



UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**Existencia y unicidad de uniformidad en espacios
topológicos Hausdorff compactos**

TÉSIS

**PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO
PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

Presentado por:

Bach. Mat. Jhaneder Jaquelin Rivera Mendoza

Bach. Mat. Richard Omar Cercado Vásquez

Asesora:

Dra. Gloria María Ortiz Basauri

LAMBAYEQUE – PERÚ

2025

12 de Diciembre - 2025



UNIVERSIDAD NACIONAL
“PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “**Existencia y unicidad de uniformidad en espacios topológicos Hausdorff compactos**”, presentada por los bachilleres en matemáticas, Jhaneder Jaquelin Rivera Mendoza, Richard Omar Cercado Vásquez, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

M.Sc. Calderón Torres Alexander Alberto

Presidente Jurado de Tesis

Mg. Chiroque Baldera José Antonio

Secretario Jurado de Tesis

Mg. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: 12 de Diciembre – 2025



UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS:

**Existencia y unicidad de uniformidad en espacios
topológicos Hausdorff compactos**

Bach. Mat. Jhaneder Jaquelin Rivera Mendoza

Autor de la tesis

Bach. Mat. Richard Omar Cercado Vásquez

Autor de la tesis

Dra. Gloria María Ortiz Basauri

Asesora

Fecha de Defensa: 12 de Diciembre - 2025



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO



Ciudad Universitaria - Lambayeque

LICENCIADA - RESOLUCION DEL CONSEJO DIRECTIVO N° 015 -2023-SUNEDU / CD

ACTA DE SUSTENTACIÓN N° 84...-2025.-D/FACFyM

Siendo las 9:14 a.m. del día 12 de diciembre del 2025, se reunieron los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada:

Existencia y unicidad de uniformidad en espacios topológicos
Hausdorff compactos

Designados por Resolución N° 359-2021-VIRTUAL-D/FACFyM de fecha 25 de mayo de 2021

Con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

M.Sc. Alexander Alberto Calderón Torres	Presidente
Mg. José Antonio Chiroque Baldera	Secretario
Mg. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez	Vocal

La tesis fue asesorada por (el) (la) Dra. Gloria María Ortiz Basauri nombrado por Resolución N° 359-2021-VIRTUAL - D/FACFyM de fecha 25 de mayo de 2021.

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N° 1110-2025 - D/FACFyM de fecha 24 de noviembre de 2025.

La Tesis fue presentada y sustentada por (el) (los) Bachiller (es): Rivera Mendoza Jhaneder Jacquelin y Cercado Vásquez Richard Omar y tuvo una duración de 20 minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de Diecisiete (17) en la escala vigesimal, mención (Bueno).

Por lo que queda(n) apto(s) para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Siendo las 9:41 a.m. se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

M.Sc. Alexander A. Calderón Torres
Presidente

Mg. José A. Chiroque Baldera
Secretario

Mg. Alcides R. Cuti Gutiérrez
Vocal

Dra. Gloria M. Ortiz Basauri
Asesor

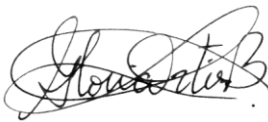
CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI, identificada con Documento de Identidad N°16748071, usuario revisor del documento titulado: "**Existencia y unicidad de uniformidad en espacios topológicos Hausdorff compactos**", cuyos autores son: - Bach. Mat. Jhaneder Jaquelin Rivera Mendoza y Bach. Mat. Richard Omar Cercado Vásquez; declaro que la evaluación realizada por el Programa Informático, ha arrojado un porcentaje de similitud de **9 %**, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 04 de enero de 2026.



GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071
asesora

Se adjunta:

- Resumen del Reporte automatizado de similitudes
- Recibo Digital



Recibo digital

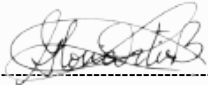
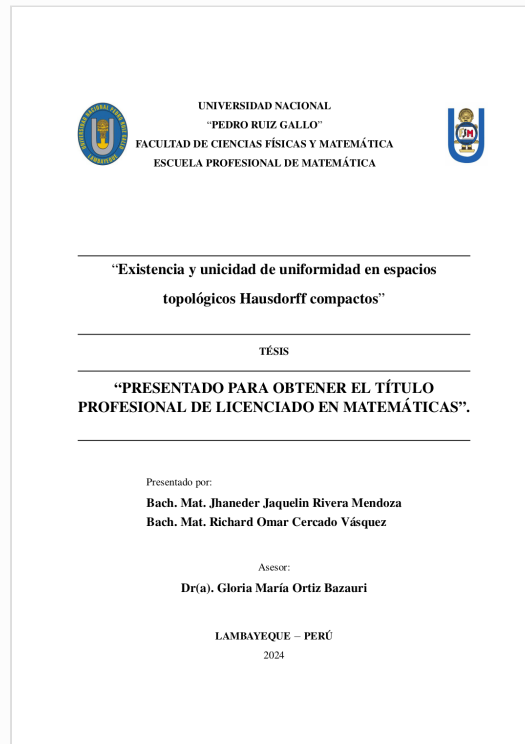
Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Richard Cercado Jhaneder Rivera
Título del ejercicio: Quick Submit
Título de la entrega: Existencia y unicidad de uniformidad en espacios topológico...
Nombre del archivo: de_uniformidad_en_espacios_topol_gicos_Hausdorff_compac...
Tamaño del archivo: 2.18M
Total páginas: 71
Total de palabras: 19,209
Total de caracteres: 73,937
Fecha de entrega: 23-ene.-2025 07:34 p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega... 2570182553



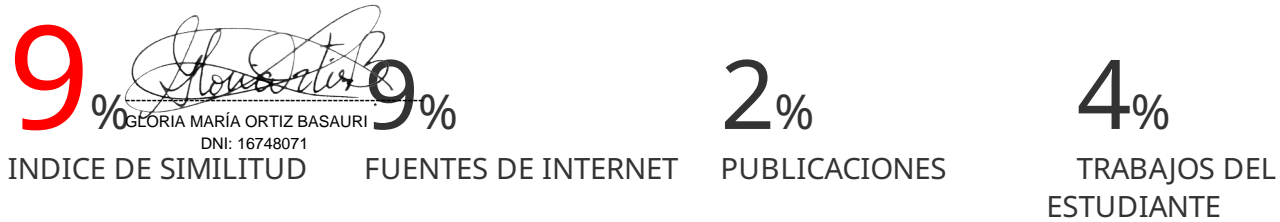
GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI
DNI: 16748071



GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI
DNI: 16748071

Existencia y unicidad de uniformidad en espacios topológicos Hausdorff compactos

INFORME DE ORIGINALIDAD



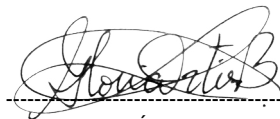
FUENTES PRIMARIAS

1	hdl.handle.net Fuente de Internet	3%
2	Submitted to Unviersidad de Granada Trabajo del estudiante	1%
3	lya.fciencias.unam.mx Fuente de Internet	1%
4	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA Trabajo del estudiante	1%
5	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo Trabajo del estudiante	<1%
6	repositorio.unprg.edu.pe Fuente de Internet	<1%
7	produccioncientificaluz.org Fuente de Internet	<1%
8	es.wikibooks.org Fuente de Internet	<1%

9

repositorio.unal.edu.co

Fuente de Internet



GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI

DNI: 16748071

<1 %

10

silo.tips

Fuente de Internet

<1 %

11

issuu.com

Fuente de Internet

<1 %

12

doczz.es

Fuente de Internet

<1 %

13

[Submitted to Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia](#)

Trabajo del estudiante

<1 %

14

[Submitted to Universidad Nacional de Colombia](#)

Trabajo del estudiante

<1 %

15

repositorio.unac.edu.pe

Fuente de Internet

<1 %

16

ri.ues.edu.sv

Fuente de Internet

<1 %

17

[Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga](#)

Trabajo del estudiante

<1 %

18

carnavalesdmivida.blogspot.com

Fuente de Internet

<1 %

19


repositorioinstitucional.buap.mx

Fuente de Internet

<1 %

20 Submitted to Universidad de Cantabria <1 %
Trabajo del estudiante

21 dialnet.unirioja.es <1 %
Fuente de Internet


GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI
DNI: 16748071

22 Bruce Cooperstein. "Advanced Linear Algebra", Chapman and Hall/CRC, 2019 <1 %
Publicación

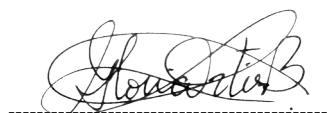
23 idoc.pub <1 %
Fuente de Internet

24 Encyclopaedia of Mathematics, 1995. <1 %
Publicación

25 www.fcfm.buap.mx <1 %
Fuente de Internet

26 www.library.nstu.ru <1 %
Fuente de Internet

27 archive.org <1 %
Fuente de Internet


GLORIA MARÍA ORTIZ BASAURI
DNI: 16748071

Excluir citas Activo
Excluir bibliografía Activo

Excluir coincidencias < 15 words

Agradecimiento

A mi familia por su comprensión y su apoyo incondicional en mis estudios.

A mi asesora Dra. Gloria María Ortiz Bazauri, quien nos orientó y guió en el presente trabajo de tesis.

Jhaneder

A mi familia por su comprensión y su apoyo incondicional en mis estudios.

A mi asesora Dra. Gloria María Ortiz Bazauri, quien nos orientó y guió en el presente trabajo de tesis.

Richard

Dedicatoria

A mis padres y mi familia por su apoyo constante, ya que este logro es por ellos.

Jhaneder

A Dios en primer lugar, a mis padres y mi familia por su apoyo constante, y este logro es por ellos.

Richard

Resumen

La estructura de uniformidad en un conjunto es una herramienta matemática que permite definir y estudiar la noción de proximidad o cercanía entre elementos del conjunto. Además, una uniformidad genera una topología en el conjunto generando así un estudio topológico del conjunto vía uniformidad. Aprovechamos esta característica para obtener la topología producto. Más aún, la uniformidad permite definir una uniformidad en el producto cartesiano del conjunto y esto a su vez una topología en el producto cartesiano, topología que coincide con la topología producto antes mencionada bajo ciertas condiciones.

Estudiamos también si dada una topología en un conjunto, se puede definir una uniformidad y que esta sea compatible con la topología. Bajo las condiciones de Hausdorff y compacidad y también con pseudométricas definidas naturalmente por el espacio topológico se logró obtener una uniformidad compatible con la topología y aun más ser única con dicha característica.

Palabras clave: Espacios topológicos, Espacios Hausdorff, Espacios compactos, Uniformidad, Existencia, Unicidad.

Abstract

The structure of uniformity in a set is a mathematical tool that allows defining and studying the notion of proximity or closeness between elements of the set. In addition, a uniformity generates a topology in the set, thus generating a topological study of the set via uniformity. We take advantage of this feature to get the product topology. Moreover, uniformity allows us to define a uniformity in the Cartesian product of the set, and this in turn allows us to define a topology in the Cartesian product, a topology that coincides with the aforementioned product topology under certain conditions.

We also study whether given a topology in a set, a uniformity can be defined and that it is compatible with the topology. Under the conditions of Hausdorff and compactness and also with pseudometrics naturally defined by the topological space, it was possible to obtain a compactible uniformity with the topology and even more unique with this characteristic.

Keywords: Topological spaces, Hausdorff spaces, Compact spaces, Uniformity, Existence, Uniqueness.

Introducción

El estudio de la uniformidad es comprender y formalizar de manera rigurosa la noción de proximidad o cercanía entre elementos de un conjunto utilizando relaciones que cumplen propiedades como reflexividad, simetría y transitividad generalizando la noción de distancia o métrica, permitiendo estudiar la proximidad en estructuras más abstractas.

Otro aspecto importante, es que una uniformidad genera una topología en el conjunto permitiendo un estudio topológico del conjunto. Esta topología a su vez, permite obtener la topología producto sobre el producto cartesiano del conjunto. Más aún, la uniformidad permite definir naturalmente una uniformidad en el producto cartesiano del conjunto y esto a su vez una topología en el producto cartesiano, es natural preguntarse ¿Qué relación guardan las dos topologías obtenidas en el producto cartesiano?.

También, es natural preguntarse si dada una topología en un conjunto, se puede definir una uniformidad y que relación guarda la topología generada por dicha uniformidad con la topología inicial. Mas específicamente, ¿Cuándo un espacio topológico es uniformizable?, refiriendonos al hecho de cuando existe una uniformidad y que la topología generada por dicha uniformidad sea igual la topología inicial que tenemos. Esto último, se dice que la uniformidad es compatible con la topología (inicial). Esto a su vez, permite preguntarse: ¿Si existe una uniformidad con dicha característica es única?. Estas preguntas son desarrolladas en este trabajo, y una clave para ello es que dado un espacio topológico se define naturalmente una familia de pseudométricas la cual a su vez genera naturalmente una uniformidad sobre el conjunto dado y cuando el espacio topológico es Hausdorff compacto lo cual a su vez implica ser completamente regular permite responder dichas preguntas. Uno de los motivos que nos impulso a desarrollar este trabajo de tesis sobre de uniformización de espacios topológicos con una única estructura uniforme compatible con la topología es debido al siguiente artículo [5] en el cual se estudia la uniformización de espacios Hausdorff's dando una condición necesaria y condición suficiente para que la uniformidad sea determinada de forma única por el espacio topológico. Mas

específicamente, considerando $C(X)$ el álgebra de funciones continuas acotadas de valor real en el espacio topológico X la cual es topologizada (es decir, se define en dicha algebra una topologia) por la topología de convergencia uniforme en el espacio X y $A(X)$ denotamos el subálgebra de aquellas funciones continuas de valor real que son constantes en el complemento de algún compacto en X . El espacio uniformizable de Hausdorff X admite solo una estructura uniforme si y solo si $A(X)$ es denso en $C(X)$. Estudiándose la unicidad de una estructura uniforme e obteniéndose un resultado para verificarlo. Es así la importancia y realización de nuestro trabajo de Tesis.

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
Introducción	IV
1. Preliminares	2
1.1. Espacios topológicos	2
1.2. Compacidad	8
2. Espacios uniformes	16
2.1. Bandas y uniformidad	16
2.2. Topología uniforme: Topología generada por una uniformidad	23
2.3. Bases de uniformidad	29
3. Existencia y Unicidad de uniformidad en espacios topológicos Hausdorff's compactos	42
3.1. Pseudométricas	42
3.2. Existencia y unicidad de uniformidad en espacios topológicos Hausdorff's Compactos	51
4. Conclusiones	61
5. Sugerencias	62

Capítulo 1:

Preliminares

Se presentará la definición de espacios topológicos y sus propiedades asociadas con axiomas de separación junto con la compacidad.

1.1 Espacios topológicos

La Topología es una área de la matemática dedicada a los espacios topológicos y funciones continuas.

Definición 1.1. [Z] Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{T} una colección de subconjuntos de X . \mathcal{T} es una topología sobre X si:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.
3. Dada una familia arbitraria $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ con $A_\lambda \in \mathcal{T}$, $\forall \lambda \in L$, entonces $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

El par (X, \mathcal{T}) es llamado espacio topológico y a los elementos de \mathcal{T} son llamados subconjuntos abiertos.

Ejemplo 1.1.

- a) Un conjunto X no vacío y $\mathcal{T}_{ind} = \{\emptyset, X\}$ es una topología llamada la topología indiscreta sobre X . En este caso, el espacio topológico (X, \mathcal{T}_{ind}) es llamado espacio topológico indiscreto.
- b) Un conjunto X no vacío y $\mathcal{T}_{dis} = \{A : A \subset X\} = \mathcal{P}(X)$ es una topología sobre X llamada la topología discreta sobre X . En este caso, el espacio topológico (X, \mathcal{T}_{dis}) es llamado el espacio topológico discreto.

c) El conjunto binario $X = \{0, 1\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$ es una topología sobre X llamada la topología de *Sierpinski* sobre X . Entonces, (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico llamado el espacio de *Sierpinski*.

d) Sea \mathbb{N} el conjunto de los números naturales y la colección

$$\mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{U_k = \{1, 2, \dots, k\} : k \in \mathbb{N}\}$$

es una topología sobre \mathbb{N} . En efecto, por definición de $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$, se tiene que $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$. Sean $U_{k_1}, U_{k_2} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Tomando $k = \min\{k_1, k_2\}$ se tiene que $U_{k_1} \cap U_{k_2} = U_k \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$. Sea la colección $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$, donde L es un conjunto de índices arbitrario. Así, se tiene que:

$$\text{o } \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \mathbb{N} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}} \text{ o } \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \neq \mathbb{N}.$$

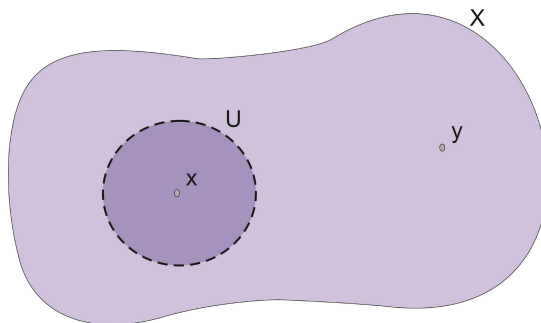
En este último caso, $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \neq \emptyset$. Tomando

$$m_0 = \min\{l \in \mathbb{N} : l \in \mathbb{N} \setminus \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\}$$

se tiene que: si $m_0 = 1$, entonces $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \emptyset \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ y si $m_0 \geq 2$, entonces $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = U_{m_0-1} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$. Esto, concluye que $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ es una topología sobre \mathbb{N} .

Ahora, se presenta un tipo especial de espacios topológicos introducidos por A.N. Kolmogoroff.

Definición 1.2. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. (X, \mathcal{T}) es T_0 si para cada par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$ existe un subconjunto $U \in \mathcal{T}$ tal que: Si $x \in U$, entonces $y \notin U$ o si $y \in U$, entonces $x \notin U$.



Ejemplo 1.2. El espacio topológico

$$(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{U_k = \{1, 2, \dots, k\} : k \in \mathbb{N}\})$$

es un espacio T_0 . En efecto, sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$ se tiene que $n < m$ o $m < n$. Suponga que $n < m$ y tome $U_n \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$. Luego, se tiene que:

$$n \in U_n \text{ y } m \notin U_n.$$

Análogamente, si $m < n$ para $U_m \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ se tiene que:

$$m \in U_m \text{ y } n \notin U_m.$$

El siguiente tipo de espacios topológicos que se definirá fue introducido por F. Reinz en 1907 ([8]).

Definición 1.3. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. (X, \mathcal{T}) es un espacio T_1 si para cada par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$ existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.

Proposición 1.1. [3] Si (X, \mathcal{T}) es un espacio T_1 , entonces (X, \mathcal{T}) es un espacio T_0 .

Demostración. Dados los puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen subconjuntos $U, V \in \mathcal{T}$ tales que

$$x \in U \setminus V, y \in V \setminus U$$

ya que por hipótesis (X, \mathcal{T}) es un espacio T_1 . Por consiguiente, $x \in U, y \notin U$ con $U \in \mathcal{T}$. Esto prueba que (X, \mathcal{T}) es un espacio T_0 . \square

El siguiente teorema muestra que los subconjuntos unitarios en los espacios T_1 son cerrados.

Teorema 1.1. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Si (X, \mathcal{T}) es un espacio T_1 , entonces para todo punto $x \in X$ el subconjunto $\{x\}$ es cerrado en X .

Demostración. Sea $x \in X$ fijado arbitrariamente.

Afirmación: $X \setminus \{x\} \in \mathcal{T}$

Sea $y \in X \setminus \{x\}$ un punto fijado arbitrariamente. Dado que (X, \mathcal{T}) es un espacio T_1 , existen abiertos

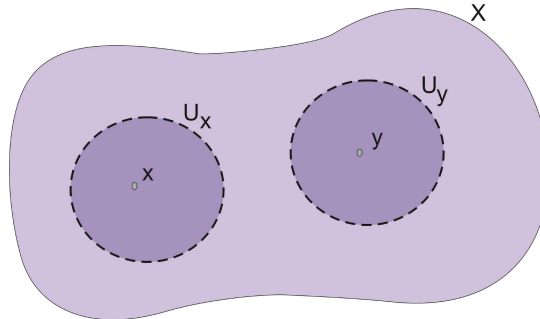
$$U_x, V_y \text{ tales que } x \in U_x \setminus V_y, y \in V_y \setminus U_x.$$

Dado que $x \notin V_y$ se tiene que $V_y \subset X \setminus \{x\}$ con $y \in V_y$. Luego, se obtiene:

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \{y\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V_y.$$

Consecuentemente, $X \setminus \{x\}$ es abierto por ser una unión de abiertos y por lo tanto $\{x\}$ es cerrado en X . \square

Definición 1.4. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. (X, \mathcal{T}) es de Hausdorff o T_2 si para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$ existen $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$, $U_x \cap U_y = \emptyset$.



Ejemplo 1.3. Todo espacio topológico metrizable es un espacio T_2 .

En efecto, sea (X, \mathcal{T}_d) un espacio metrizable por la métrica d .

Afirmación: (X, \mathcal{T}_d) es un espacio T_2 .

Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Considerando las bolas abiertas $B(x, \epsilon)$, $B(y, \epsilon)$ de centro x, y respectivamente y radio $\epsilon = \frac{d(x,y)}{2}$. Se tiene que:

$$B(x, \epsilon) \cap B(y, \epsilon) = \emptyset$$

ya que de lo contrario existiría un punto $z \in B(x, \epsilon) \cap B(y, \epsilon)$ y esto a su vez $d(z, x) < \epsilon$, $d(y, z) < \epsilon$.

Como:

$$0 < d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\epsilon = d(x, y)$$

entonces $0 < d(x, y) < d(x, y)$ lo cual es absurdo. Por lo tanto

$$B(x, \epsilon) \cap B(y, \epsilon) = \emptyset, \text{ con } x \in B(x, \epsilon) \in \mathcal{T}_d, y \in B(y, \epsilon) \in \mathcal{T}_d.$$

Ahora, se define los espacios topológicos completamente regulares.

Definición 1.5. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. (X, \mathcal{T}) es completamente regular si para cada subconjunto F cerrado de X y cualquier punto $x \in X \setminus F$, existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(F) \subset \{1\}$ y $f(x) = 0$.

En el siguiente ejemplo se muestra la presencia de regularidad completa en espacios metrizable.

Ejemplo 1.4. Todo espacio topológico metrizable es completamente regular.

En efecto, sea (X, \mathcal{T}_d) un espacio metrizable por la métrica d .

Afirmación: (X, \mathcal{T}_d) es espacio completamente regular.

Sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado y $x \in X \setminus F$ un punto arbitrario. Defina la función $f: X \rightarrow [0, 1]$ dada por:

$$f(y) = \frac{d(y, x)}{d(y, x) + d(y, F)}$$

donde $d(y, F) = \inf\{d(y, a) : a \in F\}$. En primer lugar se observa que:

Si $y \in F$, entonces $d(y, F) = 0$ y $d(y, x) > 0$ en consecuencia $d(y, x) + d(y, F) > 0$.

Si $y \notin F$, entonces $d(y, F) > 0$ en consecuencia $d(y, x) + d(y, F) > 0$.

Además,

$$f(x) = \frac{d(x, x)}{d(y, x) + d(x, F)} = 0, \text{ teniendo en cuenta que } d(x, F) > 0.$$

Ahora, para cada $y \in F$ se tiene que $d(y, F) = 0$, $d(y, x) > 0$. En consecuencia,

$$f(y) = \frac{d(y, x)}{d(y, x) + d(y, F)} = \frac{d(y, x)}{d(y, x)} = 1.$$

En segundo lugar, las funciones continuas $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$f_1(y) = d(y, x) \text{ para todo } y \in X$$

$$f_2(y) = d(y, F) \text{ para todo } y \in X.$$

se tiene que:

$$f(y) = \frac{f_1(y)}{f_1(y) + f_2(y)}$$

Luego, f es continua por ser el cociente de funciones continuas.

Esto prueba que (X, \mathcal{T}_d) es un espacio completamente regular.

Ahora, se define los espacios $T_{3,5}$ o de Tychonoff.

Definición 1.6. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. (X, \mathcal{T}) es $T_{3,5}$ o de Tychonoff si es completamente regular y T_1 .

En virtud del ejemplo 1.1 se tiene lo siguiente:

Ejemplo 1.5. Todo espacio metrizable es $T_{3,5}$.

A continuación, se definen los espacios normales base para el presente trabajo.

Definición 1.7. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. (X, \mathcal{T}) es normal si para cada par de subconjuntos cerrados F_1, F_2 de X disjuntos, es decir, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existen $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ tales que $F_1 \subset U_1$ y $F_2 \subset U_2$.

En el siguiente ejemplo se muestra la presencia de normalidad en espacios métrizables.

Ejemplo 1.6. Todo espacio metrizable es normal.

En efecto, sea (X, \mathcal{T}_d) un espacio metrizable por la métrica d .

Afirmación: (X, \mathcal{T}_d) es espacio normal.

Sean $F_1, F_2 \subset X$ subconjuntos cerrados y disjuntos, es decir:

$$X \setminus F_1, X \setminus F_2 \in \mathcal{T}_d \text{ y } F_1 \cap F_2 = \emptyset.$$

Por consiguiente $F_1 \subseteq X \setminus F_2, F_2 \subseteq X \setminus F_1$. De esto y siendo $X \setminus F_1, X \setminus F_2 \in \mathcal{T}_d$ para cada $x \in F_1$, cada $y \in F_2$ existen $\delta_x, \delta_y > 0$ tales que:

$$x \in B(x, \delta_x) \subseteq X \setminus F_2$$

$$y \in B(y, \delta_y) \subseteq X \setminus F_1$$

Esto último se debe a que $X \setminus F_1, X \setminus F_2 \in \mathcal{T}_d$. Ahora, defina los siguientes conjuntos:

$$U_{F_1} = \bigcup_{x \in F_1} B(x, \frac{\delta_x}{2})$$

$$V_{F_2} = \bigcup_{y \in F_2} B(y, \frac{\delta_y}{2})$$

para los cuales se tiene $U_{F_1}, V_{F_2} \in \mathcal{T}_d$ por ser unión de bolas abiertas (las cuales estan en \mathcal{T}_d) y $U_{F_1} \cap V_{F_2} = \emptyset$. Si esto último es lo contrario, es decir, $U_{F_1} \cap V_{F_2} \neq \emptyset$ entonces, existiría un punto $z \in U_{F_1} \cap V_{F_2}$. En consecuencia existirían puntos $a \in F_1, b \in F_2$ tales que:

$$z \in B(a, \frac{\delta_a}{2}) \text{ y } z \in B(b, \frac{\delta_b}{2})$$

Por lo tanto, $d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \frac{\delta_a}{2} + \frac{\delta_b}{2} < \max\{\delta_a, \delta_b\}$. Entonces, $a \in B(b, \delta_b)$ o $b \in B(a, \delta_a)$ lo cual es absurdo ya que $B(b, \delta_b) \subseteq X \setminus F_1$ y $B(a, \delta_a) \subseteq X \setminus F_2$. Así, U_{F_1} y U_{F_2} son disjuntos. De esta manera se prueba que (X, \mathcal{T}_d) es un espacio normal.

Ahora, se define los espacios T_4 introducidos por Heinrich Tietze en 1923 ([10]). También fueron introducidos por P. Alexandroff y P. Urysohn en 1924 ([9]).

Definición 1.8. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. (X, \mathcal{T}) es T_4 si es T_1 y normal.

Consecuencia del ejemplo [1.1] se tiene lo siguiente:

Ejemplo 1.7. Todo espacio metrizable es T_4 .

Ahora, se presenta siguiente lema cuyo nombre y demostración se debe al matemático ruso Pavel Samuelovich Urysohn ([11]).

Lema 1.1. (Lema de Urysohn) [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico T_4 . Si F, G son subconjuntos cerrados de X disjuntos, es decir, $F \cap G = \emptyset$. Entonces, existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(F) \subset \{0\}$ y $f(G) \subset \{1\}$.

Demostración. Ver el libro de Cassarrubias [3] □

Una aplicación inmediata del Lema de Uryshon es la siguiente proposición.

Proposición 1.2. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Si (X, \mathcal{T}) es T_4 , entonces es completamente regular. En consecuencia es $T_{3,5}$.

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de X y $x \in X \setminus F$. Como (X, \mathcal{T}) es T_4 , en particular es T_1 y por el Teorema [1.1] se tiene que $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X . Además, $F \cap \{x\} = \emptyset$, por el Lema de Uryshon [1.1] existe una función continua

$$f: X \rightarrow [0, 1] \text{ tal que } f(\{x\}) \subset \{0\} \text{ y } (F) \subset \{1\}.$$

Esto prueba que, el espacio es completamente regular y siendo T_1 (ya que es T_4) se concluye que (X, \mathcal{T}) es $T_{3,5}$. □

1.2 Compacidad

En esta sección se define la compacidad cuya esencia es una condición de finitud, ya que dichos espacios presentan características en común con los espacios finitos. También se demuestra que la compacidad es una condición complementaria para los espacios T_2 para ser espacios completamente regulares, espacios base para el presente trabajo.

Antes de ello, se define los siguientes conceptos para luego definir compacidad en un espacio topológicos, y así haber definidos los espacios compactos.

Definición 1.9. Dado un conjunto X . La colección $A = \{A_\lambda : A_\lambda \subseteq X\}_{\lambda \in L}$ es un cubrimiento de X si

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = X.$$

Definición 1.10. Dado un conjunto X y un cubrimiento $\mathcal{A} = \{A_\lambda : A_\lambda \subseteq X\}_{\lambda \in L}$ de X . La colección $\mathcal{A}_{L_1} = \{A_{\lambda_1} : A_{\lambda_1} \subseteq X\}_{\lambda_1 \in L_1 \subseteq L}$ es una subcubrimiento del cubrimiento \mathcal{A} si

$$\bigcup_{\lambda \in L_1} A_\lambda = X.$$

Se dice que el subcubrimiento es finito si L_1 es un conjunto finito.

Definición 1.11. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y el cubrimiento $\mathcal{A} = \{A_\lambda : A_\lambda \subseteq X\}_{\lambda \in L}$ de X . \mathcal{A} es abierto si $A_\lambda \in \mathcal{T}$ para todo $\lambda \in L$.

Definición 1.12. [3] Un espacio topológico es compacto si todo cubrimiento abierto admite un subcubrimiento finito.

Ejemplo 1.9. Todo espacio topológico finito es compacto.

En efecto, sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, donde X es finito. Sean x_1, x_2, \dots, x_n los elementos de X donde $n = \text{card}(X) \in \mathbb{N}$, es decir,

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Sea $\{A_\lambda : A_\lambda \subseteq X\}_{\lambda \in L}$ un cubrimiento abierto de X . Entonces, $X = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ y $A_\lambda \in \mathcal{T}$ para todo $\lambda \in L$. Luego, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ existe $\lambda_i \in L$ tal que $x_i \in A_{\lambda_i}$. Así, se obtiene una subcobertura finita $\{A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2}, \dots, A_{\lambda_n}\}$ de X . En consecuencia, X es compacto.

Como consecuencia setiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.10. El espacio topológico ([1.1]) de Sierpinski ($X = \{0, 1\}, \mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$) es compacto.

Ahora, se presenta una propiedad que poseen algunas familias de subespacios de un espacio topológico.

Definición 1.13. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $\mathcal{F} \subset P(X)$ una familia de subconjuntos de X . \mathcal{F} tiene la propiedad de la intersección finita si para toda subfamilia finita F_1, F_2, \dots, F_n no vacía de \mathcal{F} se tiene que:

$$\bigcap_{k=1}^n F_k \neq \emptyset.$$

Ahora, se caracteriza la compacidad através de la propiedad de intersección finita para familia de subconjuntos cerrados.

Teorema 1.2. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. (X, \mathcal{T}) es compacto si y sólo si toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración. Suponga que (X, \mathcal{T}) es compacto.

Afirmación: Toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Suponga por el absurdo que, exista $\mathcal{F} = \{F_\lambda : F_\lambda \text{ es un subconjunto cerrado de } X\}_{\lambda \in L}$ una familia con la propiedad de intersección finita tal que:

$$\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \emptyset.$$

Entonces, la familia $\mathcal{A} = \{X \setminus F_\lambda : F_\lambda \in \mathcal{F}\}_{\lambda \in L}$ es un cubrimiento abierto de X . Dado que (X, \mathcal{T}) es compacto, el cubrimiento \mathcal{A} admite un subcubrimiento finito para X . Consecuentemente

$$\text{existen } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L \text{ tales que } X = \bigcup_{k=1}^n (X \setminus F_{\lambda_k}).$$

Esto a su vez, implica que:

$$\emptyset = X \setminus X = X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n (X \setminus F_{\lambda_k}) \right) = \bigcap_{k=1}^n F_{\lambda_k}.$$

Lo cual no es posible, ya que la familia \mathcal{F} posee la propiedad de intersección finita.

Ahora, suponga que toda familia de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Afirmación (X, \mathcal{T}) es compacto.

Sea $\mathcal{A} = \{A_i : A_i \in \mathcal{T}\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X . Entonces, $A_i \in \mathcal{T}$ para todo $i \in I$ y $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. De esto, se obtiene la familia $\mathcal{L} = \{X \setminus A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos cerrados en X tal que

$$\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) = \emptyset.$$

En consecuencia, \mathcal{L} no tiene la propiedad de la intersección finita (ya que si la tuviera tendría intersección no vacía lo cual no es cierto). Por lo tanto,

$$\text{existen } i_1, i_2, \dots, i_n \in I \text{ tales que: } \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_{i_k}) = \emptyset.$$

Esto último, implica que $\bigcup_{k=1}^n A_{i_k} = X$ y en consecuencia la familia $\{A_{i_k} : k = 1, \dots, n\}$ es un subcubrimiento finito de \mathcal{A} . \square

Una aplicación inmediata del Teorema 1.2 es el siguiente colorario:

Corolario 1.1. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico compacto. Si $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos decrecientes cerrados de X , no vacíos, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$

Demostración. Por hipótesis se tiene que:

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq F_4 \dots \supseteq F_i \supseteq \dots$$

Luego, para cada n tome

$$\mathcal{F}_n = \{F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}, \dots, F_{i_n}\} \text{ y}$$

$$k = \min\{i_1, i_2, i_3, \dots, i_n\}$$

Luego, se tiene que: $\bigcap_{j=1}^n F_{i_j} = F_{i_k} \neq \emptyset$. En consecuencia, la familia \mathcal{F} tiene la propiedad de intersección finita. Luego, por el Teorema [1.2] se obtiene que:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$$

□

Ahora, se muestra que la compacidad es preservada en subconjuntos cerrados de espacios topológicos compactos.

Proposición 1.3. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico compacto y $F \subset X$ un subconjunto. Si F es cerrado en X , entonces F es compacto.

Demostración. Sea $\{A_i \cap F\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de F . Entonces, $A_i \in \mathcal{T}$, para todo $i \in I$ y $F = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap F)$. Por hipótesis F es cerrado, entonces $X \setminus F \in \mathcal{T}$. Así, se obtiene un cubrimiento abierto $\{A_i\}_{i \in I} \cup \{X \setminus F\}$ para X . En consecuencia:

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i \cup X \setminus F.$$

Como X un espacio compacto, existe un subcubrimiento abierto

$$\{A_{i_k} : k = 1, \dots, n\} \cup \{X \setminus F\} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

para X . Luego, se tiene: $X = (\bigcup_{k=1}^n A_{i_k}) \cup X \setminus F$ y por consiguiente:

$$F = X \cap F = \bigcup_{k=1}^n (A_{i_k} \cap F).$$

□

Ahora, se muestra que el conjunto de Cantor es Compacto.

Ejemplo 1.10. Defina el conjunto de cantor por:

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} F_i$$

donde:

$$\begin{aligned} F_0 &= [0, 1] \\ F_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \\ F_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \\ &\vdots \\ F_n &= F_{n-1} \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} (\frac{1+3^i}{3^i}, \frac{2+3^i}{3^i}), n \geq 1 \end{aligned}$$

Afirmación: C es un compacto no vacío.

En primer lugar el intervalo $[0, 1]$ es compacto, además se tiene que:

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq F_4 \dots \supseteq F_i \supseteq \dots$$

luego, por el corolario [1.1](#) se tiene que:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset, \text{ es decir } C \neq \emptyset$$

También se tiene que, C es cerrado por ser intersección de cerrados. Esto a su vez, implica que C es compacto (Proposición [1.3](#)) por ser subconjunto cerrado del compacto $[0, 1]$.

Veamos el siguiente teorema:

Teorema 1.3. [\[1\]](#) Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de cerrados en X con $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \neq \emptyset$. Si $U \in \mathcal{T}$ con $U \supset \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ y existe $\lambda_0 \in L$ tal que F_{λ_0} es compacto, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, n \in \mathbb{N}$ tal que $U \supset \bigcap_{i=1}^n F_{\lambda_i}$

Demostración. Sea $\mathcal{T}_{F_{\lambda_0}}$ la topología de subespacio de $F_{\lambda_0} \subset X$. Por hipótesis, F_{λ_0} es un subconjunto compacto de X , es decir, $(F_{\lambda_0}, \mathcal{T}_{F_{\lambda_0}})$ es un espacio topológico compacto. Dado que $U \in \mathcal{T}$, entonces $F_{\lambda_0} \cap U \in \mathcal{T}_{F_{\lambda_0}}$ y así:

$$F_{\lambda_0} \setminus U = F_{\lambda_0} \setminus (F_{\lambda_0} \cap U) \text{ cerrado en } F_{\lambda_0}.$$

De esto, asu vez se tiene que $F_{\lambda_0} \setminus U$ es compacto en F_{λ_0} (Proposición [1.3](#)).

Además, como F_λ es cerrado en X , para todo $\lambda \in L$ se tiene que $X \setminus F_\lambda \in \mathcal{T}$ para todo $\lambda \in L$. En consecuencia:

$$F_{\lambda_0} \setminus F_\lambda = F_{\lambda_0} \cap (X \setminus F_\lambda) \in \mathcal{T}_{F_{\lambda_0}} \text{ para todo } \lambda \in L.$$

Ahora, como $\emptyset \neq \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \subset U$ se tiene que:

$$X \setminus U \subset X \setminus \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} (X \setminus F_\lambda) \text{ y } F_{\lambda_0} \cap U \neq \emptyset.$$

Luego, se tiene que:

$$F_{\lambda_0} \setminus U = F_{\lambda_0} \cap (X \setminus U) \subset F_{\lambda_0} \cap \left(\bigcup_{\lambda \in L} (X \setminus F_\lambda) \right) = \bigcup_{\lambda \in L} (F_{\lambda_0} \cap (X \setminus F_\lambda)) = \bigcup_{\lambda \in L} (F_{\lambda_0} \setminus F_\lambda)$$

Se obtiene un cubrimiento abierto $\{F_{\lambda_0} \setminus F_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de $F_{\lambda_0} \setminus U$. Luego, existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_{\lambda_0} \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} (F_{\lambda_0} \setminus F_{\lambda_i})$ y por lo tanto:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_{\lambda_i} \right) \cap F_{\lambda_0} = \bigcap_{i=1}^{n-1} (F_{\lambda_0} \cap F_{\lambda_i}) = F_{\lambda_0} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (F_{\lambda_0} \setminus F_{\lambda_i}) \right) \subset F_{\lambda_0} \setminus (F_{\lambda_0} \setminus U) = F_{\lambda_0} \cap U \subset U.$$

Por último, tome: $F_{\lambda_n} = F_{\lambda_0}$ se obtiene

$$\bigcap_{i=1}^n F_{\lambda_i} = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_{\lambda_i} \right) \cap F_{\lambda_0} \subset U.$$

Probando como se quería. □

Para llegar al objetivo final de esta sección se define la regularidad en un espacio topológico y así a los llamados espacios regulares.

Definición 1.14. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. (X, \mathcal{T}) es regular si para cada subconjunto $F \subset X$ cerrado y cada $x \in X \setminus F$ existen $U, V \in \mathcal{T}$ con $U \cap V = \emptyset$ tales que $x \in U$ y $F \subset V$.

Se mostrará, la presencia de la regularidad en espacios métrizables.

Ejemplo 1.11 Todo espacio metrizable es regular.

En efecto, sea (X, \mathcal{T}_d) un espacio metrizable por la métrica d .

Afirmación: (X, \mathcal{T}_d) es un espacio regular.

Sean F un cerrado y $x \in X \setminus F$. Como (X, \mathcal{T}_d) es un espacio normal (Ejemplo 1.1) y $\{x\}$ un subconjunto cerrado con $F \cap \{x\} = \emptyset$, entonces existen abiertos $U, V \in \mathcal{T}$ tales $\{x\} \subset U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. De donde se concluye la demostración.

En el siguiente teorema se muestra que en los espacio T_2 la compacidad implica regularidad, es decir, todo espacio T_2 y compacto es regular.

Teorema 1.4. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico T_2 . Si (X, \mathcal{T}) es compacto, entonces (X, \mathcal{T}) es un espacio regular.

Demostración. Sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado y $x \in X \setminus F$ un punto fijado arbitrariamente. Para cada punto $y \in F$ se tiene que $y \neq x$. Además, siendo (X, \mathcal{T}) un espacio T_2 existen abiertos disjuntos que contienen a x y y . Es decir, existen:

$$U_{x,y}, U_y \in \mathcal{T} \text{ tales que } x \in U_{x,y}, y \in U_y \text{ y } U_{x,y} \cap U_y = \emptyset.$$

De esta manera, se tiene el cubrimiento abierto $\{U_y\}_{y \in F}$ de F . Por la Proposición 1.3 se tiene que F compacto (ya que F es cerrado, (X, \mathcal{T}) es compacto), por consiguiente existe un subcubrimiento finito para F , es decir:

$$\text{existen } y_1, y_2, \dots, y_n \in F \text{ y abiertos } U_{y_1}, U_{y_2}, \dots, U_{y_n} \in \mathcal{T}$$

tales que $\bigcup_{i=1}^n U_{y_i} \supseteq F$. Además, existen abiertos $U_{x,y_1}, U_{x,y_2}, \dots, U_{x,y_n} \in \mathcal{T}$ tales que

$$x \in U_{x,y_i} \text{ para todo } i = 1, \dots, n \text{ y}$$

$$U_{x,y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Ahora, tome: $U_x = \bigcap_{i=1}^n U_{x,y_i}$ y $V_F = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ para los cuales se tiene que:

$$U_x, V_F \in \mathcal{T},$$

$$U_x \cap V_F = \emptyset \text{ y}$$

$$x \in U_x, F \subset V_F.$$

Por lo tanto (X, \mathcal{T}) es un espacio regular. □

En realidad, en los espacios T_2 la compacidad implica regularidad completa, es decir, todo espacio T_2 compacto es completamente regular. Antes de mostrar ello, se prueba que en dichos espacios se tiene normalidad, es decir, los espacios T_2 compactos son espacios normales.

Corolario 1.2. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico T_2 . Si (X, \mathcal{T}) es compacto, entonces (X, \mathcal{T}) es un espacio normal. En consecuencia, es un espacio T_4 .

Demostración. Sean $F_1, F_2 \subset X$ subconjuntos cerrados y disjuntos, es decir:

$$X \setminus F_1, X \setminus F_2 \in \mathcal{T} \text{ y } F_1 \cap F_2 = \emptyset.$$

Por el Teorema [1.4](#) el espacio (X, \mathcal{T}) es regular (ya que por hipótesis, el espacio (X, \mathcal{T}) es T_2 y compacto). Esto implica que, para cada $x \in F_1 \subset X \setminus F_2$ existen $U_x, V_{x, F_2} \in \mathcal{T}$ tales que:

$$x \in U_x, F_2 \subset U_{x, F_2} \text{ y } U_x \cap U_{x, F_2} = \emptyset.$$

De esta manera, se obtiene un cubrimiento abierto $\{U_x\}_{x \in F_1}$ para F_1 y como F_1 es compacto (esto se debe a que F_1 es cerrado y por la Proposición [1.3](#)) dicho cubrimiento admite un subcubrimiento finito, es decir, existen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in F_1$ tales que:

$$F_1 \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$$

Además, existen $U_{x_1, F_1}, U_{x_2, F_2}, \dots, U_{x_n, F_n} \in \mathcal{T}$ tales que $U_{x_i} \cap U_{x_i, F_2} = \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Luego, tome: $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i, F_2}$ se tiene que:

$$U, V \in \mathcal{T}, F_1 \subset U, F_2 \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset$$

Se prueba de esta manera que (X, \mathcal{T}) un espacio normal y como todo espacio T_2 es T_1 se concluye que dicho espacio es T_4 . □

Corolario 1.3. [\[3\]](#) Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico T_2 . Si (X, \mathcal{T}) es compacto, entonces (X, \mathcal{T}) es un espacio completamente regular. En consecuencia, es un espacio $T_{3,5}$.

Demostración. Por hipotesis (X, \mathcal{T}) es un T_2 y compacto. Por el Corolario [1.2](#) se tiene que (X, \mathcal{T}) es T_4 y por la proposición [1.2](#) se tiene que (X, \mathcal{T}) es un espacio completamente regular y siendo T_1 (ya que es T_2) es un espacio $T_{3,5}$. □

Capítulo 2:

Espacios uniformes

En este capítulo, se define la estructura de uniformidad en un conjunto arbitrario y los *Espacios Uniformes*.

2.1 Bandas y uniformidad

En esta sección se definirá y estudiará: bandas y uniformidades sobre un conjunto arbitrario. Definiéndose lo que es un espacio uniforme.

Definición 2.1. [A] Sea X un conjunto y $V \subset X \times X$ un subconjunto. V es una banda en X si:

1. Para cada punto $x \in X$ se tiene que: $(x, x) \in V$.
2. Para cada par de puntos $x, y \in X$ se tiene que: $(x, y) \in V$ si y sólo si $(y, x) \in V$.

En la definición [2.1](#) la colección de todas las bandas de X es denotada por \mathfrak{B}_X , es decir,

$$\mathfrak{B}_X = \{V \subset X \times X : V \text{ es una banda en } X\}.$$

Ejemplo 2.1

1. Sea X un conjunto arbitrario. Se define el siguiente subconjunto del producto cartesiano $X \times X$

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}.$$

De donde se tiene que Δ es una banda en X , es decir, $\Delta \in \mathfrak{B}_X$, la cual será llamada la banda diagonal en X . Además, Δ es la menor de todas las bandas en X .

Afirmación: Δ es una banda en X .

Por definición de Δ se tiene que: $(x, x) \in \Delta$, para todo $x \in X$. Además, para cada par de puntos $x, y \in X$ se tiene que:

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Delta & \text{ si y sólo si } x = y \\ & \text{ si y sólo si } y = x \\ & \text{ si y sólo si } (y, x) = (x, x) \in \Delta \end{aligned}$$

Afirmación: Δ es la menor banda en X .

Sea V una banda en X arbitraria. Por definición de banda se cumple que:

$$(x, x) \in V \text{ para todo } x \in X.$$

Esto a su vez, muestra que $\Delta \subset V$.

2. Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales y $V = ([1, 2] \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times [1, 2]) \cup \Delta$ un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Afirmación: V es una banda en \mathbb{R} .

En efecto, por definición de V se tiene que $\Delta \subset V$, es decir, $(x, x) \in V$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sean $x, y \in X$ puntos tales que:

$$\begin{aligned} (x, y) \in V & \text{ si y sólo si o } (x, y) \in [1, 2] \times \mathbb{R} \text{ o } (x, y) \in \mathbb{R} \times [1, 2] \text{ o } (x, y) \in \Delta \\ & \text{ si y sólo si o } (y, x) \in \mathbb{R} \times [1, 2] \text{ o } (y, x) \in [1, 2] \times \mathbb{R} \text{ o } (y, x) \in \Delta \\ & \text{ si y sólo si } (y, x) \in V. \end{aligned}$$

Mostrándose como se quería.

Ahora, se muestran las siguientes definiciones.

Definición 2.2. [A] Sea X un conjunto, $M \subset X \times X$ y $x, y \in X$.

x está M -próximo de y lo cual se denotará por $d(x, y) < M$ si $(x, y) \in M$.

Definición 2.3. [A] Sea X un conjunto. Dados $M, N \subset X \times X$, se define el siguiente subconjunto

$$M + N = \{(x, y) \in X \times X : \text{existe } z \in X \text{ tal que } (x, z) \in M \text{ y } (z, y) \in N\} \subset X \times X.$$

Para el cual se cumple:

Observación 2.1. 1. Si $a, b, c \in X$ tal que $d(a, c) < M$ y $d(c, b) < N$, entonces $d(a, b) < M + N$.

En efecto, $d(a, c) < M$ y $d(c, b) < N$, entonces $(a, c) \in M$ y $(c, b) \in N$. Por la definición [2.3](#) implica que $(a, b) \in M + N$. Por la definición [2.2](#) $d(a, b) < M + N$

2. Dado $A \subset X \times X$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se define:

$$nA = \underbrace{A + \dots + A}_{n \text{ veces}}$$

Para el cual se cumple:

$$(n + m)A = nA + mA \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Ahora, se mostrará las siguientes observaciones:

Observación 2.2. Sea X un conjunto y $V \subset X \times X$. Si V es una banda en X , entonces se tiene que:

1. Para cada $x \in X$, x está V -próximo de x , es decir, $d(x, x) < V$.

En efecto, sea $x \in X$ un punto arbitrario. Como V es una banda en X se tiene que $(x, x) \in V$ y por lo tanto $d(x, x) < V$.

2. Para cada $x, y \in X$ se cumple: $d(x, y) < V$ si y solo si $d(y, x) < V$.

En efecto, sean $x, y \in X$ puntos arbitrarios, entonces.

$$d(x, y) < V \text{ si y sólo si } (x, y) \in V$$

$$\text{si y sólo si } (y, x) \in V, \text{ ya que } V \text{ es una banda en } X$$

$$\text{si y solo si } d(y, x) < V.$$

3. $2V = V + V$ es una banda en X .

En efecto, sea $x \in X$ un punto arbitrario. Por el Item 1 se tiene que $d(x, x) < V$. Por el Item 1 de la Observación [2.1](#) se tiene que $d(x, x) < 2V$, es decir, $(x, x) \in 2V$.

4. $V \subset 2V$. En general, $V \subset nV$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sean $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in V$, entonces $d(x, y) < V$. Además, por el Item [1](#) se tiene que $d(y, y) < V$. En consecuencia, por el Item 1 de la Observación [2.1](#) $d(x, y) < V + V$ y por lo tanto $(x, y) \in V + V = 2V$.

Definición 2.4. Sean X un conjunto, $A \subset X$ y $B \subset X \times X$. A tiene diámetro menor que B lo cual será denotado por $d(A) < B$ si para cada par de puntos $x, y \in A$ se tiene que $d(x, y) < B$.

En la definición 2.4 A tiene diámetro menor que B es equivalente a decir, que $A \times A \subset B$.

Ejemplo 2.2 En \mathbb{R} considere la banda $V = ([1, 2] \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times [1, 2]) \cup \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Ejemplo 2,1 Item 2), donde Δ es la banda diagonal en \mathbb{R} . El conjunto $[1, 2] \subset \mathbb{R}$ tiene diámetro menor que V , ya que $[1, 2] \times [1, 2] \subset V$ y en consecuencia, $d([1, 2]) < V$.

Definición 2.5. [4] Sea X un conjunto, \mathfrak{B}_X la colección de bandas en X y $\mathcal{U} \subset \mathfrak{B}_X$ una subcolección. \mathcal{U} es una uniformidad sobre X si:

1. Si $V \in \mathcal{U}$ y $W \in \mathfrak{B}_X$ tal que $V \subset W$, entonces $W \in \mathcal{U}$.
2. Si $V, W \in \mathcal{U}$, entonces $V \cap W \in \mathcal{U}$.
3. Si $V \in \mathcal{U}$, entonces existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $2W \subset V$

El par (X, \mathcal{U}) donde X es un conjunto y \mathcal{U} es una uniformidad, es llamado espacio uniforme y a los elementos de \mathcal{U} se llaman bandas uniformes. Una banda uniforme será aquella banda que se encuentra en la uniformidad. Además, en la definición 2.5 la condición 1 se refiere a que toda banda que contenga una banda uniforme también será una banda uniforme. En la condición 3, si $V \in \mathcal{U}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $nW \subset V$.

Ejemplo 2.3

1. Sea X un conjunto y $\{X \times X\} \subset \mathfrak{B}_X$ es una uniformidad llamada la uniformidad trivial. El par $(X, \{X \times X\})$ es llamado espacio uniforme trivial.
2. Sea X un conjunto y $\mathfrak{B}_X = \mathcal{P}_{X \times X}$ es una uniformidad llamada la uniformidad discreta. El par (X, \mathfrak{B}_X) es llamado espacio uniforme discreto.

Definición 2.6. [4] Sea X un conjunto, $M \subset X \times X$ y $x \in X$ un punto. La bola de centro x y radio M la cual será denotada por $B_M(x)$ es el conjunto $B_M(x) = \{y \in X : d(y, x) < M\}$

Ahora, se muestra que las bandas en un conjunto se comportan como los números reales y así los espacios uniformes como la forma "primitiva" de los espacios métricos.

Proposición 2.1. Sea X un conjunto.

1. Si V es una banda en X , entonces $d(B_V(x)) < 2V$.

En efecto, sean $m, n \in B_V(x)$. Entonces,

$$d(m, x) < V \text{ y } d(n, x) < V.$$

Ahora, por el Item 2. de la Observación 2.1 se tiene que $d(x, n) < V$ (ya que V es una banda en X). Consecuentemente, $d(m, n) < V + V = 2V$. Siendo m, n arbitrarios se concluye $d(B_V(x)) < 2V$.

2. Si $M, N \in X \times X$ con $N \subset M$, entonces $B_N(x) \subset B_M(x)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} a \in B_N(x) &\longrightarrow d(a, x) < N \\ &\longrightarrow (a, x) \in N \\ &\longrightarrow (a, x) \in M, \text{ ya que } N \subset M \\ &\longrightarrow d(a, x) < M \\ &\longrightarrow a \in B_M(x). \end{aligned}$$

3. Si $M, N \in X \times X$, entonces $B_{M \cap N}(x) = B_M(x) \cap B_N(x)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} a \in B_{M \cap N}(x) &\longleftrightarrow d(a, x) < M \cap N \\ &\longleftrightarrow (a, x) \in M \cap N \\ &\longleftrightarrow (a, x) \in M \text{ y } (a, x) \in N \\ &\longleftrightarrow d(a, x) < M \text{ y } d(a, x) < N \\ &\longleftrightarrow a \in B_M(x) \text{ y } a \in B_N(x) \\ &\longleftrightarrow a \in B_M(x) \cap B_N(x). \end{aligned}$$

4. Sean $x \in X$, $N \in X \times X$. Si $M \subset X$ tal que $B_N(x) \subset M$, entonces existe $R \subset X \times X$ tal que $M = B_R(x)$.

En efecto: Tome $R = N \cup \{(y, x) : y \in M\} \subset X \times X$.

Afirmación: $M \subset B_R(x)$.

$$\begin{aligned} z \in M &\longrightarrow (z, x) \in \{(y, x) : y \in M\} \\ &\longrightarrow (z, x) \in R, \text{ ya que } \{(y, x) : y \in M\} \subset R \\ &\longrightarrow d(z, x) < R \\ &\longrightarrow z \in B_R(x). \end{aligned}$$

Afirmación: $B_R(x) \subset M$.

$$\begin{aligned} m \in B_R(x) &\longrightarrow d(m, x) < R \\ &\longrightarrow (m, x) \in R \\ &\longrightarrow (m, x) \in N \text{ o } (m, x) \in \{(y, x) : y \in M\} \\ &\longrightarrow d(m, x) < N \text{ o } m \in M \\ &\longrightarrow m \in B_N(x) \text{ o } m \in M. \\ &\longrightarrow m \in M, \text{ ya que } B_N(x) \subset M. \end{aligned}$$

5. Sean $x \in X$, $N \in \mathfrak{B}_X$. Si $M \subset X$ tal que $B_N(x) \subset M$, entonces existe $R \in \mathfrak{B}_X$ tal que $M = B_R(x)$.

En efecto:

Defina $R = N \cup \{(y, x) : y \in M\} \cup \{(x, y) : y \in M\} \subset X \times X$.

Afirmación: $R \in \mathfrak{B}_X$, es decir, R es una banda en X .

Como $N \in \mathfrak{B}_X$, entonces $(x, x) \in N$, para todo $x \in X$. De esto último y como $N \subset R$ se tiene que:

$$(x, x) \in R, \text{ para todo } x \in X.$$

Además,

$$\begin{aligned}
 (m, n) \in R &\longrightarrow (m, n) \in N \text{ o} \\
 &\quad m \in M \text{ y } n = x \text{ o} \\
 &\quad m = x \text{ y } n \in M \\
 &\longrightarrow (n, m) \in N, \text{ ya que } N \in \mathfrak{B}_X \text{ o} \\
 &\quad (n, m) = (x, m) \text{ donde } m \in M \text{ o} \\
 &\quad (n, m) = (n, x) \text{ donde } n \in M \\
 &\longrightarrow (n, m) \in N \cup \{(x, y) : y \in M\} \cup \{(y, x) : y \in M\} = R.
 \end{aligned}$$

Usando un procedimiento como el Item 4 se tiene que: $M = B_R(x)$.

6. Sean $x \in X$, $N \in \mathcal{U}$. Si $M \subset X$ tal que $B_N(x) \subset M$, entonces existe $R \in \mathcal{U}$ tal que $M = B_R(x)$.

En efecto:

Defina $R = N \cup \{(y, x) : y \in M\} \subset X \times X$. Como $N \subset R \in \mathfrak{B}_X$, $N \in \mathcal{U}$, entonces $R \in \mathcal{U}$. Por el item 5 se tiene que $M = B_R(x)$.

7. Sea $B_M(x)$. Si $M \in \mathcal{U}$, entonces existe $N \in \mathcal{U}$ con $N \subset M$ tal que para cada $y \in B_N(x) \subset B_M(x)$ se tiene que $B_N(y) \subset B_M(x)$.

En efecto: Como $M \in \mathcal{U}$, entonces existe $N \in \mathcal{U}$ tal que $2N \subset M$ dado que, $N \subset 2N$ se tiene que $N \subset M$. De esto último, y por el Item 2 se tiene que $B_x(N) \subset B_x(M)$. Además, para cada $y \in B_N(x)$ (de donde $(y, x) \in N$) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 z \in B_N(y) &\longrightarrow d(z, y) < N \\
 &\longrightarrow (z, y) \in N \\
 &\longrightarrow (z, x) \in 2N, \text{ por lo anterior y } (y, x) \in N \\
 &\longrightarrow (z, x) \in M, \text{ ya que } 2N \subset M \\
 &\longrightarrow d(z, x) < M \\
 &\longrightarrow z \in B_M(x)
 \end{aligned}$$

En consecuencia, $B_N(y) \subset B_M(x)$.

2.2 Topología uniforme: Topología generada por una uniformidad

En esta sección, se mostrará que toda uniformidad en un conjunto induce una topología sobre dicho conjunto estudiándose el aspecto topológico de los espacios uniformes. Mas precisamente, se estudiará dicha topología obtenida.

El siguiente teorema muestra como es la topología generada por la uniformidad definida en un conjunto.

Teorema 2.1. [4] *Sea X un conjunto y $\mathcal{U} \subset \mathfrak{B}_X$. Si \mathcal{U} es una uniformidad sobre X , entonces*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U},X} = \{U \subset X : \text{para cada } x \in U \text{ existe } V \in \mathcal{U} \text{ para el cual } B_V(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología sobre X . En este caso, $\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ es llamada la topología sobre X generada (o inducida) por la uniformidad \mathcal{U} .

Demostración. Por definición de $\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ se tiene que $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$. Además, se cumple que $B_V(x) \subset X$ para cada $x \in X$ y $V \in \mathcal{U}$. Por consiguiente $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$.

Sea $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$, donde I es un conjunto de índices. Así, $A_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ para cada $i \in I$ y por consiguiente:

$$\text{para cada } i \in I, \text{ para cada } x \in A_i \text{ existe } V \in \mathcal{U} \text{ para el cual } B_V(x) \subset A_i.$$

Ahora, para cada $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ existe $i_x \in I$ talque $x \in A_{i_x}$ y en consecuencia, existe $V_x \in \mathcal{U}$ para el cual

$$B_{V_x}(x) \subset A_{i_x} \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Por consiguiente, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$.

Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$. O $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ o $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, en el segundo caso se tiene que: para cada $x \in A_1 \cap A_2$ existen $V_x, W_x \in \mathcal{U}$ tales que $B_{V_x}(x) \subset A_1$ y $B_{W_x}(x) \subset A_2$. Como $V_x, W_x \in \mathcal{U}$ y \mathcal{U} es una uniformidad sobre X , entonces $V_x \cap W_x \in \mathcal{U}$. En consecuencia, por la Proposición 2.1 Item 3 se tiene que:

$$B_{V_x \cap W_x}(x) = B_{V_x}(x) \cap B_{W_x}(x) \subset A_1 \cap A_2$$

y de esta manera

$$A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}.$$

En conclusión, $\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ es una topología sobre X . \square

También en algunas referencias bibliográficas $\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ es llamada de topología uniforme sobre X , es decir una topología sobre X que a sido generada apartir de la uniformidad \mathcal{U} .

Por el Teorema 2.1, todo conjunto asociado a una estructura uniforme (uniformidad) se le puede asociar una estructura topológica (topología: inducida), es decir, todo espacio uniforme induce un espacio topológico.

Definición 2.7. *El espacio uniforme (X, \mathcal{U}) posee la propiedad de Hausdorff si se cumple la siguiente condición:*

$$\bigcap_{V \in \mathcal{U}} V = \Delta.$$

Proposición 2.2. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme.*

Si $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U},X})$ es un espacio topológico T_0 , entonces (X, \mathcal{U}) posee la propiedad de Hausdorff.

Demostración. Afirmación: $\Delta \subset \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V$.

Sea $(x, x) \in \Delta$.

Sea $W \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_X$. Entonces, $W \in \mathcal{B}_X$ y esto implica que $(x, x) \in W$ (Definición de bandas en X). Siendo $W \in \mathcal{U}$ arbitrario, se obtiene que $(x, x) \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V$.

Afirmación: $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} V \subset \Delta$.

Suponga que existe $(a, b) \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V$ tal que $(a, b) \notin \Delta$. Esto último, implica que $a \neq b$. Además, siendo por hipotesis $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U},X})$ un espacio topológico T_0 entonces existe $U_{a,b} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ tal que:

$$a \in U_{a,b} \text{ con } b \notin U_{a,b} \text{ ó } b \in U_{a,b} \text{ con } a \notin U_{a,b}.$$

Suponga que $a \in U_{a,b}$ con $b \notin U_{a,b}$. Por la definición de $\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ se tiene que existe $V_{a,U_{a,b}} \in \mathcal{U}$ tal que $B_{V_{a,U_{a,b}}}(a) \subset U_{a,b}$. Luego, $b \notin B_{V_{a,U_{a,b}}}(a)$ y esto a su vez implica que $(b, a) \notin V_{a,U_{a,b}}$ y en consecuencia $(a, b) \notin V_{a,U_{a,b}}$ (ya que si $(a, b) \in V_{a,U_{a,b}}$ y siendo $V_{a,U_{a,b}} \in \mathcal{B}_X$ entonces $(b, a) \in V_{a,U_{a,b}}$ lo cual no puede ser). Por consiguiente, $(a, b) \notin \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V$ lo cual es absurdo(ya que contradice la suposición inicial).

Análogamente, se tiene si se supone $b \in U_{a,b}$ con $a \notin U_{a,b}$. Por lo tanto, para todo $(a, b) \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V$ se tiene que $(a, b) \in \Delta$, es decir $a = b$. \square

Definición 2.8. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto. Se define el interior de A en X y denotado por $\text{int}_{\mathcal{T}}(A)$ como:

$$\text{int}_{\mathcal{T}}(A) = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset A}} U.$$

Proposición 2.3. [3] Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Entonces:

1. $\text{int}_{\mathcal{T}}(A) \in \mathcal{T}$, para todo $A \subset X$.
2. $\text{int}_{\mathcal{T}}(A) \subset A$, para todo $A \subset X$.
3. Sea $A \subset X$. Si $U \in \mathcal{T}$ con $U \subset A$, entonces $U \subset \text{int}_{\mathcal{T}}(A)$. Es decir, $\text{int}_{\mathcal{T}}(A)$ es el mayor conjunto abierto contenido en A .
4. Si $A \in \mathcal{T}$, entonces $A = \text{int}_{\mathcal{T}}(A)$.
5. Si $A, B \subset X$ con $A \subset B$, entonces $\text{int}_{\mathcal{T}}(A) \subset \text{int}_{\mathcal{T}}(B)$.
6. Sea $\{A_j\}_{j \in J}$ una familia de subconjuntos de X . Entonces, $\bigcup_{j \in J} \text{int}_{\mathcal{T}}(A_j) \subset \text{int}_{\mathcal{T}}(\bigcup_{j \in J} A_j)$

Demostración. 1. Por definición de $\text{int}_{\mathcal{T}}(A)$ se tiene que:

$$\text{int}_{\mathcal{T}}(A) = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset A}} U$$

lo cual implica que $\text{int}_{\mathcal{T}}(A) \in \mathcal{T}$ por ser una unión de abiertos.

2. Sea $x \in \text{int}_{\mathcal{T}}(A)$. Entonces, existe $U_x \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_x \subset A$. De esto último, se obtiene que $x \in A$. Siendo x arbitrario, se concluye que $\text{int}_{\mathcal{T}}(A) \subset A$.
3. Sea $U \in \mathcal{T}$ con $U \subset A$. Luego,

$$U \subset \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{T} \\ V \subset A}} V = \text{int}_{\mathcal{T}}(A).$$

4. Dado que, $A \subset A$ y además, por hipótesis $A \in \mathcal{T}$, esto a su vez implica que:

$$A \subset \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{T} \\ V \subset A}} V = \text{int}_{\mathcal{T}}(A).$$

Además, por el Item 2 se tiene que: $\text{int}_{\mathcal{T}}(A) \subset A$. Por lo tanto, $A = \text{int}_{\mathcal{T}}(A)$.

5. Como $A \subset B$ y dado que $\text{int}_{\mathcal{T},X}(A) \subset A$ (por el Item 2) entonces $\text{int}_{\mathcal{T}}(A) \subset B$. De esto último, y dado que $\text{int}_{\mathcal{T}}(A) \in \mathcal{T}$ (Item 1) se tiene que $\text{int}_{\mathcal{T}}(A) \subset \text{int}_{\mathcal{T}}(B)$ (Item 3).
6. Como $\bigcup_{j \in J} \text{int}_{\mathcal{T}}(A_j) \in \mathcal{T}$ (ya que $\text{int}_{\mathcal{T}}(A_j) \in \mathcal{T}$, para $j \in J$) y $\bigcup_{j \in J} \text{int}_{\mathcal{T}}(A_j) \subset \bigcup_{j \in J} A_j$ (ya que por el Item 2 se tiene que $\text{int}_{\mathcal{T}}(A_j) \subset A_j$, para $j \in J$) entonces por el Item 3 se obtiene que $\bigcup_{j \in J} \text{int}_{\mathcal{T}}(A_j) \subset \text{int}_{\mathcal{T}}(\bigcup_{j \in J} A_j)$.

□

Proposición 2.4. [6] Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme, $\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ la topología sobre X inducida por \mathcal{U} . Si $A \subset X$ un subconjunto, entonces

$$\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(A) = \{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\}.$$

Demostración. Afirmación: $\{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$.

Sea $y \in \{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\}$. Entonces, $y \in A$ y existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $B_V(y) \subset A$. Por la Proposición 2.1 Item 7 existe $W \in \mathcal{U}$ con $W \subset V$ tal que:

$$\text{para cada } z \in B_W(y) \subset B_V(y) \text{ se tiene que } B_W(z) \subset B_V(y).$$

Luego, $B_W(z) \subset A$ (ya que $B_V(y) \subset A$) En consecuencia,

$$B_W(y) \subset \{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\}$$

Por lo tanto, $\{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$.

Afirmación: $\{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\} \subset \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(A)$.

Dado que:

$$\begin{aligned} \{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\} &\in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X} \text{ y} \\ \{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\} &\subset A \end{aligned}$$

por la Proposición 2.3 Item 3 se obtiene que:

$$\{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\} \subset \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(A).$$

Afirmación: $\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(A) \subset \{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\}$.

Sea $a \in \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(A)$. Entonces, existe $U_a \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ tal que $a \in U_a$ y $U_a \subset A$. Por definición de $\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$, existe $V_a \in \mathcal{U}$ tal que $B_{V_a}(a) \subset U_a$. En consecuencia, $B_{V_a}(a) \subset A$ y así $a \in \{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\}$. Siendo a arbitrario se obtiene que:

$$\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(A) \subset \{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\}.$$

De esta afirmación y la anterior se obtiene que:

$$\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(A) = \{x \in A : \text{existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(x) \subset A\}.$$

□

Proposición 2.5. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme, $\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$ la topología sobre X inducida por \mathcal{U} y $x \in X$. Si $V \in \mathcal{U}$, entonces existe $W \in \mathcal{U}$ tal que*

$$\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(B_V(x)) = B_W(x).$$

En particular, $\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(B_V(x)) \neq \emptyset$ con $x \in \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(B_V(x))$,

Demostración. Por la Proposición 2.4 se tiene que:

$$\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(B_V(x)) = \{b \in B_V(x) : \text{existe } R \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_R(b) \subset B_V(x)\}.$$

Como $V \in \mathcal{U}$ (Por hipótesis) por la Proposición 2.1 Item 7 existe $M \in \mathcal{U}$ con $M \subset V$ tal que para cada $y \in B_M(x) \subset B_V(x)$ se tiene que $B_M(y) \subset B_V(x)$. De esto último, y por la Proposición 2.4 $y \in \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(B_V(x))$. Siendo y arbitrario se obtiene que:

$$B_M(x) \subset \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(B_V(x)).$$

Por la Proposición 2.1 Item 6, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U},X}}(B_V(x)) = B_W(x)$. □

Definición 2.9. [3] Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $V \subset X$ un subconjunto y $x \in X$. V es una vecindad de x si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ y $U \subset V$. En este caso, a la colección de vecindades de x la denotamos por \mathcal{V}_x , es decir, $\mathcal{V}_x = \{V \subset X : V \text{ es una vecindad de } x\}$

Ahora, se muestra propiedades de las vecindades.

Lema 2.1. [3] Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $V \subset X$ un subconjunto y $x \in X$.

1. Si V es una vecindad de x , entonces $x \in V$.
2. V es una vecindad de x si y solo si $x \in \text{int}_{\mathcal{T}}(V)$.
3. Si $V \in \mathcal{T}$ y $x \in V$, entonces V es una vecindad de x .

Demostración. 1. Por hipótesis, V es una vecindad de x . Luego, existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ y $U \subset V$. De esto último, se tiene que $x \in V$.

2. Por la hipótesis, se tiene que:

$$\begin{aligned} V \text{ es una vecindad de } x &\longrightarrow \text{ existe } U \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in U \text{ y } U \subset V \\ &\longrightarrow U \subset \text{int}_{\mathcal{T}}(V), \text{ por lo anterior y por la Proposición } \boxed{2.3} \\ &\longrightarrow x \in \text{int}_{\mathcal{T}}(V). \end{aligned}$$

Ahora, se muestra la otra implicación

$$\begin{aligned} x \in \text{int}_{\mathcal{T}}(V) &\longrightarrow \text{ existe } U \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in U \text{ y } U \subset V \\ &\longrightarrow V \text{ es una vecindad de } x. \end{aligned}$$

3. Por hipótesis $V \in \mathcal{T}$. Luego, por la Proposición $\boxed{2.3}$ Item 4 se tiene que: $V = \text{int}_{\mathcal{T}}(V)$. También, por hipótesis se tiene que $x \in V$ y en consecuencia $x \in \text{int}_{\mathcal{T}}(V)$. □

Teorema 2.2. Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}, X}$ la topología sobre X inducida por \mathcal{U} y $x \in X$.

Entonces:

$$\mathcal{V}_x = \{B_V(x) : V \in \mathcal{U}\}$$

Demostración. Afirmación: $\mathcal{V}_x \subset \{B_V(x) : V \in \mathcal{U}\}$.

Sea $W \in \mathcal{V}_x$. Entonces, W es una vecindad de x . Luego, por el Lema $\boxed{2.1}$ Item 2 se tiene que $x \in \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}, X}}(W)$. De esto último, y por la Proposición $\boxed{2.4}$ se tiene que

$$\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}, X}}(W) = \{z \in W : \text{ existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_V(z) \subset W\}.$$

En consecuencia, existe $R \in \mathcal{U}$ tal que $B_R(x) \subset W$. De esto último, y por el Item 6 de la Proposición $\boxed{2.1}$ existe $M \in \mathcal{U}$ tal que $W = B_M(x)$. Por lo tanto $W \in \{B_V(x) : V \in \mathcal{U}\}$.

Afirmación: $\{B_V(x) : V \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{V}_x$.

Sea $B_N(x)$ la bola de centro $x \in X$ y radio $N \in \mathcal{U}$. Por la Proposición $\boxed{2.5}$ existe $P \in \mathcal{U}$ tal que

$$\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}, X}}(B_N(x)) = B_P(x).$$

Luego, $x \in \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}, X}}(B_N(x))$ ya que $x \in B_P(x)$ (y así $\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}, X}}(B_N(x)) \neq \emptyset$). Por el Item 2 del Lema $\boxed{2.1}$ se tiene que $B_N(x)$ es una vecindad de x . En consecuencia, $B_N(x) \in \mathcal{V}_x$. □

2.3 Bases de uniformidad

Ahora, se definirá el concepto de base de una uniformidad y su implicación en el estudio uniforme y topológico de un conjunto. Se define y estudia también la uniformidad producto y la topología generada por dicha uniformidad.

Definición 2.10. [4] Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme y $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ una colección. \mathcal{B} es una base de \mathcal{U} si para cada $V \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset U$.

Ahora, vamos a demostrar un resultado inmediato de esta definición establecida.

Proposición 2.6. Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme y $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$. Si \mathcal{B} es una base de \mathcal{U} , entonces

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V$$

Demostración. Afirmación: $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

Sea $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$.

Sea $U \in \mathcal{U}$. Entonces, existe $V_U \in \mathcal{B}$ tal que $V_U \subset U$. Dado que $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \subset V_U$ (ya que $V_U \in \mathcal{B}$), se tiene que, $x \in V_U$. Esto último, implica que $x \in U$. Siendo x arbitrario, se obtiene que $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \subset U$.

Nuevamente, siendo $U \in \mathcal{U}$ arbitrario se obtiene que $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

Afirmación: $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \subset \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$.

Sea $y \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$. Entonces, $y \in U$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Esto, a su vez implica que $y \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}$ (ya que $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$). Luego, $y \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$. Mostrando lo que se quería. \square

Una aplicación inmediata de esta proposición es el siguiente corolario.

Corolario 2.1. Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme y $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ una colección. Si \mathcal{B} es una base de \mathcal{U} y $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}, X})$ es un espacio T_0 , entonces

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \Delta.$$

Demostración. Como por hipótesis $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}, X})$ es un espacio T_0 , entonces por la proposición [2.2] se tiene que (X, \mathcal{U}) posee la propiedad de Hausdorff. Es decir,

$$\bigcap_{V \in \mathcal{U}} V = \Delta.$$

Luego, por la Proposición [2.6] se tiene que $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} V = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$. Por lo tanto, $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \Delta$. \square

También, se exhibe la siguiente proposición inmediata del Teorema 2.2

Proposición 2.7. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme. Si \mathcal{B} una base para \mathcal{U} , entonces:*

$$\{B_V(x) : V \in \mathcal{B}, x \in X\} \subset \mathcal{V}_x$$

Demostración. Por el Teorema 2.2 se tiene que

$$\mathcal{V}_x = \{B_V(x) : V \in \mathcal{U}\}$$

Como \mathcal{B} una base para \mathcal{U} , en particular $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$. De esto, último se obtiene que:

$$\{B_V(x) : V \in \mathcal{B}\} \subset \{B_V(x) : V \in \mathcal{U}\} = \mathcal{V}_x$$

De esta manera, se muestra tal como se quería. □

También, se exhibe una caracterización de las bases de una uniformidad.

Teorema 2.3. [4] *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme y $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ una colección. \mathcal{B} es una base para \mathcal{U} si y solo si $\mathcal{U} = \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{existe } V \in \mathcal{B} \text{ tal que } V \subset U\}$.*

Demostración. Supongamos \mathcal{B} es una base para \mathcal{U} . Tome la colección:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{existe } V \in \mathcal{B} \text{ tal que } V \subset U\}$$

Afirmación: $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \mathcal{U}$

Sea $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Por definición de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset A$ y por lo tanto $A \in \mathcal{U}$ (ya $B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ y \mathcal{U} es una uniformidad sobre X). Esto muestra que, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{U}$.

Ahora, tome $W \in \mathcal{U}$ arbitrario. Como \mathcal{B} es base de \mathcal{U} existe $N \in \mathcal{B}$ tal que $N \subset W$ y por lo tanto $W \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. En consecuencia, $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$.

Ahora, suponga $\mathcal{U} = \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{existe } V \in \mathcal{B} \text{ tal que } V \subset U\}$. Luego, para cada $V \in \mathcal{U}$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset U$. Por lo tanto, \mathcal{B} es una base para \mathcal{U} . □

Corolario 2.2. *Sea (X, \mathcal{U}) un espacio uniforme, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}, X}$ la topología sobre X inducida por \mathcal{U} y $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ una colección. Si \mathcal{B} es una base para \mathcal{U} , entonces,*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}, X} = \{U \subset X : \text{para cada } x \in U \text{ existe } V \in \mathcal{B} \text{ para el cual } B_V(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Demostración. Por el Teorema 2.1 se tiene que:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U},X} = \{U \subset X : \text{para cada } x \in U \text{ existe } V \in \mathcal{U} \text{ para el cual } B_V(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\}. \quad (2.1)$$

Además, como \mathcal{B} es una base para la uniformidad \mathcal{U} por el Teorema 2.3 se tiene que

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{existe } V \in \mathcal{B} \text{ tal que } V \subset U\}. \quad (2.2)$$

Afirmación:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}} \subset \{U \subset X : \text{para cada } x \in U \text{ existe } V \in \mathcal{B} \text{ para el cual } B_V(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Sea $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$. Luego, por 2.1 se tiene que:

$$\text{para cada } x \in A \text{ existe } R \in \mathcal{U} \text{ para el cual } B_R(x) \subset A.$$

Como $R \in \mathcal{U}$ por 2.2, existe $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $V_x \subset R$. De esto último y por la Proposición 2.1 Item 2 se tiene que: $B_{V_x}(x) \subset B_R(x)$ y en consecuencia, $B_{V_x}(x) \subset A$.

$$\text{Afirmación: } \{U \subset X : \text{para cada } x \in U \text{ existe } V \in \mathcal{B} \text{ para el cual } B_V(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$$

Sea $W \subset X$ tal que:

$$\text{para cada } x \in W \text{ existe } Q_x \in \mathcal{B} \text{ para el cual } B_{Q_x}(x) \subset W.$$

Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$, entonces $Q_x \in \mathcal{U}$. Consecuentemente, $W \in \mathcal{T}_{\mathcal{U},X}$. Mostrándose como se quería. \square

En el siguiente teorema caracterizaremos colecciones que serán bases de alguna topología de un conjunto.

Teorema 2.4. [4] Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{B} \subset \mathfrak{B}_X$. \mathcal{B} es base para alguna uniformidad sobre X si y solo si \mathcal{B} satisface las siguientes condiciones:

1. Si $U, V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset U \cap V$.
2. Si $U \in \mathcal{B}$, entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $2V \subset U$.

En este caso, la uniformidad es dada por:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{B},X} = \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{existe } V \in \mathcal{B} \text{ tal que } V \subset U\}$$

la cual es llamada la uniformidad sobre X inducida (o generada) por \mathcal{B} con $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{B},X}$.

Demostración. Suponga que \mathcal{B} es base para alguna uniformidad sobre X . Denote por \mathcal{U} dicha uniformidad. Entonces, $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ y por el Teorema 2.3 se tiene que:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{B},X} = \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{existe } V \in \mathcal{B} \text{ tal que } V \subset U\}.$$

Sean $U, V \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ y \mathcal{U} es una uniformidad sobre X , entonces $U \cap V \in \mathcal{U}$. Luego, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que

$$W \subset U \cap V.$$

Ahora. Sea $V \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ y \mathcal{U} es una uniformidad, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$2U \subset V.$$

Además, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U$ y esto a su vez implica $2W \subset 2U$. Por lo tanto, $2W \subset V$.

Suponga que la colección \mathcal{B} satisface las condiciones 1 y 2.

Afirmación: $\mathcal{U}_{\mathcal{B},X} = \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{existe } V \in \mathcal{B} \text{ tal que } V \subset U\}$. es una uniformidad sobre X .

Sean $V \in \mathcal{U}$ y $W \in \mathfrak{B}_X$ tal que $V \subset W$. Dado que existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset V$ y esto a su vez implica que $U \subset W$. Por lo tanto, $W \in \mathcal{U}$.

Sean $V, W \in \mathcal{U}$ y $W \in \mathfrak{B}_X$. Luego, existen $M, N \in \mathcal{B}$ tales que

$$M \subset V \text{ y } N \subset W$$

Por la condición 1 existe $R \in \mathcal{B}$ tal que

$$R \subset M \cap N \subset V \cap W$$

Esto implica, que $V \cap W \in \mathcal{U}$. Sea $V \in \mathcal{U}$. Luego, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset V$. Por el punto 2 existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $2W \subset U$. Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ se tiene que $W \in \mathcal{U}$ y además $2W \subset V$. Por lo tanto, se muestra que \mathcal{U} es una uniformidad sobre X . Por el Teorema 2.3 se concluye que \mathcal{B} es una base para $\mathcal{U}_{\mathcal{B},X}$. \square

Definición 2.11. [4] Sean X, Y conjuntos no vacíos. Dadas las bandas $V_1 \in \mathfrak{B}_X, V_2 \in \mathfrak{B}_Y$, se define el siguiente subconjunto:

$$V_1 V_2 = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (X \times Y) \times (X \times Y) : d(x_1, y_1) < V_1, d(x_2, y_2) < V_2\}$$

Proposición 2.8. Sean X, Y conjuntos no vacíos.

1. Si $V_1 \in \mathfrak{B}_X, V_2 \in \mathfrak{B}_Y$, entonces $V_1 V_2$ es una banda en $X \times Y$, es decir, $V_1 V_2 \in \mathfrak{B}_{X \times Y}$.

2. $B_{V_1V_2}(x, y) = B_{V_1}(x) \times B_{V_2}(y)$, donde $x \in X, y \in Y, V_1 \in \mathfrak{B}_X, V_2 \in \mathfrak{B}_Y$

Demostración. 1. Sean $x \in X, y \in Y$ puntos. Como $V_1 \in \mathfrak{B}_X, V_2 \in \mathfrak{B}_Y$, entonces $(x, x) \in V_1, (y, y) \in V_2$ y así $d(x, x) < V_1, d(y, y) < V_2$ en consecuencia $((x, y), (x, y)) \in V_1V_2$.

Sean $x_1, y_1 \in X, x_2, y_2 \in Y$ tales que: $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in V_1V_2$. Entonces:

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in V_1V_2 &\longleftrightarrow d(x_1, y_1) < V_1, d(x_2, y_2) < V_2 \\ &\longleftrightarrow d(y_1, x_1) < V_1, d(y_2, x_2) < V_2 \\ &\longleftrightarrow ((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \in V_1V_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto V_1V_2 es una banda en $X \times Y$.

2. Sean $x \in X, y \in Y, V_1 \in \mathfrak{B}_X, V_2 \in \mathfrak{B}_Y$.

Afirmación: $B_{V_1V_2}(x, y) \subset B_{V_1}(x) \times B_{V_2}(y)$.

Sean $a \in X, b \in Y$ tales que $(a, b) \in B_{V_1V_2}(x, y)$. Luego,

$$\begin{aligned} d((a, b), (x, y)) < V_1V_2 &\longrightarrow ((a, b), (x, y)) \in V_1V_2 \\ &\longrightarrow d(a, x) < V_1 \\ &\quad d(b, y) < V_2 \\ &\longrightarrow a \in B_{V_1}(x) \\ &\quad b \in B_{V_2}(y) \\ &\longrightarrow (a, b) \in B_{V_1}(x) \times B_{V_2}(y) \end{aligned}$$

Afirmación: $B_{V_1}(x) \times B_{V_2}(y) \subset B_{V_1V_2}(x, y)$.

Sean $m \in X, n \in Y$ tales que $(m, n) \in B_{V_1}(x) \times B_{V_2}(y)$. Luego,

$$\begin{aligned} (m, n) \in B_{V_1}(x) \times B_{V_2}(y) &\longrightarrow m \in B_{V_1}(x) \\ &\quad n \in B_{V_2}(y) \\ &\longrightarrow d(m, x) < V_1 \\ &\quad d(n, y) < V_2 \\ &\longrightarrow ((m, n), (x, y)) \in V_1V_2 \\ &\longrightarrow d((m, n), (x, y)) < V_1V_2 \\ &\longrightarrow (m, n) \in B_{V_1V_2}(x, y) \end{aligned}$$

□

Ahora, se muestra que existe una uniformidad natural en el producto de espacios uniformes.

Teorema 2.5. [4] Sean (X, \mathcal{M}) , (Y, \mathcal{N}) espacios uniformes. La colección:

$$\mathcal{MN} = \{V_1V_2 : V_1 \in \mathcal{M}, V_2 \in \mathcal{N}\} \subset \mathfrak{B}_{X \times Y}$$

es una base para una uniformidad sobre $X \times Y$. Esta uniformidad será llamada la uniformidad producto sobre $X \times Y$ inducida por \mathcal{MN} la cual sera denotada por $\mathcal{U}_{\mathcal{MN}, X \times Y}$. Además, \mathcal{MN} sera llamada la base uniforme producto sobre $X \times Y$ con $\mathcal{MN} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{MN}, X \times Y}$ y el par $(X \times Y, \mathcal{U}_{\mathcal{MN}, X \times Y})$ es llamado el espacio uniforme producto.

Demostración. Sean $U, V \in \mathcal{MN}$. Luego, existen $U_1, V_1 \in \mathcal{M}, U_2, V_2 \in \mathcal{N}$ tales que

$$U = U_1U_2 = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (X \times Y) \times (X \times Y) : d(x_1, y_1) < U_1, d(x_2, y_2) < U_2\}$$

$$V = V_1V_2 = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (X \times Y) \times (X \times Y) : d(x_1, y_1) < V_1, d(x_2, y_2) < V_2\}.$$

Entonces, para

$$U \cap V = \{((m, n), (p, q)) \in (X \times Y) \times (X \times Y) : ((m, n), (p, q)) \in U \cap V\}.$$

se tiene que:

$$((m, n), (p, q)) \in U \cap V \iff ((m, n), (p, q)) \in U \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}, X \times Y}, ((m, n), (p, q)) \in V \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}, X \times Y}$$

$$\iff d(m, p) < U_1, d(n, q) < U_2, d(m, p) < V_1, d(n, q) < V_2$$

$$\iff d(m, p) \in U_1, d(n, q) \in U_2, d(m, p) \in V_1, d(n, q) \in V_2$$

$$\iff (m, p) \in U_1 \cap V_1, (n, q) \in U_2 \cap V_2, \text{ donde}$$

$$U_1 \cap V_1 \in \mathcal{M}, U_2 \cap V_2 \in \mathcal{N}, \text{ ya que } \mathcal{M}, \mathcal{N}, \text{ son uniformidades}$$

$$\iff (m, p) < U_1 \cap V_1, (n, q) < U_2 \cap V_2, \text{ donde}$$

$$U_1 \cap V_1 \in \mathcal{M}, U_2 \cap V_2 \in \mathcal{N}.$$

Así, se obtiene

$$U \cap V = (U_1 \cap V_1)(U_2 \cap V_2) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}, X \times Y}.$$

y además, $U \cap V \subset U \cap V$

Ahora, sea $M \in \mathcal{MN}$. Luego, existen $M_1 \in \mathcal{M}, M_2 \in \mathcal{N}$ tales que

$$M = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (X \times Y) \times (X \times Y) : d(x_1, y_1) < M_1, d(x_2, y_2) < M_2\}.$$

Como \mathcal{M}, \mathcal{N} son uniformidades sobre X, Y respectivamente existen $W_{1,M} \in \mathcal{M}, W_{2,M} \in \mathcal{N}$ tales que $2W_{1,M} \subset M_1$ y $2W_{2,M} \subset M_2$. Luego, $2W_{1,M} \in \mathcal{M}$ y $2W_{2,M} \in \mathcal{N}$. Además,

$$W_{1,M}W_{2,M} = \{((a, c), (b, d)) \in (X \times Y) \times (X \times Y) : d(a, c) < W_{1,M}, d(b, d) < W_{2,M}\} \in \mathcal{MN}$$

Afirmación: $2(W_{1,M}W_{2,M}) = (2W_{1,M})(2W_{2,M})$ En efecto:

$$\begin{aligned} ((r, t), (s, u)) \in 2(W_{1,M}W_{2,M}) &\longleftrightarrow \text{existe } (x, y) \in X \times Y \text{ tal que} \\ &\quad ((r, t), (x, y)) \in W_{1,M}W_{2,M}, ((x, y), (s, u)) \in W_{1,M}W_{2,M} \\ &\longleftrightarrow \text{existe } (x, y) \in X \times Y \text{ tal que} \\ &\quad d(r, x) < W_{1,M}, d(t, y) < W_{2,M}, d(x, s) < W_{1,M}, d(y, u) < W_{2,M} \\ &\longleftrightarrow \text{existe } (x, y) \in X \times Y \text{ tal que} \\ &\quad (r, x) \in W_{1,M}, (x, s) \in W_{1,M}, (t, y) \in W_{2,M}, (y, u) \in W_{2,M} \\ &\longleftrightarrow (r, s) \in 2W_{1,M}, (t, u) \in 2W_{2,M} \\ &\longleftrightarrow d(r, s) < 2W_{1,M}, d(t, u) < 2W_{2,M} \\ &\longleftrightarrow ((r, t), (s, u)) \in (2W_{1,M})(2W_{2,M}) \end{aligned}$$

Afirmación: $2(W_{1,M}W_{2,M}) \subset M$ En efecto:

$$\begin{aligned} ((r, t), (s, u)) \in 2(W_{1,M}W_{2,M}) &\longleftrightarrow ((r, t), (s, u)) \in (2W_{1,M})(2W_{2,M}) \\ &\longleftrightarrow d(r, s) < 2W_{1,M}, d(t, u) < 2W_{2,M} \\ &\longleftrightarrow (r, s) \in 2W_{1,M}, (t, u) \in 2W_{2,M} \\ &\longleftrightarrow (r, s) \in M_1, (t, u) \in M_2, \text{ ya que } 2W_{1,M} \subset M_1 \text{ y } 2W_{2,M} \subset M_2 \\ &\longleftrightarrow d(r, s) < M_1, d(t, u) < M_2 \\ &\longleftrightarrow ((r, t), (s, u)) \in M \end{aligned}$$

Por el Teorema [2.4](#) \mathcal{MN} es base para alguna uniformidad sobre X , la cual es dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathcal{MN}, X \times Y} &= \{U \in \mathfrak{B}_{X \times Y} : \text{existe } V \in \mathcal{MN} \text{ tal que } V \subset U\} \\ &= \{U \in \mathfrak{B}_{X \times Y} : \text{existen } V_{1,U} \in \mathcal{M}, V_{2,U} \in \mathcal{N} \text{ tal que } V_{1,U}V_{2,U} \subset U\} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.6. [\[4\]](#) Sean X, Y conjuntos y $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}_X, \mathcal{N} \subset \mathfrak{B}_Y$ colecciones de bandas sobre X y Y respectivamente. Si \mathcal{M}, \mathcal{N} son uniformidades sobre X y Y respectivamente, entonces existe una

topología sobre $X \times Y$ inducida por dichas uniformidades. En este caso, dicha topología será denotada por $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, X \times Y, X \times Y}$ y llamada de la topología uniforme producto sobre $X \times Y$ inducida por la uniformidad producto $\mathcal{U}_{\mathcal{M}\mathcal{N}, X \times Y}$.

Demostración. Como \mathcal{M}, \mathcal{N} son uniformidades sobre X y Y respectivamente, entonces se tienen los espacios uniformes $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$. Luego, por el Teorema 2.5 existe la uniformidad producto sobre $X \times Y$ denotada por $\mathcal{U}_{\mathcal{M}\mathcal{N}, X \times Y}$. De esto último y por el Teorema 2.1 existe una topología sobre $X \times Y$ la cual es denotada por $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, X \times Y, X \times Y}$ y dada por:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, X \times Y, X \times Y} = \{A \subset X \times Y : \text{para cada } p \in A \text{ existe } V \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}\mathcal{N}, X \times Y} \text{ tal que } B_V(p) \subset A\} \cup \{\emptyset\}.$$

□

Corolario 2.3. Sean $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ espacios uniformes y $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, X \times Y, X \times Y}$ la topología uniforme producto sobre $X \times Y$, entonces

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, X \times Y, X \times Y} = \{A \subset X \times Y : \text{para cada } (x, y) \in A \text{ existen } V_1 \in \mathcal{M}, V_2 \in \mathcal{N} \text{ tales que } B_{V_1}(x) \times B_{V_2}(y) \subset A\} \cup \{\emptyset\}$$

Demostración. Por el Teorema 2.5 se tiene la base uniforme producto

$$\mathcal{M}\mathcal{N} = \{V_1 V_2 : V_1 \in \mathcal{M}, V_2 \in \mathcal{N}\} \subset \mathfrak{B}_{X \times Y}$$

para la uniformidad producto $\mathcal{U}_{\mathcal{M}\mathcal{N}, X \times Y}$. Luego, por el Corolario 2.2 se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, X \times Y, X \times Y} &= \{A \subset X \times Y : \text{para cada } x \in A \text{ existe } V \in \mathcal{M}\mathcal{N} \text{ tales que } B_V(x) \subset A\} \cup \{\emptyset\} \\ &= \{A \subset X \times Y : \text{para cada } x \in A \text{ existen } V_1 \in \mathcal{M}, V_2 \in \mathcal{N} \text{ tales que } B_{V_1 V_2}(x) \subset A\} \cup \{\emptyset\} \\ &= \{A \subset X \times Y : \text{para cada } (x, y) \in A \text{ existen } V_1 \in \mathcal{M}, V_2 \in \mathcal{N} \text{ tales que } B_{V_1}(x) \times B_{V_2}(y) \subset A\} \cup \{\emptyset\} \end{aligned}$$

□

Observación 2.3. Sea (X, \mathcal{W}) un espacio uniforme. Entonces:

1. Por la Proposición 2.8 se tiene que:

$$V_1 V_2 = \{((a, b), (c, d)) \in (X \times X) \times (X \times X) : d(a, c) < V_1, d(b, d) < V_2\} \in \mathfrak{B}_{X \times X},$$

donde $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}_X$.

2. Por la Proposición 2.8 se tiene que:

$$B_{V_1 V_2}(x, y) = B_{V_1}(x) \times B_{V_2}(y), \text{ donde } x, y \in X, V_1, V_2 \in \mathfrak{B}_X$$

3. Por el Teorema 2.5 se tiene la base uniforme producto

$$\mathcal{W}\mathcal{W} = \{V_1V_2 : V_1 \in \mathcal{W}, V_2 \in \mathcal{W}\} \subset \mathfrak{B}_{X \times X}$$

para la uniformidad producto $\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X}$ sobre $X \times X$. Donde

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X} &= \{U \in \mathfrak{B}_{X \times X} : \text{existen } V_{1,U} \in \mathcal{W}, V_{2,U} \in \mathcal{W} \text{ tal que } V_{1,U}V_{2,U} \subset U\} \\ &= \{U \in \mathfrak{B}_{X \times X} : \text{existe } V \in \mathcal{W} \text{ tal que } VV \subset U\} \end{aligned}$$

4. Por el Teorema 2.6 se obtiene la topología uniforme producto $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X}, X \times X}$ y el Corolario 2.3 junto con el Item anterior(3) se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X}, X \times X} &= \{A \subset X \times X : \text{para cada } (x, y) \in A \text{ existen } V_1 \in \mathcal{W}, V_2 \in \mathcal{W} \\ &\quad \text{tales que } B_{V_1}(x) \times B_{V_2}(y) \subset A\} \cup \{\emptyset\} \\ &= \{A \subset X \times X : \text{para cada } (x, y) \in A \text{ existe } V \in \mathcal{W} \text{ tal que} \\ &\quad B_V(x) \times B_V(y) \subset A\} \cup \{\emptyset\} \end{aligned}$$

Definición 2.12. Sea (X, σ) un espacio topológico. Se define la topología producto sobre $X \times X$ la cual sera denotada por $\mathcal{T}_{\sigma, X \times X}$ como aquella que tiene como base $\sigma\sigma = \{U \times V : U \in \sigma, V \in \sigma\}$. Es decir,

$$\mathcal{T}_{\sigma, X \times X} := \{W \in X \times X : \text{para cada } (x, y) \in W \text{ existen } U \in \sigma, V \in \sigma \text{ tales que } U \times V \subset W\}$$

Proposición 2.9. Sea (X, σ) un espacio topologico y \mathcal{W} un subconjunto de \mathfrak{B}_X .

Si \mathcal{W} es una uniformidad sobre X tal que $\mathcal{T}_{\mathcal{W}, X} = \sigma$, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X}, X \times X} = \mathcal{T}_{\sigma, X \times X}$

Demostración. Afirmación: $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X}, X \times X} \subset \mathcal{T}_{\sigma, X \times X}$.

Sea $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X}, X \times X}$. Entonces, $A \subset X \times X$ tal que para cada punto $(x, y) \in A$ con $x, y \in X$ existe $V_{x,y} \in \mathcal{U}$ satisfaziendo: $B_{V_{x,y}}(x) \times B_{V_{x,y}}(y) \subset A$. Como

$$\begin{aligned} \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}, X}}(B_{V_{x,y}}(x)) &= \text{int}_{\sigma}(B_{V_{x,y}}(x)) \text{ y} \\ \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}, X}}(B_{V_{x,y}}(y)) &= \text{int}_{\sigma}(B_{V_{x,y}}(y)). \end{aligned}$$

Luego, $\text{int}_{\sigma}(B_{V_{x,y}}(x)) \times \text{int}_{\sigma}(B_{V_{x,y}}(y)) \subset B_{V_{x,y}}(x) \times B_{V_{x,y}}(y)$ y en consecuencia

$$\text{int}_{\sigma}(B_{V_{x,y}}(x)) \times \text{int}_{\sigma}(B_{V_{x,y}}(y)) \subset A$$

con $x \in \text{int}_{\sigma}(B_{V_{x,y}}(x)) \in \sigma$, $y \in \text{int}_{\sigma}(B_{V_{x,y}}(y)) \in \sigma$. Esto muestra que $A \in \mathcal{T}_{\sigma, X \times X}$.

Afirmación: $\mathcal{T}_{\sigma, X \times X} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}$.

Sea $B \in \mathcal{T}_{\sigma, X \times X}$. Entonces, para cada punto $(m, n) \in B$ existen $U_m, U_n \in \sigma$ tales que $(m, n) \in U_m \times U_n \subset B$. Como $\mathcal{T}_{\mathcal{W}, X} = \sigma$, se tiene que $U_m, U_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{W}, X}$. Ahora por definición de $\mathcal{T}_{\mathcal{W}, X}$, existen $V_m, V_n \in \mathcal{U}$ tales que:

$$B_{V_m}(m) \subset U_m \text{ y } B_{V_n}(n) \subset U_n$$

Luego, $B_{V_m}(m) \times B_{V_n}(n) \subset U_m \times U_n$ y así $B_{V_m}(m) \times B_{V_n}(n) \subset B$. Esto muestra que $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}$. \square

Proposición 2.10. *Sea (X, \mathcal{U}_X) espacio uniforme y $(x, y) \in X \times X$. Entonces,*

$$\{B_{V_1 V_2}(x, y) : V_1, V_2 \in \mathcal{U}_X, (x, y) \in X \times X\} \subset \mathcal{V}_{(x, y)}$$

donde $\mathcal{V}_{(x, y)} = \{V \subset X \times X : V \text{ es una vecindad de } (x, y)\}$

Definición 2.13. *Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A, V \subset X$. V es una vecindad de A si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que*

$$A \subset U \subset V.$$

La colección de todas las vecindades de A será denotada por \mathcal{V}_A , es decir:

$$\mathcal{V}_A = \{V \subset X : V \text{ es una vecindad de } A\}.$$

Proposición 2.11. *Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A, V \subset X$.*

$V \in \mathcal{V}_A$ si y solo si $A \subset \text{int}_{\mathcal{T}}(V)$.

Demostración. Suponga $V \in \mathcal{V}_A$. Luego, existe $U_V \in \mathcal{T}$ tal que $A \subset U_V \subset V$. Como $U \subset \text{int}_{\mathcal{T}}(V)$ (Item 3 de la Proposición 2.3) entonces $A \subset \text{int}_X(V)$.

Ahora, suponga que $A \subset \text{int}_{\mathcal{T}}(V)$. Como $\text{int}_{\mathcal{T}}(V) \in \mathcal{T}$ (Item 1 de la Proposición 2.3) y $\text{int}_{\mathcal{T}}(V) \subset V$ (Item 2 de la Proposición 2.3) entonces V es una vecindad de A , es decir, $V \in \mathcal{V}_A$. \square

Corolario 2.4. *Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A \subset X$ y $\{V_j\}_{j \in J}$ una familia de subconjuntos de X . Si para cada $a \in A$ existe $j_a \in J$ tal que $a \in V_{j_a}$ y $V_{j_a} \in \mathcal{V}_a$, entonces $\bigcup_{j \in J} V_j \in \mathcal{V}_A$*

Demostración. Sea $a \in A$. Por hipótesis, existe $j_a \in J$ tal que $a \in V_{j_a}$ y $V_{j_a} \in \mathcal{V}_a$. Luego, $a \in$

$int_{\mathcal{T}}(V_{j_a})$ (Item 2 del Lema 2.1). De esto último, se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{a \in A} \{a\} \\ &\subset \bigcup_{a \in A} int_X(V_{j_a}) \\ &\subset int_{\mathcal{T}}\left(\bigcup_{a \in A} V_{j_a}\right), \text{ Item 3 de la Proposición 2,3} \end{aligned}$$

Luego, por la Proposición 2.11 se obtiene que $\bigcup_{a \in A} V_{j_a} \in \mathcal{V}_A$. □

Definición 2.14. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto.

A es un subconjunto cerrado en (X, \mathcal{T}) si $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

La adherencia o también llamada la clausura de A en X denotada por $cl_{\mathcal{T}}(A)$ se define como:

$$cl_{\mathcal{T}}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado en } X \\ F \supseteq A}} F.$$

Proposición 2.12. [4] Sea (X, \mathcal{W}) un espacio uniforme, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}$ la topología uniforme producto y $M \subset X \times X$ un subconjunto.

1. Si $W \in \mathfrak{B}_X$, entonces $M \subset W + M + W$.
2. Si $W \in \mathfrak{B}_X$, entonces $W + M + W = \bigcup_{(m,n) \in M} B_W(m) \times B_W(n)$.
3. Si $W \in \mathfrak{B}_X$, entonces el conjunto $W + M + W$ es una vecindad de M . Es decir, $W + M + W \in \mathcal{V}_M$.
4. $cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(M) = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V + M + V$

Demostración. 1. Suponga que $W \in \mathfrak{B}_X$. Sea $(m, n) \in M$, se tiene que $(m, m) \in W$, $(n, n) \in W$ (ya que $W \in \mathfrak{B}_X$). En consecuencia, $(m, n) \in W + M + W$. Siendo $(m, n) \in M$ arbitrario, se concluye que $M \subset W + M + W$.

2. *Afirmación:* $W + M + W \subset \bigcup_{(m,n) \in M} B_W(m) \times B_W(n)$.

Sea $(x, y) \in W + M + W$. Entonces, existen $m_x, n_x \in X$ tales que

$$(x, m_x) \in W, (m_x, n_x) \in M, (n_x, y) \in W$$

Luego, $d(x, m_x) < W, d(n_x, y) < W$. Como $W \in \mathfrak{B}_X$, entonces $d(y, n_x) < W$ y en consecuencia $x \in B_W(m_x), y \in B_W(n_x)$. De esto ultimo, se tiene que:

$$(x, y) \in B_W(m_x) \times B_W(n_x) \subset \bigcup_{(m,n) \in M} B_W(m) \times B_W(n)$$

En consecuencia, $W + M + W \subset \bigcup_{(m,n) \in M} B_W(m) \times B_W(n)$.

Afirmación: $\bigcup_{(m,n) \in M} B_W(m) \times B_W(n) \subset W + M + W$.

Sea $(p, q) \in \bigcup_{(m,n) \in M} B_W(m) \times B_W(n)$. Entonces, existe $(a, b) \in M$ tal que

$$(p, q) \in B_W(a) \times B_W(b).$$

Luego,

$$\begin{aligned} p \in B_W(a), q \in B_W(b) &\longrightarrow d(p, a) < W, d(q, b) < W \\ &\longrightarrow (p, a) \in W, (q, b) \in W \\ &\longrightarrow (p, a) \in W, (b, q) \in W \text{ con } (a, b) \in M \\ &\longrightarrow (p, q) \in W + M + W \end{aligned}$$

Consecuentemente, se tiene que:

$$W + M + W = \bigcup_{(m,n) \in M} B_W(m) \times B_W(n)$$

3. Por el Item 2, se tiene que:

$$\begin{aligned} W + M + W &= \bigcup_{(m,n) \in M} B_W(m) \times B_W(n), \text{ por el Item 2} \\ &= \bigcup_{(m,n) \in M} B_{WW}(m, n), \text{ por la Proposición 2,8 Item 2} \\ &\supset M \end{aligned}$$

Dado que hipótesis $W \in \mathcal{W}$, entonces $WW \in \mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X}$ y como $B_{WW}(m, n) \in \mathcal{V}_{(m,n)}$, para todo $(m, n) \in M$ (Proposición 2.10). Esto último, implica que $\bigcup_{(m,n) \in M} B_{WW}(m, n) \in \mathcal{V}_M$ (Corolario 2.4). Por lo tanto, $W + M + W \in \mathcal{V}_M$.

4. *Afirmación:* $\bigcap_{V \in \mathcal{W}} V + M + V \subset cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(M)$

Sea $(c, d) \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V + M + V$. Sea $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}$ tal que $(c, d) \in A$. Por la definición de $\mathcal{T}_{\mathcal{U}\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}$ existe $R \in \mathcal{W}$ tal que $B_R(c) \times B_R(d) \subset A$. Como $\bigcap_{V \in \mathcal{W}} V + M + V \subset R + M + R$, entonces $(c, d) \in R + M + R$. Luego, existe $(m_c, n_d) \in M$ tal que $(c, d) \in B_R(m_c) \times B_R(n_d)$ (ya que por el Item 2 de la Proposición 2.12 se tiene que $R + M + R = \bigcup_{(m,n) \in M} B_R(m) \times B_R(n)$). En consecuencia, $(m_c, n_d) \in B_R(c) \times B_R(d)$ y así $(m_c, n_d) \in A$. Esto último, implica que $A \cap M \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(c, d) \in cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(M)$.

Afirmación: $cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(M) \subset \bigcap_{V \in \mathcal{W}} V + M + V$.

Sea $(x, y) \in cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(M)$. Sea $V \in \mathcal{U}$. Luego, $B_V(x, y)$ es una vecindad de (x, y) (Proposición 2.10) esto a su vez, implica que $B_V(x, y) \cap M \neq \emptyset$. Entonces, existe $(p, q) \in M$ tal que $(p, q) \in B_V(x, y)$. Luego, $(x, y) \in B_V(p, q)$. Por el Item 2 de la Proposición 2.12 se tiene que

$$V + M + V = \bigcup_{(m,n) \in M} B_V(m) \times B_V(n)$$

y dado que $(p, q) \in M$ se obtiene que $B_V(p, q) = B_V(p) \times B_V(q) \subset V + M + V$. Por esto último, se tiene que $(x, y) \in V + M + M$. Siendo V arbitrario, se concluye que $(x, y) \in \bigcap_{V \in \mathcal{W}} V + M + V$. Se muestra como se quería. □

Capítulo 3:

Existencia y Unicidad de uniformidad en espacios topológicos Hausdorff's compactos

Se mostrará bases una uniformidad apartir de la topología producto la cual a sido generada por la uniformidad producto y tambien se obtendra uniformidad en un conjunto apartir de familias de pseudométricas definias en el conjunto dado. Luego, se mostrará la uniformidad generada por la familia de pseudométricas generada por un espacio topologico dado y finamente se procedera a demostrar el Teorema principal de este trabajo de Tesis.

3.1 Pseudométricas

Se estudiará la topologia generada por la uniformidad producto en el producto cartesiano de un espacio uniforme. Se mostrará y estudiará la uniformidad generada por familia de pseudométricas asi como la topologia generada por dicha uniformidad.

Proposición 3.1. *Sea (X, \mathcal{W}) un espacio uniforme. Si $A \in \mathcal{W}$, entonces $int_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A) \in \mathcal{W}$*

Demostración. Por hipotesis $A \in \mathcal{W}$, entonces existe $V \in \mathcal{W}$ tal que $3V \subset A$.

Afirmación: $int_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A)$ es una banda en X , es decir, $int_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A) \in \mathfrak{B}_X$.

Sea $x \in X$. Como $A \in \mathcal{W}$, en particular A es una banda en X . Entonces, $(x, x) \in A$. Además, por el Item 2 de la proposición 2.8 se tiene que

$$B_{VV}(x, x) = B_V(x) \times B_V(x).$$

Así, para cada $(m, n) \in B_{VV}(x, x)$ se tiene que $d(m, x) < V$, $d(n, x) < V$. Luego, $(m, x), (n, x) \in V$ de esto último a su vez, se tiene que $(x, n) \in V$ (ya que en particular V es una banda en X debido a que $V \in \mathcal{W}$). De esta manera, se obtiene que:

$$(m, x) \in V, (x, x) \in V, (n, x) \in V.$$

Lo cual implica que, $(m, n) \in 3V$ y así $(m, n) \in A$ (ya que $3V \subset A$). Siendo (m, n) arbitrario se obtiene que $B_{VV}(x, x) \subset A$. Por lo tanto, $(x, x) \in \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A)$, para todo $x \in X$.

Ahora, sea $(x, y) \in \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A)$. Luego, existe $R \in \mathcal{W}$ tal que $B_{RR}(x, y) \subset W$.

Sea $(a, b) \in B_{RR}(y, x)$. Dado que, $B_{RR}(y, x) = B_R(y) \times B_R(x)$ (Item 2 de la proposición 2.8) se tiene que $(a, b) \in B_R(y) \times B_R(x)$ esto a su vez implica que $(b, a) \in B_R(x) \times B_R(y)$ y en consecuencia $(b, a) \in B_{RR}(x, y)$ (por el Item 2 de la proposición 2.8 se tiene que $B_R(x) \times B_R(y) = B_{RR}(x, y)$). Por consiguiente $(b, a) \in A$ (ya que $B_{RR}(x, y) \subset A$). Como en particular A es una banda en X (ya que $A \in \mathcal{W}$) entonces $(a, b) \in A$. Esto muestra que, $B_{RR}(y, x) \subset A$ con $R \in \mathcal{W}$ y por lo tanto $(y, x) \in \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A)$.

Ahora, por el Item 3 de la Proposición 2.12 $V + V + V = 3V$ es una vecindad de V , es decir, $3V \in \mathcal{V}_V$. Luego, por la Proposición 2.11 $V \subset \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{M}\mathcal{N}, X \times X, X \times X}}(3V)$. Como $3V \subset A$, entonces por el Item 5 de la Proposición 2.3 se tiene que $\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(3V) \subset \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A)$. De esto último, se tiene que $V \subset \text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A)$. Como, $\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A) \in \mathfrak{B}_X$ y $V \in \mathcal{U}$, entonces $\text{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A) \in \mathcal{W}$ (por la definición de \mathcal{W}) mostrándose como se quería. \square

Proposición 3.2. Sea (X, \mathcal{W}) un espacio uniforme. Si $A \in \mathcal{W}$, entonces $\text{cl}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A) \in \mathcal{W}$.

Demostración. Por la Proposición 2.12 se tiene que

$$\text{cl}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A) = \bigcap_{V \in \mathcal{W}} V + A + V.$$

Afirmación: $\text{cl}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A)$ es una banda en X , es decir, $\text{cl}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A) \in \mathfrak{B}_X$.

Sea $x \in X$. Entonces $(x, x) \in A$ (ya que $A \in \mathcal{W}$ y en particular $A \in \mathfrak{B}_X$) y como $A \subset \text{cl}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A)$ entonces $(x, x) \in \text{cl}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(A)$.

Ahora, sea $(x, y) \in cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(A)$. Sea $V_0 \in \mathcal{W}$. Entonces, $(x, y) \in V_0 + W + V_0$. Esto a su vez, implica que existe $(a, b) \in A$ tal que

$$(x, a) \in V_0 \text{ y } (b, y) \in V_0.$$

Así, $(y, b) \in V_0$ y $(a, x) \in V_0$ (ya que $V_0 \in \mathcal{U}$ y en particular $V_0 \in \mathfrak{B}_X$). Además, $(b, a) \in A$ (ya que $A \in \mathcal{W}$ y en particular $A \in \mathfrak{B}_X$). De esta manera, se tiene que $(y, x) \in V_0 + W + V_0$ y siendo V_0 arbitrario se tiene que $(y, x) \in cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(A)$. Mostrando, así que $cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(A) \in \mathfrak{B}_X$. Ahora, sea $(b, a) \in cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(W)$ por lo anterior se tiene que $(a, b) \in cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(W)$. Por último, como $A \in \mathcal{W}$ y $cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(W) \in \mathfrak{B}_X$ con $W \subset cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(W)$ se tiene que $cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(W) \in \mathcal{W}$ (definición de \mathcal{W}) \square

Teorema 3.1. *Sea (X, \mathcal{W}) un espacio uniforme y $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}$ la topología uniforme producto. Entonces:*

1. $\mathcal{B}_{i,X}^{\mathcal{W}} := \{int_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(V) : V \in \mathcal{W}\}$ es base de \mathcal{W} .
2. $\mathcal{B}_{cl,X}^{\mathcal{W}} = \{cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}(V) : V \in \mathcal{W}\}$ es base de \mathcal{W} .
3. $\mathcal{B}_{a,X}^{\mathcal{W}} = \{V \in \mathcal{W} : V \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}\}$ es base de \mathcal{W} .
4. $\mathcal{B}_{c,X}^{\mathcal{W}} = \{V \in \mathcal{W} : V \text{ es un subconjunto cerrado en } (X \times X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}})\}$ es base de \mathcal{W} .

Demostración. 1. Sea $V_0 \in \mathcal{W}$. Por la Proposición 3.1 se tiene que $int_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(V_0) \in \mathcal{W}$ y siendo arbitrario V_0 se obtiene que $\mathcal{B}_{i,X}^{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W}$.

Además, por el Item 2 de la Proposición 2.3 se tiene que

$$int_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(V_0) \subset V_0 \text{ con } int_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{U}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(V_0) \in \mathcal{B}_{i,X}^{\mathcal{W}}. \text{ Se muestra como se queria.}$$

2. Sea $V_0 \in \mathcal{W}$. Por la Proposición 3.2 se tiene que $cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(V_0) \in \mathcal{W}$ y siendo arbitrario V_0 se obtiene que $\mathcal{B}_{cl,X}^{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W}$.

Además, existe $W_0 \in \mathcal{W}$ tal que $3W_0 \subset V_0$. por el Item 4 de la Proposición 2.12

$$cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(W_0) = \bigcap_{V \in \mathcal{W}} V + W_0 + V.$$

Esto implica que $cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(W_0) \subset W_0 + W_0 + W_0 = 3W_0$ y por lo tanto

$$cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(W_0) \subset V_0, \text{ con } cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X}}}(W_0) \in \mathcal{B}_{cl,X}^{\mathcal{W}}. \text{ Se muestra como se queria.}$$

3. Sea $V_0 \in \mathcal{B}_{a,X}^{\mathcal{W}}$. Entonces, $V_0 \in \mathcal{W}$ y $V_0 \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}}$. Entonces, $\mathcal{B}_{a,X}^{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W}$. Además, dado $W \in \mathcal{W}$. Por la Proposición 3.1 $int_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}}}(W) \in \mathcal{W}$. Así mismo, se tiene que $int_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}}}(W) \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}}$ (Item 1 de la Proposición 2.3). Luego:

$int_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}}}(W) \in \mathcal{B}_{a,X}^{\mathcal{W}}$ con $int_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}}}(W) \subset W$ (Item 2 de la Proposición 2.3).

4. Sea $V_0 \in \mathcal{B}_{c,X}^{\mathcal{W}}$. Entonces, $V_0 \in \mathcal{W}$ y es un subconjunto cerrado en $(X \times X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}})$. Luego, $\mathcal{B}_{c,X}^{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W}$. Además, dado $W \in \mathcal{W}$ por el Item 2 existe $V \in \mathcal{W}$ tal que

$cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}}}(V) \subset W$. Así mismo, $cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}}}(W) \in \mathcal{W}$ (por la Proposición 3.2) y $cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}}}(W)$ es un subconjunto cerrado en $(X \times X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}})$. Es decir, $cl_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W},X \times X, X \times X}}}(W) \in \mathcal{B}_{c,X}^{\mathcal{W}}$.

□

Definición 3.1. Sea $(X, \mathcal{U}), (X, \mathcal{W})$ espacios uniformes y $f : X \rightarrow Y$ una función. f es uniformemente continua si para todo $V \in \mathcal{W}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que para cada $x, y \in X$ con $d(x, y) \in U$ se tiene que $d(f(x), f(y)) \in V$.

Proposición 3.3. Sea $(X, \mathcal{U}), (Y, \mathcal{W})$ espacios uniformes y $f : X \rightarrow Y$ una función.

f es uniformemente continua si y solo si para todo $V \in \mathcal{W}$ se tiene que $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$.

Demostración. En primer lugar, tener presente que $f \times f : X \times X \rightarrow Y \times Y$ es definida como $f \times f(a, b) = (f(a), f(b))$, para todo $(a, b) \in X \times X$.

Suponga que f es uniformemente continua.

Sea $V_0 \in \mathcal{W}$. Entonces, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que:

$$\text{para cada } x, y \in X \text{ con } d(x, y) \in U_0 \text{ se tiene que } d(f(x), f(y)) \in V_0. \quad (3.1)$$

Afirmación: $U_0 \subset (f \times f)^{-1}(V_0)$.

Sea $(m, n) \in U_0 \subset X \times X$. Luego, $d(a, b) \in U_0$. Esto a su vez, implica que

$$d(f(a), f(b)) \in V_0 \quad (3.1)$$

$$(f(a), f(b)) \in V_0 \quad (\text{definición de } d)$$

$$f \times f(a, b) \in V_0 \quad (\text{definición de } f \times f)$$

$$(a, b) \in (f \times f)^{-1}(V_0) \quad (\text{definición de } (f \times f)^{-1})$$

Afirmación: $(f \times f)^{-1}(V_0) \in \mathfrak{B}_X$.

Para cada $(r, r) \in X \times X$ se tiene que $(r, r) \in U_0$ (ya que $U_0 \in \mathcal{U}$, entonces $U_0 \in \mathfrak{B}_X$). Lo cual, implica que $(r, r) \in (f \times f)^{-1}(V_0)$ (por la afirmación anterior $U_0 \subset (f \times f)^{-1}(V_0)$).

Ahora, sea $(s, t) \in (f \times f)^{-1}(V_0)$. Luego, $f \times f(s, t) \in V_0$. Entonces:

$$(f(s), f(t)) \in V_0 \text{ (definición de } f \times f)$$

$$(f(t), f(s)) \in V_0 \text{ (ya que } V_0 \in \mathcal{W} \subset \mathfrak{B}_Y)$$

$$f \times f(t, s) \in V_0 \text{ (definición de } f \times f)$$

$$(t, s) \in (f \times f)^{-1}(V_0)$$

Luego, por las dos afirmaciones anteriores y definición de \mathcal{U} se tiene que $(f \times f)^{-1}(V_0) \in \mathcal{U}$.

Ahora, suponga que $(f \times f)^{-1}(W) \in \mathcal{U}$, para todo $W \in \mathcal{W}$.

Sea $V \in \mathcal{W}$. Por hipótesis $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. Tome $U = (f \times f)^{-1}(V)$. Luego, se tiene que $U \in \mathcal{U}$.

Además, para cada $x, y \in X$ con $d(x, y) < U$ se cumple que:

$$(x, y) \in U$$

$$(x, y) \in (f \times f)^{-1}(V) \text{ definición de } U$$

$$f \times f(x, y) \in V, \text{ definición de } (f \times f)^{-1}$$

$$(f(x), f(y)) \in V, \text{ definición de } f \times f$$

$$d(f(x), f(y)) < V, \text{ definición de } ded.$$

Siendo V arbitrario, se obtiene que f es uniformemente continua. □

Definición 3.2. Sea X un conjunto.

1. Se define una pseudométrica en X como una función $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cumple lo siguiente:

- a) $\rho(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in X$.
- b) $\rho(x, x) = 0$, para todo $x \in X$.
- c) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, para todo $x, y \in X$.
- d) $\rho(x, y) \leq \rho(y, x)$, para todo $x, y, z \in X$.

2. Se define el conjunto de las pseudométricas en X el cual se denotará por $\mathcal{P}(X)$ como:

$$\mathcal{P}(X) = \{\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R} : \rho \text{ es una pseudométrica en } X\}.$$

3. Sean \mathcal{W} una uniformidad sobre X , $\mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X}$ la uniformidad producto sobre $X \times X$ y $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}$ la uniformidad euclidiana sobre \mathbb{R} . Se define una pseudométrica uniforme sobre X como una pseudométrica $\rho: (X \times X, \mathcal{U}_{\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X}, X \times X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{\mathbb{R}})$ tal que sea uniformemente continua.

Definición 3.3. Sean X un conjunto, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$, $F \subset \mathcal{P}$ finito y $\epsilon > 0$.

1. Se define el $F - \epsilon$ conjunto denotado por $V(F, \epsilon)$ como:

$$V(F, \epsilon) = \{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) < \epsilon, \text{ para todo } \rho \in F\}$$

2. Se define la colección $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ como:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}} = \{V(F, \epsilon) : F \subset \mathcal{P} \text{ finito y } \epsilon > 0\}$$

Teorema 3.2. Sea X un conjunto y $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces, la colección $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ satisface lo siguiente:

1. $\mathcal{V}_{\mathcal{P}} \subset \mathfrak{B}_X$.
2. $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ es base para una uniformidad en X . En este caso, dicha uniformidad es dada por

$$\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X} = \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{existen } F \subset \mathcal{P} \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que } V(F, \epsilon) \subset U\}.$$

3. La uniformidad producto sobre $X \times X$ es dada por:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X} \mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X}, X \times X} = \{U \in \mathfrak{B}_{X \times X} : \text{existen } F \subset \mathcal{P} \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que } V(F, \epsilon)V(F, \epsilon) \subset U\}.$$

4. ρ es una pseudométrica uniforme, para toda $\rho \in \mathcal{P}$.

Demostración. 1. Sea $\epsilon_0 > 0$ y $F_0 \subset \mathcal{P}$ finito. Sea $\rho \in F_0$. Entonces, $\rho \in \mathcal{P}(X)$ (ya que $F_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$). Esto último, implica que:

$$\rho(x, x) = 0 < \epsilon_0, \text{ para todo } x \in X.$$

En consecuencia, $(x, x) \in V(F_0, \epsilon_0)$, para $x \in X$.

Además, si $(x, y) \in V(F_0, \epsilon_0)$, entonces:

$$\rho(x, y) < \epsilon_0, \text{ para todo } \rho \in F_0$$

$$\rho(y, x) < \epsilon_0 \text{ (ya que } \rho \in \mathcal{P}(X) \text{ y así } \rho(y, x) = \rho(x, y)), \text{ para todo } \rho \in F_0$$

Por consiguiente, $(y, x) \in V(F_0, \epsilon_0)$. De esta manera, se muestra las dos condiciones para que $V(F, \epsilon)$ sea un banda en X .

2. Sean $F_1, F_2 \subset \mathcal{P}$ finitos y $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$.

Luego, sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $\rho_1, \dots, \rho_n, \rho'_1, \dots, \rho'_m \in \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ tales que

$$F_1 = \{\rho_1, \dots, \rho_n\} \text{ y } F_2 = \{\rho'_1, \dots, \rho'_m\}.$$

Por la afirmación, anterior se tiene que $V(F_1 \cup F_2, \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\})$ es una banda en X , donde $F_1 \cup F_2 = \{\rho_1, \dots, \rho_n, \rho'_1, \dots, \rho'_m\}$.

Afirmación: $V(F_1 \cup F_2, \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}) \subset V(F_1, \epsilon_1) \cap V(F_2, \epsilon_2)$.

Sea $(x, y) \in V(F_1 \cup F_2, \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\})$.

Entonces:

$$\rho_i(x, y) < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

$$\rho'_i(x, y) < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}, \text{ para todo } i = 1, \dots, m.$$

Como $\min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \leq \epsilon_1$ y $\min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \leq \epsilon_2$ entonces:

$$\rho_i(x, y) < \epsilon_1, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

$$\rho'_i(x, y) < \epsilon_2, \text{ para todo } i = 1, \dots, m.$$

Luego,

$$(x, y) \in V(F_1, \epsilon_1) \text{ y } (x, y) \in V(F_2, \epsilon_2)$$

En consecuencia, $(x, y) \in V(F_1, \epsilon_1) \cap V(F_2, \epsilon_2)$.

Ahora, sea $F \in \mathcal{P}$ y $\delta > 0$.

Tome: $\delta_0 = \frac{\delta}{2} > 0$. Luego, $V(F, \delta_0) \in \mathcal{V}_{\mathcal{P}}$.

Sea $k_0 \in \mathcal{N}$ y $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$.

Afirmación: $2V(F, \delta_0) \subset V(F, \delta_0)$.

Sea $(x, y) \in 2V(F, \delta_0) = V(F, \delta_0) + V(F, \delta_0)$. Entonces, existe $a \in X$ tal que:

$$(x, a) \in V(F, \delta_0), (a, y) \in V(F, \delta_0).$$

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, y) &\leq \varphi_i(x, a) + \varphi_i(a, y), \text{ ya que } \varphi_i \text{ es una pseudométrica en } X \\ &< \delta_0 + \delta_0 \\ &= \delta \end{aligned}$$

Siendo, $i \in \{1, \dots, n\}$ arbitrario se obtiene que $(x, y) \in V(F, \delta_0)$.

Luego, por el Teorema 2.4 $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ es base para una uniformidad en X . Además, la uniformidad es dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X} &= \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{existe } V \in \mathcal{V}_{\mathcal{P}} \text{ tal que } U \subset V\} \\ &= \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{existen } F \subset \mathcal{P} \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que } V(F, \epsilon) \subset U\}, \text{ definición de } \mathcal{V}_{\mathcal{P}}.\end{aligned}$$

3. Sea la uniformidad uniforme producto sobre $X \times X$ es dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X} \mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X}, X \times X} &= \{U \in \mathfrak{B}_{X \times X} : \text{existe } V \in \mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X} \text{ tal que } VV \subset U\} \\ &= \{U \in \mathfrak{B}_{X \times X} : \text{existen } F \subset \mathcal{P} \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que } V(F, \epsilon)V(F, \epsilon) \subset U\} \text{ Item 2.}\end{aligned}$$

4. Sea $\rho \in \mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$, donde $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$.

Afirmación: ρ es una pseudométrica uniforme.

Sea $r \in \mathbb{R}$, se obtiene $U_r = \{(x, y) \in X \times X : |x - y| < r\}$.

□

Corolario 3.1. Sean X un conjunto, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X}$ la uniformidad sobre X que tiene como base $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ y $\mathcal{U}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X} \mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X}, X \times X}$ la uniformidad producto. Entonces:

1. La topología sobre X inducida por $\mathcal{U}_{\mathcal{P}, X}$ (topología uniforme) es dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X}, X} &= \{U \subset X : \text{para cada } x \in U \text{ existen } F \subset \mathcal{P} \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que} \\ &\quad B_{V(F, \epsilon)}(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\}.\end{aligned}$$

2. Sean $x \in X$, $F \subset \mathcal{P}$ y $\epsilon > 0$. Entonces:

$$B_{V(F, \epsilon)}(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \epsilon, \rho \in F\}$$

3. La topología uniforme producto sobre $X \times X$, es dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X} \mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, X}, X \times X}, X \times X} &= \{A \subset X \times X : \text{para cada } (x, y) \in A \text{ existen } F \subset \mathcal{P} \text{ finito y } \epsilon > 0 \\ &\quad \text{tal que } B_{V(F, \epsilon)}(x) \times B_{V(F, \epsilon)}(y) \subset A\}\end{aligned}$$

Demostración. 1. Por hipótesis se tiene el espacio uniforme $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{V}_P, X})$. Por el Teorema 2.1 se obtiene la topología uniforme sobre X , la cual es dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_P, X}, X} &= \{U \subset X : \text{para cada } x \in U \text{ existe } V \in \mathcal{W}_{\mathcal{V}_P, X} \text{ para el cual } B_V(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\} \\ &= \{U \subset X : \text{para cada } x \in U \text{ existen } F \subset \mathcal{P} \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que} \\ &\quad B_{V(F, \epsilon)}(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\} \end{aligned}$$

Esta última igualdad, por el Item 2 del Teorema 3.2

2. Se tiene que:

$$\begin{aligned} B_{V(F, \epsilon)}(x) &= \{y \in X : (x, y) \in V(F, \epsilon)\} \\ &= \{y \in X : \rho(x, y) < \epsilon, \rho \in F\} \end{aligned}$$

3. Por hipótesis se tiene el espacio uniforme $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{V}_P, X})$. Por el Item 4 de la Observación 2.3 se obtiene la topología uniforme producto sobre $X \times X$ la cual es dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_P, X}, \mathcal{W}_{\mathcal{V}_P, X}, X \times X, X \times X}} &= \{A \subset X \times X : \text{para cada } (x, y) \in A \text{ existe } V \in \mathcal{W}_{\mathcal{V}_P, X} \text{ tal que} \\ &\quad B_V(x) \times B_V(y) \subset A\} \cup \{\emptyset\} \\ &= \{A \subset X \times X : \text{para cada } (x, y) \in A \text{ existen } F \subset \mathcal{P} \text{ finito y} \\ &\quad \epsilon > 0 \text{ tal que } B_{V(F, \epsilon)}(x) \times B_{V(F, \epsilon)}(y) \subset A\} \end{aligned}$$

Esta última igualdad por el Item 3 del Teorema 3.2

□

3.2 Existencia y unicidad de uniformidad en espacios topológicos Hausdorff's Compactos

En esta sección se demostrará el objetivo principal de nuestro trabajo de Tesis. La existencia y unicidad de uniformidad en espacios topológicos Hausdorff's Compactos compatible con la topología del espacio.

Definición 3.4. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico.

1. Se define el conjunto de funciones continuas en (X, \mathcal{T}) como:

$$C(X, \mathcal{T}) := \{f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es una función continua en } (X, \mathcal{T})\}.$$

2. Sea $f \in C(X, \mathcal{T})$ se define la f -pseudométrica o pseudométrica inducida por f sobre X como:

$$\begin{aligned} \rho_f : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)|, \text{ para todo } (x, y) \in X \times X. \end{aligned}$$

3. Se define el conjunto de pseudométricas inducidas por funciones continuas en (X, \mathcal{T}) como

$$\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})} := \{\rho_f : f \in C(X, \mathcal{T})\}.$$

Lema 3.1. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in C(X, \mathcal{T})$, entonces $\rho_f \in \mathcal{P}(X)$

Demostración. Sea $x \in X$. Se tiene que:

$$\rho_f(x, x) = |f(x) - f(x)| = |0| = 0.$$

Sea $(x, y) \in X \times X$. Luego,

$$\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = \rho_f(y, x).$$

Sea $x, y, z \in X$. se tiene que:

$$\begin{aligned}\rho_f(x, y) &= |f(x) - f(y)| \\ &= |(f(x) - f(z)) - (f(z) - f(y))| \\ &\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \\ &= \rho_f(x, z) + \rho_f(z, y)\end{aligned}$$

Como se queria demostrar. □

El lema anterior muestra que:

$$\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})} \subset \mathcal{P}(X).$$

Definición 3.5. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $C(X, \mathcal{T})$ el espacio de funciones continua en (X, \mathcal{T}) , $G \subset C(X, \mathcal{T})$ finito y $\epsilon > 0$. Se define el $G - \epsilon$ conjunto:

$$V_{G, \epsilon} := \{(x, y) \in X \times X : |f(x) - f(y)| < \epsilon, \text{ para todo } f \in G\}.$$

Proposición 3.4. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $C(X, \mathcal{T})$ el conjunto de funciones continuas en (X, \mathcal{T}) , $\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}$ el conjunto de pseudométricas induzidas por funciones continuas en (X, \mathcal{T}) y $\epsilon > 0$.

1. Si $F \subset \mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}$ finito, entonces existe $G_F \subset C(X, \mathcal{T})$ finito tal que $V(F, \epsilon) = V_{G_F, \epsilon}$.
2. Si $G \subset C(X, \mathcal{T})$ finito, entonces existe $F_G \subset \mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}$ finito tal que $V_{G, \epsilon} = V(F_G, \epsilon)$.

Demostración. 1. Por hipotesis $F \subset \mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}$ es finito. Entonces, existen $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \in \mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}$, donde $n = \text{card}(F)$ tales que

$$F = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$$

Por la definición de $\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}$ se tiene que para cada $l \in \{1; 2; \dots; n\}$ existe $f_{l, F} \in C(X, \mathcal{T})$ tal que: $\rho_l = \rho_{f_{l, F}}$. Luego, se tiene que:

$$F = \{\rho_{f_{1, F}}; \rho_{f_{2, F}}; \dots; \rho_{f_{n, F}}\}.$$

Ahora, tome $G_F = \{f_{1, F}, f_{2, F}, \dots, f_{n, F}\}$. Así, $G_F \subset C(X, \mathcal{T})$.

Afirmación: $V(F, \epsilon) \subset V_{G_F, \epsilon}$.

Sea $(x, y) \in V(F, \epsilon)$.

Sea $g \in G_F$. Entonces, existe $i_g \in \{1; 2; \dots; n\}$ tal que $g = f_{i_g, F}$.

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |f_{i_g, F}(x) - f_{i_g, F}(y)|, \text{ ya que } g = f_{i_g, F} \\ &= \rho_{f_{i_g, F}}(x, y), \text{ por definición de } \rho_{f_{i_g, F}} \\ &< \epsilon, \text{ ya que } (x, y) \in V(F, \epsilon). \end{aligned}$$

Siendo $g \in G_F$ arbitrario, se concluye que $(x, y) \in V_{G_F, \epsilon}$.

Afirmación: $V_{G_F, \epsilon} \subset V(F, \epsilon)$.

Sea $(x, y) \in V_{G_F, \epsilon}$

Sea $\rho \in F$. Luego, existe $i_\rho \in \{1; 2; \dots; n\}$ tal que $\rho = \rho_{f_{i_\rho}}$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho_{f_{i_\rho}}(x, y), \text{ ya que } \rho = \rho_{f_{i_\rho}} \\ &= |f_{i_\rho}(x) - f_{i_\rho}(y)|, \text{ por definición de } \rho_{f_{i_\rho}} \\ &< \epsilon, \text{ ya que } (x, y) \in V_{G_F, \epsilon}. \end{aligned}$$

2. Por hipótesis $G \subset C(X, \mathcal{T})$ es finito. Entonces, existen $f_{1,G}, f_{2,G}, \dots, f_{m,G} \in C(X, \mathcal{T})$, donde $m = \text{card}(G)$ tales que: $G = \{f_{1,G}, f_{2,G}, \dots, f_{m,G}\}$

Luego, tome

$$F_G = \{\rho_{f_{1,G}}; \rho_{f_{2,G}}; \dots; \rho_{f_{m,G}}\}.$$

Así, $F_G \subset \mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}$.

Afirmación: $V_{G, \epsilon} \subset V(F_G, \epsilon)$.

Sea $(x, y) \in V_{G, \epsilon}$

Sea $\rho \in F_G$. Luego, existe $i_\rho \in \{1; 2; \dots; m\}$ tal que $\rho = \rho_{f_{i_\rho, G}}$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho_{f_{i_\rho, G}}(x, y), \text{ ya que } \rho = \rho_{f_{i_\rho, G}} \\ &= |f_{i_\rho, G}(x) - f_{i_\rho, G}(y)|, \text{ por definición de } \rho_{f_{i_\rho, G}} \\ &< \epsilon, \text{ ya que } (x, y) \in V_{G, \epsilon}. \end{aligned}$$

Siendo $\rho \in F_G$ arbitrario, se concluye que $(x, y) \in V(F_G, \epsilon)$. *Afirmación:* $V(F_G, \epsilon) \subset V_{G, \epsilon}$.

Sea $(x, y) \in V(F_G, \epsilon)$.

Sea $h \in G$. Entonces, existe $j_h \in \{1; 2; \dots; m\}$ tal que $h = f_{j_h, G}$.

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f_{j_h, G}(x) - f_{j_h, G}(y)|, \text{ ya que } h = f_{j_h, G} \\ &= \rho_{f_{j_h, G}}(x, y), \text{ por definici3n de } \rho_{f_{j_h, G}} \\ &< \epsilon, \text{ ya que } (x, y) \in V(F_G, \epsilon). \end{aligned}$$

Siendo $h \in G$ arbitrario, se concluye que $(x, y) \in V_{G, \epsilon}$.

□

Corolario 3.2. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topol3gico y $\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})} \subset \mathcal{P}(X)$ el conjunto de pseudom3tricas induzidas por $C(X, \mathcal{T})$. Entonces:

1. $\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}} = \{V_{G, \epsilon} : G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0\}$.
2. $\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}}, X} = \{U \in \mathcal{B}_X : \text{ existen } G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que } V_{G, \epsilon} \subset U\}$.

Demostraci3n. 1. Por la definici3n de $\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}, X}$ se tiene que:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}} = \{V(F, \epsilon) : F \subset \mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})} \text{ finito y } \epsilon > 0\}.$$

Afirmaci3n: $\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}} \subset \{V_{G, \epsilon} : G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0\}$.

Sea $A \in \mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}}$. Entonces, existen $F_A \subset \mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}$ finito y $\epsilon > 0$ tal que $A = V(F_A, \epsilon)$. Por el Item 1 de la Proposici3n 3.4 existe $G_{F_A} \subset C(X, \mathcal{T})$ finito tal que $V(F_A, \epsilon) = V_{G_{F_A}, \epsilon}$. En consecuencia, $A = V_{G_{F_A}, \epsilon}$ y por lo tanto $A \in \{V_{G, \epsilon} : G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0\}$. Siendo $A \in \mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}}$ arbitrario, se obtiene lo que se queria.

Afirmaci3n: $\{V_{G, \epsilon} : G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0\} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}}$.

Sea $B \in \{V_{G, \epsilon} : G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0\}$. Entonces, existen $G_B \subset C(X, \mathcal{T})$ finito y un $\epsilon_B > 0$ tal que $B = V_{G_B, \epsilon_B}$. Por el Item 2 de la Proposici3n 3.4 existe $F_{G_B} \subset \mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}$ finito tal que $V_{G_B, \epsilon_B} = V(F_{G_B}, \epsilon_B)$. En consecuencia, $B = V(F_{G_B}, \epsilon_B)$ y por lo tanto $B \in \mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}}$. Siendo $B \in \{V_{G, \epsilon} : G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0\}$ arbitrario, se obtiene lo que se queria.

2. Dado que $\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})} \subset \mathcal{P}(X)$, por el Item 2 del Teorema 3.2 se tiene que $\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}}$ es base de la uniformidad $\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}}, X}$. Adem3s, $\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}} \subset \mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}}, X}$ (Item 3 del Teorema 3.2). Luego, por el Teorema 2.3 se tiene que:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}}, X} = \{U \in \mathcal{B}_X : \text{ existe } V \in \mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X, \mathcal{T})}, X} \text{ tal que } V \subset U\}.$$

Por el Item 1(Corolario 3.2) se tiene que:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}} = \{V_{G,\epsilon} : G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0\}.$$

Afirmación:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}}, X} \subset \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{ existen } G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que } V_{G,\epsilon} \subset U\}.$$

Sea $M \in \mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}}, X}$. Entonces, $M \in \mathfrak{B}_X$ y existe $V_M \in \mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}}$ tal que $V_M \subset M$. Luego, existe $G_{V_M} \subset C(X, \mathcal{T})$ finito y $\epsilon_{V_M} > 0$ tal que $V_M = V_{G_{V_M}, \epsilon_{V_M}}$. Luego, $V_{G_{V_M}, \epsilon_{V_M}} \subset M$.

Como se queria mostrar.

Afirmación:

$$\{U \in \mathfrak{B}_X : \text{ existen } G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que } V_{G,\epsilon} \subset U\} \subset \mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}}, X}.$$

Sea $N \in \{U \in \mathfrak{B}_X : \text{ existen } G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que } V_{G,\epsilon} \subset U\}$. Entonces, $N \in \mathfrak{B}_X$ y existen $G_N \subset C(X, \mathcal{T})$ finito y $\epsilon_N > 0$ tal que $V_{G_N, \epsilon_N} \subset N$, siendo $V_{G_N, \epsilon_N} \in \mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}}$.

Como se queria mostrar.

Por las dos afirmaciones anteriores, se obtiene lo que se se queria mostrar. □

Mostraremos, una consecuencia mas de la Porposición 3.4

Corolario 3.3. *Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $C(X, \mathcal{T})$ conjunto de funciones continuas en (X, \mathcal{T}) y $\mathcal{P}_{C(X,T)} \subset \mathcal{P}(X)$ el conjunto de pseudométricas induzidas por $C(X, \mathcal{T})$. Entonces:*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}}, X}, X} = \{U \subset X : \text{ para cada } x \in U \text{ existen } G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } r > 0 \text{ tal que} \\ B_{V_{G,r}}(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

Demostración. Como $\mathcal{P}_{C(X,T)} \subset \mathcal{P}(X)$, por el Item 1 del Corolario 3.1 se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}}, X}, X} = \{U \subset X : \text{ para cada } x \in U \text{ existen } F \subset \mathcal{P}_{C(X,T)} \subset \mathcal{P}(X) \text{ finito y } \epsilon > 0 \text{ tal que} \\ B_{V(F,\epsilon)}(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

Tome:

$$M = \{U \subset X : \text{ para cada } x \in U \text{ existen } G \subset C(X, \mathcal{T}) \text{ finito y } r > 0 \text{ tal que } B_{V_{G,r}}(x) \subset U\} \cup \{\emptyset\}$$

Afirmación: $\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}}, X}, X} \subset M$

Sea $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}, X, X}}$. Entonces, para cada $x \in V$ existen $F \subset \mathcal{P}_{C(X,T)}$ finito y $r > 0$ tal que $B_{V(F,r)}(x) \subset V$. Luego, por el Item 1 de la Proposición 3.4 existe $G_F \subset C(X, \mathcal{T})$ finito tal que $V(F, r) = V_{G_F, r}$. Luego, $B_{V_{G_F, r}} \subset V$ y por lo tanto, $V \in M$.

Afirmación: $M \subset \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}, X, X}}$.

Sea $W \in M$. Entonces, para cada $y \in W$ existen $G \subset C(X, \mathcal{T})$ finito y $r > 0$ tal que $B_{V_{G,r}}(y) \subset W$. Luego, por el Item 2 de la Proposición 3.4 existe $F_G \subset \mathcal{P}_{C(X,T)}$ finito tal que $V_{G,r} = V(F_G, r)$. Así, $B_{V(F_G,r)}(y) \subset W$ y por lo tanto, $W \in \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,T)}, X, X}}$. Consecuentemente, se obtiene lo que se quería mostrar \square

Ahora, se mostrará la siguiente Proposición que permitira ver el comportamiento de la topologia inducida por $\mathcal{P}_{C(X,T)}$.

Proposición 3.5. *Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $C(X, \mathcal{T})$ espacio de funciones continuas en (X, \mathcal{T}) , $G \subset C(X, \mathcal{T})$ finito, $\epsilon > 0$ y $x \in X$.*

1. $B_{V_{G,\epsilon}}(x) = \bigcap_{f \in G} f^{-1}(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$.
2. $B_{V_{G,\epsilon}}(x) \in \mathcal{T}$.

Demostración. 1.

Sea $y \in B_{V_{G,\epsilon}}(x) \iff (x, y) < V_{G,\epsilon} \dots$ definición de $B_{V_{G,\epsilon}}(x)$

$\iff (x, y) \in V_{G,\epsilon}$

$\iff (y, x) \in V_{G,\epsilon} \dots$ ya que $V_{G,\epsilon} \in \mathcal{B}_X$

$\iff |f(y) - f(x)| < \epsilon, \forall f \in G \dots$ definición de $V_{G,\epsilon}$

$\iff -\epsilon < f(y) - f(x) < \epsilon, \forall f \in G \dots$ propiedad del valor absoluto

$\iff f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon, \forall f \in G$

$\iff f(y) \in (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon), \forall f \in G \dots$ definición de intervalo

$\iff y \in f^{-1}(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon), \forall f \in G \dots$ definición de f^{-1}

$\iff y \in \bigcap_{f \in G} f^{-1}(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$

2. Dado que $G \subset C(X, \mathcal{T})$ es finito. Entonces, existen f_1, f_2, \dots, f_n donde $n = \text{Card}(G)$ tales que $G = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ y $\epsilon > 0$. Para cada $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ se tiene que

$(f_i(x) - \epsilon, f_i(x) + \epsilon)$ es un abierto(intervalo) en \mathbb{R}

y siendo $f_i \in C(X, \mathcal{T})$, es decir f_i es continua en (X, \mathcal{T}) se obtiene que:

$$f_i^{-1}((f_i(x) - \epsilon, f_i(x) + \epsilon)) \in \mathcal{T}$$

Esto a su vez, implica que $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(f_i(x) - \epsilon, f_i(x) + \epsilon) \in \mathcal{T}$ por ser una intersección finita de elementos(abiertos) de \mathcal{T} . Además, se tiene que:

$$\begin{aligned} B_{V_{G,\epsilon}}(x) &= \bigcap_{f \in G} f^{-1}(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \cdots \text{Por el Item 1 (Proposición 3,5)} \\ &= \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(f_i(x) - \epsilon, f_i(x) + \epsilon) \in \mathcal{T} \cdots \text{ya que } G = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \end{aligned}$$

En consecuencia, $B_{V_{G,\epsilon}}(x) \in \mathcal{T}$.

□

Como consecuencia de la Proposición precedida, se tiene el siguiente Corolario.

Corolario 3.4. *Sea (X, σ) un espacio topológico. Entonces:*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,\sigma)}, X, X}} \subset \sigma.$$

Demostración. Sea $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,\sigma)}, X, X}}$. Entonces, por la definición de $\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,\sigma)}, X, X}}$ se tiene que $U \subset X$ y además

$$\text{para cada } x \in U \text{ existen } G_x \subset C(X, \sigma) \text{ finito y } r_x > 0 \text{ tal que } B_{V_{G_x, r_x}}(x) \subset U. \quad (3.2)$$

Esto a su vez, implica que:

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{u \in U} \{u\} \\ &\subset \bigcup_{\substack{u \in U \\ G_u \subset C(X, \sigma) \text{ finito} \\ r_u > 0}} B_{V_{G_u, r_u}}(u) \cdots \text{ya que } u \in B_{V_{G_u, r_u}}(u), \text{ para todo } u \in U \\ &\subset U \cdots \text{ya que por la ecuación 3,2 } B_{V_{G_u, r_u}}(u) \subset U, \text{ para todo } u \in U \end{aligned}$$

En consecuencia, $U = \bigcup_{\substack{u \in U \\ G_u \subset C(X, \sigma) \text{ finito} \\ r_u > 0}} B_{V_{G_u, r_u}}(u)$.

Afirmación: $U \in \sigma$. Para $u \in U$, $G_u \subset C(X, \sigma)$ finito y $r_u > 0$ por el Item 2 de la Proposición 3.5

se tiene que $B_{V_{G_u, r_u}}(u) \in \sigma$. Esto a su vez, implica que $\bigcup_{\substack{u \in U \\ G_u \subset C(X, \sigma) \text{ finito} \\ r_u > 0}} B_{V_{G_u, r_u}}(u) \in \sigma$ (por ser una unión

arbitraria de elementos de σ) y en consecuencia $U \in \sigma$. Siendo $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_C(X,\sigma)},X,X}}$ arbitrario se obtiene lo que se queria mostrar. \square

Corolario 3.5. *Sea (X, σ) un espacio topológico.*

Si (X, σ) es un espacio topológico completamente regular, entonces:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_C(X,\sigma)},X,X}} = \sigma.$$

Demostración. Por la definición de $\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_C(X,\sigma)},X,X}}$ se tiene que:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_C(X,\sigma)},X,X}} = \{U \subset X : \text{para cada } x \in U \text{ existen } G \subset C(X, \sigma) \text{ finito y } r_u > 0 \text{ tal que } B_{V_{G_u, r_u}}(u) \subset U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Por el Corolario 3.4 se tiene que $\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_C(X,\sigma)},X,X}} \subset \sigma$.

Afirmación: $\sigma \subset \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_C(X,\sigma)},X,X}}$

Sea $U \in \sigma$. Entonces, $X \setminus U \subset X$ es cerrado en (X, σ) .

Sea $u \in U = X \setminus (X \setminus U)$.

Por hipotesis el espacio topológico (X, σ) es completamente regular, entonces existe una función continua $f_{U,u} : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f_{U,u}(X \setminus U) \subset \{1\}$ y $f_{U,u}(u) = 0$.

Tome: $G_u = \{f_{U,u}\} \subset C(X, \sigma)$ finito y $r_u = 1 > 0$.

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} B_{V_{G_u, r_u}}(u) &= B_{V_{\{f_{U,u}\}, 1}}(u) \cdots \text{ por la definición de } G_u \text{ y de } r_u \\ &= \{y \in X : (y, u) \in V_{\{f_{U,u}\}, 1}\} \cdots \text{ por la definición de } B_{V_{\{f_{U,u}\}, 1}}(u) \\ &= \{y \in X : |f_{U,u}(y) - f_{U,u}(u)| < 1\} \cdots \text{ por la definición de } V_{\{f_{U,u}\}, 1} \\ &= \{y \in X : |f_{U,u}(y)| < 1\} \text{ ya que } f_{U,u}(u) = 0 \\ &= \{y \in X : f_{U,u}(y) < 1\} \text{ ya que } f_{U,u}(y) \in [0; 1] \end{aligned}$$

Esto a su vez, implica que $B_{V_{G_u, r_u}}(x) \subset U$ ya que si fuera lo contrario existiria $a \in B_{V_{G_u, r_u}}(x)$ tal que $a \notin U$. Esto ultimo, implicaria que $a \in X \setminus U$ y así $f_{U,u}(a) = 1$ (Por la definición de $f_{U,u}$). Lo cual es absurdo ya que $a \in B_{V_{G_u, r_u}}(x)$ y por consiguiente $a \in X$ con $f_{U,u}(a) < 1$. Asi, por el Corolario 3.3 se obtiene que $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}_{\mathcal{P}_C(X,\sigma)},X,X}}$ siendo U arbitrario se obtiene lo que se queria mostrar. \square

Definición 3.6. *Sea (X, σ) un espacio topológico y \mathcal{U} una uniformidad sobre X .*

\mathcal{U} es compatible con σ si $\mathcal{T}_{\mathcal{U}, X} = \sigma$

Ahora, se demostrara un Lema esencial para la prueba del Teorema principal.

Lema 3.2. Sea (X, σ) un espacio topológico y \mathcal{W} una uniformidad sobre X compatible con σ .

Si (X, σ) es Hausdorff compacto, entonces $\mathcal{B} = \{V \in \mathfrak{B}_X : V \in \mathcal{T}_{\sigma\sigma, X \times X}\}$ es base de \mathcal{W} .

Demostración. Seja $W \in \mathcal{B}$. Entonces, $W \in \mathfrak{B}_X$ y $W \in \mathcal{T}_{\sigma\sigma, X \times X}$. Luego, $\Delta \subset W$.

Ahora, como \mathcal{W} es una uniformidad sobre X compatible con σ , es decir, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}, X} = \sigma$ entonces, por la Proposición 2.9 se tiene que:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}\mathcal{W}\mathcal{W}, X \times X, X \times X} = \mathcal{T}_{\sigma\sigma, X \times X}. \quad (3.3)$$

Esto implica, que:

$$\mathcal{B}_{a, X}^{\mathcal{W}} = \{V \in \mathcal{W} : V \in \mathcal{T}_{\sigma\sigma, X \times X}\}$$

Luego, $\mathcal{B}_{a, X}^{\mathcal{W}} \subset \mathcal{B}$ (pues $\mathcal{W} \subset \mathfrak{B}_X$). También por la Ecuación 3.3 se tiene que:

$$\mathcal{B}_{c, X}^{\mathcal{W}} = \{V \in \mathcal{W} : V \text{ es un subconjunto cerrado en } (X \times X, \mathcal{T}_{\sigma\sigma, X \times X})\} \quad (3.4)$$

donde, por el Item 4 del Teorema 3.1, $\mathcal{B}_{c, X}^{\mathcal{W}}$ es base de \mathcal{W} . Además, por hipótesis, (X, σ) es Hausdorff, entonces, $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}, X})$ es Hausdorff y en particular es T_0 . Luego, por el Corolario 2.1 se tiene que

$$\bigcap_{V \in \mathcal{B}_{c, X}^{\mathcal{W}}} V = \Delta.$$

Esto implica que

$$\emptyset \neq \bigcap_{V \in \mathcal{B}_{c, X}^{\mathcal{W}}} V \subset W. \quad (3.5)$$

Además, siendo (X, σ) un espacio topológico compacto, entonces $(X \times X, \mathcal{T}_{\sigma\sigma, X \times X})$ es compacto.

Luego, para cada $V \in \mathcal{B}_{c, X}^{\mathcal{W}}$ es un subcompacto en $(X \times X, \mathcal{T}_{\sigma\sigma, X \times X})$ (pues por la ecuación 3.4 se tiene que $V \in \mathcal{W}$ y V es un subconjunto cerrado en $(X \times X, \mathcal{T}_{\sigma\sigma, X \times X})$). Así, por la ecuación Ecuación 3.5 y por el Teorema 1.3 se tiene que: existen $W_1, W_2, \dots, W_n \in \mathcal{B}_{c, X}^{\mathcal{W}}$ con $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$U \supset \bigcap_{i=1}^n W_i \quad (3.6)$$

Como $W_i \in \mathcal{W}$ para todo $i = 1, \dots, n$ (pues $W_i \in \mathcal{B}_{c, X}^{\mathcal{W}}$, para todo $i = 1, \dots, n$), entonces $\bigcap_{i=1}^n W_i \in \mathcal{W}$. Por esto último, por la ecuación 3.6 y siendo \mathcal{W} una uniformidad sobre X , se tiene que $U \in \mathcal{W}$. Siendo $U \in \mathcal{B}$ arbitrario, se muestra que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{a, X}^{\mathcal{W}}$. Luego:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{a, X}^{\mathcal{W}}$$

Por el Item 3 del Teorema 3.1 se tiene que es base de $\mathcal{B}_{a, X}^{\mathcal{W}}$. Así, \mathcal{B} es base de \mathcal{W} □

Ahora, se demostrará el Teorema Principal de nuestro trabajo de Tesis: Existencia y Unicidad de uniformidad en espacios topológicos Hausdorff's compactos que es compatible con dichos espacios.

Teorema 3.3. *Sea (X, σ) un espacio topológico.*

Si (X, σ) es Hausdorff compacto, entonces existe una unica uniformidad compatible con σ .

Demostración. Afirmación: Existe una uniformidad sobre X compatible con σ .

Como por hipotesis (X, σ) es un espacio topológico Hausdorff compacto, entonces por el Corolario 1.3 se tiene que (X, σ) es un espacio topológico completamente regular. Luego, por el Corolario 3.5 se obtiene que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,\sigma)},X},X} = \mathcal{T}.$$

Es decir, la uniformidad $\mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,\sigma)},X}$ es compatible con σ .

Afirmación: $\mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,\sigma)},X}$ es la única uniformidad sobre X compatible con σ .

Supongamos, que existe otra uniformidad \mathcal{U} sobre X compatible con σ tal que $\mathcal{U} \neq \mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,\sigma)},X}$.

Siendo (X, σ) un espacio topológico Hausdorff compacto, por el Lema 3.2 se tiene que

$$\mathcal{B} = \{V \in \mathfrak{B}_X : V \in \mathcal{T}_{\sigma, X \times X}\}$$

es base de \mathcal{U} y tambien de $\mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,\sigma)},X}$. Esto, implica que $\mathcal{U} = \mathcal{W}_{\mathcal{P}_{C(X,\sigma)},X}$. Contradiciendo la suposición inicial. Mostrandose, el Teorema como se queria. \square

Capítulo 4:

Conclusiones

- Siempre una uniformidad genera una topología sobre un conjunto: topología uniforme.
- Siempre una familia de pseudométricas sobre un conjunto induce una uniformidad sobre dicho conjunto.
- Siempre un espacio topológico induce una familia de pseudométricas sobre el espacio.
- Siempre la topología uniforme: Topología generada por la uniformidad la cual es a su vez inducida por el espacio topológico, está contenida en la topología del espacio.
- Cada vez que la topología del espacio sea completamente regular la topología uniforme coincide con la topología del espacio dado.
- Para todo espacio topológico Hausdorff compacto, se ´ concluye que:
 - Existe una uniformidad tal que la topología inducida por dicha uniformidad coincide con la topología del espacio dado, es decir es compatible con la topología.
 - Dicha uniformidad es dada por la uniformidad inducida por la familia de pseudométricas generada por el espacio dado.
 - La uniformidad obtenida, es la única uniformidad compatible con la topología del espacio.

Capítulo 5:

Sugerencias

Para estudios posteriores se sugiere tener en cuenta las siguientes interrogantes:

1. ¿El espacio topológico es completamente regular, si la topología inducida por la uniformidad que es generada por la familia de pseudométricas generada por el espacio coincide con la topología del espacio? completamente regular?
2. ¿El espacio topológico es Hausdorff compacto si existe una única uniformidad compatible con la topología del espacio?
3. ¿La compacidad y propiedad de Hausdorff sobre un espacio topológico siempre está relacionado con la existencia y unicidad de uniformidad compatible con la topología del espacio?
4. ¿Que condiciones además de la compacidad, debería tener un espacio Hausdorff para que admita y sea única la uniformidad compatible con la topología?
5. ¿Que condiciones además de Hausdorff, debería tener un espacio compacto para que admita y sea única la uniformidad compatible con la topología?
6. En el caso de la topología inducida por la familia de pseudométricas generada por el espacio, ¿Cuales deberían ser las condiciones necesarias y/o suficientes para que esa topología coincida con la topología del espacio?
7. ¿Se pueden contabilizar las uniformidades compatibles con la topología de un espacio?

Bibliografía

- [1] BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique Topologie générale* (1971).
- [2] CARTWRIGHT, M. L., LITTLEWOOD, J. E. *On non-linear differential equations of the second order* I.J. London Math. Soc. (1945) 20, 180–189.
- [3] CASARRUBIAS, F. TAMARIZ, A.. *Elementos de Topología General* Sociedad Matemática Mexicana, México (2015)
- [4] IVORRA, C. *Topología*, Valencia University (2017).
- [5] I. S. GAL *Uniformizable spaces with a unique structur*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 9, Yale University and Cornell University (Jan. 1959).
- [6] K.D. JOSHI. *Introduction to General Topology* Department of Mathematics Indian Institute of Technology Bombay, Wiley Eastern Limited (1983)
- [7] MUNKRES, J. *Topología*, Second ed. , Massachusetts Institute of Technology (2 000).
- [8] RIESZ, F. . *Die Genesis des Raumbegriffs* Math. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn 24 (1907), 309–353.
- [9] SERGUÉYEVICH, P. URYSÓN, P. . *Memoire sur les espaces topologiques compacts*. Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam, 14 (1929)
- [10] TIETZE, H. *Beitäge zur allgemeinen Topologie I*, Math Ann, 8 (1923), 290 – 312.
- [11] URYSOHN, P. *Zum Metrization problem*, Mathematische Annalen, 94 (1925), 309– 315.