



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

TESIS

Existencia de soluciones para la ecuación diferencial de transporte: un análisis desde la teoría de semigrupos.

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Elaborado por:

Miguel Angel Salazar Garcia

Asesora:

Danessa Lisbeth Chirinos Fernández

ORCID:0000-0002-2438-3830



Lambayeque, Perú

28 de enero 2026

JURADOS



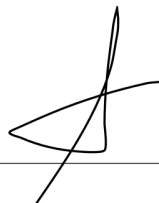
Dra. Lic. Mat. Miriam María Estrada Huancas

Presidente



Dra. Lic. Mat. Diana Mercedes Castro Cárdenas

Secretaria



Dr. Lic. Mat. Adelmo Pérez Herrera

Vocal

AUTOR Y ASESORA



Salazar Garcia Miguel Angel

Autor



Mg. Lic. Mat. Danessa Lisbeth Chirinos Fernández

Asesora



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO

Cludad Universitaria – Lambayeque

LICENCIADA - RESOLUCION DEL CONSEJO DIRECTIVO N° 015 -2023-SUNEDU / CD



ACTA DE SUSTENTACIÓN N° 008.-202.6.-D/FACFyM

Siendo las 10:30 horas del día 28 de enero del 2026, se reunieron los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada:

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA LA ECUACION
DIFERENCIAL DE TRANSPORTE: UN ANALISIS DES DE
LA TEORIA DE SEMIGRUPOS

Designados por Resolución N° 099-2025 - D/FACFyM de fecha 27 de enero 2025

Con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

Dra. Lic. Mat. MIRIAM MARIA ESTRADA HUANCAS Presidente

Dra. Lic. Mat. DIANA MERCEDES CASTRO CARDENAS Secretario

Dr. Lic. Mat. ADELMO PEREZ HERRERA Vocal

La tesis fue asesorada por (el) (la) MA. Lic. Mat. DANESSA LISBETH CHIRINOS FERNANDEZ nombrado por Resolución N° 099-2025 D/FACFyM de fecha 27 de enero 2025

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N° 050-2026 D/FACFyM de fecha 22 de enero de 2026

La Tesis fue presentada y sustentada por (el) (los) Bachiller (es): MIGUEL ANGEL SALAZAR GARCIA y tuvo una duración de 50 minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de DIECIOCHO (18) en la escala vigesimal, mención (Muy BUENO).

Por lo que queda(n) apto(s) para obtener el Título Profesional de LICENCIADO EN MATEMATICAS de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Siendo las 11:30 horas se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

Miriam Estrada Huancas
Presidente

DIANA MERCEDES CASTRO CARDENAS
Secretario

Adolfo Pérez Herrera
Vocal

Danessa Lisbeth Chirinos Fernández
Asesor

CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, Danessa Lisbeth Chirinos Fernández, usuario revisor del documento titulado: Existencia de Soluciones para la Ecuación Diferencial de Transporte: Un análisis desde la Teoría de Semigrupos

Cuyo autor es: Miguel Angel Salazar Garcia, identificado con Documento de Identidad 77051887; declaro que la evaluación realizada por el Programa Informático, ha arrojado un porcentaje de similitud de 19 %, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 16 de enero del 2026



FIRMA

NOMBRES Y APELLIDOS: Danessa Lisbeth Chirinos Fernández

DNI: 41385979

Asesora

Existencia de soluciones

INFORME DE ORIGINALIDAD

19%	16%	11%	6%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	www.bdttd.ufpe.br Fuente de Internet	1%
2	www.ppgme.propesp.ufpa.br Fuente de Internet	1%
3	repositorio.uns.edu.pe Fuente de Internet	1%
4	fddocuments.es Fuente de Internet	1%
5	export.arxiv.org Fuente de Internet	1%
6	repositorio.unesp.br Fuente de Internet	<1%
7	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo Trabajo del estudiante	<1%
8	pergamos.lib.uoa.gr Fuente de Internet	<1%
9	mafiadoc.com Fuente de Internet	<1%
10	Aparicio Cuello, Rafael A. "Traslaciones y semigrupos $C(0)$ topologicamente mezclantes", Proquest, 20111108 Publicación	<1%
11	docplayer.com.br Fuente de Internet	<1%
12	www.coursehero.com Fuente de Internet	<1%



Danessa Chirinos Fernández
41385979
Asesora

13	Submitted to University of Bath Trabajo del estudiante	<1 %
14	im.ufal.br Fuente de Internet	<1 %
15	Submitted to Universidad Nacional de Trujillo Trabajo del estudiante	<1 %
16	Submitted to University of Oxford Trabajo del estudiante	<1 %
17	sites.icmc.usp.br Fuente de Internet	<1 %
18	w210.ub.uni-tuebingen.de Fuente de Internet	<1 %
19	"Generation Theorems", Elsevier BV, 2003 Publicación	<1 %
20	tesis.pucp.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
21	dokumen.pub Fuente de Internet	<1 %
22	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA Trabajo del estudiante	<1 %
23	Submitted to Pontificia Universidad Catolica del Peru Trabajo del estudiante	<1 %
24	www.ljll.math.upmc.fr Fuente de Internet	<1 %
25	camjol.info Fuente de Internet	<1 %
26	Cruz Yupanqui, Gladys. "Comportamiento asintotico de la solucion de un sistema acoplado de ecuaciones de Korteweg-de Vries generalizadas.", Pontificia Universidad Catolica del Peru - CENTRUM Catolica (Peru), 2020	<1 %



Danessa Chirinos Fernández
41385979
Asesora

27	dspace.univ-sba.dz Fuente de Internet	<1 %
28	issuu.com Fuente de Internet	<1 %
29	www.dspace.uce.edu.ec Fuente de Internet	<1 %
30	H. S. Tang, T. Zhou. "On Nonconservative Algorithms for Grid Interfaces", SIAM Journal on Numerical Analysis, 1999 Publicación	<1 %
31	qdoc.tips Fuente de Internet	<1 %
32	dspace.univ-tiaret.dz Fuente de Internet	<1 %
33	Submitted to Koc University Trabajo del estudiante	<1 %
34	ri.ufs.br Fuente de Internet	<1 %
35	vdoc.pub Fuente de Internet	<1 %
36	P. A. Revo. "Boundary control of the wave process with elastic clamping", Computational Mathematics and Modeling, 01/2005 Publicación	<1 %
37	Submitted to Universidad de Almeria Trabajo del estudiante	<1 %
38	math.postech.ac.kr Fuente de Internet	<1 %
39	www.math.byu.edu Fuente de Internet	<1 %
40	Submitted to Escuela Politecnica Nacional Trabajo del estudiante	<1 %



Danessa Chirinos Fernández
41385979
Asesora

41	Terlyga, Olga. "Existence and uniqueness theorems for a one-dimensional model of pulsating combustion", Proquest, 20111003 Publicación	<1 %
42	fau.digital.flvc.org Fuente de Internet	<1 %
43	www.yumpu.com Fuente de Internet	<1 %
44	Manicom, Gray Thomas. "Existence Results for a Class of Semi-Linear Initial Value Problems", University of Pretoria (South Africa), 2023 Publicación	<1 %
45	ebin.pub Fuente de Internet	<1 %
46	repositorio.ufsc.br Fuente de Internet	<1 %
47	1library.co Fuente de Internet	<1 %
48	Jerry L. Bona, Hongqiu Chen, Shu-Ming Sun, Bing-Yu Zhang. "Comparison of quarter-plane and two-point boundary value problems: The KdV-equation", Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 2007 Publicación	<1 %
49	Submitted to Kozep-europai Egyetem Trabajo del estudiante	<1 %
50	hal.archives-ouvertes.fr Fuente de Internet	<1 %
51	livros01.livrosgratis.com.br Fuente de Internet	<1 %
52	math.wayne.edu Fuente de Internet	<1 %
53	pdfcoffee.com Fuente de Internet	<1 %



Danessa Chirinos Fernández
41385979
Asesora



Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Miguel Angel Salazar
Título del ejercicio: Quick Submit
Título de la entrega: Existencia de soluciones
Nombre del archivo: Informe_de_Tesis_4.pdf
Tamaño del archivo: 770.75K
Total páginas: 104
Total de palabras: 20,794
Total de caracteres: 75,946
Fecha de entrega: 21-oct-2025 04:44p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 2788321155



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Existencia de Soluciones para la Ecuación Diferencial
de Transporte: Un Análisis desde la Teoría de
Semigrupos

Presentado por:
Miguel Angel Salazar Garcia

Asesora:
Danessa Lisbeth Chirinos Fernández

Lambayeque, Perú
06 de Agosto 2025



Danessa Chirinos Fernández
41385979
Asesora

ÍNDICE

Información General	12
Resumen	13
Abstract	14
1. Introducción	15
2. Diseño Teórico	18
2.1. Antecedentes:	18
2.2. Bases Teóricas:	20
2.3. Bases Conceptuales:	21
3. Diseño Metodológico	24
3.1. Diseño de contrastación de hipótesis	24
3.2. Población y Muestra	24
3.3. Técnicas, instrumentos, equipos, materiales	24
4. Discusión y Resultados	25
4.4. Preliminares	25
4.4.1. Espacios de Banach	25
4.4.2. Operadores Lineales Acotados	29
4.4.2.1. Operador Adjunto	30
4.4.3. Espacios L^p	30
4.4.4. Resolvente	31
4.5. Semigrupo de Operadores Lineales Acotados	34
4.5.1. Generador y Semigrupos de Operadores	35

4.5.1.1.	Generador de Semigrupos de Operadores Lineales Acotados	35
4.5.1.2.	Semigrupos Uniformemente Continuos	39
4.5.1.3.	Semigrupos Fuertemente Continuos	44
4.5.2.	Teorema de Hille-Yosida	58
4.5.3.	Teorema de Feller-Miyadera-Phillips	67
4.5.4.	Teorema de Lumer-Phillips	73
4.5.5.	Algunas Consecuencias	80
4.6.	Ecuación diferencial de transporte	88
4.6.1.	Ecuación diferencial de transporte con valor inicial	88
4.6.2.	Ecuación diferencial de transporte con valor inicial y de contorno .	93
5.	Recomendaciones	104
6.	Conclusiones	105
	Bibliografía	106

INFORMACIÓN GENERAL

Título:

Existencia de soluciones para la ecuación diferencial de transporte: un análisis desde la teoría de semigrupos.

Autor:

Miguel Angel Salazar Garcia.

Asesor de especialidad:

Danessa Lisbeth Chirinos Fernández.

Línea de investigación:

Ciencias Naturales y del Ambiente.

Lugar:

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo (UNPRG) - Lambayeque

RESUMEN

El objetivo de esta investigación fue asegurar la existencia de una solución para una ecuación diferencial de transporte utilizando la teoría de semigrupos. Se llevó a cabo un estudio descriptivo fundamentado en fuentes de información como Google Académico y material bibliográfico en formato físico. Los resultados obtenidos revelan la existencia de soluciones tanto fuertes como débiles de la ecuación diferencial de transporte sujetas a condiciones específicas. Además, los resultados fueron analizados y explicados minuciosamente para ofrecer una mayor comprensión de las demostraciones. En conclusión, los hallazgos de esta investigación resaltan la eficacia y relevancia de los semigrupos de operadores como un enfoque teórico robusto y perspicaz para abordar la resolución de ecuaciones diferenciales de transporte, y para la comprensión y aplicación de teorías en este campo de investigación.

Palabras clave: Semigrupo de operadores, ecuación diferencial de transporte.

ABSTRACT

The objective of this research was to confirm the existence of a solution to a transport differential equation using semigroup theory. A descriptive study was conducted, based on information sources such as Google Scholar and printed bibliographic material. The results obtained reveal the existence of both strong and weak solutions to the transport differential equation subject to specific conditions. Furthermore, the results were thoroughly analyzed and explained to provide a greater understanding of the proofs. In conclusion, the findings of this research highlight the effectiveness and relevance of operator semigroups as a robust and insightful theoretical approach for addressing the solution of transport differential equations, and for the understanding and application of theories in this field of research.

Keywords: Semigroup of operators, differential transport equation.

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) son una herramienta fundamental para describir y comprender fenómenos naturales; y a lo largo de la historia los matemáticos hicieron estudios donde analizaron diversos métodos para solucionar dichas ecuaciones. Sin embargo, el análisis y la solución de las EDP's pueden ser muy tediosas debido a la complejidad de las ecuaciones y a la necesidad de comprender cómo evolucionan las soluciones en el tiempo; la teoría de semigrupos de operadores proporcionan una estructura matemática adecuada para solucionar las EDP's. El estudio formal de la teoría de semigrupos comenzó a mediados de siglo XX, con el objetivo de resolver analíticamente algunas ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales (Huerfía, 2020). En otras palabras, la teoría surgió inicialmente como un lenguaje analítico-funcional para el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, pero con el tiempo se consolidó como una herramienta fundamental en el análisis de procesos estocásticos. (Chirinos y Zavaleta, 2016).

Una de las primeras aplicaciones de esta teoría se dio en ecuaciones diferenciales asociadas a operadores diferenciales lineales, los cuales dieron origen a un tipo particular de semigrupo denominado semigrupo de operadores fuertemente continuos (Galo, 2018). El desarrollo de estos semigrupos alcanzó mayor profundidad gracias a los aportes de los matemáticos K. Yosida, E. Hille y R. S. Phillips. En particular, la publicación de la obra clásica *Functional Analysis and Semigroups* de Hille y Phillips impulsó significativamente su crecimiento, tanto desde la perspectiva teórica como en sus aplicaciones. Dicho trabajo abordó no solo problemas tradicionales de ecuaciones diferenciales parciales y procesos estocásticos, sino también situaciones menos habituales, como ecuaciones integro-diferenciales, ecuaciones diferenciales funcionales, además de aplicaciones en mecánica cuántica, biología y teoría de control. (Chirinos y Zavaleta, 2016).

La ecuación de Boltzmann, conocida como la ecuación de transporte, tiene un papel crucial en el ámbito de la física matemática, revistiendo una importancia en la teoría cinética de los gases Cisneros, 2018 (Cisneros, 2018). Ludwig Boltzmann, en el año 1872, dedujo esta ecuación integro-diferencial no lineal con la finalidad de describir la evolución de un gas hacia un estado de equilibrio.

A pesar de la trascendencia de dicha ecuación, durante 140 años no se logró una demostración rigurosa de la existencia de soluciones. Fue únicamente en el año 2010 que dos eminentes matemáticos de la Universidad de Pennsylvania, Gressman y Strain, alcanzaron la resolución de dicha ecuación, marcando así un hito significativo en la comprensión y resolución de este complejo problema matemático.

En el presente trabajo se estudiará la existencia de la solución al problema de valor inicial para la ecuación de Boltzmann homogénea por medio de la teoría de semigrupos, se formula de la siguiente manera

$$\left. \begin{aligned} u_t + v \nabla u &= 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

donde, $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida que representa el desplazamiento de la sustancia en un medio, $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector fijo, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 conocida y ∇u es el gradiente de $u(x, t)$ en las variables de x .

Además, al problema se considera una condición de contorno, quedando un nuevo problema

$$\left. \begin{aligned} u_t + v \nabla u &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ u(0, t) &= y(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

La elección de la ecuación diferencial de transporte como objeto de estudio se origina en la discrepancia observada en el tratamiento académico de las ecuaciones de calor y onda durante el pregrado, las cuales gozan de una notoria prominencia y son ampliamente abordadas en las clases. Contrariamente, la ecuación de transporte, en ocasiones, no

recibe una mención en las lecciones impartidas.

Esta disparidad en la atención académica suscita la curiosidad de explorar y comprender la ecuación de transporte, la elección de abordarla y resolverla se justifica, por la intención de aplicar la teoría de semigrupos, contribuyendo así a llenar un vacío en la comprensión de esta ecuación menos explorada en el ámbito educativo.

La presente investigación se estructura por secciones, donde la primera sección se denomina preliminares, la segunda sección semigrupos de operadores acotados y la tercera sección Ecuación diferencial de Transporte.

2. DISEÑO TEÓRICO

2.1. Antecedentes:

A. Nivel Internacional

- Das et al. (2021), en su artículo “An application of semigroup theory to the coagulation-fragmentation models”, demostraron que existen soluciones fuertes para la ecuación continua de coagulación-fragmentación singular y núcleo de coagulación esencialmente acotado y además la unicidad de estas soluciones, empleando la teoría de semigrupo de operadores. Además, lograron demostrar la existencia del semigrupo subestocástico para la ecuación de fragmentación, la cual tiene importantes implicaciones para modelar procesos físicos y biológicos. Este antecedente evidenció la efectividad de la teoría de semigrupos como herramienta para resolver ecuaciones diferenciales complejas.
- Fuentes (2020), en su tesis de pregrado “Introducción a la teoría de semigrupos de operadores acotados en espacios de Banach”, estudió los semigrupos uniformemente continuos y fuertemente continuos, abordando las propiedades principales de los generadores del semigrupo. Además, analizó los teoremas de Hille-Yosida y Lumer-Phillips que son fundamentales para la caracterización de generadores de semigrupos fuertemente continuos. Estos resultados fueron clave para esta investigación, ya que la teoría de semigrupos permite dar solución a una ecuación diferencial parcial.
- Huerfía (2020), en su tesis “Semigrupo de Operadores Lineales Acotados con Aplicaciones”, analizó casos asociados a operadores acotados de ecuaciones diferenciales: como la ecuación de transporte y del calor. Esta investigación resaltó la importancia de la teoría de semigrupos como herramientas para resolver problemas diferenciables

parciales. Este antecedente me permitió analizar resultados clave para darle solución a la ecuación diferencial de transporte.

- Galo (2018), en su artículo “Teoría de semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales continuos aplicada a una ecuación de transporte-difusión”, utilizó la teoría de semigrupos de operadores lineales continuos para demostrar la existencia y unicidad de la solución a una ecuación de transporte-difusión. En su enfoque, consideró específicamente a los semigrupos fuertemente continuos, generados por un operador lineal A , conocido como el generador infinitesimal del semigrupo. Estos resultados me permitieron elegir condiciones de contorno adecuadas para la ecuación diferencial de transporte y caracterizar adecuadamente un espacio funcional de soluciones.
- Parra (2018), en su tesis “ C_0 Semigrupos para sistemas hiperbólicos port-hamiltonianos y sus aplicaciones”, evidenció que la teoría de semigrupos C_0 y con condiciones específicas es posible garantizar la existencia, unicidad y estabilidad del problema de valor inicial con valores en la frontera en sistemas port-Hamiltonianos. La metodología de este trabajo me proporcionó una base sólida para analizar la ecuación diferencial de transporte bajo condiciones iniciales y de frontera.

B. Nivel Nacional

- Berrocal (2021), en su trabajo de pregrado “Ecuación del calor: existencia y unicidad” evidenció que través de la teoría de semigrupo de operadores acotados es posible garantizar la existencia y unicidad de la solución para una ecuación diferencial del calor no lineal. El marco teórico desarrollado por Berrocal facilitará el estudio y análisis de existencia de soluciones para la ecuación diferencial de transporte de este estudio.
- Tarazona (2021), en su tesis doctoral “Existencia, unicidad y estabilidad de solución de un sistema de Timoshenko con memoria” evidenció que utilizando la teoría de semigrupos de operadores lineales se determina la existencia, unicidad y estabilidad exponencial de la solución del sistema de Timoshenko con memoria total. La metodología del trabajo de Tarazona me sirvió como ayuda para la búsqueda de soluciones para la ecuación diferencial de transporte.

2.2. Bases Teóricas:

La base teórica de esta investigación se fundamenta en tres pilares fundamentales interrelacionados: el análisis funcional, la teoría de semigrupos de operadores y las ecuaciones diferenciales parciales, con especial énfasis en la ecuación diferencial de transporte.

El análisis funcional proporciona el marco matemático esencial para el estudio de la ecuación de transporte. Esta rama de las matemáticas nos permite trabajar en espacios de Banach y Hilbert apropiados, particularmente los espacios L^1 , L^2 y H^1 , que son fundamentales para la caracterización de las soluciones.

Los conceptos de operadores lineales y sus propiedades, constituyen herramientas indispensables para establecer la existencia de soluciones. Además, la teoría espectral de operadores y los conceptos de convergencia débil y fuerte son cruciales para el análisis del comportamiento de las soluciones. La teoría de semigrupos de operadores, que representa el núcleo central de esta investigación, proporciona un marco teórico para el estudio de problemas de evolución. Esta teoría incluye el estudio de semigrupos uniformemente continuos y fuertemente continuos, así como sus generadores infinitesimales. El teorema fundamental de Hille-Yosida establece las condiciones necesarias y suficientes para que un operador lineal sea el generador de un semigrupo fuertemente continuo, lo cual es esencial para la existencia de soluciones de la ecuación diferencial de transporte. Las propiedades espectrales de los generadores y el estudio de semigrupos adjuntos complementan el análisis.

En el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales, la investigación se centra en la formulación del problema de Cauchy abstracto asociado a la ecuación diferencial de transporte. Esto implica el análisis de las condiciones de frontera apropiadas y la identificación de los espacios de soluciones adecuados. La teoría de distribuciones y los métodos de energía son herramientas fundamentales para establecer la existencia de soluciones, así como para estudiar su regularidad.

La conexión entre estos tres pilares teóricos se materializa en el estudio específico de la

ecuación diferencial de transporte. El operador de transporte se identifica como el generador de un semigrupo, lo que permite aplicar la teoría de semigrupos para establecer la existencia de soluciones. El comportamiento asintótico de las soluciones se analiza mediante las propiedades espectrales del generador y las características del semigrupo asociado. Adicionalmente, la investigación incorpora herramientas matemáticas complementarias como la teoría de interpolación, las desigualdades fundamentales de Hölder y Gronwall, y los teoremas de inmersión de Sobolev. La teoría de trazas también juega un papel importante cuando se consideran condiciones de frontera. Esta base teórica se sustenta en trabajos fundamentales de la literatura matemática, incluyendo las contribuciones de Pazy (1983) sobre semigrupos de operadores lineales, los trabajos de Engel y Nagel (2000) sobre semigrupos, y los tratados de Evans (2010) (2010) sobre ecuaciones diferenciales parciales.

La integración de estos elementos teóricos proporciona un marco robusto para el análisis de la existencia de soluciones de la ecuación diferencial de transporte, permitiendo no solo establecer resultados de existencia, sino también caracterizar el comportamiento cualitativo de las soluciones.

2.3. Bases Conceptuales:

2.3.1 Espacio de Banach

Definición. (Kreyszig, 1991) Sea X un espacio vectorial normado con norma $\|\cdot\|$. Se dice que X es un espacio de Banach, si toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es convergente en X .

2.3.2 Operador Acotado

Definición. (Kreyszig, 1991) Sean E y F espacios normados sobre K , y $T : E \rightarrow F$ un operador lineal de E en F . Diremos que T es acotado si existe una constante $c > 0$, tal que se cumple que

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

2.3.3 Semigrupos de operadores acotados

Definición. (Vrabie, 2003) Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach. Una familia de operadores acotados $\mathcal{L}(E)$

$$\begin{aligned} T : [0, \infty) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ t &\mapsto T(t) : E \longrightarrow E \\ f &\mapsto T(t)f \end{aligned}$$

es un semigrupo de operadores acotados si satisface:

- a) $T(0) = I$, I es el operador identidad.
- b) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$

2.3.4 Ecuación diferencial de transporte (Ecuación de Boltzmann) homogénea

Definición. La ecuación diferencial de Transporte homogénea se formula:

$$u_t + v \nabla u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad (2.3)$$

donde $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función que deseamos encontrar que será representada por $u = u(x, t)$, aquí $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ señala una posición en el espacio, y $t \geq 0$ representa el tiempo, $v \in \mathbb{R}^n$ representa un vector constante conocido y ∇u es el gradiente de $u(x, t)$ en las variables de x (Evans, 2010).

2.3.5 Solución Fuerte o Solución Clásica

Definición. (Evans, 2010) Consideremos una EDP general de la forma:

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) = 0$$

donde $u(x)$ es la función que se debe encontrar y F es una expresión que involucra la función u y sus derivadas. Se llama solución fuerte de la EDP a la función $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in C^m(\mathcal{R})$ que satisface la ecuación en cada punto dentro del dominio específico $\mathcal{R}$. Además, también cumple con las condiciones de contorno que puedan estar definidas para el problema en cuestión.

2.3.6 Solución Débil

Definición. (Evans, 2010) Consideremos una EDP general de la forma:

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) = 0$$

una solución débil se define como una función $u(x)$ que satisface la siguiente relación integral:

$$\int_{\Omega} F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) \phi(x) dx = 0$$

$\phi(x)$ es una función de prueba en un espacio funcional adecuado, y Ω es el dominio.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Diseño de contrastación de hipótesis

Específicamente se verificará que el operador derivado de la ecuación diferencial de transporte genera un semigrupo fuertemente continuo mediante:

- (I) Teorema de Hille Yosida.
- (II) Demostración de existencia y unicidad débil de la ecuación.
- (III) Validación de un caso específico de la ecuación de transporte

La investigación es descriptiva teórica, la hipótesis funciona como conjetura matemática a demostrar.

La contrastación de hipótesis estuvo respaldada por fuentes bibliográficas de reconocida autoridad académica en el campo del análisis. Se llevó a cabo a través del análisis riguroso de las demostraciones matemáticas contenidas en la literatura especializada consultada.

3.2. Población y Muestra

Por ser un trabajo básico teórico, no hubo población ni muestra.

3.3. Técnicas, instrumentos, equipos, materiales

No se utilizó técnicas estadísticas, solo se uso de bibliografía especializada en el tema como artículos científicos, tesis de repositorios institucionales y libros.

4. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

4.4. Preliminares

En esta sección preliminar, se establece conceptos básicos que ayudarán al lector a entender los resultados posteriores. Se considerará nociones de espacios de Banach, operadores lineales acotados, espacios de L^p y espacios de Sobolev.

4.4.1. Espacios de Banach

Las siguientes definiciones y resultados pueden ser encontrados en Kreyszig (1991), León (2008).

Se iniciará mencionando a los espacios métricos y normados para luego hablar de espacios de Banach.

Definición 4.1. Sea X un conjunto no vacío. Un par (X, d) es llamado **espacio métrico**, tal que d es una función

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

la cual cumple con las siguientes condiciones:

- I) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$.
- II) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
- III) $d(x, y) = 0$ si solo si $x = y$.
- IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Definición 4.2. Sea E es un espacio vectorial sobre K . $(E, \| \cdot \|)$ es llamado **espacio normado** si $\| \cdot \|$ es una función

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde esta función cumple con:

- I) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$.
- II) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
- III) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X$, para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.
- IV) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

Ahora se mostrarán algunos resultados en las que se relacionan las dos definiciones anteriores.

Teorema 4.1. Sea $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado. La función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$$

es una métrica sobre X .

Demostración:

En efecto la primera condición de métrica se cumple de manera inmediata, ya que por la definición de norma (4.2)

$$0 \leq \|x - y\|,$$

entonces $0 \leq d(x, y)$. Ahora solo se debe verificar las 3 condiciones restantes de métrica.

$$\text{II) } d(x, y) = d(y, x) \text{ para todo } x, y \in X.$$

$$\Leftrightarrow d(x, y) = \|x - y\|$$

$$\Leftrightarrow d(x, y) = \|y - x\|$$

$$\Leftrightarrow d(x, y) = d(y, x)$$

III) $d(x, y) = 0$ si solo si $x = y$.

$$\Rightarrow] \qquad \Leftarrow]$$

Tenemos que $d(x, y) = 0$

Tenemos que $x = y$

$$\Rightarrow \|x - y\| = 0$$

$$x - y = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0$$

$$\Rightarrow \|x - y\| = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow d(x, y) = 0$$

IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

$$\Leftrightarrow d(x, z) = \|x - z\|$$

$$\Leftrightarrow d(x, z) = \|(x - y) + (y - z)\|$$

$$\Leftrightarrow d(x, z) \leq \|(x - y)\| + \|(y - z)\|$$

$$\Leftrightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

■

Teorema 4.2. Si d es una métrica en un espacio vectorial X y d es inducida por una norma en X , entonces

$$d(x + a, y + a) = d(x, y)$$

$$d(ax, ay) = |a|d(x, y)$$

Demostración:

■ $d(x + a, y + a) = d(x, y)$

$$d(x + a, y + a) = \|(x + a) - (y + a)\|$$

$$d(x + a, y + a) = \|x - y\|$$

$$d(x + a, y + a) = d(x, y)$$

$$\blacksquare \quad d(ax, ay) = |a|d(x, y)$$

$$d(ax, ay) = \|ax - ay\|$$

$$d(ax, ay) = \|a(x - y)\|$$

$$d(ax, ay) = |a|\|x - y\|$$

$$d(ax, ay) = |a|d(x, y)$$

■

Observación 4.1. *Existen métricas que no provienen de una norma.*

El siguiente ejemplo garantiza lo afirmado en la observación 4.1.

Ejemplo 4.1. *Sea $\mathcal{D}$ la métrica discreta, definida*

$$\mathcal{D}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

la cual no está inducida por una norma.

Tomemos la segunda condición

$$d(ax, ay) = |a|d(x, y)$$

Demos un $a = 2$. Para el caso de $x = y$ la condición cumpliría.

Ahora, en el caso $x \neq y$

$$\mathcal{D}(ax, ay) = 1 \neq 2 = a\mathcal{D}(x, y)$$

Por lo cual, la métrica $\mathcal{D}$ no proviene de una norma.

Definición 4.3. *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $(X, \|\cdot\|)$. Se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $N \in \mathbb{N}$ y $n, m > N$ entonces*

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Para finalizar la sección se mostrará la definición de espacios de Banach.

Definición 4.4. *Sea X un espacio vectorial normado con $\|\cdot\|$, entonces X es un **espacio de Banach**, si toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente a un punto $x \in X$.*

4.4.2. Operadores Lineales Acotados

Ahora se mostrarán conceptos y resultados de operadores lineales acotados y cerrados (Kreyszig, 1991, León, 2008).

Definición 4.5. Sean E y F espacios normados sobre K , y

$$\begin{aligned} A : X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto S(x) \end{aligned}$$

Diremos que A es un **operador lineal** de X en Y , si se cumple lo siguiente:

1. $A(x + y) = A(x) + A(y), \quad \forall x, y \in X.$
2. $A(ax) = aA(x), \quad \forall x \in X \quad y \quad \forall a \in K.$

Definición 4.6. Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal donde X y Y son espacios normados sobre K . A es un **operador lineal acotado** si existe una constante $c > 0$, tal que se cumple que

$$\|A(x)\|_Y \leq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Ejemplo 4.2. Sea $X = C_{ub}(\mathbb{R}_+) = \{f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} / f \text{ acotada y uniformemente continuo}\}$ con norma $\|f\|_X = \sup_{x>0} (|f(x)|)$. La familia de operadores

$$\begin{aligned} S : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ t &\mapsto S(t) : X \longrightarrow X \\ f(x) &\mapsto S(t)(f(x)) = f(x+t) \end{aligned}$$

Se tiene que,

$$\blacksquare \quad S(t)((af + bg)(x)) = (af + bg)(x+t) = af(x+t) + bg(x+t)$$

$$S(t)((af + bg)(x)) = aS(t)(f(x)) + bS(t)(g(x))$$

$$\blacksquare \quad \|S(t)(f)\| = \sup_{x>0} \|S(t)(f(x))\| = \sup_{x>0} \|(f(x+t))\| = \|f\| = 1 \cdot \|f\|$$

donde se observa que el operador $S(t)$ es lineal y acotado.

Definición 4.7. Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal tal que X y Y son espacios vectoriales, se define el **grafo de A** como

$$G_A = \{(x, S(x)) : x \in X, S(x) \in Y\}$$

Teorema 4.3. Si $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal, entonces A es cerrado si y solo si su grafo es G_A cerrado.

Ver la demostración en León (2008).

4.4.2.1. Operador Adjunto

Definición 4.8. Sea el operador $A : X \rightarrow Y$. Se define el **adjunto** del operador A como el operador $A^* : D(A^*) \subset Y^* \rightarrow X^*$ con dominio

$$D(A^*) = \{y \in Y^*; \exists c \geq 0 \text{ tal que } |\langle y, Ax \rangle| \leq c \|x\| \quad \forall x \in D(A)\},$$

tal que

$$\langle y, Ax \rangle = \langle A^*y, x \rangle \quad \forall x \in D(A), \forall y \in D(A^*)$$

4.4.3. Espacios L^p

A continuación se definirán a los de espacios L^p y espacios de Hilbert, las cuales pueden ser vistas en Brezis (2011), Castillo (2014), kreyszig (1991).

Se denotará $L^1(\Omega)$ al espacio de funciones integrables de Ω a $\mathbb{R}$.

Definición 4.9. Espacio L^p Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 < p < \infty$ se define al **espacio L^p** como

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

con

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Definición 4.10. Espacio de Hilbert Sea H un espacio vectorial con producto interno. H se denomina un **espacio de Hilbert** si es completo con respecto a la norma la cual es generada por su producto interno.

Observación 4.2. L^2 es un espacio de Hilbert.

Ver la demostración en Brezis (2011), Castillo (2014), kreyszig (1991).

4.4.4. Resolvente

Ahora se presenta al resolvente de un operador A , donde estas definiciones nos ayudarán con la demostración del teorema de Hille-Yosida 4.13 el cual se presentará más adelante.

Definición 4.11. Sea X es un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X)$. Se define el **resolvente** de A como el conjunto

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : X \rightarrow X \text{ es biyectivo}\}$$

y el **espectro** A como

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$$

Ejemplo 4.3. Sea el operador

$$\begin{aligned} A : l^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{R}) \\ u &\mapsto (0, u_1, u_2, u_3, \dots) \end{aligned},$$

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{R}).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)(u) &= \lambda(u_1, u_2, u_3, u_4, \dots) - (0, u_1, u_2, u_3, \dots) \\ &= (\lambda u_1, \lambda u_2 - u_1, \lambda u_3 - u_2, \lambda u_4 - u_3, \dots) \end{aligned}$$

luego,

$$\ker(A) = \{u \in l^2(\mathbb{R}) / Au = 0\} = \{0\}$$

después $\ker(A) = \ker(-A) = \ker(0I - A)$, entonces $\ker(0I - A) = \{0\}$ se tiene que $\lambda I - A$ es inyectivo para $\lambda = 0$.

Entonces $0 \in \sigma(A)$ y además $0 \notin \rho(A)$.

La siguiente definición muestra como está dado el resolvente cuando A no es necesariamente acotada.

Definición 4.12. Sea X un espacio de Banach y $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal. Se dice que $\lambda \in \rho(A)$, donde $\rho(A)$ es el **resolvente** de A , si

- I) $\lambda I - A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ es inyectivo.
 - II) $(\lambda I - A)(D(A))$ es denso en X .
 - III) $(\lambda I - A)^{-1}$ es continua y $(\lambda I - A)^{-1} : \text{Im}(\lambda I - A) \rightarrow X$.
- y el **espectro** de A es $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$.

Ejemplo 4.4. Sea $\Omega = [0, 1]$ y $X = L^2(\Omega)$. Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ definido por $Au = u'$ (en el sentido distribucional 4.14). Hallar $\rho(A)$

Solución: Sea $D(A) = \{u \in L^2(\Omega) / u' \in L^2(\Omega) \text{ y } u(0) = 0\}$

Entonces para $\lambda \in \mathbb{C}$, $u \in D(A)$ y $f \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)u &= f, & u(0) &= 0 \\ \lambda u - Au &= f \\ \lambda u - u' &= f, & u(0) &= 0 \end{aligned}$$

desarrollando la ecuación su solución es $u(x) = \int_0^x f(s)e^{-\lambda s}ds$, para todo $x \in \Omega$.

- I) $\ker(\lambda I - A) = \{u \in D(A) / (\lambda I - A)(u) = 0\} = \{0\}$, entonces $\lambda I - A$ es inyectivo.
- II) Se tiene que $\lambda I - A : D(A) \subseteq X \rightarrow \text{Im}(\lambda I - A)$ es sobreyectivo, es decir $(\lambda I - A)^{-1}$ existe sobre $\text{Im}(\lambda I - A)$

$$\begin{aligned} \text{Im}(\lambda I - A) &= (\lambda I - A)(D(A)) \\ &= (\lambda I - A)(L^2(\Omega)) \\ &= L^2(\Omega) \end{aligned}$$

entonces $\text{Im}(\lambda I - A)$ es denso en $L^2(\Omega)$.

III) Para cada $f \in L^2(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \|(\lambda I - A)^{-1}(f(x))\| &= \|u(x)\| \\
 &= \left\| \int_0^x e^{-\lambda s} f(s) ds \right\| \\
 &\leq \int_0^x \|e^{-\lambda s}\| \|f(s)\| ds \\
 &\leq \left(\int_0^x \|e^{-\lambda s}\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^x \|f(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\
 &\Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}(f(x))\| \leq C \|f\|_{L^2}
 \end{aligned}$$

entonces $(\lambda I - A)^{-1}$ es acotado, por lo cual es continuo.

Luego $\rho(A) = \mathbb{C}$.

Nota 4.1. Para cada $\lambda \in \rho(A)$, se denotará a $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Ahora se mostrarán definiciones de soporte y derivada distribucional (Brezis, 2011, Evans, 2010).

Definición 4.13. Para $\varphi \in C(\Omega)$ se define el **soporte**

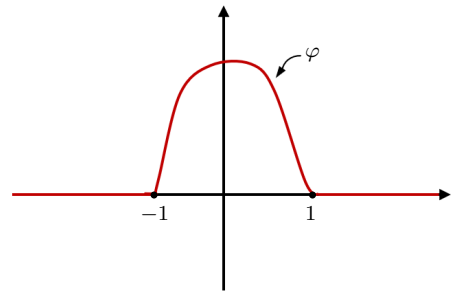
$$\text{sop}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Ejemplo 4.5.

Sea $\Omega = \mathbb{R}$, $\varphi(x) \neq 0$ si $x \in (-1, 1) \subset \Omega$

$$\text{sop}\varphi = \overline{(-1, 1)} = [-1, 1]$$

de esto se deduce que $\partial(\text{sop}) = \emptyset$, además se tiene que el soporte es compacto.



Nota 4.2. Si $\varphi \in C_0^r$, se dice que φ tiene soporte compacto y además es de clase C^r .

Definición 4.14. Sea $u \in L^p(\Omega)$ se dice que u' es la **derivada distribucional** de u si existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u\varphi' = - \int_{\Omega} g\varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}$$

donde se deduce que $u' = g$.

Nota 4.3. La derivada distribucional es conocida como derivada débil.

Ejemplo 4.6. Calcular la derivada distribucional de $u(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Solución: Sea $\varphi \in C_0^\infty$, $\Omega = (0, 2)$ y además $\varphi(0) = 0 = \varphi(2)$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g\varphi dx &= - \int_{\Omega} u\varphi' dx \\ &= - \int_0^1 x\varphi' dx - \int_1^2 1\varphi' dx \\ &= - \left(x\varphi|_{\partial(0,1)} - \int_0^1 \varphi dx \right) - (\varphi|_{\partial(0,1)}) \\ &= \int_0^1 \varphi dx \end{aligned}$$

$$\text{entonces } \int_0^2 g\varphi dx = \int_0^1 1\varphi dx + \int_1^2 0\varphi dx. \text{ Por lo tanto } u'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

4.5. Semigrupo de Operadores Lineales Acotados

La teoría de semigrupos de operadores surgió entre los años 1930-1960 a través de las principales contribuciones de Feller, Hille, Lumer, Miyadera, Stone, Yosida y Phillips. En este capítulo se introducen conceptos de semigrupos de operadores, semigrupos uniformemente continuos, semigrupos de clase C_0 y se estudian sus propiedades básicas; además se presentan resultados importantes como los teoremas de Hille-Yosida, Feller-Miyadera-Phillips y Lumer-Phillips.

4.5.1. Generador y Semigrupos de Operadores

4.5.1.1. Generador de Semigrupos de Operadores Lineales Acotados

A continuación se presentarán las definiciones de semigrupos y generadores de semigrupos las cuales son mostradas en Engel et al. (2000), Pazy (1983), Vrabie (2003).

Definición 4.15. Una familia $\{S(t); t \geq 0\}$ en $\mathcal{L}(X)$ es un **semigrupo de operadores lineales acotados** en X si:

- (1) $S(0) = I$, I es el operador identidad.
- (2) $S(t + s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

donde $\mathcal{L}(X)$ es el conjunto de los operadores lineales acotados de X a X , además X es un espacio de Banach.

Debido a que la familia de operadores $\{S(t); t \geq 0\}$ es acotado se posible dotarla de una norma.

Observación 4.3. La norma para el operador se define

$$\|S\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Sx\|$$

para cada $S \in \mathcal{L}(X)$, además $\mathcal{L}(X)$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 4.7. Sea la familia de operadores $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, definido por $S(t) = e^{tA}$ con A una matriz cuadrada, entonces $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo.

Demostración:

$$(1) S(0) = I.$$

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \frac{t^4 A^4}{4!} + \dots$$

$$\Rightarrow S(0) = I + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

$$\Rightarrow S(0) = I$$

(2) $S(t + s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 S(t + s) &= e^{(t+s)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t + s)^n A^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} s^k A^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} t^{n-k} s^k A^n}{n!} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n! t^{n-k} s^k A^n}{k!(n-k)!n!} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k} s^k A^n}{k!(n-k)!} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{s^k A^k}{k!} \cdot \frac{t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\
 &= \sum_{n-k=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} \cdot \frac{t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \right)
 \end{aligned}$$

hacemos un cambio de variable $m = n - k$

$$\begin{aligned}
 S(t + s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} \cdot \frac{t^m A^m}{(m)!} \right) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{sA} \cdot \frac{t^m A^m}{(m)!} \right) \\
 &= e^{sA} \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot e^{sA} = S(t)S(s) \\
 &= S(t)S(s)
 \end{aligned}$$

observamos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ cumple con las condiciones de semigrupo.

Ejemplo 4.8. Sea $X = C_{ub}(\mathbb{R}_+) = \{f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ acotada y uniformemente continuo}\}$ con norma $\|f\|_X = \sup_{x>0} (|f(x)|)$. La familia de operadores

$$\begin{aligned} S : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ t &\mapsto S(t) : X \longrightarrow X \\ f(x) &\mapsto S(t)(f(x)) = f(x+t) \end{aligned}$$

entonces $S(t)$ es semigrupo

Demostración:

Del ejemplo 4.2 se demuestra que $S(t)$ es un operador lineal y acotado.

Ahora probaremos las condiciones para ser un semigrupo

(1) $S(0) = Id$.

$$\begin{aligned} S(0)(f(x)) &= f(x+0) \\ &= f(x) = Id(f(x)) \\ \Rightarrow S(0) &= Id \end{aligned}$$

(2) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

$$\begin{aligned} S(t+s)(f(x)) &= f(x+(t+s)) \\ &= f((x+s)+t) \\ &= S(t)(f(x+s)) \\ &= S(t)(S(s)(f(x))) \\ &= (S(t) \circ S(s))(f(x)) \\ \Rightarrow S(t+s)(f(x)) &= S(t) \circ S(s) \end{aligned}$$

observamos que $\{S(t)\}$ cumple con las condiciones de semigrupo.

La siguiente definición muestra que el generador de un semigrupo se define de manera análoga al diferencial de una aplicación definida en $\mathbb{R}$.

Definición 4.16. $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ es el **generador** de un semigrupo de operadores lineales acotados $S(t)$ si

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}, \text{ y}$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}$$

Observación 4.4. Si $A : D(A) \subseteq X$ genera un semigrupo de operadores lineales acotados, entonces A es un operador que no necesariamente es acotado y $D(A)$ es un subespacio vectorial de X .

El siguiente ejemplo muestra que A es el generador del semigrupo del ejemplo 4.7.

Ejemplo 4.9. A es el generador del semigrupo $S(t) = e^{tA}$.

En efecto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tA}x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(e^{tA} - I)x}{t}$$

utilizando L'Hospital, el límite resulta $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(Ae^{tA})x}{1}$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = Ax$$

Por otro lado, si en el ejemplo anterior el operador A es acotado, entonces también genera el mismo semigrupo.

Ejemplo 4.10. Sea el semigrupo $S(t) = e^{tA}$ con A operador acotado entonces A genera $S(t)$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tA}x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{tAx + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tA}x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(tAx + \sum_{n=2}^{\infty} t^{n-1} \cdot \frac{A^n}{n!} x \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tA}x - x}{t} = Ax$$

El siguiente ejemplo muestra que el diferencial genera el semigrupo de traslaciones (ejemplo 4.8).

Ejemplo 4.11. Sea semigrupo $S(t)$ definido por $S(t)(f(x)) = f(x+t)$.

En efecto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)f(x) - f(x)}{t} = \frac{df(x)}{dx}$$

entonces el generador del semigrupo $S(t)$ es $\frac{d}{dx}$.

4.5.1.2. Semigrupos Uniformemente Continuos

Ahora se definirá a un semigrupo uniformemente continuo, el cual se obtiene cuando una familia $\{S(t); t \geq 0\}$ cumple con las propiedades de la definición 4.15 y además cumple con una condición de continuidad. (Engel et al., 2000, Pazy, 1983, Vrabie, 2003).

Definición 4.17. Una familia $\{S(t)\}$ es un **semigrupo uniformemente continuo** si es un semigrupo y cumple la condición de continuidad $t = 0$

$$(3) \lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = I$$

lo cual es equivalente a decir $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\| = 0$

El siguiente resultado muestra que el ejemplo 4.7 es uniformemente continuo.

Ejemplo 4.12. El semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, definido por $S(t) = e^{tA}$ entonces $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo.

Demostración:

$$(3) \lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = I$$

Por el ejemplo (4.7) sabemos que cumple con las condiciones de semigrupo. Ahora se demostrará la condición de continuidad $t = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{tA} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \frac{t^4 A^4}{4!} + \dots \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} I + \lim_{t \rightarrow 0^+} tA + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 A^2}{2!} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3 A^3}{3!} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 A^4}{4!} + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = I$$

Por otro lado, la solución de EDO $u' = Au$ con A matriz cuadrada de $n \times n$ esta dada por la familia del semigrupo $S(t) = e^{tA}$, pues

$$u'(t) = (e^{tA})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1} A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-1} A A^{n-1}}{(n-1)!} = A e^{tA}$$

$$\Rightarrow u'(t) = Au(t)$$

La razón de que una familia de operadores sea un semigrupo no garantiza que sea uniformemente continuo, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.13. *El semigrupo del ejemplo 4.8 no es uniformemente continuo.*

Sea la familia de operadores

$$\begin{aligned} S : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ t &\mapsto S(t) : X \longrightarrow X \\ f(x) &\mapsto S(t)(f(x)) = f(x+t) \end{aligned}$$

Se toma la función $f(x) = \max \left\{ 0; 1 - \left| x - \frac{3}{2} \right| \right\}$ donde:

$$1 - \left| x - \frac{3}{2} \right| = \begin{cases} 5/2 - x & \text{sí } x \geq 3/2 \\ x - 1/2 & \text{sí } x < 3/2 \end{cases}$$

Tomamos $x = 5/2 - t$, donde $t > 0$. Entonces, se tiene que:

$$f(x) > 0$$

$$f(x + t) = f(5/2) = 0$$

$$\text{Luego, } |f(x + t) - f(x)| = |0 - f(x)| = c > 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)f - I(t)f\| &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \|f(x + t) - f(x)\| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \|c\| = \lim_{t \rightarrow 0^+} c \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $S(t)$ no es uniformemente continuo.

Ahora se mostrarán algunos resultados básicos de semigrupos uniformemente continuos.

Teorema 4.4. *Si el semigrupo de operadores lineales $\{S(t); t \geq 0\}$ es uniformemente continuo, entonces para cada $t \geq 0$, $S(t)$ es invertible.*

Demostración:

Sea $S(t)$ semigrupo uniformemente continuo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = I$$

entonces para existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|S(t) - I\| < \delta \quad t \in (0, \delta]$$

Así que para cada $t \in (0, \delta]$ $S(t)$ es invertible.

Sea $t > \delta$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}^*$ y $\eta \in [0, \delta)$ tales que $t = n\delta + \eta$. Entonces

$$S(t) = S(n\delta + \eta) = S(n\delta)S(\eta) = S(\delta)^n S(\eta)$$

Por lo tanto $S(t)$ es invertible.

■

Teorema 4.5. *Si $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ genera un semigrupo uniformemente continuo si y solo si $A \in \mathcal{L}(X)$.*

Demostración:

$\Rightarrow] S(t)$ lineal acotada, existe la integral de Riemman y por el T.F.C.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_0^\rho S(t) dt = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{1} S(\rho) = I$$

entonces

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho S(t) dt - I \right\| = 0$$

entonces

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho S(t) dt - I \right\| < 1 \quad \text{para valores pequeños de } \rho$$

entonces $\frac{1}{\rho} \int_0^\rho S(t) dt$ es invertible y acotada.

Por hipótesis A genera un semigrupo uniformemente continuo

$$\frac{S(h) - I}{h} \int_0^\rho S(t) dt = \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho S(h+t) dt - \int_0^\rho S(t) dt \right)$$

cambio de variable $m = h + t$

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} \int_0^\rho S(t) dt &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} S(m) dm - \int_0^\rho S(m) dm \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^\rho S(m) dm + \int_\rho^{\rho+h} S(m) dm - \int_0^h S(m) dm - \int_h^\rho S(m) dm \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} S(m) dm - \int_0^h S(m) dm \right) \end{aligned}$$

como $\int_0^\rho S(t) dt$ es invertible

$$\frac{S(h) - I}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} S(m) dm - \int_0^h S(m) dm \right) \left(\int_0^\rho S(t) dt \right)^{-1}$$

aplicando límite cuando $h \rightarrow 0^+$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} S(m) dm - \int_0^h S(m) dm \right) \left(\int_0^\rho S(t) dt \right)^{-1}$$

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1} (S(\rho+h) - S(h)) \left(\int_0^\rho S(t) dt \right)^{-1}$$

$$A = (S(\rho) - I) \left(\int_0^\rho S(t) dt \right)^{-1}$$

luego

■

$$\begin{aligned}
 A(ax + by) &= (S(\rho) - I) \left(\int_0^\rho S(t)(ax + by) dt \right)^{-1} \\
 &= a(S(\rho) - I) \left(\int_0^\rho (S(t)x) dt \right)^{-1} + b(S(\rho) - I) \left(\int_0^\rho (S(t)y) dt \right)^{-1} \\
 &= aAx + bAy
 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 \|Ax\| &= \left\| (S(\rho) - I) \left(\int_0^\rho S(t)x dt \right)^{-1} \right\| \\
 &\leq \|S(\rho) - I\| K \|x\| \\
 &= MK \|x\| = C \|x\|
 \end{aligned}$$

entonces $A \in \mathcal{L}(X)$.

$\Leftarrow$] Sea $A \in \mathcal{L}(X)$, $t \geq 0$ se tiene $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$

luego

$$\begin{aligned}
 \|S(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n - I \right\| \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n \\
 &= t \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n(n-1)!} \|A\|^{n-1} \\
 &\leq t \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \|A\|^{n-1} \\
 &= t \|A\| e^{t\|A\|}
 \end{aligned}$$

aplicando límite cuando $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - I\| \leq \lim_{t \rightarrow 0} t \|A\| e^{t\|A\|}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - I\| = 0$$

entonces $S(t)$ es un semigrupo uniformemente continuo. Por otro lado

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\| &= \frac{1}{t} \|S(t) - I - At\| \\ &= \frac{1}{t} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n - I - At \right\| \\ &= \frac{1}{t} \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \end{aligned}$$

aplicando L'Hopital límite cuando $t \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\| &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1} \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n \right\| \\ \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\| &= 0 \end{aligned}$$

entonces A es el generador de $S(t)$.

■

4.5.1.3. Semigrupos Fuertemente Continuos

Otro tipo de semigrupos que son estudiados son los semigrupos fuertemente continuos, los cuales son muy utilizados para el estudio de muchas ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico o hiperbólicos. Además se presentarán resultados y propiedades para este tipo de semigrupos. (Engel et al., 2000 , Engel y Nagel, 2006 , Pazy, 1983 , Vrabie, 2003).

Definición 4.18. *Un semigrupo de operadores lineales acotados $\{S(t); t \geq 0\}$ se llama semigrupo fuertemente continuo para cada $x \in X$ se cumple*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x$$

Nota 4.4. Los semigrupos fuertemente continuos también son conocidos como **semi-grupos de clase C_0** o **C_0 -semigrupos**.

El siguiente resultado muestra la relación entre semigrupos uniformemente continuos y fuertemente continuos.

Teorema 4.6. Todo semigrupo uniformemente continuo es semigrupo de clase C_0 .

Demostración:

En efecto, $\forall \delta > 0$ se tiene que $\|S(t)x - I\| < \delta$

luego,

$$\|S(t)x - x\| = \|(S(t) - I)x\| \leq \|S(t) - I\| \|x\|$$

se toma $\delta = \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ y

$$\|S(t)x - x\| < \varepsilon$$

se obtiene que $\{S(t)\}$ es clase C_0 .

■

Acontinuación se presenta que el semigrupo del ejemplo 4.7 es un semigrupo de clase C_0 .

Ejemplo 4.14. Si A es un operador acotado entonces el semigrupo $S(t) = e^{tA}$ es fuertemente continuo para todo $x \in X$.

En efecto, para todo $x \in X$, se tiene que

$$\|S(t)x - I(x)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x - I(x) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \|x\|$$

$$\|S(t)x - I(x)\| \leq e^{\|A\|t} \|x\| - \|x\|$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - I(x)\| = \lim_{t \rightarrow 0^+} (e^{\|A\|t} \|x\| - \|x\|) = \|x\| - \|x\| = 0$$

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - I(x)\| \leq 0$$

luego,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x$$

entonces el semigrupo $S(t)$ es de clase C_0 .

Observación 4.5. El recíproco del teorema 4.6 no es cierto, es decir, no todo semigrupo de clase C_0 es semigrupo uniformemente continuo.

El siguiente ejemplo garantiza lo afirmado en la observación 4.5.

Ejemplo 4.15. Sea la familia de operadores

$$\begin{aligned} S : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ t &\mapsto S(t) : X \longrightarrow X \\ f(x) &\mapsto S(t)(f(x)) = f(x+t) \end{aligned}$$

Luego, cada función f es uniformemente continua entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe un δ tal que para todo $x, y \in D(f)$ se tiene que

$$\|x - y\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

despues,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)f - f\| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sup_{x > 0} \|S(t)f(x) - f(x)\| \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sup_{x > 0} \|f(x+t) - f(x)\| \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)f - f\| = \sup_{x > 0} \|f(x) - f(x)\| = 0$$

entonces el semigrupo $S(t)$ es de clase C_0 .

El siguiente resultado es una propiedad importante en los semigrupos de clase C_0 .

Teorema 4.7. Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de clase C_0 entonces existe $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(x)} \leq Me^{\omega t}$$

Demostración:

Por hipótesis $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo entonces $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es localmente acotado

$$\|S(t)\| \leq R \quad t \in [0, b]$$

Sea $t > 0$ arbitrario tal que $t = \eta + \tau$, $\eta \in \mathbb{N}$, $0 \leq \tau \leq 1$.

Luego,

$$S^\eta(1)S(\tau) = \underbrace{S(1)S(1) \cdots S(1)}_{\eta\text{-veces}} S(\tau) = S(\eta)S(\tau) = S(\eta + \tau) = S(t)$$

Sea $M = \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|S(\tau)\| < \infty$ entonces

$$\|S(t)\| = \|S^\eta(1)S(\tau)\| \leq \|S(1)\|^\eta \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|S(\tau)\| = \|S(1)\|^\eta M = Me^{\eta \ln \|S(1)\|}$$

$$\|S(t)\| \leq Me^{\eta \ln \|S(1)\|}$$

Si $\ln \|S(1)\| \leq 0$, entonces $e^{\eta \ln \|S(1)\|} \leq 1$, entonces $\|S(t)\| \leq M = Me^{t \cdot 0}$, por lo cual $\omega = 0$.

Si $\ln \|S(1)\| > 0$, entonces

$$\|S(t)\| \leq Me^{\eta \ln \|S(1)\|} \leq Me^{(\eta + \tau) \ln \|S(1)\|} = Me^{t \ln \|S(1)\|},$$

por lo cual $\omega = \ln \|S(1)\|$. Por tanto existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{t\omega}, \quad \forall t \geq 0.$$

■

El teorema anterior nos permite clasificar los semigrupos de clase C_0 .

Definición 4.19. Sea X un espacio de Banach. Una familia de operadores lineales acotados $S(t)$ definido de X en X .

1. El semigrupo $S(t)$ de clase C_0 es del tipo (M, ω) con $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$ si para todo $t \geq 0$ se tiene

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{t\omega}$$

2. El semigrupo $S(t)$ de clase C_0 es de **contracciones** si

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$$

el semigrupo de contracciones es del tipo $(1, 0)$.

El siguiente ejemplo muestra que el semigrupo de traslaciones es de contracciones.

Ejemplo 4.16. El semigrupo de traslaciones $S(t)(f(x)) = f(x + t)$ de clase C_0 es de contracciones, pues

$$\|S(t)f\| = \sup_{x \geq 0} \|f(x + t)\| = \sup_{m \geq 0} \|f(m)\| = \|f\|$$

luego

$$\|S(t)\| = 1$$

El siguiente resultado nos afirma que todo semigrupo de clase C_0 es continuo.

Teorema 4.8. Si $\{S(t), t \geq 0\}$ es un semigrupo de clase C_0 , entonces la aplicación $(t, x) \mapsto S(t)x$ es continua de $[0, \infty) \times X$ a X .

Demostración:

$S(t)x$ es continua si

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (t_0^+, y)} S(t)x = \lim_{(t,x) \rightarrow (t_0^-, y)} S(t)x = S(t_0)y$$

- Para probar que $\lim_{(t,x) \rightarrow (t_0^+, y)} \|S(t)x - S(t_0)y\| = 0$ se realiza un cambio de variable $h = t - t_0$

$$\begin{aligned}
\|S(t)x - S(t_0)y\| &= \|S(t_0 + h)x - S(t_0)y\| \\
&\leq \|S(t_0 + h)x - S(t_0 + h)y\| + \|S(t_0 + h)y - S(t_0)y\| \\
&\leq \|S(t_0 + h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x - y\| + \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \|S(h)y - y\| \\
&\leq \|S(t_0 + h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x - y\| + \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \|S(h)y - y\| \\
&\leq Me^{(t_0+h)\omega} \|x - y\| + Me^{t_0\omega} \|S(h)y - y\|
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
0 \leq \lim_{(t,x) \rightarrow (t_0^+, y)} \|S(t)x - S(t_0)y\| &\leq \lim_{(t,x) \rightarrow (t_0^+, y)} (Me^{(t_0+h)\omega} \|x - y\| + Me^{t_0\omega} \|S(h)y - y\|) = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{(t,x) \rightarrow (t_0^+, y)} \|S(t)x - S(t_0)y\| = 0
\end{aligned}$$

- Para probar que $\lim_{(t,x) \rightarrow (t_0^-, y)} \|S(t)x - S(t_0)y\| = 0$ se realiza un cambio de variable $h = t_0 - t$

$$\begin{aligned}
\|S(t)x - S(t_0)y\| &= \|S(t_0 - h)x - S(t_0)y\| \\
&\leq \|S(t_0 - h)x - S(t_0 - h)y\| + \|S(t_0 - h)y - S(t_0)y\| \\
&\leq \|S(t_0 - h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x - y\| + \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \|S(-h)y - y\| \\
&\leq \|S(t_0 - h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x - y\| + \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \|S(-h)y - y\| \\
&\leq Me^{(t_0-h)\omega} \|x - y\| + Me^{t_0\omega} \|S(-h)y - y\|
\end{aligned}$$

Luego

$$0 \leq \lim_{(t,x) \rightarrow (t_0^-, y)} \|S(t)x - S(t_0)y\| \leq \lim_{(t,x) \rightarrow (t_0^-, y)} (Me^{(t_0-h)\omega} \|x - y\| + Me^{t_0\omega} \|S(-h)y - y\|) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(t,x) \rightarrow (t_0^-, y)} \|S(t)x - S(t_0)y\| = 0$$

■

A continuación se presentán algunas propiedades y resultados para el generador de los semigrupos de clase C_0 los cuales pueden ser vistos en Pazy (1983) y Vrabie (2003).

Teorema 4.9. *Si A es generador del semigrupo de clase C_0 $\{S(t)\}$, entonces:*

(1) *Para todo $x \in X$ y todo $t \geq 0$, se tiene*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = S(t)x$$

(2) *Para todo $x \in X$ y todo $t > 0$, se tiene*

$$\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A) \quad y \quad A \left(\int_0^t S(\tau)x d\tau \right) = S(t)x - x$$

(3) *Para todo $x \in D(A)$ y todo $t \geq 0$, se tiene que $S(t)x \in D(A)$. Además, la aplicación $t \mapsto S(t)x$ es de clase C^1 en $[0, +\infty)$, y satisface*

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = S(t)Ax = AS(t)x$$

(4) *Para todo $x \in D(A)$ y todo $0 \leq s \leq t < +\infty$ se tiene*

$$\int_s^t S(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = S(t)x - S(s)x$$

Demostración

En efecto

(1) Observe que $S(t)x$ es continua, entonces la integral de Riemman existe

$$\int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau$$

luego aplicando el T.F.C. se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} S(t+h)x = S(t+0)x = S(t)x$$

(2) Sean $x \in X$, $h > 0$ y

$$\begin{aligned}
 \frac{S(h) - I}{h} \int_a^b S(\tau) x d\tau &= \frac{1}{h} \int_a^b (S(h) - I) S(\tau) x d\tau \\
 &= \frac{1}{h} \left[\int_a^b S(h + \tau) x d\tau - \int_a^b S(\tau) x d\tau \right] \\
 &= \frac{1}{h} \left[\int_{a+h}^{b+h} S(\alpha) x d\alpha - \int_a^b S(\tau) x d\tau \right] \\
 &= \frac{1}{h} \left[\int_{a+h}^{b+h} S(\tau) x d\tau - \int_a^b S(\tau) x d\tau \right] \\
 &= \frac{1}{h} \left[\int_{a+h}^b d\tau + \int_b^{b+h} d\tau - \int_a^{a+h} d\tau - \int_{a+h}^b d\tau \right] \\
 &= \frac{1}{h} \left[\int_b^{b+h} S(\tau) x d\tau - \int_a^{a+h} S(\tau) x d\tau \right]
 \end{aligned}$$

aplicando el límite y L'Hopital respecto a h

$$\begin{aligned}
 A \left(\int_a^b S(\tau) x d\tau \right) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{S(h) - I}{h} \int_a^b S(\tau) x d\tau \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \left[\int_b^{b+h} S(\tau) x d\tau - \int_a^{a+h} S(\tau) x d\tau \right] \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (S(b+h)x - S(a+h)x) \\
 &= S(b)x - S(a)x
 \end{aligned}$$

En particular si $a = 0$ y $b = t$ se tiene que

$$A \left(\int_0^t S(\tau) x d\tau \right) = S(t)x - x$$

$$\text{y } \int_0^t S(\tau) x d\tau \in D(A).$$

(3) Sean $x \in D(A)$, $t \geq 0$ y $h > 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} - S(t)Ax \right\| &= \left\| S(t) \left(\frac{S(h)x - x}{h} \right) - S(t)Ax \right\| \\
 &= \left\| S(t) \left(\frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right) \right\| \\
 &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right\|
 \end{aligned}$$

aplicando el límite

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} - S(t)Ax \right\| &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} - S(t)Ax \right\| = 0$$

Por lo cual se tiene $\frac{d^+}{dt}S(t)x = S(t)Ax$

Sean $x \in D(A)$, $t \geq 0$ y $h < 0$, con $t+h \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} - S(t)Ax \right\| &= \left\| S(t+h) \left(\frac{x - S(-h)x}{h} \right) - S(t+h)S(-h)Ax \right\| \\
 &= \left\| S(t+h) \left(\frac{x - S(-h)x}{h} - S(-h)Ax \right) \right\| \\
 &\leq \|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \frac{x - S(-h)x}{h} - Ax + Ax - S(-h)Ax \right\| \\
 &\leq \|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)} \left(\left\| \frac{S(-h)x - x}{-h} - Ax \right\| + \|S(-h)Ax - Ax\| \right)
 \end{aligned}$$

aplicando el límite, tomamos $\|S(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)} = \| \cdot \|_{\mathcal{L}(X)}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \left\| \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} - S(t)Ax \right\| &\leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \| \cdot \|_{\mathcal{L}(X)} \left(\left\| \frac{S(-h)x - x}{-h} - Ax \right\| + \right. \\ &\quad \left. \| S(-h)Ax - Ax \| \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \left\| \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} - S(t)Ax \right\| = 0$$

Por lo cual se tiene $\frac{d^-}{dt}S(t)x = S(t)Ax$

Luego, aplicando la definición del operador A tenemos

$$\begin{aligned} S(t)Ax &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\ &= AS(t)x \end{aligned}$$

se cumple que $S(t)x \in D(A)$, además de la igualdad $S(t)Ax = AS(t)x$.

(4) Sea $x \in D(A)$ y $0 \leq s \leq t < +\infty$

$$\int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau$$

esta igualdad se cumple, ya que en el ítem anterior se cumple que $S(t)Ax = AS(t)x$.

luego,

$$\begin{aligned} \int_s^t AS(\tau)x d\tau &= \int_s^t \frac{d}{d\tau} S(\tau)x d\tau \\ &= S(t)Ax - S(s)Ax \end{aligned}$$

entonces queda demostrado que

$$\int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau = S(t)Ax - S(s)Ax$$

■

Algo resaltante en el generador de los semigrupos de clase C_0 es que es cerrados y densamente definido.

Teorema 4.10. *Si $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ genera a un semigrupo de clase C_0 , entonces $D(A)$ es denso en X y A es un operador cerrado.*

Demostración:

i) $D(A)$ es denso en X .

En efecto, si $x \in X$ y la sucesión $x_n = \frac{1}{n} \int_0^n S(\tau)xd\tau$.

Por el teorema 4.9 $x_n \in D(A)$ y

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0^+} x_n &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1}{n} \int_0^n S(\tau)xd\tau \\ &= S(0)x \\ &= x \end{aligned}$$

entonces $x \in \overline{D(A)}$.

Por otro lado si $x \in \overline{D(A)}$ entonces existe la sucesión $x_n \in D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$, entonces x_n es de Cauchy y además X es de Banach se tiene que $x \in X$.

Por lo tanto se prueba $\overline{D(A)} = X$.

II) A es un operador cerrado.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de $D(A)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$$

se debe de probar que $x \in D(A)$ y $Ax = y$.

En efecto por teorema 4.9

$$S(t)x_n - x_n = \int_0^t S(\tau)(Ax_n)d\tau$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t S(\tau)(Ax_n)d\tau - \int_0^t S(\tau)y d\tau \right\| &\leq \int_0^t \|S(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \|Ax_n - y\| d\tau \\ &\leq \int_0^t M e^{\omega\tau} \|Ax_n - y\| d\tau \\ &= \frac{M}{\omega} e^{t\omega} \|Ax_n - y\| - \frac{M}{\omega} \|Ax_n - y\| \\ &= \frac{M}{\omega} \|Ax_n - y\| (e^{t\omega} - 1) \end{aligned}$$

aplicando el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t S(\tau)(Ax_n)d\tau - \int_0^t S(\tau)y d\tau \right\| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{\omega} \|Ax_n - y\| (e^{t\omega} - 1) \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \int_0^t S(\tau)y d\tau &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t S(\tau)(Ax_n) d\tau \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S(t)x_n - x_n) \\
 &= S(t)x - x
 \end{aligned}$$

Ahora, multiplicamos $\frac{1}{t}$ y aplicamos límite

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)y d\tau &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \\
 &= Ax
 \end{aligned}$$

Por el teorema 4.9 el lado izquierdo resulta

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)y d\tau = y$$

entonces $Ax = y$ y $x \in D(A)$.

■

El siguiente teorema afirma que si dos operadores generan el mismo semigrupo de clase C_0 , entonces estos operadores son los mismos. Además si dos semigrupos de clase C_0 son generados por un mismo operador, entonces los semigrupos son iguales.

Teorema 4.11. *Sea $S(t)$ y $T(t)$ dos semigrupos de clase C_0 generados por A y B respectivamente. $A = B$ si y solo si $S(t) = T(t)$, para todo $t \geq 0$.*

Demostración:

$\Rightarrow$] Sea $x \in D(A)$, $t \geq 0$ y sea $f : [0, t] \rightarrow X$ definida

$$f(s) = S(t-s)T(s)x \quad \forall s \in [0, t]$$

Derivando con respecto a s y del teorema 4.9

$$\begin{aligned}
 f'(s) &= S'(t-s)T(s)x + S(t-s)T'(s)x \\
 &= -AS(t-s)T(s)x + S(t-s)BT(s)x \\
 &= -S(t-s)AT(s)x + S(t-s)BT(s)x
 \end{aligned}$$

Por hipótesis $A = B$, entonces

$$f'(s) = -S(t-s)AT(s)x + S(t-s)AT(s)x = 0$$

luego es constante en todo su dominio, es decir $f(0) = f(t)$

$$S(t)x = f(0) = f(t) = T(t)x, \quad x \in D(A)$$

$\Leftarrow$] Por hipótesis $S(t) = T(t)$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = Bx$$

entonces $A = B$.

■

El siguiente resultado muestra la existencia y unicidad de un problema de Cauchy 4.4, el cual es consecuencia de los teoremas 4.9 y 4.11.

Teorema 4.12. *Si el operador $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ genera al semigrupo $S(t)$ de clase C_0 y el problema de Cauchy es dado por*

$$\begin{cases} u' &= Au \\ u(0) &= \xi, \xi \in D(A) \end{cases} \quad (4.4)$$

entonces la aplicación $u : [0, +\infty] \rightarrow X$, definido por $u(t) = S(t)\xi$, es la única solución del problema de Cauchy 4.4.

Demostración:

Para la existencia de la solución del problema de Cauchy se tiene

$$u'(t) = S'(t)\xi = AS(t)\xi = Au$$

$$u(0) = S(0)\xi = \xi$$

Para la unicidad considere $v(t) = T(t)\xi$ otra solución del problema de Cauchy, y como A genera a $T(t)$, entonces el teorema 4.11 se tiene $T(t) = S(t)$.

■

El teorema anterior muestra la existencia y unicidad de un problema de Cauchy 4.4, es importante que la condición inicial este en el dominio del operador A , ya que si la condición inicial no se encuentra en el dominio entonces la función no es necesariamente diferenciable como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.17. Sea $X = C_{ub}(\mathbb{R}_+)$ el espacio de funciones uniformemente continuas y acotadas de $\mathbb{R}_+$ hacia $\mathbb{R}$ y además se define un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ donde $D(A) = \{u \in X; u' \in X\}$ y $Au = u'$ para todo $u \in D(A)$.

Se toma una función $\xi \notin D(A)$, se observa que el problema de Cauchy 4.4 no tiene una solución clásica.

Reescribimos $A = \frac{d}{ds}$ entonces

$$\begin{cases} u' = \frac{d}{ds}u \\ u(0, s) = \xi(s) \end{cases}$$

La posible solución de u sería $u(t, s) = \xi(t + s)$ donde

$$\frac{du}{dt} = \xi'(t + s) \frac{d}{dt}(t + s) = \xi'(t + s)$$

$$\frac{du}{ds} = \xi'(t + s) \frac{d}{ds}(t + s) = \xi'(t + s)$$

entonces $\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds}$ y además se obtiene que $u(0, s) = \xi(s)$

4.5.2. Teorema de Hille-Yosida

En seguida se presenta uno de los resultados más resaltantes dentro de la teoría de semigrupos el cual es el Teorema de Hille-Yosida (Pazy, 1983 , Vrabie, 2003). Para la

demostración del teorema utilizaremos el concepto de resolvente el cual es mencionado en la sección de preliminares.

Teorema 4.13. (Hille-Yosida) *El operador lineal $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ genera un semigrupo de clase C_0 de contracciones si y solo si*

i) A está densamente definida y cerrada

ii) $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ y para cada $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

Demostración:

$\Rightarrow$] Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ el generador de un semigrupo de clase C_0 de contracciones $\{S(t), t \leq 0\}$. Por el teorema 4.10, $D(A)$ es denso en X y A es cerrado, se cumple la condición i).

Para la condición ii), se define

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

luego para $a, b > 0$ y $a < b$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b e^{-\lambda t} S(t)x dt \right\| &\leq \int_a^b e^{-\lambda t} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(x)} \|x\| dt \\ &\leq \int_a^b e^{-\lambda t} \|x\| dt \\ &= \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{\lambda} \|x\| \end{aligned}$$

después,

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)x\| &= \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \right\| \\ &\leq \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda} \|x\| \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|x\| \end{aligned}$$

entonces

$$\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

Ahora se probará que $R(\lambda)$ es igual a $R(\lambda, A)$. Sea $x \in X$, $\lambda > 0$ y $h > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (S(h) - I) R(\lambda)x &= \frac{1}{h} S(h) R(\lambda)x - \frac{1}{h} R(\lambda)x \\ &= \frac{1}{h} S(h) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(h+t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt + \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt \end{aligned}$$

aplicando el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (S(h) - I) R(\lambda)x = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt \right)$$

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lambda e^{\lambda h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - S(h)x \right)$$

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - I(x)$$

luego

$$x = \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x = (\lambda I - A) R(\lambda)x.$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
 R(\lambda)Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)Ax dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AS(t)x dt \\
 &= A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \\
 &= AR(\lambda)x
 \end{aligned}$$

entonces se tiene que $R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x$.

Por lo tanto

$$R(\lambda; A)x = (\lambda I - A)^{-1}x = R(\lambda)x$$

$$R(\lambda; A) = R(\lambda)$$

$$\text{entonces } \|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

■

Antes de demostrar el regreso del teorema, necesitaremos dar los siguientes resultados, los cuales pueden ser encontrados en Vrabie (2003).

Definición 4.20. Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal que satisface las condiciones i) y ii) del teorema Hille-Yosida 4.13 y $\lambda > 0$. El operador $A_\lambda : X \rightarrow X$, definida $A_\lambda = \lambda AR(\lambda; A)$ se llama **aproximación de Yosida** de A .

Lema 4.1. Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal que satisface i) y ii) del teorema Hille-Yosida 4.13, entonces

- (I) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x$ para cada $x \in X$,
- (II) $A_\lambda x = \lambda^2 R(\lambda; A)x - \lambda x$ para cada $x \in X$,
- (III) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$ para cada $x \in D(A)$.

Demostración:

(I) Sea $x \in D(A)$ y $\lambda > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &= \|AR(\lambda; A)x\| \\
 &= \|R(\lambda; A)Ax\| \\
 &\leq \|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \|Ax\| \\
 &\leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\|
 \end{aligned}$$

aplicando el límite

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda} \|Ax\| \right) \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$

entonces $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x$, para todo $x \in X$ ya que $D(A)$ es denso en X .

(II) Sea $x \in X$ y $\lambda > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 R(\lambda; A)x - \lambda x &= \lambda^2 R(\lambda; A)x - \lambda (\lambda I - A) R(\lambda; A)x \\
 &= \lambda^2 R(\lambda; A)x - \lambda^2 R(\lambda; A)x + \lambda AR(\lambda; A)x \\
 &= \lambda AR(\lambda; A)x \\
 &= A_\lambda x
 \end{aligned}$$

entonces $\lambda^2 R(\lambda; A)x - \lambda x = A_\lambda x$.

(III) Sea $x \in D(A)$ y $\lambda > 0$, se tiene que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda; A)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A)Ax = Ax$$

con lo que se concluye con la demostración del lema [4.1](#).



Lema 4.2. *Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal que satisface i) y ii) del teorema Hille-Yosida 4.13. Entonces, para cada $\lambda > 0$, A_λ genera un semigrupo uniformemente continuo $\{e^{tA_\lambda}, t \geq 0\}$ que satisface*

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$$

para cada $t \geq 0$. Además, para cada $x \in X$ y cada $\lambda, \mu > 0$ se tiene que

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|$$

Demostración:

Como $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ y además $D(A_\lambda) = X$, por el teorema 4.5 se deduce que genera un semigrupo uniformemente continuo $\{e^{tA_\lambda}, t \geq 0\}$.

Luego

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| e^{t(\lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda; A)} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \|e^{-t\lambda I}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq e^{t\lambda^2 \|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)}} e^{-t\lambda} \\ &\leq e^{t\lambda} e^{-t\lambda} = 1 \end{aligned}$$

entonces $\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} x) ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \left\| \frac{d}{ds} e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} x \right\| ds \\
&= \int_0^1 \|te^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} A_\lambda x - te^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} A_\mu x\| ds \\
&= \int_0^1 t \|e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} (A_\lambda - A_\mu)x\| ds \\
&\leq \int_0^1 t \|e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu}\|_{\mathcal{L}(X)} \|(A_\lambda - A_\mu)x\| ds \\
&\leq \int_0^1 t \|(A_\lambda - A_\mu)x\| ds = t \|(A_\lambda - A_\mu)x\|
\end{aligned}$$

entonces $\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t \|(A_\lambda - A_\mu)x\|$

■

Ahora se demostrará el regreso del teorema Hille-Yosida [4.13](#).

$\Leftarrow$] Por los lemas [4.1](#) y [4.2](#) se deduce que existe un operador $S(t) : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ tal que para cada $x \in D(A)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x = S(t)x$$

entonces uniformemente en intervalos compactos del $\mathbb{R}_+$.

Luego por el lema [4.2](#) se tiene que

$$\|S(t)x\| \leq \|x\| \quad t \geq 0 \quad \text{y } x \in D(A)$$

ya que $D(A)$ es denso en X , entonces la desigualdad anterior se cumple para cada $x \in X$. Como $\|S(t)x\| \leq \|x\|$, entonces se tiene que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$$

Por otro lado $S(t)$ es un semigrupo pues es acotado por lo anterior, además $S(0)x = I$ y $S(t+s) = S(t)S(s)$.

Para cada $t > 0$ y $x \in X$, $x_\varepsilon \in D(A)$ tal que $\|x - x_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \|S(t)x - x\| &= \|S(t)x - S(t)x_\varepsilon + S(t)x_\varepsilon - e^{tA_\lambda}x_\varepsilon + e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon + x_\varepsilon - x\| \\
 &\leq \|S(t)x - S(t)x_\varepsilon\| + \|S(t)x_\varepsilon - e^{tA_\lambda}x_\varepsilon\| + \|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x\| \\
 &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x - x_\varepsilon\| + \|S(t)x_\varepsilon - e^{tA_\lambda}x_\varepsilon\| + \|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x\| \\
 &\leq 2\|x - x_\varepsilon\| + \|S(t)x_\varepsilon - e^{tA_\lambda}x_\varepsilon\| + \|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\| \\
 &\leq 2\varepsilon + \varepsilon + \|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\| \\
 &\leq 3\varepsilon + \|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\|
 \end{aligned}$$

se sabe que $\{e^{tA_\lambda}, t \geq 0\}$ es un semigrupo uniformemente continuo, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon)$ tal que $\|e^{tA_\lambda} - I\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \varepsilon$, para cada $t \in (0, \delta(\varepsilon))$.

$$\begin{aligned}
 \|S(t)x - x\| &\leq 3\varepsilon + \|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\| \\
 &\leq 3\varepsilon + \|e^{tA_\lambda} - I\|_{\mathcal{L}(X)} \|x_\varepsilon\| \\
 &\leq 3\varepsilon + \varepsilon \|x_\varepsilon\|
 \end{aligned}$$

entonces se dice que $\{S(t), t \geq 0\}$ es un semigrupo de clase C_0 .

Luego, sea $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ es el generador de $S(t)$. Se tiene que $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
 \|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - S(t)Ax\| &= \|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - e^{tA_\lambda}Ax + e^{tA_\lambda}Ax - S(t)Ax\| \\
 &\leq \|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - e^{tA_\lambda}Ax\| + \|e^{tA_\lambda}Ax - S(t)Ax\| \\
 &\leq \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{tA_\lambda}Ax - S(t)Ax\|
 \end{aligned}$$

aplicando límite

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|e^{tA_\lambda} A_\lambda x - S(t)Ax\| &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{tA_\lambda} Ax - S(t)Ax\| \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} A_\lambda x = S(t)Ax$$

es uniforme en intervalos compactos $\mathbb{R}_+$.

Luego se $h > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} S(h)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{hA_\lambda} x - x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^h (e^{tA_\lambda} A_\lambda x) dt \\ &= \int_0^h S(t)Ax dt \end{aligned}$$

Ahora dividiendo entre h y aplicando límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)Ax dt$$

$$Bx = S(0)Ax$$

$$Bx = Ax$$

entonces $D(A) \subset D(B)$.

Como B es el generador de un semigrupo de clase C_0 de contracciones, entonces aplicando la condición necesaria del teorema 4.13 se tiene que el $D(B)$ es denso en X , $I - B$ es invertible y $1 \in \rho(B)$. Además por hipótesis el operador A cumple con la condición ii), entonces $1 \in \rho(A)$.

Luego,

$$(I - B) D(A) = (I - A) D(A) = X$$

entonces $(I - B)^{-1} X = D(A)$, por lo que $D(B) \subset D(A)$.

Por lo tanto $D(A) = D(B)$ y A genera un semigrupo de clase C_0 de contracciones. ■

4.5.3. Teorema de Feller-Miyadera-Phillips

Otro de los resultados importantes de la teoría de semigrupos es el Teorema de Feller-Miyadera-Phillips, este teorema puede ser visto en Pazy (1983) y Vrabie (2003). Previamente se mostrarán dos resultados los cuales serán de ayuda para la demostración del teorema.

Teorema 4.14. *Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal. Si λ, μ son valores regulares, es decir, $\lambda, \mu \in \rho(A)$, y $R(\lambda; A), R(\mu; A) \in \mathcal{L}(X)$, entonces*

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A)$$

a esta ecuación es llamada como la **ecuación resolvente**.

Demostración:

Sea $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} R(\lambda; A)x &= R(\lambda; A)(\mu I - A)R(\mu; A)x \\ &= R(\lambda; A)(\mu I - \lambda I + \lambda I - A)R(\mu; A)x \\ &= R(\lambda; A)\{(\mu - \lambda)I + (\lambda I - A)\}R(\mu; A)x \\ &= R(\lambda; A)(\mu - \lambda)IR(\mu; A)x + R(\lambda; A)(\lambda I - A)R(\mu; A)x \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A)x + R(\mu; A)x \end{aligned}$$

entonces

$$R(\lambda; A)x = (\mu - \lambda) R(\lambda; A)R(\mu; A)x + R(\mu; A)x$$

$$R(\lambda; A)x - R(\mu; A)x = (\mu - \lambda) R(\lambda; A)R(\mu; A)x$$

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A)x = (\mu - \lambda) R(\lambda; A)R(\mu; A)$$

■

Lema 4.3. Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador lineal que satisface que $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ y

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \quad M \geq 1$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda > 0$. Entonces existe una norma $|\cdot|$ en X tal que

$$\|x\| \leq |x| \leq M \|x\| \quad y$$

$$|\lambda R(\lambda; A)x| \leq |x|$$

para cada $x \in X$ y $\lambda > 0$.

Demostración: Para $\mu > 0$ se define $|\cdot|_\mu : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ donde

$$|x|_\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu; A)^n x\|$$

se tiene que

$$\begin{aligned} |x|_\mu &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu; A)^n x\| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu; A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\| \\ &= M \|x\| \end{aligned}$$

luego,

$$\|x\| = \|\mu^0 R(\mu; A)^0 x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu; A)^n x\| = |x|_\mu$$

entonces se cumple que

$$\|x\| \leq |x|_\mu \leq M \|x\| \tag{4.5}$$

además

$$\begin{aligned}
 |\mu R(\mu; A)x|_\mu &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu; A)^n \mu R(\mu; A)x\| \\
 &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^{n+1} R(\mu; A)^{n+1} x\| \\
 &= \sup_{k \geq 1} \|\mu^k R(\mu; A)^k x\| \\
 &\leq \sup_{k \geq 0} \|\mu^k R(\mu; A)^k x\| \\
 &\leq |x|_\mu
 \end{aligned}$$

entonces

$$|\mu R(\mu; A)x|_\mu \leq |x|_\mu$$

Sea $\lambda \in (0, \mu]$, se tiene por el teorema [4.14](#)

$$R(\lambda; A) = R(\mu; A) + (\mu - \lambda)R(\mu; A)R(\lambda; A)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 |R(\lambda; A)x|_\mu &\leq |R(\mu; A)x|_\mu + |(\mu - \lambda)R(\mu; A)R(\lambda; A)x|_\mu \\
 |R(\lambda; A)x|_\mu &\leq \frac{1}{\mu} |x|_\mu + \frac{\mu - \lambda}{\mu} |R(\lambda; A)x|_\mu \\
 \left(1 - \frac{\mu - \lambda}{\mu}\right) |R(\lambda; A)x|_\mu &\leq \frac{1}{\mu} |x|_\mu \\
 \frac{\lambda}{\mu} |R(\lambda; A)x|_\mu &\leq \frac{1}{\mu} |x|_\mu \\
 \lambda |R(\lambda; A)x|_\mu &\leq |x|_\mu
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Luego, sea $\lambda \in (0, \mu]$

$$\begin{aligned}
 \|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\| &\leq |\lambda^n R(\lambda; A)^n x|_\mu \\
 &\leq |x|_\mu
 \end{aligned}$$

tomando el $\sup_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x|_\mu$$

$$|x|_\lambda \leq |x|_\mu$$

Ahora se define

$$|x| = \lim_{\mu \rightarrow \infty} |x|_\mu$$

aplicando límite en 4.5 y 4.6 cuando el μ tiende hacia el infinito se obtiene

$$\|x\| \leq |x| \leq M \|x\| \quad \text{y} \quad \lambda |R(\lambda; A)x| \leq |x|$$

■

Ahora se presentará el teorema de Feller-Miyadera-Phillips, el cuál es una generalización del Teorema Hille-Yosida.

Teorema 4.15. (*Feller-Miyadera-Phillips*) *El operador $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ genera un semigrupo de clase C_0 del (M, ω) si y solo si:*

(I) *A está densamente definida y cerrada*

(II) *$(\omega, \infty) \subseteq \rho(A)$, y para cada $\lambda > \omega$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$\|R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

Demostración:

$\Rightarrow$] Se considera $\omega = 0$. Se define $|||\cdot||| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$|||x||| = \sup_{t \geq 0} \|S(t)x\|$$

se tiene que

$$\begin{aligned} |||x||| &= \sup_{t \geq 0} \|S(t)x\| \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\| \\ &\leq M \|x\| \end{aligned}$$

luego,

$$\|x\| = \|S(0)x\| \leq \sup_{t \geq 0} \|S(t)x\| = \|x\|$$

entonces

$$\|x\| \leq \|x\| \leq M \|x\| \quad x \in X$$

Se observa que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes en X . Además

$$\begin{aligned} \|S(t)x\| &= \sup_{s \geq 0} \|S(s)S(t)x\| \\ &= \sup_{s \geq 0} \|S(s+t)x\| \\ &= \sup_{m \geq t} \|S(m)x\| \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \|S(t)x\| \\ &\leq \|x\| \end{aligned}$$

por lo cual $\{S(t), t \leq 0\}$ es un semigrupo de clase C_0 de contracciones en $(X, \|\cdot\|)$.

Por el teorema Hille-Yosida 4.13 se garantiza que A es cerrado y densamente definido; además $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ y

$$\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda} \quad \text{para cada } \lambda > 0 = \omega$$

luego,

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; A)^n x\| &\leq \|R(\lambda; A)^n x\| \\ &\leq \|R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda^n} \|x\| \\ &\leq \frac{M}{\lambda^n} \|x\| \end{aligned}$$

entonces

$$\|R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda^n}$$

quedando demostrado las dos condiciones.

$\Leftarrow$] Suponga que (i) y (ii) se cumplen, por el lema 4.3 existe una norma equivalente $|\cdot|$ en X que satisface

$$\|x\| \leq |x| \leq M \|x\| \quad y$$

$$|\lambda R(\lambda; A)x| \leq |x| \quad \text{para cada } x \in X \quad y \quad \lambda > 0$$

entonces en $(X, |\cdot|)$, A satisface las hipótesis del teorema Hille-Yosida 4.13 y por lo tanto genera un semigrupo de clase C_0 de contracciones $\{S(t), t \geq 0\}$

luego,

$$\|S(t)x\| \leq |S(t)x|$$

$$\leq |x|$$

$$\leq M \|x\|$$

entonces $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ para cada $t \geq 0$, donde $S(t)$ es un semigrupo de clase C_0 de contracciones del tipo de $(M, 0)$.

- Sea $T(t) = e^{-\omega t} S(t)$, donde el $\{S(t), t \geq 0\}$ es un semigrupo de clase C_0 de contracciones del tipo (M, ω) , entonces

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|e^{-\omega t} S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$$

$$= e^{-\omega t} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$$

$$\leq e^{-\omega t} M e^{\omega t}$$

$$\leq M$$

entonces $T(t)$ es un semigrupo de clase C_0 de contracciones del tipo $(M, 0)$.

Luego, sea A el generador de $S(t)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(T(t)x) &= \frac{d}{dt}(e^{-\omega t}S(t)x) \\
 &= -\omega e^{-\omega t}S(t)x + e^{-\omega t}AS(t)x \\
 &= (-\omega I + A)e^{-\omega t}S(t)x \\
 &= (-\omega I + A)T(t)x
 \end{aligned}$$

entonces el generador de $T(t)$ es $A - \omega I$.

Como $T(t)$ es un semigrupo de clase C_0 de contracciones del tipo $(M, 0)$, esto equivale a decir que $A - \omega I$ es cerrado y densamente definido y

$$\|R(\lambda; A - \omega I)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda^n}$$

Se tiene que $R(\lambda; A - \omega I) = (\lambda I - A + \omega I)^{-1} = ((\lambda + \omega)I - A)^{-1} = R(\lambda + \omega; A)$, entonces

$$R(\lambda; A - \omega I) = R(\lambda + \omega; A)$$

luego,

$$\begin{aligned}
 \|R(\lambda + \omega; A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|R(\lambda; A - \omega I)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \\
 &\leq \frac{M}{\lambda^n}
 \end{aligned}$$

sea $\theta = \lambda + \omega$, entonces se tiene

$$\|R(\theta; A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\theta - \omega)^n}$$

además A es cerrado y densamente definido, con lo cual concluye la demostración del teorema. ■

4.5.4. Teorema de Lumer-Phillips

Ahora se mostrará otra característica de los generadores de los semigrupos de clase C_0 de contracciones el cuál se menciona en el teorema de Lumer-Phillips (Vrabie, 2003),

pero antes de enunciar el teorema se presentará un concepto y un resultado de operador disipativo.

Definición 4.21. *Un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ se dice **disipativo** si para cada $x \in X$ existe un $x^* \in F(x)$ tal que*

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$$

donde X es un espacio de Banach real o complejo con norma $\| \cdot \|$ y $F : X \rightarrow 2^{X^}$ es la aplicación dualidad definido*

$$F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 = \langle x^*, x \rangle\}$$

Teorema 4.16. *Un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ es disipativo si y solo si para cada $x \in D(A)$ y $\lambda > 0$ se tiene que*

$$\lambda \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$$

Demostración:

$\Rightarrow$] Sea A un operador disipativo entonces existe un $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, se toma $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)x\| \|x\| &= \|(\lambda I - A)x\| \|x^*\| \geq |\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle| \\ &\geq \operatorname{Re} (\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle) \\ &= \operatorname{Re} (\langle \lambda x, x^* \rangle) - \operatorname{Re} (\langle Ax, x^* \rangle) \\ &\geq \operatorname{Re} (\langle \lambda x, x^* \rangle) \\ &= \lambda \operatorname{Re} (\langle x, x^* \rangle) \\ &= \lambda \|x\|^2 \end{aligned}$$

entonces $\lambda \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$.

$\Leftarrow$] Sea $x \in D(A)$ y $\lambda > 0$ se tiene que

$$\lambda \|x\| \leq \|\lambda x - Ax\|$$

Se toma $y^* \in F(\lambda x - Ax)$ y $z^* = \frac{y^*}{\|y^*\|}$, entonces $\|z^*\| = 1$ y $z^* \in B_{X^*}$, sabiendo que B_{X^*} es la bola unitaria en X^* por el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki B_{X^*} es compacta en la topología debil-estrella de X^* .

Luego, se tiene

$$\|y^*\| = \|\lambda x - Ax\|$$

además,

$$\langle \lambda x - Ax, z^* \rangle = \left\langle \lambda x - Ax, \frac{y^*}{\|y^*\|} \right\rangle = \frac{1}{\|y^*\|} \langle \lambda x - Ax, y^* \rangle = \frac{1}{\|y^*\|} \|y^*\|^2 = \|y^*\|$$

$$\Rightarrow \langle \lambda x - Ax, z^* \rangle = \|\lambda x - Ax\|$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| &\leq \|\lambda x - Ax\| \\ &= \langle \lambda x - Ax, z^* \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle \lambda x - Ax, z^* \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle \lambda x, z^* \rangle - \operatorname{Re} \langle Ax, z^* \rangle \\ &= |\langle \lambda x, z^* \rangle| - \operatorname{Re} \langle Ax, z^* \rangle \\ &\leq \|z^*\| \|\lambda x\| - \operatorname{Re} \langle Ax, z^* \rangle \\ &= \lambda \|x\| - \operatorname{Re} \langle Ax, z^* \rangle \\ \Rightarrow 0 &\leq -\operatorname{Re} \langle Ax, z^* \rangle \end{aligned}$$

Esto implica que $Re \langle Ax, z^* \rangle \leq 0$ para $\lambda > 0$. Luego

$$\lambda \|x\| \leq \lambda Re \langle x, z^* \rangle - Re \langle Ax, z^* \rangle$$

$$\lambda \|x\| + Re \langle Ax, z^* \rangle \leq \lambda Re \langle x, z^* \rangle$$

$$\lambda \|x\| + \langle Ax, z^* \rangle \leq \lambda Re \langle x, z^* \rangle$$

$$\lambda \|x\| + \|Ax\| \leq \lambda Re \langle x, z^* \rangle$$

$$\|x\| + \frac{\|Ax\|}{\lambda} \leq Re \langle x, z^* \rangle$$

Como B_{X^*} es compacta en la topología debil-estrella de X^* , entonces para la sucesión y_n^* va existir una subsucesión $y_{n_j}^*$ que converge a y en B_{X^*} . Por tanto la expresión

$$\|x\| + \frac{\|Ax\|}{\lambda} \leq Re \langle x, y_{n_j}^* \rangle$$

converge a

$$\|x\| \leq Re \langle x, y \rangle \quad y \quad Re \langle Ax, y \rangle \leq 0 \quad \text{para } y \in B_{X^*}$$

además $Re \langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|$, entonces $Re \langle x, y \rangle = \|x\|$.

Se define $x^* = y \|x\|$ entonces $\|x^*\| = \|x\|$ por lo cual $x^* \in F(x)$, y además

$$Re \langle Ax, x^* \rangle \leq |\langle Ax, x^* \rangle| = |\langle Ax, y \|x\| \rangle| = \|x\| |\langle Ax, y \rangle| = \|x\| Re \langle Ax, y \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$$

Por lo tanto, A es disipativo. ■

A continuación mencionaremos al teorema de Lumer-Phillips.

Teorema 4.17. (Lumer-Phillips) Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operador densamente definido. Entonces A genera un semigrupo de clase C_0 de contracciones en X si y solo si

(I) A es disipativo,

(II) existe un $\lambda > 0$ tal que $\lambda I - A$ es sobreyectivo.

Demostración:

$\Rightarrow]$

- (I) Sea A un genera un semigrupo de clase C_0 de contracciones en X . Sea $x \in D(A)$ y $x^* \in F(x)$, se tiene

$$|\langle S(t)x, x^* \rangle| \leq \|x^*\| \|S(t)x\| \leq \|x^*\| \|x\| = \|x\|^2$$

Luego

$$\operatorname{Re} \langle S(t)x - x, x^* \rangle = \operatorname{Re} \langle S(t)x, x^* \rangle - \operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle$$

$$\leq \|x\|^2 - \operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \langle S(t)x - x, x^* \rangle \leq 0$$

Se divide la expresión por $t > 0$ y hacemos tender a 0 por la derecha

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \langle S(t)x - x, x^* \rangle \leq 0$$

$$\operatorname{Re} \langle A(x), x^* \rangle \leq 0$$

- (II) Además por el teorema de Hille-Yosida [4.13](#) se tiene que $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ entonces la $\operatorname{Im}(I\lambda - A) = X$ para cada $\lambda > 0$

$\Rightarrow]$ Sea A es disipativo, para cada $\lambda > 0$ y $x \in D(A)$ se tiene que

$$\lambda \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$$

y además existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda I - A$ es sobreyectivo, entonces $(\lambda I - A)^{-1}(x) = y$

$$\lambda \|y\| \leq \|(\lambda I - A)y\|$$

$$\lambda \|(\lambda I - A)^{-1}(x)\| \leq \|x\|$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}(x)\| \leq \frac{\|x\|}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

entonces $(\lambda I - A)^{-1}$ es acotada. Por otro lado tomamos un λ_0 lado, si $x_n \rightarrow z$ y $(\lambda_0 I - A)x_n \rightarrow y$ entonces

$$x_n = (\lambda_0 I - A)^{-1} (\lambda_0 I - A) (x_n) \rightarrow (\lambda_0 I - A)^{-1} (y)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (\lambda_0 I - A)^{-1} (y)$$

Por la unicidad del límite se tiene que

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (\lambda_0 I - A)^{-1} (y)$$

$$\Rightarrow z = (\lambda_0 I - A)^{-1} (y)$$

luego $(\lambda_0 I - A)(z) = y$ y $z \in D(\lambda_0 I - A)$.

Por lo tanto $\lambda_0 I - A$ es cerrado, además como I es cerrado, entonces se tiene que A es cerrado.

Ahora, se probará que $\lambda I - A$ es sobreyectivo para todo $\lambda > 0$, considerando

$$\Lambda = \{\lambda : \lambda \in (0, +\infty) = \mathbb{R}_+, \lambda I - A \text{ sobreyectivo}\}$$

se tiene que $\lambda_0 \in \Lambda$ se cumple que

$$\|R(\lambda_0, A)\| = \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$$

esto implica que $\lambda_0 \in \rho(A)$, entonces $\Lambda \subseteq \rho(A)$.

Se sabe que $\mathbb{R}_+$ es conexo y si Λ es abierto, cerrado y diferente del vacío entonces $\mathbb{R}_+ = \Lambda$.

En efecto, sea $\rho(A)$ abierto, se tiene que $\lambda_0 \in \Lambda$ entonces existe una vecindad la cual no tiene intersección vacía y está contenida en $\mathbb{R}_+$, entonces Λ es abierto en $\mathbb{R}_+$.

Sea $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Λ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \rightarrow \lambda$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $y \in X$ existe $x_n \in D(A)$ tal que

$$\lambda_n x_n - A x_n = y \tag{4.7}$$

Se tiene que

$$\lambda_n \|x_n\| \leq \|(\lambda_n I - A) x_n\| = \|y\|$$

$$\lambda_n \|x_n\| \leq \|y\|$$

entonces decimos que va a existir un C tal que $\|x_n\| \leq \frac{\|y\|}{\lambda_n} = C$. Luego

$$\begin{aligned} \lambda_m \|x_n - x_m\| &\leq \|(\lambda_m I - A)(x_n - x_m)\| \\ &= \|\lambda_m x_n - \lambda_m x_m - Ax_n + Ax_m\| \\ &= \|\lambda_m x_n - y - Ax_n\| \\ &= \|\lambda_m x_n - \lambda_n x_n + Ax_n - Ax_n\| \\ &\leq |\lambda_m - \lambda_n| \|x_n\| \\ &\leq |\lambda_m - \lambda_n| C \end{aligned}$$

esto implica que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es sucesion de Cauchy. Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y de 4.7 se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n x_n - y)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lambda x - y$$

como A es cerrado se tiene que $x \in D(A)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$. Luego $(\lambda I - A)x = y$, entonces $\lambda \in \Lambda$ y esto implica que Λ es cerrado.

Como Λ es abierto, cerrado y no vacío, esto implica que $\Lambda = (0, +\infty)$. Por otro lado se cumple que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

y además A es un operador densamente definido, por el teorema Hille-Yosida 4.13 se tiene que A es un generador de un semigrupo de clase C_0 de contracciones.

■

4.5.5. Algunas Consecuencias

Las siguientes consecuencias, pueden ser vistas en Pazy (1983) y Vrabie (2003).

Corolario 4.1. *Si A y A^* son disipativos, tal que A es lineal, densamente definido y cerrado, entonces A genera a un semigrupo de clase C_0 y de contracciones en X .*

Demostración:

Por el teorema Lumer-Phillips 4.17 solo bastaría probar que existe un $\lambda > 0$ tal que $\lambda I - A$ es sobreyectivo.

Se tiene que A es disipativo y cerrado, se toma $\lambda = 1$ entonces $I - A$ es cerrado en X . Digamos que $\text{Im}(I - A) \neq X$, por el teorema de Hahn-Banach existe un funcional lineal distinto de cero, $y^* \in X^*$, tal que

$$\langle x - Ax, y^* \rangle = 0 \quad x \in D(A)$$

$$\langle x, y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle$$

Como A^* es el operador adjunto de A se tiene que

$$\langle x, A^*(y^*) \rangle = \langle Ax, y^* \rangle$$

entonces

$$\langle x, A^*(y^*) \rangle = \langle x, y^* \rangle$$

$$0 = \langle x, y^* - A^*(y^*) \rangle$$

$$0 = \langle x, (I - A^*) y^* \rangle$$

$$0 = (I - A^*) y^*$$

A^* es disipativo

$$\|y^*\| \leq \|(I - A^*) y^*\|$$

$$\Rightarrow \|y^*\| = 0 \Rightarrow y^* = 0$$

lo cual es una contradicción. Entonces $\text{Im}(I - A) = X$.

Por lo tanto A es el generador de un semigrupo de clase C_0 y de contracciones en X . ■

Corolario 4.2. Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ el generador de un semigrupos de clase C_0 y sea $\|\cdot\|_{D(A)} : D(A) \rightarrow X$ y $|\cdot|_{D(A)} : D(A) \rightarrow X$ definidos por $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|$ y $|x|_{D(A)} = \|x - Ax\|$ respectivamente, para cada $x \in D(A)$, entonces

- (I) $\|\cdot\|_{D(A)}$ es una norma en $D(A)$, llamada **norma del grafo**, y el $D(A)$ con la norma del grafo es un espacio de Banach.
- (II) $D(A)$ dotado de la norma $\|\cdot\|_{D(A)}$ está continuamente incrustado en X .
- (III) $A \in \mathcal{L}(D(A), X)$ (donde $D(A)$ está dotado de $\|\cdot\|_{D(A)}$)
- (IV) $|\cdot|_{D(A)}$ es una norma en $D(A)$ equivalente a $\|\cdot\|_{D(A)}$
- (V) $I - A$ es una isometría de $(D(A), |\cdot|_{D(A)})$ a $(X, \|\cdot\|)$
- (VI) Para cada $x \in D(A)$, $S(\cdot)x \in C([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$

Demostración:

(I) Sea $\|\cdot\|$ la norma en X , entonces

a) Para cada $x \in D(A)$ se tiene $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\| \geq 0$.

b) Si se toma $x = 0$, entonces

$$\|x\| + \|Ax\| = 0$$

$$\|x\|_{D(A)} = 0$$

luego, si $\|x\|_{D(A)} = 0$, entonces se tiene cada uno de los sumandos debe ser igual a 0, por lo cual se tiene que $x = 0$.

c) Para cada $x \in D(A)$, para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \|\lambda x\|_{D(A)} &= \|\lambda x\| + \|A(\lambda x)\| \\
 &= |\lambda| \|x\| + |\lambda| \|Ax\| \\
 &= |\lambda| (\|x\| + \|Ax\|) \\
 &= |\lambda| \|x\|_{D(A)}
 \end{aligned}$$

d) Sea $x, y \in D(A)$, entonces

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|_{D(A)} &= \|x + y\| + \|A(x + y)\| \\
 &\leq \|x\| + \|y\| + \|A(x)\| + \|A(y)\| \\
 &\leq \|x\|_{D(A)} + \|y\|_{D(A)}
 \end{aligned}$$

entonces $\|\cdot\|_{D(A)}$ es una norma en $D(A)$.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el $D(A)$ con la norma $\|\cdot\|_{D(A)}$. Entonces como X es completo se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n)_{n \in \mathbb{N}} = Ax \text{ por ser } A \text{ cerrado}$$

son sucesiones de cauchy que convergen en la norma en X , entonces $x \in D(A)$.

Por lo tanto $D(A)$, con de la norma $\|\cdot\|_{D(A)}$, es un espacio de Banach.

(II) Se afirma que $D(A)$ está continuamente incrustado en X , si la inclusión $i : D(A) \rightarrow X$ es continua, es decir x_n converge a x .

En efecto si $x_n \rightarrow x$ en $D(A)$, entonces $x_n \rightarrow x$ y $Ax_n \rightarrow Ax$ en X , entonces

$$\begin{aligned}
 \|i(x_n) - i(x)\| &= \|x_n - x\| \leq \|x_n - x\| + \|Ax_n - Ax\| \\
 &= \|x_n - x\| + \|S(0)Ax_n - S(0)Ax\| \\
 &\leq \|x_n - x\| + \|S(0)\|_{\mathcal{L}(X)} \|Ax_n - Ax\|
 \end{aligned}$$

$S(0)$ es acotado, por se un semigrupo de clase C_0 , entonces $\|i(x_n) - i(x)\| \rightarrow 0$ por lo cual se dice que i es continua.

(III) Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \|Ax\| &\leq \|x\| + \|Ax\| \\
 &\leq \|x\|_{D(A)}
 \end{aligned}$$

entonces $\|Ax\| \leq \|x\|_{D(A)}$, por lo cual se concluye que A es acotado.

Por lo tanto $A \in \mathcal{L}(D(A); X)$.

(IV) Sea $|x|_{D(A)} = \|x - Ax\|$, entonces

$$|x|_{D(A)} \leq \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_{D(A)}$$

$$|x|_{D(A)} \leq \|x\|_{D(A)}$$

luego,

$$\begin{aligned}
 \|x\| &= \|R(\lambda; A)(\lambda I - A)x\| \\
 &\leq \frac{M}{\lambda - \omega} \|(\lambda I - A)x\| \\
 &\leq M \|(\lambda I - A)x\|
 \end{aligned}$$

tomando $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned}\|x\| &\leq M \|(I - A)x\| \\ &\leq M \|x - Ax\| \\ &= M |x|_{D(A)}\end{aligned}$$

además se tiene que

$$\begin{aligned}\|x\|_{D(A)} &= \|x\| + \|Ax\| \\ &\leq 2\|x\| + \|Ax - x\| \\ &= 2\|x\| + |x|_{D(A)} \\ &\leq 2M|x|_{D(A)} + |x|_{D(A)} \\ &= (2M + 1)|x|_{D(A)}\end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\frac{1}{(2M + 1)} \|x\|_{D(A)} \leq |x|_{D(A)} \leq \|x\|_{D(A)}$$

Por lo tanto $|\cdot|_{D(A)}$ es una norma equivalente $\|\cdot\|_{D(A)}$.

(v) Sea $I - A : D(A) \rightarrow X$, además $x, y \in D(A)$

$$\begin{aligned}|x - y|_{D(A)} &= \|(x - y) - A(x - y)\| \\ &= \|x - y - A(x) + A(y)\| \\ &= \|(x - A(x)) - (y - A(y))\| \\ &= \|(I - A)(x) - (I - A)(y)\|\end{aligned}$$

entonces $I - A$ es una isometría entre $D(A)$ y X .

(vi) Para cada $x \in D(A)$ se tiene que por el teorema 4.9 $S(\cdot)x \in D(A)$ y $S(\cdot)x$ es de clase $C^1([0, +\infty), X)$, por otro lado con la norma del grafo

$$\|S(\cdot)x\|_{D(A)} = \|S(\cdot)x\| + \|AS(\cdot)x\|$$

entonces $S(\cdot)x \in C([0, +\infty), D(A))$. Luego,

$$S(\cdot)x \in C([0, +\infty), D(A)) \cap C^1([0, +\infty), X)$$

■

Ahora se mostrará dos resultados que nos ayudará para la solución de la Ecuación de Transporte que se presentará más adelante (ver Galo, 2018, pp. 153-155).

Teorema 4.18. *Si A y A^* son operadores disipativos, tal que A es lineal, densamente definido y cerrado entonces A genera un semigrupo de clase C_0 y para cada $x_0 \in D(A)$ existe una solución única $x \in C([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$ del problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), \quad t \in [0, \infty) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

tal que para todo $t \in [0, \infty)$,

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\|$$

$$\left\| \frac{d}{dt}x(t) \right\| = \|Ax(t)\| \leq \|Ax_0\|$$

Demostración:

En efecto, por hipótesis A es lineal, densamente definido y cerrado; además A y A^* son operadores disipativos, entonces por el corolario 4.1 se tiene que A es un generador de un semigrupo $S(t)$ de clase C_0 .

Por otro lado si tiene que A es el generador de $S(t)$ por el teorema 4.12 el problema de Cauchy dado por

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), \quad t \in [0, \infty) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

tiene una única solución y es $x(t) = S(t)x_0$. Además como $x_0 \in D(A)$ entonces por el corolario 4.2 se tiene que $x(t) = S(t)x_0 \in C([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$.

Luego para cada $t \in [0, \infty)$

$$\|x(t)\| = \|S(t)x_0\| \leq \|S(t)\| \|x_0\|$$

Por el corolario 4.1 $S(t)$ es un semigrupo de clase C_0 y de contracciones, entonces $\|x(t)\| \leq \|x_0\|$. Finalmente,

$$\left\| \frac{d}{dt} x(t) \right\| = \left\| \frac{d}{dt} S(t)x_0 \right\| = \|AS(t)x_0\| = \|S(t)Ax_0\| \quad (4.8)$$

por lo tanto,

$$\left\| \frac{d}{dt} x(t) \right\| = \|Ax\| \quad \text{y} \quad \|Ax\| \leq \|Ax_0\|$$

■

Teorema 4.19. *Si A es lineal, densamente definido y cerrado, tal que A y A^* son disipativos, entonces para cada punto $x_0 \in D(A)$, $T \in [0, +\infty)$, y $f \in C^1([0, T]; X)$ existe una única solución $x \in C^0([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; X)$ del problema no homogéneo*

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

dada por

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

Demostración:

Sea $x(t)$ la solución 4.9, además como A es un operador lineal densamente definido y cerrado; tal que A y A^* son operadores disipativos, entonces se tiene que A es un generador de un semigrupo $S(t)$ de clase C_0 .

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (S(t-s)x(s)) &= -AS(t-s)x(s) + S(t-s)x'(s) \\ &= -AS(t-s)x(s) + S(t-s)(Ax(s) + f(s)) \\ &= S(t-s)f(s) \end{aligned}$$

ahora integramos

$$\int_0^t \frac{d}{ds} (S(t-s)x(s)) ds = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

$$S(0)x(t) - S(t)x(0) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

Por el corolario 4.2 se tiene que $S(t)x_0 \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$, además $g(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$ por teorema 4.9 se tiene que $g(t) \in D(A)$ para $t \in [0, +\infty]$

- $\frac{dg}{dt}(t) = S(t-t)f(t) = f(t)$ donde $f \in C^1([0, +\infty); X)$ entonces g es diferenciable y $\frac{dg}{dt} \in C^0([0, +\infty); X)$
- Sea r_n tal que $r_n \in [0, \infty)$. Luego $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se tiene que $|r_n - r| < \frac{\epsilon}{k}$

$$\begin{aligned} |g(r_n) - g(r)| &= \left| \int_0^{r_n} S(t-s)f(s)ds - \int_0^r S(t-s)f(s)ds \right| \\ &= \left| \int_r^{r_n} S(t-s)f(s)ds \right| \\ &\leq \int_r^{r_n} |S(t-s)f(s)| ds \end{aligned}$$

como $S(t-s)f(s)$ es continua en el compacto $[r, r_n]$, entonces $S(t-s)f(s)$ es acotado

$$|g(r_n) - g(r)| \leq \int_r^{r_n} k ds = k |r_n - r| < \epsilon$$

Luego $g(r_n) \rightarrow g(r)$. Por lo tanto g es continua.

entonces $g \in C^0([0, +\infty); D(A))$ y $g \in C^1([0, +\infty); X)$, es decir, $g \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$.

Por lo tanto $x(t) = S(t)x_0 + g(t) \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$.

Sea $y(t)$ una segunda solución de 4.9

$$y(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad \text{tal que } T(t) \text{ es el semigrupo } C_0 \text{ generado por } A$$

Por el teorema 4.11 se tiene que $T(t) = S(t)$, entonces

$$y(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

Por lo tanto $y(t) = x(t)$.

■

4.6. Ecuación diferencial de transporte

Para finalizar la sección se presentará a la ecuación diferencial de transporte, y además se mostrará una aplicación de la teoría de semigrupos de clase C_0 para dicha ecuación.

4.6.1. Ecuación diferencial de transporte con valor inicial

La ecuación diferencial de transporte tiene sus fundamentos en las leyes de conservación de la masa y se deriva a menudo a través de principios físicos y matemáticos. La ecuación de transporte puede adaptarse a diferentes contextos, como la transferencia de calor, la propagación de ondas, el transporte de contaminantes, entre otros.

Los orígenes de esta ecuación diferencial se remontan a los trabajos de científicos y matemáticos que desarrollaron las teorías fundamentales en los campos de la física y la matemática aplicada.

El problema de valor inicial 4.10, el cual puede ser visto en Evans (2010).

$$\left. \begin{aligned} u_t + v \nabla u &= 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

donde, $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida que representa el desplazamiento de la sustancia en un medio, $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector fijo, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 conocida y ∇u es el gradiente de $u(x, t)$ en las variables de x .

El objetivo es encontrar la función $u(x, t)$, la cual debe satisfacer a 4.10. En la teoría de ecuaciones diferenciales existen diversos métodos para lograr encontrar soluciones de problemas de Cauchy. En nuestro caso se utilizará la teoría de semigrupos para encontrar la solución de 4.10.

Se tiene que

$$u_t = -v \nabla u \quad \text{donde } A = -v \nabla = -(v_1 \partial_{x_1} + \dots + v_n \partial_{x_n})$$

El operador A , ¿Qué semigrupo genera?

Para ello considere $X = C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ el espacio de Banach de funciones continuas y acotadas, dotado de la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{|f(x)|\}$$

y define el operador

$$\begin{aligned} S : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ t &\longmapsto S(t) : C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ &f \longmapsto f(x - tv) \end{aligned}$$

luego se afirma que A genera el semigrupo $S(t)$ de clase C_0 .

En efecto, es claro $S(t)$ es lineal y acotado, pues para $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|S(t)(f(x))\| &= \|f(x - tv)\|_\infty \\ &= \sup_{x - tv \in \mathbb{R}} \{|f(x - tv)|\} \\ &= \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Luego,

(1) Sea $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $t \in [0, +\infty)$, y $x - tv \in \mathbb{R}^n$

$$S(0)(f(x)) = f(x - 0v) = f(x) = I(f(x))$$

(2) Sea $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $t, s \in [0, +\infty)$,

$$\begin{aligned}
 S(t+s)(f(x)) &= f(x - (t+s)v) \\
 &= f((x - sv) - tv) \\
 &= S(t)(f(x - sv)) \\
 &= S(t)(S(s)(f(x))) \\
 &= (S(t) \circ S(s))(f(x))
 \end{aligned}$$

(3) Sea $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $t \in [0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)(f(x)) - f(x)\| &= \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x+tv \in \mathbb{R}} |f(x - tv) - f(x)| \\
 &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f(x)| \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

entonces, $S(t)$ es un semigrupo de clase C_0 .

Ahora verifiquemos que A genera a $S(t)$

$$\begin{aligned}
 Af(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)(f(x)) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x - tv) - f(x)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 - tv_1, \dots, x_n - tv_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}
 \end{aligned}$$

Sea $u_1 = x_1 - tv_1, \dots, u_n = x_n - tv_n$ y se define $h(t) = f(u_1, \dots, u_n)$. Luego

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial u_1}(-v_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(-v_n)
 \end{aligned}$$

Si $t = 0$, entonces $u_i = x_i$ para cada $i = 1, \dots, n$ y

$$\begin{aligned}
 h'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(-v_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(-v_n) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (-v_i) \\
 &= \nabla f \cdot (-v)
 \end{aligned}$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
 (-v) \nabla f(x) = h'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 - tv_1, \dots, x_n - tv_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} \\
 &= Af(x)
 \end{aligned}$$

entonces $A = - \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ genera a $S(t)$.

Aplicando el teorema 4.12 al problema 4.10 la unica solución de $u(x, t)$ sería $S(t)(g(x))$ entonces

$$u(x, t) = g(x - tv)$$

Un caso particular, es el problema de valor inicial:

$$\left. \begin{aligned}
 u_t &= -u_x && \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\
 u(x, 0) &= \sin(x) && \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

donde $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Para estudiar este problema, sea X el espacio de Banach $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}$ con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{|f|\}$$

Se sabe que $\sin(x)$ es una función continua, además es acotada. Por lo visto anteriormente $\sin(x - t)$ es un semigrupo de clase C_0 y la solución única del problema 4.11 esta dado por $u(x, t) = \sin(x - t)$.

Teorema 4.20. *Sea el semigrupo de translación (izquierda)*

$$S_l(t)f(x) = f(x+t) \quad s, t \in \mathbb{R}$$

El generador del semigrupo de translaciones (izquierdo) $\{S_l(t), t \geq 0\}$ en el espacio X está dado por

$$Af = f'$$

con dominio

(i) $D(A) = \{f \in C_{ub}(\mathbb{R}) : f \text{ es diferenciable y } f' \in C_{ub}(\mathbb{R})\}$, si $X = C_{ub}(\mathbb{R})$.

(ii) $D(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f \text{ es absolutamente continua y } f' \in L^p(\mathbb{R})\}$, si $X = L^p(\mathbb{R})$,
 $1 \leq p < \infty$.

Demostración:

(i) Se fija $f \in D(B)$, entonces

$$\begin{aligned} BS(t)(f(x)) &= \frac{d}{dt}S(t)(f(x)) \\ &= \frac{d}{dt}f(x+t) \\ &= f'(x+t) \end{aligned}$$

evaluando $t = 0$

$$BS(0)(f(x)) = f'(x+0)$$

$$Bf(x) = f'(x)$$

$$Bf = f'$$

por hipótesis se tiene que $f' = Af$, entonces $Bf = Af$ para $f \in D(B)$

$$\Rightarrow B = A|_{D(B)}$$

(II) Tome $f \in D(B)$ y $g = Bf \in L^p(\mathbb{R})$ y además $a < b$; donde $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h} \left(\int_b^{b+h} f(s)ds - \int_a^{a+h} f(s)ds \right) &= \frac{1}{h} \left(\int_b^{b+h} ds + \int_{a+h}^b ds - \int_a^{a+h} ds - \int_{a+h}^b ds \right) \\
 &= \frac{1}{h} \left(\int_{a+h}^{b+h} f(s)ds - \int_a^b f(s)ds \right) \\
 &= \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(s+h)ds - \int_a^b f(s)ds \right) \\
 &= \frac{1}{h} \int_a^b (f(s+h) - f(s)) ds \\
 &= \int_a^b \frac{f(s+h) - f(s)}{h} ds
 \end{aligned}$$

aplicando límite cuando h tiende a cero.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b g(s)ds &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(s+h) - f(s)}{h} ds \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_b^{b+h} f(s)ds - \int_a^{a+h} f(s)ds \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1} (f(b+h) - f(a+h)) \\
 &= f(b) - f(a)
 \end{aligned}$$

luego aplicando la derivada con respecto a b se tiene que $f'(b) = g(b)$. Por tanto

$$Af = f' = g = Bf, \quad f \in D(B)$$

entonces $A|_{D(B)} = B$.

■

4.6.2. Ecuación diferencial de transporte con valor inicial y de contorno

Ahora al problema de valor inicial [4.10](#) se le agregará la condición $u(0, t) = y(t)$.

Se fija $T, L > 0$. Se considera en particular la siguiente ecuación diferencial de transporte, la cual puede ser vista en Galo (2018)

$$\left. \begin{aligned} u_t + u_x &= 0, & t \in (0, T), & x \in (0, L) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in (0, L) \\ u(0, t) &= y(t) & t \in (0, T) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

donde t es el tiempo, $y(t) \in L^2(0, T)$ y $u_0 \in L^2(0, T)$ son funciones dadas.

Se procederá a resolver el problema 4.12 y su solución será una solución débil. Para ello primero se mostrará que el problema está bien planteado.

Supongase que existe $u \in C^1([0, L] \times [0, T])$ que satisface 4.12 y sean $\tau \in [0, T]$ y $\varphi \in C^1([0, L] \times [0, \tau])$, entonces

$$\varphi u_t + \varphi u_x = 0$$

$$\int_0^\tau \int_0^L (\varphi u_t + \varphi u_x) dx dt = 0$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^L (\varphi u_t) dx dt &= \int_0^L \int_0^\tau (\varphi u_t) dt dx \\ &= \int_0^L \left(\varphi u|_0^\tau - \int_0^\tau u \varphi_t dt \right) dx \\ &= \int_0^L \varphi u|_0^\tau dx - \int_0^L \int_0^\tau u \varphi_t dt dx \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^L (\varphi u_x) dx dt &= \int_0^\tau \left(\varphi u|_0^L - \int_0^L u \varphi_x dx \right) dt \\ &= \int_0^\tau \varphi u|_0^L dt - \int_0^\tau \int_0^L u \varphi_x dx dt \end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\tau \int_0^L (\varphi u_t + \varphi u_x) dx dt &= \int_0^L \varphi u|_0^\tau dx - \int_0^L \int_0^\tau u \varphi_t dt dx + \int_0^\tau \varphi u|_0^L - \int_0^\tau \int_0^L u \varphi_x dx dt \\
 &= \int_0^L \varphi u|_0^\tau dx + \int_0^\tau \varphi u|_0^L - \int_0^\tau \int_0^L u \varphi_t dx dt - \int_0^\tau \int_0^L u \varphi_x dx dt \\
 &= \int_0^L \varphi u|_0^\tau dx + \int_0^\tau \varphi u|_0^L - \int_0^\tau \int_0^L u (\varphi_t + \varphi_x) dx dt = 0
 \end{aligned}$$

La siguiente definición es debida a Galo (2018, p. 156).

Definición 4.22. Sea $y(t) \in L^2(0, T)$ y $u_0 \in L^2(0, L)$ tal que $T, L > 0$. Una **solución débil** del problema 4.12 es una función $u \in C^0([0, L] \times [0, T])$ tal que para cada $\tau \in [0, T]$ y para todo $\varphi \in C^1([0, L] \times [0, \tau])$ con $\varphi(L, t) = 0$, $t \in [0, \tau]$ satisface

$$\int_0^\tau \int_0^L u (\varphi_t + \varphi_x) dx dt = \int_0^L \varphi(x, \tau) u(x, \tau) dx - \int_0^L \varphi(x, 0) u(x, 0) dx - \int_0^\tau \varphi(0, t) u(0, t) dt \quad (4.13)$$

El siguiente teorema muestra propiedades de la solución debil u del problema 4.12

Teorema 4.21. Si u es una solución débil del problema 4.12 de clase C^1 en $[0, L] \times [0, T]$, entonces

- I. $u(x, 0) = u_0(x)$ para todo $x \in [0, L]$,
- II. $u(0, t) = y(t)$ para todo $t \in [0, T]$,
- III. $u_0 \in C^1([0, L])$,
- IV. $y \in C^1([0, T])$,
- V. $u_t(x, t) + u_x(x, t) = 0$ para todo $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$.

Demostración:

Sea u solución débil del problema 4.12 se tiene que $u(x, 0) = u_0(x)$ para todo $x \in [0, L]$ y $u(0, t) = y(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Para los item III, IV y V se debe probar que u_t y u_x existen y son continuas.

En efecto,

$$\int_0^\tau \int_0^L u(\varphi_t + \varphi_x) dx dt = \int_0^L \varphi(x, \tau) u(x, \tau) dx - \int_0^L \varphi(x, 0) u(x, 0) dx - \int_0^\tau \varphi(0, t) u(0, t) dt$$

además $\varphi(t, L) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^L u(\varphi_t + \varphi_x) dx dt &= \int_0^L \varphi(x, \tau) u(x, \tau) dx - \int_0^L \varphi(x, 0) u(x, 0) dx - \int_0^\tau \varphi(0, t) u(0, t) dt \\ &\quad + \int_0^\tau \varphi(L, t) u(L, t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \varphi(x, \tau) u(x, \tau) dx - \int_0^L \varphi(x, 0) u(x, 0) dx - \int_0^\tau \varphi(0, t) u(0, t) dt \\ &\quad + \int_0^\tau \varphi(L, t) u(L, t) dt - \int_0^\tau \int_0^L u(\varphi_t + \varphi_x) dx dt \end{aligned}$$

$$0 = \int_0^\tau \int_0^L (\varphi u_t + \varphi u_x) dx dt$$

esto se obtiene siempre que u_t, u_x existan y sean continuas en $[0, T]$ y $[0, L]$ respectivamente.

De esto se obtiene que $u_0 \in C^1([0, L])$, $y \in C^1([0, T])$ y $u_t(x, t) + u_x(x, t) = 0$ para todo $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$.

■

Teorema 4.22. Si $u_0 \in L^2(0, L)$ y $y(t) \in L^2(0, T)$ para cada $L, T > 0$, entonces el problema 4.12 tiene una única solución débil u tal que

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L^2(0, L)} \leq \|u_0\|_{L^2(0, L)} + \|y\|_{L^2(0, T)} \quad \text{para todo } \tau \in [0, T].$$

Demostración:

Existencia.

- *Caso 1:* Consideramos $y \in C^2([0, T])$ con $y(0) = 0$, $u_0 \in H^1(0, L)$ con $u_0(0) = 0$.

Se define el operador lineal

$$\begin{aligned} A : D(A) \subseteq L^2(0, L) &\longrightarrow L^2(0, L) \\ f &\mapsto Af = -f_x \end{aligned}$$

donde $D(A) = \{f \in H^1(0, L) : f(0) = 0\}$.

Se tiene que A genera al semigrupo de traslaciones

$$S_t(t)f(x) = f(x - t)$$

entonces por el teorema 4.10 se tiene que $D(A)$ es denso en $L^2(0, L)$ y que A es un operador cerrado.

Sea $f \in D(A)$

$$\langle Af, f \rangle = \int_0^L f \cdot Af dx = - \int_0^L f \cdot f_x dx = \left. \frac{-f^2(x)}{2} \right|_0^L = \frac{-f^2(L)}{2} \leq 0$$

$$\langle Af, f \rangle \leq 0$$

Por lo cual se tiene que A es disipativo.

Para cada $f \in D(A)$, $g \in H^1(0, L)$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle f, A^*g \rangle &= \langle Af, g \rangle = \int_0^L g \cdot Af dx = - \int_0^L g \cdot f_x dx \\ &= -f(x)g(x)|_0^L + \int_0^L f \cdot g_x dx \\ &= -f(L)g(L) + \int_0^L f \cdot g_x dx \\ &= -f(L)g(L) + \langle f, g_x \rangle \end{aligned}$$

Luego, se define $D(A^*) = \{g \in H^1(0, L) : g(L) = 0\}$ donde el operador A^* es el operador lineal adjunto de A , tal que $A^*g = g_x$, $g \in D(A^*)$.

Para cada $g \in D(A^*)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle A^*g, g \rangle &= \int_0^L g \cdot A^*g dx = \int_0^L g \cdot g_x dx \\ &= \frac{g^2(x)}{2} \Big|_0^L = -\frac{g^2(0)}{2} \leq 0\end{aligned}$$

$$\langle A^*g, g \rangle \leq 0$$

Por lo cual se tiene que A^* es disipativo.

El teorema 4.19 asegura la existencia de una función $z \in C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^1(0, L))$ tal que

$$\frac{dz}{dt} = Az - y'(t), \quad \text{en } L^2(0, L)$$

$$z(0, t) = 0$$

$$z(\cdot, 0) = u_0$$

se tiene también

$$\frac{dz}{dt} = Az - u_t(0, t) = Az + u_x(0, t)$$

donde

$$z(\cdot, t) = S(t)u_0(\cdot) + \int_0^t S(t-\tau)u_x(0, \tau)d\tau$$

$$z(\cdot, t) = S(t)u_0(\cdot) + \int_0^t S(t-\tau)(-Au(0, \tau))d\tau, \quad u(0, t) \in D(A)$$

$$= S(t)u_0(\cdot)$$

Luego

$$z(0, t) = S(t)u_0(0) = 0$$

$$z(x, 0) = S(0)u_0(x) = u_0(x)$$

Definimos la función $u \in C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^1(0, L))$ como

$$u(x, t) = z(x, t) + y(t) \quad \text{para todo } (x, t) \in [0, L] \times [0, T] \quad (4.14)$$

Fijamos $\tau \in [0, T]$ y $\varphi \in C^1([0, L] \times [0, \tau])$.

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^L u(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt &= \int_0^\tau \int_0^L \varphi_x(x, t) (z(x, t) + y(t)) dx dt \\ &= \int_0^\tau \int_0^L \varphi_x(x, t) z(x, t) dx dt + \int_0^\tau \int_0^L \varphi_x(x, t) y(t) dx dt \\ \int_0^\tau \int_0^L u(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt &= \int_0^\tau \varphi(x, t) z(x, t) \Big|_0^L dt - \int_0^\tau \int_0^L \varphi(x, t) z_x(x, t) dx dt + \\ &\quad \int_0^\tau y(t) \int_0^L \varphi_x(x, t) dx dt \\ &= \int_0^\tau \int_0^L \varphi(x, t) A(z(x, t)) dx dt + \int_0^\tau \varphi(L, t) z(L, t) dt + \\ &\quad \int_0^\tau y(t) \int_0^L \varphi_x(x, t) dx dt \\ \int_0^\tau \int_0^L u(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt &= \int_0^\tau \int_0^L \varphi(x, t) A(z(x, t)) dx dt + \int_0^\tau \varphi(L, t) z(L, t) dt + \\ &\quad \int_0^\tau y(t) (\varphi(x, t) \Big|_0^L) dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

Además

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^\tau u(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx &= \int_0^L \int_0^\tau \varphi_t(x, t) (z(x, t) + y(t)) dt dx \\ &= \int_0^L \int_0^\tau \varphi_t(x, t) z(x, t) dt dx + \int_0^L \int_0^\tau \varphi_t(x, t) y(t) dt dx \\ &= \int_0^L \int_0^\tau \varphi_t(x, t) z(x, t) dt dx + \int_0^L \varphi(x, t) y(t) \Big|_0^\tau dx \\ &\quad - \int_0^L \int_0^\tau \varphi(x, t) y'(t) dt dx \\ &= \int_0^L \int_0^\tau \varphi_t(x, t) z(x, t) dt dx + \int_0^L \varphi(x, \tau) y(\tau) dx \\ &\quad - \int_0^L \int_0^\tau \varphi(x, t) y'(t) dt dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^\tau u(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx &= \int_0^L \int_0^\tau \varphi_t(x, t) z(x, t) dx dt + \int_0^L \varphi(x, \tau) y(\tau) dx \\ &\quad - \int_0^L \int_0^\tau \varphi(x, t) y'(t) dt dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para cada $\xi \in L^2(0, L)$ se tiene que

$$\frac{d}{dt} \langle z(t), \xi \rangle_{L^2(0, L)} = \left\langle \frac{dz}{dt}(t), \xi \right\rangle_{L^2(0, L)} = \langle Az(t) - y'(t), \xi \rangle_{L^2(0, L)}$$

Se considera el conjunto de funciones

$$\mathcal{V} = \{ \phi(t) \xi(x) : \phi \in C^1([0, \tau]), \xi \in C^1([0, L]) \text{ y } \xi(L) = 0 \}$$

Sea $\varphi(x, t) = \phi(t) \xi(x) \in \mathcal{V}$. Ahora

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^L \varphi_t(x, t) z(x, t) dx dt &= \int_0^\tau \int_0^L \phi'(t) \xi(x) z(x, t) dx dt \\ &= \int_0^\tau \phi'(t) \langle z(t), \xi \rangle_{L^2(0, L)} dt \end{aligned}$$

Por integración por partes se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^L \varphi_t(x, t) z(x, t) dx dt &= \phi(t) \langle z(t), \xi \rangle_{L^2(0, L)} \Big|_0^\tau - \int_0^\tau \phi(t) \frac{d}{dt} \langle z(t), \xi \rangle_{L^2(0, L)} dt \\ &= \int_0^L \phi(t) \xi(x) z(x, t) \Big|_0^\tau dx - \int_0^\tau \phi(t) \langle Az(t) - y'(t), \xi \rangle_{L^2(0, L)} dt \\ &= \int_0^L \varphi(x, t) z(x, t) \Big|_0^\tau dx - \int_0^\tau \int_0^L \phi(t) \xi(x) (Az(x, t) - y'(t)) dx dt \\ \int_0^\tau \int_0^L \varphi_t(x, t) z(x, t) dx dt &= \int_0^L \varphi(x, t) z(x, t) \Big|_0^\tau dx - \int_0^\tau \int_0^L \varphi(x, t) (Az(x, t) - y'(t)) dx dt \end{aligned} \quad (4.17)$$

$\mathcal{V}$ es denso en el espacio $C^1([0, L] \times [0, \tau])$ por el teorema de Stone-Weierstrass y $[0, L] \times [0, \tau]$ es compacto. Por las ecuaciones 4.15, 4.16 y 4.17 se tiene que para cada $\varphi \in C^1([0, L] \times [0, \tau])$

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^L (\varphi_t + \varphi_x) u dx dt &= \int_0^L \varphi(x, \tau) u(x, \tau) dx - \int_0^L \varphi(x, 0) u_0(x) dx + \int_0^\tau \varphi(L, t) u(L, t) dt \\ &\quad - \int_0^\tau y(t) \varphi(0, t) dt \end{aligned}$$

Por otro lado si se toma $\varphi = u|_{[0,L] \times [0,\tau]}$ entonces

$$\int_0^\tau \int_0^L (\varphi_t + \varphi_x) u dx = \int_0^\tau \int_0^L (u_t + u_x) u dx dt = 0$$

además se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^L \varphi(x, \tau) u(x, \tau) dx - \int_0^L \varphi(x, 0) u_0(x) dx + \int_0^\tau \varphi(L, t) u(L, t) dt - \int_0^\tau y(t) \varphi(0, t) dt \\ &= \int_0^L u(x, \tau) u(x, \tau) dx - \int_0^L u(x, 0) u_0(x) dx + \int_0^\tau u(L, t) u(L, t) dt - \int_0^\tau y(t) u(0, t) dt \\ &= \int_0^L (u(x, \tau))^2 dx - \int_0^L (u_0(x))^2 dx + \int_0^\tau (u(L, t))^2 dt - \int_0^\tau (y(t))^2 dt \\ &= \int_0^L |u(x, \tau)|^2 dx - \int_0^L |u_0(x)|^2 dx + \int_0^\tau |u(L, t)|^2 dt - \int_0^\tau |y(t)|^2 dt \end{aligned}$$

entonces

$$\int_0^L |u(x, \tau)|^2 dx + \int_0^\tau |u(L, t)|^2 dt = \int_0^L |u_0(x)|^2 dx + \int_0^\tau |y(t)|^2 dt$$

$$\|u(x, \tau)\|_{L^2(0,L)}^2 + \|u(L, t)\|_{L^2(0,L)}^2 = \|u_0(x)\|_{L^2(0,L)}^2 + \|y(t)\|_{L^2(0,L)}^2$$

$$\|u(x, \tau)\|_{L^2(0,L)} \leq \|u_0(x)\|_{L^2(0,L)} + \|y(t)\|_{L^2(0,L)}$$

- *Caso 2:* Sean $y \in L^2(0, T)$ y $u_0 \in L^2(0, L)$ funciones arbitrarias. Como $D(A)$ es denso en $L^2(0, L)$, entonces existe una sucesión $(u_{0,n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(A)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow 0} u_{0,n} = u_0$$

Por la densidad de $C^2([0, T])$ en $L^2(0, T)$, existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^2([0, T])$, $y_n(0) = 0$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow 0} y_n = y$$

Por el *caso 1* se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones en

$C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^1(0, L))$ tal que

$$\int_0^L |u_n(x, \tau)|^2 dx + \int_0^\tau |u_n(L, t)|^2 dt = \int_0^L |u_{0,n}(x)|^2 dx + \int_0^\tau |y_n(t)|^2 dt \quad (4.18)$$

se define u_n por

$$u_n(x, t) = z_n(x, t) + y_n(t),$$

donde z_n satisface

$$\frac{dz_n}{dt} = Az_n - y'_n(t), \quad \text{en } L^2(0, L)$$

$$z_n(0, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$z_n(\cdot, 0) = u_{0_n}$$

entonces de 4.18 se tiene que

$$\|u_n(\cdot, \tau)\|_{C^0([0, T]; L^2(0, L))} \leq \|u_{0_n}\|_{L^2(0, L)} + \|y_n\|_{L^2(0, T)} \quad n \geq 1. \quad (4.19)$$

luego, para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\|u_n - u_m\|_{C^0([0, T]; L^2(0, L))} \leq \|u_{0_n} - u_{0_m}\|_{L^2(0, L)} + \|y_n - y_m\|_{L^2(0, T)}$$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > N$ se tiene que

$$\|u_{0_n} - u_{0_m}\|_{L^2(0, L)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \|y_n - y_m\|_{L^2(0, T)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

luego $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $C^0([0, T]; L^2(0, L))$ por lo tanto existe $u \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

por otro lado se tiene,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\tau \int_0^L (\varphi_t + \varphi_x) u_n dx dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^L \varphi(x, \tau) u_n(x, \tau) dx - \int_0^L \varphi(x, 0) u_{0_n}(x) dx - \int_0^\tau y_n(t) \varphi(0, t) dt \right)$$

$$\int_0^\tau \int_0^L (\varphi_t + \varphi_x) u dx dt = \int_0^L \varphi(x, \tau) u(x, \tau) dx - \int_0^L \varphi(x, 0) u_0(x) dx - \int_0^\tau y(t) \varphi(0, t) dt$$

además de 4.19 se tiene

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{C^0([0, T]; L^2(0, L))} \leq \|u\|_{L^2(0, L)} + \|y\|_{L^2(0, T)}$$

Unicidad. Sean u_1 y u_2 soluciones del problema 4.12. Luego, $u = u_1 - u_2$ es solución del problema de Cauchy homogéneo

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0, & (x, t) \in [0, L] \times [0, T] \\ u(x, 0) &= 0 & x \in (0, L) \\ u(0, t) &= 0 & t \in (0, T) \end{aligned}$$

Se observa que si $\varphi \in C^1([0, L] \times [0, \tau])$ con $\varphi(L, t) = 0$, $t \in [0, \tau]$ se tiene que

$$\int_0^\tau \int_0^L (\varphi_t + \varphi_x) u dx dt = \int_0^L \varphi(x, \tau) u(x, \tau) dx - \int_0^L \varphi(x, 0) u_0(x) dx - \int_0^\tau y(t) \varphi(0, t) dt$$

$$\int_0^\tau \int_0^L (\varphi_t + \varphi_x) u dx dt = \int_0^L \varphi(x, \tau) u(x, \tau) dx$$

luego se define una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\left. \begin{aligned} f_n &= 0 & \text{en } [L, +\infty), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ f_n|_{(0, L)} &\rightarrow u(\cdot, \tau) & \text{en } L^2(0, L) \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Para $n \in \mathbb{N}$ se considera $\varphi_n \in C^1([0, L] \times [0, \tau])$ dada por

$$\varphi_n = f_n(\tau + x - t) \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau]$$

Además se tiene que $\varphi_n(L, \tau) = f_n(L) = 0$, entonces

$$(\varphi_n)_t + (\varphi_n)_x = 0 \quad [0, L] \times [0, \tau]$$

después,

$$\int_0^L \varphi_n(x, \tau) u(x, \tau) dx = \int_0^L f_n(x) u(x, \tau) dx = 0$$

aplicando límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L f_n(x) u(x, \tau) dx = \int_0^L (u(x, \tau))^2 dx = 0$$

entonces

$$0 = u(x, \tau) = u_1(x, \tau) - u_2(x, \tau) \Rightarrow u_1(x, \tau) = u_2(x, \tau)$$

Por lo tanto 4.12 tiene una única solución débil.

5. RECOMENDACIONES

La presente investigación fue diseñada para ser utilizada por estudiantes de diferentes escuelas profesionales de matemáticas y público interesado, se sugiere hacer modificaciones al problema teniendo en cuenta los datos iniciales y de contorno en un espacio de fase adecuado.

Se sugiere a los investigadores interesados ampliar el estudio de la ecuación de transporte, no solo en su formulación básica, sino también en contextos más generales donde intervengan términos adicionales de reacción o difusión, y condiciones de frontera no triviales.

Asimismo, resulta pertinente profundizar en teoremas más avanzados de la teoría de semigrupos tales como el teorema de Gearhart–Prüss y teorema de Desch–Schappacher que proporcionen criterios rigurosos para identificar y caracterizar generadores de semigrupos en espacios funcionales. De esta manera, los estudiantes podrán aplicar estas herramientas en problemas con condiciones de frontera más complejas, fortaleciendo su formación en análisis funcional y ecuaciones diferenciales parciales, y generando aportes que conecten la teoría abstracta con aplicaciones en física e ingeniería.

6. CONCLUSIONES

En relación al objetivo general, se garantizó la existencia de solución de la ecuación diferencial de transporte del problema de valor inicial 4.10 mediante la aplicación rigurosa de la teoría de semigrupos de operadores, además se muestra una única solución débil del problema 4.12.

En relación al objetivo específico uno, el análisis de teoremas y propiedades de la teoría de semigrupos permitió identificar las condiciones necesarias sobre el operador de transporte que aseguran la existencia de soluciones.

En relación al objetivo específico dos, la construcción del semigrupo asociado a la ecuación diferencial de transporte posibilitó demostrar el teorema de existencia débil y unicidad de solución para el problema 4.12.

BIBLIOGRAFÍA

- Berrocal, E. (2021). *Ecuación del calor: existencia y unicidad* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos]. <https://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12672/17293/Berrocal.te.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* (Vol. 2). Springer.
- Castillo, R. E. (2014). *Espacios L_p* . Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/79992/Espacios%20LP%209789587619492.pdf>
- Chirinos, D., & Zavaleta, U. (2016). Semigrupos n -veces Integrados y una aplicación a un problema de tipo Cauchy. *Selecciones Matemáticas*, 3(1), 8-17. <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2016.01.02>
- Cisneros, J. J. (2018). *Existencia de soluciones para la ecuación de Boltzmann con término fuerza por medio de un teorema de punto fijo* [Tesis de maestría, Universidad de Cartagena]. <https://repositorio.unicartagena.edu.co/bitstream/handle/11227/10129/Trabajo%20de%%2020Grado%20Julio%20Cisneros%20L..pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Das, A., Das, N., & Saha, J. (2021). An application of semigroup theory to the coagulation-fragmentation models. *Turkish Journal of Mathematic*, 45, 2282-2294. <https://doi.org/10.3906/mat-2101-114>
- Engel, K.-J., & Nagel, R. (2006). *A short course on operator semigroups*. Springer Science & Business Media.
- Engel, K.-J., Nagel, R., & Brendle, S. (2000). *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer.
- Evans, L. (2010). *Partial differential equations*. American Mathematical Society.

- Fuentes, J. (2020). *Introducción a la teoría de semigrupos de operadores acotados en espacios de Banach* [Tesis de pregrado, Universidad Central del Ecuador]. <http://www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/25000/21998/1/T-UCE-0020-CIE-021.pdf>
- Galo, L. J. (2018). Teoría de semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales continuos aplicada a una ecuación de transporte-Difusión. *Revista de la Escuela de Física*, 6(2), 149-166. <https://doi.org/10.5377/ref.v6i2.6985>
- Huerfía, J. S. (2020). *Semigrupo de operadores lineales acotados con aplicaciones* [Tesis de Pregrado, Universidad del Tolima]. <https://repository.ut.edu.co/server/api/core/bitstreams/e8dbe061-92b2-427a-ada9-ea117d310778/content>
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons. [https://physics.bme.hu/sites/physics.bme.hu/files/users/BMETE15AF53_kov/Kreyszig%20-%20Introductory%20Functional%20Analysis%20with%20Applications%20\(1\).pdf](https://physics.bme.hu/sites/physics.bme.hu/files/users/BMETE15AF53_kov/Kreyszig%20-%20Introductory%20Functional%20Analysis%20with%20Applications%20(1).pdf)
- León, L. R. (2008). *Análisis funcional I*. Universidad de Los Andes Consejo de Publicaciones Mérida - Venezuela.
- Parra, E. (2018). *C_0 Semigrupos para sistemas hiperbólicos port-hamiltonianos y sus aplicaciones* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Autónoma de México]. <https://mym.iimas.unam.mx/ramon/docs/TesisEduardoParra.pdf>
- Pazy, A. (1983). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer Science & Business Media.
- Tarazona, V. (2021). *Existencia, unicidad y estabilidad de solución de un sistema de Timoshenko con memoria* [Tesis de doctoral, Universidad Nacional del Santa]. <https://repositorio.uns.edu.pe/bitstream/handle/20.500.14278/3795/52322.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Vrabie, I. I. (2003). *C_0 -semigroups and applications*. Elsevier.