Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela Profesional de Matemáticas

Tesis para obtener el título profesional de Licenciado(a) en Matemáticas

---

Generador de un semigrupo fuertemente continuo: Un análisis desde la teoría de perturbaciones.

Elaborado por:

Ojeda Rueda Jeankarlos Omar

Chamaya Cubas Lessly Yessenia

Asesora:

Chirinos Fernández Danessa Lisbeth
ORCID: 0000-0002-2438-3830

Línea de investigación:

Ciencias Naturales y del ambiente

LAMBAYEQUE-PERÚ
Febrero - 2026

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **Generador de un semigrupo fuertemente continuo: Un análisis desde la teoría de perturbaciones**, presentada por los bachilleres en Matemáticas, Ojeda Rueda Jeankarlos Omar y Chamaya Cubas Lessly Yessenia, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Dra. Lic. Mat. Miriam María Estrada Huancas

Presidenta Jurado de Tesis

Dr. Lic. Mat. Segundo Leonardo Valdivia Velásquez

Secretario Jurado de Tesis

Lic. Mat. Juan Antonio Cornetero Capitán

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: 17 de febrero del 2026

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

Generador de un semigrupo fuertemente continuo: Un análisis desde la teoría de perturbaciones

---

Bach. Mat. Ojeda Rueda Jeankarlos Omar

Autor

Bach. Mat. Chamaya Cubas Lessly Yessenia

Autor

Mg. Mat. Chirinos Fernández Danessa Lisbeth

Asesora

ACTA DE SUSTENTACIÓN

0042

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO
Ciudad Universitaria – Lambayeque
LICENCIADA - RESOLUCIÓN DEL CONSEJO DIRECTIVO N° 015 -2023-SUNEDU / CD

ACTA DE SUSTENTACIÓN N° ..17...-202.6.-D/FACFyM

Siendo las ......9:30 am........del día ...17 de febrero.........del 2026, se reunieron los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada: ......Generador de un Semigrupo fuertemente Continuo: Un Análisis desde la Teoría de Perturbaciones........

Designados por Resolución N°.....241 - 2025..... D/FACFyM de fecha ...11 de marzo de 2025

Con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

Dra. Lic. Mat. Miriam María Estrada Huamas — Presidente
Dr. Lic. Mat. Segundo Leonardo Valdivia Velásquez — Secretario
Lic. Mat. Juan Antonio Cornetero Capitán — Vocal

La tesis fue asesorada por (el) (la) Mg. Lic. Mat. Danessa Lisbeth Chirinos F., nombrado por Resolución N° ....241 - 2025..........D/FACFyM de fecha ....11 de marzo de 2025

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N° ...241 - 2025...... D/FACFyM de fecha ....11 de marzo de 2025.

La Tesis fue presentada y sustentada por (el) (los) Bachiller (es):...Ocida Rueda Jean Karlos Omar Chamaya Cubas Lessly Yessenia..........y tuvo una duración de ....50.......minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de ....Dieciocho........ (..18..) en la escala vigesimal, mención (....Muy bueno..........).

Por lo que queda(n) apto(s) para obtener el Título Profesional de .....Licenciado en Matemática.....

de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Siendo las ......10:30 am........ se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

Dra. Lic. Mat. Miriam María Estrada Huamas
Presidente

Dr. Lic. Mat. Segundo Leonardo Valdivia Velásquez
Secretario

Lic. Mat. Juan Cornetero Capitán
Vocal

Danessa Lisbeth Chirinos Fernández
Asesor

CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD DEL ASESOR

Yo, Danessa Lisbeth Chirinos Fernández, usuario revisor del documento titulado: **Generador de un semigrupo fuertemente continuo: Un análisis desde la teoría de perturbaciones.**

Cuyos autores son: Jeankarlos Omar Ojeda Rueda y Lessly Yessenia Chamaya Cubas.

Identificada con Documento de Identidad 41385979; declaro que la evaluación realizada por el programa informático, ha arrojado un porcentaje de similitud de 18%, verificable en el resumen de reporte automatizado de similitud que se acompaña.

La suscrita analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituye plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efecto de la trazabilidad del proceso.

Lambayeque, 26 de noviembre 2025

FIRMA

Mg. Mat. Danessa Lisbeth Chirinos Fernández

DNI: 41385979

Tesis

INFORME DE ORIGINALIDAD

Danessa Lisbeth
Chirinos Fernández
41385979

18%	16%	8%	3%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	zaguan.unizar.es Fuente de Internet	4%
2	dokumen.pub Fuente de Internet	2%
3	1library.org Fuente de Internet	1%
4	hdl.handle.net Fuente de Internet	1%
5	netlizama.usach.cl Fuente de Internet	1%
6	dspace.unitru.edu.pe Fuente de Internet	1%
7	www.bdtd.ufpe.br Fuente de Internet	1%
8	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga Trabajo del estudiante	<1%
9	tailieu.vn	

Fuente de Internet

<1 %

---

10 "Perturbation and Approximation of Semigroups", Graduate Texts in Mathematics, 2000

Publicación

<1 %

Danessa Lisbeth
Chirinos Fernández
41385979

---

11 www.coursehero.com

Fuente de Internet

<1 %

---

12 temat.es

Fuente de Internet

<1 %

---

13 www.dim.uchile.cl

Fuente de Internet

<1 %

---

14 José M. Mazón Ruiz. "Ecuaciones en derivadas parciales gobernadas por operadores acretivos", SeMA Journal, 2013

Publicación

<1 %

---

15 vdoc.pub

Fuente de Internet

<1 %

---

16 Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Trabajo del estudiante

<1 %

---

17 sikolyaesz.web.elte.hu

Fuente de Internet

<1 %

---

18 Bermudez de Leon, Teresa de Jesus. "Calculos funcionales y teoria espectral local",

<1 %

Universidad de La Laguna (Canary Islands, Spain), 2022
Publicación

Danessa Lisbeth Chirinos Fernández
41385979

19	Submitted to University of Bath Trabajo del estudiante	<1 %
20	repositorio.unprg.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
21	Submitted to University of Sydney Trabajo del estudiante	<1 %
22	3lib.net Fuente de Internet	<1 %
23	ri.ufs.br Fuente de Internet	<1 %
24	revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
25	Jesús Garcia-Falset, Khalid Latrach. "2 A short introduction to semigroups of linear operators", Walter de Gruyter GmbH, 2023 Publicación	<1 %
26	cybertesis.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
27	nozdr.ru Fuente de Internet	<1 %
28	www.revistas.unitru.edu.pe Fuente de Internet	<1 %

29	mathproblems123.files.wordpress.com Fuente de Internet	<1 %
30	www.math.kit.edu Fuente de Internet	<1 %
31	Hanoi Pedagogycal University 2 Publicación	<1 %
32	Submitted to ueb Trabajo del estudiante	<1 %
33	repositorio.unh.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
34	bdigital.uncu.edu.ar Fuente de Internet	<1 %
35	repositorio.unesp.br Fuente de Internet	<1 %
36	Submitted to Pontificia Universidad Catolica del Peru Trabajo del estudiante	<1 %
37	Submitted to uniminuto Trabajo del estudiante	<1 %
38	"One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations", Springer Science and Business Media LLC, 2000 Publicación	<1 %

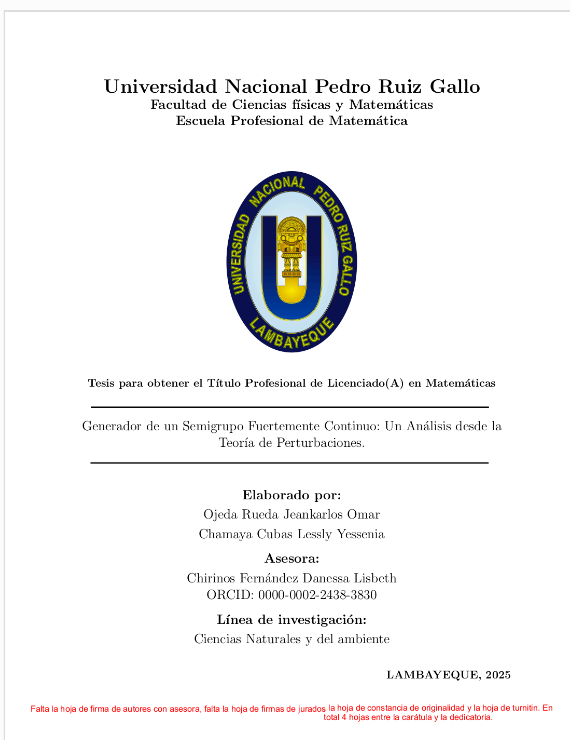
Danessa Lisbeth
Chirinos Fernández
41385979

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Chamaya Ojeda
Título del ejercicio:	Quick Submit
Título de la entrega:	Tesis
Nombre del archivo:	Informe_Final_de_Tesis_-_Ojeda_Rueda_y_Chamaya_Cubas.pdf
Tamaño del archivo:	763.27K
Total páginas:	63
Total de palabras:	18,248
Total de caracteres:	81,323
Fecha de entrega:	26-nov-2025 08:43p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega:	2828620786



Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo
Facultad de Ciencias físicas y Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Tesis para obtener el Título Profesional de Licenciado(A) en Matemáticas

Generador de un Semigrupo Fuertemente Continuo: Un Análisis desde la Teoría de Perturbaciones.

Elaborado por:
Ojeda Rueda Jeankarlos Omar
Chamaya Cubas Lessly Yessenia

Asesora:
Chirinos Fernández Danessa Lisbeth
ORCID: 0000-0002-2438-3830

Línea de investigación:
Ciencias Naturales y del ambiente

LAMBAYEQUE, 2025

Falta la hoja de firma de autores con asesora, falta la hoja de firmas de jurados la hoja de constancia de originalidad y la hoja de turnitin. En total 4 hojas entre la carátula y la dedicatoria.

Dedicatoria

A Dios, por ser mi guía constante, mi fuente de sabiduría, por darme fortaleza en los momentos difíciles y mostrarme el camino para alcanzar este logro.

A mis padres, por su amor incondicional, sus sacrificios y su apoyo inquebrantable, que han sido el motor que me impulsó a seguir adelante.

A mis hermanos, por su compañía, ánimo y comprensión en cada etapa de este proceso.

A mis abuelos que ya partieron, quienes, desde el cielo, han sido inspiración y ejemplo de vida; su recuerdo vive en cada uno de mis pasos.

A mi amada novia, Melissa, por su paciencia, comprensión y cariño, que me acompañaron durante este camino y me fortalecieron en cada desafío.

(Jeankarlos Omar Ojeda Rueda)

Dedico este trabajo de investigación, en primer lugar a DIOS, por brindarme salud, fortaleza, ser mi guía en mi vida y mi protector ante las adversidades que se presentan en mi camino como profesional.

A mis padres por su amor y cariño, por inculcarme buenos valores, por su apoyo incondicional, por su comprensión en los momentos más difíciles pues ellos me han dado todo lo que soy como persona, me enseñaron a ser perseverante y no rendirme hasta lograr mis sueños.

A mis hermanos por alentarme, por ser mi mejor compañía y motivación para lograr mis sueños.

A mis abuelos por brindarme los mejores consejos y enseñanzas, uno de ellos me guía desde el cielo, ellos siempre desean verme surgir en mi carrera profesional.

(Lessly Yessenia Chamaya Cubas)

Agradecimiento

Agradezco primeramente a Dios, fuente de sabiduría y fortaleza, por haberme permitido culminar esta etapa de mi vida académica.

A mi asesora, por su guía, paciencia y valiosos aportes que enriquecieron el desarrollo de esta investigación. Su dedicación y compromiso han sido fundamentales para alcanzar este objetivo.

A mis profesores de la Universidad, quienes a lo largo de estos años compartieron sus conocimientos y experiencias, contribuyendo a mi formación profesional y personal. Cada enseñanza recibida ha dejado una huella importante en mi crecimiento académico.

Finalmente, a mi familia y a todas las personas que de una u otra manera han contribuido a la culminación de esta meta, les expreso mi más sincero agradecimiento.

(Jeankarlos Omar Ojeda Rueda)

Un sincero y profundo agradecimiento a la profesora Danessa Lisbeth Chirinos Fernández por sus enseñanzas , paciencia , dedicación , motivación y el apoyo que nos brindó en la realización de este trabajo de investigación.

(Lessly Yessenia Chamaya Cubas)

Índice general

RESUMEN

El objetivo central de esta investigación fue determinar las condiciones que debe cumplir un operador perturbador P para que, al sumarse a un generador A de un semigrupo fuertemente continuo de clase C_0 en un espacio de Banach, el operador resultante $A+P$ continúe generando un semigrupo de la misma clase.

Para alcanzar dicho propósito, se revisaron los fundamentos de los semigrupos de operadores y sus generadores, con especial énfasis en el teorema de Hille–Yosida, el resolvente y las técnicas de interpolación y extrapolación de espacios. Posteriormente, se abordó la teoría de perturbaciones como herramienta principal para analizar la estabilidad de los semigrupos frente a modificaciones controladas en su generador.

Los resultados obtenidos evidencian que, bajo la condición de que P sea lineal y acotado, el operador perturbado $A + P$ mantiene las propiedades esenciales del generador original, asegurando así la existencia de un semigrupo fuertemente continuo.

A partir de estos hallazgos, se concluye que la teoría de perturbaciones confirma la hipótesis planteada y cumple con los objetivos propuestos, validando que los semigrupos de clase C_0 conservan su estructura bajo perturbaciones bien definidas.

En conjunto, el trabajo ofrece un marco sólido para el análisis de ecuaciones diferenciales abstractas, aportando bases teóricas que fortalecen la comprensión de la estabilidad, regularidad y continuidad de sistemas dinámicos en diferentes ámbitos de la matemática aplicada y las ciencias afines.

Palabras Clave: Semigrupos fuertemente continuos; Generadores infinitesimales; Resolvente; Teorema de Hille–Yosida; Teoría de perturbaciones; Espacios de Banach; Ecuaciones diferenciales abstractas.

ABSTRACT

The main objective of this research was to identify the conditions under which a perturbation operator P, when added to a generator A of a strongly continuous semigroup of class C_0 in a Banach space, ensures that the perturbed operator $A+P$ still generates a semigroup of the same class.

To address this purpose, the study examines the foundations of operator semigroups and their generators, with emphasis on the Hille–Yosida theorem, the resolvent, and the role of interpolation and extrapolation of spaces. Special attention is given to perturbation theory as the main framework for analyzing the stability of semigroups under controlled modifications of their generators.

The results show that, whenever P is a bounded linear operator, the perturbed operator $A + P$ preserves the essential properties of the original generator, thereby guaranteeing the existence of a strongly continuous semigroup.

Based on these findings, it is concluded that perturbation theory validates the initial hypothesis and meets the proposed objectives, confirming that C_0-semigroups remain structurally stable under appropriate perturbations.

Overall, this research provides a solid framework for the study of abstract differential equations, offering theoretical tools that enhance the understanding of stability, regularity, and continuity in dynamical systems across mathematics and applied sciences.

Keywords: Strongly continuous semigroups; Infinitesimal generators; Resolvent; Hille–Yosida theorem; Perturbation theory; Banach spaces; Abstract differential equations.

INTRODUCCIÓN

La teoría de los semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales en espacios de Banach, también conocidos como semigrupos de operadores, ha adquirido un papel fundamental en múltiples áreas del análisis matemático contemporáneo. Desde su concepción en 1948 con el teorema de generación de Hille-Yosida, y su punto álgido con la publicación en 1957 de "Semigroups and Functional Analysis"por E. Hille y R. S. Phillips, estos semigrupos han evolucionado para convertirse en herramientas imprescindibles en la resolución de ecuaciones integro-diferenciales y ecuaciones diferenciales funcionales. Su aplicabilidad se extiende también a disciplinas como la mecánica cuántica y la teoría de control de sistemas de dimensiones infinitas.

En la obra de Engel y Nagel (One-Parameter Semigroups por Linear Evolution Equations, 1999), se desarrollan técnicas que posibilitan la construcción de un semigrupo en un espacio de Banach apropiado, preservando la continuidad fuerte en una topología adecuada, incluso cuando, inicialmente, solo se cuenta con propiedades de regularidad más tenues. Esta contribución adquiere una significativa relevancia en el contexto de diversas ecuaciones específicas, donde la continuidad fuerte en el espacio de Banach resulta crucial. Las técnicas propuestas en este trabajo ofrecen un marco metodológico valioso para superar limitaciones iniciales de regularidad y establecer propiedades fundamentales en la evolución temporal de sistemas descritos por ecuaciones específicas en espacios de Banach.

La teoría de la perturbación se ocupa del estudio de cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales o parámetros de un modelo pueden afectar al comportamiento de un sistema. La teoría de perturbaciones es de gran relevancia en las matemáticas, física y las ciencias aplicadas, ya que ofrece herramientas poderosas para entender y predecir el comportamiento de una amplia gama de sistemas complejos en diversos campos de estudios.

Esta teoría fue desarrollada por Rayleigh y Schrödinger. Fue Rayleigh quien contribuyó significativamente en este campo al presentar una fórmula que permite calcular las frecuencias y modos naturales de un sistema vibratorio que se desvía ligeramente de un sistema simple, cuya solución ya ha sido determinada. Este enfoque proporciona una herramienta valiosa para comprender y analizar sistemas dinámicos que muestran desviaciones respecto a condiciones ideales, permitiendo así la evaluación precisa de las características vibracionales en casos de perturbaciones leves en el sistema subyacente.

La teoría de las perturbaciones en términos de semigrupos definidos en espacios de Banach, proporciona una estructura matemática rica que permite estudiar de manera rigurosa la evolución temporal de los sistemas, así como analizar el comportamiento de las perturbaciones en términos de propiedades de ordenamiento y convergencia.

Kato establece un marco matemático de notable relevancia al introducir la teoría de perturbaciones en operadores lineales acotados y semigrupos de operadores. Este enfoque se basa en los principios fundamentales del análisis funcional, así como en los pilares del álgebra lineal y del análisis real y complejo. La obra Perturbation Theory for Linear Operators de Kato proporciona un fundamento sólido y riguroso para abordar problemas de perturbación en el contexto de operadores lineales acotados, aprovechando lo común y la sinergia de diversas disciplinas matemáticas (Kato, 1980).

Debido a lo mencionado anteriormente se formula el problema de investigación. Sea A el generador de un semigrupo fuertemente continuo de clase C_0 definido en un espacio de Banach X. ¿Qué condiciones debe tener el operador P para que el operador perturbado $A + P$ siga generando un semigrupo fuertemente continuo de C_0?.

Para abordar el problema de investigación se considera la hipótesis a determinar: Sea el operador perturbación P, lineal y acotado definido sobre un espacio de Banach X. Bajo estas condiciones, si A es el generador de un semigrupo fuertemente continuo de clase C_0 entonces $A + P$ genera un semigrupo fuertemente continuo de clase C_0.

La presente investigación tiene como objetivo general determinar las condiciones del operador perturbación P, que garanticen que el operador perturbado $A + P$ genere un semigrupo fuertemente continuo de clase C_0 y como objetivos específicos, analizar teoremas de semigrupos fuertemente continuo de clase C_0 y caracterizar el operador perturbación P de tal manera que el operador perturbado $A + P$ genere un semigrupo fuertemente continuo de clase C_0.

1 DISEÑO TÉORICO

1.1. Antecedentes

En cuanto al trabajo actual, se han utilizado libros y algunos trabajos relacionados con nuestra investigación, que permiten comprobar y verificar los resultados tras el análisis y procesamiento de la información.

Álvarez & Peypouquet (2023), presentaron una exposición introductoria de la teoría concerniente a los semigrupos de operadores acotados en espacios de Banach, abordando de manera exhaustiva las definiciones fundamentales y las propiedades inherentes a los operadores lineales en dicho contexto matemático. Además, su análisis se adentra en el estudio de los semigrupos uniformemente continuos, así como en las características esenciales de los generadores infinitesimales vinculados a estos semigrupos.

Amosov & Baitenov (2022), trabajaron una ecuación integral que generaliza la fórmula de variación de parámetros en el marco de la teoría de perturbaciones de semigrupos, se procede a definir la perturbación mediante la introducción de una medida valorada por el operador que cumple con ciertas propiedades especiales asociadas al semigrupo inicial, la construcción analizada conlleva a la generación de otro semigrupo, se realiza una descripción exhaustiva de un generador de la perturbación, demostrando que su dominio puede experimentar cambios. Además, se proporciona una caracterización parcial de las medidas que posibilitan la producción de la perturbación, ofreciendo así una comprensión más profunda de las condiciones y propiedades involucradas en la generalización de las fórmulas de variación de parámetros en el marco de la teoría de perturbaciones de semigrupos.

Amosov (2021), estudió las perturbaciones de los semigrupos dinámicos en el álgebra de todos los operadores acotados en un espacio de Hilbert generado por medidas covariantes completamente positivas en el semieje. La construcción de estas perturbaciones se fundamenta en perturbaciones lineales ilimitadas de los generadores de los semigrupos preadjuntos en el espacio de operadores nucleares. Como una aplicación específica, se desarrolla una perturbación del semigrupo de endomorfismo no unitario en el álgebra de relaciones canónicas de anticonmutación, lo que da como resultado un flujo de cambio.

Amosov & Baitenov (2021), analizaron un escenario específico de perturbaciones en el semigrupo de desplazamiento en el semieje, este análisis implica la modificación del dominio de su generador al considerar una perturbación de rango uno, definida por una función exponencial, se demostró que la perturbación del generador genera un semigrupo. En el estudio se establece un criterio determinante para la isometría y la contractividad del semigrupo perturbado, se abordó de manera exhaustiva el desafío de construir una medida valorada en operadores que caracterice la ecuación integral relacionando el semigrupo perturbado con el original. Cuando es posible, se determina explícitamente la existencia de esta medida, destacando su definición no única. Además, se investiga la viabilidad de seleccionar una medida valorada en operadores con valores en el conjunto de operadores autoadjuntos y positivos. Este enfoque amplio y detallado ofrece una comprensión profunda de las implicaciones y características asociadas con las perturbaciones consideradas en el contexto del semigrupo de desplazamiento.

Erkurşun Özcan & Mukhamedov (2020), en el transcurso de esta investigación, se aborda la estimación de la estabilidad y perturbación en semigrupos de Márkov ubicados en espacios de estado abstractos. La metodología adoptada se fundamenta en el uso del coeficiente de ergodicidad de Dobrushin como herramienta central de análisis. Como resultado de este análisis, se establece una relación lineal entre la estabilidad intrínseca del semigrupo y la sensibilidad de su punto fijo frente a perturbaciones. El foco principal de este estudio reside en garantizar condiciones de la perturbación y comprender la acción de estas perturbaciones en semigrupos, especialmente aquellos definidos en contextos de espacios de estado abstractos, con un énfasis particular en espacios de Banach ordenados, proporcionando así una base sólida para futuras investigaciones en esta temática.

Aguado López et al (2020), presentaron una demostración del teorema de Hille-Yosida, que caracteriza los generadores de los semigrupos C_0 de operadores lineales sobre espacio de Banach. Este resultado contribuyó el análisis de teoremas de semigrupo de clase C_0.

Habiéndose encontrado pocas referencias en el ámbito académico referentes al tema, se decidió agregar antecedentes con una antigüedad mayor a cinco años.

Adler et al (2014), realizaron un estudio sobre semigrupos de operadores, su propósito consistió en derivar teoremas acerca de perturbaciones para el generador de dicho semigrupo. El estudio planteó y verificó un resultado, evitando el uso de conceptos específicos como los sistemas lineales abstractos.

Aiena et al (2001), en su investigación abordan el tema de semigrupos de operadores, entre estos se destacan los operadores semi-Fredholm $\phi+$ y $\phi-$, así como los operadores tauberianos introducidos por Kalton y Wilansky. La teoría de ideales de operadores adoptó un enfoque que difiere de la exploración de las propiedades intrínsecas de los espacios de Banach, centrándose en su lugar, en el análisis de las propiedades de los operadores que actúan entre estos espacios. Es esencial destacar que el propósito de la teoría de semigrupos guarda similitud con la teoría de ideales de operadores, este enfoque ofrece una perspectiva distinta para explorar las relaciones entre los operadores y sus impactos en los espacios de Banach, proporcionando así una base conceptual sólida para analizar y caracterizar dichos espacios en función de las propiedades específicas de los operadores que los conectan.

1.2. Base Teórica

Para desarrollar este proyecto necesitamos tener conocimiento:

Teoria de semigrupos.

En matemáticas, los semigrupos son estructuras algebraicas fundamentales que consisten en un conjunto no vacío cerrado bajo una operación binaria asociativa. Esta propiedad asegura que el resultado de combinar dos elementos del semigrupo también pertenece al mismo conjunto, permitiendo así modelar sistemas con reglas internas de combinación. Los semigrupos surgen de manera natural en la generalización de grupos, eliminando la necesidad de elementos inversos o identidad, lo que los convierte en herramientas versátiles para estudiar fenómenos algebraicos en los que no se requiere una estructura completamente simétrica. El interés por los semigrupos ha crecido debido a su capacidad para capturar patrones y relaciones en contextos tan diversos como la combinatoria y la topología (Clifford y Preston, 1961).

El desarrollo de la teoría de semigrupos ha sido impulsado por sus aplicaciones en áreas como la teoría de autómatas, el análisis funcional y la matemática discreta. Por ejemplo, en la informática teórica, los semigrupos se utilizan para describir el comportamiento de máquinas finitas y lenguajes formales, mientras que, en el análisis, se estudian los semigrupos de operadores para modelar la evolución temporal de sistemas dinámicos. Matemáticos como Alfred H. Clifford y Gordon Preston contribuyeron significativamente al establecimiento de los fundamentos de esta disciplina, brindando herramientas para explorar estructuras algebraicas más complejas y sus aplicaciones prácticas. Estos avances continúan siendo relevantes tanto en investigaciones puramente teóricas como en problemas aplicados (Clifford y Preston, 1961).

Teoría de perturbaciones.

La teoría de perturbaciones es un conjunto de técnicas matemáticas utilizadas para aproximar las soluciones de un problema complejo partiendo de un problema más simple al que se le introduce una pequeña modificación o ″perturbación ‶. Este enfoque es particularmente útil cuando las soluciones exactas del problema original son difíciles o imposibles de obtener, pero el problema puede modelarse como una variación de un sistema conocido (Hinch, 1991).

La teoría de perturbaciones es un conjunto de métodos matemáticos que permiten obtener soluciones aproximadas a problemas que no pueden resolverse exactamente, partiendo de la solución de un problema más simple y añadiendo una pequeña perturbación. Este enfoque es ampliamente utilizado en diversas ramas de la física y las matemáticas para analizar sistemas complejos mediante la introducción de parámetros pequeños que representan desviaciones respecto a un sistema idealizado (Bender y Orszag, 1999).

1.3. Definiciones de Términos y Conceptos

Las siguientes definiciones fueron obtenidas de los siguientes libros: (Engel & Nagel, A Short Course on Operator Semigroups, 2005), (Amosov & Baitenov, On Perturbations of

C0-Semigroups in Banach Spaces Generated by Operator-Valued Measures, 2022) y (Adler, Bombieri, & Jochen Engel, 2014).

Definición 1. *(Operador Lineal). Sea D un subespacio vectorial de X. Una función $A : D \to Y$ es un operador lineal o simplemente un operador,de X en Y. Si D es denso en X y A es lineal.*

Definición 2. *(Semigrupo de Operador Acotado). Sea X un espacio de Banach. Dada una función $(T(t)_{t\geq 0}) \subset B(X)$ es un semigrupo de operadores sobre X si cumple las siguientes condiciones:*

$$\begin{cases} T(t+s) &= T(t)T(s), \qquad \forall t, s \geq 0 \\ \\ T(0) &= I \end{cases} \tag{1.1}$$

Definición 3. *(Semigrupo Fuertemente continuo de clase C_0). Un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ de operadores acotados es fuertemente continuo o C_0-semigrupo. Si $\forall x \in X$ se tiene que: $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t) = x$.*

Definición 4. *(Perturbación). Sea A el generador de un semigrupo clase C_0 de operadores lineales acotados. La perturbación se produce cuando se hace una pequeña variación en el operador A, es decir, se considera, $A+\varepsilon B$ donde ε es un pequeño parámetro y εB el operador perturbación.*

2 DISEÑO METODOLÓGICO

2.1. Diseño de Contrastación de Hipótesis

Para la contrastación de Hipótesis se utilizó la base teórica relacionados al tema. Se realizó una revisión bibliográfica de libros especializados y base de datos como Scopus, Web Ofscience y Google académico.

2.2. Población y Muestra

Por ser un trabajo de tipo descriptivo no habrá población y muestra.

2.3. Técnicas, Instrumentos, Equipos y Materiales

2.3.1. Métodos

El diseño de la investigación es no experimental y de tipo descriptivo; el método predominante del trabajo consiste en el método analítico, de análisis y de síntesis, las unidades de análisis están constituidas por las definiciones, teoremas, y ejemplos que son analizados y ejemplificados, las mismas que han sido seleccionados de los textos y materiales bibliográficos especializados.

2.3.2. Materiales

Se ha realizado una revisión y análisis de bibliografía especializada en el tema tales como, texto, artículos científicos y libro relacionadas con perturbaciones en semigrupos de clase C_0. Los medios empleados para este propósito consistieron en bibliotecas físicas y virtuales haciendo uso de internet, el cual en la actualidad se considera una herramienta tecnológica indispensable en el conocimiento científico.

2.3.3. Técnica

Revisión Documental, el presente trabajo no hará uso de instrumentos como encuesta, entrevista.

2.3.4. Tipo de Investigación

Tipo: Básica descriptivo – no experimental.

3 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1. Semigrupos fuertemente continuos

En el estudio de la evolución de sistemas dinámicos en espacios de Banach, se establece el concepto de *semigrupo de operadores lineales acotados*, el cual describe la estructura algebraica que debe cumplir una familia de operadores. Sin embargo, con el propósito de abordar de manera rigurosa aspectos de naturaleza analítica, fortalecemos esta noción mediante la incorporación de la continuidad fuerte, dando lugar así al concepto de *semigrupo fuertemente continuo*. En lo que sigue, se presentan ambas definiciones junto con una breve explicación de la relación que existe entre ellas.

Definición 5. *Una familia $(T(t))_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados en un espacio X de Banach se denomina semigrupo si cumple las siguientes condiciones:*

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s), & \forall t,s \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases} \tag{3.1}$$

La definición *5* determina la estructura algebraica que define a un *semigrupo de operadores*, la cual se complementa con una propiedad de tipo topológico. Esta incorporación permite analizar la continuidad de las trayectorias. De este modo, se llega a la noción de *semigrupo fuertemente continuo*, cuya definición se presenta a continuación.

Definición 6. *La familia $T(t)_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo si es un semigrupo y para cada $x \in X$ la aplicación*

$$\begin{aligned} \xi_x : \quad \mathbb{R}_+ &\to X \\ t &\to \xi_x(t) := T(t)x \end{aligned} \tag{3.2}$$

es continua.

La definición *6* es equivalente a

$$t \mapsto T(t)$$

donde la aplicación es continua con la topología fuerte del operador, es decir

$$\|T_n x - Tx\| \to 0, \qquad \forall x \in X.$$

Observaciones 1. *Un semigrupo fuertemente continuo es conocido semigrupo C_0.*

Teorema 1. *Sea X un espacio de Banach y $F : K \subset \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ una aplicación definida en un compacto K. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *F es continua para la topología fuerte del operador; es decir, las aplicaciones*

$$\begin{array}{rcl} K & \to & X \\ t & \to & F(t)x \end{array}$$

es continua para todo $x \in X$.

(ii) *F es uniformemente acotada en K, y la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} K & \to & X \\ t & \to & F(t)x \end{array}$$

es continua para todo x en algún subconjunto denso D en X.

(iii) *F es continua para la topología de convergencia uniforme en subconjuntos compactos de X; es decir, la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} K \times C & \to & X \\ (t,x) & \to & F(t)x \end{array}$$

es uniformente continua para todo conjunto compacto C en X.

Demostración. La equivalencia entre (i) y (ii), se obtendrá. Si para todo $x \in X$ la aplicación $t \mapsto F(t)x$ es continua en K, entonces, para cada x fijo, la familia $\{F(t)x : t \in K\}$ es compacta en X y, en particular, acotada. Por el Principio de Acotación Uniforme (Banach–Steinhaus) aplicado a la familia $\{F(t) : t \in K\} \subset L(X)$, se obtiene

$$M = \sup_{t \in K} \|F(t)\| < \infty.$$

Además, la continuidad de $t \mapsto F(t)x$ para cada $x \in X$ ya está asumida en (i). Por tanto, se cumple (ii).

Veamos ahora que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supongamos ahora que existe $M = \sup_{t \in K} \|F(t)\| < \infty$ y que, para todo $x \in X$, $t \mapsto F(t)x$ es continua en K. Sea $C \subset X$ compacto. Queremos ver que la aplicación

$$t \mapsto F(t)|_C$$

es uniformemente continua (para la norma del supremo en C). Fijemos $\varepsilon > 0$ y definamos

$$r = \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Como C es compacto, existe una familia finita $x_1, \dots, x_m \in C$ tal que

$$C \subset \bigcup_{j=1}^{m} (x_j + r\,U),$$

donde U es la bola unitaria de X. Para cada $j = 1, \dots, m$, la función $t \mapsto F(t)x_j$ es continua en el compacto K; por lo tanto, es uniformemente continua. Existe, pues, $\delta_j > 0$ tal que, si $|t - s| < \delta_j$, entonces

$$\|F(t)x_j - F(s)x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea ahora

$$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}.$$

Sean $t, s \in K$ con $|t - s| < \delta$ y un punto arbitrario $x \in C$. Por la cobertura, existe j tal que $\|x - x_j\| \leq r$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\|F(t)x - F(s)x\| &\leq \|F(t)(x - x_j)\| + \|F(s)(x - x_j)\| + \|F(t)x_j - F(s)x_j\| \\
&\leq M\|x - x_j\| + M\|x - x_j\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq 2Mr + \frac{\varepsilon}{2} = 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando supremo en $x \in C$, concluimos

$$\sup_{x \in C} \|F(t)x - F(s)x\| < \varepsilon,$$

lo que prueba la uniformidad de la continuidad de $t \mapsto F(t)|_C$. Queda demostrado (iii).

Veamos ahora que (iii) $\Rightarrow$ (i). Sea $x \in X$ y considere el compacto $C := \{x\}$. Por (iii), la aplicación

$$t \mapsto F(t)|_C$$

es uniformemente continua, esto implica que

$$t \mapsto F(t)x$$

es continua en K para todo $x \in X$. Por lo tanto, se cumple (i).

Teorema 2. *Sea un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ en un espacio X de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ *es fuertemente continua.*

(ii) $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$, *para todo* $x \in X$.

(iii) *Existe* $\delta > 0, M \geq 1$, *y un subconjunto denso* $D \subset X$ *tal que*

- **(a)** $\|T(t)\| \leq M$ *para todo* $t \in [0, \delta]$.
- **(b)** $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$, *para todo* $x \in D$.

Demostración. Comenzamos con la implicación (iii) $\Rightarrow$ (ii), que es inmediata. En efecto, si $x \in D$, por hipótesis se cumple $\lim\limits_{t \to 0^+} T(t)x = x$, como D es denso en X y $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, se puede extender este límite a todo X utilizando la continuidad en la norma. De esta manera, obtenemos (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $x \in X$ y consideremos una sucesión (t_n) en $\mathbb{R}^+$ tal que $t_n \to t \geq 0$. Queremos mostrar que $T(t_n)x \to T(t)x$. Primero observemos que, si $t = 0$, la afirmación es precisamente la condición de (ii). Supongamos ahora $t > 0$. Escribimos

$$T(t_n)x - T(t)x \;=\; T(t)\big(T(t_n - t)x - x\big),$$

para n suficientemente grande (de modo que $t_n \geq t$). Por hipótesis, $\lim\limits_{s \to 0^+} T(s)x = x$, lo que implica que $T(t_n - t)x \to x$. Dado que $T(t)$ es lineal y acotado, se concluye

$$\lim_{n \to \infty} T(t_n)x = T(t)x.$$

Por lo tanto, $(T(t))_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo y queda demostrada (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Si $(T(t))_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo, en particular $t \mapsto T(t)x$ es continua en $t = 0$ para cada $x \in X$. Esto implica directamente que

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = T(0)x = x.$$

Como hemos establecido que (iii) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (i) y (i) $\Rightarrow$ (ii). Por lo tanto, las tres condiciones (i), (ii) y (iii) son equivalentes.

Cabe destacar que, en muchos casos, la acotación uniforme de los operadores $T(t)$ para $t \in [0, t_0]$ resulta evidente, lo cual permite establecer la fuerte continuidad verificando únicamente la continuidad (por la derecha) de las órbitas ξ_x en $t = 0$ para un conjunto denso de elementos "adecuados" $x \in X$.

Esta observación será util para los resultados que presentaremos más adelante. En efecto, para un semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t \geq 0}$, las órbitas finitas

$$\{T(t)x : t \in [0, t_0]\}$$

constituyen imágenes continuas de un intervalo compacto, resultando así compactas y, por tanto, acotadas para cada $x \in X$. Aplicando el principio de acotación uniforme, se deduce que todo semigrupo fuertemente continuo está uniformemente acotado en cada intervalo compacto, lo que implica acotación exponencial en $\mathbb{R}_+$.

Este hecho nos servirá de base para demostrar el siguiente teorema, que formaliza rigurosamente la relación entre la fuerte continuidad y la acotación uniforme de los semigrupos.

Teorema 3. *Sea $(T(t))_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X. Entonces existen constantes $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \textit{para todo } t \geq 0. \tag{3.3}$$

Demostración. Sea $t \geq 0$ arbitrario. Escribamos $t = n + s$ con $n = \lfloor t \rfloor \in \mathbb{N}$ y $s \in [0, 1)$. Usando la propiedad de semigrupo obtenemos

$$T(t) = T(n + s) = T(1)^n \, T(s).$$

Tomando norma y usando la cota $\|T(s)\| \leq a$ (pues $s \in [0, 1]$) se tiene

$$\|T(t)\| \leq \|T(1)\|^n \, \|T(s)\| \leq a \, \|T(1)\|^n.$$

A continuación definimos una constante base $\beta \geq 1$ que facilite convertir la potencia entera en una exponencial en t. Concretamente, tomamos

$$\beta = \max\{1, \|T(1)\|, a\}.$$

Por definición $\beta \geq 1$, y además $\|T(s)\| \leq a \leq \beta$ y $\|T(1)\| \leq \beta$. Usando estas desigualdades,

$$\|T(t)\| \leq a \, \|T(1)\|^n \leq \beta \, \beta^n = \beta^{n+1}.$$

Como $n = [t] \leq t$ y $\beta \geq 1$, la función $s \mapsto \beta^s$ es creciente en s, por lo que

$$\beta^{n+1} \leq \beta^{t+1} = \beta \, e^{(\ln \beta) \, t}.$$

Por tanto, poniendo

$$M = \beta \quad \text{y} \quad \omega = \ln \beta,$$

obtenemos la cota buscada:

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \qquad \text{para todo } t \geq 0.$$

Observemos, además, que el ínfimo de todos los exponentes ω para los cuales se verifica una estimación del tipo

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0,$$

resulta de especial importancia en el estudio de un semigrupo fuertemente continuo dado. Por tal motivo, se introduce la siguiente definición, que permitirá referirnos a este valor de manera precisa en lo que sigue.

Definición 7. *Sea un semigrupo fuertemente continuo* $\tau = (T(t))_{t \geq 0}$

(i) ω_0 *es una cota superior del semigrupo si*

$$\omega_0 = \omega_0(\tau) = \inf \{\omega \in \mathbb{R} : \textit{ existe } M_\omega \geq 1 \, , \textit{entonces } \|T(t)\| \leq M_\omega \cdot e^{\omega t}, \, \forall \, t \geq 0\}$$

(ii) τ *es acotado si* $\omega = 0$ *en la expresión (3.3), es decir*

$$\|T(t)\| \quad \leq \quad M.$$

(iii) *Semigrupo* τ *es contractible si* $\omega = 0$ *y* $M = 1$ *en (3.3).*

(iv) *El semigrupo τ es Isométrico si cumple la condición $\|T(t)x\| = \|x\|, \forall t \geq 0$ y $x \in X$.*

Ahora analizamos sistemas de dimensión finita. Sea $X = \mathbb{C}^n$ y sea $M_n(\mathbb{C})$ el espacio vectorial de todas las matrices complejas de dimensión $n \times n$.

Teorema 4. *Para toda $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $t \geq 0$, la serie de potencia definida por*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k.A^k}{k!} \tag{3.4}$$

converge absolutamente, y la aplicación

$$\begin{aligned} R_+ &\rightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ t &\rightarrow e^{tA} \end{aligned}$$

es continuo y satisface:

$$\begin{cases} e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \qquad \forall t, s \geq 0 \\ e^{0A} = I \end{cases} \tag{3.5}$$

Demostración. La serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k.\|A^k\|}{k!}$ converge, se puede demostrar, en cuanto al producto de Cauchy de series escalares, que

$$\begin{aligned} e^{tA} \cdot e^{sA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k.A^k}{k!} . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k.A^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{n-k}.A^{n-k}}{(n-k)!} . \frac{s^k.A^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n.A^n}{n!} \\ &= e^{(t+s)A} \end{aligned}$$

$$e^{0A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^k.A^k}{k!} = I$$

por otro lado, $t \rightarrow e^{tA}$ es continua, de *(3.5)*

$$\begin{aligned} e^{(t+h)A} - e^{tA} &= e^{tA} \cdot e^{hA} - e^{tA} \\ &= e^{tA}(e^{hA} - I) \end{aligned}$$

para todo $t, h \in \mathbb{R}$, y $\lim\limits_{h\to 0} e^{hA} = I$. Esto se obtiene de la estimación

$$\begin{aligned} \|e^{hA} - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^k.A^k}{k!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|h|^k.\|A\|^k}{k!} = e^{|h|.\|A\|} - 1 \end{aligned}$$

Este resultado es fundamental en el estudio de la teoría de sistemas lineales, debido a que proporciona una definición rigurosa de la exponencial de una matriz mediante una serie de potencias. La convergencia absoluta asegura la validez de la definición, mientras que las propiedades funcionales descritas reflejan una analogía directa con la exponencial escalar, preservando la estructura algebraica esencial para el tratamiento analítico de soluciones de sistemas diferenciales lineales en espacios vectoriales de dimensión finita.

Ejemplo 1. (i) *El semigrupo generado por una matriz diagonal $A = diag(a_1, ..., a_n)$ viene dado por*

$$e^{tA} = diag(e^{ta_1}, ..., e^{ta_n}).$$

(ii) *Si A es un bloque de Jordan $k \times k$*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{k\times k} \tag{3.6}$$

con valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$.
Descomponga A en una suma $A = D+N$ donde $D = \lambda I$. Entonces la k_esima potencia de N es cero, y la serie de potencias (3.4) (con A reemplazado por N) se convierte

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{k\times k} \tag{3.7}$$

Como D y N conmutan, entonces

$$e^{tA} = e^{t\lambda}e^{tN}.$$

Teorema 5. *Sea $B \in M_n(\mathbb{C})$ y tome una matriz invertible $S \in M_n(\mathbb{C})$. Entonces el semigrupo generado por la matriz $A = S^{-1}BS$ viene dado por*

$$e^{tA} = S^{-1}B^{tB}S.$$

Demostración. Dado: $A^k = S^{-1}.B^k.S$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y porque S, S^{-1} son operadores continuos, se obtiene

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k.A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k.S^{-1}.B^k.S}{k!} \\ &= S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k.B^k}{k!}\right)S \\ &= S^{-1}e^{tB}S. \end{aligned}$$

Este teorema se refiere a que matrices similares (para la definición de similitud) generan semigrupos similares. Porque sabemos que cualquier matriz compleja $n \times n$ es similar a una suma directa de bloques de Jordan, concluimos que cualquier semigrupo matricial es similar a una suma directa de semigrupos.

3.2. Semigrupos de operadores uniformemente continuos

Dado un conjunto de operadores $(T(t))_{t\geq 0}$ definidos en un espacio de Banach de dimensión infinita X, el mapeo $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ es continuo con respecto a la norma del operador. Considere el operador acotado $A \in \mathcal{L}(X)$ y procedemos con un razonamiento similar al presentado en la sección anterior.

Definición 8. *Para todo $A \in \mathcal{L}(X)$ definimos*

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3.8}$$

Dado que e^{tA} sea un operador acotado bien definido en X y por completitud de X se garantiza la convergencia de la serie de potencias que define la exponencial del operador.

Teorema 6. *Sea $A \in \mathcal{L}(X)$ define $(e^{tA})_{t\geq 0}$ por la ecuación (3.8). Entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

(i) *$(e^{tA})_{t\geq 0}$ es un semigrupo en X tal que*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|) \\ t &\rightarrow e^{tA} \end{aligned}$$

es continua.

(ii) *la función*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|) \\ t &\rightarrow T(t) = e^{tA} \end{aligned}$$

es diferenciable y satisface la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}T(t) = AT(t), & \forall t \geq 0, \\ T(0) = I \end{cases} \tag{3.9}$$

inversamente, toda función diferenciable $T(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|)$ que satisface la ecuación (3.8) ya tiene la forma $T(t) = e^{tA}$ para $A = \dot{T}(0) \in \mathcal{L}(X)$.

Demostración. Probaremos que $T(\cdot)$ satisface *(3.8)*, porque la ecuación funcional *(3.5)* implica

$$\begin{aligned}
\frac{T(t+h)-T(t)}{h} &= \frac{e^{(t+h)A}-e^{t(A)}}{h} = \frac{e^{tA}e^{hA}-e^{tA}}{h} \\
&= \frac{e^{tA}(e^{hA}-1)}{h} = \frac{e^{hA}-I}{h}\cdot e^{tA} \\
&= \frac{T(h)-I}{h}\cdot T(t)
\end{aligned}$$

para todo $t, h \in \mathbb{R}$, se debe probar

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h} = A \equiv \lim_{h\to 0}\|\frac{T(h)-I}{h} - A\| = 0.$$

Dado que A es una matriz, sin embargo, sigue porque

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| &= \left\|\frac{I+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k\cdot A^k}{k!} - I}{h} - A\right\| = \left\|\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^k\cdot A^k}{k!}}{h} - A\right\| \\
&= \left\|h\cdot\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{k-1}\cdot A^k}{k!}\right)}{h} - A\right)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{k-1}\cdot A^k}{k!} - A\right\| \\
&= \left\|\frac{h^0\cdot A^1}{1!} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}\cdot A^k}{k!} - A\right\| = \left\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}\cdot A^k}{k!}\right\| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|h|^{k-1}\cdot\|A\|^k}{k!} \\
&= \frac{e^{|h|\cdot\|A\|}-1}{|h|} - \|A\| \to 0 \quad \textit{cuando} \quad h\to 0
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{h\to 0}\left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| \leq \lim_{h\to 0}\frac{|h|^{k-1}\cdot\|A\|^k}{k!} = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{h\to 0}\left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h} = A
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)-T(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\cdot T(t)\\ &= \frac{d}{dt}T(t)|_{t=0}\cdot T(t) = AT(t).\end{aligned}$$

Teorema 7. *Todo semigrupo uniformemente continuo* $(T(t))_{t\geq 0}$ *en el espacio de Banach* X *es de la forma*

$$T(t) = e^{tA}, \quad t\geq 0$$

para algún operador acotado $A\in\mathcal{L}(X)$*.*

Demostración. como $T(\cdot)$ es continua y $T(0)=I$ es invertible, la función $V(\cdot)$ definida por

$$V(t_0) = \int_0^{t_0} T(s)ds$$

es diferenciable con $\dot{V}=T(t)$ esto implica

$$\lim_{t\to 0^+} V(t) = \dot{V}(0) = T(0) = I$$

por lo tanto, $V(t_0)$ es distinto de cero, y por lo tanto es invertible, para algún valor pequeño de $t_0>0$ la ecuación funcional *(3.5)* nos da como resultado

$$\begin{aligned}T(t) &= V(t_0)^{-1}V(t_0)T(t)\\ &= V(t_0)^{-1}\int_0^{t_0} T(t+s)ds\\ &= V(t_0)^{-1}\int_t^{t+t_0} T(s)ds\\ &= V(t_0)^{-1}(V(t+t_0)-V(t)\end{aligned}$$

para todo $t\geq 0$. Por lo tanto $T(\cdot)$ es derivable con la derivada

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T(t) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)-T(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t)-T(0)}{h}\cdot T(t)\\ &= \dot{T}(0)T(t) \qquad \forall t\geq 0\end{aligned}$$

esto demuestra que $T(\cdot)$ satisface la ecuación *(3.8)* con $A=\dot{T}(0)$.

Observaciones 2. *1. El operador A mencionado en el Teorema 7 se identifica de manera única como la derivada de $T(\cdot)$ en el instante 0, es decir, $A = T'(0)$. A este operador se le denomina el* generador *del semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$.*

2. *Como la Definición 8 garantiza que e^{tA} también está definido para $t \in \mathbb{R}$ e incluso para $t \in \mathbb{C}$, concluimos que cualquier semigrupo uniformemente continuo admite una prolongación a un grupo uniformemente continuo $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ o bien $(e^{tA})_{t\in\mathbb{C}}$, según corresponda.*

3. *La propiedad de diferenciabilidad de la aplicación $t \mapsto T(t)$ implica que, para todo $x \in X$, la función*

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow X$$

$$t \mapsto T(t)x$$

resulta ser diferenciable. En consecuencia, el mapeo $x(t) = T(t)x$ constituye la solución única del problema de valor inicial en X, conocido como problema abstracto de Cauchy*:*

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), \quad \forall t \geq 0, \\ x(0) &= x. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ejemplo 2. *En $X = C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|s|\to\infty} f(s) = 0\}$ y para una constante fija $\alpha > 0$, definimos un operador A_α por la diferencia cocientes*

$$A_\alpha f(s) \;=\; \frac{1}{\alpha}(f(s+\alpha) - f(s)), \qquad f \in X, s \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que $A_\alpha \in \mathcal{L}(X)$ con $\|A_\alpha\| = {}^2/_\alpha$, y por tanto se tiene la estimación $\|e^{tA_\alpha}\| \leq e^{2t/\alpha}$ para todo $t \geq 0$.
Sin embargo, e^{tA_α} se puede calcular explícitamente como:

$$e^{tA_\alpha} f(s) \;=\; e^{-t/\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/\alpha)^k}{k!} f(s+k\alpha), \qquad f \in X, s \in \mathbb{R}$$

por lo tanto satisface

$$\|e^{tA_\alpha}\| \;=\; 1$$

para todo $t \geq 0$.

3.3. Generadores de semigrupos

Sabemos que para un semigrupo de un parámetro $(T(t))_{t\geq 0}$ es un espacio de Banach X, la continuidad uniforme implica diferenciabilidad de la aplicación

$$t \to T(t) \in \mathcal{L}(X)$$

la derivada derecha de $T(\cdot)$ en $t = 0$ es un operador acotada A para $T(t) = e^{tA}$ con $t \geq 0$. Se demostrará que la continuidad fuerte de un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ implica la diferenciablidad de los mapas orbitales

$$\xi_x : t \to T(t)x, \quad x \in X$$

en el siguiente teorema se mostrará que la diferenciablidad por derecha en $t = 0$ de ξ_x implica la diferenciabilidad de ξ_x para todo $t > 0$.

Teorema 8. *Sea un semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ y un elemento $x \in X$ Para el mapa orbital*

$$\xi_x : t \to T(t), \quad x \in X$$

las siguientes propiedades son equivalentes.

(i) *$\xi_x(\cdot)$ es diferenciable en $\mathbb{R}_+$.*

(ii) *$\xi_x(\cdot)$ es diferenciable por la derecha en $t = 0$*

Demostración. Para probar la equivalencia, basta con verificar que (i) implica (ii). Supongamos $h > 0$. Entonces, derivando respecto de t, se obtiene

$$\dot{\xi}_x(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\big(T(t+h)x - T(t)x\big).$$

Reordenando,

$$\dot{\xi}_x(t) = T(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\big(T(h)x - x\big) = T(t)\dot{\xi}_x(0).$$

De este modo, se concluye que $\xi_x(\cdot)$ es diferenciable por la derecha en $\mathbb{R}_+$.

Para el caso $h < 0$, observemos que

$$\frac{1}{h}\big(T(t+h)x - T(t)x\big) - T(t)\dot{\xi}_x(0) = T(t+h)\Big(\frac{1}{h}\big(x - T(-h)x\big) - \dot{\xi}_x(0)\Big) + \big(T(t+h) - T(t)\big)\dot{\xi}_x(0).$$

Cuando $h \to 0^+$, el primer término tiende a cero ya que $\|T(t+h)\|$ es uniformemente acotado, mientras que el segundo se anula por la continuidad de $T(\cdot)$.

En consecuencia, $\xi_x(\cdot)$ también es diferenciable por la izquierda y, uniendo ambos casos, la derivada está bien definida y satisface

$$\dot{\xi}_x(t) = T(t)\dot{\xi}_x(0), \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3.11}$$

Sea X el subespacio de los x para los cuales las órbitas ξ_x son diferenciables, la derivada derecha $t = 0$ define un operador A, llamado *generador*. Dicho operador permite, bajo condiciones adecuadas que posteriormente se construya los operadores $T(t)$ interprentándolos formalmente como los exponenciales e^{tA}, esta relación motiva el uso del término *generador* en la definición que veremos a continuación.

Definición 9. *El Generador* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *de un semigrupo fuertemente continuo* $(T(t))_{t\geq 0}$ *en un espacio de Banach* X *es el operador*

$$Ax = \dot{\xi}_x(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)x - x) \tag{3.12}$$

definido para cada x *dentro de su dominio*

$$D(A) \;=\; \{x \in X : \xi_x \text{ es diferenciable en } \mathbb{R}_+\}. \tag{3.13}$$

Observamos a partir del teorema 8 que el dominio $D(A)$ *también se puede describir como el conjunto de todos los elementos* $x \in X$ *para los cuales* $\xi_x(\cdot)$ *es diferenciable por la derecha* $t = 0$*; es decir,*

$$D(A) \;=\; \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(T(h)x - x) \text{ existe} \right\} \tag{3.14}$$

Sea $D(A)$ *un subespacio lineal que forma parte crucial de la definición del generador de* A*. Por lo tanto, debemos representar siempre este par como* $(A, D(A))$*. Sin embargo, por simplicidad, frecuentemente utilizamos solo* A *asumiendo que su dominio es* $D(A)$*, definido en la ecuación (3.14).*

La definición anterior establece de manera precisa el concepto de *generador* de un semigrupo fuertemente continuo, estableciendo su formulación mediante un límite de cocientes diferenciales y caracterizando su dominio como el conjunto de elementos cuyas órbitas son diferenciables en $\mathbb{R}_+$. No obstante, para comprender la relevancia de este operador, es fundamental identificar cómo se vincula de forma directa con el propio semigrupo $(T(x))_{t\geq 0}$. En este sentido, el teorema a continuación formaliza dicha conexión dinámica al establecer propiedades esenciales que muestran cómo A y $T(t)$ se determinan mutuamente.

Teorema 9. *Si* $(A, D(A))$ *genera un semigrupo fuertemente continuo* $(T(t))_{t\geq 0}$*, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $A : D(A) \subseteq X \to X$ *es un operador lineal.*

(ii) *Si* $x \in D(A)$ *entonces* $T(t)x \in D(A)$ *y*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \tag{3.15}$$

para todo $t \geq 0$.

(iii) *Para cada* $t \geq 0$ *y* $x \in X$*, se tiene*

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A).$$

(iv) *Para cada* $t \geq 0$, *se tiene*

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)xds \quad si \quad x \in X \tag{3.16}$$

$$= \int_0^t T(s)Axds \quad si \quad x \in D(A). \tag{3.17}$$

Demostración. La veracidad de la afirmación (i) resulta inmediata. Para demostrar (ii). Sea $x \in D(A)$, de acuerdo con *(3.11)* sabemos que la sucesión

$$\frac{1}{h}\big(T(t+h)x - T(t)x\big)$$

converge hacia $T(t)Ax$ cuando $h \to 0^+$. En consecuencia, se tiene que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\big(T(h)T(t)x - T(t)x\big)$$

existe, y por tanto $T(t)x \in D(A)$, verificándose además que $AT(t)x = T(t)Ax$ de acuerdo con *(3.14)*.
La demostración de (iii) queda contenida en el argumento anterior, por lo que basta concentrarse en (iv). Sea $x \in X$ y $t \geq 0$. Consideremos

$$\frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(s)x\,ds - \int_0^t T(s)x\,ds\right).$$

Al desarrollar, obtenemos

$$\frac{1}{h}\int_0^t \big(T(h)T(s)x - T(s)x\big)\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t \big(T(s+h)x - T(s)x\big)\,ds.$$

Cambiando la variable $r = s + h$, resulta

$$\frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(r)x\,dr - \int_0^t T(s)x\,ds\right).$$

Lo que a su vez se reescribe como

$$\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(r)x\,dr - \int_0^h T(s)x\,ds\right).$$

Cuando $h \to 0^+$, el primer término converge a $T(t)x$ y el segundo a $T(0)x = x$, de modo que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(s)x\,ds - \int_0^t T(s)x\,ds\right) = T(t)x - x.$$

Ahora, si $x \in D(A)$, definimos las funciones

$$s \mapsto \frac{T(h)x - x}{h}.$$

Estas convergen uniformemente en $[0,t]$ hacia Ax cuando $h \to 0^+$, de esta forma,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left(T(h) \int_0^t T(s)x \, ds - \int_0^t T(s)x \, ds \right) = \int_0^t T(s)Ax \, ds.$$

Con ello queda verificado el enunciado, además de corroborar que $T(t)x$ preserva el dominio del generador, se observa también que la definición adoptada se ajusta a un marco general, manteniendo propiedades estructurales relevantes.

Teorema 10. *El generador de un semigrupo fuertemente continuo es un operador lineal cerrado y definido en un dominio denso, el cual determina de manera única el semigrupo.*

Demostración. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach X. Denotemos su generador por $(A, D(A))$. Queremos probar que A es un operador cerrado.
Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que

$$x_n \to x \quad \text{y} \quad Ax_n \to y \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Para $t > 0$, usando la relación obtenida en el teorema anterior, se tiene

$$T(t)x_n - x_n \ = \ \int_0^t T(s)Ax_n \, ds.$$

Dado que $T(\cdot)Ax_n$ converge uniformemente en $[0,t]$, al pasar al límite $n \to \infty$ obtenemos

$$T(t)x - x \ = \ \int_0^t T(s)y \, ds,$$

lo cual implica que A es cerrado.
Por el teorema *9.(iii)*, para todo $t > 0$ se cumple

$$\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds \in D(A),$$

y debido a la continuidad fuerte de $(T(t))_{t\geq 0}$ se sigue que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds = x.$$

Esto prueba que $D(A)$ es denso en X.
Ahora, sea $(S(t))_{t\geq 0}$ otro semigrupo fuertemente continuo con el mismo generador $(A, D(A))$. Para $x \in D(A)$ y $t > 0$, consideremos el mapa

$$\eta_x(s) = T(t-s)S(s)x, \quad 0 \leq s \leq t.$$

El conjunto

$$\left\{ \frac{S(s+h)x - S(s)x}{h} : h \in (0,1] \right\} \cup \{AS(s)x\}$$

es relativamente compacto, lo que permite analizar el cociente de diferencias

$$\frac{1}{h}\big(\eta_x(s+h) - \eta_x(s)\big).$$

Se obtiene

$$\frac{1}{h}\big(\eta_x(s+h) - \eta_x(s)\big) = T(t-s-h)\frac{S(s+h)x - S(s)x}{h} + \frac{1}{h}\big(T(t-s-h) - T(t-s)\big)S(s)x.$$

El primer término converge a $T(t-s)AS(s)x$, mientras que el segundo converge a $-AT(t-s)S(s)x$, por lo que

$$\frac{d}{ds}\eta_x(s) = T(t-s)AS(s)x - AT(t-s)S(s)x = 0.$$

De aquí que $\eta_x(s)$ sea constante, y evaluando en $s = 0$ y $s = t$ se obtiene

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in D(A).$$

Dado que $D(A)$ es denso en X y ambos semigrupos son continuos, se sigue que

$$T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Con esto queda demostrado que el generador determina de manera única al semigrupo.

Teorema 11. *Para un semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach X con generador $(A, D(A))$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) *El generador A está acotado; es decir, existe $M > 0$ tal que $\|Ax\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in D(A)$.*

(b) *El dominio $D(A)$ es todo X.*

(c) *El dominio $D(A)$ es cerrado en X.*

(d) *El semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo.*

En cada caso, el semigrupo está dado por

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

Demostración. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo sobre el espacio de Banach X con generador $(A, D(A))$. Probamos las equivalencias indicadas.

(a) $\Rightarrow$ *(b).* Si A es acotado y definido en $D(A)$, recordando que A es cerrado, la desigualdad de acotamiento permite extender A a todo X. Más directamente, puesto que A es un operador lineal definido en $D(A)$ y acotado, su extensión contínua única está definida en la clausura de $D(A)$. Pero para un generador de C_0-semigrupo se tiene $D(A)$ denso en X, por lo que la extensión está definida en todo X. Así $D(A) = X$.

(b) $\Rightarrow$ *(a).* Si $D(A) = X$ entonces A es un operador lineal definido en todo X y, como generador, es cerrado. Por el teorema del grafo cerrado, un operador cerrado definido en todo X es acotado. Por tanto A es acotado.

(b) $\Rightarrow$ *(c).* Evidente, si $D(A) = X$ entonces $D(A)$ es cerrado.

(c) $\Rightarrow$ *(b).* Para un C_0-semigrupo siempre se tiene que $D(A)$ es denso en X. Si además $D(A)$ es cerrado, su densidad implica $D(A) = X$.

Hasta aquí se ha mostrado que *(a), (b) y (c)* son equivalentes. Falta la equivalencia con *(d).*

(a) $\Rightarrow$ *(d).* Si A es acotado, la serie exponencial en norma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

converge en norma para todo $t \geq 0$ y define operadores acotados e^{tA}. La familia $t \mapsto e^{tA}$ es uniformemente continua en t (en el sentido de norma de operadores) y satisface la ecuación de evolución. Por la unicidad del semigrupo generado por A, se tiene $T(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$; en particular $(T(t))_{t\geq 0}$ es uniformemente continua.

(d) $\Rightarrow$ *(a).* Si $(T(t))_{t\geq 0}$ es uniformemente continua entonces

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0,$$

es decir, el límite $A = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t) - I}{t}$ existe en la norma de operadores y por tanto A es un operador acotado definido en todo X. (Esto muestra también que $D(A) = X$).

Finalmente, cuando cualquiera de las condiciones anteriores se cumple y A es acotado, la serie

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

converge en norma y coincide con $T(t)$ para todo $t \geq 0$.

La propiedad *(b)* indica que el dominio del generador $D(A)$ contiene información esencial sobre el semigrupo, por lo que debe analizarse cuidadosamente. Sin embargo, en numerosos ejemplos es común calcular la expresión Ax para algunos o incluso muchos elementos de $D(A)$, aun cuando resulta complicado describir $D(A)$ de manera precisa. En tales situaciones, resulta útil introducir una noción que permita distinguir entre subespacios “pequeños” y “grandes” de $D(A)$, la cual formalizamos a continuación.

Definición 10. *Un subespacio D del dominio $D(A)$ de operador lineal $A : D(A) \subseteq X \to X$ se llama núcleo de A si D es denso en $D(A)$ para la norma gráfica*

$$\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|.$$

Teorema 12. *Sea $(A, D(A))$ el generador de un semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ sobre un espacio de Banach X. Un subespacio $D \subset D(A)$ que sea denso en X respecto a la norma $\|\cdot\|$ y que sea invariante bajo la acción del semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ es siempre un núcleo de A.*

Demostración. Tomemos un elemento arbitrario $x \in D(A)$. Dado que D es denso en X, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $x_n \to x$ en X cuando $n \to \infty$. Como para cada n, la función $s \mapsto T(s)x_n$ es continua en norma, se concluye que

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x_n\,ds \in D, \quad \forall t > 0.$$

Además, debido a que la función $s \mapsto T(s)x$ es continua en $\|\cdot\|_A$, se cumple

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds - x\right\|_A \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } t \to 0^+.$$

Notamos que

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x_n\,ds\right\|_A \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

para cada $t > 0$, como consecuencia de la continuidad del semigrupo y la convergencia de $x_n \to x$.
Entonces, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario, podemos encontrar un $t_0 > 0$ y un índice $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|x - \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x_n\,ds\right\|_A < \varepsilon, \quad \forall t \in (0, t_0).$$

Lo anterior demuestra que $x \in \overline{D}^{\|\cdot\|_A}$, es decir, x puede aproximarse arbitrariamente bien (en la norma gráfica de A) por elementos de D.

Ejemplos importantes de núcleos están dados por los dominios $D(A^n)$ de las potencias A^n de un generador A.

3.4. Resolvente

Dentro del estudio de operadores lineales y del enfoque abstracto para problemas de evolución, el *resolvente* se presenta como un elemento clave en el análisis. Sea A un operador que actúa como generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ definido en un espacio de Banach X. Para un valor λ perteneciente al conjunto resolvente $\rho(A)$, se denomina resolvente de A al operador

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1},$$

siempre que dicho operador exista y sea lineal y acotado. Esta noción permite, por un lado, caracterizar el espectro $\sigma(A)$ y sus propiedades; y por otro, establecer una relación directa entre las características dinámicas del semigrupo y el comportamiento analítico de la función resolvente.

La teoría de resolventes ofrece un marco general para examinar la estabilidad, estimar tasas de crecimiento y estudiar la regularidad de soluciones en el contexto de ecuaciones diferenciales abstractas. Adicionalmente, el resolvente interviene en la formulación de representaciones integrales de semigrupos, como la que se obtiene mediante la transformada de Laplace inversa, lo que conecta de forma explícita la evolución temporal del sistema con la estructura espectral de su generador. Este enfoque no solo aporta herramientas teóricas, sino que también abre la puerta al diseño de métodos numéricos y aproximaciones útiles en diversas aplicaciones científicas y técnicas.

A continuación presentamos algunas definiciones espectrales básicas para generadores de semigrupos fuertemente continuos. Empezaremos introduciendo las nociones relevantes

Espectro $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ no es Biyectiva}\}$,

Conjunto Resolvente $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ y

Resolvente $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ en $\lambda \in \rho(A)$

para un operador cerrado $(A, D(A))$ en un espacio de Banach X.

Teorema 13. *Sea $(A, D(A))$ el generador de un semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach X. Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $t > 0$, se cumplen las siguientes identidades*

$$e^{-\lambda t}T(t)x - x = (A - \lambda)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\, ds \qquad \text{si } x \in X \tag{3.18}$$

$$= \int_0^t e^{\lambda s}T(s)(A - \lambda)x\, ds \qquad \text{si } x \in D(A). \tag{3.19}$$

Demostración. Consideremos el semigrupo reescalado

$$S(t) = e^{-\lambda t}T(t), \quad t \geq 0.$$

Su generador viene dado por $B := A - \lambda I$, con dominio $D(B) = D(A)$. Aplicando la identidad fundamental de semigrupos al operador $S(t)$ y realizando una integración directa en el intervalo $[0, t]$, se obtienen las expresiones anteriores.

Este teorema proporciona la base técnica para expresar el resolvente del generador a través de integrales del semigrupo. En particular, la identidad del inciso *(i)* del Teorema *14* se obtiene considerando el límite

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt,$$

interpretado como integral impropia. El resultado vincula de manera explícita la evolución temporal descrita por $(T(t))_{t\geq 0}$ con la estructura espectral del operador A. Así, el teorema actúa como un puente natural entre las propiedades dinámicas del semigrupo y la teoría del resolvente, permitiendo derivar expresiones como las que aparecen en el Teorema *14*, donde se establecen condiciones de existencia, acotación y representación integral de $R(\lambda, A)$.

Teorema 14. *Sea $T(t)_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Banach X y tomar constantes $w \in \mathbb{R}, M \geq 1$ tal que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \tag{3.20}$$

para $t \geq 0$. Para el generador $(A, D(A))$ de $(T(t))$ se cumplen las siguientes propiedades

(i) *Si $\lambda \in C$ tal que $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds$ existe para todo $x \in X$, entonces $\lambda \in \rho(A)$ y $R(\lambda, A) = R(\lambda)$.*

(ii) *Si $Re\lambda > w$, entonces $\lambda \in \rho(A)$ y el resolvente viene dado por la expresión integral en (i).*

(iii) *Si $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{M}{Re\lambda - w}$ para todo $Re\lambda > w$.*

La fórmula para $R(\lambda, A)$ en (i) se denomina representación integral del resolvente. Por eso, la integral debe entenderse como una integral de Riemann impropia; es decir

$$R(\lambda, A)x = \lim_{t\longrightarrow\infty} \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\,ds \tag{3.21}$$

para todo $x \in X$. Teniendo en cuenta esta interpretación, escribimos frecuentemente

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds. \tag{3.22}$$

Demostración. Supongamos que $\lambda = 0$. Entonces, para $x \in X$ un elemento arbitrario y $h > 0$, de la definición del operador $T(t)$, consideremos la expresión

$$\frac{T(h) - I}{h}R(0)x = \frac{1}{h}\int_0^\infty \big(T(s+h) - T(s)\big)x\,ds.$$

Al separar los términos y aplicar propiedades básicas de la integral, se obtiene

$$\frac{T(h) - I}{h}R(0)x = \frac{1}{h}\left[\int_0^\infty T(s+h)x\,ds - \int_0^\infty T(s)x\,ds\right] = -\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds.$$

Al hacer tender $h \to 0^+$, se concluye que el rango de $R(0)$ se encuentra contenido en el dominio de A, es decir,

$$\mathrm{rg}(R(0)) \subseteq D(A),$$

y además,

$$AR(0) = -I.$$

Por otro lado, para todo $x \in D(A)$, se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t T(s)x\, ds = R(0)x,$$

y

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t T(s)Ax\, ds = R(0)Ax.$$

De acuerdo con el teorema 10, estas igualdades implican que

$$R(0)Ax = AR(0)x = -x,$$

lo cual demuestra que

$$R(0) = (-A)^{-1}.$$

Por lo tanto, se verifica la primera parte del resultado.

Las afirmaciones *(ii)* y *(iii)* del teorema se deducen directamente de *(i)* junto con la estimación siguiente

$$\left\| \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)\, ds \right\| \leq M \int_0^t e^{-(\operatorname{Re}\lambda - w)s}\, ds.$$

Para $\operatorname{Re}\lambda > w$, el término del lado derecho converge, cuando $t \to \infty$, a

$$\frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w}.$$

De este modo, se establece la expresión integral del resolvente y la cota mencionada en el inciso *(iii)*, completando así la demostración.

La representación integral anterior ahora se puede utilizar para representar y estime las potencias de $R(\lambda, A)$.

Teorema 15. *Para el generador $(A, D(A))$ de un semigrupo fuertemente continuo $T(t)_{t\geq 0}$ que satisface*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \qquad \text{para todo } t \geq 0$$

se tiene, para $Re\lambda > w$ y $n \in \mathbb{N}$ que

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)x \tag{3.23}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\lambda s} T(s)x\, ds \tag{3.24}$$

para todo $x \in X$. En particular, las estimaciones

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - w)^n} \tag{3.25}$$

se cumple para todos los $n \in \mathbb{N}$ y $Re\lambda > w$.

Demostración. La ecuación *3.23* se mantiene válida para cualquier operador que posea un conjunto resolvente no vacío. En efecto, segun el Teorema *14.(i)* implica

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}R(\lambda,A)x &= \frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds \\ &= -\int_0^\infty se^{-\lambda s}T(s)x\,ds\end{aligned}$$

para todo $x \in X$ y $Re\lambda > w$.
Aplicando un razonamiento inductivo, se obtiene la relación indicada en 3.24.
Finalmente, la estimación *3.25* se deriva del siguiente análisis

$$\begin{aligned}\|R(\lambda,A)^n x\| &= \frac{1}{(n-1)!} \quad . \left\|\int_0^\infty s^{n-1}e^{-\lambda s}T(s)x\,ds\right\| \\ &\leq \frac{M}{(n-1)!} \quad . \quad \int_0^\infty s^{n-1}e^{(w-Re\lambda)s}\,ds\|x\|.\end{aligned}$$

Evaluando la integral resulta que

$$\|R(\lambda,A)^n x\| = \frac{M}{(Re\lambda - w)^n} \quad . \quad \|x\|,$$

para todos $x \in X$.

En la teoría de semigrupos, ciertos ejemplos concretos permiten ilustrar de forma clara cómo un operador genera la evolución de un sistema en el tiempo. Uno de los casos más representativos es el *semigrupo de traslación*, el cual describe un desplazamiento uniforme de las funciones sobre la recta real. Este tipo de semigrupos aparece en la formulación de soluciones para ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. A continuación, presentamos su definición formal.

Definición 11. *En el marco de la teoría de semigrupos, consideremos la familia de operadores de traslación hacia la izquierda definida por*

$$T(t)f(s) = f(s+t), \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Esta familia forma un semigrupo fuertemente continuo (o, en sentido más general, un semigrupo) en los espacios $C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})$ *y* $L^p(\mathbb{R})$*, donde* $1 \leq p < \infty$*. En cada caso, el generador* $(A, D(A))$ *coincide con el operador de diferenciación, aunque su dominio debe adaptarse a la naturaleza del espacio en el que actúa.*

Ejemplo 3. *En el espacio*

$$X = \{f \in C_0(\mathbb{R}_+) : f \text{ continuamente diferenciable en } [0,1]\}$$

dotado de la norma

$$\|f\| := \sup_{s\in\mathbb{R}_+} |f(s)| + \sup_{s\in[0,1]} |f'(s)|$$

consideremos el operador $(A, D(A))$ *definido por*

$$Af \quad = \quad f' \quad \text{para } f \in D(A) = \{f \in C_0^1(\mathbb{R}_+) : f' \in X\}$$

entonces A *es cerrado y densamente definido, su resolvente existe para* $Re\lambda > 0$, *y se expresa por*

$$(R(\lambda, A)f)(s) \quad = \quad \int_s^\infty e^{-\lambda(\tau - s)} f(\tau) d\tau \quad \text{para } f \in X, s \geq 0.$$

Suponemos ahora que A *genera un semigrupo fuertemente continuo* $(T(t))_{t\geq 0}$ *en* X. *Para* $f \in D(A)$ *y* $0 \leq s, t$ *definimos*

$$\xi(\tau) \quad = \quad (T(t-\tau)f)(s+\tau), \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

que es una función diferenciable. Su derivada satisface

$$\dot{\xi}(\tau) \quad = \quad -(T(t-\tau)Af)(s+\tau) + (T(t-\tau)f')(s+\tau) = 0$$

y por lo tanto

$$(T(t)f)(s) \quad = \quad \xi(0) = \xi(t) = f(s+t).$$

Esto prueba que $(T(t))_{t\geq 0}$ *debe ser el semigrupo de traslación(izquierda).*

Teorema 16. *El generador del semigrupo de traslación hacia la izquierda* $(T_l(t))_{t\geq 0}$ *en el espacio* X *está dado por*

$$Af = f'$$

con dominio:

(i) $D(A) = \{\ f \in C_{ub}(\mathbb{R}) : f$ *diferenciable y* $f' \in C_{ub}(\mathbb{R})\}$.
Si $X : c_{ub}\mathbb{R}$

(ii) $D(A) = \{\ f \in L^p(\mathbb{R}) : f$ *absolutamente continua y* $f' \in L^p(\mathbb{R})\}$.
Si $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Sea $(B, D(B))$ el generador de $(T_l(t))_{t\geq 0}$ se demostrará que B es una restricción del operador $(A, D(A))$. Sea $(T_l(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo de contracción en X, por el teorema *14.(ii)*, se tiene que $1 \in \rho(B)$. por otro lado se sabe que $1 \in \rho(A)$, y por lo tanto la inclusión $B \subseteq A$ implicará $A = B$.

(i) Sea $f \in D(B)$ y como B genera $T_l(t)$ se tiene que

$$Bf = \left[\frac{d}{dt} T_l(t) f\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt} f(t + .)\right]_{t=0} = f'$$

Entonces $f \in D(A)$, así $D(B) \subseteq D(A)$ y $A_{|D(B)} = B$. Por lo tanto, $A = B$.

(ii) Sea $f \in D(B)$ y $g = Bf \in L^p(\mathbb{R})$, la integración en intervalos compactos es continua en $L^p(\mathbb{R})$, entonces para cada $a, b \in \mathbb{R}$ que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_a^{b+h} f(s)ds - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(s)ds &= \int_a^b d\frac{f(s+h)-f(s)}{h}ds \\ &= \int_a^b f'(s)ds \\ &= \int_a^b Bf(s)ds\end{aligned}$$

converge $\displaystyle\int_a^b g(s)ds$ a medida que $h \to 0^+$. Sin embargo, el lado izquierdo converge a $f(b) - f(a)$ para casi todos los a, b. Redefiniendo f sobre un conjunto nulo obtenemos

$$f(b) = \int_a^b g(s)ds + f(a), b \in \mathbb{R}$$

que es una función absolutamente continua con derivada (casi en todas partes) igual a g. Nuevamente se demuestra que $D(B) \subseteq D(A)$ y $A_{|D(B)} = B$. Se deduce que $A = B$ como arriba. Finalizando esta demostración, se tiene la fórmula explícita para el operador diferenciación A con dominio "máximo" $D(A)$ en el resultado anterior.

Teorema 17. *Sea $X \in \{C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R}),\ L^p(\mathbb{R})\ (1 \leq p < \infty)\}$ y sea*

$$(T(t)f)(s) = f(s+t), \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

el semigrupo de traslación hacia la izquierda en X con generador $(A, D(A))$ dado por la derivada espacial. Entonces, para $\operatorname{Re}\lambda > 0$ se tiene, para toda $f \in X$ y todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\big(R(\lambda, A)f\big)(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, f(s+t)\, dt = \int_s^\infty e^{-\lambda(\tau - s)}\, f(\tau)\, d\tau.$$

Demostración. *(1)* Definamos para $\operatorname{Re}\lambda > 0$ el operador lineal

$$(\mathcal{R}_\lambda f)(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, (T(t)f)(s)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, f(s+t)\, dt.$$

Como $\|T(t)\| = 1$ en ambos espacios X, se obtiene la cota

$$\|\mathcal{R}_\lambda f\|_X \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda\, t}\, \|T(t)f\|_X\, dt = \|f\|_X \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda\, t}\, dt = \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}\, \|f\|_X,$$

de modo que $\mathcal{R}_\lambda : X \to X$ es acotado.
(2) Primero verificamos la identidad sobre un subconjunto denso. En $L^p(\mathbb{R})$, tomamos $f \in$

$C_c^\infty(\mathbb{R})$, en $C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})$, tomamos $f \in C_b^1(\mathbb{R})$.
Por cambio de variable $\tau = s + t$,

$$(\mathcal{R}_\lambda f)(s) = \int_s^\infty e^{-\lambda(\tau - s)} f(\tau)\, d\tau.$$

Usando diferenciación bajo el signo integral (válida para estos f) se obtiene

$$\frac{d}{ds}(\mathcal{R}_\lambda f)(s) = \lambda \int_s^\infty e^{-\lambda(\tau - s)} f(\tau)\, d\tau - f(s) = \lambda(\mathcal{R}_\lambda f)(s) - f(s).$$

Como $Af = f'$ (con el dominio correspondiente), esto equivale a

$$(\lambda I - A)\,\mathcal{R}_\lambda f = f.$$

(3) El paso anterior vale para un conjunto denso de X. Dado que $\mathcal{R}_\lambda$ es acotado y $(\lambda I - A)$ es cerrado en X, la identidad $(\lambda I - A)\mathcal{R}_\lambda f = f$ se prolonga, por continuidad, a todo $f \in X$. Por unicidad del inverso de $(\lambda I - A)$, concluimos que $\mathcal{R}_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A)$.
(4) Además, la cota anterior muestra $\|R(\lambda, A)\| \leq (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$, consistente con el hecho de que el semigrupo de traslación tiene cota de crecimiento $\omega = 0$.

Definición 12 (Semigrupos de Traslación.)**.** *Consideremos el semigrupo de traslación hacia la izquierda de la definición anterior sobre el espacio $X = L^1(\mathbb{R})$. Entonces el subespacio cerrado*

$$Y = \{\ f \in L^1(\mathbb{R}) : f(s) = 0 \quad \textit{para } s \geq 1\}$$

que es isomorfo a $L^1(-\infty, 1)$, es $(T(t))_{t\geq 0}$ - invariante. El generador del semigrupo del subespacio $(T(t)_|)_{t\geq 0}$ es

$$A_| f = f'$$

con dominio

$$D(A_|) = \{\ f \in L^1(\mathbb{R}) : f \ \textit{ es absolutamente continuo },\ f' \in L^1(\mathbb{R}) \textit{ y } f(s) = 0 \textit{ para } s \geq 1\}.$$

En Y y para el semigrupo de subespacios $(T(t)_|)_{t\geq 0}$, el espacio

$$Z = \{\in f \in Y : f(s) = 0 \qquad \textit{para } 0 \leq s \leq 1\}$$

es de nuevo cerrado e invariante. El espacio cociente ${}^Y/_Z$ es isomorfo a $L^1[0,1]$, y el semigrupo cociente es isomorfo al semigrupo de traslación nilpotente (izquierdo). Por lo tanto, obtenemos para su generador $A \mid /$ que

$$A_{|/} f = f'$$

con dominio

$$D(A_{|/}) = \{\ f \in L^1[0,1] : f \ \textit{ es absolutamente continuo},\ f' \in L^1[0,1] \ \textit{y } f(1) = 0\}\ .$$

Como en el caso anterior, su resolvente puede determinarse explícitamente utilizando (3.21). Obtenemos para cada $\lambda \in C$ que

$$(R(\lambda, A_{|/})f)(s) = \int e^{-\lambda(\tau - s)} f(\tau)\, d\tau \qquad \forall \in L^1[0,1], s \in [0,1]. \tag{3.26}$$

En los ejemplos anteriores siempre hemos partido de un semigrupo explícito y luego hemos identificado su generador. En los dos ejemplos finales nos fijamos en los operadores diferenciales (de segundo orden) y demostramos por cálculo directo que generan semigrupos fuertemente continuos.

3.5. Teorema de generación

La *teoría de generación* de semigrupos constituye un marco de gran relevancia en el análisis funcional moderno, al proporcionar herramientas para identificar y caracterizar operadores lineales que describen la evolución temporal de sistemas dinámicos en espacios de Banach y Hilbert. Este enfoque permite representar soluciones de ciertos problemas de valor inicial mediante semigrupos fuertemente continuos, lo que facilita el estudio de propiedades como la estabilidad, la regularidad y el comportamiento asintótico de dichas soluciones. Una parte importante de esta teoría se centra en operadores no acotados, cuya complejidad analítica exige técnicas específicas para garantizar su papel como generadores.

Dentro de los resultados más relevantes de este campo se encuentra el *Teorema de Hille–Yosida*, el cual establece condiciones necesarias y suficientes para que un operador lineal densamente definido sea el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones. Este teorema constituye un vínculo directo entre la teoría abstracta de operadores y la resolución de problemas aplicados, especialmente en el contexto de las ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales.

Se caracteriza los operadores lineales que pueden actuar como generadores de un semigrupo fuertemente continuo y describir el proceso mediante el cual dicho semigrupo es generado.

Fórmulas exponenciales

El estudio que aquí se desarrolla inicia con los distintos enfoques existentes para la caracterización de las funciones exponenciales, considerando tanto su formulación clásica como variantes que surgen de diferentes contextos analíticos. A partir de esta base conceptual, se explora la posibilidad de extender dichas construcciones a espacios de Banach de dimensión infinita, haciendo especial hincapié en los desafíos que plantea el tratamiento de operadores no acotados. En esta línea, se identifican y presentan expresiones que, por su estructura, ofrecen un potencial significativo para describir de manera rigurosa la evolución de operadores en la forma e^{tA}.

1. La serie de potencias puede expresarse, en el contexto matricial, de la forma

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n. \tag{3.27}$$

Cuando A es un operador no acotado, no es prudente suponer de antemano la convergencia de esta representación. En efecto, se conocen ejemplos de semigrupos fuertemente continuos cuyo generador A provoca que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x$$

no sea convergente.

2. Sea la expresión

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n} A\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n} A\right)^{-n}$$

la primera expresión involucra potencias del operador no acotado A, lo que implica que raramente convergerá, es posible reformular la segunda expresión utilizando los operadores resolventes $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ de la siguiente manera:

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} \, R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right]^n. \tag{3.28}$$

De esta manera, se deriva una fórmula en la que únicamente aparecen potencias de operadores acotados. Hille, en 1948, propuso el uso de esta fórmula y demostró que, bajo condiciones adecuadas, el límite existe y define un semigrupo fuertemente continuo.

3. Dado que la construcción de la exponencial en el caso de operadores acotados es un resultado ampliamente establecido, una estrategia consiste en considerar una familia $(A_n)_{n\in\mathbb{R}}$ de operadores acotados que se aproximen a A. Con esta idea, se plantea que

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} e^{tA_n} \tag{3.29}$$

pueda existir y, además, que dicho límite proporcione la definición de un semigrupo fuertemente continuo.

Teorema de Hille-Josida

El objetivo de esta sección es demostrar el resultado más importante de la teoria de semigrupos C_0, el teorema de *Hille-Yosida*. Más concretamente, presentaremos una condición necesaria y suficiente para que operador lineal A genere un semigrupo C_0 de contracciones. Si $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal, el conjunto resolvente $\rho(A)$ es el conjunto de todos aquellos números complejos A, llamados números regulares, para lo que $R(\lambda I - A)$ es denso en X y $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ es continuo de $R(\lambda I - A)$ a X.

Teorema de generación (Caso de contracción, Hille, yosida, 1948)

Teorema 18. *Un operador lineal $(A, D(A))$ es un espacio de Banach X, es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones si y solo si:*

(a) *A es densamente definido y cerrado.*

(b) *$(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ y para cada $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{3.30}$$

Demostración. Si $(A, D(A))$ es el generador infinitesimal de semigrupo C_0 de contracciones $\{S(t) \geq 0\}$, A es densamente definido y cerrado. Por tanto *(a)* se cumple. Sea $\lambda > 0, x \in X$ y definimos

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} s(t)x\, dt. \tag{3.31}$$

La integral del lado derecho de la igualdad *(3.31)* es convergente. En efecto, para cada $a, b \geq 0$, $a \leq b$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b e^{-\lambda t} S(t)x\, dt \right\| &\leq \int_a^b e^{-\lambda t} \|S(t)\| \|x\|\, dt \\ &\leq \int_a^b e^{-\lambda t} \|x\|\, dt \\ &= \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{\lambda} \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

en consecuencia $\left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x\, dt \right\| \leq \dfrac{e^{-\lambda(0)} - e^{-\lambda(+\infty)}}{\lambda} \cdot \|x\| = \dfrac{1}{\lambda}\|x\|$

la integral converge, luego

$$\|R(\lambda)x\| = \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x\, dt \right\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|S(t)\| \|x\|\, dt = \frac{1}{\lambda}\|x\|.$$

por lo tanto

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Por otro lado $R(\lambda)$ coincide con $R(\lambda, A)$. Para ello mostraremos que $R(\lambda)$ es el inverso derecho e inverso izquierdo del operador $\lambda I - A$. Sea $x \in X$ y $h > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(S(h) - I)R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} e^{\lambda h} S(u)x\, du - \int_0^h e^{-\lambda u} e^{\lambda h} S(u)x\, du \right) \\ &= \frac{1}{h}\left(e^{\lambda h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} S(u)x\, du - e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda u} S(u)x\, du \right) \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x\, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x\, dt. \end{aligned}$$

Demostraremos la converge a $\lambda R(\lambda)x - x$,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(S(h)-I)R(\lambda)x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\lambda h}-1}{h} R(\lambda)x - \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda h}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x\,dt \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\lambda h}-1}{h} R(\lambda)x - \lim_{h\to 0^+} e^{\lambda h}(e^{-\lambda h} S(h)x) \\
&= \lambda R(\lambda x) - S(0)x \\
&= \lambda R(\lambda x) - x
\end{aligned}$$

resulta que $R(\lambda)x \in D(A)$ y

$$AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$$

lo que demuestra que

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I$$

entonces, $R(\lambda)$ es el inverso a la derecha de $\lambda I - A$.

Sea $x \in D(A)$, observamos que

$$\begin{aligned}
R(\lambda)Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)Ax\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{dt}(S(t)x)\,dtb \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} S(t)x - x + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x\,dt \\
&= \lambda R(\lambda)x - x
\end{aligned}$$

lo que es equivalente a la siguiente igualdad

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = I$$

lo que demuestra que $R(\lambda)$ es el inverso a la izquierda de $\lambda I - A$, y así se cumple la *prueba de necesidad.*

Observaciones 3. *Utilizando argumentos similares, se demostrará que siempre que A genera un semigrupo C_0 de contracciones, entonces $\{\lambda \in \mathbb{C}, Re\lambda > 0\} \in \rho(A)$ y para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re\lambda > 0$, tenemos*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Definición 13. *Sea $(A, D(A))$ un operador lineal que satisface* (a) *y* (b) *en el teorema 18 y sea $\lambda > 0$. El operador $A_\lambda : X \to X$, definido por $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$, se denomina* aproximación de Yosida de A.

La Definición *13* introduce la aproximación de Yosida como una herramienta para estudiar el comportamiento de un operador lineal no acotado a través de operadores acotados dependientes de un parámetro $\lambda > 0$. Esta construcción permite establecer propiedades de convergencia que son recogidas en el Lema *1*, donde se describen límites fundamentales y relaciones entre el operador original A y su aproximación A_λ.

Lema 1. *Sea* $(A, D(A))$ *un operador lineal que satisface* (a) *y* (b) *en el teorema 18 entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x \tag{3.32}$$

para cada $x \in X$

$$A_\lambda x = \lambda^2 R(\lambda, A)x - \lambda x \tag{3.33}$$

para cada $x \in X$ *y*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax \tag{3.34}$$

para cada $x \in D(A)$.

Demostración. Sea $x \in D(A)$ y $\lambda > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|AR(\lambda, A)x\| \\ &= \|R(\lambda, A)Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$$

para cada $\lambda \in D(A)$. Como $D(A)$ es denso en X y $\|\lambda R(\lambda, A)\| \geq 1$ de la última relación se deduce *(3.32)*. Para probar *(3.33)*, observemos que tenemos

$$\begin{aligned} \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I &= \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda(\lambda I - A)R(\lambda, A) \\ &= \lambda AR(\lambda, A) \\ &= A_\lambda \end{aligned}$$

por último. Si $x \in D(A)$ por *(3.32)* tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda, A)x \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax \\ &= Ax \end{aligned}$$

con lo que concluye el lema *1*.

A partir de los resultados obtenidos en el Lema *1*, donde se establecen propiedades de convergencia y relaciones básicas entre A y sus aproximaciones A_λ, es posible avanzar hacia un análisis más detallado de su comportamiento dinámico. El Lema *2* se centra en caracterizar a A_λ como generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo, incorporando además estimaciones normativas que vinculan la acción de e^{tA_λ} con la de las aproximaciones A_λ y A_μ.

Lema 2. *Sea* $(A, D(A))$ *un operador lineal que satisface* (a) *y* (b) *en el teorema* 18. *Entonces para cada* $\lambda > 0$, A_λ *es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo* $\{e^{tA_\lambda}, t \geq 0\}$ *que satisface*

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1 \tag{3.35}$$

para cada $t \geq 0$. *Además, para cada* $x \in X$ *y cada* $\lambda, \mu > 0$, *tenemos*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|. \tag{3.36}$$

Demostración. Como $A_\lambda \in \mathcal{L}(x)$, se deduce que genera un semigrupo uniformemente continuo $\{e^{tA_\lambda}, t \leq 0\}$. Para comprobar *(3.35)*, observemos que por *(3.33)* y (a), tenemos

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\| &= \|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A) - t\lambda I}\| \leq \|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\|\|e^{-t\lambda I}\| \\ &\leq e^{t\lambda^2 \|R(\lambda,A)\|}\, e^{-t\lambda} \leq e^{t\lambda}\, e^{-t\lambda} \\ &= 1 \end{aligned}$$

como A_λ, A_μ, e^{tA_λ} y e^{tA_μ} conmutan entre sí, tenemos

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{stA_\lambda}\, e^{(1-s)tA_u}x)\, ds\right\| \\ &\leq \int_0^1 t\left\|e^{stA_\lambda}\, e^{(1-s)tA_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\right\| ds \\ &\leq t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\|. \end{aligned}$$

Demostración. ***la suficiencia del teorema (18)*** De *(3.34)* y *(3.36)* se deduce que para cada $t > 0$, existe un operador lineal $S(t) : D(A \subseteq X \to X)$ tal que, para cada $x \in D(A)$

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = S(t)x,$$

uniformemente en subconjuntos compactos en $\mathbb{R}_+$, por *(3.35)* se deduce

$$\|S(t)x\| \leq \|x\|,$$

para cada $t \geq 0$ y $x \in D(A)$. Como $D(A)$ es denso en X, se infiere que $S(t)$ admite extensión continua en todo el espacio X de manera que se obtiene una familia de operadores lineales acotados, la cual forma un semigrupo, que denotaremos tambien por $\{S(t); t > 0\}$ para simplificar la notación es evidente que esta familia de operadores satisface las propiedades requeridas para un semigrupo.

$$\|S(t)\| \leq 1.$$

Además, para cada $t > 0$ y $x, y \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} \|S(t)x - x\| &\leq \|S(t)x - S(t)y\| + \left\|S(t) - e^{tA_\lambda}y\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}y - y\right\| + \|y - x\| \\ &\leq \left\|S(t)y - e^{tA_\lambda}y\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}y - y\right\| + 2\|y - x\|. \end{aligned}$$

Sea $T > 0$ y $\varepsilon > 0$. fijamos $y = x_\varepsilon \in D(A)$, con $\|x - x_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ y λ suficientemente grande, tal que

$$\left\|S(t)x_\varepsilon - e^{tA_\lambda}x_\varepsilon\right\| \leq \varepsilon,$$

para cada $t \in [0, T]$, por esta desigualdad, tenemos

$$\|S(t)x - x\| \leq 3\varepsilon + \left\|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\right\|, \tag{3.37}$$

dado que $\{e^{tA_\lambda}, t \geq 0\}$ es un semigrupo uniformemente continuo, para el mismo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que $\left\|e^{tA_\lambda} - I\right\| \leq \varepsilon$, para cada $t \in (0, \delta(\varepsilon))$. En consecuencia

$$\left\|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\right\| \leq \left\|e^{tA_\lambda} - I\right\| \|x_\varepsilon\| \leq \varepsilon \|x_\varepsilon\|,$$

para cada $t \in (0, \delta(\varepsilon))$. Dado que $\{x_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ está acotado, esta desigualdad junto con *(3.37)*, muestra que $\{S(t), t \geq 0\}$ es un semigrupo de clase C_0. Para concluir la demostración, se muestra que el generador infinitesimal $(B, D(B))$, de este semigrupo coincide con $(A, D(A))$. Para ello, sea $x \in D(A)$ y $h > 0$, tenemos

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}A_\lambda x = S(t)Ax,$$

uniformemente en semigrupos compactos en $\mathbb{R}_+$. En efecto

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - S(t)Ax\right\| &\leq \left\|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - e^{tA_\lambda}Ax\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}Ax - S(t)Ax\right\| \\
&\leq \left\|e^{tA_\lambda}\right\| \|A_\lambda x - Ax\| + \left\|e^{tA_\lambda}Ax - S(t)Ax\right\|,
\end{aligned}$$

la relación anterior, junto con *(3.34)* y con las conclusiones parciales anteriores, demuestra que

$$\begin{aligned}
S(h)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty} \left(e^{hA_\lambda}x - x\right) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^h e^{tA_\lambda}A_\lambda x\, dt \\
&= \int_0^h S(t)Ax\, dt.
\end{aligned}$$

si se divide a ambos lados esta igualdad por h y se deja que $h \to 0$ por valores positivos, se deduce que $x \in D(B)$ y $Bx = Ax$. Para finalizar demostramos que $D(A) = D(B)$. Como B es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones, de la necesidad se deduce que $1 \in \rho(B)$, en consecuencia $I - B$ es invertible y $(I - b)^{-1} X = D(B)$. Como $(I - B)D(A) = (I - A)D(A)$ y por (b), $(I - A)D(A) = X$, resulta que $(I - B)D(A) = X$ o equivalentemente $(I - B)_{-1} X = D(A)$. Por lo tanto $D(A) = D(B)$.
Lo que completa la demostracion de teorema *18*.

3.6. Interpolación y extrapolación de espacios para semigrupos

La teoría de semigrupos de operadores requiere, en diversos contextos, trabajar con espacios intermedios entre el dominio de un operador y el espacio base, así como con extensiones más allá de este último. Las técnicas de *interpolación y extrapolación* proporcionan un marco sistemático para construir y analizar dichos espacios, permitiendo describir con mayor precisión el comportamiento de los semigrupos y sus generadores. Estos métodos resultan especialmente útiles para estudiar la regularidad de las soluciones y la extensión del dominio de definición de los operadores implicados.

En esta parte se analiza la configuración de la familia de semigrupos $(T_n(t))_{t\geq 0}$, definida sobre una escala de espacios X_n, los cuales corresponden a espacios de Sobolev vinculados al generador A de un semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach X. Se demuestra que dichos semigrupos presentan una relación de similitud mutua y se examina cómo esta característica posibilita extender la construcción a índices negativos, lo que conduce a la aparición de los denominados espacios de extrapolación.

Tras exponer el marco teórico y el papel que desempeñan las escalas de espacios en el estudio de semigrupos, resulta natural precisar de manera rigurosa la construcción de los espacios asociados al generador A. En este sentido, la Definición *14* formaliza la noción de los espacios X_n mediante normas adaptadas, estableciendo así la base para el análisis posterior de sus propiedades y su relación con el semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$.

Definición 14. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x \in D(A^n)$, se introduce la $n-$norma mediante la relación*

$$\|x\|_n = \|A^n x\|$$

definimos el espacio

$$X_n = (D(A^n), \|\cdot\|_n)$$

al que denominaremos el espacio de Sobolev de orden n asociado a semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$. La restricción de los operadores $T(t)$ al espacio X_n se denotará por

$$T_n(t) = T(t)_{|x_n}$$

las restricciones $T_n(t)$, al restringirse al espacio X_n muestra un comportamiento especialmente bien estructurado, lo que facilita su tratamiento analítico.

Partiendo de la Definición *14*, en la que se presenta la *n-norma* y el espacio de Sobolev X_n vinculado al semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, se dispone de una estructura adecuada para abordar su análisis funcional. Esta construcción permite, además, establecer de manera precisa las propiedades recogidas en el teorema *19*, que abarcan desde la completitud de X_n hasta la generación de semigrupos fuertemente continuos y la descripción del operador generador asociado.

Teorema 19. *A partir de las definiciones previamente establecidas, se obtiene los siguientes resultados*

(i) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, el espacio X_n es un espacio de Banach.*

(ii) *Los operadores $T_n(t)$ generan un semigrupo fuertemente continuo $(T_n(t))_{t\geq 0}$ sobre el espacio X_n.*

(iii) *El generador A_n del semigrupo $(T_n(t))_{t\geq 0}$ está dado por la parte del operador A en el espacio X_n; es decir,*

$$A_n x = Ax \quad \textit{para todo} \quad x \in D(A_n)$$

$$D(A_n) \;=\; \{x \in X_n : Ax \in X_n\} = D(A^{n+1}) = X_{n+1}.$$

Demostración. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en X con constantes de crecimiento $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$, es decir $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ y $Ax = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t}$ para $x \in D(A)$. Para $n \in \mathbb{N}$ fijado, consideramos $X_n = D(A^n)$ con la norma $\|x\|_n := \|A^n x\|$ y $T_n(t) = T(t)|_{X_n}$.

(i) X_n es de Banach. Sea (x_k) de Cauchy en $(X_n, \|\cdot\|_n)$. Entonces $(A^n x_k)$ es de Cauchy en X, luego $A^n x_k \to y$ en X para algún $y \in X$. Como A es cerrado, toda potencia A^n es cerrada; por tanto existe $x \in D(A^n)$ tal que $x_k \to x$ en X y $A^n x = y$. En consecuencia, $\|x_k - x\|_n = \|A^n x_k - A^n x\| \to 0$, lo que prueba la completitud de X_n.

(ii) $(T_n(t))_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo en X_n. Se sabe que $T(t)$ deja invariante $D(A)$ y $AT(t)x = T(t)Ax$ para $x \in D(A)$. Por inducción, $T(t)$ deja invariante $D(A^n)$ y

$$A^k T(t)x = T(t)A^k x, \qquad x \in D(A^k),\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Para $x \in X_n$,

$$\|T_n(t)x\|_n = \|A^n T(t)x\| = \|T(t)A^n x\| \leq Me^{\omega t}\,\|A^n x\| = Me^{\omega t}\,\|x\|_n,$$

de modo que $T_n(t)$ es acotado en X_n y satisface la misma cota exponencial. La propiedad semigrupo se hereda por restricción. Para la continuidad fuerte, si $x \in X_n$,

$$\|T_n(t)x - x\|_n = \|A^n(T(t)x - x)\| = \|T(t)A^n x - A^n x\| \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0,$$

pues $A^n x \in X$ y $(T(t))_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo en X. Así, $(T_n(t))_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo sobre X_n.

(iii) El generador en X_n es la parte de A y $D(A_n) = X_{n+1}$. Sea A_n el generador de $(T_n(t))_{t\geq 0}$. Mostramos primero que $D(A^{n+1}) \subset D(A_n)$ y que $A_n x = Ax$ en dicho dominio. Si $x \in D(A^{n+1})$, entonces $A^n x \in D(A)$ y, usando la conmutación anterior,

$$\left\| \frac{T_n(t)x - x}{t} - Ax \right\|_n = \left\| A^n\left(\frac{T(t)x - x}{t} - Ax \right) \right\| = \left\| \frac{T(t)A^n x - A^n x}{t} - A^{n+1}x \right\| \to 0.$$

Por definición de generador en X_n, $x \in D(A_n)$ y $A_n x = Ax$.

Para la inclusión opuesta, sea $x \in D(A_n)$. Entonces el límite $\lim_{t\to 0+} \dfrac{T_n(t)x - x}{t}$ existe en la norma $\|\cdot\|_n$. Aplicando A^n y usando $A^n T(t) = T(t)A^n$, se obtiene que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)A^n x - A^n x}{t} \quad \text{existe en } X.$$

Por tanto $A^n x \in D(A)$ y $A(A^n x) = \lim_{t\to 0+} \dfrac{T(t)A^n x - A^n x}{t}$. Además, para tales x,

$$A_n x = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_n(t)x - x}{t} \quad \Longrightarrow \quad A^n(A_n x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)A^n x - A^n x}{t} = A^{n+1}x,$$

y como A^n es inyectivo en $D(A^n)$, se concluye $A_n x = Ax$ y $Ax \in D(A^n)$; es decir, $x \in D(A^{n+1})$. En suma, $D(A_n) = \{x \in X_n : \ Ax \in X_n\} = D(A^{n+1}) = X_{n+1}$ y A_n coincide con la parte de A en X_n.

Teorema 20 (Semejanza de los semigrupos en las escalas X_n)**.** *Para cada $n \geq 0$, los semigrupos fuertemente continuos $(T_n(t))_{t\geq 0}$ y $(T_{n+1}(t))_{t\geq 0}$ definidos en X_n y X_{n+1}, respectivamente, son semejantes. En concreto, para todo $t \geq 0$ se cumple*

$$T_{n+1}(t) \ = \ A_n^{-1}\, T_n(t)\, A_n \qquad \text{en } X_{n+1},$$

donde A_n es el generador de $(T_n(t))_{t\geq 0}$. Como consecuencia, el espectro, la cota espectral y la cota de crecimiento coinciden para todos los semigrupos de la cadena $\{(T_n(t))_{t\geq 0}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Recordemos que $X_n = D(A^n)$ con norma $\|x\|_n = \|A^n x\|$ y que $T_n(t) = T(t)|_{X_n}$. Del cálculo $A^k T(t) = T(t)A^k$ en $D(A^k)$ se deduce que $T(t)$ deja invariante $D(A^{n+1}) = X_{n+1}$ y que $A^n T(t) = T(t)A^n$ en X_{n+1}, el generador A_n de $(T_n(t))_{t\geq 0}$ es la parte de A en X_n y su dominio es $D(A_n) = X_{n+1}$.

Primero observamos que $A_n : X_{n+1} \to X_n$ es un isomorfismo isométrico: si $x \in X_{n+1}$, entonces

$$\|A_n x\|_n = \|A^n(Ax)\| = \|A^{n+1}x\| = \|x\|_{n+1},$$

y A_n es biyectivo con inversa continua $A_n^{-1} : X_n \to X_{n+1}$.

Para $x \in X_{n+1}$ y $t \geq 0$, usando $A_n T_{n+1}(t) = T_n(t)A_n$ (que es la restricción a X_{n+1} de $AT(t) = T(t)A$) obtenemos

$$A_n\, T_{n+1}(t)\, x = T_n(t)\, A_n x.$$

Aplicando A_n^{-1} a ambos lados, queda

$$T_{n+1}(t)\, x = A_n^{-1}\, T_n(t)\, A_n x,$$

lo que prueba la relación de semejanza $T_{n+1}(t) = A_n^{-1} T_n(t) A_n$ en X_{n+1}. Las magnitudes espectrales y de crecimiento son invariantes por semejanza, de donde se sigue la igualdad de espectros y cotas para todos los n.

Observaciones 4. *Dado que X_{n+1} es denso en X_n y que $A_n : X_{n+1} \to X_n$ es un isomorfismo, X_n puede recuperarse a partir de X_{n+1} como la completación de X_{n+1} bajo la norma*

$$\|x\|_n = \|A_{n+1}^{-1} x\|_{n+1}.$$

Este procedimiento permite extender la escala a órdenes negativos y construir los espacios de extrapolación *(o Sobolev de orden negativo).*

Definición 15. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X_{-n+1}$. Definimos recursivamente la norma de orden negativo*

$$\|x\|_{-n} \;=\; \|A_{-n+1}^{-1}x\|_{-n+1}$$

y llamamos espacio extrapolado de orden $-n$ al completado de X_{-n+1} con respecto a esta norma, es decir,

$$X_{-n} \;=\; (X_{-n+1}, \|\cdot\|_{-n})^{\sim}.$$

Este espacio se interpreta como el espacio de Sobolev de orden $-n$ asociado al semigrupo $(T_0(t))_{t\geq 0}$. Además, denotamos por $T_{-n}(t)$ la extensión continua del operador $T_{-n+1}(t)$ al espacio extrapolado X_{-n}.

Teorema 21. *Con las definiciones dadas anteriormente, se cumple lo siguiente $m \geq n \in \mathbb{Z}$:*

(i) *Cada espacio X_n es un espacio de Banach que contiene a X_m como subespacio denso.*

(ii) *Los operadores $T_n(t)$ forman un semigrupo fuertemente continuo $(T_n(t))_{t\geq 0}$ en X_n.*

Demostración. Es suficiente verificar el enunciado para el caso base donde $n = 0$ y $m = -1$, ya que los demás casos pueden derivarse por simetría y procedimientos similares.
(i) Para demostrar que X_0 contiene densamente a X_{-1}, notamos que por la definición de norma:

$$\|T_0(t)x\|_{-1} = \|T_0(t)A_0^{-1}x\|_0 \leq \|T_0(t)\|_0 \cdot \|x\|_{-1},$$

lo cual garantiza que el operador $T_0(t)$ se puede extender de forma continua a X_{-1}. Por lo tanto, $T_0(t)$ actúa de manera bien definida y continua sobre X_{-1}.
(ii) Como consecuencia de lo anterior, el semigrupo $(T_0(t))_{t\geq 0}$ puede extenderse continuamente a X_{-1}, manteniéndose la continuidad fuerte. Esto también es válido para $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$, ya que actúan sobre subconjuntos densos de X_0, y la topología inducida es más débil o equivalente.
En conclusión, la familia $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forma una sucesión bidireccional de espacios de Banach con inclusiones densas, conocida como una *escala de espacios de Sobolev de índice entero.* Este enfoque permite construir diagramas coherentes de semigrupos, en concordancia con los resultados previos.
El Teorema *20* garantiza que los semigrupos asociados a estos espacios se comportan de manera análoga, incluyendo similitud en su estructura espectral. Por tanto, la familia $(T_n(t))_{t\geq 0}$ constituye una estructura compatible sobre toda la escala X_n con $n \in \mathbb{Z}$.

3.7. Pertubaciones

Definición 16. *Sean los operadores $A : D(A) \subseteq X \to X$ y $B : D(B) \subseteq X \to X$. Decimos que el generador A está perturbado por el operador B o que B es una perturbación de A si la suma $A + B$ se define como:*

$$(A+B)x = Ax + Bx, \quad x \in D(A+B) = D(A) \cap D(B).$$

Ejemplo 4. *(i) Sea $(A, D(A))$ un generador no acotado de un semigrupo fuertemente continuo. Si tomamos $B = -A$, entonces la suma $A + B$ es el operador cero, definido en el subespacio denso $(D(A))$, además el operador cero es no cerrado. Por otro lado si consideramos $B = -2A$, entonces la suma*

$$A + B = -A \text{ con dominio } D(A + B) = D(A),$$

es un generador sólo si A genera un semigrupo fuertemente continuo.

(ii) Sea $A : D(A) \subseteq X \to X$ un generador no acotado de un semigrupo fuertemente continuo y considere el isomorfismo $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que $D(A) \cap S(D(A)) = \{\ 0\}$. Entonces $B = SAS^{-1}$ es un generador y $A+B$ se define en $D(A+B) = D(A) \cap D(B) = D(A) \cap S(D(A)) = \{\ 0\}$. Para facilitar la comprensiòn considere $X = C_0(\mathbb{R}_+)$ definido por

$$Af = f' \text{ con dominio } D(A) = C_0^1(\mathbb{R}_+) \quad y \quad Sf = q.f,$$

para alguna función q continua y positiva tal que q y q^{-1} sean acotadas y no diferenciables. Si el operador B es dado por

$$Bf = q.(q^{-1}.f)' \text{ con dominio } D(B) = \{\ f \in X : q^{-1}.f \in D(A)\},$$

entonces el dominio del operador suma $A + B$ es $\{0\}$.

Teorema 22 (Teorema de la perturbación acotada)**.** *Sea $(A, D(A))$ el generador de un semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ definido en el espacio de Banach X tal que*

$$\| T(t) \| \leq Me^{wt} \text{ para todo } t \geq 0,$$

y sean $w \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$. Si $B \in \mathcal{L}(X)$, entonces

$$C = A + B \text{ con dominio } D(C) = D(A),$$

genera un semigrupo fuertemente continuo $(S(t))_{t\geq 0}$ que satisface

$$\| S(t) \| \leq Me^{(w+M\|B\|)t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Demostración. Tomamos $w = 0$ y $M = 1$. Entonces $\lambda \in \rho(A)$ para todo $\lambda > 0$, y $\lambda - C$ se descompone de la siguiente manera:

$$\lambda - C = \lambda - A - B = (I - BR(\lambda, A))(\lambda - A). \tag{3.38}$$

Como $\lambda - A$ es biyectivo, concluimos que $\lambda - C$ es biyectivo; es decir, $\lambda \in \rho(C)$, si y solo si

$$I - BR(\lambda, A),$$

es invertible en $\mathcal{L}(X)$. Por lo tanto se obtiene:

$$R(\lambda, C) = R(\lambda, A)[I - BR(\lambda, A)]^{-1}. \tag{3.39}$$

Elegimos $Re\lambda > \parallel B \parallel$. Entonces $\parallel BR(\lambda, A) \parallel \leq {}^{\parallel B \parallel}/_{Re\lambda} < 1$ por el Teorema 18 (Teorema de Generación), se sigue que $\lambda \in \rho(C)$ con

$$R(\lambda, C) = R(\lambda, A) \sum_{n=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^n. \tag{3.40}$$

Ahora evaluamos:

$$\parallel R(\lambda, C) \parallel \leq \frac{1}{Re\lambda} \cdot \frac{1}{1 - {}^{\parallel B \parallel}/_{Re\lambda}} = \tfrac{1}{Re\lambda - \parallel B \parallel},$$

para todo $Re\lambda > B$ y obtenemos que C genera un semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ fuertemente continuo por el lema 1 se satisface:

$$S(t) \leq e^{\parallel B \parallel t} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Sea $w \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$, primero hacemos un reescalado para obtener $w = 0$. Introducimos una nueva norma

$$\parallel x \parallel = \sup_{t \geq 0} \parallel T(t)x \parallel$$

en X. Esta norma satisface:

$$\parallel x \parallel \leq \parallel x \parallel \leq M \parallel x \parallel,$$

hace que $(T(t))_{t \geq 0}$ sea un semigrupo de contracción, y genera

$$\parallel Bx \parallel \leq M \parallel B \parallel . \parallel x \parallel \leq M \parallel B \parallel . \parallel x \parallel$$

para todo $x \in X$. Luego, la suma $C = A + B$ genera un semigrupo fuertemente continuo $(S(t))_{t \geq 0}$ satisfaciendo la estimación

$$\parallel S(t) \parallel \leq \parallel S(t)x \leq e^{\parallel B \parallel t} \leq e^{M \parallel B \parallel t}.$$

Por eso $\parallel S(t)x \parallel \leq \parallel S(t)x \parallel \leq e^{M \parallel B \parallel t} \parallel x \parallel \leq M e^{M \parallel B \parallel t} \parallel x \parallel$ para todo $t \geq 0$ es la afirmación para $w = 0$.

Las identidades *(3.39)* y *(3.40)* no solo constituyen la base del argumento desarrollado, sino que además resultan fundamentales para una amplia variedad de resultados de perturbación. En este contexto, las utilizamos con el fin de extender el teorema anterior hacia el caso de perturbaciones no acotadas. Para este propósito, emplearemos la noción de torres de Sobolev. Considerando un valor suficientemente grande de λ, el generador A de un semigrupo fuertemente continuo, y un operador $B \in \mathcal{L}(X)$, los operadores correspondientes pueden analizarse bajo este marco teórico.

$$(I - BR(\lambda, A)) \text{ y } (I - BR(\lambda, A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^n$$

son isomorfismos del espacio de Banach X. Por lo tanto, para λ grande, la $1 - norma$ con respecto a $\lambda - A$ y $\lambda - A - B$, es decir

$$\parallel x \parallel_1^A = \parallel (\lambda - A)x \parallel$$

y

$$\| x \|_1^{A+B} = \| (\lambda - A - B)x \| = \| (I - BR(\lambda, A))(\lambda - A)x \|$$

son equivalentes en $X_1 = D(A) = D(A + B)$.

De manera similar, las $(-1) - normas$ correspondientes

$$\| x \|_{-1}^{A} = \| R(\lambda, A)x \|$$

y

$$\| x \|_{-1}^{A+B} = \| R(\lambda, A + B)x \|$$

son equivalentes en X, usamos la identidad

$$R(\lambda, A) = [I + R(\lambda, A + B)B]^{-1} R(\lambda, A + B) \tag{3.41}$$

por tanto los espacios de Sobolev X_{-1}^{A} para A y X_{-1}^{A+B} para $A+B$ coinciden. Por consiguiente $A + B$ es un generador.Ahora presentamos el siguiente teorema.

Teorema 23. *Sea* $(A, D(A))$ *el generador de un semigrupo fuertemente continuo* $(T(t))_{t\geq 0}$ *en un espacio de Banach* X_0*, y sea* $B \in \mathcal{L}(X_0)$*. Entonces el operador*

$$A + B \quad \textit{con dominio} \quad D(A + B) := D(A)$$

genera un semigrupo fuertemente continuo en X_0*. Además, los espacios (de tipo Sobolev/extrapolación) asociados a* A *y* $A + B$ *coinciden para* $i \in \{-1, 0, 1\}$

$$X_i^A = X_i^{A+B} \qquad (i = -1, 0, 1).$$

Demostración. *(i)* $(A + B)$ *es generador.* Por el teorema de perturbaciones acotadas para semigrupos C_0, si A es generador en X_0 y $B \in \mathcal{L}(X_0)$, entonces $A + B$ con el mismo dominio $D(A)$ vuelve a ser generador de un semigrupo C_0 (en particular, se puede tomar $S(t) = \mathrm{e}^{tB}T(t)$ como candidata formal). Por lo tanto, $D(A+B) = D(A)$ y $A+B$ es generador.

(ii) Coincidencia para $i = 0$. Por definición, $X_0^A = X_0 = X_0^{A+B}$, de modo que la afirmación es inmediata.

(iii) Coincidencia para $i = 1$. Recordemos que

$$X_1^A = D(A) \quad \text{con la norma} \quad \|x\|_{1,A} = \|x\|_{X_0} + \|Ax\|_{X_0},$$

y análogamente

$$X_1^{A+B} = D(A) \quad \text{con} \quad \|x\|_{1,A+B} = \|x\|_{X_0} + \|(A + B)x\|_{X_0}.$$

Como $B \in \mathcal{L}(X_0)$, para $x \in D(A)$ se cumple

$$\|x\|_{1,A} \leq \|x\|_{1,A+B} + \|Bx\| \leq \|x\|_{1,A+B} + \|B\| \, \|x\| \leq (1 + \|B\|) \, \|x\|_{1,A+B}.$$

Por otro lado
$$\|x\|_{1,A+B} \leq \|x\|_{1,A} + \|Bx\| \leq (1 + \|B\|)\, \|x\|_{1,A}.$$
Por consiguiente, las normas $\|\cdot\|_{1,A}$ y $\|\cdot\|_{1,A+B}$ son equivalentes en $D(A)$; en particular, $X_1^A = X_1^{A+B}$ como espacios normados.

(iv) Coincidencia para $i = -1$. Sea $\lambda > 0$ suficientemente grande. La norma de extrapolación asociada a A se puede definir por

$$\|x\|_{-1,A} = \|(\lambda - A)^{-1} x\|_{X_0}, \qquad x \in X_0,$$

y análogamente $\|x\|_{-1,A+B} := \|(\lambda - (A+B))^{-1} x\|_{X_0}$. Usamos la identidad resolvente

$$(\lambda - (A+B))^{-1} = \big(I - (\lambda - A)^{-1} B\big)^{-1} (\lambda - A)^{-1}.$$

Como $\|(\lambda - A)^{-1} B\| \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$, existe λ grande para la cual $\|(\lambda - A)^{-1} B\| < 1$. En tal caso el operador $\big(I - (\lambda - A)^{-1} B\big)^{-1}$ es acotado e invertible (serie de Neumann), y se obtiene

$$c_1 \, \|(\lambda - A)^{-1} x\|_{X_0} \;\leq\; \|(\lambda - (A+B))^{-1} x\|_{X_0} \;\leq\; c_2 \, \|(\lambda - A)^{-1} x\|_{X_0},$$

para ciertas constantes $c_1, c_2 > 0$ independientes de x. Esto muestra la equivalencia de las normas $\|\cdot\|_{-1,A}$ y $\|\cdot\|_{-1,A+B}$ en X_0. Por tanto, las completaciones resultantes coinciden

$$X_{-1}^A = X_{-1}^{A+B}.$$

Reuniendo los pasos anteriores, se concluye que $A + B$ es generador con $D(A+B) = D(A)$ y que $X_i^A = X_i^{A+B}$ para $i = -1, 0, 1$.

Teorema 24. *Sea $(A, D(A))$ el generador de un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Banach X_0. Si B es un operador acotado en $X_1^A = (D(A), \|\,.\,\|_1)$, entonces $A + B$ con dominio $D(A+B) = D(A)$ genera un semigrupo fuertemente continuo en X_0.*

Demostración. Sea A_1 la restricción de A considerada como generador en X_1^A. De este modo, $A_1 + B$ origina un semigrupo fuertemente continuo sobre X_1^A, según el Teorema *22*, dicho semigrupo perturbado puede prolongarse al espacio de extrapolación $(X_1^A)_{-1}^{A_1+B}$, el cual, de acuerdo con el Teorema *23*, coincide con el espacio $(X_1^A)_{-1}^{A_1}$. No obstante, este último corresponde precisamente al espacio de Banach original X_0. En consecuencia, el generador del semigrupo extendido en X_0 resulta ser la extensión continua de $A_1 + B$, es decir, $A + B$.

Ejemplo 5. *Tome $Af = f'$ en $X = C_0(\mathbb{R})$, con dominio $C_0^1(\mathbb{R})$. Para alguna $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ defina el operador B por*
$$Bf = f'(0).h, f \in C_0^1(\mathbb{R}).$$
Entonces, B no está acotado en X, pero está acotado en $D(A) = C_0^1(\mathbb{R})$, y por tanto $A + B$ es un generador en X.

Teorema 25. *Consideramos dos semigrupos fuertemente continuos $(T(t))_{t\geq 0}$ con generador A y $(S(t))_{t\geq 0}$ con generador C en el espacio de Banach X y supongamos que*

$$C = A + B$$

para algún operador acotado $B \in \mathcal{L}(X)$. Entonces

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)xds \tag{3.42}$$

se cumple para todo $t \geq 0$ y $x \in X$.

Demostración. Tomemos $x \in D(A)$ y consideramos las funciones

$$\begin{array}{rcl} [0,t] & \mapsto & X \\ s & \mapsto & \xi_x(s) = T(t-s)S(s)x \end{array}$$

como $D(A) = D(C)$ es invariante bajo ambos semigrupos, se deduce que $\xi_x(\cdot)$ es continuamente diferenciable con derivadas

$$\frac{d}{ds}\xi_x(s) = T(t-s)CS(s)x - T(t-s)AS(s)x = T(t-s)BS(s)x.$$

Esto implica

$$S(t)x - T(t)x = \xi_x(t) - \xi_x(0) = \int_0^t \xi_x'(s)ds = \int_0^t T(t-s)BS(s)xds.$$

Por último, la densidad de $D(A)$ y la acotación de los operadores implicados hacen que esta ecuación integral se cumpla para todo $x \in X$.

Si sustituimos las funciones anteriores ξ_x por

$$\eta_s = S(s)T(t-s)x$$

y utilizando los mismos argumentos, obtenemos la ecuación integral análoga

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t S(s)BT(t-s)xds \tag{3.43}$$

para $x \in X$.

Ambas ecuaciones *(3.42)* y *(3.43)*, suelen denominarse *fórmula de variación de parámetros* para el semigrupo perturbado.

En lugar de resolver la ecuación integral *(3.42)* mediante el método tradicional de punto fijo, adoptamos un enfoque más abstracto que, si bien resulta en apariencia más complejo, ofrece la ventaja de ser aplicable a perturbaciones no acotadas, lo cual constituye un aspecto relevante en este tipo de problemas.

Con el propósito de clarificar nuestro procedimiento, reescribimos la ecuación *(3.42)* en forma operatorial e introducimos el espacio de funciones con valores en operadores

$$X_{t_0} = C([0, t_0], \mathcal{L}_s(X)),$$

constituido por todas las funciones continuas de $[0, t_0]$ en $\mathcal{L}_s(X)$. Es decir, $F \in X_{t_0}$ si y sólo si $F(t) \in \mathcal{L}(X)$ y la aplicación $t \mapsto F(t)x$ es continua para cada $x \in X$. Dicho espacio se convierte en un espacio de Banach cuando se dota de la norma

$$\|F\|_\infty = \sup_{s\in[0,t_0]} \|F(s)\|, \quad F \in X_{t_0}.$$

En este contexto, definiremos a continuación un operador del tipo "Volterra" sobre dicho espacio.

Definición 17. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en X y tomemos $B \in \mathcal{L}(X)$. Para cualquier $t_0 > 0$, llamamos al operador definido por*

$$VF(t)x = \int_0^t T(t-s)BF(s)xds$$

para $x \in X, F \in C([0, t_0], \mathcal{L}_s(X))$ y $0 \leq t \leq t_0$ el operador de Volterra abstracto asociado.

Teorema 26. *El operador abstracto de Volterra V asociado con el semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ y el operador acotado $B \in \mathcal{L}(X)$ es un operador acotado en $C([0, t_0], \mathcal{L}_s(X))$ y satisface*

$$\|V^n\| \leq \frac{(M\|B\|t_0)^n}{n!} \tag{3.44}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y con $M = \sup_{s\in[0,t_0]} \|T(s)\|$. En particular, para su radio espectral tenemos

$$r(V) = 0. \tag{3.45}$$

De esta última afirmación se deduce que el resolvente de V en $\lambda = 1$ existe y viene dado por la serie de Neumann; es decir,

$$R(1, V) = (I - V)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} V^n.$$

Volvemos ahora a nuestra ecuación integral (3.42), que se convierte, en términos de nuestro operador de Volterra, en la ecuación

$$T(\cdot) = (I - V)S(\cdot)$$

para las funciones $T(\cdot), S(\cdot) \in C([0, t_0], \mathcal{L}_s(X))$. Por lo tanto

$$S(\cdot) = R(1, V)T(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} V^n T(\cdot) \tag{3.46}$$

donde la serie converge en el espacio de Banach $C([0, t_0], \mathcal{L}_s(X))$.

Demostración. Sea $f \in C([0,t_0],X)$ Definimos

$$(Vf)(t) = \int_0^t T(t-s)Bf(s)ds$$

donde el operador V está bien definido. Entonces $Vf \in C([0,t_0],X)$ y por lo tanto

$$V \to C([0,t_0],X).$$

Estimamos $\parallel V^n \parallel$ cuando $n=1$ tenemos

$$\parallel (Vf)(t) \parallel \leq \int_0^t \parallel T(t-s) \parallel . \parallel B \parallel . \parallel f(s) \parallel ds \leq M \parallel B \parallel \int_0^t \parallel f(s) \parallel ds.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \parallel (Vf) \parallel_\infty &= sup_{t\in[0,t_0]} \parallel (Vf)(t) \parallel \\ &\leq M \parallel B \parallel t_0. \parallel f \parallel_\infty \\ \parallel V \parallel &\leq M \parallel B \parallel t_0. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple que ,

$$\parallel V^n \parallel \leq \frac{(M \parallel B \parallel t_0)^n}{n!}.$$

Veamos para $n+1$:

$$\begin{aligned} V^{n+1}f = V(V^n f) \to \parallel V^{n+1} f \parallel_\infty &\leq \parallel V \parallel . \parallel V^n f \parallel_\infty \\ &\leq M \parallel B \parallel t_0 . \frac{(M \parallel B \parallel t_0)^n}{n!} \parallel f \parallel_\infty . \end{aligned}$$

Entonces se cumple que

$$\parallel V^{n+1} \parallel \leq M \parallel B \parallel t_0 . \frac{(M \parallel B \parallel t_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que el radio espectral de un operador $V \in L(X)$ está dado por

$$r(V) = \lim_{n\to\infty} \parallel V^n \parallel^{1/n} .$$

Usando la cota anterior

$$\begin{aligned} \parallel V^n \parallel^{\frac{1}{n}} &\leq \left(\frac{(M \parallel B \parallel t_0)^n}{n!} \right)^{1/n} \\ &= \frac{M \parallel B \parallel t_0}{(n!)^{1/n}} \to 0. \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$ entonces $r(V) = 0$.
Como $r(V) = 0$ entonces el resolvente $R(1, V) = (I - V)^{-1}$ existe y está dado por la serie de Neumann

$$(I - V)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} V^n.$$

Luego:

$$\begin{aligned} T(.) &= (I - V)S(.) \\ S(.) &= (I - V)^{-1}T(.) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} V^n(T)(.). \end{aligned}$$

Teorema 27. *El semigrupo fuertemente continuo $(S(t))_{t\geq 0}$ generado por $C = A + B$, donde A es el generador de $(T(t))_{t\geq 0}$ y $B \in \mathcal{L}(X)$, puede obtenerse como*

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) \tag{3.47}$$

donde $S_0(t) := T(t)$ y

$$S_{n+1}(t) := VS_n(t) = \int_0^t T(t-s)BS_n(s)\, ds. \tag{3.48}$$

Demostración. Sea $S_0(t) = T(t)$ el semigrupo original. Se define

$$S_{n+1}(t) = VS_n(t) = \int_0^t T(t-s)BS_n(s)\, ds.$$

Luego encontraremos la cota para $\parallel S_n(t) \parallel$ para ello recordamos que

$$\parallel T(t) \parallel \leq M$$

$\forall t \in [0, t_0]$ y $\parallel B \parallel < \infty$.
Demostramos por inducción: $\parallel S_n(t) \parallel \leq \dfrac{(M \parallel B \parallel t)^n M}{n!}$.
Para $n = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} S_0(t) &= T(t) \\ \parallel S_0(t) \parallel \leq M &= \frac{(M \parallel B \parallel t)^0 M}{0!}. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $\parallel S_n(t) \parallel \leq \dfrac{(M \parallel B \parallel t)^n M}{n!}$.

Entonces se cumple :

$$
\begin{aligned}
\parallel S_{n+1}(t) \parallel &= \parallel \int_0^t T(t-s)BS_n(s)ds \parallel \\
&\leq \int_0^t \parallel T(t-s) \parallel . \parallel B \parallel . \parallel S_n(s) \parallel ds \\
&\leq M \parallel B \parallel \int_0^t \frac{(M \parallel B \parallel s)^n M}{n!} ds \\
&= \frac{M^2 \parallel B \parallel}{n!} \int_0^t (M \parallel B \parallel s)^n ds \\
&= \frac{M^2 \parallel B \parallel (M \parallel B \parallel)^n}{n!} \int_0^t S^n ds \\
&= \frac{M^2 \parallel B \parallel^{n+1} M^n}{n!} . \frac{t^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{(M \parallel B \parallel t)^{n+1}}{(n+1)!} M.
\end{aligned}
$$

Teorema 28. *Sean $(T(t))_{t\geq 0}$ y $(S(t))_{t\geq 0}$ dos semigrupos fuertemente continuos, donde el generador de $(S(t))_{t\geq 0}$ es una perturbación acotada del generador de $(T(t))_{t\geq 0}$. Entonces*

$$
\|T(t) - S(t)\| \leq tM \tag{3.49}
$$

para todo $t \in [0,1]$ y para alguna constante M.

Demostración. Sean A el generador de un semigrupo y $B \in \mathcal{L}(X)$ un operador lineal y acotado. Entonces $A + B$ también genera a un semigrupo fuertemente continuo $(S(t))_{t\geq 0}$ por el teorema de perturbación acotada.
A partir de la ecuación integral 3.42, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|T(t) - S(t)x\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)BS(s)x\| ds \\
&\leq t \sup_{r\in[0,1]} \|T(r)\| \sup_{s\in[0,1]} \|S(s)\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|
\end{aligned}
$$

para todo $x \in X$ y $t \in [0,1]$.

4 CONCLUSIONES

1. Los resultados obtenidos en esta investigación fueron analizados exhaustivamente, desglosando cada uno de sus componentes para ofrecer una comprensión detallada de las demostraciones y de los principios teóricos involucrados. Este análisis permitió verificar la hipótesis central planteada: si A es generador de un semigrupo de clase C_0 y P corresponde a un operador lineal acotado que actúa como perturbación en un espacio de Banach X, entonces la suma $A + P$ continúa generando un semigrupo fuertemente continuo de clase C_0. Este resultado refleja que la estructura semigrupal mantiene su estabilidad aun bajo la presencia de perturbaciones controladas, lo cual confirma la solidez del marco teórico empleado.
   La investigación muestra que la teoría de perturbaciones constituye una herramienta fundamental para garantizar estabilidad y continuidad en sistemas dinámicos, ofreciendo así aportes significativos tanto en el plano teórico como en el aplicado. Este resultado invita a seguir profundizando en el estudio de perturbaciones más generales, con miras a fortalecer y ampliar las aplicaciones de este marco analítico.

2. En relación con el objetivo general, fue posible precisar las condiciones necesarias que debe cumplir el operador P para que $A + P$ preserve las propiedades esenciales de un generador de semigrupos. De esta manera, se ofrece un marco analítico coherente que no solo valida los resultados teóricos obtenidos, sino que también amplía su aplicabilidad a escenarios donde intervienen operadores adicionales.

3. En cuanto a los objetivos específicos, el análisis desarrollado permitió revisar y contrastar diferentes teoremas vinculados a los semigrupos de clase C_0, destacando su relevancia en problemas de evolución abstractos. Al mismo tiempo, se identificó con claridad el papel desempeñado por el operador P, estableciendo lineamientos que aseguran la continuidad fuerte y la persistencia de las propiedades dinámicas aun en presencia de perturbaciones.

4. Los hallazgos alcanzados ponen de relieve la importancia de la teoría de perturbaciones dentro del análisis funcional, al demostrar que las modificaciones acotadas en un sistema no alteran de manera sustancial su comportamiento. Esta constatación no solo refuerza la pertinencia del marco teórico utilizado, sino que además proyecta nuevas posibilidades de aplicación en campos como las ecuaciones diferenciales abstractas, la teoría de control y los modelos en física matemática.

5 SUGERENCIAS

En el marco de las líneas de investigación futura, se plantean diversos problemas que constituyen una continuación natural del presente trabajo:

En primer lugar, se propone el estudio de las perturbaciones no acotadas de generadores de semigrupos, debido a que estas presentan mayores complejidades desde el punto de vista analítico y requieren la imposición de condiciones adicionales que garanticen la existencia del semigrupo asociado.

En segundo lugar, se sugiere la aplicación de los resultados obtenidos al análisis de ecuaciones diferenciales evolutivas, en las cuales la teoría de semigrupos desempeña un papel fundamental al permitir describir la evolución temporal de los sistemas.

Bibliografía

[1] Adler, M., Bombieri, M., & Engel, K. J. (2014). On Perturbations of Generators of C_0-Semigroups. *Hindawi Publishing Corporation*. Obtenido de https://doi.org/10.1155/2014/213020

[2] Aguado López, J., Cano Mármol, A. I., Carballido Costas, A., García Fernández, M., Gómez Marín, F., Jardón-Sánchez, H., & Bru, J.-b. (2020). Semigroup theory in quantum mechanics. *Artículos de las VIII y IX Escuela-Taller de Análisis Funcional*, **1**, 17–31. Obtenido de https://temat.es/monograficos/article/view/vol1-p17

[3] Aiena, P., González, M., & Martínez-Abejón, A. (2001). Operator semigroups in Banach space theory. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, **4-B**, 157–205. Obtenido de http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4B_1_157_0

[4] Álvarez, F., & Peypouquet, J. (2023). Introducción a la Teoría de Semigrupos. Chile.

[5] Amosov, G. (2021). On perturbations of dynamical semigroups defined by. *Análisis y Físicas Matemáticas*, 11–27. Obtenido de https://doi.org/10.1007/s13324-020-00457-1

[6] Amosov, G., & Baitenov, E. (2021). On Rank One Pertubations of Semigroup of Shifts on Half-Axis. *Ufa Mathematical Journal*, **13**(1), 3–16. doi:10.13108/2021-13-1-3

[7] Amosov, G., & Baitenov, E. (2022). On Perturbations of C_0-Semigroups in Banach Spaces Generated by Operator-Valued Measures. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **43**(7), 1585–1597. doi:10.1134/S199508022210002X

[8] Bender, C., & Orszag, S. (1999). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer. doi:10.1007/978-1-4757-3069-2

[9] Clifford, A., & Preston, G. (1961). The Algebraic Theory. *American Mathematical Society.*

[10] Engel, K.-J., & Nagel, N. (2005). *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer. doi:10.1007/b137952

[11] Engel, K.-J., & Nagel, N. (1999). *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer. doi:10.1007/b97696

[12] Erkursun Özcan, N., & Mukhamedov, F. (2020). Stability Estimates of Markov Semigroups on Abstract States Space. *Mediterr. J. Math.*, **17**(44). doi:10.1007/s00009-020-1475-y

[13] Hinch, E. (1991). *Perturbation Methods*. Cambridge University Press.

[14] Kato, T. (1980). *Perturbation Theory for Linear Operators*. New York: Springer-Verlag.