



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS

**B-splines cúbicos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias
de Cauchy-Euler**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

AUTOR:

Bach. Mat. Julio César Acosta Chozo

ASESOR:

Dra. Diana Mercedes Castro Cárdenas.

LAMBAYEQUE-PERÚ

2023

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**B-splines cúbicos para la solución de ecuaciones diferenciales
ordinarias de Cauchy-Euler**

Autor:

Bach. Mat. Julio César Acosta Chozo



Asesor:

Dra. Diana Mercedes Castro Cárdenas.



LAMBAYEQUE - PERÚ

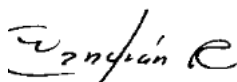
2023

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

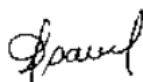
B-splines cúbicos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias
de Cauchy-Euler

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Sustentado y aprobado ante los siguientes miembros del jurado:



Dr. Leandro Agapito Aznarán Castillo.
Presidente



Dr. Dolores Sánchez García.
Secretario



Dr. Walter Arriaga Delgado.
Vocal

LAMBAYEQUE - PERÚ

2023

ANEXO 01

CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, Diana Mercedes Castro Cárdenas, usuario revisor del documento titulado **B-SPLINES CÚBICOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE CAUCHY-EULER**. Cuyo autor es, Bach. Julio César Acosta Chozo, Identificado con Documento de Identidad 46153922; declaro que la evaluación realizada por el Programa Informático ha arrojado un porcentaje de similitud de 8%, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 26 de diciembre del 2023



Asesor

(Precisar si es docente, asesor, docente investigador, administrativo u otro)

Se adjunta:

*Resumen de Reporte automatizado de similitudes

*Recibo Digital

Informe de Investigación Final

INFORME DE ORIGINALIDAD

8%

INDICE DE SIMILITUD

7%

FUENTES DE INTERNET

8%

PUBLICACIONES

5%

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

archive.org

Fuente de Internet

1%

2

Boehm, Wolfgang, Paluszny, Marco and
Prautzsch, Hartmut. "Métodos de Bézier y B-
splines", Universitätsverlag Karlsruhe,
Karlsruhe, 2005.

Publicación

1%

3

nnov.hse.ru

Fuente de Internet

1%

4

library.utia.cas.cz

Fuente de Internet

1%

5

repositorio.ufes.br

Fuente de Internet

1%

6

Das, Sayan. "Path Properties of KPZ Models",
Columbia University, 2023

Publicación

1%

7

repository.rudn.ru

Fuente de Internet

<1%

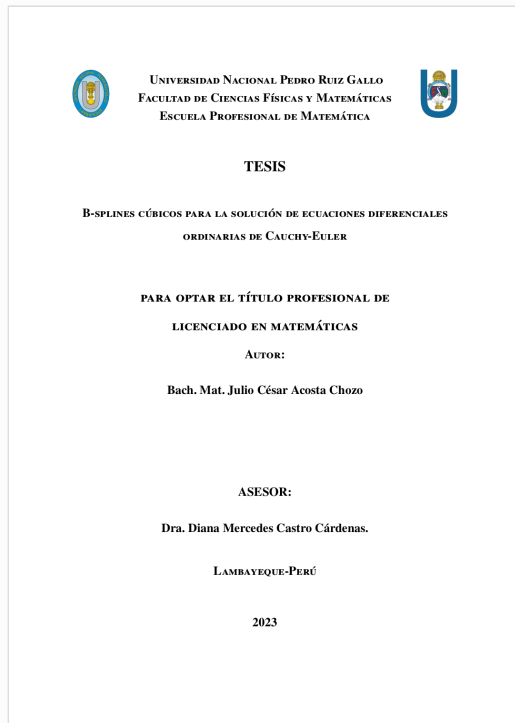


Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por **Turnitin**. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Julio Cesar Acosta Chozo
Título del ejercicio: perfiles de pregrado
Título de la entrega: Informe de Investigación Final
Nombre del archivo: Informe_de_Tesis_Julio-ok.pdf
Tamaño del archivo: 7.82M
Total páginas: 121
Total de palabras: 19,363
Total de caracteres: 77,792
Fecha de entrega: 24-dic.-2023 08:46a. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega... 2184302204





UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DECANATO

Ciudad Universitaria – Lambayeque

LICENCIADA - RESOLUCIÓN DEL CONSEJO DIRECTIVO N° 015 -2023-SUNEDU / CD

UNIVERSIDAD NACIONAL
SECRETARÍA GENERAL
0026



ACTA DE SUSTENTACIÓN N° 13-2024-D/FACFyM

Siendo las 12:00 m del día Jueves 15 de Febrero del 2024, se reunieron los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada:

B-splines cúbicos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler.

Designados por Resolución N° 230-2023-Virtual D/FACFyM de fecha 20 de Marzo 2023.

Con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

Dr. Lic. Mat. Leandro Agapito Aguirreán Castillo

Presidente

Dr. Lic. Mat. Dolores Sánchez García

Secretario

Dr. Lic. Mat. Walter Arriaga Delgado

Vocal

La tesis fue asesorada por (el) (la) Dra. Lic. Mat. Diana Mercedes Castro Córdova, nombrado por Resolución N° 230-2023-Virtual D/FACFyM de fecha 20 de Marzo 2023.

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N° 089-2024 D/FACFyM de fecha 23 de Enero 2024.

La Tesis fue presentada y sustentada por (el) (los) Bachiller (es): Aleosta Chozo Julio César y tuvo una duración de 30 minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de Veinte (20) en la escala vigesimal, mención (Excelente).

Por lo que queda(n) apto(s) para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Siendo las 12:30 p.m. se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

Dr. Leandro Agapito Aguirreán Castillo
Presidente

Dr. Dolores Sánchez García
Secretario

Dr. Walter Arriaga Delgado
Vocal

Dra. Diana Mercedes Castro Córdova
Asesor

Agradecimientos

Agradezco a Dios quien a forjado mi camino y en todo momento está conmigo fortaleciéndome y dandome sabiduría. A mis padres Manuel Acosta y María Delia Chozo quienes me apoyaron en todo momento e impulsaron mis sueños de ser profesional. A mi hija Angela Mariana y a mi hija que está en camino por ser mi gran motivación, su afecto y su cariño me llenan de felicidad e impulsan a superarme cada día. A mi pareja y madre de mi hija, por su apoyo, comprensión en todo momento. A mis hermanos por sus buenos deseos y consejos; y en especial a mi asesora Dra. Diana Mercedes Castro Cárdenas por haberme guiado en la elaboración de mi tesis para la titulación, en base a su experiencia y sabiduría a sabido direccionar mis conocimientos.

Gracias por todo.

Dedicatoria

Me gustaría dedicar esta Tesis a toda mi familia.

Para mis padres Manuel y Delia, por su comprensión y apoyo en mi formación profesional.

Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi perseverancia y mi empeño.

Para mi Esposa Livia, a ella especialmente le dedico esta Tesis. Por su paciencia, por su comprensión, por su empeño, por su fuerza, por su amor, por ser tal y como es, ... porque la quiero.

Para mi hijas, Mariana y la que está en camino quienes son mi mayor motivación para nunca rendirme y poder llegar a ser un ejemplo para ellas.

Gracias por todo.

Bach. Mat. Julio César Acosta Chozo

Lambayeque 2023

Resumen

En esta investigación se exploró la eficacia de los B-Splines cúbicos en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler. El objetivo principal fue evaluar la precisión de este método en casos particulares de funciones polinómicas, exponenciales y trigonométricas. La metodología que se empleó consiste en el análisis de B-Splines y su aplicación en la resolución de estas ecuaciones, tomando en cuenta valores de frontera y un dominio discreto homogéneo. Los resultados demostraron que la precisión del método aumenta con el número de puntos en el dominio discreto. Se observó una disminución constante del error relativo, especialmente cuando la cantidad de puntos aumenta. Además, el error relativo para diferentes parámetros y combinaciones de constantes mostró una naturaleza similar, lo que sugiere que el método es robusto y consistente. Estos hallazgos tienen implicaciones significativas para la solución precisa y eficiente de una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler.

Palabras clave: B-Splines cúbicos, Ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler,

Precisión numérica, Error relativo.

Abstract

This research explores the efficacy of cubic B-Splines in solving ordinary Cauchy-Euler differential equations. The primary objective is to evaluate the accuracy of this method in particular cases of polynomial, exponential, and trigonometric functions. The methodology employed involves the analysis of B-Splines and their application in solving these equations, taking into account boundary values and a homogeneous discrete domain. The results demonstrate that the method's accuracy increases with the number of points in the discrete domain. A consistent decrease in relative error is observed, especially as the number of points increases. Furthermore, the relative error for different parameters and combinations of constants exhibits a similar nature, suggesting that the method is robust and consistent. These findings have significant implications for the precise and efficient solution of a family of ordinary Cauchy-Euler differential equations.

Keywords: Cubic B-Splines, Ordinary Cauchy-Euler Differential Equations, Numerical Accuracy, Relative Error.

Índice general

Reconocimientos	IX
Dedicatoria	X
Resumen	XI
Abstract	XII
Introducción	XV
1. Diseño Teórico	1
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Antecedentes internacionales	1
1.1.2. Antecedentes nacionales	2
1.1.3. Antecedentes locales	3
1.2. Base Teórica	3
1.2.1. Interpolación	3
1.2.2. Interpolación polinómica	4
1.2.3. Error del polinomio de interpolación	8
1.2.4. Polinomios de Bernstein	11
1.2.5. Curvas de Bézier	19
1.2.6. B-Splines	20
1.3. Base Conceptual	28
1.3.1. Ecuación de Cauchy-Euler	28
1.3.2. Métodos de solución de las ecuaciones de Cauchy-Euler	29
1.3.2.1. <i>Caso I: Raíces reales y distintas</i>	30
1.3.2.2. <i>Caso II: Raíces reales y repetidas</i>	31

1.3.2.3.	<i>Caso III: Raíces complejas conjugadas</i>	33
1.3.3.	Caso no homogéneo	36
1.3.4.	Reducción a coeficientes constantes	41
2.	Diseño Metodológico	46
2.1.	Tipo de investigación	46
2.2.	Método de investigación	46
2.3.	Diseño de contrastación	46
2.4.	Población y muestra	46
2.4.1.	Población	46
2.4.2.	Muestra	47
2.5.	Técnicas e instrumentos	47
3.	Resultados	48
3.1.	E.D.O. de Cauchy-Euler por B-splines cúbicos	48
3.2.	<i>Aplicaciones</i>	57
4.	Discuciones	85
4.1.	<i>Análisis de desempeño error versus puntos</i>	85
5.	Conclusiones	90
6.	Sugerencias	91
	Anexos	94
	ANEXOS	95

Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Cauchy-Euler es una forma especial de una ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes variables que se utiliza en diversos campos de la ciencia y la ingeniería, como en vibraciones armónicas de tiempo de una varilla elástica delgada, problemas de disco sólido y anular, mecánica ondulatoria; que muchas veces son difíciles de resolver analíticamente debido a su complejidad de solución.

Una de las formas de solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias es utilizando los B-Splines; que son curvas que se construyen a partir de funciones básicas las cuales generan una curva paramétrica polinómica a trozos a través de un número de puntos de control (Ver Ávila Torres, 2012).

Los B-Splines cúbicos es un método que se utiliza para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias; pero de que manera utilizamos este método para solucionar las ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler. Esto nos lleva a plantear la siguiente interrogante ¿Cómo usar los B-Splines cúbicos en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler con precisión en casos particulares de funciones cero, polinómicas, exponenciales y trigonométricas?. Para ello nos planteamos como objetivo usar los B-Splines cúbicos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler con precisión en casos particulares de funciones cero, polinómicas, exponenciales y trigonométricas.

La hipótesis que comprobar fue: Si usamos los B-Splines cúbicos entonces solucionaremos ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler con precisión en casos particulares de funciones cero, polinómicas, exponenciales y trigonométricas.

Esta investigación nos ha permitido comprender de manera analítica y numérica el desarrollo de ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler y hacemos una comparación de los resultados, detallando el proceso del desarrollo del método de los B-Spline cúbicos. El presente trabajo de investigación está estructurado de la siguiente manera: En el capítulo 1 se tiene los preliminares el cual comienza con la interpolación, interpolación polinómica, Error del polinomio de interpolación, polinomios de Bernstein, curvas de Bézier y B-Splines. En el capítulo 2 trata sobre las ecuaciones de Cauchy-Euler y sus métodos de solución. En el capítulo 3 se presenta la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler por el Método de los B-Splines Cúbicos, se detalla el proceso iterativo y se presenta 4 aplicaciones donde se detalla la solución del método de B-Splines cúbico. Finalmente se encuentran las conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y anexo.

Capítulo 1

Diseño Teórico

En este primer capítulo se introducen los antecedentes y algunas definiciones las cuales serán una herramienta principal para analizar la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler utilizando los B-splines cúbicos.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Antecedentes internacionales

Chand et al., 2022 en su artículo “*Cubic spline fractal solutions of two-point boundary value problems with a non-homogeneous nowhere differentiable term*”, cuyo objetivo fue emplear las funciones de interpolación fractal splines cúbicos a través de momentos para la solución de un problema de valor límite de dos puntos que involucra una función complicada no suave en la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea. Obtuvo que el método propuesto es convergente en base a su análisis de error de truncamiento en los puntos de la cuadrícula.

Aly y Bader, 2019 en su artículo “*The particular solutions of some types of Euler-Cauchy ODE using the differential transform method*” se propusieron como objetivo aplicar la transformada diferencial para encontrar la solución particular de algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler. Dicho estudio mostró que este método es eficiente para encontrar la solución particular para Cauchy-Euler ODE y capaz de reducir el tamaño de los cálculos en comparación con otros métodos.

Shaa-Eldeen, 2019 en su tesis *“Solving Cauchy-Euler ODEs Using the Frobenius and Differential Transformation method”* cuyo propósito fue resolver la ecuación lineal de Cauchy-Euler con coeficientes variables usando el Método de Frobenius para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden. Concluyó que al comparar el método de Frobenius y el método de conversión diferencial, el método de conversión diferencial es capaz de resolver la mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias de forma más eficiente, precisa y sencilla.

Chehlabi, 2022 en su artículo *“Solving Second-Order Fuzzy Cauchy-Euler Initial Value Problems Under Generalized Differentiability”* cuyo objetivo fue resolver ecuaciones difusas de Cauchy-Euler de segundo orden con valores iniciales bajo diferenciabilidad generalizada. obteniendo la representación de la función solución explícitamente y la condiciones de su existencia a una clase de ecuaciones diferenciales difusas de segundo orden, bajo diferenciabilidad generalizada.

Osadchyi y Yeremieiev, 2021 en su artículo *“Construction of cubic splines for interpolating functional dependencies and processing the results of experimental studies”* cuyo objetivo fue crear algoritmos que permitan la construcción de splines cúbicos para interpolar dependencias funcionales y procesar los resultados de estudios experimentales. obtuvieron que la segunda derivada toma valores arbitrarios en los extremos de la spline. Un caso especial es el spline natural cuando la derivada de orden 2 en los extremos del spline es igual a cero. Además, en un extremo del spline se da la primera derivada y en el extremo opuesto se encuentra la segunda derivadas.

1.1.2. Antecedentes nacionales

Sosa Castillo, 2022 en su tesis *“Diseño de una pieza de ajedrez usando splines cúbicos”* tuvo como objetivo realizar el diseño geométrico de una pieza de ajedrez usando splines cúbicos. Concluyendo que los splines cúbicos con condiciones particulares pueden

diseñar una pieza de ajedrez.

Cruz y Alberto, 2013 en su tesis “*Regresión no paramétrica utilizando spline para la suavización de la estructura de la mortalidad en el Perú*” su objetivo fue investigar la regresión no paramétrica con enfoque en modelos spline, identificar sus ventajas en términos de suavizado de curvas y aplicarla a la estructura de mortalidad peruana. obtuvo que los splines o polinomios por segmentos, permiten modelar la estructura de mortalidad por edad simple, curva que una vez suavizada forman la base para construir tablas de mortalidad o tablas de vida de la población.

1.1.3. Antecedentes locales

Alberto y David, 2021 en su tesis “*Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden por el método de splines cúbicos, asistido con matlab*” tuvieron como objetivo solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden utilizando el método de splines cúbicos, asistido por Matlab. Concluyeron que las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficiente constante homogéneas y no homogéneas se pueden resolver analíticamente utilizando métodos variacionales paramétricos y métodos splines cúbicos, comparando numéricamente los resultados para aproximar la solución verdadera con un margen de error mínimo.

1.2. Base Teórica

1.2.1. Interpolación

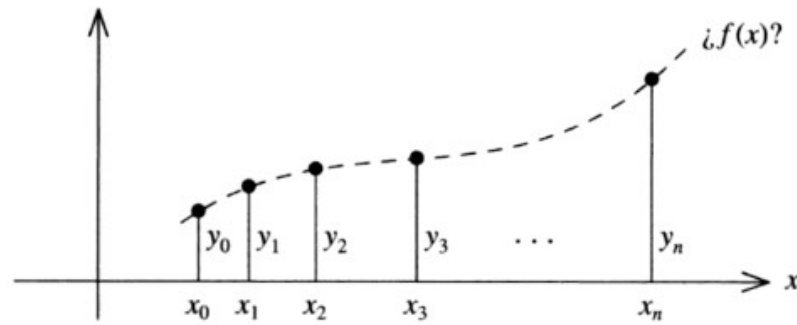
La interpolación es el proceso de hallar una función cuya gráfica pase por un número de puntos dados. En la figura (1,1) los puntos representan los $(n + 1)$ pares de números

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \quad (1.1)$$

y la curva representa una función continua $y = f(x)$ tal que $y_i = f(x_i)$ para los pares de números (figura 1.1). (Arévalo-Ovalle et al., 2021)

Figura 1.1

Interpolación



1.2.2. Interpolación polinómica

La interpolación polinómica es una técnica utilizada para aproximar los valores que toma una función, casi siempre desconocida en su expresión, siendo conocida sólo su imagen en un número finito de abscisas. Enunciamos la siguiente definición y teorema según (Casparri et al., 2011)

DEFINICIÓN 1.2.1 Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, un conjunto de $n+1$ puntos (llamados nodos) tal que $x_i < x_j$ para $i < j$. Una función de interpolación correspondiente a estos datos es una función continua f tal que $f(x_i) = y_i$, para todo $0 \leq i \leq n$.

TEOREMA 1.2.1 Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, un conjunto de $n+1$ puntos. Si $x_i < x_j$ para $i < j$ entonces existe un único polinomio p (llamado polinomio interpolador) de grado menor o igual que n tal que $p(x_i) = y_i$, para todo $0 \leq i \leq n$.

Demostración.

1. Unicidad

Supongamos que existe p y q polinomios distintos de grado menor o igual que n , con $p(x_i) = y_i = q(x_i)$ para todo $0 \leq i \leq n$, luego $p - q$ tendría $n + 1$ raíces y por el teorema fundamental del álgebra $p - q = 0$ que implica que $p = q$.

2. Existencia

Para $n = 0$ la existencia es obvia, ya que la función constante $p_0(x) = y_0$ verifica que $p(x_0) = y_0$, y es un polinomio de grado a lo sumo 0.

Supongamos ahora que ya se ha obtenido un polinomio $p_{k-1}(x)$ de grado menor igual que $k - 1$, que verifica $p_{k-1}(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Construimos p_k de la forma:

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})$$

Observamos que este polinomio p_k es de grado a lo sumo k , e interpola los mismos datos que p_{k-1} , ya que

$$p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) + c_k(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_i) \dots (x_i - x_{k-1}) = p_{k-1}(x_i) = y_i,$$

para $i = 0, 1, \dots, k - 1$, ya que para algún i entre 0 y $k - 1$ va a ser cero. Queda por determinar el coeficiente c , que debe ser único. Para ello, se utiliza el dato $p(x_k) = y_k$, lo que nos lleva a la ecuación:

$$y_k = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})$$

y despejando c se obtiene

$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})},$$

el denominador de esta fracción es no nulo puesto que $x_i \neq x_j$ para todo $0 \leq i, j \leq k$.

Así el polinomio anterior $p(x)$ satisface $p_k(x_i) = y_i$

Note que los polinomios p_0, p_1, \dots, p_n generados en la demostración anterior tienen la propiedad que cada p_k se obtiene a partir de p_{k-1} agregándole un sumando, con ello al final del proceso p_n estará formado por una suma de términos y cada p_i será visible en la expresión de p_n . El k -ésimo polinomio se puede expresar como:

$$p_k(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_k(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

EJEMPLO 1.1 Calcular el polinomio de interpolación para los siguientes datos.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-1	1	3	4
y	2	5	8	12
	y_0	y_1	y_2	y_3

Solución

$$c_0 = 2 \quad p_0(x) = 2, \quad c_1 = \frac{5-2}{1+1} = \frac{3}{2}, \quad p_1 = 2 + \frac{3}{2}(x+1)$$

$$p_1(x) = p_2(x), \quad c_2 = 0, \quad p_2(4) = \frac{19}{2}, \quad c_3 = \frac{12-19/2}{(5)(3)(1)} = \frac{1}{6}$$

El polinomio de interpolación es: $p_3 = 2 + \frac{3}{2}(x+1) + \frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x-3)$.

Para la interpolación matricial, la forma usual de un polinomio es:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Si el polinomio interpola los puntos se cumple que:

$$p(x_k) = a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_nx_k^n = \sum_{i=0}^n a_i x_k^i = y_k$$

Para todo $0 \leq k \leq n$, lo que conlleva a un sistema de $n + 1$ ecuaciones lineales con $n + 1$ incógnitas representado en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

que tiene solución única debido a que el determinante de la matriz es diferente de 0 puesto que los x_i son todos distintos.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

EJEMPLO 1.2 Hallar el polinomio de interpolación de los siguientes puntos.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-2	1	0	3
y	4	0	5	-5
	y_0	y_1	y_2	y_3

Solución

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \cdots & -8 \\ 1 & 1 & 1 \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 9 \cdots & 27 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ \vdots \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{127}{30} \\ -\frac{13}{10} \\ \vdots \\ \frac{8}{13} \end{pmatrix}$$

Así, el polinomio de interpolación es: $p(x) = 5 - \frac{127}{30}x - \frac{13}{10}x^2 + \frac{8}{15}x^3$

1.2.3. Error del polinomio de interpolación

En este apartado analizaremos el error en la interpolación polinómica de una función $f(x)$. El teorema que introduciremos a continuación permite estudiar el error de la interpolación por polinomios cuando la función dada posee derivadas de hasta orden $(n+1)$. Mediante este resultado se puede obtener una estimación del error que estamos cometiendo al aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$. Según (Casparri et al., 2011)

TEOREMA 1.2.2 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\{x_i\}_{i=0}^n \subseteq [a, b]$, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ y supongamos que f es derivable $n+1$ veces en $[a, b]$ con derivada continua, entonces para todo $x \in [a, b]$, existe un ξ_x que pertenece al menor de los intervalos que contiene a los puntos x, x_0, x_1, \dots, x_n tal que:

$$E = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

donde $p(x)$ es el polinomio que interpola a f en $\{x_i\}_{i=0}^n$.

Demostración. Si x es uno de los puntos x_k no hay nada que probar ya que ambos miembros se anulan para cualquier ξ .

Si x es un valor fijo diferente de los x_k , consideramos la función auxiliar $F = F(t)$ definida por:

$$F(t) = f(t) - p(t) - cL(t), \text{ donde } c = \frac{f(x) - p(x)}{L(x)} \quad (1.4)$$

y donde estamos llamando $L(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

Tenemos $F(x_k) = f(x_k) - p(x_k) - cL(x_k) = y_k - y_k - 0 = 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n$ y también $F(x) = f(x) - p(x) - cL(x) = 0$, por definición de c .

La función F tiene entonces al menos $n+2$ ceros distintos en el intervalo I . Por el teorema de Rolle, F' debe tener por lo menos $n+1$ ceros en el menor de los intervalos que contiene a x y los x_k , la segunda derivada F'' debe tener no menos de n ceros, ..., la $(n+1)$ -ésima derivada debe tener por lo menos un cero. Sea ξ_x tal cero. Derivando $(n+1)$ veces la ecuación (1.4) y haciendo $t = \xi_x$:

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - c(n+1)! \quad (1.5)$$

ya que la derivada $(n+1)$ -ésima de $p(x)$ es cero. Por tanto, usando (1.5) tenemos:

$$cL(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) L(x)$$

EJEMPLO 1.3 *Cúal es el error máximo que puede presentarse con dos puntos de interpolación?*

Solución. Supongamos dos puntos de interpolación $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$. Entonces el polinomio es:

$$p(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{(x_1 - x)f(x_0) + (x - x_0)f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

y por otra parte:

$$E = f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(\xi_x)$$

Supongamos que $|f''(x)| \leq M, \forall x \in [x_0, x_1]$. El máximo de la función $|\frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1)|$

entre x_0 y x_1 se presenta en $x = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ con valor $\frac{1}{8}(x_1 - x_0)^2$. Por tanto:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8} M$$

EJEMPLO 1.4 ¿Con qué grado de exactitud podemos calcular $\sqrt{115}$ mediante interpolación polinómica para la función $y = \sqrt{x}$ si elegimos los puntos $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$?

Solución. Tenemos $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$. Entonces:

$$M = \max_{100 \leq x \leq 144} |y''| = \frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8} 10^{-5} \quad (1.6)$$

Entonces:

$$|E| \leq \frac{3}{8} \times 10^{-5} \times \frac{1}{3!} |(115 - 100)(115 - 121)(115 - 144)| = \frac{1}{16} \times 10^{-5} \times 15 \times 6 \times 29 \approx 1,6 \times 10^{-3}$$

1.2.4. Polinomios de Bernstein

Según (Loredo Villalobos, 2007)

Los polinomios son útiles herramientas matemáticas que además se definen de forma sencilla. Pueden calcularse rápidamente en sistemas computacionales y permiten representar una gran variedad de funciones. Pueden ser derivados e integrados fácilmente y pueden ser unidos para formar curvas que aproximen una función tanto como se desee.

Sabemos que un polinomio real de una variable de la forma:

$$p(t) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

puede ser representado como una combinación lineal de elementos de la base canónica

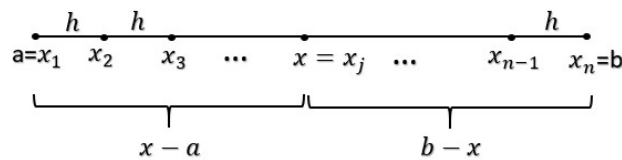
$$\beta = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$$

del espacio de polinomios. Esta base es tan solo una de un número infinito de bases para el espacio de polinomios. En lo siguiente discutiremos otra de las bases recientemente usadas del espacio de polinomios: los polinomios de Bernstein.

Según (Prautzsch et al., 2005)

Sea $\Delta_N : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ y $h = \frac{b-a}{n}$ el tamaño de la malla de la partición (figura 1.2).

Figura 1.2



DEFINICIÓN 1.2.2 El polinomio de Bernstein de grado n asociado con la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i} f(x_i) \quad (1.7)$$

donde $x_i = a + ih = a + \frac{i}{n}(b-a)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

En el caso especial donde el intervalo es el $[0, 1]$, la ecuación (1.7) se reduce a

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (x)^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (1.8)$$

DEFINICIÓN 1.2.3 *Los polinomios básicos de Bernstein se definen como*

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} (x)^i (1-x)^{n-i} \quad (1.9)$$

con $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Por conveniencia diremos que $B_i^n = 0$ si $i < 0$ ó $i > n$. Además observamos de (1.9) que hay $n+1$ polinomios básicos de Bernstein de grado n . En la figura (1.3) observamos los polinomios de Bernstein de grado 4.

A lo largo de este trabajo nos enfocaremos en la aproximación de una función f sobre $[0, 1]$.

Según ésta observación y como veremos más adelante:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = (x + (1-x))^n = 1 \quad (1.10)$$

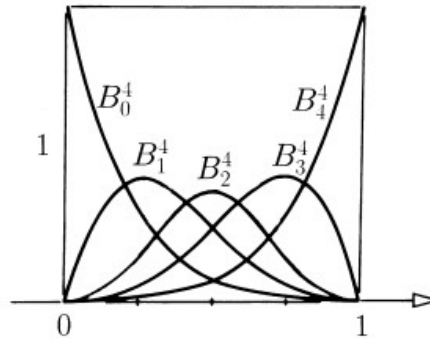
EJEMPLO 1.5 .

1. Polinomios básicos de Bernstein de grado 1.

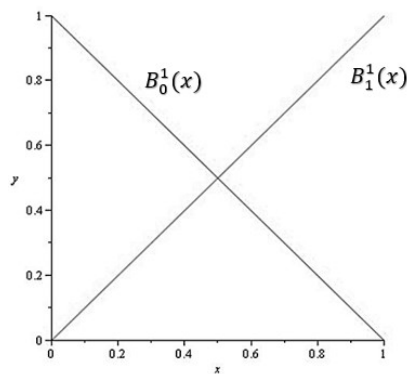
$$B_0^1(x) = 1-x, \quad B_1^1(x) = x \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1$$

Figura 1.3

Representación de los polinomios de Bernstein de grado 4 sobre $[0,1]$

**Figura 1.4**

Polinomios de Bernstein de grado 1



2. Polinomios básicos de Bernstein de grado 2.

$$B_0^2(x) = (1-x)^2, \quad B_1^2(x) = 2x(1-x) \quad B_2^2(x) = x^2$$

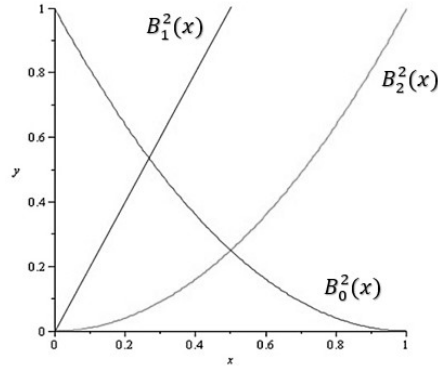
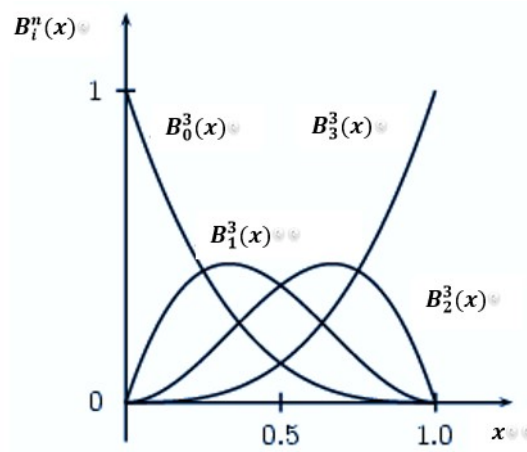
3. Polinomios básicos de Bernstein de grado 3.

$$B_0^3(x) = (1-x)^3, \quad B_1^3(x) = 3x(1-x)^2, \quad B_2^3(x) = 3x^2(1-x), \quad B_3^3(x) = x^3$$

Mostraremos a continuación algunas propiedades de los polinomios básicos de Bernstein.

- Satisfacen la **relación de recurrencia**.

$$B_k^n(x) = (1-x)B_k^{n-1}(x) + xB_{k-1}^{n-1}(x) \quad (1.11)$$

Figura 1.5*Polinomios de Bernstein de grado 2***Figura 1.6***Polinomios de Bernstein de grado 3*

En efecto.

$$\begin{aligned}
 (1-x)B_k^{n-1}(x) + xB_{k-1}^{n-1}(x) &= (1-x)\binom{n-1}{k}(x)^k(1-x)^{n-1-k} + x\binom{n-1}{k-1}(x)^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} \\
 &= \binom{n-1}{k}(x)^k(1-x)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1}(x)^k(1-x)^{n-k} \\
 &= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] (x)^k(1-x)^{n-k} \\
 &= \binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k} \\
 &= B_k^n(x)
 \end{aligned}$$

- Son **positivos** en $[0, 1]$.

En efecto.

- Para $n = 1$. En este caso es inmediato que los polinomios básicos de Bernstein $B_0^1(x) = (1-x)$ y $B_1^1(x) = x$ son no negativos si $0 \leq x \leq 1$.
- Supongamos ahora que todos los polinomios básicos de Bernstein de grado $m < n$ son no negativos. Luego, a partir de (1.11) tomando $m = n$

$$B_i^m(x) = (1-x)B_i^{m-1}(x) + xB_{i-1}^{m-1}(x)$$

Entonces $B_i^m(x) \geq 0$ para $0 \leq x \leq 1$, ya que por hipótesis de inducción los elementos del lado derecho de esta igualdad son no negativos.

- Forman una **partición de la unidad**.

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(x) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.12)$$

En efecto.

La comprobación se hace de (1.10).

- Son **simétricos**.

$$B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1-x) \quad (1.13)$$

En efecto.

$$\begin{aligned} B_{n-i}^n(1-x) &= \binom{n}{n-i} (1-x)^{n-i} [1 - (1-x)]^{n-(n-i)} \\ &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= B_i^n(x) \end{aligned}$$

- Las únicas **raíces** son 0 y 1.

$$B_i^n(0) = B_{n-i}^n(1) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0 \\ 0; & \text{si } i > 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

En efecto.

Para $i = 0$.

$$\begin{aligned} B_0^n(x) &= \binom{n}{0}(x)^0(1-x)^{n-0} \\ &= 1, 1 \cdot (1-x)^n \\ &= (1-x)^n \end{aligned}$$

Si $x = 0$, entonces $B_0^n(0) = 1$.

Para $i > 0$.

$$\begin{aligned} B_1^n(x) &= \binom{n}{1}(x)^1(1-x)^{n-1} \\ &= n \cdot x \cdot (1-x)^{n-1} \end{aligned}$$

Si $x = 0$, entonces $B_1^n(0) = 0$.

Analogamente se prueba que $B_{n-i}^n(1) = 1$, si $i = 0$ y $B_{n-i}^n(1) = 0$, si $i > 0$.

Observación 1.1

$$B_k^n(x) = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} x^i \quad (1.15)$$

En efecto.

$$\begin{aligned}
B_k^n(x) &= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} x^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} x^{i+k} \\
&= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} x^i \\
&= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} x^i
\end{aligned}$$

Según (Loredo Villalobos, 2007) los polinomios básicos de Bernstein forman una base ya que:

1. Cualquier polinomio de grado menor o igual a n puede escribirse como combinación lineal de polinomios básicos de Bernstein. Puesto que la base $\beta = 1, x, x^2, \dots, x^n$ genera el espacio de polinomios y cualquier miembro de β puede escribirse como combinación lineal de polinomios básicos de Bernstein.
2. Son linealmente independientes, pues para todo x .

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 B_0^n(x) + c_1 B_1^n(x) + \dots + c_n B_n^n(x) \\
&= c_0 \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i}{0} x^i + c_1 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i}{1} x^i + \dots + c_n \sum_{i=n}^n (-1)^{i-n} \binom{n}{i} \binom{i}{n} x^i \\
&= c_0 + \left[\sum_{i=0}^1 c_1 \binom{n}{1} \binom{1}{1} \right] x + \dots + \left[\sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} \right] x^n
\end{aligned}$$

Como β es base se tiene que

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ \sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{i} \binom{1}{1} &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{i} \binom{n}{n} &= 0 \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$

Según los resultados anteriores tenemos que, dado un polinomio de grado n podemos escribirlo como combinación lineal de polinomios básicos de Bernstein de grado n :

$$p(x) = c_0 B_0^n(x) + c_1 B_1^n(x) + \dots + c_n B_n^n(x) \quad (1.16)$$

Entonces podemos escribir a $p(x)$ como:

$$p(x) = \begin{pmatrix} B_0^n(x) & B_1^n(x) & \dots & B_n^n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$p(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{0,0} & 0 & 0 \dots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & 0 \dots & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

donde los $b_{i,j}$ son los coeficientes de la base β que son usados para determinar el polinomio básico de Bernstein respectivo. Obsérvese que la matriz es triangular inferior.

EJEMPLO 1.6 En el caso cuadrático ($n = 2$).

$$\begin{aligned}
 B_0^2(x) &= \binom{2}{0}(x)^0(1-x)^{2-0} & B_1^2(x) &= \binom{2}{1}(x)^1(1-x)^{2-1} & B_2^2(x) &= \binom{2}{2}(x)^2(1-x)^{2-2} \\
 &= (1-x)^2 & &= 2x(1-x) & &= x^2 \\
 &= 1 - 2x + x^2 & &= 2x - 2x^2 & &
 \end{aligned}$$

la representación matricial es.

$$p(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

1.2.5. Curvas de Bézier

Los polinomios de Bernstein B_i^n de grado n forman una base para el espacio vectorial de polinomios de grado igual o menor que n . Por lo tanto toda curva polinómica $b(u)$ de grado menor o igual que n tiene una única representación de Bézier. (Prautzsch et al., 2005)

$$b(u) = \sum_{i=0}^n c_i B_i^n(x) \quad (1.18)$$

La transformación afín

$$u = a(1+t) + bt, \quad a \neq b$$

deja invariante el grado de b , por lo tanto $b(u(t))$ también tiene una única representación

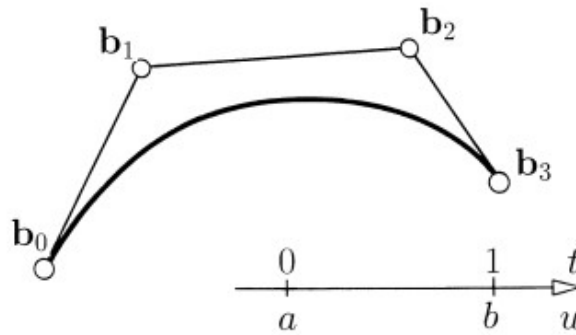
de grado n , en términos de los polinomios de Bernstein $B_i^n(t)$

$$b(u(t)) = \sum_0^n b_i B_i^n(t) \quad (1.19)$$

Los coeficientes b_i se denominan puntos de Bézier y son los vértices del polígono de Bézier de $b(u)$ sobre el intervalo $[a, b]$. Nos referimos a t como parámetro local y a u como parámetro global de b como se muestra en la figura 1.7

Figura 1.7

Curva cúbica con su polígono de Bézier sobre $[a, b]$



1.2.6. B-Splines

Según (Ávila Torres, 2012), el término spline en computación gráfica y modelado geométrico se refiere a la representación paramétrica a trozos de una geometría con un nivel específico de continuidad paramétrica. La letra B antepuesta a la palabra spline hace alusión a las funciones básicas. A diferencia de las funciones básicas de las curvas de Bézier, que usan polinomios de Bernstein, las funciones básicas de las curvas B-spline generan una curva paramétrica polinómica a trozos a través de un número de puntos de control. El grado de las funciones básicas controla el grado de la curva B-spline resultante; dichas curvas exhiben control local, esto significa que si movemos un punto de control solo algunos de los segmentos de la curva se verán afectados y el resto de la curva no variará,

Prautzsch et al., 2005 enuncia la siguiente definición y observación.

DEFINICIÓN 1.2.4 Dado $\Delta_N : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, una partición del intervalo $[a, b]$ y $h = \frac{b-a}{n}$ el tamaño de la malla de la partición (figura 1.2). Una función polinomial por partes s en el intervalo $[a, b]$ se llama spline de grado k si $s \in C^{k-1}[a, b]$ y s es un polinomio de grado como máximo k en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Observación 1.2 En analogía a la representación de curvas polinómicas de Bézier, también es conveniente expresar un spline $s(u)$ como una combinación afín de ciertos puntos de control c_i , es decir:

$$s(x) = \sum c_i N_i^n(x) \quad (1.20)$$

Donde los $N_i^n(x)$ son funciones polinómicas por trozos con soporte finito (se anula fuera de un intervalo finito) y satisfacen ciertas condiciones de continuidad. Shoenberg introdujo el nombre de B-splines para estas funciones.

Los B-splines se definen mediante una relación recursiva introducida por Carl de Boor (1972, 1978) a principios de la década de 1970.

Según (Munguia y Bhatta, 2015)

Los B-splines de grado cero están definidas por

$$N_i^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (1.21)$$

y los de grado $k \in \mathbb{Z}^+$ se definen recursivamente en términos de B-splines de grado $k-1$ por

$$N_i^k(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} \right) N_i^{k-1}(x) + \left(\frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right) N_{i+1}^{k-1}(x), \quad (1.22)$$

Para $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Las funciones base N_i^k definidas por (1.19) se denominan B-splines de grado k .

Usando la relación de recurrencia (1.19) y asumiendo la partición Δ_N , los B-splines lineales, cuadráticos y cúbicos están dadas por:

a) B-spline lineal:

$$N_i^1(x) = \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1}, \\ \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}}, & \text{si } x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (1.23)$$

b) B-spline cuadrático:

$$N_i^2(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_i)^2}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+1} - x_i)} & , \text{ si } x_i \leq x < x_{i+1}, \\ \frac{(x - x_i)(x_{i+2} - x)}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} + \frac{(x_{i+3} - x)(x - x_{i+1})}{(x_{i+3} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_{i+1})} & , \text{ si } x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ \frac{(x_{i+3} - x)^2}{(x_{i+3} - x_{i+1})(x_{i+3} - x_{i+2})} & , \text{ si } x_{i+2} \leq x < x_{i+3}, \\ 0 & , \text{ en caso contrario} \end{cases} \quad (1.24)$$

c) B-spline cúbico:

$$N_i^3(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)^3}{(x_{i+3}-x_i)(x_{i+2}-x_i)(x_{i+1}-x_i)} & , \text{ si } x_i \leq x < x_{i+1}, \\ \frac{(x-x_i)^2(x_{i+2}-x)}{(x_{i+3}-x_i)(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})} + \frac{(x-x_i)(x_{i+3}-x)(x-x_{i+1})}{(x_{i+3}-x_i)(x_{i+3}-x_{i+1})(x_{i+2}-x_{i+1})} \\ + \frac{(x_{i+4}-x)(x-x_{i+1})^2}{(x_{i+4}-x_{i+1})(x_{i+3}-x_{i+1})(x_{i+2}-x_{i+1})} & , \text{ si } x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ \frac{(x-x_i)(x_{i+3}-x)^2}{(x_{i+3}-x_i)(x_{i+3}-x_{i+1})(x_{i+3}-x_{i+2})} + \frac{(x_{i+4}-x)(x-x_{i+1})(x_{i+3}-x)}{(x_{i+4}-x_{i+1})(x_{i+3}-x_{i+1})(x_{i+3}-x_{i+2})} \\ + \frac{(x_{i+4}-x)^2(x-x_{i+2})}{(x_{i+4}-x_{i+1})(x_{i+4}-x_{i+2})(x_{i+3}-x_{i+2})} & , \text{ si } x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ \frac{(x_{i+4}-x)^3}{(x_{i+4}-x_{i+1})(x_{i+4}-x_{i+2})(x_{i+4}-x_{i+3})} & , \text{ si } x_{i+3} \leq x < x_{i+4}, \\ 0 & , \text{ en caso contrario} \end{cases} \quad (1.25)$$

La ecuación (1.25) es una spline cúbica con nudos $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}$. Note que la B-spline cúbica es cero excepto en el intervalo $[x_i, x_{i+4}]$. Esto se cumple para todas las B-splines.

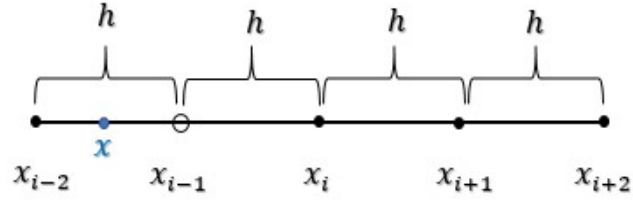
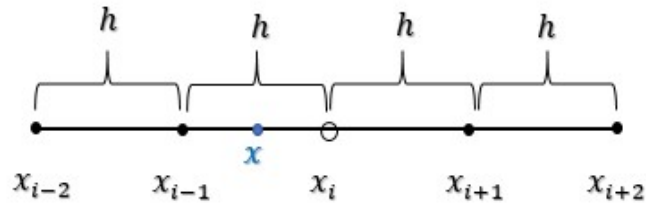
En adelante cuando nos referimos a B-spline de grado 3, escribiremos N_i en lugar de $N_i^3(x)$. Si restringimos a nudos igualmente espaciados e incluimos cuatro nudos adicionales y asumimos que (Kalyani y Rama Chandra Rao, 2013) $\Delta_N : x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < x_{n+2}$ es una partición uniforme. Usando (1.25) y sea $h = x_{i+1} - x_i$, para cualquier $0 \leq i \leq n$, se tiene que:

Si $x_{i-2} \leq x < x_{i-1}$

$$\frac{(x-x_{i-2})^3}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_i-x_{i-2})(x_{i-1}-x_{i-2})} = \frac{(x-x_{i-2})^3}{(3h)(2h)(h)} = \frac{(x-x_{i-2})^3}{6h^3} \quad (1.26)$$

Si $x_{i-1} \leq x < x_i$

$$\frac{(x-x_{i-2})^2(x_i-x)}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})} + \frac{(x-x_{i-2})(x_{i+1}-x)(x-x_{i-1})}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})}$$

Figura 1.8*B-spline cúbico en el intervalo $[x_{i-2}, x_{i-1}]$* **Figura 1.9***B-spline cúbico en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$* 

$$+ \frac{(x_{i+2} - x)(x - x_{i-1})^2}{(x_{i+2} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})} =$$

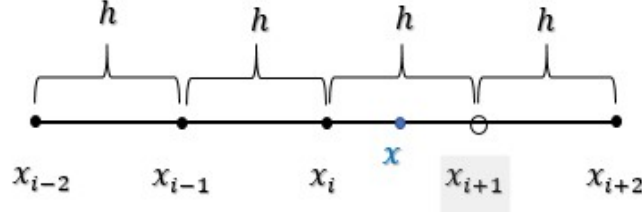
$$\frac{[h + (x - x_{i-1})]^2 [h - (x - x_{i-1})]}{(3h)(2h)(h)} + \frac{[h + (x - x_{i-1})] [2h - (x - x_{i-1})] (x - x_{i-1})}{(3h)(2h)(h)}$$

$$+ \frac{[3h - (x - x_{i-1})] (x - x_{i-1})^2}{(3h)(2h)(h)} =$$

$$\frac{h^3 + h^2(x - x_{i-1}) - h(x - x_{i-1})^2 - (x - x_{i-1})^3}{6h^3} + \frac{2h^2(x - x_{i-1}) + h(x - x_{i-1})^2 - (x - x_{i-1})^3}{6h^3}$$

$$+ \frac{3h(x - x_{i-1})^2 - (x - x_{i-1})^3}{6h^3} = \frac{-3(x - x_{i-1})^3 + 3h(x - x_{i-1})^2 + 3h^2(x - x_{i-1}) + h^3}{6h^3} \quad (1.27)$$

Si $x_i \leq x < x_{i+1}$

Figura 1.10*B-spline cúbico en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$* 

$$\begin{aligned}
& \frac{(x - x_{i-2})(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_{i-2})(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} + \frac{(x_{i+2} - x)(x_{i-1} - x)(x_{i+1} - x)}{(x_{i+2} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \\
& + \frac{(x_{i+2} - x)^2(x - x_i)}{(x_{i+2} - x_{i-1})(x_{i+2} - x_i)(x_{i+1} - x_i)} = \\
& \frac{[3h - (x_{i+1} - x)](x_{i+1} - x)^2}{(3h)(2h)(h)} + \frac{[(x_{i+1} - x) + h][2h - (x_{i+1} - x)](x_{i+1} - x)}{(3h)(2h)(h)} \\
& + \frac{[h + (x_{i+1} - x)]^2[h - (x_{i+1} - x)]}{(3h)(2h)(h)} = \\
& \frac{3h(x_{i+1} - x)^2 - (x_{i+1} - x)^3}{6h^3} + \frac{h(x_{i+1} - x)^2 + 2h^2(x_{i+1} - x) - (x_{i+1} - x)^3}{6h^3} \\
& + \frac{h^3 + h^2(x_{i+1} - x) - h(x_{i+1} - x)^2 - (x_{i+1} - x)^3}{6h^3} \\
& = \frac{-3(x_{i+1} - x)^3 + 3h(x_{i+1} - x)^2 + 3h^2(x_{i+1} - x) + h^3}{6h^3} \tag{1.28}
\end{aligned}$$

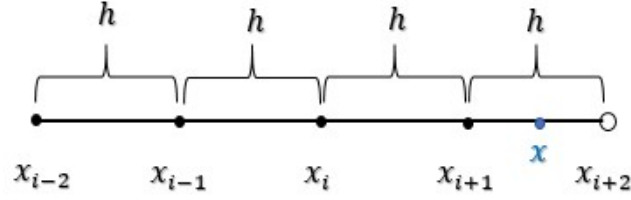
Si $x_{i+1} \leq x < x_{i+2}$

$$\frac{(x_{i+2} - x)^3}{(x_{i+2} - x_{i-1})(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} = \frac{(x_{i+2} - x)^3}{(3h)(2h)(h)} = \frac{(x_{i+2} - x)^3}{6h^3} \tag{1.29}$$

De (1,26), (1,27), (1,28) y (1,29) definimos el B-spline cúbico uniforme $N_i(x)$ como:

Figura 1.11

B-spline cúbico en el intervalo $[x_{i+1}, x_{i+2}]$



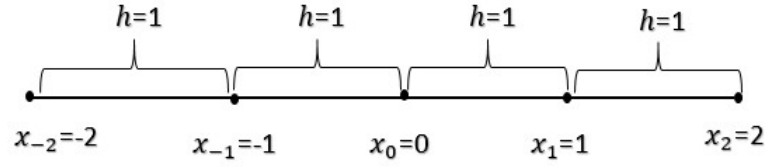
(Khalid et al., 2019)

$$N_i(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & , \text{ si } x_{i-2} \leq x < x_{i-1}, \\ -3(x - x_{i-1})^3 + 3h(x - x_{i-1})^2 + 3h^2(x - x_{i-1}) + h^3 & , \text{ si } x_{i-1} \leq x < x_i \\ -3(x_{i+1} - x)^3 + 3h(x_{i+1} - x)^2 + 3h^2(x_{i+1} - x) + h^3 & , \text{ si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ (x_{i+2} - x)^3 & , \text{ si } x_{i+1} \leq x < x_{i+2}, \\ 0 & , \text{ en caso contrario} \end{cases} \quad (1.30)$$

Si elegimos $h = 1$, entonces en el intervalo $[-2; 2]$, tenemos lo siguiente:

$$N_0(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (x - x_{-2})^3 & , \text{ si } x_{-2} \leq x < x_{-1}, \\ -3(x - x_{-1})^3 + 3(x - x_{-1})^2 + 3(x - x_{-1}) + 1 & , \text{ si } x_{-1} \leq x < x_0 \\ -3(x_1 - x)^3 + 3(x_1 - x)^2 + 3(x_1 - x) + 1 & , \text{ si } x_0 \leq x < x_1 \\ (x_2 - x)^3 & , \text{ si } x_1 \leq x < x_2, \\ 0 & , \text{ en caso contrario} \end{cases} \quad (1.31)$$

reemplazando los valores en (1,30) se tiene:

Figura 1.12*Intervalo $[x_{-2}, x_2)$* 

$$N_0(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 & , \text{ si } -2 \leq x < -1, \\ -3x^3 - 6x^2 + 4 & , \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ 3x^3 - 6x^2 + 4 & , \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 & , \text{ si } 1 \leq x < 2, \\ 0 & , \text{ en caso contrario} \end{cases} . \quad (1.32)$$

y su gráfico se muestra en la Figura (1,13). Sabemos que N_i se encuentra en el intervalo $[x_i, x_{i+1})$. Este intervalo tiene contribuciones distintas de cero de N_{i-1} , N_i , N_{i+1} y N_{i+2} .

Tenemos una mejor comprensión de esto en la Figura (1,14).

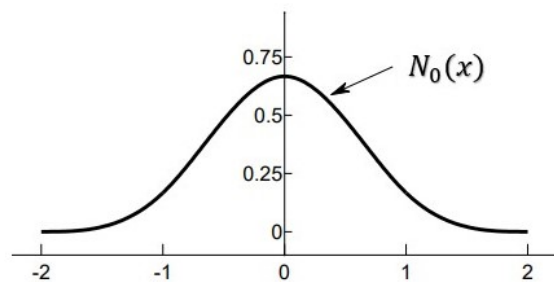
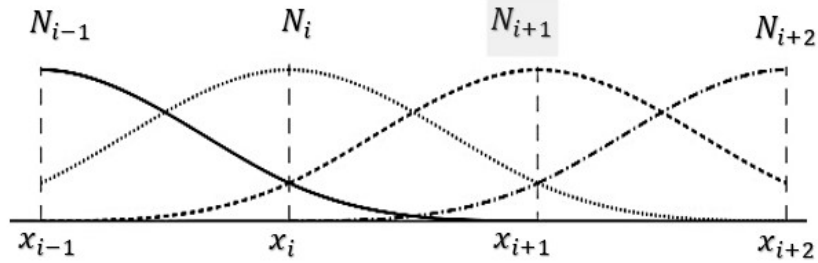
Figura 1.13*Gráfica de B-spline cúbico $N_0(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$* 

Figura 1.14

Gráficos de los B-spline cúbicos necesarios para el intervalo $[x_i, x_{i+1})$



1.3. Base Conceptual

En esta sección veremos una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables, este tipo de ecuaciones diferenciales consideradas tienen una solución general que puede expresarse siempre en términos de las potencias de x , senos, cosenos, funciones logarítmicas y exponenciales. Además, su método de solución es muy similar al que se usa en las ecuaciones con coeficientes constantes. Estas ecuaciones son llamadas ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler

Estudiaremos dichas ecuaciones según (Zill et al., 2012)

1.3.1. Ecuación de Cauchy-Euler

DEFINICIÓN 1.3.1 Una ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \quad (1.33)$$

donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 son constantes, se conoce como ecuación de Cauchy-Euler.

La característica de este tipo de ecuación es que el grado de los coeficientes monomiales x^k , $k = n, n-1, \dots, 1, 0$ coincide con el orden k de diferenciación $\frac{d^k y}{dx^k}$.

Desarrollaremos el método de resolución de la ecuación de Cauchy–Euler para el caso de segundo orden, recordando que es posible extender el método a cualquier orden siguiendo el mismo razonamiento.

Iniciamos nuestro análisis con un estudio detallado de las formas de las soluciones generales de la ecuación homogénea de segundo orden.

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (1.34)$$

con a , b y c constantes.

Para resolver la ecuación no homogénea

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = g(x) \quad (1.35)$$

con $g(x) \neq 0$, basta aplicar el método de variación de parámetros una vez que se ha determinado la función complementaria y_c , es decir, la solución general de la ecuación homogénea.

El coeficiente de $d^2 y/dx^2$ es cero en $x = 0$. Por lo tanto, con el fin de garantizar que los resultados fundamentales del teorema de existencia y unicidad sean aplicables a la ecuación de Cauchy-Euler, limitamos nuestra atención a encontrar la solución general en el intervalo $(0, \infty)$. Las soluciones en el intervalo $(-\infty, 0)$ se pueden obtener por sustitución de $t = -x$ en la ecuación diferencial.

1.3.2. Métodos de solución de las ecuaciones de Cauchy-Euler

Intentamos una solución de la forma $y = x^m$, donde se va a determinar m . Parecido a cuando sustituimos e^{mx} en una ecuación lineal con coeficientes constantes, después de sustituir x^m cada término de una ecuación de Cauchy-Euler se convierte en un polinomio en m multiplicado por x^m dado que:

$$\begin{aligned}
 a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} &= a_k x^k m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)x^{m-k} \\
 &= a_k m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)x^m
 \end{aligned}$$

Por ejemplo, al sustituir $y = x^m$ la ecuación de segundo orden se convierte en

$$\begin{aligned}
 ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy &= ax^2 [m(m-1)]x^{m-2} + bx [mx^{m-1}] + cx^m \\
 &= am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m \\
 &= [am(m-1) + bm + c]x^m
 \end{aligned}$$

Así, $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial homogénea siempre que sea una solución de la ecuación auxiliar

$$am(m-1) + bm + c = 0 \quad \text{o} \quad am^2 + (b-a)m + c = 0 \quad (1.36)$$

Existen tres diferentes casos a considerarse, dependiendo de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales e iguales, o complejas.

1.3.2.1. Caso I: Raíces reales y distintas

Sean m_1 y m_2 las raíces reales de (2.4), tales que $m_1 \neq m_2$. Entonces

$$y_1 = x^{m_1} \quad \text{y} \quad y_2 = x^{m_2}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones. El Wronskiano esta dado como

$$W = \begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1 x^{m_1-1} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix} = m_2 x^{m_1+m_2-1} - m_1 x^{m_2+m_1-1} \neq 0 \quad (1.37)$$

$\forall x \in (0, \infty)$, entonces la solución general de la ecuación de Cauchy – Euler para $x > 0$, en el caso en el que las raíces son reales y distintas, es:

$$y(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \quad (1.38)$$

EJEMPLO 1.7 Resolver

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

Solución. En lugar de sólo memorizar la ecuación (2.4), algunas veces se prefiere suponer como solución a $y = x^m$ con el fin de entender el origen. Al diferenciar dos veces,

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

y sustituir de nuevo en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y &= x^2 \cdot m(m-1)x^{m-2} - 2xm x^{m-1} - 4x^m \\ &= x^m [m(m-1) - 2m - 4] \\ &= x^m (m^2 - 3m - 4) = 0 \end{aligned}$$

Si $m^2 - 3m - 4 = 0$. Al factorizar se tiene $(m+1)(m-4) = 0$, lo cuál implica que $m_1 = -1$ y $m_2 = 4$ de manera que (2.6) proporciona la solución general $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^4$.

1.3.2.2. Caso II: Raíces reales y repetidas

Si las raíces de (2.4) son repetidas, es decir $m_1 = m_2$, entonces se obtiene sólo una solución particular

$$y_1 = x^{m_1} = x^{m_2} = x^m$$

Cuando las raíces de la ecuación auxiliar (2.4) son iguales, el discriminante necesariamente es cero, es así que de (2.4) se deduce que las raíces deben ser

$$m = -\frac{(b-a)}{2a}$$

Ahora podemos construir una segunda solución y_2 , tal que y_1 y y_2 formen un conjunto fundamental de soluciones, puede ser determinada por la expresión (método de reducción de orden)

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx \quad (1.39)$$

Para usar este resultado escribamos a la ecuación de Cauchy – Euler en su forma estándar.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{ax} \frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2} y = 0$$

e igualamos $P(x) = \frac{b}{ax}$, entonces $\int P(x)dx = \int \frac{b}{ax} dx = \frac{b}{a} \ln x$

Sustituyendo en (2.7) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} y_2 &= x^m \int \frac{e^{-\frac{b}{a} \ln x}}{x^{2m}} dx \\ &= x^m \int \frac{x^{-\frac{b}{a}}}{x^{2m}} dx \\ &= x^m \int \frac{x^{-\frac{b}{a}}}{x^{2(-\frac{(b-a)}{2a})}} dx \\ &= x^m \int \frac{dx}{x} \\ &= x^m \ln x \end{aligned}$$

Entonces, la solución general es

$$y = c_1 x^m + c_2 x^m \ln x \quad (1.40)$$

Para ecuaciones de orden superior, si m es una raíz de multiplicidad k , entonces se puede demostrar que x^m , $x^m \ln x$, $x^m (\ln x)^2$, ..., $x^m (\ln x)^{k-1}$ son k soluciones linealmente independientes. Asimismo, la solución general de la ecuación diferencial debe contener entonces una combinación lineal de estas k soluciones.

EJEMPLO 1.8 Resolver

$$4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Solución. La sustitución $y = x^m$ nos da

$$\begin{aligned} 4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} + y &= x^m [4m(m-1) + 8m + 1] \\ &= x^m (4m^2 + 4m + 1) = 0 \end{aligned}$$

cuando $4m^2 + 4m + 1 = 0$ $(2m+1)^2$. Dado que $m = -\frac{1}{2}$ es una raíz repetida, (2.8) da la solución general $y = c_1 x^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^{-\frac{1}{2}} \ln x$

1.3.2.3. Caso III: Raíces complejas conjugadas

Si las raíces de (2.4) son el par conjugado $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ son reales, entonces una solución es

$$y = C_1 x^{\alpha+i\beta} + C_2 x^{\alpha-i\beta}. \quad (1.41)$$

Pero cuando las raíces de la ecuación auxiliar son complejas, como en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, deseamos escribir una solución sólo en términos de funciones reales. Observemos la identidad (Shaa-Eldeen, 2019)

$$x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i\beta \ln x},$$

la cual, por la fórmula de Euler, es lo mismo que

$$x^{i\beta} = \cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x),$$

De manera similar, $x^{-i\beta} = \cos(\beta \ln x) - i \sin(\beta \ln x)$

Al sumar y restar los dos últimos resultados se tiene

$$x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2\cos(\beta \ln x) \quad y \quad x^{i\beta} - x^{-i\beta} = 2i\operatorname{sen}(\beta \ln x), \quad (1.42)$$

Del hecho de que (2.9) es una solución para cualquier valor de las constantes, podemos notar que si elegimos $C_1 = C_2 = 1$ y, por otro lado, $C_1 = 1, C_2 = -1$, obtenemos las siguientes dos soluciones, respectivamente

$$y_1 = x^\alpha (x^{i\beta} + x^{-i\beta}) \quad y \quad y_2 = x^\alpha (x^{i\beta} - x^{-i\beta})$$

Usando (2.10) podemos escribir

$$y_1 = 2x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad y \quad y_2 = 2ix^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)$$

son también soluciones. Dado que $W(x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0, \beta > 0$, en el intervalo $(0, \infty)$, concluimos que

$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad y \quad y_2 = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)$$

constituyen un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial. Por lo tanto, la solución general es

$$y = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)]. \quad (1.43)$$

EJEMPLO 1.9 Resolver

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 5x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 8y = 0$$

Solución. Las primeras tres derivadas de $y = x^m$ son

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

de manera que la ecuación diferencial dada se convierte en

$$\begin{aligned}
 x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 5x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 8y &= x^3 m(m-1)(m-2)x^{m-3} + 5x^2 m(m-1)x^{m-2} + 7xm x^{m-1} + 8x^m \\
 &= x^m [m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8] \\
 &= x^m (m^3 + 2m^2 + 4m + 8) \\
 &= x^m (m+2)(m^2 + 4) = 0
 \end{aligned}$$

En este caso vemos que $y = x^m$ será una solución de la ecuación diferencial para $m_1 = -2$, $m_2 = 2i$ y $m_3 = -2i$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 x^{-2} + c_2 \cos(2 \ln x) + c_3 \sin(2 \ln x).$$

EJEMPLO 1.10 Consideremos el siguiente problema con valores en la frontera

$$x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0, \quad \text{para } 1 < x < 2$$

con condiciones de contorno $y(1) = 5$, $y(2) = 0$.

Solución. Sea $y = x^m$, solución de la ecuación dada. Al derivar dos veces, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

Reemplazamos en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
 x^2 y'' + 3xy' + 3y &= x^2 [m(m-1)x^{m-2}] + 3[mx^{m-1}] + 3x^m \\
 &= x^m [m^2 + 2m + 3] = 0
 \end{aligned}$$

Observamos que $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial para $m_1 = -1 - i\sqrt{2}$ y

$m_2 = -1 + i\sqrt{2}$. Por lo tanto la solución general es

$$y = \frac{1}{x} [c_1 \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln x)]$$

Hallamos las constante c_1 y c_2 de las condiciones de contorno

$$y(1) = \frac{1}{1} [c_1 \cos(\sqrt{2} \ln 1) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln 1)]$$

$$5 = 1 [c_1(1) + 0]$$

$$5 = C_1$$

$$y(2) = \frac{1}{2} [c_1 \cos(\sqrt{2} \ln 2) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln 2)]$$

$$0 = \frac{1}{2} [5 \cos(\sqrt{2} \ln 2) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln 2)]$$

$$0 = 5 \cos(\sqrt{2} \ln 2) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln 2)$$

$$c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln 2) = -5 \cos(\sqrt{2} \ln 2)$$

$$c_2 = -5 \operatorname{tg}(\sqrt{2} \ln 2)$$

Reemplazando en la solución general, se tiene

$$y = \frac{5}{x} [\cos(\sqrt{2} \ln x) - \operatorname{tg}(\sqrt{2} \ln 2) \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln x)]$$

1.3.3. Caso no homogéneo

Para resolver la ecuación no homogénea (2.3) podemos aplicar el método de variación de parámetros, pues basta encontrar el conjunto de soluciones y_1, y_2 de la ecuación homogénea asociada y con ello aplicar la fórmula de la solución particular, esto es

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad (1.44)$$

Recordar que la función $g(x)$ se obtiene de la forma estándar de la ecuación diferen-

cial.(Chehlabi, 2022)

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.11 Resolver la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 2x, y(1) = 1; y'(1) = 3$$

Solución. Debemos hallar el conjunto fundamental de soluciones, así que primero debemos resolver la ecuación homogénea asociada.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Consideremos la solución $y = x^m$ y sus derivadas

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituimos en la ecuación homogénea asociada.

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y &= x^2 [m(m-1)x^{m-2}] - x(mx^{m-1}) + x^m \\ &= x^m [m(m-1) - m + 1] \\ &= x^m (m^2 - 2m + 1) = 0 \end{aligned}$$

de donde $m_1 = m_2 = 1$, así la solución complementaria es

$$y_c = c_1 x + c_2 x \ln x$$

Las funciones $y_1 = x$, $y_2 = x \ln x$ conforman al conjunto fundamental de soluciones. Para determinar el Wronskiano vamos a considerar la primer derivada de cada solución.

$$\frac{dy_1}{dx} = 1 \qquad \frac{dy_2}{dx} = \ln x + 1$$

Sustituimos en el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} = x \ln x + x - x \ln x = x$$

Para determinar la función $g(x)$ dividamos entre x^2 la ecuación diferencial y así escribirla en su forma estándar.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2} y = \frac{2}{x}$$

vemos que $g(x) = \frac{2}{x}$ y sustituyendo en la solución particular (2.12).

$$\begin{aligned} y_p &= -x \int \frac{x \ln x \cdot (\frac{2}{x})}{x} dx + x \ln x \int \frac{x(\frac{2}{x})}{x} dx \\ &= -2x \int \frac{\ln x}{x} dx + 2x \ln x \int \frac{dx}{x} \\ &= -2x \frac{[\ln x]^2}{2} + 2x [\ln x]^2 \\ &= x [\ln x]^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación de Cauchy – Euler será la superposición de ambas soluciones, esto es

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x + x [\ln x]^2$$

Hallamos las constantes c_1 y c_2 de las condiciones iniciales.

Si $y(1) = 1$, entonces $c_1 = 1$.

Derivando se tiene que $y' = c_1 + c_2(1 + \ln x) + 2 \ln x + (\ln x)^2$.

Si $y'(1) = 3$, entonces $c_2 = 2$.

La solución para la ecuación diferencial con las condiciones iniciales es

$$y = x + 2x \ln x + x [\ln x]^2$$

EJEMPLO 1.12 Resolver

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x.$$

Solución. Dado que la ecuación es no homogénea, primero resolvemos la ecuación homogénea asociada.

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$$

Consideremos la solución $y = x^m$ y sus derivadas

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

de manera que la ecuación diferencial dada se convierte en

$$\begin{aligned} x^2 y'' - 3xy' + 3y &= x^2 m(m-1)x^{m-2} - 3xm x^{m-1} + 3x^m \\ &= x^m (m^2 - 4m + 3) = 0 \end{aligned}$$

A partir de la ecuación auxiliar $(m-1)(m-3) = 0$ encontramos $y_c = c_1 x + c_2 x^3$

Donde $y_1 = x$, $y_2 = x^3$. Por lo tanto $dy_1/dx = 1$ y $dy_2/dx = 3x^2$

Hallamos el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3$$

Determinamos la función $g(x)$ dividiendo entre x^2 la ecuación diferencial y así escribirla en su forma estándar.

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2 e^x$$

Sustituimos en la solución particular (2.12)

$$\begin{aligned} y_p &= -x \int \frac{x^3, 2x^2 e^x}{2x^3} dx + x^3 \int \frac{x, 2x^2 e^x}{2x^3} dx \\ &= -x \int x^2 e^x dx + x^3 \int e^x dx \\ &= 2x^2 e^x - 2x e^x \end{aligned}$$

Por último, tenemos

$$y = y_c + y_p = c_1 x + c_2 x^3 + 2x^2 e^x - 2x e^x$$

EJEMPLO 1.13 Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de Cauchy-Euler

$$x^2 y'' - 5xy' + 8y = 24, \quad \text{para } 1 < x < 2$$

con las condiciones de frontera

$$y(1) = 3$$

$$y(2) = 15$$

Solución. Consideremos como solución a $y = x^m$; la cual al derivar hasta la segunda derivada

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 y'' - 5xy' + 8y &= x^2 [m(m-1)x^{m-2}] - 5x [mx^{m-1}] + 8x^m \\ &= x^m [m^2 - 6m + 8] = 0 \end{aligned}$$

donde se tiene que $(m-4)(m-2) = 0$, lo cual implica que $m_1 = 2$ y $m_2 = 4$.

La solución complementaria es $y_c = c_1x^2 + c_2x^4$.

Las funciones correspondientes al conjunto fundamental de soluciones son

$$y_1 = x^2 \quad y_2 = x^4$$

derivamos

$$\frac{dy_1}{dx} = 2x \quad y \quad \frac{dy_2}{dx} = 4x^3$$

hallamos el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^4 \\ 2x & 4x^3 \end{vmatrix} = 4x^5 - 2x^5 = 2x^5$$

Al dividir la ecuación dada entre x^2 obtenemos que $g(x) = \frac{24}{x^2}$. Reemplazando en (2.12) obtenemos que $y_p = 3$.

La solución general de (3.35) es

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^4 + 3$$

Aplicando las condiciones de frontera se obtiene $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, de modo que la solución será:

$$y(x) = -x^2 + x^4 + 3$$

1.3.4. Reducción a coeficientes constantes

Las similitudes entre las formas de las soluciones de ecuaciones de Cauchy – Euler y soluciones de ecuaciones con coeficientes constantes no son una coincidencia (Segarra-Escandón, 2020). Por ejemplo, cuando las raíces de las ecuaciones auxiliares para $ay'' + by' + cy = 0$ y $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ son distintas y reales, las soluciones generales respectivas son

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad y \quad y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}, x > 0 \quad (1.45)$$

Usando la identidad $e^{\ln x} = x$, $x > 0$, la segunda solución dada en (2.13) puede expresarse de igual forma que la primera solución:

$$\begin{aligned} y &= c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \\ &= c_1 e^{m_1 \ln x} + c_2 e^{m_2 \ln x} \end{aligned}$$

Si escribimos $t = \ln x$, entonces tenemos

$$y = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \quad (1.46)$$

Este último resultado ilustra que toda ecuación de Cauchy-Euler siempre puede volver a escribirse como una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes mediante la sustitución $x = e^t$. La idea es resolver la nueva ecuación diferencial en términos de la variable t , usando los métodos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior, y una vez obtenida la solución general se vuelve a sustituir $t = \ln x$.

Este método requiere del uso de la regla de la cadena. Si se hace la sustitución $x = e^t$, o bien $t = \ln x$, obtenemos las siguientes expresiones para las derivadas.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \quad (1.47)$$

y

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \quad (1.48)$$

Sustituyendo en la ecuación de Cauchy – Euler obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
 ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy &= ax^2 \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] + bx \left[\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right] + cy \\
 &= a \frac{d^2 y}{dt^2} + (b-a) \frac{dy}{dt} + cy
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo la sustitución $x = e^t$ reducimos la ecuación de Cauchy – Euler a la ecuación

$$a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (b-a) \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = g(t) \quad (1.49)$$

EJEMPLO 1.14 Usar el cambio de variable $x = e^t$ para convertir la ecuación de Cauchy-Euler

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 13y = 4 + 3e^t$$

en una ecuación de coeficientes constantes y obtener la solución general.

Solución. Consideremos el cambio de variable $x = e^t$, usando los resultados (2.15) y (2.16), la ecuación de Cauchy – Euler queda como

$$\begin{aligned}
 x^2 \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) \right] - 3x \left[\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right] + 13y &= 4 + 3e^t \\
 \frac{d^2 y}{dt^2} - 4x \frac{dy}{dt} + 13y &= 4 + 3e^t
 \end{aligned}$$

Ahora tenemos una ecuación no homogénea con coeficientes constantes. Comencemos por resolver la ecuación homogénea.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 4x \frac{dy}{dt} + 13y = 0$$

Es facil ver que la ecuación auxiliar es $m^2 - 4m + 13 = 0$, las raices son $m_1 = 2 + i3$ y $m_2 = 2 - i3$. Identificamos $\alpha = 2$ y $\beta = 3$, entonces la solución complementaria, en la variable t , es

$$y_c(t) = c_1 e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \sen(3t)$$

Las funciones correspondientes al conjunto fundamental de soluciones son

$$y_1 = e^{2t} \cos(3t) \quad y \quad y_2 = e^{2t} \operatorname{sen}(3t)$$

Las derivadas correspondientes son

$$\frac{dy_1}{dt} = 2e^{2t} \cos(3t) - 3e^{2t} \operatorname{sen}(3t) \quad y \quad \frac{dy_2}{dt} = 2e^{2t} \operatorname{sen}(3t) + 3e^{2t} \cos(3t)$$

El Wronskiano esta dado por

$$W = \begin{vmatrix} e^{2t} \cos(3t) & e^{2t} \operatorname{sen}(3t) \\ 2e^{2t} \cos(3t) - 3e^{2t} \operatorname{sen}(3t) & 2e^{2t} \operatorname{sen}(3t) + 3e^{2t} \cos(3t) \end{vmatrix} = 3e^{4t}$$

La ecuación diferencial ya se encuentra en su forma estándar, así que $g(x) = 4 + 3e^t$. Ahora podemos sustituir las funciones correspondientes en la solución particular (2.12) para la variable t .

$$\begin{aligned} y_p &= -e^{2t} \cos(3t) \int \frac{e^{2t} \operatorname{sen}(3t)(4+3e^t)}{3e^{4t}} dt + e^{2t} \operatorname{sen}(3t) \int \frac{e^{2t} \cos(3t)(4+3e^t)}{3e^{4t}} dt \\ &= -e^{2t} \cos(3t) \left[\frac{4}{3} \int \frac{\operatorname{sen}(3t)}{e^{2t}} dt + \int \frac{\operatorname{sen}(3t)}{e^t} dt \right] + e^{2t} \operatorname{sen}(3t) \left[\frac{4}{3} \int \frac{\cos(3t)}{e^{2t}} dt + \int \frac{\cos(3t)}{e^t} dt \right] \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales mediante integración por partes, los resultados correspondientes son

$$\int \frac{\operatorname{sen}(3t)}{e^{2t}} dt = -\frac{2}{13} e^{-2t} \operatorname{sen}(3t) - \frac{3}{13} e^{-2t} \cos(3t)$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(3t)}{e^t} dt = -\frac{3}{10} e^{-t} \cos(3t) - \frac{1}{10} e^{-t} \operatorname{sen}(3t)$$

$$\int \frac{\cos(3t)}{e^{2t}} dt = -\frac{2}{13} e^{-2t} \cos(3t) + \frac{3}{13} e^{-2t} \operatorname{sen}(3t)$$

$$\int \frac{\cos(3t)}{e^t} dt = \frac{3}{10} e^{-t} \operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{10} e^{-t} \cos(3t)$$

Sustituyendo estos resultados en y_p y reduciendo la expresión obtendremos la solución particular

$$y_p = \frac{4}{13} + \frac{3}{10} e^t$$

Por tanto, la solución general en términos de la variable t es

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \operatorname{sen}(3t) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10} e^t$$

Si regresamos a la variable original $x = e^t$ obtenemos finalmente que la solución general de la ecuación de Cauchy – Euler es

$$y(x) = c_1 x^2 \cos(3 \ln x) + c_2 x^2 \operatorname{sen}(3 \ln x) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10} x$$

Capítulo 2

Diseño Metodológico

2.1. Tipo de investigación

El tipo de investigación es cuantitativa.

2.2. Método de investigación

El método de esta investigación es cuantitativo, solucionamos las ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler teniendo en cuenta su grado y las funciones particulares como cero, polinómica, exponencial y trigonométrica utilizando los B-Splines en cual trataremos de elegir el tamaño adecuado del intervalo h para su precisión.

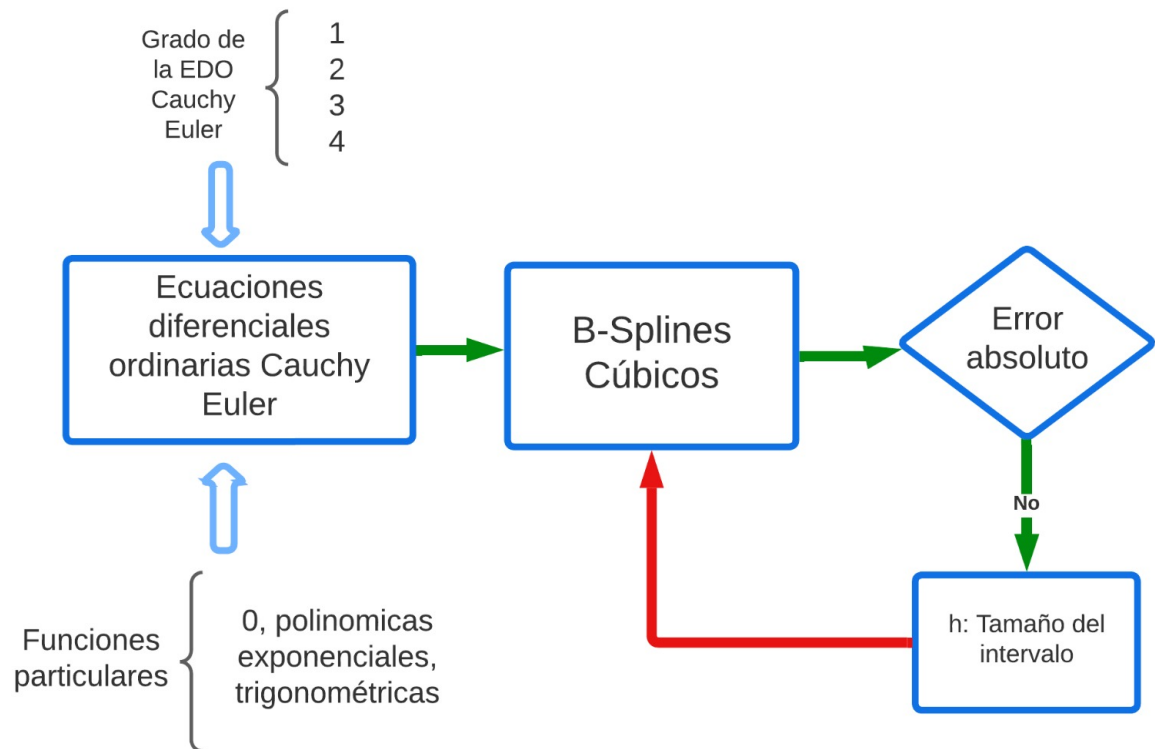
2.3. Diseño de contrastación

El diseño de contrastación de hipótesis se muestra en la figura 2.1.

2.4. Población y muestra

2.4.1. Población

La población son las ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler homogéneas y polinómicas para las cuales se evaluará la precisión del método.

Figura 2.1*Diseño de Contrastación*

2.4.2. Muestra

Se escogerán casos de pruebas específicos para demostrar como los B-Splines cúbicos pueden aplicarse con precisión en diferentes escenarios.

2.5. Técnicas e instrumentos

B-Splines cúbicos.

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo presentaremos las ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler homogéneas y no homogéneas por el Método de B-splines cúbicos.

Desarrollaremos el método de resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler por el método de B-splines cúbicos para el caso de segundo orden, recordando que es posible extender el método a cualquier orden siguiendo el mismo razonamiento.

3.1. E.D.O. de Cauchy-Euler por B-splines cúbicos

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de Cauchy-Euler

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x) \quad (3.1)$$

Consideremos la ecuación (3.1) con condiciones iniciales

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (3.2)$$

Para $x \in [a, b]$ con un ancho de intervalo constante $h = x_{i+1} - x_i$. (Ware y Ashine, 2021)

Según Munguia y Bhatta, 2015. Para aproximar la solución de este problema de valor de frontera (3.1) usando B-splines cúbicos, dejamos que $Y(x)$ sea un splines cúbico con nudos Δ_N . Entonces $Y(x)$ se puede escribir como combinaciones lineales de $N_i(x)$. Entonces por (1.20), se tiene

$$Y(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} c_i N_i(x) \quad (3.3)$$

Donde determinaremos las constantes c_i ; y los B-splines $N_i(x)$ se definen en (1.30).

Se pretende que (3.3) satisfaga la ecuación (3.1) y las condiciones de frontera (3.2) en $x = x_i$ donde x_i es un punto interior de $[a, b]$. Es decir

$$ax_i^2 Y''(x_i) + bx_i Y'(x_i) + cY(x_i) = g(x_i) \quad (3.4)$$

con condiciones de frontera

$$Y(x_0) = \alpha \quad , \quad Y(x_N) = \beta \quad \text{con} \quad x_0 = a, x_N = b \quad (3.5)$$

De (3.3) tenemos (Tung et al., 2022)

$$\begin{aligned} Y(x_i) &= c_{i-1} N_{i-1}(x_i) + c_i N_i(x_i) + c_{i+1} N_{i+1}(x_i) + c_{i+2} N_{i+2}(x_i) \\ Y'(x_i) &= c_{i-1} N'_{i-1}(x_i) + c_i N'_i(x_i) + c_{i+1} N'_{i+1}(x_i) + c_{i+2} N'_{i+2}(x_i) \\ Y''(x_i) &= c_{i-1} N''_{i-1}(x_i) + c_i N''_i(x_i) + c_{i+1} N''_{i+1}(x_i) + c_{i+2} N''_{i+2}(x_i) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Reemplazando (3.6) en (3.4), se tiene

$$\begin{aligned} & ax_i^2 \left[c_{i-1} N''_{i-1}(x_i) + c_i N''_i(x_i) + c_{i+1} N''_{i+1}(x_i) + c_{i+2} N''_{i+2}(x_i) \right] \\ & + bx_i \left[c_{i-1} N'_{i-1}(x_i) + c_i N'_i(x_i) + c_{i+1} N'_{i+1}(x_i) + c_{i+2} N'_{i+2}(x_i) \right] \\ & + c \left[c_{i-1} N_{i-1}(x_i) + c_i N_i(x_i) + c_{i+1} N_{i+1}(x_i) + c_{i+2} N_{i+2}(x_i) \right] = g(x_i) \end{aligned}$$

Factorizando y ordenando, tenemos

$$c_{i-1}[ax_i^2 N_{i-1}''(x_i) + bx_i N_{i-1}'(x_i) + cN_{i-1}(x_i)] + c_i[ax_i^2 N_i''(x_i) + bx_i N_i'(x_i) + cN_i(x_i)] + c_{i+1}[ax_i^2 N_{i+1}''(x_i) + bx_i N_{i+1}'(x_i) + cN_{i+1}(x_i)] + c_{i+2}[ax_i^2 N_{i+2}''(x_i) + bx_i N_{i+2}'(x_i) + cN_{i+2}(x_i)] = g(x_i) \quad (3.7)$$

Derivamos (1.30) hasta la segunda derivada. (Alberto y David, 2021)

$$N_i'(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} 3(x - x_{i-2})^2 & , \text{ si } x_{i-2} \leq x < x_{i-1}, \\ -9(x - x_{i-1})^2 + 6h(x - x_{i-1}) + 3h^2 & , \text{ si } x_{i-1} \leq x < x_i \\ -9(x_{i+1} - x)^2 + 6h(x_{i+1} - x) + 3h^2 & , \text{ si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 3(x_{i+2} - x)^2 & , \text{ si } x_{i+1} \leq x < x_{i+2}, \\ 0 & , \text{ en caso contrario} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$N_i''(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} 6(x - x_{i-2}) & , \text{ si } x_{i-2} \leq x < x_{i-1}, \\ -18(x - x_{i-1}) + 6h & , \text{ si } x_{i-1} \leq x < x_i \\ -18(x_{i+1} - x) + 6h & , \text{ si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 6(x_{i+2} - x) & , \text{ si } x_{i+1} \leq x < x_{i+2}, \\ 0 & , \text{ en caso contrario} \end{cases} \quad (3.9)$$

De (3.9) se tiene

$$\begin{aligned}
N''_{i-1}(x_i) &= \frac{1}{6h^3} 6(x_{i-1} - x_{i-2}) = \frac{1}{6h^3} 6h = \frac{1}{h^2} \\
N''_i(x_i) &= \frac{1}{6h^3} [-18(x_i - x_{i-1}) + 6h] = \frac{1}{6h^3} [-18h + 6h] = \frac{-2}{h^2} \\
N''_{i+1}(x_i) &= \frac{1}{6h^3} [6(x_{i+2} - x_{i+1})] = \frac{1}{6h^3} [6h] = \frac{1}{h^2} \\
N''_{i+2}(x_i) &= \frac{1}{6h^3} (0) = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Análogamente de (3.8) y de (1.30), se tiene

$$\begin{aligned}
N'_{i-1}(x_i) &= \frac{-1}{2h} & N_{i-1}(x_i) &= \frac{1}{6} \\
N'_i(x_i) &= 0 & N_i(x_i) &= \frac{2}{3} \\
N'_{i+1}(x_i) &= \frac{1}{2h} & N_{i+1}(x_i) &= \frac{1}{6} \\
N'_{i+2}(x_i) &= 0 & N_{i+2}(x_i) &= 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Reemplazando (3.10) y (3.11) en (3.7), se tiene

$$\begin{aligned}
&c_{i-1} \left[ax^2 \left(\frac{1}{h^2} \right) + bx \left(\frac{-1}{2h} \right) + c \left(\frac{1}{6} \right) \right] + c_i \left[ax^2 \left(\frac{-2}{h^2} \right) + bx(0) + c \left(\frac{2}{3} \right) \right] + c_{i+1} \left[ax^2 \left(\frac{1}{h^2} \right) + bx \left(\frac{1}{2h} \right) + c \left(\frac{1}{6} \right) \right] \\
&+ c_{i+2} [ax^2(0) + bx(0) + c(0)] = g(x_i)
\end{aligned}$$

$$c_{i-1} \left[\frac{6ax_i^2 - 3hbx_i + h^2c}{6h^2} \right] + c_i \left[\frac{-6ax_i^2 + 2h^2c}{3h^2} \right] + c_{i+1} \left[\frac{6ax_i^2 + 3hbx_i + h^2c}{6h^2} \right] = g(x_i)$$

$$c_{i-1} [6ax_i^2 - 3hbx_i + h^2c] + c_i [-12ax_i^2 + 4h^2c] + c_{i+1} [6ax_i^2 + 3hbx_i + h^2c] = 6h^2g(x_i) \tag{3.12}$$

Hacemos

$$\begin{aligned} p_i &= 6ax_i^2 - 3hbx_i + h^2c \\ q_i &= -12ax_i^2 + 4h^2c \\ r_i &= 6ax_i^2 + 3hbx_i + h^2c \end{aligned} \quad (3.13)$$

Reemplazando la expresión (3.13) en la ecuación (3.12), se tiene

$$c_{i-1}p_i + c_iq_i + c_{i+1}r_i = 6h^2g(x_i) \quad (3.14)$$

Ahora aplicamos las condiciones de contorno (3.5) en (3.6)

$$\begin{aligned} Y(x_0) &= c_{-1}N_{-1}(x_0) + c_0N_0(x_0) + c_1N_1(x_0) + c_2N_2(x_0) = \alpha \\ Y(x_N) &= c_{N-1}N_{N-1}(x_N) + c_NN_N(x_N) + c_{N+1}N_{N+1}(x_N) + c_{N+2}N_{N+2}(x_N) = \beta \end{aligned} \quad (3.15)$$

Encontramos el valor de $N_i(x)$ de (1.30). (Caglar y Caglar, 2009)

Para $x = x_0$

$$\begin{aligned} N_{-1}(x_0) &= \frac{1}{6h^3}(x_{-1} - x_{-2})^3 = \frac{1}{6h^3}(h)^3 = \frac{1}{6} \\ N_0(x_0) &= \frac{1}{6h^3}[-3(x_0 - x_{-1})^3 + 3h(x_0 - x_{-1})^2 + 3h^2(x_0 - x_{-1}) + h^3] \\ &= \frac{1}{6h^3}[-3h^3 + 3h^3 + 3h^3 + h^3] \\ &= \frac{1}{6h^3}(4h^3) \\ &= \frac{4}{6} \\ N_1(x_0) &= \frac{1}{6h^3}(x_2 - x_1)^3 = \frac{1}{6h^3} \cdot h^3 = \frac{1}{6} \\ N_2(x_0) &= \frac{1}{6h^3}(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Análogamente

$$N_{N-1}(x_N) = \frac{1}{6}, \quad N_N(x_N) = \frac{4}{6}, \quad N_{N+1}(x_N) = \frac{1}{6}, \quad N_{N+2}(x_N) = 0 \quad (3.17)$$

Reemplazando (3.14) y (3.15) en (3.13), se tiene

$$\begin{aligned} c_{-1}\left(\frac{1}{6}\right) + c_0\left(\frac{4}{6}\right) + c_1\left(\frac{1}{6}\right) + c_2(0) &= \alpha \\ c_{-1} + 4c_0 + c_1 &= 6\alpha \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} c_{N-1}\left(\frac{1}{6}\right) + c_N\left(\frac{4}{6}\right) + c_{N+1}\left(\frac{1}{6}\right) + c_{N+2}(0) &= \beta \\ c_{N-1} + 4c_N + c_{N+1} &= 6\beta \end{aligned} \quad (3.19)$$

■ De (3.16), para $i = 0$ se tiene

$$c_{-1}p_0 + c_0q_0 + c_1r_0 = 6h^2g(x_0) \quad (3.20)$$

De (3.20) obtenemos

$$c_{-1} = 6\alpha - 4c_0 - c_1 \quad (3.21)$$

Reemplazamos (3.21) en (3.20)

$$\begin{aligned} (6\alpha - 4c_0 - c_1)p_0 + c_0q_0 + c_1r_0 &= 6h^2g(x_0) \\ 6\alpha p_0 - 4c_0p_0 - c_1p_0 + c_0q_0 + c_1r_0 &= 6h^2g(x_0) \\ (-4p_0 + q_0)c_0 + (-p_0 + r_0)c_1 &= 6[h^2g(x_0) - \alpha p_0] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Hacemos

$$o_1 = -4p_0 + q_0 \quad o_2 = -p_0 + r_0 \quad z_0 = h^2 g(x_0) - \alpha p_0 \quad (3.23)$$

La ecuación (3.24) se reduce a

$$o_1 c_0 + o_2 c_1 = 6z_0 \quad (3.24)$$

■ De (3.16), para $i = 1$ se tiene

$$c_0 p_1 + c_1 q_1 + c_2 r_1 = 6h^2 g(x_1) \quad (3.25)$$

■ De (3.16), para $i = 2$ se tiene

$$c_1 p_2 + c_2 q_2 + c_3 r_2 = 6h^2 g(x_2) \quad (3.26)$$

■ De (3.16), para $i = N - 1$ se tiene

$$c_{N-2} p_{N-1} + c_{N-1} q_{N-1} + c_N r_{N-1} = 6h^2 g(x_{N-1}) \quad (3.27)$$

■ De (3.16), para $i = N$ se tiene

$$c_{N-1} p_N + c_N q_N + c_{N+1} r_N = 6h^2 g(x_N) \quad (3.28)$$

De (3.21) obtenemos

$$c_{N+1} = 6\beta - c_{N-1} - 4c_N \quad (3.29)$$

Reemplazamos (3.31) en (3.30)

$$c_{N-1} p_N + c_N q_N + (6\beta - c_{N-1} - 4c_N) r_N = 6h^2 g(x_N)$$

$$\begin{aligned}
c_{N-1}p_N + c_Nq_N + 6\beta r_N - c_{N-1}r_N - 4c_Nr_N &= 6h^2g(x_N) \\
(p_N - r_N)c_{N-1} + (q_N - 4r_N)c_N &= 6[h^2g(x_N) - \beta r_N]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Hacemos

$$o_3 = p_N - r_N \quad o_4 = q_N - 4r_N \quad z_N = h^2g(x_N) - \beta r_N \tag{3.31}$$

La ecuación (3.32) se reduce a

$$o_3c_{N-1} + o_4c_N = 6z_N \tag{3.32}$$

De (3.13), (3.23) y (3.31) se tiene

$$\begin{aligned}
p_i &= 6ax_i^2 - 3hbx_i + h^2c \\
q_i &= -12ax_i^2 + 4h^2c \\
r_i &= 6ax_i^2 + 3hbx_i + h^2c \\
o_1 &= -4p_0 + q_0 \\
o_2 &= -p_0 + r_0 \\
o_3 &= p_N - r_N \\
o_4 &= q_N - 4r_N \\
z_0 &= h^2g(x_0) - \alpha p_0 \\
z_N &= h^2g(x_N) - \beta r_N
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Formamos el sistema $(N+1) \times (N+1)$ con las ecuaciones (3.14) y (3.33). (Latif et al., 2021)

$$\begin{pmatrix} o_1 & o_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & q_1 & r_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & r_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{N-2} & q_{N-2} & r_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{N-1} & q_{N-1} & r_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & o_3 & o_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \\ c_N \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} z_0 \\ h^2 g(x_1) \\ h^2 g(x_2) \\ \vdots \\ h^2 g(x_{N-2}) \\ h^2 g(x_{N-1}) \\ h^2 g(x_N) \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Después de obtener el resultado se reemplaza en la ecuación (2.11).

$$Y(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} c_i N_i^n(x)$$

Donde $Y(x)$ es una función cúbica por partes.

3.2. Aplicaciones

Aplicación 1. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de Cauchy-Euler

$$x^2 y'' - 5xy' + 8y = 24 \quad (3.35)$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} y(1) &= 3 \\ y(2) &= 15 \end{aligned} \quad (3.36)$$

La solución exacta a este problema de valores en la frontera es

$$y(x) = -x^2 + x^4 + 3 \quad (3.37)$$

Vea el ejemplo 2.7

Solución.

Para $N = 10$, $h = \frac{2-1}{10} = 0,1$

$$ax_i^2 = x_i^2$$

$$bx_i = -5x_i$$

$$c = 8$$

$$\alpha = 3$$

$$\beta = 15$$

$$g(x_i) = 24$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1,1$$

$$x_2 = 1,2$$

$$x_3 = 1,3$$

$$x_4 = 1,4$$

$$x_5 = 1,5$$

$$x_6 = 1,6$$

$$x_7 = 1,7$$

$$x_8 = 1,8$$

$$x_9 = 1,9$$

$$x_{10} = 2$$

Reemplazando en (3.33) y (3.34)

$$p_i = 6x_i^2 + 15hx_i + 8h^2$$

$$q_i = -12x_i^2 + 32h^2$$

$$r_i = 6x_i^2 - 15hx_i + 8h^2$$

Para $i = 0$, $h = 0,1$ y $x_0 = 1$

$$\begin{array}{lll}
p_0 = 6x_0^2 + 15hx_0 + 8h^2 & q_0 = -12x_0^2 + 32h^2 & r_0 = 6x_0^2 - 15hx_0 + 8h^2 \\
= 6(1)^2 + 15(0,1)(1) + 8(0,1)^2 & = -12(1)^2 + 32(0,1)^2 & = 6(1)^2 - 15(0,1)(1) + 8(0,1)^2 \\
= 7,58 & = -11,68 & = 4,58
\end{array}$$

análogamente

Para $i = 1$, $h = 0,1$ y $x_1 = 1,1$

$$p_1 = 8,99 \qquad q_1 = -14,2 \qquad r_1 = 5,69$$

Para $i = 2$, $h = 0,1$ y $x_2 = 1,2$

$$p_2 = 10,52 \qquad q_2 = -16,96 \qquad r_2 = 6,92$$

Para $i = 3$, $h = 0,1$ y $x_3 = 1,3$

$$p_3 = 12,17 \qquad q_3 = -19,96 \qquad r_3 = 8,27$$

Para $i = 4$, $h = 0,1$ y $x_4 = 1,4$

$$p_4 = 13,94 \qquad q_4 = -23,2 \qquad r_4 = 9,74$$

Para $i = 5$, $h = 0,1$ y $x_5 = 1,5$

$$p_5 = 15,83 \qquad q_5 = -26,68 \qquad r_5 = 11,33$$

Para $i = 6$, $h = 0,1$ y $x_6 = 1,6$

$$p_6 = 17,84$$

$$q_6 = -30,4$$

$$r_6 = 13,04$$

Para $i = 7$, $h = 0,1$ y $x_7 = 1,7$

$$p_7 = 19,97$$

$$q_7 = -34,36$$

$$r_7 = 14,87$$

Para $i = 8$, $h = 0,1$ y $x_8 = 1,8$

$$p_8 = 22,22$$

$$q_8 = -38,56$$

$$r_8 = 16,82$$

Para $i = 9$, $h = 0,1$ y $x_9 = 1,9$

$$p_9 = 24,59$$

$$q_9 = -43$$

$$r_9 = 18,89$$

Para $i = 10$, $h = 0,1$ y $x_{10} = 2$

$$p_{10} = 27,08$$

$$q_{10} = -47,68$$

$$r_{10} = 21,08$$

$$o_1 = -4p_0 + q_0$$

$$o_2 = -p_0 + r_0$$

$$o_3 = p_{10} - r_{10}$$

$$o_4 = q_{10} - 4r_{10}$$

$$= -4(7,58) + (-11,68)$$

$$= -7,58 + 4,58$$

$$= 27,08 - 21,08$$

$$= -47,68 - 4(21,08)$$

$$= -42$$

$$= -3$$

$$= 6$$

$$= -132$$

$$\begin{aligned}
z_0 &= h^2 g(x_0) - \rho p_0 & z_N &= h^2 g(x_{10}) - \eta r_{10} \\
&= (0,1)^2(24) - 3(7,58) & &= (0,1)^2(24) - 15(21,08) \\
&= -22,5 & &= -315,96
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Para $N = 10$, formamos el sistema $(11) \times (11)$ y reemplazamos los valores encontrados en (3.34)

$$\begin{pmatrix}
-42 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8,99 & -14,2 & 5,69 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 10,52 & -16,96 & 6,92 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 12,17 & -19,96 & 8,27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 13,94 & -23,2 & 9,74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 15,83 & -26,68 & 11,33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17,84 & -30,4 & 13,04 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19,97 & -34,36 & 14,87 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22,22 & -38,56 & 16,82 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24,59 & -43 & 18,89 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -132
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
c_0 \\
c_1 \\
c_2 \\
c_3 \\
c_4 \\
c_5 \\
c_6 \\
c_7 \\
c_8 \\
c_9 \\
c_{10}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-135 \\
1,44 \\
1,44 \\
1,44 \\
1,44 \\
1,44 \\
1,44 \\
1,44 \\
1,44 \\
1,44 \\
-1895,76
\end{pmatrix}$$

Resolviendo con ayuda del programa Pythom obtenemos que el resultado del sistema es:

De la tabla (3.1) y de (3.18) y (3.19), se tiene

$$\begin{aligned}
c_{-1} + 4c_0 + c_1 &= 6\alpha & c_{N-1} + 4c_N + c_{N+1} &= 6\beta \\
c_{-1} + 4(2,9834) + (3,2327) &= 6(3) & c_9 + 4c_{10} + c_{11} &= 6(15) \\
c_{-1} + 15,1663 &= 18 & 12,3518 + 4(14,9233) + c_{11} &= 90 \\
c_{-1} &= 2,8337 & c_{11} &= 17,955
\end{aligned}$$

Tabla 3.1*Resultados del sistema*

c_0	2.9834
c_1	3.2327
c_2	3.6070
c_3	4.1339
c_4	4.8435
c_5	5.7682
c_6	6.9429
c_7	8.4049
c_8	10.1938
c_9	12.3518
c_{10}	14.9233

Luego los coeficientes son:

$$\begin{array}{lll}
 c_{-1} = 2,83378288 & c_0 = 2,98337829 & c_1 = 3,23270396 \\
 c_2 = 3,6069992 & c_3 = 4,13391052 & c_4 = 4,84349137 \\
 c_5 = 5,76820198 & c_6 = 6,94290911 & c_7 = 8,40488603 \\
 c_8 = 10,1938123 & c_9 = 12,35177377 & c_{10} = 14,92326244 \\
 c_{11} = 17,95517646 & &
 \end{array}$$

Después de hallar los coeficientes se realiza el producto con la ecuación (2.11).

$$Y(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} c_i N_i^n(x)$$

y por lo tanto se obtiene los polinomios cúbicos con ayuda del Pythom.

$$Y(x) = \begin{cases} 31,3427(x-1)^3 + 0(x-1)^2 + 2,2219(x-1) + 3 & [1,0;1,1) \\ 6,9116(x-1,1)^3 + 9,4028(x-1,1)^2 + 2,7796(x-1,1) + 3,2535 & [1,1;1,2) \\ 7,5134(x-1,2)^3 + 11,4763(x-1,2)^2 + 4,0964(x-1,2) + 3,6324 & [1,2;1,3) \\ 8,1150(x-1,3)^3 + 13,7303(x-1,3)^2 + 5,6957(x-1,3) + 4,1644 & [1,3;1,4) \\ 8,7167(x-1,4)^3 + 16,1648(x-1,4)^2 + 7,6016(x-1,4) + 4,8793 & [1,4;1,5) \\ 9,3183(x-1,5)^3 + 18,7798(x-1,5)^2 + 9,8380(x-1,5) + 5,8099 & [1,5;1,6) \\ 9,9199(x-1,6)^3 + 21,5753(x-1,6)^2 + 12,4292(x-1,6) + 6,9908 & [1,6;1,7) \\ 10,5215(x-1,7)^3 + 24,5513(x-1,7)^2 + 15,3991(x-1,7) + 8,4594 & [1,7;1,8) \\ 11,1230(x-1,8)^3 + 27,7077(x-1,8)^2 + 18,7718(x-1,8) + 10,2553 & [1,8;1,9) \\ -103,4821(x-1,9)^3 + 31,0446(x-1,9)^2 + 23,7234(x-1,9) + 12,4207 & [1,9;2,0] \end{cases}.$$

Solución utilizando los B-Splines cúbicos para $h=0.10$.

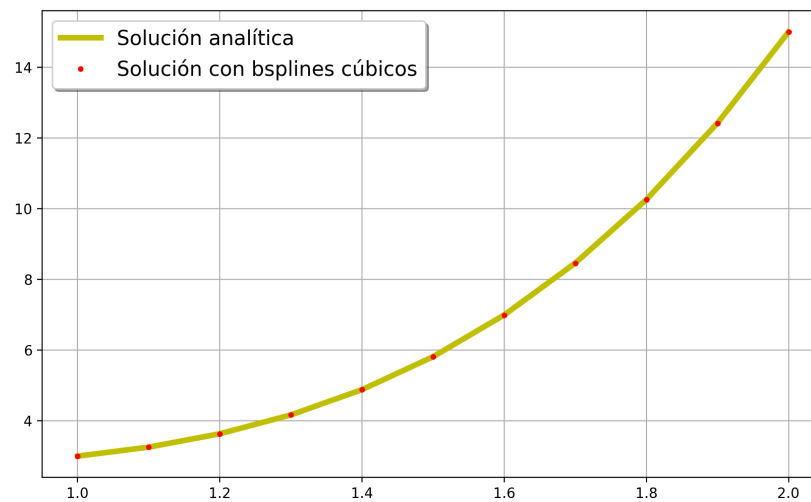
Tabla 3.2

Resultados

x	B-Splines Cúbicos
1.0	3.00000000
1.1	3.25353222
1.2	3.63243522
1.3	4.16435544
1.4	4.87934633
1.5	5.80986807
1.6	6.99078741
1.7	8.45937759
1.8	10.25531817
1.9	12.42069497
2.0	15.00000000

Figura 3.1

Comparación de resultados de la solución real y B-Splines Cúbicos para un $h=0.1$



Como se puede observar en la figura (3.1) se concluye que mientras mas pequeño sea h se aproxima mejor a la solución.

Comparación de Resultados B-Splines con la solución real

Tabla 3.3

Resultados de B-spline cúbicos y errores absolutos y relativos para la aplicación 1.

x	B-Spline Cúbico	Solución real	Error Absoluto	Error relativo
1.0	3.00000000	3.0000	0.000000000	0.000000000
1.1	3.25353222	3.2541	0.000567776	0.00017448
1.2	3.63243522	3.6336	0.001164784	0.000320559
1.3	4.16435544	4.1661	0.001744557	0.000418751
1.4	4.87934633	4.8816	0.002253668	0.000461666
1.5	5.80986807	5.8125	0.002631935	0.000452806
1.6	6.99078741	6.9936	0.002812591	0.000402166
1.7	8.45937759	8.4621	0.002722413	0.000321718
1.8	10.25531817	10.2576	0.002281833	0.000222453
1.9	12.42069497	12.4221	0.00140503	0.000113107
2.0	15.00000000	15.0000	0.000000000	0.000000000

El porcentaje de error es:

$$||Error \text{ relativo}|| \times 100\% = 0,023460237930601004\% \quad (3.39)$$

Aplicación 2. Consideremos el siguiente problema con valores en la frontera

$$x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0, \quad \text{para } 1 < x < 2 \quad (3.40)$$

con condiciones de contorno $y(1) = 5$, $y(2) = 0$.

La solución exacta a este problema de valores en la frontera es

$$y = \frac{5}{x} [\cos(\sqrt{2} \ln x) - \operatorname{ctg}(\sqrt{2} \ln 2) \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln x)] \quad (3.41)$$

Vea el problema 2.4

Solución.

$$\begin{array}{lllll} \text{Para } N = 20 & h = \frac{2-1}{20} = 0,05 & g(x) = 0 & & \\ ax_i^2 = x_i^2 & bx_i = 3x_i & c = 3 & \alpha = 5 & \beta = 0 \end{array}$$

Reemplazamos en (3.33) y (3.34)

$$\begin{aligned} p_i &= 6x_i^2 - 9hx_i + 3h^2 \\ q_i &= -12x_i^2 + 12h^2 \\ r_i &= 6x_i^2 + 9hx_i + 3h^2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para $i = 0$, $h = 0,05$ y $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} p_0 &= 6x_0^2 - 9hx_0 + 3h^2 & q_0 &= -12x_0^2 + 12h^2 & r_0 &= 6x_0^2 + 9hx_0 + 3h^2 \\ &= 6(1)^2 - 9(0,05)(1) + 3(0,05)^2 & &= -12(1)^2 + 12(0,05)^2 & &= 6(1)^2 + 9(0,05)(1) + 3(0,05)^2 \\ &= 5,5575 & &= -11,97 & &= 6,4575 \end{aligned}$$

Análogamente

$p_1 = 6,15$	$q_1 = -13,2$	$r_1 = 7,095$
$p_2 = 6,7725$	$q_2 = -14,49$	$r_2 = 7,7625$
$p_3 = 7,425$	$q_3 = -15,84$	$r_3 = 8,46$
$p_4 = 8,1075$	$q_4 = -17,25$	$r_4 = 9,1875$
$p_5 = 8,82$	$q_5 = -18,72$	$r_5 = 9,945$
$p_6 = 9,5625$	$q_6 = -20,25$	$r_6 = 10,7325$
$p_7 = 10,335$	$q_7 = -21,84$	$r_7 = 11,55$
$p_8 = 11,1375$	$q_8 = -23,49$	$r_8 = 12,3975$
$p_9 = 11,97$	$q_9 = -25,2$	$r_9 = 13,275$
$p_{10} = 12,8325$	$q_{10} = -26,97$	$r_{10} = 14,1825$
$p_{11} = 13,725$	$q_{11} = -28,8$	$r_{11} = 15,12$
$p_{12} = 14,6475$	$q_{12} = -30,69$	$r_{12} = 16,0875$

$p_{13} = 15,6$	$q_{13} = -32,64$	$r_{13} = 17,085$
$p_{14} = 16,5825$	$q_{14} = -34,65$	$r_{14} = 18,1125$
$p_{15} = 17,595$	$q_{15} = -36,72$	$r_{15} = 19,17$
$p_{16} = 18,6375$	$q_{16} = -38,85$	$r_{16} = 20,2575$
$p_{17} = 19,71$	$q_{17} = -41,04$	$r_{17} = 21,375$
$p_{18} = 20,8125$	$q_{18} = -43,29$	$r_{18} = 22,5225$
$p_{19} = 21,945$	$q_{19} = -45,6$	$r_{19} = 23,7$
$p_{20} = 23,1075$	$q_{20} = -47,97$	$r_{20} = 24,9075$

$o_1 = -4p_0 + q_0$	$o_2 = -p_0 + r_0$	$o_3 = p_{20} - r_{20}$	$o_4 = q_{20} - 4r_{20}$
$= -4(5,5575) + (-11,97)$	$= -5,5575 + 6,4575$	$= 23,1075 - 24,9075$	$= -47,97 - 4(24,9075)$
$= -34,2$	$= 0,9$	$= -1,8$	$= -147,6$

$z_0 = h^2 g(x_0) - \alpha p_0$	$z_{20} = h^2 g(x_{20}) - \beta r_{20}$
$= (0,05)^2(0) - 5(5,5575)$	$= (0,05)^2(0) - 0(24,9075)$
$= -28,7875$	$= 0$

-34,2	0,9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₀	(-166,725)
6,15	-13,2	7,095	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₁	0
0	6,7725	-14,49	7,7625	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₂	0
0	0	7,425	-15,84	8,46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₃	0
0	0	0	8,1075	-17,25	9,1875	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₄	0
0	0	0	0	8,82	-18,72	9,945	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₅	0
0	0	0	0	0	9,5625	-20,25	10,7325	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₆	0
0	0	0	0	0	0	10,335	-21,84	11,55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₇	0
0	0	0	0	0	0	0	11,1375	-23,49	12,3975	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₈	0
0	0	0	0	0	0	0	0	11,97	-25,2	13,275	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₉	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	12,8325	-26,97	14,1825	0	0	0	0	0	0	0	c ₁₀	= 0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13,725	-28,8	15,12	0	0	0	0	0	0	c ₁₁	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14,6475	-30,69	16,0875	0	0	0	0	0	c ₁₂	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15,6	-32,64	17,085	0	0	0	0	c ₁₃	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16,5825	-34,65	18,1125	0	0	0	c ₁₄	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17,595	-36,72	19,17	0	0	c ₁₅	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18,6375	-38,85	20,2575	0	c ₁₆	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19,71	-41,04	21,375	c ₁₇	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20,8125	-43,29	c ₁₈	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21,945	c ₁₉	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c ₂₀	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,8	c ₂₁	0

Resolviendo con ayuda del programa Pythom obtenemos que el resultado del sistema es:

$$\begin{array}{lll}
 c_0 = 4,994073274 & c_1 = 4,524784412 & c_2 = 4,089302834 \\
 c_3 = 3,685654832 & c_4 = 3,311784751 & c_5 = 2,965642493 \\
 c_6 = 2,645237403 & c_7 = 2,348670027 & c_8 = 2,074149336 \\
 c_9 = 1,820000442 & c_{10} = 1,584666183 & c_{11} = 1,366704832 \\
 c_{12} = 1,164785437 & c_{13} = 0,977681805 & c_{14} = 0,804265806 \\
 c_{15} = 0,643500436 & c_{16} = 0,494432924 & c_{17} = 0,356188065 \\
 c_{18} = 0,227961883 & c_{19} = 0,109015687 & c_{20} = 0,001329460
 \end{array}$$

Reemplazamos c_0 , c_1 , c_{19} , c_{20} y c_{21} en (3.18) y (3.19), se tiene

$$c_{-1} = 5,498922492 \qquad c_{21} = 0,103697849$$

Ahora realizamos el producto con la ecuación (2.11)

$$Y(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} c_i N_i^n(x)$$

y por lo tanto se obtiene los polinomios cúbicos con ayuda del Pythom.

$$Y(x) = \left\{ \begin{array}{ll}
 67,5410(x-1,0)^3 + 0(x-1,0)x^2 - 9,5605(x-1,0) + 5,0 & [1,0;1,05) \\
 -3,9011(x-1,05)^3 + 10,1312(x-1,05)^2 - 9,2130(x-1,05) + 4,5304 & [1,05;1,1) \\
 -4,0821(x-1,1)^3 + 9,5459(x-1,1)^2 - 8,5469(x-1,1) + 4,0946 & [1,1;1,15) \\
 -4,0822(x-1,15)^3 + 8,9337(x-1,15)^2 - 7,9207(x-1,15) + 3,6906 & [1,15;1,2) \\
 -3,9707(x-1,2)^3 + 8,3213(x-1,2)^2 - 7,3356(x-1,2) + 3,3164 & [1,2;1,25) \\
 -3,7932(x-1,25)^3 + 7,7257(x-1,25)^2 - 6,7912(x-1,25) + 2,9699 & [1,25;1,3) \\
 -3,5795(x-1,3)^3 + 7,1567(x-1,3)^2 - 6,2862(x-1,3) + 2,6492 & [1,3;1,35) \\
 -3,3492(x-1,35)^3 + 6,6198(x-1,35)^2 - 5,8186(x-1,35) + 2,3523 & [1,35;1,4)
 \end{array} \right. .$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
-3,1151(x-1,4)^3 + 6,1174(x-1,4)^2 - 5,3862(x-1,4) + 2,0775 & [1,4; 1,45) \\
-2,8850(x-1,45)^3 + 5,6501(x-1,45)^2 - 4,9867(x-1,45) + 1,8231 & [1,45; 1,5) \\
-2,6639(x-1,5)^3 + 5,2174(x-1,5)^2 - 4,6178(x-1,5) + 1,5875 & [1,5; 1,55) \\
-2,4546(x-1,55)^3 + 4,8178(x-1,55)^2 - 4,2772(x-1,55) + 1,3693 & [1,55; 1,6) \\
-2,2585(x-1,6)^3 + 4,4496(x-1,6)^2 - 3,9626(x-1,6) + 1,1672 & [1,6; 1,65) \\
-2,0763(x-1,65)^3 + 4,1108(x-1,65)^2 - 3,6721(x-1,65) + 0,9799 & [1,65; 1,7) \\
-1,9077(x-1,7)^3 + 3,7994(x-1,7)^2 - 3,4036(x-1,7) + 0,8063 & [1,7; 1,75) \\
-1,7525(x-1,75)^3 + 3,5132(x-1,75)^2 - 3,1555(x-1,75) + 0,6454 & [1,75; 1,8) \\
-1,6099(x-1,8)^3 + 3,2503(x-1,8)^2 - 2,9260(x-1,8) + 0,4962 & [1,8; 1,85) \\
-1,4792(x-1,85)^3 + 3,0088(x-1,85)^2 - 2,7137(x-1,85) + 0,3578 & [1,85; 1,9) \\
-1,3595(x-1,9)^3 + 2,7869(x-1,9)^2 - 2,5171(x-1,9) + 0,2295 & [1,9; 1,95) \\
-17,2203(x-1,95)^3 + 2,5830(x-1,95)^2 - 2,2950(x-1,95) + 0,1104 & [1,95; 2,0]
\end{array} \right. .$$

Solución utilizando los B-Splines cúbicos para $h=0.05$.

Tabla 3.4

Resultados

x	B-Splines Cúbicos
1.00	5.00000000
1.05	4.53041896
1.10	4.09460843
1.15	3.69061782
1.20	3.31640605
1.25	2.96993202
1.30	2.64921036
1.35	2.35234447
1.40	2.07754464
1.45	1.82313621
1.50	1.58756167
1.55	1.36937849
1.60	1.16725473
1.65	0.97996308
1.70	0.80637424
1.75	0.64545008
1.80	0.49623670
1.85	0.35785784
1.90	0.22950855
1.95	0.11044920
2.00	0.00000000

Comparación de Resultados B-Splines con la solución real.

Tabla 3.5

Resultados de B-spline cúbicos y errores absolutos y relativos para la aplicación 2.

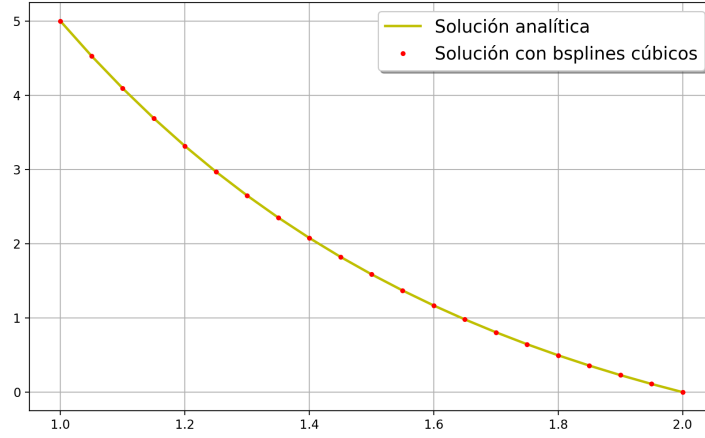
x	B-Splines Cúbico	Solución Real	Error Absoluto	Error Relativo
1.0	5.00000000	5.00000000	0.00000000	0.00000000
1.05	4.53041896	4.530496232	0.000077272	0.000017056
1.1	4.09460843	4.09476935	0.00016092	0.000039298
1.15	3.69061782	3.690857197	0.000239378	0.000064856
1.2	3.31640605	3.316712611	0.000306556	0.000092427
1.25	2.96993202	2.970291726	0.000359705	0.000121101
1.3	2.64921036	2.649608428	0.000398072	0.000150238
1.35	2.35234447	2.352766548	0.000422073	0.000179394
1.4	2.07754464	2.077977396	0.000432761	0.000208261
1.45	1.82313621	1.823567715	0.000431501	0.000236624
1.5	1.58756167	1.587981442	0.000419774	0.000264345
1.55	1.36937849	1.369777548	0.000399056	0.000291329
1.6	1.16725473	1.16762548	0.000370749	0.000317524
1.65	0.97996308	0.980299222	0.000336144	0.000342899
1.7	0.80637424	0.806670653	0.000296408	0.000367447
1.75	0.64545008	0.645702658	0.000252578	0.000391168
1.8	0.4962367	0.496442265	0.000205565	0.000414077
1.85	0.35785784	0.358014008	0.000156163	0.000436193
1.9	0.22950855	0.229613605	0.000105058	0.000457541
1.95	0.1104492	0.110502031	0.000052836	0.000478145
2	0	0	0	nan

El porcentaje de error es:

$$||Error \text{ relativo}|| \times 100\% = 0,01217536420488539\% \quad (3.43)$$

Figura 3.2

Comparación de resultados de la solución real y B-Splines Cúbicos para un $h=0.05$



Aplicación 3. Consideremos el siguiente problema con valores en la frontera

$$x^2 y'' - x y' - 3y = 2x^2, \quad (3.44)$$

con condiciones de contorno $y(1) = 2$, $y(3) = 12$.

La solución exacta a este problema de valores en la frontera es

$$y(x) = \frac{81}{40}x^{-1} + \frac{77}{120}x^3 - \frac{2}{3}x^2 \quad (3.45)$$

Solución.

$$\begin{array}{lllll} \text{Para } N = 20 & h = \frac{3-1}{20} = 0,10 & g(x) = 2x^2 \\ ax_i^2 = x_i^2 & bx_i = -x_i & c = -3 & \alpha = 2 & \beta = 12 \end{array}$$

Reemplazamos en (3.33) y (3.34)

$$\begin{aligned} p_i &= 6x_i^2 + 3hx_i - h^2 \\ q_i &= -12x_i^2 - 12h^2 \\ r_i &= 6x_i^2 - 3hx_i - 3h^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Se obtiene:

$p_0 = 6,27$	$q_0 = -12,12$	$r_0 = 5,67$
$p_1 = 7,56$	$q_1 = -14,64$	$r_1 = 6,90$
$p_2 = 8,97$	$q_2 = -17,4$	$r_2 = 8,25$
$p_3 = 10,5$	$q_3 = -20,4$	$r_3 = 9,72$
$p_4 = 12,15$	$q_4 = -23,64$	$r_4 = 11,31$
$p_5 = 13,92$	$q_5 = -27,12$	$r_5 = 13,02$
$p_6 = 15,85$	$q_6 = -30,84$	$r_6 = 14,85$
$p_7 = 17,82$	$q_7 = -34,8$	$r_7 = 16,8$
$p_8 = 19,95$	$q_8 = -39$	$r_8 = 18,87$
$p_9 = 22,2$	$q_9 = -43,44$	$r_9 = 21,06$
$p_{10} = 24,57$	$q_{10} = -48,12$	$r_{10} = 23,37$
$p_{11} = 27,06$	$q_{11} = -53,04$	$r_{11} = 25,8$
$p_{12} = 29,67$	$q_{12} = -58,2$	$r_{12} = 28,35$
$p_{13} = 32,4$	$q_{13} = -63,6$	$r_{13} = 31,02$
$p_{14} = 35,25$	$q_{14} = -69,24$	$r_{14} = 33,81$
$p_{15} = 38,22$	$q_{15} = -75,12$	$r_{15} = 36,72$
$p_{16} = 41,31$	$q_{16} = -81,24$	$r_{16} = 39,75$
$p_{17} = 44,52$	$q_{17} = -87,6$	$r_{17} = 42,9$
$p_{18} = 47,85$	$q_{18} = -94,2$	$r_{18} = 46,16$
$p_{19} = 51,3$	$q_{19} = -101,04$	$r_{19} = 49,56$
$p_{20} = 54,87$	$q_{20} = -108,12$	$r_{20} = 53,07$

$$o_1 = -37,2 \quad o_2 = -0,6 \quad o_3 = 1,8 \quad o_4 = -320,4 \quad z_0 = -12,52 \quad z_{20} = -636,66$$

Para $N = 20$, formamos el sistema $(21) \times (21)$ y reemplazamos los valores encontrados en (3.34)

$$\begin{pmatrix}
-37,2 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7,56 & -14,64 & 6,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8,97 & -17,4 & 8,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 10,5 & -20,4 & 9,72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 12,15 & -23,64 & 11,31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 13,92 & -27,12 & 13,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15,81 & -30,84 & 14,85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17,82 & -34,8 & 16,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19,95 & -39 & 18,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22,2 & -43,44 & 21,06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24,57 & -48,12 & 23,37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27,06 & -53,04 & 25,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 29,67 & -58,2 & 28,35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32,4 & -63,6 & 31,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35,25 & -69,24 & 33,81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38,22 & -75,12 & 36,72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41,31 & -81,24 & 39,75 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44,52 & -87,6 & 42,9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 47,85 & -94,2 & 46,17 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51,3 & -101,04 & 49,56 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,8 & -320,4 & -3819,96
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
c_0 \\
c_1 \\
c_2 \\
c_3 \\
c_4 \\
c_5 \\
c_6 \\
c_7 \\
c_8 \\
c_9 \\
c_{10} \\
c_{11} \\
c_{12} \\
c_{13} \\
c_{14} \\
c_{15} \\
c_{16} \\
c_{17} \\
c_{18} \\
c_{19} \\
c_{20}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-75,12 \\
0,1452 \\
0,1728 \\
0,2028 \\
0,2352 \\
0,27 \\
0,3072 \\
0,3468 \\
0,3888 \\
0,4332 \\
0,48 \\
0,5292 \\
0,5808 \\
0,6348 \\
0,6912 \\
0,75 \\
0,8112 \\
0,8748 \\
0,9408 \\
1,0092 \\
-3819,96
\end{pmatrix}$$

Resolviendo con ayuda del programa Pythom obtenemos que el resultado del sistema es

$$\begin{array}{lll}
 c_0 = 1,98906647 & c_1 = 1,87787909 & c_2 = 1,82608803 \\
 c_3 = 1,8305644 & c_4 = 1,89016352 & c_5 = 2,00506703 \\
 c_6 = 2,17637033 & c_7 = 2,4058149 & c_8 = 2,69560948 \\
 c_9 = 3,04830749 & c_{10} = 3,46672113 & c_{11} = 3,9538599 \\
 c_{12} = 4,51288586 & c_{13} = 5,14708055 & c_{14} = 5,85982016 \\
 c_{15} = 6,6545566 & c_{16} = 7,53480297 & c_{17} = 8,50412227 \\
 c_{18} = 9,56611847 & c_{19} = 10,72442949 & c_{20} = 11,98272151
 \end{array}$$

Reemplazamos c_0 , c_1 , c_{19} , c_{20} y c_{21} en (3.18) y (3.19), se tiene

$$c_{-1} = 2,16585504 \qquad c_{21} = 13,34468445$$

Ahora realizamos el producto con la ecuación (2.11)

$$Y(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} c_i N_i^n(x)$$

y por lo tanto se obtiene los polinomios cúbicos con ayuda del Pythom.

$$Y(x) = \left\{ \begin{array}{ll}
 14,9772(x-1,0)^3 + 0(x-1,0)^2 - 1,2719(x-1,0) + 1,9999 & [1,00; 1,10) \\
 -0,8277(x-1,1)^3 + 4,4931(x-1,1)^2 - 0,9641(x-1,1) + 1,8877 & [1,10; 1,20) \\
 -0,3135(x-1,2)^3 + 4,2448(x-1,2)^2 - 0,3784(x-1,2) + 1,8354 & [1,20; 1,30) \\
 0,0282(x-1,3)^3 + 4,1507(x-1,3)^2 + 0,1809(x-1,3) + 1,8397 & [1,30; 1,40) \\
 0,2626(x-1,4)^3 + 4,1592(x-1,4)^2 + 0,7323(x-1,4) + 1,8993 & [1,40; 1,50) \\
 0,4279(x-1,5)^3 + 4,2380(x-1,5)^2 + 1,2878(x-1,5) + 2,0144 & [1,50; 1,60) \\
 0,5470(x-1,6)^3 + 4,3664(x-1,6)^2 + 1,8560(x-1,6) + 2,1860 & [1,60; 1,70) \\
 0,6347(x-1,7)^3 + 4,5305(x-1,7)^2 + 2,4427(x-1,7) + 2,4158 & [1,70; 1,80)
 \end{array} \right. .$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
0,7004(x-1,8)^3 + 4,7209(x-1,8)^2 + 3,0525(x-1,8) + 2,7060 & [1,80; 1,90) \\
0,7505(x-1,9)^3 + 4,9311(x-1,9)^2 + 3,6885(x-1,9) + 3,0592 & [1,90; 2,00) \\
0,7891(x-2,0)^3 + 5,1562(x-2,0)^2 + 4,3531(x-2,0) + 3,4781 & [2,00; 2,10) \\
0,8193(x-2,1)^3 + 5,3930(x-2,1)^2 + 5,0482(x-2,1) + 3,9658 & [2,10; 2,20) \\
0,8432(x-2,2)^3 + 5,6388(x-2,2)^2 + 5,7752(x-2,2) + 4,5254 & [2,20; 2,30) \\
0,8623(x-2,3)^3 + 5,8918(x-2,3)^2 + 6,5353(x-2,3) + 5,1601 & [2,30; 2,40) \\
0,8778(x-2,4)^3 + 6,1505(x-2,4)^2 + 7,3293(x-2,4) + 5,8734 & [2,40; 2,50) \\
0,8903(x-2,5)^3 + 6,4138(x-2,5)^2 + 8,1581(x-2,5) + 6,6688 & [2,50; 2,60) \\
0,9007(x-2,6)^3 + 6,6809(x-2,6)^2 + 9,0220(x-2,6) + 7,5496 & [2,60; 2,70) \\
0,9092(x-2,7)^3 + 6,9511(x-2,7)^2 + 9,9218(x-2,7) + 8,5195 & [2,70; 2,80) \\
0,9163(x-2,8)^3 + 7,2239(x-2,8)^2 + 10,8576(x-2,8) + 9,5821 & [2,80; 2,90) \\
-24,9962(x-2,9)^3 + 7,4988(x-2,9)^2 + 12,0891(x-2,9) + 10,7411 & [2,90; 3,00]
\end{array} \right. .$$

Solución utilizando los B-Splines cúbicos para $h=0.10$.

Tabla 3.6

Resultados

x	B-Splines Cúbicos
1.0	2.00000000
1.1	1.88777848
1.2	1.83546593
1.3	1.83975152
1.4	1.89938092
1.5	2.01446700
1.6	2.18606054
1.7	2.41587324
1.8	2.70609338
1.9	3.05926010
2.0	3.47817532
2.1	3.96584110
2.2	4.52541398
2.3	5.16017137
2.4	5.87348630
2.5	6.66880826
2.6	7.54964846
2.7	8.51956842
2.8	9.58217094
2.9	10.74109299
3.0	12.00000000

Comparación de Resultados B-Splines con la solución real

Tabla 3.7

Resultados de B-spline cúbicos y errores absolutos y relativos para la aplicación 3

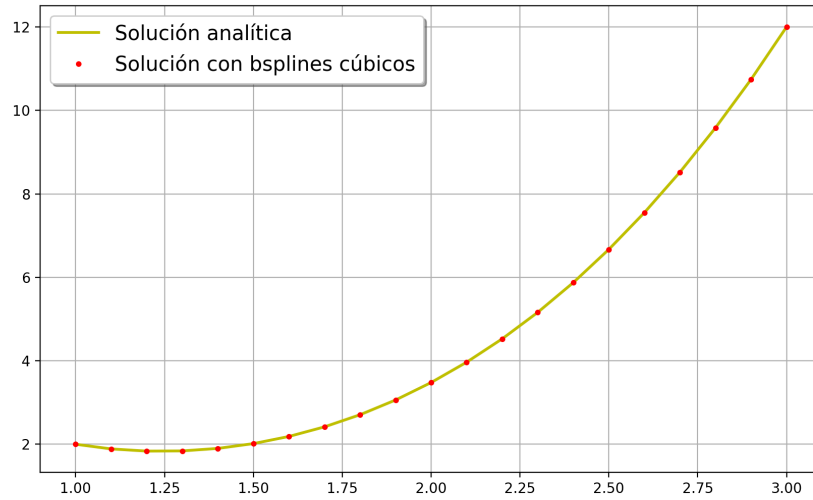
x	B-Splines Cúbico	Solución Real	Error Absoluto	Error Relativo
1.0	2.00000000	2.00000000	0.00000000	0.00000000
1.1	1.88777848	1.888300758	0.000522281	0.000276588
1.2	1.83546593	1.8363	0.000834065	0.00045421
1.3	1.83975152	1.840767308	0.001015785	0.000551827
1.4	1.89938092	1.900495238	0.001114322	0.000586332
1.5	2.014467	2.015625	0.001158005	0.000574514
1.6	2.18606054	2.187225	0.001164457	0.00053239
1.7	2.41587324	2.417018137	0.001144902	0.000473684
1.8	2.70609338	2.7072	0.001106616	0.000408768
1.9	3.0592601	3.060314474	0.001054378	0.000344533
2	3.47817532	3.479166667	0.000991348	0.000284938
2.1	3.9658411	3.966760714	0.000919619	0.000231831
2.2	4.52541398	4.526254545	0.000840566	0.000185709
2.3	5.16017137	5.160926449	0.000755077	0.000146306
2.4	5.8734863	5.87415	0.000663699	0.000112986
2.5	6.66880826	6.669375	0.000566745	0.000084977
2.6	7.54964846	7.550112821	0.000464362	0.000061504
2.7	8.51956842	8.519925	0.00035658	0.000041852
2.8	9.58217094	9.582414286	0.000243343	0.000025394
2.9	10.74109299	10.74121753	0.000124535	0.000011594
3.0	12.00000000	12.00000000	0.000000000	0.000000000

El porcentaje de error es:

$$||Error \text{ relativo}|| \times 100\% = 0,014239590876235093\% \quad (3.47)$$

Figura 3.3

Comparación de resultados de la solución real y B-Splines Cúbicos para un $h=0.10$



Aplicación 4. Consideremos el siguiente problema con valores en la frontera

$$4x^2y'' + 17y = 0, \quad (3.48)$$

con condiciones de contorno $y(1) = -1$, $y(1,6) = -0,746$.

La solución exacta a este problema de valores en la frontera es

$$y(x) = x^{1/2}[-\cos(2\log(x)) - 0,065\sin(2\log(x))] \quad (3.49)$$

Solución.

$$\begin{array}{llll} \text{Para } N = 20 & h = \frac{1,6-1}{20} = 0,03 & g(x) = 0 \\ ax_i^2 = 4x_i^2 & bx_i = 0x_i & c = 17 & \alpha = -1 \quad \beta = -0,746 \end{array}$$

En esta aplicación utilizaremos el Python para resolver la ecuación de Cauchy-Euler con problema de valores en la frontera.

Reemplazando valores, de (3.33) y (3.34) obtenemos:

$$\begin{array}{lll}
 c_0 = -1,0006375 & c_1 = -1,01372712 & c_2 = -1,02316401 \\
 c_3 = -1,02911978 & c_4 = -1,03176415 & c_5 = -1,031264 \\
 c_6 = -1,02778261 & c_7 = -1,02147914 & c_8 = -1,01250819 \\
 c_9 = -1,00101953 & c_{10} = -0,98715788 & c_{11} = -0,97106282 \\
 c_{12} = -0,95286873 & c_{13} = -0,93270478 & c_{14} = -0,91069494 \\
 c_{15} = -0,88695812 & c_{16} = -0,86160817 & c_{17} = -0,83475408 \\
 c_{18} = -0,80650002 & c_{19} = 0,77694557 & c_{20} = -0,74618577
 \end{array}$$

Reemplazamos c_0, c_1, c_{19}, c_{20} y c_{21} en (3.18) y (3.19), se tiene

$$c_{-1} = -0,98372288 \qquad c_{21} = -0,71431134$$

Ahora realizamos el producto con la ecuación (2.11)

$$Y(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} c_i N_i^n(x)$$

y por lo tanto se obtiene los polinomios cúbicos.

$$Y(x) = \left\{ \begin{array}{ll}
 33,8226(x-1,00)^3 + 0,0000(x-1,00)^2 - 0,4677(x-1,00) - 0,9999 & [1,00; 1,03) \\
 -1,5870(x-1,03)^3 + 3,0440(x-1,03)^2 - 0,4054(x-1,03) - 1,0131 & [1,03; 1,06) \\
 -1,5699(x-1,06)^3 + 2,9012(x-1,06)^2 - 0,2851(x-1,06) - 1,0225 & [1,06; 1,09) \\
 -1,5439(x-1,09)^3 + 2,7599(x-1,09)^2 - 0,1705(x-1,09) - 1,0285 & [1,09; 1,12) \\
 -1,5110(x-1,12)^3 + 2,6209(x-1,12)^2 - 0,0615(x-1,12) - 1,0312 & [1,12; 1,15) \\
 -1,4729(x-1,15)^3 + 2,4849(x-1,15)^2 + 0,0418(x-1,15) - 1,0307 & [1,15; 1,18) \\
 -1,4310(x-1,18)^3 + 2,3523(x-1,18)^2 + 0,1399(x-1,18) - 1,0273 & [1,18; 1,21) \\
 -1,3863(x-1,21)^3 + 2,2235(x-1,21)^2 + 0,2327(x-1,21) - 1,0210 & [1,21; 1,24)
 \end{array} \right. .$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
-1,3399(x-1,24)^3 + 2,0988(x-1,24)^2 + 0,3203(x-1,24) - 1,0120 & [1,24; 1,27) \\
-1,2923(x-1,27)^3 + 1,9782(x-1,27)^2 + 0,4030(x-1,27) - 1,0006 & [1,27; 1,30) \\
-1,2441(x-1,3)^3 + 1,86191(x-1,30)^2 + 0,4809(x-1,30) - 0,9867 & [1,30; 1,33) \\
-1,1960(x-1,33)^3 + 1,7499(x-1,33)^2 + 0,5542(x-1,33) - 0,9707 & [1,33; 1,36) \\
-1,1481(x-1,36)^3 + 1,6422(x-1,36)^2 + 0,6231(x-1,36) - 0,9525 & [1,36; 1,39) \\
-1,1009(x-1,39)^3 + 1,5389(x-1,39)^2 + 0,6877(x-1,39) - 0,9324 & [1,39; 1,42) \\
-1,0545(x-1,42)^3 + 1,4398(x-1,42)^2 + 0,7483(x-1,42) - 0,9104 & [1,42; 1,45) \\
-1,0091(x-1,45)^3 + 1,3449(x-1,45)^2 + 0,8049(x-1,45) - 0,8867 & [1,45; 1,48) \\
-0,9649(x-1,48)^3 + 1,2541(x-1,48)^2 + 0,8577(x-1,48) - 0,8613 & [1,48; 1,51) \\
-0,9220(x-1,51)^3 + 1,1673(x-1,51)^2 + 0,9070(x-1,51) - 0,8345 & [1,51; 1,54) \\
-0,8804(x-1,54)^3 + 1,0843(x-1,54)^2 + 0,9528(x-1,54) - 0,8063 & [1,54; 1,57) \\
-11,167(x-1,57)^3 + 1,0050(x-1,57)^2 + 1,0046(x-1,57) - 0,7767 & [1,57; 1,60]
\end{array} \right. .$$

Solución utilizando los B-Splines cúbicos para $h=0.03$.

Tabla 3.8

Resultados

x	B-Splines Cúbico
1	-1
1.03	-1.01311962
1.06	-1.0225864
1.09	-1.02857173
1.12	-1.03124518
1.15	-1.03077349
1.18	-1.02731986
1.21	-1.02104337
1.24	-1.01209857
1.27	-1.00063518
1.3	-0.98679793
1.33	-0.97072638
1.36	-0.9525549
1.39	-0.93241266
1.42	-0.91042366
1.45	-0.8867068
1.48	-0.86137597
1.51	-0.83454016
1.54	-0.80630359
1.57	-0.77676584
1.6	-0.74602198

Tabla 3.9*Resultados de B-spline cúbicos y errores absolutos y relativos para la aplicación 4*

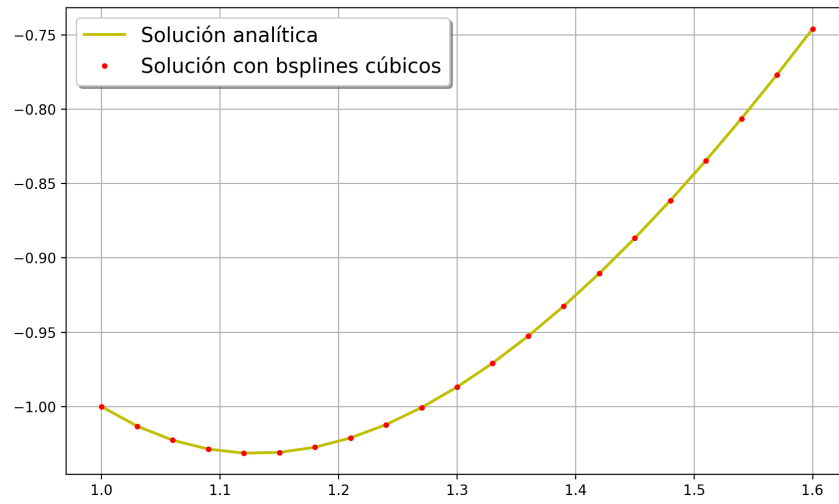
x	B-Splines Cúbico	Solución Real	Error Absoluto	Error Relativo
1.00	-1.00000000	-1.00000000	0.0000000	0.0000000
1.03	-1.01311962	-1.013116209	0.0000034	-0.0000033
1.06	-1.0225864	-1.022579643	0.00000675	-0.0000066
1.09	-1.02857173	-1.028561815	0.00000991	-0.00000964
1.12	-1.03124518	-1.03123237	0.00001281	-0.00001242
1.15	-1.03077349	-1.030758124	0.00001537	-0.00001491
1.18	-1.02731986	-1.027302322	0.00001754	-0.00001707
1.21	-1.02104337	-1.021024084	0.00001928	-0.00001888
1.24	-1.01209857	-1.01207799	0.00002057	-0.00002033
1.27	-1.00063518	-1.000613787	0.00002139	-0.00002138
1.30	-0.98679793	-0.986776194	0.00002173	-0.00002202
1.33	-0.97072638	-0.970704784	0.00002159	-0.00002224
1.36	-0.9525549	-0.952533924	0.00002097	-0.00002202
1.39	-0.93241266	-0.93239278	0.00001987	-0.00002131
1.42	-0.91042366	-0.910405341	0.00001831	-0.00002011
1.45	-0.8867068	-0.886690496	0.0000163	-0.00001838
1.48	-0.86137597	-0.861362119	0.00001385	-0.00001608
1.51	-0.83454016	-0.834529185	0.00001097	-0.00001315
1.54	-0.80630359	-0.806295893	0.00000769	-0.00000954
1.57	-0.77676584	-0.776761804	0.00000400	-0.00000519
1.60	-0.74602198	-0.746021984	0.00000000	0.00000000

El porcentaje de error es:

$$||Error \text{ relativo}|| \times 100\% = 0,014239590876235093\% \quad (3.50)$$

Figura 3.4

Comparación de resultados de la solución real y B-Splines Cúbicos para un $h=0.03$



Capítulo 4

Discusiones

4.1. *Análisis de desempeño error versus puntos*

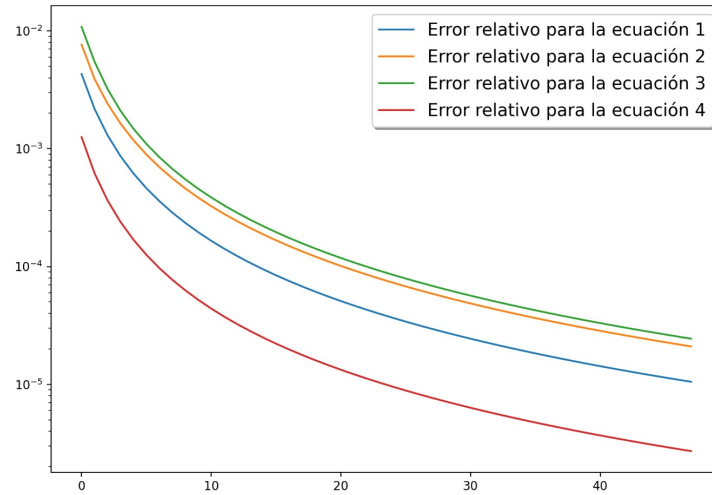
Las aplicaciones 1, 2, 3 y 4 de ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler con problemas de contorno vistas anteriormente se pueden aproximar con un mínimo error relativo. Por tal motivo es conveniente ver cómo se comporta este error en dichas aplicaciones. Para ello mostraremos la gráfica del error vs puntos de dichas aplicaciones.

Observación 4.1 *En la figura (3.5) se observa la gráfica del error versus puntos de la aplicación 1, aplicación 2, aplicación 3 y aplicación 4.*

- *Note que cuando mas grande es la cantidad de puntos más pequeño es el error.*
- *si observamos la gráfica del error relativo de la aplicación 1 y del error relativo de la aplicación 2, 3 y 4, notamos que el error relativo de la aplicación 2 disminuye más rapido si la cantidad de puntos aumenta*
- *El error relativo de dichas aplicaciones disminuyen de la misma forma. Es decir tienen la misma naturaleza.*

Figura 4.1

Gráfica: análisis error vs puntos



Para un análisis mas profundo de la capacidad de este método en la solución de las ecuaciones de Cauchy Euler hemos elegido la siguiente ecuación

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 3y = 2x^4 e^x$$

Con solución analítica $y = c_1 x + c_2 x^3 + 2x^2 e^x - 2x e^x$.

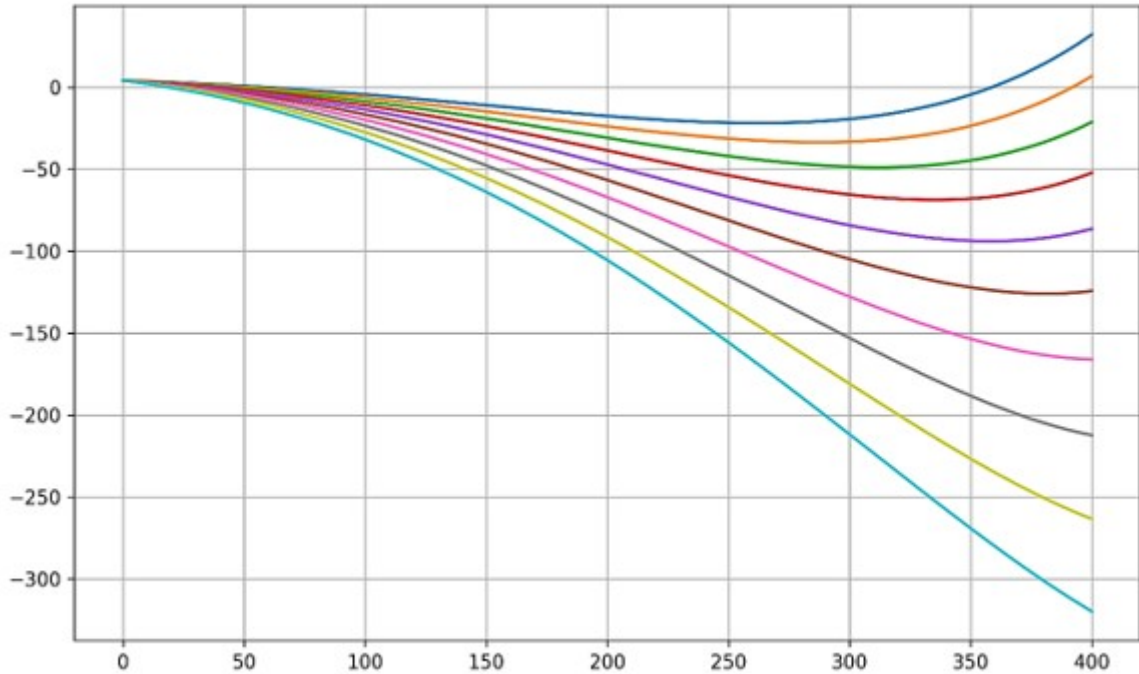
Para examinar la robustez y la consistencia del método de B-splines en la resolución de la ecuación

en cuestión, hemos decidido explorar nueve combinaciones distintas de los parámetros c_1 y c_2 . Estas pruebas incluyen la resolución de la ecuación en dominios discretos compuestos de diferentes cantidades de puntos, acompañadas de un análisis del error relativo. La Figura 3.6 ilustra la familia de soluciones generada para estos nueve conjuntos de parámetros, tomando un dominio discreto de 400 puntos como referencia.

Al visualizar el error, definido como la discrepancia entre la solución analítica y la solución obtenida, encontramos resultados reveladores (Figura 3.7). Es notable que los errores se solapan entre sí, lo que sugiere que la magnitud del error no está condicionada por los valores de c_1 y c_2 ,

Figura 4.2

Familia de solución de la ecuación para diferentes valores de c_1 y c_2



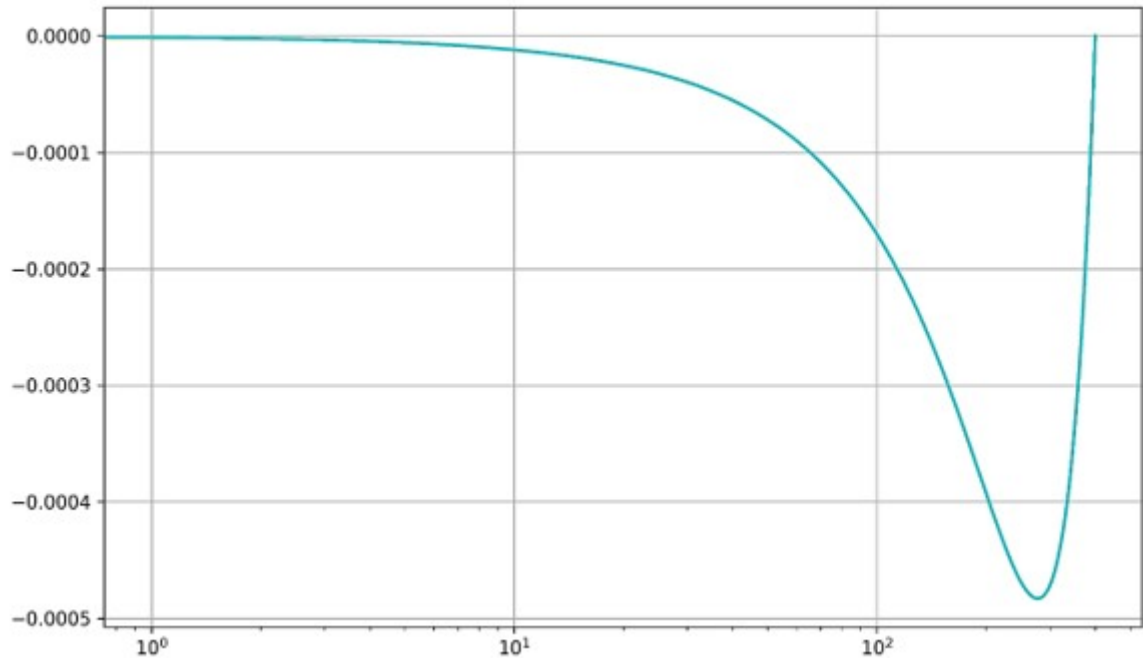
sino más bien por la cantidad de puntos en el dominio discreto.

Para una comprensión más detallada de la evolución del error, hemos extendido nuestro análisis a varios tamaños de dominios discretos, variando desde 50 hasta 400 puntos en intervalos de 20. Hemos registrado el error relativo, definido como la norma del error dividida por la norma del valor real, lo que nos brinda una estimación más precisa del error. La representación gráfica en escala semilogarítmica permite una mejor visualización.

Cada curva en la gráfica representa una combinación única de c_1 y c_2 , y lo que observamos es que la incorporación de más puntos al dominio da como resultado una disminución del error. Este fenómeno es constante para todas las combinaciones de c_1 y c_2 estudiadas, todas las cuales muestran una pendiente negativa.

Figura 4.3

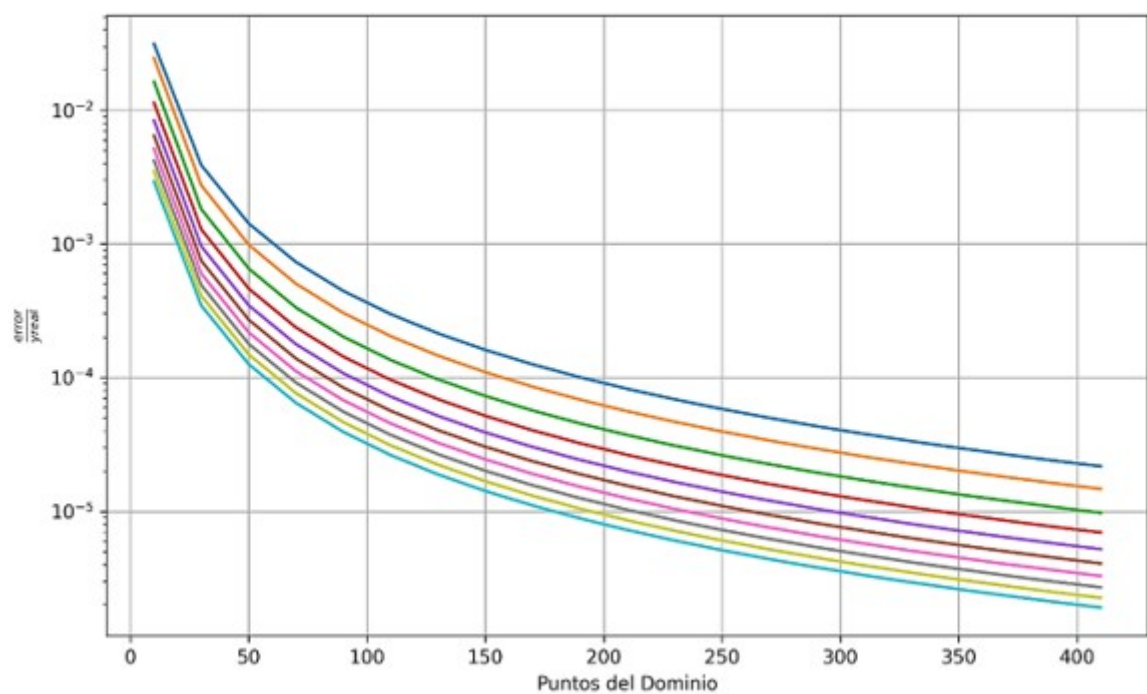
Error entre solución analítica y solución hallada para dominio discreto de 400 puntos



Adicionalmente, la naturaleza del error en función del número de puntos para todos los parámetros resulta ser similar; es decir, las curvas parecen ser versiones desplazadas verticalmente entre sí. Al comparar el error para una determinada cantidad de puntos, como 50 y 200, las diferencias son mínimas (0.00032 y 0.00028 respectivamente). Tras realizar cálculos logarítmicos, se observa que estas diferencias son casi constantes y rondan los 10 dB. Esta constancia sugiere que el método de solución empleado es tanto robusto como consistente, y que su precisión es básicamente determinada por los parámetros seleccionados.

Figura 4.4

Error en función de número de puntos del dominio y valores de c_1 y c_2



Capítulo 5

Conclusiones

1. En este trabajo de investigación se logró aplicar los B-Splines cúbicos para encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler.
2. Los B-Splines Cúbicos permitió explicar los resultados de una manera mas sencilla.
3. Se plantearon 4 aplicaciones, para el caso raíces reales distintas y para el caso raíces complejas, homogéneas y no homogéneas, en las cuales se contrastó los resultados de tal manera que el uso de los B-Splines Cúbicos aproxima a la solución real con un mínimo margen de error.
4. Se hizo un análisis de desempeño error relativo versus puntos, en la cuál se concluyó que entre más grande es el número de puntos en el intervalo, más pequeño es el error. Además también el error de dichas aplicaciones disminuyen de la misma forma, comprendiéndose así que tienen la misma naturaleza.

Capítulo 6

Sugerencias

1. Proponer a los estudiantes y docentes de Matemática e ingeniería profundizar el uso de los B-Splines Cúbicos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de Cauchy-Euler para un orden mayor que 2, y para problemas con valores iniciales.
2. Se recomienda investigar con mayor profundidad si el error de todas las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de Cuchy-Euler tienen la misma naturaleza.

Bibliografía

- Alberto, A. S. E., & David, D. B. J. (2021). Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden por el método de Splines Cúbicos, asistido con Matlab. <http://repositorio.unprg.edu.pe/handle/20.500.12893/9407>
- Aly, M. A., & Bader, E. S. M. A. (2019). The particular solutions of some types of Euler-Cauchy ODE using the differential transform method. <https://doi.org/10.22436/jnsa.012.03.02>
- Arévalo-Ovalle, D., Bernal-Yermanos, M. Á., & Posada-Restrepo, J. A. (2021). Interpolación. *Catálogo editorial*, 47-72. <https://doi.org/10.15765/poli.v1i978.2834>
- Ávila Torres, A. (2012). *Reconstrucción de curvas B-splines y de Bézier mediante selección clonal*. Universidad de Cantabria. <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/711/Andreina%20Avila%20Torres.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Caglar, N., & Caglar, H. (2009). B-spline method for solving linear system of second-order boundary value problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 57(5), 757-762. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.09.033>
- Casparri, M. T., Fronti, J. G., & Krimker, G. (2011). Notas de Análisis Numérico con aplicaciones al Cálculo Actuarial. https://www.academia.edu/download/44173456/Notas_de_Analisis_Numerico_con_aplicaciones_al_Calculo_Actuarial.pdf
- Chand, A. K. B., Tyada, K. R., & Navascués, M. A. (2022). Cubic spline fractal solutions of two-point boundary value problems with a non-homogeneous nowhere differentiable term. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 404, 113267. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113267>

- Chehlabi, M. (2022). Solving Second-Order Fuzzy Cauchy-Euler Initial Value Problems Under Generalized Differentiability. *International Journal of Industrial Mathematics*, 14(1), 105-117. <https://doi.org/10.30495/ijim.2022.19222>
- Cruz, M. S., & Alberto, L. (2013). Regresión no paramétrica utilizando spline para la suavización de la estructura de la mortalidad en el Perú. *Repositorio de Tesis - UNMSM*. <https://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/20.500.12672/4285>
- Kalyani, P., & Rama Chandra Rao, P. S. (2013). Solution of Boundary Value Problems by Approaching Spline Techniques. *International Journal of Engineering Mathematics*, 2013, 1-9. <https://doi.org/10.1155/2013/482050>
- Khalid, A., Naeem, M. N., Agarwal, P., Ghaffar, A., Ullah, Z., & Jain, S. (2019). Numerical approximation for the solution of linear sixth order boundary value problems by cubic B-spline. *Advances in Difference Equations*, 2019(1), 492. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2385-9>
- Latif, B., Abdul Karim, S. A., & Hashim, I. (2021). New Cubic B-Spline Approximation for Solving Linear Two-Point Boundary-Value Problems. *Mathematics*, 9(11), 1250. <https://doi.org/10.3390/math9111250>
- Loredo Villalobos, C. A. (2007). *El método de expansión de Bernstein para determinar la estabilidad de familias de polinomios* (Maestría en Ciencias) [Pages: x633f107f]. Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa. <https://doi.org/10.24275/uami.x633f107f>
- Munguia, M., & Bhatta, D. (2015). Use of Cubic B-Spline in Approximating Solutions of Boundary Value Problems. *10*(2).
- Osadchyi, V. V., & Yermieiev, V. S. (2021). Construction of cubic splines for interpolating functional dependencies and processing the results of experimental studies. *Journal of Physics: Conference Series*, 1946(1), 012006. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1946/1/012006>
- Prautzsch, H., Böhm, W., Paluszny, M., & Prautzsch, H. (2005). *Métodos de Bézier y B-splines*. Universitätsverlag. <https://publikationen.bibliothek.kit.edu/1000002481>

Segarra-Escandón, J. (2020). Análisis de los métodos numéricos en ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando mathematica [Number: 13]. *Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 7(13), 13-23. Consultado el 3 de febrero de 2023, desde <http://ojs.urepublicana.edu.co/index.php/ingenieria/article/view/622>

Shaa-Eldeen, G. H. A. (2019). *Solving Cauchy-Euler ODEs Using the Frobenius and Differential Transformation methods* (Thesis) [Accepted: 2022-10-17T15:44:08Z]. University Of Gezira. Consultado el 9 de febrero de 2023, desde <http://repo.uofg.edu.sd/handle/123456789/4223>

Sosa Castillo, J. E. (2022). Diseño de una pieza de ajedrez usando splines cúbicos. *Universidad Nacional de Piura*. <http://repositorio.unp.edu.pe/handle/20.500.12676/3772>

Tung, M., Defez, E., Ibáñez, J., Alonso, J., & Real-Herráiz, J. (2022). A Matrix Spline Method for a Class of Fourth-Order Ordinary Differential Problems. *Mathematics*, 10(16), 2826. <https://doi.org/10.3390/math10162826>

Ware, A. N., & Ashine, A. B. (2021). Cubic spline and finite difference method for solving boundary value problems of ordinary differential equation. *Asian Journal of Advances in Research*, 1-43. <https://www.mbimph.com/index.php/AJOAIR/article/view/2351>

Zill, D., Wright, W., & Cullen, M. (2012). *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (4ta edición, Vol. 7). The McGraw-Hill. <https://archive.org/details/MatematicasAvanzadasParaIngenieria/page/n3/mode/2up>

ANEXOS

```
In [1]: #importamos las librerias necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from libBspline import * #libreria desarrollada por nosotros
```

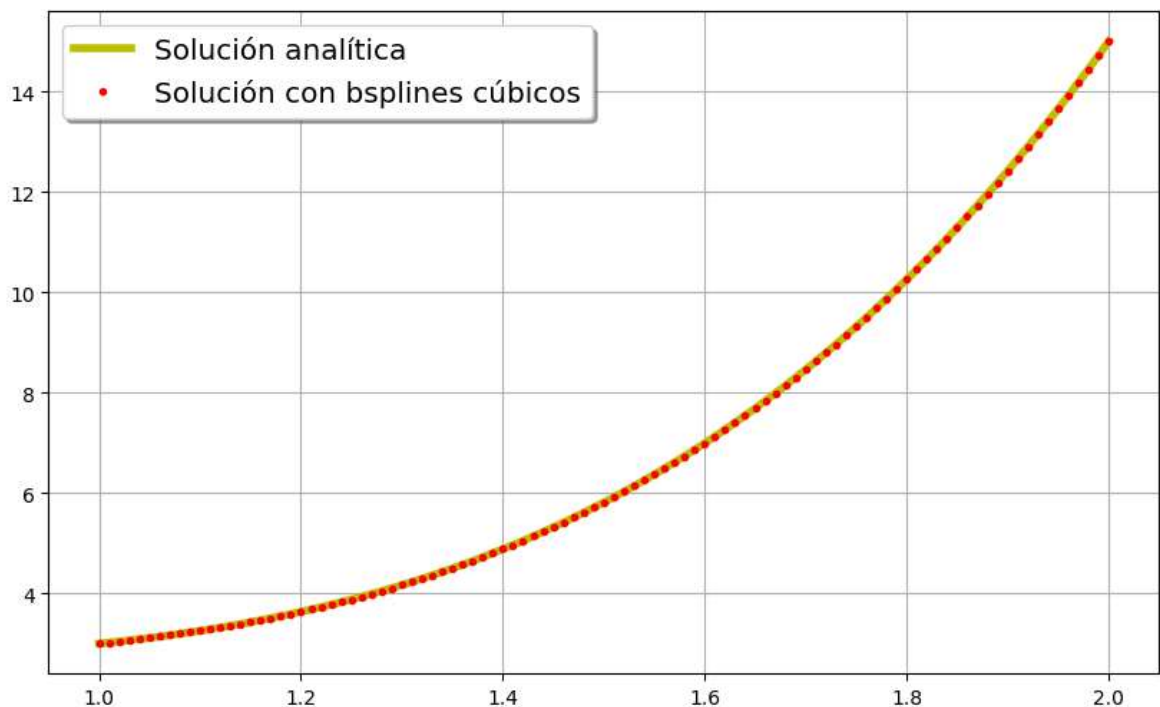
```
In [232... a=1.0 #Coeficiente de la segunda derivada
b=-5 #Coeficiente de la primera derivada
c=8.0 #Coeficiente del termino independiente
alpha=3.0 #Condicion de frontera izquierda
beta=15.0 #Condicion de frontera derecha
x_0=1.0 #Extremo izquierdo del intervalo
x_1=2.0 #Extremo derecho del intervalo
N=100 #Numero de subintervalos
x=np.linspace(x_0,x_1,N+1, dtype='float64')
h=x[1]-x[0]
```

```
In [233... def g(x):
    return 24

def sol_Ana(x):
    return -x**2+x**4+3
```

```
In [234... ysol=solucionD(N,alpha,beta,a,b,h,c,x,g)
yreal=sol_Ana(x)
error=(ysol-yreal)
```

```
In [235... plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(x,sol_Ana(x),'y', linewidth=4, label='Solución analítica')
plt.plot(x,ysol,'.r', label='Solución con bsplines cúbicos')
plt.grid(True)
plt.legend(loc='upper left', shadow=True, fontsize='x-large')
plt.savefig('comparacionEc1.png', dpi=200)
```



```
In [83]: text='{ :6} { :.10} { :5} { :10} { :.5} { :10} { :.10} '.format('x',' ', 'ysol',' ', 'yr
print(text)
```

```
for i in range(0,N+1):
    text='{ :03.2f} { :2s} { :5.8f} { :2s} { :05.12f} { :3s} { :2.12f}'.format(x[i], '
    print(text)
```

x	ysol	yreal	Error
1.00	3.00000000	3.000000000000	0.000000000000
1.10	3.25353222	3.254100000000	0.000567775775
1.20	3.63243522	3.633600000000	0.001164783814
1.30	4.16435544	4.166100000000	0.001744557169
1.40	4.87934633	4.881600000000	0.002253667725
1.50	5.80986807	5.812500000000	0.002631934830
1.60	6.99078741	6.993600000000	0.002812590515
1.70	8.45937759	8.462100000000	0.002722412599
1.80	10.25531817	10.257600000000	0.002281833482
1.90	12.42069497	12.422100000000	0.001405030231
2.00	15.00000000	15.000000000000	0.000000000000

```
In [236... np.linalg.norm(error, ord=2)/np.linalg.norm(yreal, ord=2)*100
```

```
Out[236... 0.000254895864117634
```

```
In [22]: A,B,C,D=SplinesCoef(x,ysol)
PrintSpline(x,A,B,C,D)
```

```
[1.0,1.25] f(x) = 16.904320381351496(x-1.0)^3 + 2.4220579597446514(x-1.0) + 3.0
[1.25,1.5] f(x) = 8.347798533457285(x-1.25)^3 + 12.678240286013622(x-1.25)^2 + 4.
013360599072508(x-1.25) + 3.86964449589478
[1.5,1.75] f(x) = 9.873434374253245(x-1.5)^3 + 18.939089186106585(x-1.5)^2 + 8.66
5825862701716(x-1.5) + 5.7958090156240285
[1.75,2.0] f(x) = -35.125553289062026(x-1.75)^3 + 26.34416496679652(x-1.75)^2 + 1
8.408381968751943(x-1.75) + 9.300230967528826
```

Segundo Ejemplo

```
In [237... a=1.0 #Coeficiente de la segunda derivada
b=3.0 #Coeficiente de la primera derivada
c=3.0 #Coeficiente del termino independiente
alpha=5.0 #Condicion de frontera izquierda
beta=0 #Condicion de frontera derecha
x_0=1.0 #Extremo izquierdo del intervalo
x_1=2.0 #Extremo derecho del intervalo
N=100 #Numero de subintervalos
x=np.linspace(x_0,x_1,N+1, dtype='float64')
#M=40
#x1=np.linspace(x_0,x_1,M+1, dtype='float64')
h=x[1]-x[0]
```

```
In [238... def g(x):
    return 0

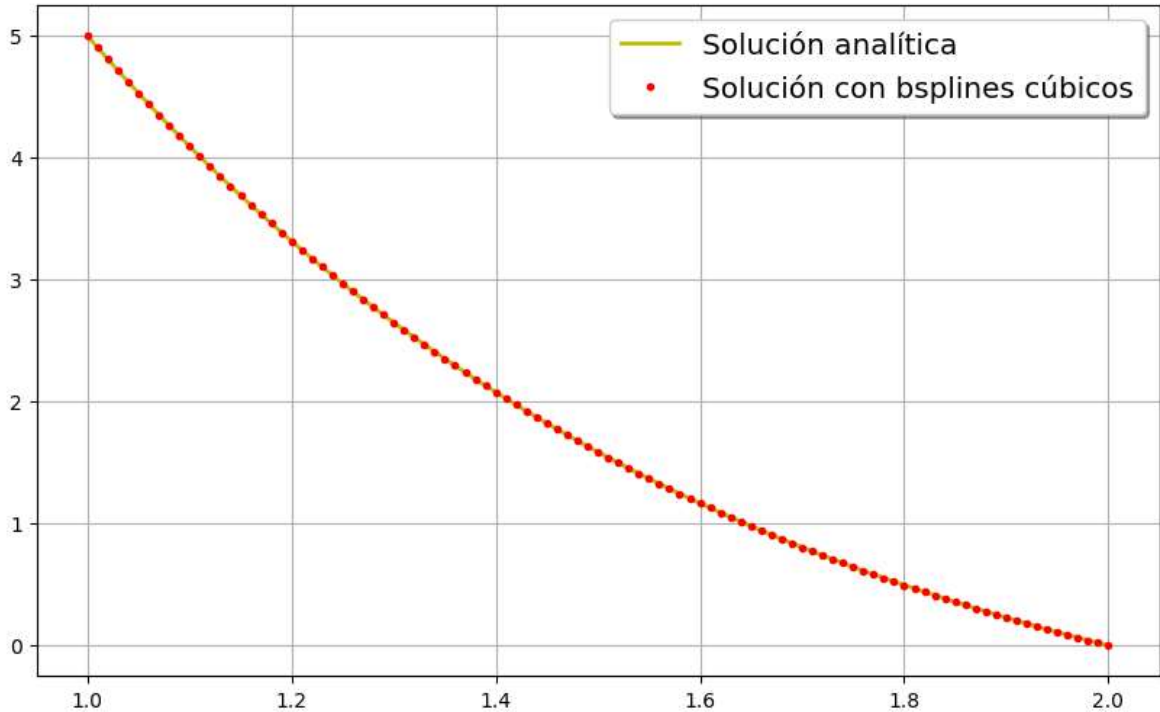
def sol_Ana(x):
    return (5/x)*(np.cos(np.sqrt(2)*np.log(x))-(np.cos(np.sqrt(2)*np.log(2))/np.
```

```
In [239... ysol=solucionD(N,alpha,beta,a,b,h,c,x,g)
yreal=sol_Ana(x)
error=(ysol-yreal)
```

In [240]...

```
plt.figure(figsize=(10,6))

plt.plot(x,sol_Ana(x),'y', linewidth=2, label='Solución analítica')
plt.plot(x,ysol,'.r', label='Solución con bsplines cúbicos')
plt.grid(True)
plt.legend(loc='upper right', shadow=True, fontsize='x-large')
plt.savefig('comparacionEc2.png', dpi=200)
```



In [29]:

```
text='{ :6} { :.10} { :5} { :10} { :.5} { :10} { :.10} { :20}'.format('x',' ', 'ysol', ' ')
print(text)
for i in range(0,N):
    text='{ :03.2f} { :2s} { :5.8f} { :2s} { :05.12f} { :3s} { :2.12f} { :3s} { :2.12f}'
    print(text)
```

x	ysol	yreal	Error	Error Relativo
1.00	5.00000000	5.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
1.20	3.31209917	3.316712611473	0.004613445043	0.001390969186
1.40	2.07121000	2.077977395929	0.006767391947	0.003256720675
1.60	1.16175259	1.167625480491	0.005872891367	0.005029773215
1.80	0.49316798	0.496442265078	0.003274281608	0.006595493249

In [241]...

```
np.linalg.norm(error, ord=2)/np.linalg.norm(yreal, ord=2)*100
```

Out[241]...

0.0005095984523331682

In [30]:

```
A,B,C,D=SplinesCoef(x,ysol)
PrintSpline(x,A,B,C,D)
```

```
[1.0,1.2] f(x) = 13.969114722526678(x-1.0)^3 - 8.998268756749102(x-1.0) + 4.99999
999999999
[1.2,1.4] f(x) = -3.6118726103280228(x-1.2)^3 + 8.381468833516005(x-1.2)^2 - 7.73
6264674533848(x-1.2) + 3.3120991664303925
[1.4,1.6] f(x) = -2.82996682452374(x-1.4)^3 + 6.2143452673191915(x-1.4)^2 - 5.676
957454774873(x-1.4) + 2.0712100039816392
[1.6,1.8] f(x) = -2.045505844476259(x-1.6)^3 + 4.516365172604946(x-1.6)^2 - 4.164
375829005936(x-1.6) + 1.1617525891232419
[1.8,2.0] f(x) = -5.481769443198653(x-1.8)^3 + 3.2890616659191907(x-1.8)^2 - 2.90
43814728081054(x-1.8) + 0.49316798347044255
```

Tercer Ejemplo

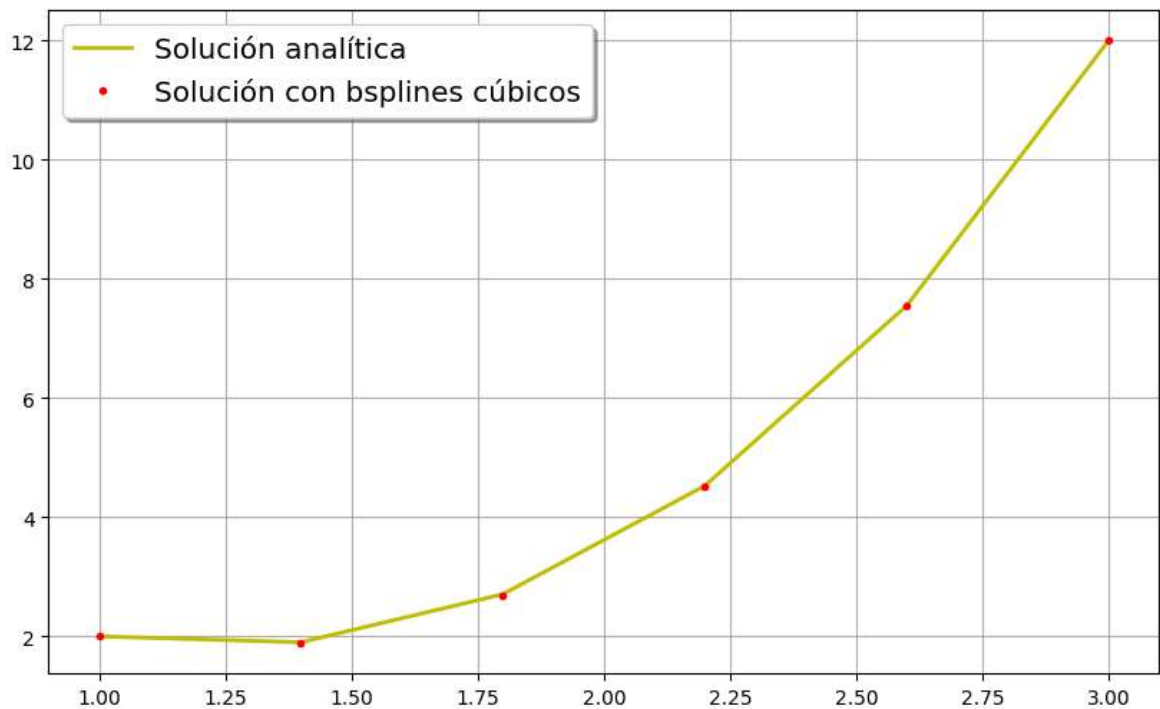
```
In [31]: a=1.0 #Coeficiente de la segunda derivada
b=-1.0 #Coeficiente de la primera derivada
c=-3.0 #Coeficiente del termino independiente
alpha=2.0 #Condicion de frontera izquierda
beta=12.0 #Condicion de frontera derecha
x_0=1.0 #Extremo izquierdo del intervalo
x_1=3.0 #Extremo derecho del intervalo
N=5 #Numero de subintervalos
x=np.linspace(x_0,x_1,N+1, dtype='float64')
#M=40
#x1=np.linspace(x_0,x_1,M+1, dtype='float64')
h=x[1]-x[0]
```

```
In [32]: def g(x):
    return 2*x**2

def sol_Ana(x):
    return (243/120)*x**(-1)+(77/120)*x**3-(2/3)*x**2
```

```
In [33]: ysol=solucionD(N,alpha,beta,a,b,h,c,x,g)
yreal=sol_Ana(x)
error=(ysol-yreal)
```

```
In [35]: plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(x,sol_Ana(x),'y', linewidth=2, label='Solución analítica')
plt.plot(x,ysol,'.r', label='Solución con bsplines cúbicos')
plt.grid(True)
plt.legend(loc='upper left', shadow=True, fontsize='x-large')
plt.savefig('comparacionEc3.png', dpi=200)
```



```
In [36]: text='{ :6} { :.10} { :5} { :10} { :.5} { :10} { :.10} { :20}'.format('x',' ','ysol','
print(text)
for i in range(0,N+1):
    text='{ :03.2f} { :2s} { :5.8f} { :2s} { :05.12f} { :3s} { :2.12f} { :3s} { :2.12f}'
    print(text)
```

x	ysol	yreal	Error	Error Relativo
1.00	2.000000000	2.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
1.40	1.88071654	1.900495238095	0.019778696495	0.010407127626
1.80	2.68784355	2.707200000000	0.019356446600	0.007149987663
2.20	4.51165921	4.526254545455	0.014595332235	0.003224593776
2.60	7.54208242	7.550112820513	0.008030403069	0.001063613652
3.00	12.00000000	12.000000000000	0.000000000000	0.000000000000

```
In [37]: A,B,C,D=SplinesCoef(x,ysol)
PrintSpline(x,A,B,C,D)
```

```
[1.0,1.4] f(x) = 3.618790899214227(x-1.0)^3 - 0.8772151898734168(x-1.0) + 2.00000
000000000004
[1.4,1.8] f(x) = 0.35264913211551735(x-1.4)^3 + 4.342549079057071(x-1.4)^2 + 0.22
437403673665246(x-1.4) + 1.8807165416003442
[1.8,2.2] f(x) = 0.7418706890017525(x-1.8)^3 + 4.765728037595692(x-1.8)^2 + 2.534
548624270443(x-1.8) + 2.68784355339953
[2.2,2.6] f(x) = 0.8628391950276598(x-2.2)^3 + 5.655972864397795(x-2.2)^2 + 5.175
614593597616(x-2.2) + 4.511659213219131
[2.6,3.0] f(x) = -5.576149915359157(x-2.6)^3 + 6.691379898430987(x-2.6)^2 + 9.360
425983476087(x-2.6) + 7.542082417443594
```

Ejemplo cuatro

```
In [39]: c1=-1
c2=0
def g(x):
    return 0

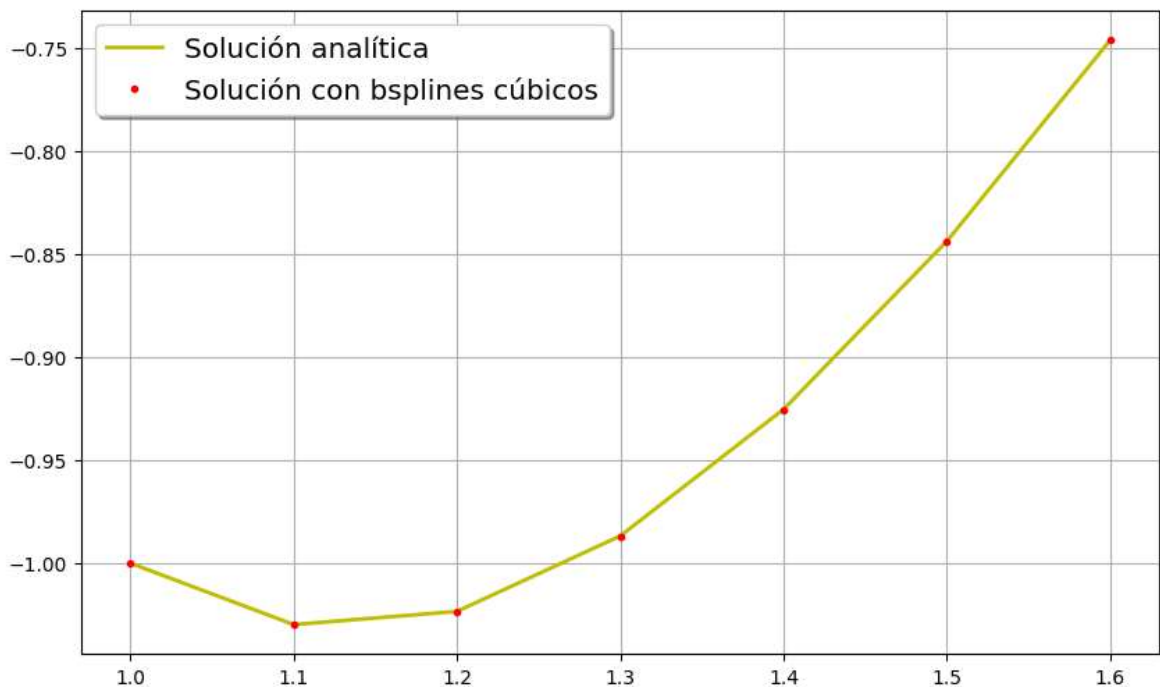
def sol_Ana(x,c1,c2):
    return x**(1/2)*(c1*np.cos(2*np.log(x))+c2*np.sin(2*np.log(x)))
```

```
In [40]: #x_1=np.exp(np.pi/2)
#alpha=sol_Ana(x_1,c1,c2)
x_2=1.6
beta=sol_Ana(x_2,c1,c2)
```

```
In [41]: a=4.0 #Coeficiente de la segunda derivada
b=0.0 #Coeficiente de la primera derivada
c=17.0 #Coeficiente del termino independiente
alpha=-1.0 #Condicion de frontera izquierda
#beta=12.0 #Condicion de frontera derecha
x_0=1 #Extremo izquierdo del intervalo
x_1=1.6 #Extremo derecho del intervalo
N=6 #Numero de subintervalos
x=np.linspace(x_0,x_1,N+1, dtype='float64')
#M=40
#x1=np.linspace(x_0,x_1,M+1, dtype='float64')
h=x[1]-x[0]
```

```
In [42]: ysol=solucionD(N,alpha,beta,a,b,h,c,x,g)
yreal=sol_Ana(x,c1,c2)
error=(ysol-yreal)
```

```
In [46]: plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(x,sol_Ana(x,c1,c2),'y', linewidth=2, label='Solución analítica')
plt.plot(x,ysol,'.r', label='Solución con bsplines cúbicos')
plt.grid(True)
plt.legend(loc='upper left', shadow=True, fontsize='x-large')
plt.savefig('comparacionEc4.png', dpi=200)
```



```
In [47]: A,B,C,D=SplinesCoef(x,ysol)
PrintSpline(x,A,B,C,D)
```



```
[1.0,1.1] f(x) = 9.058844070112581(x-1.0)^3 - 0.3898987243643579(x-1.0) - 0.99999
9999999999
[1.1,1.2] f(x) = -1.4821160059203335(x-1.1)^3 + 2.717653221033777(x-1.1)^2 - 0.19
390068290290244(x-1.1) - 1.029931028366322
[1.2,1.3] f(x) = -1.344873298021438(x-1.2)^3 + 2.2730184192576774(x-1.2)^2 + 0.15
225949276340833(x-1.2) - 1.023626680452195
[1.3,1.4000000000000001] f(x) = -1.1889320677951347(x-1.3)^3 + 1.8695564298512457
(x-1.3)^2 + 0.4403204700486215(x-1.3) - 0.9870154202812987
[1.4000000000000001,1.5] f(x) = -1.0344184080228014(x-1.4000000000000001)^3 + 1.5
12876809512705(x-1.4000000000000001)^2 + 0.6761602034197798(x-1.4000000000000001)
- 0.9254767410457192
[1.5,1.6] f(x) = -4.00850429035288(x-1.5)^3 + 1.202551287105865(x-1.5)^2 + 0.8972
737860978797(x-1.5) - 0.8437663710166371
```

Quinto Ejemplo

```
In [216... c1=(19+3*np.exp(3))/(6)
c2=(5-3*np.exp(3))/(6)
def g(x):
    return 2*x**4*np.exp(x)

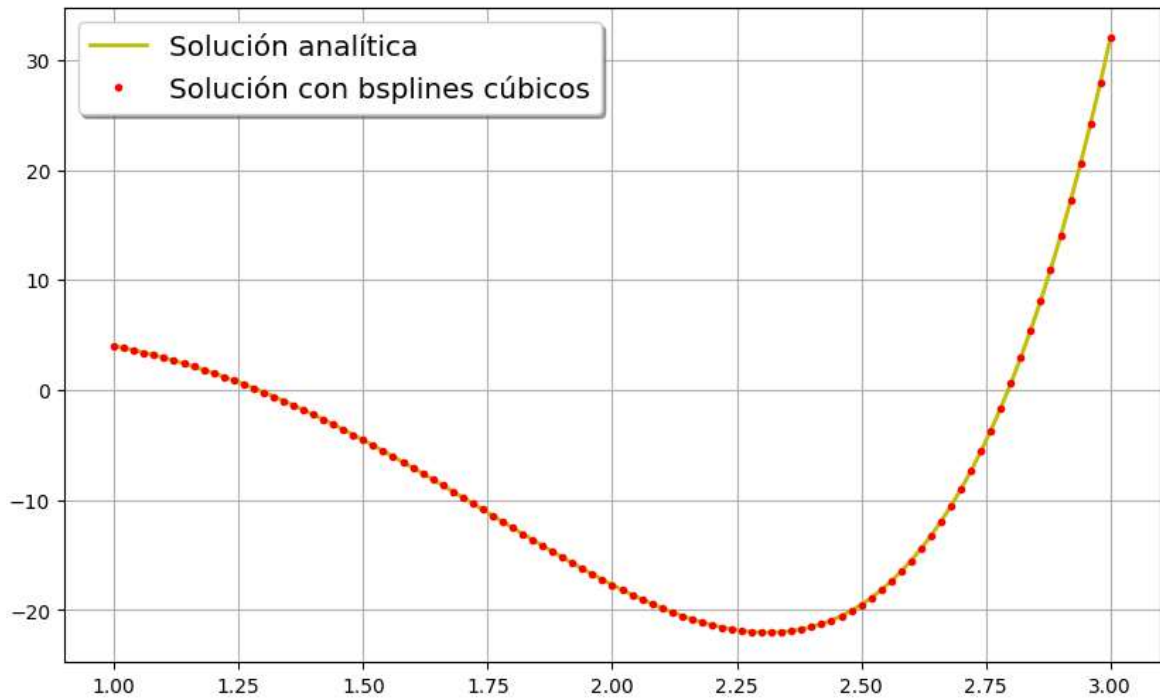
def sol_Ana(x,c1,c2):
    return c1*x+c2*x**3+2*x**2*np.exp(x)-2*x*np.exp(x)
```

```
In [217... alpha=sol_Ana(1.0,c1,c2)
beta=sol_Ana(3.0,c1,c2)
```

```
In [228... a=1.0 #Coeficiente de la segunda derivada
b=-3.0 #Coeficiente de la primera derivada
c=3.0 #Coeficiente del termino independiente
#alpha=4.0 #Condicion de frontera izquierda
#beta=32.0 #Condicion de frontera derecha
x_0=1.0 #Extremo izquierdo del intervalo
x_1=3.0 #Extremo derecho del intervalo
N=100 #Numero de subintervalos
x=np.linspace(x_0,x_1,N+1, dtype='float64')
#M=40
#x1=np.linspace(x_0,x_1,M+1, dtype='float64')
h=x[1]-x[0]
```

```
In [229... ysol=solucionD(N,alpha,beta,a,b,h,c,x,g)
yreal=sol_Ana(x,c1,c2)
error=(ysol-yreal)
```

```
In [230... plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(x,sol_Ana(x,c1,c2),'y', linewidth=2, label='Solución analítica')
plt.plot(x,ysol,'.r', label='Solución con bsplines cúbicos')
plt.grid(True)
plt.legend(loc='upper left', shadow=True, fontsize='x-large')
plt.savefig('comparacionEc3.png', dpi=200)
```



```
In [226... text='{ :6} { :.10} { :5} { :10} { :.5} { :10} { :.10} { :20}'.format('x',' ','ysol','
print(text)
for i in range(0,N+1):
    text='{ :03.2f} { :2s} { :5.8f} { :2s} { :05.12f} { :3s} { :2.12f} { :3s} { :2.12f}'
    print(text)
```

x	ysol	yreal	Error	Error Relativo
1.00	4.00000000	4.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
1.20	1.44205792	1.531074375192	0.089016453139	0.058139862166
1.40	-2.44211447	-2.235656849516	0.206457621765	-0.092347634571
1.60	-7.42181513	-7.076927825300	0.344887308179	-0.048734043457
1.80	-13.00174040	-12.509457739637	0.492282664933	-0.039352838083
2.00	-18.33143866	-17.700386373840	0.631052283787	-0.035651893154
2.20	-22.08601702	-21.349236686533	0.736780334132	-0.034510851369
2.40	-22.30947277	-21.532841627336	0.776631145036	-0.036067285427
2.60	-16.20952976	-15.502200029615	0.707329730739	-0.045627699900
2.80	0.11032711	0.582937876213	0.472610762555	0.810739500451
3.00	32.00000000	32.000000000000	0.000000000000	0.000000000000

```
In [231... np.linalg.norm(error, ord=2)/np.linalg.norm(yreal, ord=2)*100
```

```
Out[231... 0.035998190017748344
```

```
In [60]: A,B,C,D=SplinesCoef(x,ysol)
PrintSpline(x,A,B,C,D)
```

```
[1.0,1.25] f(x) = -32.365289214593865(x-1.0)^3 - 11.87970747399059(x-1.0) + 3.999
999999999987
[1.25,1.5] f(x) = 10.35438448461162(x-1.25)^3 - 24.273966910945397(x-1.25)^2 - 1
6.572517656103052(x-1.25) + 0.5243654875243217
[1.5,1.75] f(x) = 22.54045353889846(x-1.5)^3 - 16.508178547486683(x-1.5)^2 - 24.7
7832024535622(x-1.5) - 4.974099600863472
[1.75,2.0] f(x) = 40.057863230078(x-1.75)^3 + 0.39716160668716327(x-1.75)^2 - 29.
967106187369346(x-1.75) - 11.848246234875155
[2.0,2.25] f(x) = 65.07459710427463(x-2.0)^3 + 30.440559029245662(x-2.0)^2 - 28.8
94648400397706(x-2.0) - 18.689296068329575
[2.25,2.5] f(x) = 100.59260313953439(x-2.25)^3 + 79.24650685745164(x-2.25)^2 - 1
6.900508448835723(x-2.25) - 22.993632649346857
[2.5,2.75] f(x) = 150.7564140001632(x-2.5)^3 + 154.69095921210243(x-2.5)^2 + 12.6
6679335441308(x-2.5) - 20.694093658909836
[2.75,3.0] f(x) = -357.01102628296644(x-2.75)^3 + 267.75826971222483(x-2.75)^2 +
105.3881873178197(x-2.75) - 5.503641400797613
```

Analisis de desempeño Error vs Puntos

In [292...

```
###Definimos los parametros de la ecuación diferencial 01
a=1.0 #Coeficiente de la segunda derivada
b=-5 #Coeficiente de la primera derivada
c=8.0 #Coeficiente del termino independiente
###Definimos las condiciones de frontera
alpha=3.0 #Condicion de frontera izquierda
beta=15.0 #Condicion de frontera derecha
#Definimos el dominio
x_0=1.0 #Extremo izquierdo del intervalo
x_1=2.0 #Extremo derecho del intervalo

def g(x):
    return 24
    #return 0

def sol_Ana(x):
    return -x**2+x**4+3
```

In [305...

```
###Definimos los parametros de la ecuación diferencial 02
a1=1.0 #Coeficiente de la segunda derivada
b1=3.0 #Coeficiente de la primera derivada
c1=3.0 #Coeficiente del termino independiente
###Definimos las condiciones de frontera
alpha1=5.0 #Condicion de frontera izquierda
beta1=0.0 #Condicion de frontera derecha
#Definimos el dominio
x_01=1.0 #Extremo izquierdo del intervalo
x_11=2.0 #Extremo derecho del intervalo

def g1(x):
    return 0

def sol_Ana1(x):
    return ((5/x)*(np.cos(np.sqrt(2)*np.log(x))-
                (np.cos(np.sqrt(2)*np.log(2))/np.sin(np.sqrt(2)*np.log(2))))*r
```

In [296...

```

##Ecuacion 03
a3=1.0 #Coeficiente de La segunda derivada
b3=-1.0 #Coeficiente de La primera derivada
c3=-3.0 #Coeficiente del termino independiente
alpha3=2.0 #Condicion de frontera izquierda
beta3=12.0 #Condicion de frontera derecha
x_03=1.0 #Extremo izquierdo del intervalo
x_13=3.0 #Extremo derecho del intervalo

def g3(x):
    return 2*x**2

def sol_Ana3(x):
    return (243/120)*x**(-1)+(77/120)*x**3-(2/3)*x**2

```

In [317...

```

#Ecuacion 04

def g4(x):
    return 0
d1=-1
d2=0
def sol_Ana4(x,d1,d2):
    return x**(1/2)*(d1*np.cos(2*np.log(x))+d2*np.sin(2*np.log(x)))

x_24=1.6
beta4=sol_Ana4(x_24,d1,d2)

a4=4.0 #Coeficiente de La segunda derivada
b4=0.0 #Coeficiente de La primera derivada
c4=17.0 #Coeficiente del termino independiente
alpha4=-1.0 #Condicion de frontera izquierda
x_04=1 #Extremo izquierdo del intervalo
x_14=1.6 #Extremo derecho del intervalo

```

In [297...

```

#ecuacion 5
c1=(19+3*np.exp(3))/(6)
c2=(5-3*np.exp(3))/(6)

def g5(x):
    return 2*x**4*np.exp(x)

def sol_Ana5(x,c1,c2):
    return c1*x+c2*x**3+2*x**2*np.exp(x)-2*x*np.exp(x)

alpha5=sol_Ana5(1.0,c1,c2)
beta5=sol_Ana5(3.0,c1,c2)
###Definimos Los parametros de La ecuación diferencial 05
a5=1.0 #Coeficiente de La segunda derivada
b5=-3.0 #Coeficiente de La primera derivada
c5=3.0 #Coeficiente del termino independiente
x_05=1.0 #Extremo izquierdo del intervalo
x_15=3.0 #Extremo derecho del intervalo

```

In [299...

```

Nmax=30
Nmin=2

```

```
In [300... desen=[]
for n in range(Nmin,Nmax):
    x=np.linspace(x_0,x_1,n+1, dtype='float64')
    yreal=sol_Ana(x)
    h=x[1]-x[0]
    ysol=solucionD(n,alpha,beta,a,b,h,c,x,g)
    error=(ysol-yreal)
    desen.append(np.linalg.norm(error, ord=2)/np.linalg.norm(yreal, ord=2))
```

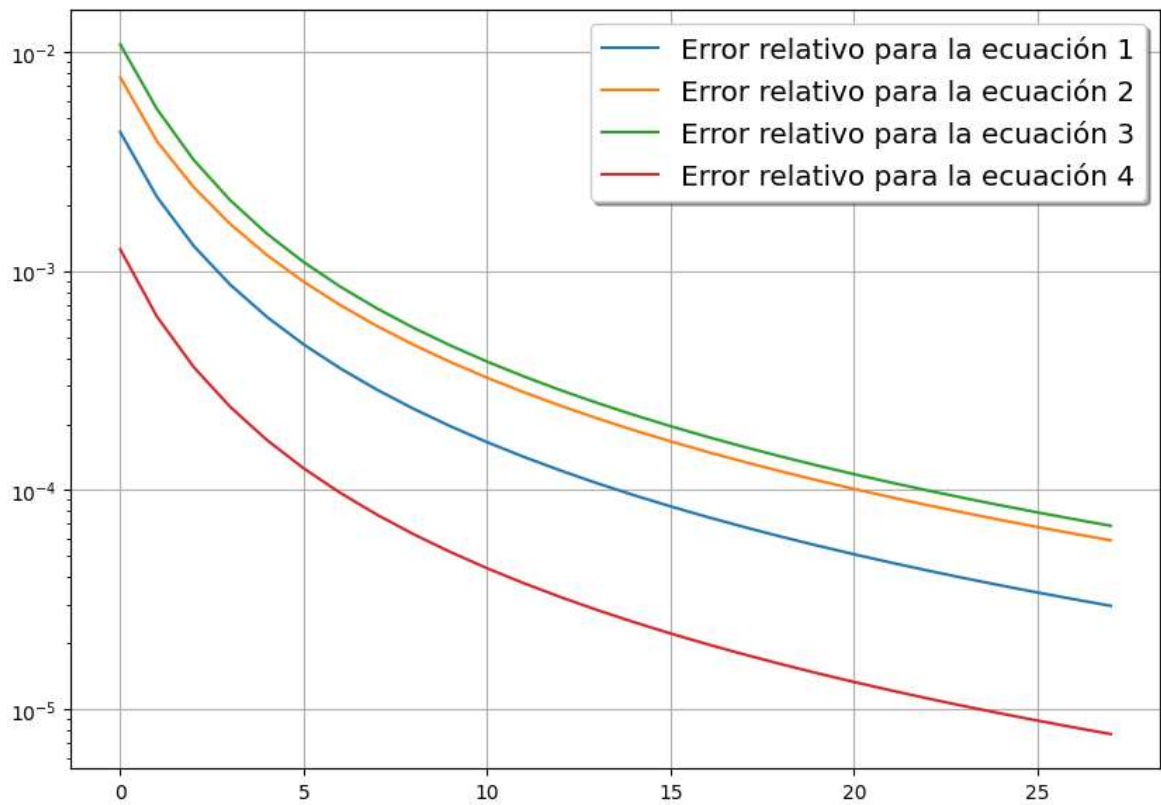
```
In [308... desen2=[]
for n in range(Nmin,Nmax):
    x1=np.linspace(x_01,x_11,n+1, dtype='float64')
    yreal1=sol_Ana1(x1)
    h1=x1[1]-x1[0]
    ysol1=solucionD(n,alpha1,beta1,a1,b1,h1,c1,x1,g1)
    error1=(ysol1-yreal1)
    desen2.append(np.linalg.norm(error1, ord=2)/np.linalg.norm(yreal1, ord=2))
```

```
In [302... desen3=[]
for n in range(Nmin,Nmax):
    x3=np.linspace(x_03,x_13,n+1, dtype='float64')
    yreal3=sol_Ana3(x3)
    h3=x3[1]-x3[0]
    ysol3=solucionD(n,alpha3,beta3,a3,b3,h3,c3,x3,g3)
    error3=(ysol3-yreal3)
    desen3.append(np.linalg.norm(error3, ord=2)/np.linalg.norm(yreal3, ord=2))
```

```
In [318... desen4=[]
for n in range(Nmin,Nmax):
    x4=np.linspace(x_04,x_14,n+1, dtype='float64')
    yreal4=sol_Ana4(x4,d1,d2)
    h4=x4[1]-x4[0]
    ysol4=solucionD(n,alpha4,beta4,a4,b4,h4,c4,x4,g4)
    error4=(ysol4-yreal4)
    desen4.append(np.linalg.norm(error4, ord=2)/np.linalg.norm(yreal4, ord=2))
```

```
In [303... desen5=[]
for n in range(Nmin,Nmax):
    x5=np.linspace(x_05,x_15,n+1, dtype='float64')
    yreal5=sol_Ana5(x5,c1,c2)
    h5=x5[1]-x5[0]
    ysol5=solucionD(n,alpha5,beta5,a5,b5,h5,c5,x5,g5)
    error5=(ysol5-yreal5)
    desen5.append(np.linalg.norm(error5, ord=2)/np.linalg.norm(yreal5, ord=2))
```

```
In [320... plt.figure(figsize=(10,7))
plt.semilogy(desen, label='Error relativo para la ecuación 1')
plt.semilogy(desen2, label='Error relativo para la ecuación 2')
plt.semilogy(desen3, label='Error relativo para la ecuación 3')
plt.semilogy(desen4, label='Error relativo para la ecuación 4')
#plt.semilogy(desen5, label='Error relativo para la ecuación 5')
plt.legend(loc='upper right', shadow=True, fontsize='x-large')
plt.savefig('errroVsIntervalos.png', dpi=200)
plt.grid(True)
```



In [243...

```
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(desen, label='Error relativo para la ecuación 1')
plt.plot(desen10, label='Error relativo para la ecuación 2')
plt.legend(loc='upper right', shadow=True, fontsize='x-large')
plt.savefig('errroVsIntervalos.png', dpi=200)
plt.grid(True)
```

