésta distribución define un funcional en forma de integral sobre un cierto espacio de funciones. La función delta de Dirac es un concepto que es útil tanto en la matemática como en la física. Por ejemplo, la densidad de carga asociada con una carga puntual puede representarse mediante la función Delta De Dirac.

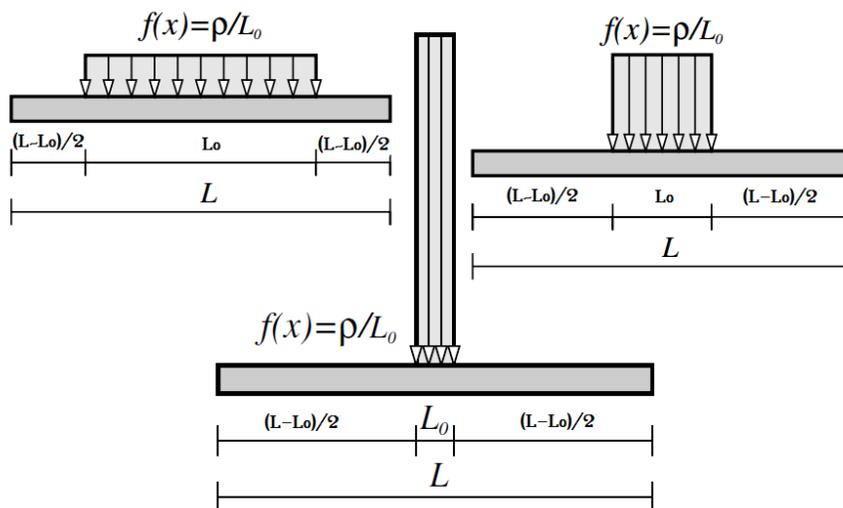
Podemos visualizar la “función” Delta de Dirac, en el estudio de fuerzas distribuidas como la resistencia de materiales o equilibrio de cuerpos, muchas veces las funciones están definidas por unidades de longitud, área o volumen. Por ejemplo, cuando se considera el problema de equilibrio de una cuerda atada a sus extremos, la cuerda se deforma por la acción de su propio peso, que varía según la longitud de la misma. Es decir, si la cadena es homogénea, el peso se considera que es una fuerza constante distribuido de manera uniforme a lo largo de ella.



En la figura anterior el peso de la cuerda se puede considerar como una fuerza constante distribuida en cada centímetro cuadrado. La fuerza neta en la cuerda es igual

al área de la gráfica, es decir,  $\rho L$ , que actúa sobre el centro de masa de la longitud de cuerda de  $L$ . En general, si la función no es homogénea entonces la función  $\rho$  no será constante, por lo que la fuerza resultante por cada unidad de longitud  $dx$  es igual a  $f(x)dx$ , sumando cada uno de estas unidades, encontramos que la resultante está dada por la integral  $\int_0^L f(x)dx$ .

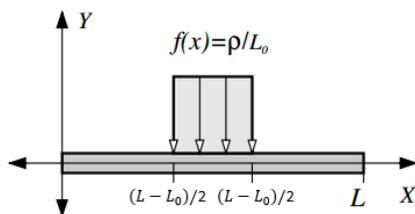
Consideremos ahora una fuerza distribuida sólo en una parte de la longitud de la barra  $L$ , considere la longitud de la barra despreciable en comparación de otra masa colocada encima de la barra.



Tenga en cuenta que para cada una de las figuras mostradas, la fuerza aplicada resultante de la barra es igual a  $\rho$ . De hecho, teniendo nuestro sistema de referencia en el extremo inicial de la barra tendremos que la fuerza resultante que actúa sobre ella está dada por

$$f_{L_0}(x) = \begin{cases} \rho/L_0, & \text{si } x \in [(L - L_0)/2, (L + L_0)/2] \\ 0, & \text{si } x \notin [(L - L_0)/2, (L + L_0)/2] \end{cases}$$

La diferencia es que ella se aplica en regiones más pequeñas en amplitud por encima del



arco. Una fuerza puntual en la barra es el límite cuando  $L_0 \rightarrow 0$ . Esto significa que la densidad de fuerza o fuerza distribuida está dado por

$$f_0(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x = L/2 \\ 0, & \text{si } x \neq L/2 \end{cases}$$

Sin embargo, según lo anterior desarrollado, tenemos

$$F = \int_a^b f_0(x) dx = \lim_{L_0 \rightarrow 0} \int_{(L-L_0)/2}^{(L+L_0)/2} \frac{\rho}{L_0} dx = \rho.$$

Una función  $F$  con las propiedades anteriores no es una función en el sentido del cálculo clásico. Pero las propiedades de una fuerza de un punto que actúan sobre una barra de longitud  $L$  está dada por los límites de la función  $f_{L_0}$  como se define anteriormente, entonces tenemos que ampliar nuestro concepto de funciones para las llamadas funciones generalizadas o distribuciones de Schwartz.

**Definición 18** la función delta de Dirac se define por la siguiente propiedad

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} \infty, & x = \xi \\ 0, & x \neq \xi \end{cases},$$

con

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - \xi) dx = 1, \quad \forall x_1, x_2$$

## 2.1 Delta de Dirac como distribución

Delta de Dirac fue introducida por Dirac en el siglo XX, su formalización matemática ocurre bastante después, hacia los años 50, por un joven de 35 años, Laurent Schwartz con la introducción de la teoría de distribuciones.

**Definición 19** Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega = (-\infty, \infty)$ . La aplicación **Delta de Dirac** es simplemente la distribución definida por

$$\begin{aligned} \delta_a : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \delta_a(\varphi) = \varphi(a) \end{aligned}$$

**Observación 8** Geométricamente, Delta de Dirac  $\delta_a$ , es la distribución que asocia, a cada curva  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  a la segunda coordenada del punto  $(a, \varphi)$  de la curva. Nótese que el Delta de Dirac no considera los puntos con abscisa  $x \neq a$ .

Sabemos que la distribución Delta de Dirac no es una función en el sentido del cálculo, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)\varphi(x)dx := \delta_a(\varphi) = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad a \in \mathbb{R}.$$

- La función  $\delta_a$ , es llamada función generalizada. La integral anterior no es una integral en el sentido usual, es llamada de dualidad.
- Note que por la definición anterior, el resultado de la integral es simplemente el único valor puntual que considera el Delta de Dirac, es decir, la imagen en el punto  $a$  de la función.

Esto se puede extender a funciones continuas y se tiene

$$f \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)f(x)dx := f(a), \quad a \in \mathbb{R}$$

## 2.2 Caracterización la función Delta de Dirac

El objetivo de esta sección es caracterizar la función Delta de Dirac, a través de la derivada de una función discontinua.

### 2.2.1 La Función Valor Absoluto

Nuestro punto de partida será la función  $f(x) = |x|$ . Sabemos que ella es una función diferenciable en el conjunto  $] -1, 0[ \cup ] 0, 1[$ . Pasaremos a calcular su derivada distribucional  $\frac{d}{dx}|x|$ .

Por definición,

$$\int_{-1}^1 f(x)\varphi'(x) dx = \int_{-1}^1 |x|\varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 x\varphi'(x) dx + \int_0^1 x\varphi'(x) dx.$$

Integrando por partes

$$- \int_{-1}^0 x\varphi'(x) dx + \int_0^1 x\varphi'(x) dx = \varphi(-1) - \varphi(1) + \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Como la función  $\varphi$  se anula en los extremos del intervalo  $] -1, 1[$  obtenemos que

$$- \int_{-1}^0 x\varphi'(x) dx + \int_0^1 x\varphi'(x) dx = \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Considerando

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

concluimos que

$$\int_{-1}^1 f(x)\varphi'(x) dx = \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx = - \int_{-1}^1 \text{sign}(x)\varphi(x) dx.$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}|x| = \text{sign}(x).$$

### 2.2.2 La Función de Heaviside

Consideremos la función de Heaviside, esto es una función

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

La función es discontinua en el punto cero e infinitamente diferenciable en el conjunto  $] - 1, 0[ \cup ] 0, 1[$ . Así tenemos que

$$\frac{d}{dx} H(x) = 0, \quad \text{en } ] - 1, 0[ \cup ] 0, 1[,$$

es una función  $\delta(x)$ .

Calculemos la derivada distribucional. Para esto tomamos  $\varphi \in \mathcal{D}(] - 1, 1[)$  por lo tanto

$$\left\langle \frac{d}{dx} H, \varphi \right\rangle = - \int_{-1}^1 H(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \varphi'(x) dx = -\varphi(1) + \varphi(0),$$

como la función  $\varphi$  se anula en los extremos del intervalo  $] - 1, 1[$ , obtenemos que

$$\left\langle \frac{d}{dx} H, \varphi \right\rangle = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi \rangle,$$

de donde concluimos que la derivada distribucional de  $H$  es la función Delta de Dirac.

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x), \quad \text{en el sentido distribucional.}$$

Por tanto la función Delta de Dirac aparece cuando derivamos funciones discontinuas.

De forma análoga concluimos que

$$\frac{d}{dx} \text{sign}(x) = 2\delta(x), \quad \text{en el sentido distribucional.}$$

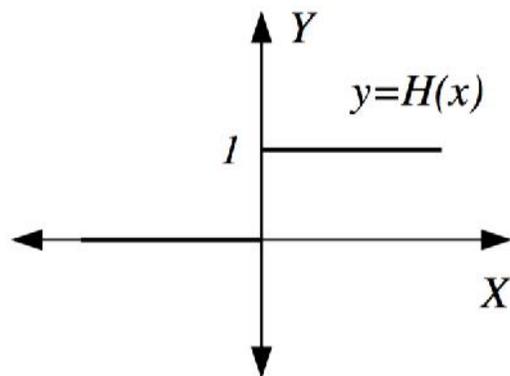


Figura 2.1: Gráfica de la función Heaviside.

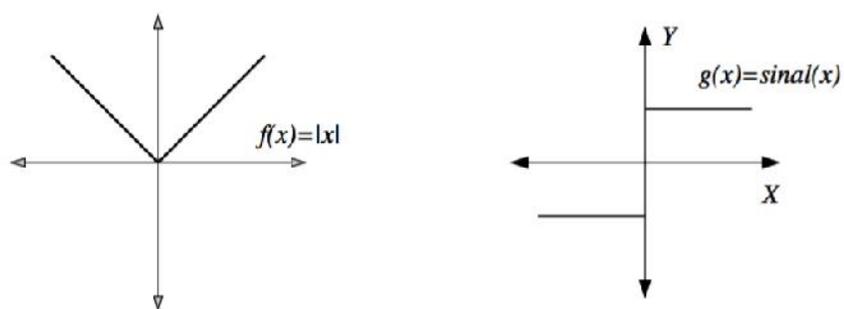


Figura 2.2: Gráfica de la función valor absoluto y la función signo.



# Capítulo 3

## Disipación puntual para la ecuación de onda

El objetivo de este capítulo es mostrar al lector la ecuación de onda con una sola disipación puntual, usando la teoría de semigrupos. Antes de ir a la resolución de la ecuación con disipación, veremos una pequeña introducción para mostrar la solución de una ecuación diferencial y la equivalencia de sistemas extrayendo el punto de discontinuidad.

### 3.1 Solución de una ecuación diferencial

De acuerdo a lo que vimos en el capítulo anterior tenemos que la función  $v = |x| - 1$  satisface

$$v_{xx} = 2\delta(x), \quad x \in ]-1, 1[. \quad (3.1)$$

$$v(-1) = v(1) = 0. \quad (3.2)$$

Observe que  $v_x(x) = \text{sign}(x)$ . De esta forma tenemos que  $v_x(0^-) = -1$ ,  $v_x(0^+) = 1$ . Así tenemos

$$v_x(0^-) - v_x(0^+) = 2.$$

Si definimos la solución sobre el intervalo  $I = ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ , tendremos que  $v$  verifica

$$v_{xx} = 0, \quad x \in I = ]-1, 0[ \cup ]0, 1[ \quad (3.3)$$

$$v(-1) = v(1) = 0. \quad (3.4)$$

$$v(0^-) = v(0^+), \quad v_x(0^-) - v_x(0^+) = 2. \quad (3.5)$$

Recíprocamente tenemos que

$$av_{xx} + bv_x + cv = \alpha\delta(x), \quad x \in ]-1, 1[. \quad (3.6)$$

$$v(-1) = v(1) = 0, \quad (3.7)$$

lo cual es equivalente a

$$av_{xx} + bv_x + cv = 0, \quad x \in I = ]-1, 0[ \cup ]0, 1[ \quad (3.8)$$

$$v(-1) = v(1) = 0. \quad (3.9)$$

$$v(0^-) = v(0^+), \quad v_x(0^-) - v_x(0^+) = \alpha. \quad (3.10)$$

**Lema 6** *El problema (3.6)–(3.7) es equivalente al problema (3.8)–(3.10).*

DEMOSTRACIÓN.- Como  $v_{xx} = 0$  se anula en  $] - 1, 0[ \cup ] 0, 1[$  tenemos que

$$v_x(x) = c_1, \quad \text{en } ] - 1, 0[$$

$$v_x(x) = c_2, \quad \text{en } ] 0, 1[.$$

Integrando una vez mas obtenemos

$$v(x) = c_1x + b_1, \quad \text{en } ] - 1, 0[$$

$$v(x) = c_2x + b_2, \quad \text{en } ] 0, 1[.$$

De la condición de contorno (3.9) tenemos

$$v(-1) = -c_1 + b_1 = 0, \quad v(1) = c_2 + b_2 = 0.$$

Usando la condición (3.10) obtenemos que

$$v(0^+) = b_1 = v(0^-) = b_2.$$

De esta forma tenemos que  $v$  satisface

$$\begin{aligned} v(x) &= b_1x + b_1, & \text{en } ]-1, 0[ \\ v(x) &= -b_1x - b_1, & \text{en } ]0, 1[ \end{aligned}$$

Finalmente, usando la segunda condición en (3.10) tenemos

$$v_x(0^-) - v_x(0^+) = -2, \quad \Rightarrow \quad -2b_1 = -2.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} v(x) &= x + 1, & \text{en } ]-1, 0[ \\ v(x) &= -x - 1, & \text{en } ]0, 1[ \end{aligned}$$

de donde obtenemos que  $v(x) = |x| - 1$ .

Usando los mismos argumentos podemos afirmar que el problema (3.6)–(3.7) es equivalente al problema (3.8)–(3.10).

## 3.2 Resolución de la ecuación de onda con disipación puntual

En este capítulo estudiaremos la ecuación de onda con una disipación puntual. El objetivo de este capítulo es mostrar la buena colocación del modelo, esto es mostrar la existencia, unicidad y regularidad de la ecuación de ondas con disipación puntual. Para tal efecto consideremos la ecuación

$$\rho u_{tt} - \alpha u_{xx} + \gamma \delta(x - \xi) u_t(\xi, t) = 0, \quad \text{en } ]0, l[ \times ]0, \infty[ \quad (3.11)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \text{en } ]0, \infty[ \quad (3.12)$$

con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \text{en } ]0, l[. \quad (3.13)$$

Este problema en su forma original no es posible de tratar en el contexto de semigrupos. Es necesario introducir un problema equivalente donde no aparezca de forma implícita el Delta de Dirac. De esta forma consideramos el problema

$$\rho u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0, \quad \text{en } ]0, \xi[ \cup ]\xi, l[ \times ]0, \infty[ \quad (3.14)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (3.15)$$

y agregamos la condición

$$\alpha[u_x(\xi^-) - u_x(\xi^+)] = -\gamma u_t(\xi, t). \quad (3.16)$$

Aquí la condición inicial es la misma que en (3.13). Lo que hemos hecho es apenas retirar el punto  $\xi$  de la ecuación donde se concentra el Delta de Dirac y hemos acrecentado la discontinuidad de la derivada de primer orden en el punto  $\xi$ .

Consideramos el conjunto disconexo  $I = ]0, \xi[ \cup ]\xi, l[$  y recordamos la definición del delta de Dirac

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} \infty, & \text{sí } x = \xi \\ 0, & \text{sí } x \neq \xi \end{cases}$$

Antes de probar la equivalencia entre ambos sistemas, mostraremos un lema que trata sobre la integración por partes cuando la función es discontinua en un punto  $\xi$ . Este resultado se usará en repetidas ocasiones.

**Lema 7** *Sea  $\varphi$  una función diferenciable excepto en el punto  $\xi$  donde es discontinua, se tiene*

$$\int_0^l \varphi_x w = w(\xi)(\varphi(\xi^-) - \varphi(\xi^+)) - \int_0^l \varphi w_x, \quad \forall w \in C_0^\infty(0, l).$$

DEMOSTRACIÓN.- Sea  $w \in C_0^\infty(0, l)$ . Integrando sobre  $]0; \xi^-[\cup]\xi^+, l[$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^l \varphi_x w &= \int_0^{\xi^-} \varphi_x w + \int_{\xi^+}^l \varphi_x w \\
&= \varphi w \Big|_0^{\xi^-} - \int_0^{\xi^-} \varphi w_x + \varphi w \Big|_{\xi^+}^l - \int_{\xi^+}^l \varphi w_x \\
&= \varphi(\xi^-)w(\xi^-) - \int_0^{\xi^-} \varphi w_x - \varphi(\xi^+)w(\xi^+) - \int_{\xi^+}^l \varphi_x w_x \\
&= \varphi(\xi^-)w(\xi^-) - \varphi(\xi^+)w(\xi^+) - \int_0^l \varphi w_x, \text{ utilizando } w(\xi^+) = w(\xi^-) \\
&= w(\xi)(\varphi(\xi^-) - \varphi(\xi^+)) - \int_0^l \varphi w_x.
\end{aligned}$$

A continuación se muestra un teorema que prueba la equivalencia de los problemas (3.11)–(3.13) y (3.14)–(3.16). La idea de la demostración es probar que los dos problemas tienen la misma formulación variacional. Iniciamos probando que la solución de (3.11)–(3.13) es también solución de la ecuación del problema (3.14)–(3.16).

**Teorema 11** *El sistema (3.11)–(3.13) es equivalente al sistema (3.14)–(3.16).*

DEMOSTRACIÓN.-  $\Rightarrow$ ] Suponemos que  $u$  es la solución del sistema (3.11)–(3.13), cuya formulación variacional en una dimensión, está dada por

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho_1 u_t w dx + \alpha \int_0^l u_x w_x dx + \gamma u_t(\xi, t) w(\xi) = 0, \quad (3.17)$$

para todo  $w \in \mathcal{D}(0, l)$ . Recordemos que  $I = ]0, \xi[\cup]\xi, l[$  por lo tanto  $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{D}(]0, l[)$ .

Luego, tomando  $w \in \mathcal{D}(I)$

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho_1 u_t w dx + \alpha \int_0^l u_x w_x dx = 0,$$

luego obtenemos

$$\rho_1 u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0.$$

Integrando la expresión anterior sobre  $I$ , resulta

$$\alpha u_x w \Big|_0^\xi + \alpha u_x w \Big|_\xi^l + \gamma u_t(\xi, t) w(\xi) = 0.$$

Usando las condiciones de contorno, tenemos

$$\alpha u_x(\xi^-) - \alpha u_x(\xi^+) = -\gamma u_t(\xi, t).$$

Como  $u$  es continua, entonces

$$u(\xi^-) = u(\xi^+).$$

Se puede observar que mediante una serie de pasos justificados, hemos llegado al sistema de ecuaciones (3.14)–(3.16), así concluimos que la solución de (3.11)–(3.13) es solución de (3.14)–(3.16).

⇐] Recíprocamente, supongamos que  $u$  es solución de (3.14)–(3.16).

Multiplicamos a (3.14)–(3.16) por  $w \in \mathcal{D}(0, l)$  e integramos sobre  $]0, l[$  obteniendo

$$\int_0^l \rho_1 u_{tt} w dx + u_x w_x dx + \gamma u_t(\xi, t) w(\xi) = 0, \quad (3.18)$$

puesto que  $w(\xi)\alpha[u_x(\xi^-) - u_x(\xi^+)] = -\gamma u_t(\xi, t)w(\xi)$ .

Observamos que la ecuación (3.18) es la formulación variacional de (3.14)–(3.16) lo que verifica que  $u$  es solución de (3.11)–(3.12)

**Teorema 12** *La energía del sistema del sistema (3.14)–(3.16) está dada por*

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^l \rho |u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 dx \right],$$

y satisface

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma |u_t(\xi, t)|^2.$$

DEMOSTRACIÓN.- Multiplicando por  $u_t$  a la ecuación (3.14) e integrando sobre  $I$ , se tiene

$$\int_0^l \rho u_{tt} u_t - \alpha \int_0^l u_{xx} u_t = 0.$$

Integrando sobre  $]0, \xi[$  y luego sobre  $]\xi, l[$

$$\frac{d}{2dt}\rho \int_0^\xi |u_t|^2 dx - \alpha \left[ u_x u_t \Big|_0^\xi - \int_0^\xi u_x u_{xt} dx \right]. \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{2dt}\rho \int_\xi^l |u_t|^2 dx - \alpha \left[ u_x u_t \Big|_\xi^l - \int_\xi^l u_x u_{xt} dx \right]. \quad (3.20)$$

Sumando (3.19)–(3.20) tenemos

$$\frac{d}{2dt}\rho \int_0^l |u_t|^2 dx - \alpha \left[ u_x u_t \Big|_0^\xi + u_x u_t \Big|_\xi^l - \int_0^l u_x u_{xt} dx \right] = 0,$$

como  $u$  es continua  $u_t(\xi^-) = u_t(\xi^+)$  y  $u(0) = u(l) = 0$ , tenemos

$$\frac{d}{2dt} \int_0^l (\rho |u_t|^2 - \alpha |u_x|^2) dx - u_t(\xi)(u_x(\xi^-) - u_x(\xi^+)) = 0,$$

usando (3.16) se tiene

$$\frac{d}{2dt} E(t) = -\gamma |u_t(\xi, t)|^2.$$

Así la energía del sistema es  $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho |u_t|^2 dx + \alpha |u_x|^2 dx$ .

### 3.3 Buena colocación del problema

Nuestro punto de partida es introducir el espacio de fase  $\mathcal{H} = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)$  dotado del producto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_0^l \alpha u_x \bar{u}_{1x} dx + \int_0^l \rho v \bar{v}_1 dx,$$

el cual induce la norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^l \rho |v|^2 + \alpha |u_x|^2 dx, \quad \forall U = (u, v)^t \in \mathcal{H}.$$

Haciendo  $v = u_t$ , tenemos que el problema de valor inicial (3.14)–(3.16) puede ser

reducido al siguiente problema de valor inicial abstracto para una ecuación de evolución de primer orden

$$\frac{d}{dt}U(t) = AU(t), \quad U(0) = U_0, \quad t > 0, \quad (3.21)$$

donde  $U = (u, v)^t$  y  $U_0 = (u_0, u_1)^t$ , esto es

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\alpha}{\rho} u_{xx} \end{pmatrix}$$

y el operador lineal  $A: \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$  está dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ (\cdot)_{xx} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, el dominio del operador  $A$  es

$$\mathcal{D}(A) = \{(u, v) \in \mathcal{H}: u \in H^2(I), v \in H_0^1(0, l), \alpha u_x(\xi^-) - \alpha u_x(\xi^+) = -\gamma v(\xi)\}$$

**Teorema 13** *Sea  $\mathcal{H} = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)$  un espacio de Hilbert. El operador  $A$  es disipativo si*

$$\operatorname{Re}\langle AU, U \rangle_H = -\gamma |u_t(\xi, t)|^2 \leq 0, \quad \forall U \in D(A).$$

DEMOSTRACIÓN.-

$$\langle AU, U \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \frac{\alpha}{\rho} u_{xx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \quad (3.22)$$

$$\langle AU, U \rangle = \alpha \left( u_x \bar{v} - \int_0^l u_{xx} \bar{v} \right) + \alpha \int_0^l v_x \bar{u}_x dx.$$

Integrando la ecuación (4.8) sobre  $I = ]0, \xi[ \cup ]\xi, l[$ , y utilizando integración por partes, tenemos

$$\alpha \left( u_x \bar{v} \Big|_0^\xi - \int_0^\xi u_{xx} \bar{v}_x \right) + \alpha \int_0^\xi v_x \bar{u}_x dx, \quad \text{en } ]0, \xi[ \times ]0, \infty[ \quad (3.23)$$

$$\alpha \left( u_x \bar{v} \Big|_\xi^l - \int_\xi^l u_{xx} \bar{v}_x \right) + \alpha \int_\xi^l v_x \bar{u}_x dx, \quad \text{en } ]\xi, l[ \times ]0, \infty[. \quad (3.24)$$

Sumando (3.23)–(3.24) evaluando y agrupando términos, tenemos

$$\langle AU, U \rangle = \alpha[(u_x(\xi^-)\bar{v}(\xi^-) - u_x(0)\bar{v}(0)) - (u_x(\xi^+)\bar{v}(\xi^+) - u_x(l)\bar{v}(l))] + \alpha \int_0^l (u_x\bar{v}_x - v_x\bar{u}_x) dx$$

$$\langle AU, U \rangle = \alpha[u_x(\xi^-)\bar{v}(\xi^-) - u_x(\xi^+)\bar{v}(\xi^+)] + \alpha \int_0^l (u_x\bar{v}_x - v_x\bar{u}_x) dx.$$

Usando  $u_t(\xi^+) = u_t(\xi^-)$ , (3.15)–(3.16) y tomando la parte real, tenemos

$$\langle AU, U \rangle = -\gamma|u_t(\xi, t)|^2 + 2i\text{Im}(u_x\bar{v}_x),$$

luego, tomando la parte real

$$\text{Re} \langle AU, U \rangle = -\gamma|u_t(\xi, t)|^2 \leq 0, \quad \forall U \in \mathcal{H}.$$

**Teorema 14** *A es el generador infinitesimal de un semigrupo  $T(t)$  de contracciones de clase  $C_0$ .*

DEMOSTRACIÓN.- Dado que  $A$  cumple las hipótesis del teorema 7, basta probar que  $0 \in \rho(A)$ , esto es, dado  $F = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ , existe un único  $U \in \mathcal{D}(A)$  tal que  $-AU = F$ .

$$-v = f_1 \quad \text{en } H_0^1(0, l) \tag{3.25}$$

$$-\alpha u_{xx} = f_2 \quad \text{en } L^2(0, l) \tag{3.26}$$

Para esto consideremos la siguiente formulación variacional de (3.25)–(3.26)

$$\int_0^l \alpha u_x w_x dx = \int_0^l f_2 w dx - \gamma \langle v \delta(x - \xi), w \rangle.$$

Como  $v = f_1$  la ecuación anterior puede ser escrita como

$$\int_0^l \alpha u_x w_x dx = \int_0^l f_2 w dx - \gamma \langle f_1 \delta(x - \xi), w \rangle.$$

Notemos que  $f_2 + \gamma f_1 \delta(x - \xi) \in H^{-1}$ . Por otro lado la bilineal está definida por

$$a(u, w) = \int_0^l \alpha u_x w_x dx,$$

la cual verifica todas las hipótesis del Lema de Lax-Milgran en el espacio  $H_0^1(0, l)$ . Entonces podemos probar que existe una única solución  $u \in H_0^1(0, l)$  que verifica,

$$a(u, w) = \int_0^l f_2 w dx - \gamma \langle f_1 \delta(x - \xi), w \rangle.$$

Usando nuestra fórmula de integración por partes generalizada, dada en el lema 7 encontramos que

$$\alpha[u_x(\xi^-) - u_x(\xi^+)]w(\xi) - \int_0^l \alpha u_{xx} w dx = \int_0^l f_2 w dx - \gamma \langle f_1 \delta(x - \xi), w \rangle.$$

Tomando  $w \in C_0^\infty(I)$  encontramos que

$$- \int_0^l \alpha u_{xx} w dx = \int_0^l f_2 w dx \quad \forall w \in C_0^\infty(I),$$

de donde sigue que  $u$  verifica  $\alpha u_{xx} = f_2$  en  $I$ . Finalmente tomando  $w \in C_0^\infty(0, l)$  encontramos que

$$\alpha[u_x(\xi^-) - u_x(\xi^+)]w(\xi) = -\gamma \langle f_1 \delta(x - \xi), w \rangle,$$

de donde sigue la condición

$$\alpha[u_x(\xi^-) - u_x(\xi^+)] = -\gamma f_1(\xi).$$

Por regularidad elíptica, tenemos que el problema (3.25)–(3.26) tiene única solución para  $u \in H^2(I)$ . Así, se concluye la prueba.

A continuación mostraremos que el semigrupo que define la ecuación de ondas con disipación puntual es fuertemente estable.

**Teorema 15 (Estabilidad fuerte)**

Sea  $T(t) = e^{At}$  un semigrupo en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \Leftrightarrow T(t)w \rightarrow 0, \quad \forall w \in \mathcal{H}$$

En particular

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho |u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 dx,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.- Demostraremos que no existen autovalores imaginarios puros en el espectro de  $A$ , es decir  $i\mathbb{R} \cap \sigma(A) = \emptyset$ . Razonando por contradicción, supongamos que existe  $w \neq 0$  tal que si existe autovalores imaginarios, entonces

$$i\lambda w = Aw.$$

Si aplicamos el producto interno a la ecuación anterior con  $\bar{w}$  tenemos

$$i\lambda \|w\|^2 - \langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

tomando la parte real, tenemos

$$\operatorname{Re} \langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Esto implica que  $v(\xi) = 0$  y, por tanto, que  $u_x(\xi^+) = u_x(\xi^-)$ . Así tenemos que  $u$  verifica

$$i\lambda u - v = 0, \quad \text{en } ]0, l[ \quad (3.27)$$

$$i\lambda \rho v - \alpha u_{xx} = 0, \quad \text{en } ]0, l[ \quad (3.28)$$

$$u(0) = u(l) = 0,$$

con  $u_x \in \mathcal{C}(0, l)$ . Puesto que por la disipación se tiene  $v(\xi) = 0$ . Luego, despejando  $v$  de

(4.9) y reemplazando en (4.10) obtenemos

$$-u_{xx} = \frac{\lambda^2}{\alpha} u \quad (3.29)$$

$$u(0) = u(l) = 0.$$

Usando el método de coeficientes constantes, tenemos que la solución  $u$  de (3.29) es de la forma

$$u(x) = C \operatorname{sen} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} x + D \operatorname{cos} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} x$$

Verificando las condiciones de contorno, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= u(0) = D, \\ 0 &= u(l) = C \operatorname{sen} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} l, \end{aligned}$$

luego

$$C \operatorname{sen} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} l = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{a}} l = \kappa \pi, \text{ con } \kappa \in \mathbb{Z},$$

de aquí tenemos que  $\lambda = \frac{\kappa \sqrt{a} \pi}{l}$ , son todos los autovalores.

A parte debemos verificar que  $u(\xi) = 0$ , entonces

$$\operatorname{sen} \frac{\kappa \pi \xi}{l} = 0 \Leftrightarrow \frac{\kappa \pi \xi}{l} = j \pi, \quad j \in \mathbb{Z},$$

de donde se obtiene

$$\xi = \frac{j}{\kappa} l.$$

Cuando  $\xi \in l\mathbb{Q}$  existen autovalores imaginarios no nulos. Pero como no queremos autovalores imaginarios no nulos, debemos hacer que  $\xi \notin l\mathbb{Q}$ , en ese caso  $C$  debe ser cero, pero esto hace que  $w^t = (0, 0)$ , lo cual contradice a la hipótesis tomada con  $w \neq \vec{0}$ .

Por lo que podemos concluir que el sistema va para cero, si  $\xi$  no es múltiplo racional de  $l$ .

# Capítulo 4

## Ecuación de onda para “ $n$ ” disipaciones puntuales

### 4.1 Resolución de la ecuación de onda para $n$ disipaciones puntuales

Ahora veremos el caso cuando la ecuación de onda tiene “ $n$ ” disipaciones puntuales. Mostraremos que agregar mas mecanismos disipativos no mejora necesariamente el decaimiento de la energía. Nuevamente aquí esto dependerá de la posición que los mecanismos disipativos. Consideramos la siguiente ecuación de onda

$$\rho u_{tt} - \alpha u_{xx} + \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta(x - \xi_i) u_t(\xi_i, t) = 0, \quad \text{en } ]0, l[ \times ]0, \infty[ \quad (4.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \text{en } ]0, \infty[ \quad (4.2)$$

esto unido a las condiciones iniciales (3.13). Note que el modelo anterior es equivalente al siguiente sistema

$$\rho u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0, \quad \text{en } I \times ]0, \infty[ \quad (4.3)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \text{en } ]0, \infty[ \quad (4.4)$$

$$\alpha u(\xi_i^-, t) - \alpha u(\xi_i^+, t) = -\gamma_i u_t(\xi_i, t), \quad (4.5)$$

donde

$$I = ]0, \xi_1[ \cup ]\xi_1, \xi_2[ \cup ]\xi_2, \xi_3[ \cup \dots \cup ]\xi_n, l[.$$

En lo que sigue mostramos la equivalencia de ambos sistemas

**Teorema 16** *El sistema (4.1)–(4.2) es equivalente al sistema (4.3)–(4.5)*

DEMOSTRACIÓN.-

⇒] Multiplicamos a la ecuación (4.1) por  $w \in \mathcal{D}(0, l)$  e integramos sobre  $]0, l[$  obteniendo

$$\begin{aligned} \rho \int_0^l u_{tt} w - \alpha \int_0^l u_{xx} w + \gamma_i \int_0^l \sum_{i=1}^n \delta_i(x - \xi_i) u_t(\xi_i, t) w &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_0^l \rho u_t w dx - \left[ \alpha u_x w \Big|_0^l - \alpha \int_0^l u_x w_x \right] + \gamma_i \int_0^l \sum_{i=1}^n \delta_i(x - \xi_i) u_t(\xi_i, t) w &= 0 \end{aligned}$$

Observamos que  $\alpha u_x w \Big|_0^l = 0$  pues  $w \in C_0^\infty(\Omega)$ , luego

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho u_t w dx + \alpha \int_0^l u_x w_x + \gamma_i \int_0^l \sum_{i=1}^n \delta_i(x - \xi_i) u_t(\xi_i, t) w = 0, \quad \forall w \in \mathcal{D}(0, l)$$

Recordar que  $I = ]0, \xi_1[ \cup ]\xi_1, \xi_2[ \cup ]\xi_2, \xi_3[ \cup \dots \cup ]\xi_n, l[$ . por lo que  $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{D}(0, l)$ .

Luego tomando  $w \in \mathcal{D}(I)$  tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho u_t w dx + \alpha \int_0^l u_x w_x dx = 0, \quad (4.6)$$

cuya ecuación general es  $\rho u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0$

En efecto, se tiene (4.6) escrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \rho \int_0^l u_{tt} w dx + \alpha \int_0^l u_x w_x dx &= 0, \\ \rho \int_0^l u_{tt} w dx + \alpha [u_x w]_0^l - \int_0^l u_{xx} w dx &= 0, \\ \rho \int_0^l u_{tt} w dx + \alpha \int_0^l u_{xx} w dx &= 0 \end{aligned}$$

La cual es la formulación variacional del sistema de ecuaciones (4.3)–(4.5).

Es necesario mostrar la condición de transmisión para verificar la equivalencia, cuya condición se encontrará resolviendo la ecuación que contiene a  $u_x$ , dado que ésta es discontinua, integramos sobre  $I = ]0, \xi_1[ \cup ]\xi_1, \xi_2[ \cup ]\xi_2, \xi_3[ \cup \dots \cup ]\xi_n, l[$ .

$$\alpha u_{xx} w = \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta(\xi_i, t) w.$$

$\Leftrightarrow$  Por otro lado, tenemos la fórmula variacional de (4.3)–(4.5)

$$\rho \int_0^l u_{tt} w dx + \alpha \int_0^l u_x w_x dx + \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta(\xi_i, t) w(\xi_i) = 0 \quad (4.7)$$

debemos tener en cuenta que  $w$  es una función continua con soporte compacto, por lo que a consecuencia de (4.5) se tiene,  $\alpha w(\xi_i) [u_x(\xi_i^-) - u_x(\xi_i^+)] = -\gamma u_t(\xi_i, t) w(\xi_i)$ . Luego, (4.7) es la formulación variacional de (4.3)–(4.5), lo que verifica que  $u$  es solución de (4.1)–(4.2).

**Teorema 17** *La energía del sistema (4.3)–(4.5) está dada por*

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^l \rho |u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 dx \right],$$

y satisface

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\sum_{i=1}^n \gamma_i |u_t(\xi_i, t)|^2.$$

DEMOSTRACIÓN.- Multiplicando por  $u_t$  a la ecuación (4.3) e integrando sobre  $I = ]0, \xi_1[ \cup ]\xi_1, \xi_2[ \cup ]\xi_2, \xi_3[ \cup \dots \cup ]\xi_n, l[$ , se tiene

$$\frac{d}{2dt} \rho \int_0^{\xi_1} |u_t|^2 dx - \alpha \left[ u_x u_t \Big|_0^{\xi_1} - \int_0^{\xi_1} u_x u_{xt} dx \right] = 0.$$

$$\frac{d}{2dt} \rho \int_{\xi_1}^{\xi_2} |u_t|^2 dx - \alpha \left[ u_x u_t \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} u_x u_{xt} dx \right] = 0.$$

⋮

$$\frac{d}{2dt} \rho \int_{\xi_n}^l |u_t|^2 dx - \alpha \left[ u_x u_t \Big|_{\xi_n}^l - \int_{\xi_n}^l u_x u_{xt} dx \right] = 0.$$

Sumando las ecuaciones anteriores y evaluando, tenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^l (\rho |u_t|^2 + \alpha |u_x|^2) dx - \alpha [(u_x(\xi_1) u_t(\xi_1) - u_x(0) u_t(0)) \\ & \quad + (u_x(\xi_2) u_t(\xi_2) - u_x(\xi_1) u_t(\xi_1)) \\ & \quad \vdots \\ & \quad + (u_x(l) u_t(l) - u_x(\xi_n) u_t(\xi_n))] = 0. \end{aligned}$$

Dado que  $u$  es continua  $u_t(\xi^-) = u_t(\xi^+)$  y  $u(0) = u(l) = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{2dt} \int_0^l (\rho |u_t|^2 - \alpha |u_x|^2) dx - \alpha u_t(\xi_1) [(u_x(\xi_1^-) - u_x(\xi_1^+))] \\ & \quad + \alpha u_t(\xi_2) [(u_x(\xi_2^-) - u_x(\xi_2^+))] \\ & \quad \vdots \\ & \quad + \alpha u_t(\xi_2) [(u_x(\xi_2^-) - u_x(\xi_2^+))] = 0 \end{aligned}$$

Sumando se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{d}{2dt} \int_0^l (\rho |u_t|^2 - \alpha |u_x|^2) dx = \sum_{i=1}^n \alpha u_t(\xi_i) [u_x(\xi_i^-) - u_x(\xi_i^+)] \\ & \frac{d}{2dt} \int_0^l (\rho |u_t|^2 - \alpha |u_x|^2) dx = - \sum_{i=1}^n \gamma_i |u_t(\xi_i, t)|^2 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{d}{2dt} E(t) = -\gamma |u_t(\xi, t)|^2.$$

Así la energía del sistema es  $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho |u_t|^2 dx + \alpha |u_x|^2 dx$ .

## 4.2 Buena colocación del problema

Consideremos  $\mathcal{H} = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)$ , luego hacemos un cambio de variable para trabajar con el problema de Cauchy. Haciendo  $v = u_t$  tenemos

$$\frac{d}{dt}U(t) = AU(t), \quad U(0) = U_0, \quad \forall t > 0$$

Donde  $U = (u, v)^t$  y  $U_0 = (u_0, u_1)^t$  y el mismo operador  $A$  descrita en el capítulo anterior, más es preciso denotar el dominio de dicho operador

$$\mathcal{D}(A) = \{(u, v) \in \mathcal{H} : u \in H^2(I), v \in H_0^1(0, l), \alpha[u_x(\xi_i^-) - u_x(\xi_i^+)] = -\gamma_i v(\xi_i)\}$$

.

**Teorema 18** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert, el operador  $A$  es disipativo si*

$$\operatorname{Re}(AU, U)_H = -\sum_{i=1}^n \gamma_i |u_t(\xi_i, t)|^2 \leq 0, \quad \forall U \in D(A).$$

DEMOSTRACIÓN.-

$$\langle AU, U \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \frac{\alpha}{\rho} u_{xx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \quad (4.8)$$

$$\langle AU, U \rangle = \alpha \left( u_x \bar{v} - \int_0^l u_x \bar{v}_x \right) + \alpha \int_0^l v_x \bar{u}_x dx.$$

Integrando la ecuación (4.8) sobre  $I = ]0, \xi_1[ \cup ]\xi_1, \xi_2[ \cup ]\xi_2, \xi_3[ \cup \dots \cup ]\xi_n, l[$ , y utilizando integración por partes, tenemos

$$\langle AU, U \rangle = \alpha \left( u_x \bar{v} - \int_0^{\xi_1} u_x \bar{v}_x \right) + \alpha \int_0^{\xi_1} v_x \bar{u}_x dx.$$

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle &= \alpha \left( u_x \bar{v} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} u_x \bar{v}_x \right) + \alpha \int_{\xi_1}^{\xi_2} v_x \bar{u}_x dx. \\ &\quad \vdots \\ \langle AU, U \rangle &= \alpha \left( u_x \bar{v} - \int_{\xi_n}^l u_x \bar{v}_x \right) + \alpha \int_{\xi_n}^l v_x \bar{u}_x dx. \end{aligned}$$

Sumando los términos anteriores, evaluando y agrupando, tenemos

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle &= \alpha [(u_x(\xi_1^-) \bar{v}(\xi_1^-) - u_x(0) \bar{v}(0)) - (u_x(\xi_2^-) \bar{v}(\xi_2^-) - u_x(\xi_1^+) \bar{v}(\xi_1^+)) - \dots \\ &\quad - (u_x(l) \bar{v}(l) - u_x(\xi_n^+) \bar{v}(\xi_n^+))] + \alpha \int_0^l (u_x \bar{v}_x - v_x \bar{u}_x) dx \\ \langle AU, U \rangle &= \alpha [u_x(\xi_1^-) \bar{v}(\xi_1^-) - u_x(\xi_1^+) \bar{v}(\xi_1^+)] + \alpha [u_x(\xi_2^-) \bar{v}(\xi_2^-) - u_x(\xi_2^+) \bar{v}(\xi_2^+)] \\ &\quad + \dots + \alpha [u_x(\xi_n^-) \bar{v}(\xi_n^-) - u_x(\xi_n^+) \bar{v}(\xi_n^+)] - \alpha \int_0^l (u_x \bar{v}_x - v_x \bar{u}_x) dx. \end{aligned}$$

Usando  $u_t(\xi^+) = u_t(\xi^-)$ , (3.15)–(3.16) y tomando la parte real, tenemos

$$\langle AU, U \rangle = -\sum_{i=1}^n \gamma_i |u_t(\xi_i, t)|^2 + 2i \operatorname{Im}(u_x \bar{v}_x),$$

luego, tomando la parte real

$$\operatorname{Re} \langle AU, U \rangle = -\sum_{i=1}^n \gamma_i |u_t(\xi_i, t)|^2 \leq 0, \quad \forall U \in \mathcal{H}.$$

### 4.3 Estabilidad fuerte

**Corolario 1** Sea  $T(t) = e^{At}$  un semigrupo en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \Leftrightarrow T(t)x \rightarrow 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

En particular

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho |u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 dx$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$$

DEMOSTRACIÓN.-

Gracias al teorema 15, en el capítulo 3, podemos garantizar que el sistema es fuertemente estable, pues trabajamos con el mismo espacio de Hilbert, la misma energía, por ende el mismo producto interno y norma. Siguiendo los mismos argumentos hemos probado la estabilidad del sistema.

Es necesario además analizar la posición de los puntos estratégicos en los cuales la energía va para cero y para ello enunciamos el siguiente teorema.

**Teorema 19**  $i\mathbb{R} \subset \rho(A) \Leftrightarrow \exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\xi_{i_0} \notin l\mathbb{Q}$

**DEMOSTRACIÓN.-** Demostraremos que no existen autovalores imaginarios puros en el espectro de  $A$ , es decir  $i\mathbb{R} \cap \sigma(A) = \emptyset$ . Razonando por absurdo, supongamos que existe  $w \neq 0$  tal que si existe autovalores imaginarios, entonces

$$i\lambda w = Aw.$$

Si aplicamos el producto interno a la ecuación anterior con  $\bar{w}$  tenemos

$$i\lambda \|w\|^2 - \langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

tomando la parte real, tenemos

$$\operatorname{Re} \langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Esto implica que  $v(\xi_i) = 0$  y por tanto que  $u_x(\xi_i^+) = u_x(\xi_i^-)$ . Así tenemos que  $u$  verifica

$$i\lambda u - v = 0, \quad \text{en } ]0, l[ \quad (4.9)$$

$$i\lambda \rho v - \alpha u_{xx} = 0, \quad \text{en } ]0, l[ \quad (4.10)$$

$$u(0) = u(l) = 0,$$

con  $u_x \in \mathcal{C}(0, l)$ , puesto que por la disipación se tiene  $v(\xi_i) = 0$ . Luego, despejando  $v$  de (4.9) y reemplazando en (4.10) obtenemos

$$-u_{xx} = \frac{\lambda^2}{\alpha} u$$

$$u(0) = u(l) = 0. \quad (4.11)$$

Usando el método de coeficientes constantes, tenemos que la solución es de la forma

$$u(x) = C \operatorname{sen} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} x + D \operatorname{cos} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} x$$

Verificando las condiciones de contorno, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= u(0) = C, \\ 0 &= u(l) = D \operatorname{sen} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} l, \end{aligned}$$

luego

$$C \operatorname{sen} \frac{\lambda}{\sqrt{a}} l = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{a}} l = \kappa \pi, \text{ con } \kappa \in \mathbb{Z},$$

de aquí tenemos que  $\lambda = \frac{\kappa \sqrt{a} \pi}{l}$ , son todos los autovalores.

A parte debemos verificar que  $u(\xi_i) = 0$ , entonces

$$\operatorname{sen} \frac{\kappa \pi \xi_i}{l} = 0 \Leftrightarrow \frac{\kappa \pi \xi_i}{l} = j \pi, \quad j \in \mathbb{Z},$$

de donde se obtiene

$$\xi_i = \frac{j}{\kappa} l.$$

Cuando  $\xi_i \in l\mathbb{Q}$  existen autovalores imaginarios no nulos. Pero como no queremos autovalores imaginarios no nulos, debemos hacer que  $\xi_i \notin l\mathbb{Q}$ , en ese caso  $A$  debe ser cero, pero esto hace que  $w^t = (0, 0)$ , lo cual contradice a la hipótesis tomada con  $w \neq \vec{0}$ .

Por lo que podemos concluir que el sistema va para cero, si  $\xi_i$  no es múltiplo racional de  $l$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

El objetivo fundamental de la tesis es estudiar la ecuación de onda con disipación puntual (Delta de Dirac) para luego generalizarla con  $n$ -disipaciones puntuales, en el contexto de la teoría de semigrupos, lo cual nos ayuda a verificar la existencia y unicidad de las soluciones. Para demostrar la estabilidad fuerte introducimos el concepto de puntos estratégicos, que podemos resumirlo como siendo los puntos en donde aplicadas los mecanismos disipativos puntuales, producen la estabilidad fuerte. Es decir, si  $\xi$  es un punto estratégico entonces el sistema es fuertemente estable. Generalizamos este resultado para el caso de  $n$  disipaciones puntuales, y nuestro interés es saber donde deben ser aplicados estos mecanismos disipativos para mejorar la estabilidad fuerte. En otras palabras, el número de disipaciones puntuales es secundario en relación a la ubicación de los mismos, por lo que concluimos que si agregamos  $n$  disipaciones, lo importante es la posición de dichos puntos, más no la cantidad.



# Sugerencias

El presente trabajo, como se puede notar, es de gran interés no solo matemático, sino también para aquellos alumnos de ingenierías, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo, por ello se sugiere:

- a). Analizar las propiedades asintóticas, existen dos tipos, estabilización exponencial y estabilización polinomial. Para la estabilización exponencial existe el Teorema de Pruess [13], que caracterizan la estabilidad exponencial de semigrupos sobre espacios de Hilbert, mientras que para la estabilidad polinomial existe un reciente teorema de Borichev y Tomilov [19], que caracteriza la estabilidad polinomial de semigrupos en espacios de Banach.
- b). Analizar los experimentos numéricos, usando el método de diferencias finitas o de elementos finitos.
- c). Analizar tipos de vigas curva, modelada por el sistema de Bresse con disipaciones puntuales.



# Bibliografia

- [1] Ammar Khodja, F., Benabdallah, A., Muñoz Rivera, J.E., Racke, R.; Energy decay for Timoshenko systems of memory type. *J. Differential Equations*, 194, 82-115, (2003).
- [2] K. Ammari, A. Henrot, M. Tucsnak; Asymptotic behaviour of the solutions and optimal location of the actuator for the stabilization of a string, *Asymptotical Analysis Vol. 28, (1), pages 215- 240, (2001)*. MathReview
- [3] ADAMS, R. A., Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.
- [4] Muñoz-Rivera, J. E. Distribuições e Equações Diferenciais Parciais. LNCC, Petrópolis, Brasil, 2004.
- [5] Muñoz-Rivera, J. E. Estabilização de Semigrupos e Aplicações. LNCC, Petrópolis, Brasil, 2007.
- [6] Ammari, Kais and Liu, Zhuangyi and Tucsnak, Marius; Decay rates for a beam with pointwise force and moment feedback, *Mathematics of Control, Signals, and Systems Vol. 15, (3), pages 229- 255, (2002)*. doi:10.1007/s004980200009
- [7] Negreanu, Mihaela and Zuazua, Enrique; Discrete Ingham inequalities and applications, *SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 44, (1), pages 412- 448, (2003)*. doi:10.1137/050630015
- [8] M. Tucsnak; Regularity and exact controllability for a beam with piezoelectric actuator, *SIAM Journal of Control and Optimization Vol. 34, (3), pages 922- 930, (1996)*. MathReview

- [9] K. Ammari, M. Tucsnak; Stabilization of Bernoulli-Euler beams by means of a pointwise feedback force, *SIAM Journal of Control and Optimization* Vol. 39, (4), pages 1160-1181, (2000).
- [10] M. Renardy, On the type of certain  $C_0$ -semigroups, *Commun. in Partial Differential Equations* 18(7 e 8), 1299 - 1307 (1993).
- [11] M. Renardy, On the linear stability of hyperbolic PDEs and viscoelastic flows, *Zangew Math Phys* 45, 854 - 865 (1994).
- [12] Lagnese, J. E., Lions, J. L.; Modelling Analysis and Control of Thin Plates. *Recherches en Mathématique Appliquées*, Masson, Paris, 6, (1988).
- [13] Pazy, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1983.
- [14] Mindlin, R. D.; Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 18, 31-38, (1951).
- [15] J. Pruss; On the spectrum of  $C_0$ -semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 284(2), 847-857, (1984).
- [16] Rivera, J. E. Muñoz and Racke, R.; Global stability for damped Timoshenko systems. *Discr. Cont. Dyn. Sys. B*, 9, 1625-1639, (2003).
- [17] Timoshenko, S. P.; On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 6, 744-746, (1921).
- [18] Wright, Joseph P.; Numerical stability of a variable time step explicit method for Timoshenko and Mindlin type structures. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 81-86, (1998).
- [19] A. Borichev and Y. Tomilov; Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups, *Mathematische Annalen* Vol. 347, (2), pages 455- 478, (2009).  
doi:10.1007/s00208-009-0439-0

- [20] M. Tucsnak; Boundary stabilization for the stretched string equation, *Differential and Integral Equations Vol. 6, (4), pages 925- 935, (1993)*.
- [21] Komornik, Vilmos and Rao, Bopeng; Boundary stabilization of compactly coupled wave equations, *Asymptotic Analysis Vol. 14, (4), pages 339- 359, (1997)*.
- [22] *B. A. H. Abbas e J. Thomas*, The second frequency spectrum of Timoshenko beams, *Journal of Sound and Vibration 51, 123-137 (1977)*.
- [23] Brezis, H. Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones. Alianza Editorial, Madrid, 1983.
- [24] Liu, Kangsheng and Liu, Zhuangyi; Boundary stabilization of nonhomogeneous beam by the frequency domain multiplier method, *Computational & Applied Mathematics Vol. 21, (1), pages 299- 313, (2002)*.
- [25] *H. Reismann e P. S. Pawlik*, Elasticity - Theory and Applications, *John Wiley and Sons* , (1980).
- [26] *S. P. Timoshenko*, History of Strength of Materials, *Dover Publications, Inc.*, New York, (1953).
- [27] Charles, J.K. Batty Duyckaert and T. D.; Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces. *J.evol.equ*, 8, 765-780, (2008).
- [28] Komornik, Vilmos and Zuazua, Enrike; A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics Vol. 69, (1), pages 33- 54, (1990)*.
- [29] *R. W. Clough e J. Penzien*, Dinamics of Structures, *McGraw-Hill* (1975).
- [30] K. Ono; A stretched string equation with a boundary dissipation, *Kyushu J. of Math. Vol. 28, (2), pages 265- 281, (1994)*.