

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS

Regularidad métrica con aplicaciones en optimización y control óptimo

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

ELABORADA POR:

Victor Lopez Mego

ASESORES:

Dr. Rubén Esteban Burga Barboza

Dr. Eladio Teófilo Ocaña Anaya

LAMBAYEQUE-PERÚ

Febrero de 2026

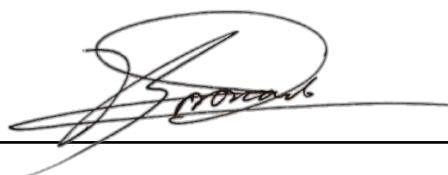
UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “**Regularidad métrica con aplicaciones en optimización y control óptimo**”, presentada por el bachiller en matemáticas, **Victor Lopez Mego**, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.



Bach. Victor Lopez Mego

Tesista



Dr. William Wilmer Coronado Juárez

Presidente Jurado de Tesis



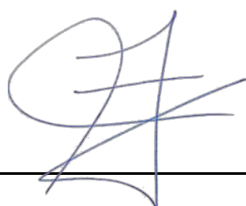
Dr. Rubén Esteban Burga Barboza

Asesor



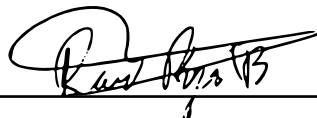
Dr. Segundo Leonardo Valdivia Velásquez

Secretario Jurado de Tesis



Dr. Eladio Teófilo Ocaña Anaya

Asesor



M.Sc. Víctor Raúl Rojas Burga

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de sustentación: 13 de febrero del 2026.



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO

Ciudad Universitaria – Lambayeque

LICENCIADA - RESOLUCIÓN DEL CONSEJO DIRECTIVO N° 015 -2023-SUNEDU / CD



ACTA DE SUSTENTACIÓN N° ¹⁶.....-2026.-D/FACFyM

Siendo las 8:06 am del día 13 de febrero del 2026, se reunieron los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada:

Regularidad métrica con aplicaciones en optimización y control óptimo

Designados por Resolución N° 093 - 2026 D/FACFyM de fecha 05 de febrero del 2026

Con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

Dr. Lic. Mat. William Wilmer Coronado Juárez	Presidente
Dr. Lic. Mat. Segundo Leonardo Valdivia Velásquez	Secretario
Mg. Lic. Mat. Víctor Raúl Rojas Burgos	Vocal

La tesis fue asesorada por (el) (la) Dr. Lic. Mat. Rubén Esteban Burgos Barboza nombrado por Resolución N° 1161 - 2025 D/FACFyM de fecha 10 de diciembre del 2025

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N° 093 - 2026 D/FACFyM de fecha 05 de febrero del 2026

La Tesis fue presentada y sustentada por (el) (los) Bachiller (es): López Mego Víctor y tuvo una duración de 50 minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de Veinte (20) en la escala vigesimal, mención (Excelente).

Por lo que queda(n) apto(s) para obtener el Título Profesional de licenciado en Matemáticas de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Siendo las 8:56m se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

Dr. Lic. Mat. William Wilmer Coronado Juárez
Presidente

Dr. Lic. Mat. Segundo Leonardo Valdivia Velásquez
Secretario

Mg. Lic. Mat. Víctor Raúl Rojas Burgos
Vocal

Dr. Lic. Mat. Rubén Esteban Burgos Barboza
Asesor

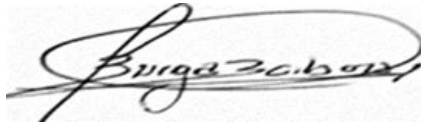
CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, Rubén Esteban Burga Barboza, usuario revisor del documento titulado: *“Regularidad métrica con aplicaciones en optimización y control óptimo”*, cuyo autor es Victor Lopez Mego, identificado con Documento de Identidad DNI: 47170927; declaro que la evaluación realizada por el Programa Informático, ha arrojado un porcentaje de similitud de 7 %, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 04 de febrero de 2026



FIRMA

NOMBRES Y APELLIDOS: Rubén Esteban Burga Barboza

DNI: 16761647

Regularidad métrica con aplicaciones en optimización y control óptimo

INFORME DE ORIGINALIDAD

7 %

INDICE DE SIMILITUD

6 %

FUENTES DE INTERNET

4 %

PUBLICACIONES

1 %

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

www.fmi.uni-sofia.bg

Fuente de Internet

1 %

2

gamow.ist.utl.pt

Fuente de Internet

<1 %

3

uscholar.univie.ac.at

Fuente de Internet

<1 %

4

Victor Lopez. "On Bi-metric Regularity of Variational Inclusion Appearing in Affine Optimal Control Problems", Journal of Optimization Theory and Applications, 2025

Publicación

<1 %

5

danielwiese.com

Fuente de Internet

<1 %

6

export.arxiv.org

Fuente de Internet

<1 %

7

hdl.handle.net

Fuente de Internet

<1 %

8

publik.tuwien.ac.at

Fuente de Internet

<1 %

9

aurore.unilim.fr

Fuente de Internet

<1 %

10

teses.usp.br

Fuente de Internet

<1 %



ASESOR

Dr. Rubén E. Burga Barboza
DNI: 16761647

11	Asen L. Dontchev, R. Tyrrell Rockafellar. "Chapter 4 Regularity Properties Through Generalized Derivatives", Springer Science and Business Media LLC, 2009 Publicación	<1 %
12	arxiv.org Fuente de Internet	<1 %
13	www.heldermann-verlag.de Fuente de Internet	<1 %
14	qdoc.tips Fuente de Internet	<1 %
15	Khelifa Djendel, Haisen Zhang, Zhongcheng Zhou. "On the regularity and stability of the Mayer-type convex optimal control problems", Asian Journal of Control, 2022 Publicación	<1 %
16	Svetlin G. Georgiev. "Fuzzy Dynamic Equations, Dynamic Inclusions, and Optimal Control Problems on Time Scales", Springer Science and Business Media LLC, 2021 Publicación	<1 %
17	digitallibrary.sissa.it Fuente de Internet	<1 %
18	docserver.carma.newcastle.edu.au Fuente de Internet	<1 %
19	Submitted to Pontificia Universidad Catolica del Peru Trabajo del estudiante	<1 %
20	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA Trabajo del estudiante	<1 %
21	Piutrin Pizarro, Carlos Alberto. "Regresion Lineal con Errores Localmente Estacionarios	<1 %



ASESOR
Dr. Rubén E. Burga Barboza
DNI: 16761647

LSMA.", Pontificia Universidad Catolica de Chile (Chile), 2020

Publicación

22	dokumen.pub	Fuente de Internet	<1 %
23	html.pdfcookie.com	Fuente de Internet	<1 %
24	sciencedocbox.com	Fuente de Internet	<1 %
25	repositorio.unprg.edu.pe	Fuente de Internet	<1 %
26	laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co	Fuente de Internet	<1 %
27	Alexander D. Ioffe. "Variational Analysis of Regular Mappings", Springer Science and Business Media LLC, 2017	Publicación	<1 %
28	Perez, Hipolito Hernandez. "Procedimientos Exactos Y Heuristicos Para Resolver Problemas de Rutas Con Recogida Y Entrega de Mercancia", Universidad de La Laguna (Canary Islands, Spain), 2022	Publicación	<1 %
29	documents.mx	Fuente de Internet	<1 %
30	www.branchingnature.org	Fuente de Internet	<1 %
31	www.isr-publications.com	Fuente de Internet	<1 %
32	Asen L. Dontchev. "Lectures on Variational Analysis", Springer Science and Business Media LLC, 2021	Publicación	<1 %



ASESOR

Dr. Rubén E. Burga Barboza
DNI: 16761647

33 Shiv Kumar. "Chapter 3 Boundary Layer Theory", Springer Science and Business Media LLC, 2023 <1 %
Publicación

34 idoc.pub <1 %
Fuente de Internet

35 prr.hec.gov.pk <1 %
Fuente de Internet

36 Submitted to University of Bristol <1 %
Trabajo del estudiante

37 Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo <1 %
Trabajo del estudiante

38 documentop.com <1 %
Fuente de Internet

39 vdoc.pub <1 %
Fuente de Internet

40 vdocuments.mx <1 %
Fuente de Internet

Excluir citas Activo Excluir coincidencias < 15 words
Excluir bibliografía Activo



ASESOR
Dr. Rubén E. Burga Barboza
DNI: 16761647



Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Victor Lopez Mego
Título del ejercicio: Quick Submit
Título de la entrega: Regularidad métrica con aplicaciones en optimización y contro...
Nombre del archivo: Tesis_1.pdf
Tamaño del archivo: 1.22M
Total páginas: 74
Total de palabras: 20,881
Total de caracteres: 85,047
Fecha de entrega: 03-feb-2026 10:13p.m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 2870696172

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS

“Regularidad métrica con aplicaciones en
optimización y control óptimo”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADA POR:

Victor Lopez Mego

ASESORES:

Dr. Rubén Esteban Burga Barboza

Dr. Eladio Teófilo Ocaña Anaya

LAMBAYEQUE-PERÚ
3 de febrero de 2026

ASESOR

Dr. Rubén E. Burga Barboza

DNI: 16761647

Dedicatoria

A mi familia, pilar fundamental de mi vida.

A mis amigos, compañeros de este camino.

A todos quienes creyeron en mí.

Agradecimientos

*Agradezco a la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y en especial a la **Escuela Profesional de Matemática** por haberme formado tanto académica como integralmente.*

A mis asesores, el Dr. Rubén Burga y el Dr. Eladio Ocaña, cuya guía experta y dedicación fueron fundamentales en la elaboración de este trabajo de tesis.

A los profesores de la Escuela de Matemática, cuyas enseñanzas sentaron las bases de mi formación profesional.

Finalmente, agradezco a mi familia, especialmente a mis padres, por el apoyo constante.

Resumen

El trabajo de tesis estudia la regularidad métrica y sus variantes como herramientas para caracterizar propiedades y el análisis de estabilidad en optimización y control óptimo. Se desarrollan caracterizaciones de la regularidad métrica mediante propiedades lipschitzianas, derivadas gráficas y variaciones contingentes en el contexto de multifunciones. Se explora también el concepto de regularidad bi-métrica, que necesita dos métricas en el espacio imagen, así como las versiones Hölder de las propiedades de regularidad antes mencionadas.

En las aplicaciones, se estudia el vínculo de la regularidad métrica con las condiciones de calificación de Mangasarian–Fromovitz en problemas de optimización no lineal, mostrando que estas propiedades son equivalentes. También se aplican los resultados y caracterizaciones de las propiedades del tipo regularidad métrica al estudio de estabilidad de soluciones de inclusiones variacionales que surgen en las condiciones de optimalidad del principio de Pontryagin para problemas de control óptimo afín. Se establecen condiciones suficientes, basadas en propiedades de crecimiento de la función switching, para garantizar regularidad (bi)métrica de orden $\kappa \geq 1$ de una multifunción asociada a dichas inclusiones variacionales.

Palabras clave: Regularidad métrica, Regularidad bi-métrica, Hölder regularidad métrica, Condición de calificación de Mangasarian–Fromovitz, Inclusiones variacionales, Control óptimo, Análisis de estabilidad, Multifunciones.

Abstract

This thesis focuses on metric regularity and related notions as key instruments for stability analysis in optimization and optimal control. We present characterizations of metric regularity using Lipschitz notions, graphical (contingent) derivatives, and contingent variations in the framework of set-valued maps. The work also explores the concept of bi-metric regularity, which involves two metrics on the codomain, as well as their Hölder counterparts.

Regarding applications, we study the connection between metric regularity and the Mangasarian–Fromovitz constraint qualifications at a feasible point of a nonlinear programming problem, showing that they are equivalent. Moreover, the theoretical tools examined are used to study the stability of solutions to variational inclusions which appear in the first optimality conditions derived from Pontryagin’s principle for affine control problems. We derive sufficient conditions, expressed in terms of growth properties of the switching function, that ensure (bi)metric regularity of order $\kappa \geq 1$ of the set-valued mapping associated with these variational inclusions.

Keywords: Metric regularity, Bi-metric regularity, Hölder metric regularity, Mangasarian–Fromovitz constraint qualification, Stability analysis, Set-valued mappings.

Introducción

La regularidad métrica y sus variantes constituyen una herramienta fundamental en optimización y análisis no lineal, ya que permiten cuantificar la robustez de las soluciones frente a perturbaciones. Su estudio se centra principalmente en inclusiones de la forma

$$y \in F(x),$$

donde F es una correspondencia (función o multifunción) entre dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) , la incógnita es $x \in X$ y $y \in Y$ es un parámetro dado. Las propiedades de tipo regularidad métrica constituyen herramientas fundamentales para estudiar la estabilidad de las soluciones de dicha ecuación. En términos generales, estas propiedades garantizan que, ante una perturbación ligera del lado izquierdo de la ecuación, las soluciones de la ecuación perturbada no se alejan excesivamente de las soluciones de la ecuación original. Más específicamente, si y' está cerca de y , entonces

$$d_X(x, F^{-1}(y')) \leq \ell d_Y(y', F(x)),$$

para alguna constante $\ell \geq 0$.

Debido al auge y la utilidad de estos conceptos, en el presente trabajo exploramos sus propiedades, caracterizaciones y aplicaciones en optimización y control óptimo. En particular, abordaremos dos líneas principales de investigación. La primera es la relación entre la regularidad métrica y las condiciones de calificación de Mangasarian-Fromovitz en un problema de optimización no lineal. La segunda se refiere a la estabilidad de las soluciones de la inclusión variacional

$$0 \in F(u(t)) = \hat{\sigma}(t) + N_U(u(t)),$$

donde $\hat{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $u : [0, T] \rightarrow U$, y N_U representa el cono normal al poliedro convexo y compacto $U \subset \mathbb{R}^d$. Estas inclusiones variacionales aparecen de manera natural en las condiciones de optimalidad de primer orden dadas por el principio de Pontryagin en

problemas de control óptimo afín.

La regularidad métrica ha sido ampliamente estudiada y aplicada en optimización, análisis variacional, control óptimo, entre otras áreas; véanse, por ejemplo, los textos [10], [11], [13], [15], [22] y las referencias allí citadas. Existen caracterizaciones de esta propiedad mediante nociones lipschitzianas, apertura lineal, derivadas gráficas, etc. En particular, la relación entre las condiciones de calificación de Mangasarian-Fromovitz y la regularidad métrica es bien conocida; para este trabajo tomamos como referencia el artículo [8], donde se emplea la caracterización de regularidad métrica vía derivada gráfica para demostrar que las condiciones de Mangasarian-Fromovitz se satisfacen en un punto factible $\bar{x}$ si y solo si la multifunción $F(x) = f(x) + K$, con $K = \{0\}^\ell \times \mathbb{R}_+^m$, es métricamente regular en $(\bar{x}, 0)$.

Por otro lado, la multifunción

$$F(u(t)) = \hat{\sigma}(t) + N_U(u(t)),$$

definida en $\mathbb{L}^1([0, T], U)$ y con valores en $\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$ o en $\mathbb{W}^{1,\infty}([0, T], \mathbb{R}^d)$, ha sido muy estudiada recientemente. Se han establecido condiciones suficientes para propiedades del tipo regularidad métrica de F . En [19] se considera $U = [-1, 1]^d$ y una función $\hat{\sigma} : [0, T] \rightarrow U$ que satisface la siguiente condición de crecimiento: existen números reales $\kappa \geq 1$, $\alpha, \tau > 0$, tales que para todo índice $j = 1, 2, \dots, d$ y para todo $\hat{z} \in [0, T]$ con $\hat{\sigma}(\hat{z}) = 0$ se cumple

$$\hat{\sigma}(t) \geq \alpha |t - \hat{z}|^\kappa, \quad \forall t \in [\hat{z} - \tau, \hat{z} + \tau] \cap [0, T].$$

En la Proposición 4.3 de dicho artículo se muestra que para $\kappa = 1$ esta propiedad es uniforme en un entorno $\mathbb{W}^{1,\infty}$ de $\hat{\sigma}$ (es decir, la propiedad es $\mathbb{W}^{1,\infty}$ -estable). La $\mathbb{W}^{1,\infty}$ -estabilidad también se muestra en la Proposición 3.4 de [21] y en el Lema 4.1 de [6] cuando U es un politopo convexo y compacto. Mediante una desigualdad integral inversa, como en el Teorema 2.1 de [23], se deduce la subregularidad métrica, la regularidad métrica y la regularidad bi-métrica de F en $(\hat{u}, 0)$.

Otra propiedad sobre $\hat{\sigma}$ se ha vuelto estándar en la literatura sobre problemas de control óptimo de ecuaciones en derivadas parciales con controles del tipo bang-bang (véase, por ejemplo, [7] y algunas de sus referencias). Esta propiedad, establece que, existe $\mu > 0$ tal que

$$\text{meas}\{t \mid |\hat{\sigma}(t)| \leq \epsilon\} \leq \mu\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0,$$

donde “meas” denota la medida de Lebesgue. En la Proposición 6.4 de [7] se muestra que esta propiedad implica una desigualdad integral inversa. De este resultado se deduce la subregularidad métrica de F .

En este trabajo estudiaremos propiedades del tipo regularidad métrica asumiendo alguna de las propiedades antes mencionadas sobre $\hat{\sigma}$, cuando U es un politopo convexo y compacto.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se presentan las definiciones y resultados básicos sobre análisis en multifunciones que son el soporte para los capítulos siguientes. En el Capítulo 2 se estudia la regularidad métrica, subregularidad métrica y regularidad bi-métrica de una multifunción, así como sus caracterizaciones mediante derivada gráfica, variaciones y propiedades de cubrimiento. El Capítulo 3 se ha destinado a las aplicaciones. Se analiza la relación entre la condición de calificación de Mangasarian-Fromovitz y la regularidad métrica de la multifunción asociada a un problema de optimización no lineal. En el Capítulo 3 también se estudian las propiedades de crecimiento de la función $\hat{\sigma}$ y su conexión con la regularidad métrica de la inclusión variacional que aparece en el principio de Pontryagin. Finalmente, en el Capítulo 5 se recogen las conclusiones y se sugieren posibles investigaciones futuras.

Índice general

Resumen	III
Abstract	IV
Introducción	V
1. Preliminares	2
2. Regularidad métrica	12
2.1. Algunas caracterizaciones de regularidad métrica.	19
2.2. Regularidad métrica y derivada gráfica.	23
2.3. Regularidad métrica y variación contingente	32
2.4. Regularidad bi-métrica	35
2.5. Regularidad (bi-)métrica de orden superior	38
3. Aplicaciones	43
3.1. Aplicación de regularidad métrica en optimización	43
3.2. Aplicación de regularidad métrica en control óptimo	47
3.2.1. Regularidad bi-métrica	51
3.2.2. Regularidad bi-métrica de orden superior	58
4. Conclusiones	64
Bibliografía	65

Capítulo 1

Preliminares

Sea (X, d_X) un espacio métrico. La bola cerrada de centro a y radio $r > 0$ en el espacio métrico X es

$$B_{d_X}(a, r) = \{x \in X \mid d_X(x, a) \leq r\},$$

y su interior es la bola abierta

$$\mathring{B}_{d_X}(a, r) = \text{int} B_{d_X}(a, r) = \{x \in X \mid d_X(x, a) < r\}.$$

La cerradura de un subconjunto $A \subset X$ se denota por $\overline{A}$. Un subconjunto $U \subset X$ es una vecindad de $\bar{x} \in X$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_{d_X}(\bar{x}, \varepsilon) \subset U.$$

Si $(X, \|\cdot\|)$ y $(Y, \|\cdot\|)$ son dos espacios de Banach y $U \subseteq X$ es un subconjunto abierto, una función $f : U \subseteq X \rightarrow Y$ es *Gâteaux diferenciable* en $\bar{x}$ si existe $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, es decir, un operador lineal continuo $T : X \rightarrow Y$ tal que para cada $u \in X$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t} = Tu.$$

Dicho operador T se denomina derivada de Gâteaux de f en $\bar{x}$ y se denota por $f'(\bar{x})$.

Decimos que f es *Fréchet diferenciable* en $\bar{x} \in U$ si existe $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - Th\|}{\|h\|} = 0.$$

En tal caso, denotamos $T = f'(\bar{x})$ o $Df(\bar{x})$. Si además se cumple que

$$\lim_{\substack{x, x' \rightarrow \bar{x} \\ x \neq x'}} \frac{\|f(x) - f(x') - T(x - x')\|}{\|x - x'\|} = 0,$$

se dice que f es estrictamente diferenciable en $\bar{x}$.

Cuando f es Fréchet diferenciable en todo punto de U y la aplicación derivada $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ definida por $x \mapsto f'(x)$ es continua, se dice que f es de clase $\mathcal{C}^1$.

Para funciones entre espacios de dimensión finita, la derivada de Gâteaux es equivalente a la derivada de Fréchet. Podemos denotar ambas derivadas de la misma manera, pero se debe tener presente que son nociones de derivada distintas en general.

Una *multifunción o aplicación multivaluada* F de (X, d_X) en (Y, d_Y) es una correspondencia que asigna a cada $x \in X$ un subconjunto $F(x)$ de Y . Si bien, tal tipo de correspondencias deberían ser denotadas por $F : X \rightarrow 2^Y$, existen otras notaciones igual o más populares, tales como $F : X \rightrightarrows Y$ o la que adoptaremos en este trabajo $F : X \rightsquigarrow Y$.

El gráfico de F es el subconjunto de $X \times Y$,

$$\text{Gph } F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

Diremos que F es cerrada cuando $\text{Gph } F$ es cerrado respecto a $d_X \times d_Y$.

El dominio y rango de F son

$$\text{Dom } F = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}, \quad \text{y} \quad \text{Ran } F = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ tal que } y \in F(x)\},$$

los cuales son las imágenes del gráfico $\text{Gph } F$ bajo las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$, $\pi_1(x, y) = x$ y $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$, $\pi_2(x, y) = y$, respectivamente. Es claro que una multifunción queda completamente determinada por su gráfico, cualquier subconjunto $S \subset X \times Y$ es el gráfico de una única multifunción $G : X \rightsquigarrow Y$ tal que

$$G(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in S\} \quad \text{y} \quad \text{Gph } G = S.$$

La aplicación multivaluada inversa de F es $F^{-1} : Y \rightsquigarrow X$ definida por

$$F^{-1}(y) := \{x \in X \mid y \in F(x)\}.$$

Evidentemente, $(F^{-1})^{-1} = F$. La imagen de un conjunto $A \subset X$ bajo F es

$$F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x) = \{y \in Y \mid F^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\},$$

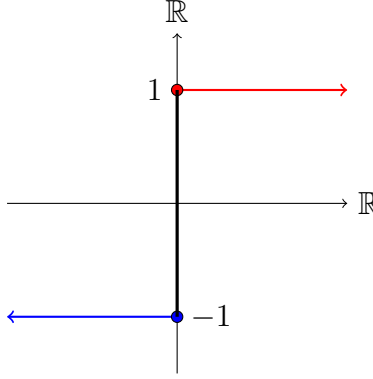


Figura 1.1: Gráfico de F

mientras que la imagen inversa de un conjunto $B \subset Y$ es

$$F^{-1}(B) := \bigcup_{y \in B} F^{-1}(y) = \{x \in X \mid F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Note que

$$\text{Dom } F^{-1} = \text{Ran } F = F(X), \quad \text{Ran } F^{-1} = \text{Dom } F = F^{-1}(Y).$$

Desde esta perspectiva, las funciones son un caso especial de multifunciones, pues una función $f: X \rightarrow Y$ puede verse como la multifunción que asocia a cada $x \in X$ el singleton $\{f(x)\}$ en 2^Y .

Ejemplo 1.1. Considere la multifunción $F: \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} \{1\} & x > 0, \\ [-1, 1] & x = 0, \\ \{-1\} & x < 0. \end{cases}$$

Su gráfico se muestra en la Figura 1.1. Se observa que, $\text{Dom } F = \mathbb{R}$, $\text{Ran } F = F(\mathbb{R}) = F(0) = [-1, 1]$, $F^{-1}(-1) = (-\infty, 0]$, $F^{-1}((-1, 1)) = \{0\}$, $F^{-1}(1) = [0, +\infty)$, y

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} (-\infty, 0], & y = -1 \\ \{0\}, & y \in (-1, 1) \\ [0, +\infty), & y = 1 \\ \emptyset, & y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Para dos conjuntos $A, B \subset Y$ en un espacio vectorial Y , la suma de Minkowski y la

multiplicación escalar de conjuntos se definen por

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \quad \lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sean X , Y y Z espacios de Banach y $F: X \rightsquigarrow Y$ y $G: X \rightsquigarrow Y$ dos multifunciones, las multifunciones suma de $F+G$ y producto de un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por F , λF , son respectivamente

$$(F + G)(x) := F(x) + G(x), \quad \text{y} \quad (\lambda F)(x) := \lambda F(x).$$

Si otra multifunción H es tal que $H: Y \rightsquigarrow Z$, la composición de F y H es $H \circ F: X \rightsquigarrow Z$ definida por

$$(H \circ F)(x) := H(F(x)) = \bigcup_{y \in F(x)} H(y) = \{z \in Z \mid F(x) \cap H^{-1}(z) \neq \emptyset\}.$$

En el caso de que F y G sean univaluadas, esto se reduce a la noción usual de composición de funciones. Es claro que $(H \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ H^{-1}$.

Ejemplo 1.2. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y cerrado. La multifunción $N_C: \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ cono normal a C es definida por

$$N_C(x) = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in C\}, & x \in C, \\ \emptyset, & x \notin C. \end{cases}$$

Dada una función convexa y diferenciable $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. El conjunto $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x) = \{x \in C \mid f(x) \leq f(y), \forall y \in C\}$ coincide con el conjunto solución de la ecuación generalizada

$$0 \in \nabla f(x) + N_C(x),$$

donde $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ es el gradiente de f en x . Es decir,

$$\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x) = F^{-1}(0), \quad \text{donde} \quad F(x) = \nabla f(x) + N_C(x)$$

Dada una multifunción $F: X \rightsquigarrow Y$. Un problema importante (como en el Ejemplo 1.2) es

$$\text{determinar } \bar{x} \text{ tal que } \bar{y} \in F(\bar{x}).$$

El conjunto solución es $F^{-1}(\bar{y})$, este, en general puede ser difícil de obtener, en tales casos, perturbaciones pueden dar información de la solución deseada, es decir, puede ser útil estudiar el comportamiento de $F^{-1}(y)$ cuando y está cerca de $\bar{y}$. La experiencia nos dice que, para estudiar este tipo de problemas, eventualmente debemos tratar con las versiones

multivaluadas de los teoremas de la función inversa e implícita.

Para comprender el comportamiento local de las multifunciones, es fundamental describir cómo varían sus valores mediante nociones de convergencia de conjuntos, lo cual permite caracterizar su continuidad y propiedades tipo Lipschitz. Estas extensiones (secuencias de elementos a secuencias de conjuntos) fueron introducidos por Painlevé en 1902 bajo los nombres de *límites superiores e inferiores de conjuntos*. Luego fueron popularizados por Kuratowski en su libro *Topologie* y por lo tanto, a menudo llamados *límites inferior y superior de Kuratowski* de sucesiones de conjuntos. En este trabajo, los llamaremos *límites inferior y superior* o cuando sea necesario *límites inferior y superior de Painlevé-Kuratowski*.

Sea (X, d_X) un espacio métrico y un subconjunto K de X , la *distancia de $x \in X$ a K* es

$$d_X(x, K) = \inf_{y \in K} d_X(x, y).$$

No es difícil mostrar que $d_X(x, K) = d_X(x, \overline{K})$, donde $\overline{K}$ es la cerradura de K .

Sea $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X . El *límite superior de Painlevé-Kuratowski* de la sucesión K_n es

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} K_n := \left\{ x \in X \mid \liminf_{n \rightarrow +\infty} d_X(x, K_n) = 0 \right\} \quad (1.1)$$

y

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} K_n := \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d_X(x, K_n) = 0 \right\} \quad (1.2)$$

es el *límite inferior Painlevé-Kuratowski*. Un conjunto K se dice que es el *límite o conjunto límite* en el sentido de Painlevé-Kuratowski de la sucesión K_n si

$$K = \limsup_{n \rightarrow +\infty} K_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} K_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n \quad (1.3)$$

Se observa que el límite inferior de una sucesión de subconjuntos K_n es el conjunto de límites de sucesiones de elementos $x_n \in K_n$ y el límite superior es el conjunto de puntos de adherencia de tales secuencias. En consecuencia, ambos límites superior e inferior son conjuntos cerrados. Note también que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} K_n \subset \limsup_{n \rightarrow +\infty} K_n.$$

Puesto que $d_X(x, K_n) = d_X(x, \overline{K}_n)$, los límites superiores e inferiores de la sucesiones K_n y $\overline{K}_n$ coinciden.

Cuando $K_n = \{x_n\}$ es un singleton,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \{x\}, & \text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x. \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} K_n = \emptyset, & \text{si } \nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n. \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} K_n = \overline{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}, \end{cases}$$

donde $\overline{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ es el conjunto de puntos de adherencia de la sucesión de los x_n . Los límites inferior y superior pueden ser vacíos, por ejemplo, considere la sucesión dada por $K_n = [n, +\infty)$.

Ejemplo 1.3. Sea la sucesión K_n dada por: $K_n = \{-\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ si n es par y $K_n = \{\frac{1}{n}\} \times [-1, 0]$ si n es impar. Entonces

$$\liminf K_n = \{(0, 0)\} \quad \text{y} \quad \limsup K_n = \{0\} \times [-1, 1].$$

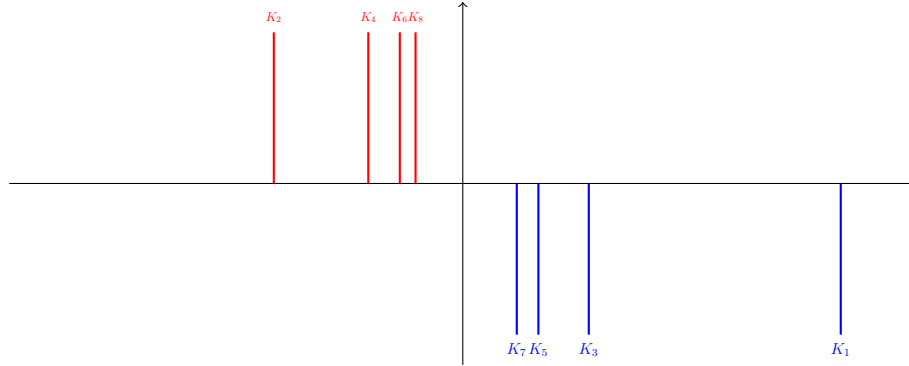


Figura 1.2: Visualización de la sucesión de conjuntos K_n para $n = 1, \dots, 8$.

Ejemplo 1.4. Otros ejemplos

1. La sucesión de bolas $B_{d_X}(x_n, \rho_n)$ converge a $B_{d_X}(x, \rho)$ cuando $x_n \rightarrow x$ y $\rho_n \rightarrow \rho$.
2. Una sucesión de conjuntos C_n que alterna en dos cerrados diferentes: $C_n = D_1$ cuando n es impar y $C_n = D_2$ cuando n es par. Entonces $D_1 \cap D_2$ es el límite inferior y $D_1 \cup D_2$ es el límite superior. La sucesión no es convergente cuando $D_1 \neq D_2$.
3. Considere la secuencia $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X tal que $K_n \subset K_m$ para $n \geq m$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{K_n}$$

Propiedades y caracterizaciones relacionadas con límite inferior y superior de conjuntos en el sentido de Painlevé–Kuratowski pueden ser encontradas en [2], [11] y en sus referencias.

Además de la convergencia de Painlevé–Kuratowski, existen otras nociones de convergencia de conjuntos. Entre ellas, la convergencia de Pompeiu–Hausdorff resulta especialmente relevante, ya que implica la convergencia de Painlevé–Kuratowski bajo hipótesis adecuadas.

Para subconjuntos C y D del espacio métrico (X, d_X) , el *exceso* de C fuera de D es definido por

$$e_X(C, D) = \sup_{x \in C} d(x, D) \quad (1.4)$$

con la convención de que $e(C, \emptyset) = +\infty$, $e(\emptyset, D) = 0$ cuando $D \neq \emptyset$ y $e(\emptyset, D) = +\infty$ en otro caso. La figura 1.3 ilustra el exceso.

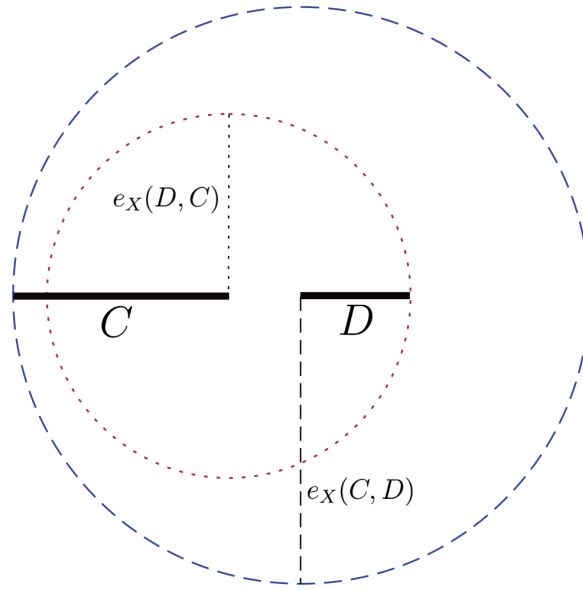


Figura 1.3: Ilustración del exceso.

La *distancia de Pompeiu-Hausdorff* entre C y D es

$$h(C, D) = \max\{e_X(C, D), e_X(D, C)\} \quad (1.5)$$

Cundo X es además un espacio vectorial, (1.4) y (1.5) pueden ser escritos de manera equivalente como

$$e_X(C, D) = \inf\{\tau \geq 0 \mid C \subset D + \tau B_{d_X}(0, 1)\}$$

y

$$h(C, D) = \inf\{\tau \geq 0 \mid C \subset D + \tau B_{d_X}(0, 1), \quad D \subset C + \tau B_{d_X}(0, 1)\}.$$

Notemos que $e(C, D)$ y $h(C, D)$ no distinguen si C y D son cerrados o abiertos, por ejemplo,

para los intervalos $C = (0, 1)$ y $D = [0, 1]$ se comprueba fácilmente que

$$e_X(C, D) = 0 \quad \text{y} \quad h(C, D) = 0.$$

También, $e_X(C, D)$ y $h(C, D)$ a veces pueden ser $+\infty$ cuando se consideran conjuntos no acotados, en particular, la distancia de Pompeiu–Hausdorff no constituye una métrica en el espacio de subconjuntos cerrados no vacíos de X , pero es una métrica sobre los subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de X .

Una sucesión de conjuntos $\{K_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se dice que *converge con respecto a la distancia de Pompeiu–Hausdorff* hacia un conjunto K si K es cerrado y

$$h(K_n, K) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty.$$

El conjunto límite (en el sentido Pompeiu–Hausdorff) K debe ser cerrado, esto garantiza la unicidad del límite. Un ejemplo que ilustra este hecho es el siguiente, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$K_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Entonces se tiene

$$h(K_n, (0, 1)) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad h(K_n, [0, 1]) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty.$$

De la definición de la distancia de Pompeiu–Hausdorff se deduce que, si K_n converge a K , entonces el conjunto K debe ser no vacío, ya que la distancia de Hausdorff entre un conjunto vacío y uno no vacío es infinita. Asimismo, solo un número finito de los conjuntos K_n pueden ser vacíos, pues en caso contrario se tendría $h(K_n, K) = +\infty$ para infinitos valores de n , lo cual contradice a $h(K_n, K) \rightarrow 0$. Esto no ocurre en la convergencia en el sentido de Painlevé–Kuratowski, por ejemplo, en $\mathbb{R}$, considere la sucesión de conjuntos $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$K_n = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \{n\}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} K_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} K_n = \emptyset,$$

aunque infinitos conjuntos de la sucesión son vacíos.

La relación entre estas dos nociones de convergencia de conjuntos queda establecida en el Teorema 3A.4 de [11]. Resumiéndolo, es este resultado se muestra que, para sucesiones de conjuntos cerrados, la convergencia en el sentido de Pompeiu–Hausdorff implica la con-

vergencia en el sentido de Painlevé–Kuratowski (con el mismo límite para ambas nociones). Además, si se asume que la sucesión está contenida en un subconjunto acotado, la recíproca también es válida.

Cabe destacar que, cuando $K_n = \{x_n\}$, las nociones de convergencia de Pompeiu–Hausdorff y de Painlevé–Kuratowski se reducen a la convergencia usual de sucesiones en espacios métricos. Esta observación refleja el hecho bien conocido de que, en espacios métricos, la continuidad de funciones está íntimamente ligada al comportamiento de las sucesiones. De manera similar, esta relación se presenta también en el contexto de las multifunciones.

Los conceptos semicontinuidad de aplicaciones multivaluadas fueron introducidos por Bouligand, Kuratowski y Wilson a principios de los años treinta. Una aplicación multivaluada $F : X \rightsquigarrow Y$ se llama *semicontinua superior en $x \in \text{Dom } F$* si para cualquier vecindad U de $F(x)$, existe $\eta > 0$ tal que

$$F(x') \subset U, \quad \forall x' \in B_{d_X}(x, \eta).$$

Se dice que es semicontinua superior si lo es en todo punto de $x \in \text{Dom } F$.

Notemos que esta definición es una adaptación natural de la definición de función continua. Entonces, ¿por qué se usa el adjetivo “semicontinua superior” en lugar de “continua”? una de las razones es que la caracterización de las funciones continuas (una función f es continua en x si y solo si aplica sucesiones que convergen a x en sucesiones que convergen a $f(x)$) ya no se cumple en el caso multivaluado.

En efecto, la versión multivaluada de esta caracterización conduce a la siguiente definición. Una aplicación multivaluada $F : X \rightsquigarrow Y$ se llama *semicontinua inferior en $x \in \text{Dom } F$* si para todo $y \in F(x)$ y para toda sucesión $x_n \in \text{Dom } F$ que converja a x , existe una sucesión $y_n \in F(x_n)$ que converge a y . Se dice que es semicontinua inferior si lo es en todo punto $x \in \text{Dom } F$.

No es difícil verificar que la definición secuencial de semicontinuidad inferior es equivalente a: para todo subconjunto abierto $U \subset Y$ tal que $U \cap F(x) \neq \emptyset$,

$$\exists \eta > 0 \text{ tal que } \forall x' \in B_{d_X}(x, \eta), F(x') \cap U \neq \emptyset.$$

Se dice que una aplicación multivaluada F es *continua en x* si es semicontinua superior y como semicontinua inferior en x , y que es continua si y solo si es continua en todo punto de $\text{Dom } F$.

Las propiedades de continuidad de una multifunción $F : X \rightsquigarrow Y$, donde X e Y son espacios métricos, pueden también caracterizarse mediante las siguientes nociones de límites. Sea $F : X \rightsquigarrow Y$ una aplicación multivaluada, decimos que

$$\limsup_{x' \rightarrow x} F(x') := \left\{ y \in Y \mid \liminf_{x' \rightarrow_F x} d(y, F(x')) = 0 \right\}$$

es el *límite superior* de $F(x')$ cuando $x' \rightarrow x$, y que

$$\liminf_{x' \rightarrow x} F(x') := \left\{ y \in Y \mid \lim_{x' \rightarrow_F x} d(y, F(x')) = 0 \right\}$$

es el *límite inferior* de $F(x')$ cuando $x' \rightarrow x$. Donde, la notación $x' \rightarrow_F x$ significa que x' está en $\text{Dom } F$ y converge a x .

Se observa que ambos, son cerrados y

$$\liminf_{x' \rightarrow x} F(x') \subset \overline{F(x)} \subset \limsup_{x' \rightarrow x} F(x').$$

Se muestra en la Proposición 1.4.7 de [2] que, un punto (x, y) pertenece a la clausura del gráfico de una aplicación multivaluada $F : X \rightsquigarrow Y$ si y solo si

$$y \in \limsup_{x' \rightarrow x} F(x')$$

y F es semicontinua inferior en $x \in \text{Dom}(F)$ si y solo si

$$F(x) \subset \liminf_{x' \rightarrow x} F(x').$$

Otra noción de continuidad es la propiedad de ser Lipschitz. Para X e Y espacios vectoriales normados, se dice que $F : X \rightsquigarrow Y$ es *Lipschitz alrededor de* $x \in X$ si existen una constante positiva ℓ y un entorno $U \subset \text{Dom } F$ de x tales que

$$\forall x_1, x_2 \in U, \quad F(x_1) \subset F(x_2) + \ell \|x_1 - x_2\| B_{d_Y}(0, 1).$$

En este caso, F también se llama *Lipschitz (o ℓ -Lipschitz) sobre* U .

Si se localiza también y en $F(x)$, se dice que F es *pseudo-Lipschitz alrededor de* $(x, y) \in \text{Gph } F$ si existen una constante positiva ℓ y entornos $U \subset \text{Dom } F$ de x y V de y tales que

$$\forall x_1, x_2 \in U, \quad F(x_1) \cap V \subset F(x_2) + \ell \|x_1 - x_2\| B_{d_Y}(0, 1).$$

La propiedad de ser pseudo-Lipschitz es equivalente *regularidad métrica* la cual es un tema central en este trabajo y será definida y estudiada en el siguiente capítulo.

Los conceptos descritos en este capítulo pueden encontrarse en literatura referente a análisis en multifunciones, tales como [2], [10], [11], [15], [22] y algunas de sus referencias.

Capítulo 2

Regularidad métrica

Dada una aplicación multivaluada $F: X \rightsquigarrow Y$ entre dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) y la ecuación generalizada

$$y \in F(x), \quad (2.1)$$

en la cual, $x \in X$ es la incógnita y $y \in Y$ es dado.

Un problema importante es el estudio de la estabilidad de las soluciones de (2.1), es decir, ¿qué ocurre cuando perturbamos ligeramente y ? en principio, al tratarse de una aplicación multivaluada sin ninguna propiedad adicional, la intuición nos dice las soluciones de la nueva ecuación perturbada pueden ser muy ajenas a las soluciones de la ecuación general. Nos interesa entonces alguna propiedad sobre F de tal forma que nos asegure que las soluciones de la ecuación perturbada no estén muy “lejos” de las soluciones de la ecuación original, la propiedad estándar para tratar esta problemática es la *regularidad métrica*.

Decimos que F es *métricamente regular* en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$ si existe $\ell > 0$ y vecindades $U \ni \bar{x}$ y $V \ni \bar{y}$ tal que

$$d_X(x, F^{-1}(y)) \leq \ell d_Y(y, F(x)), \quad \forall x \in U \quad \text{y} \quad \forall y \in V. \quad (2.2)$$

El ínfimo de los ℓ sobre todas las combinaciones (ℓ, U, V) es llamado *módulo de regularidad métrica* de F alrededor de $(\bar{x}, \bar{y})$ y denota por $\text{reg } F(\bar{x}, \bar{y})$. La ausencia de regularidad métrica es indicada por $\text{reg } F(\bar{x}, \bar{y}) = +\infty$.

Cuando se fija $y = \bar{y}$ y solo varía x , F es llamada *métricamente subregular* en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$.

Desde el punto de vista del análisis numérico podemos interpretar: dados F y y , si F posee la propiedad de ser métricamente regular, podemos estimar qué tan lejos está un punto x de ser una solución de la ecuación generalizada $y \in F(x)$, en términos del residuo $d(y, F(x))$ que en teoría es conocido.

A la izquierda de la Figura 2.11 se muestra una multifunción que es métricamente regular en $(0, 0)$, mientras que en la derecha se ilustra una multifunción que no tiene la propiedad en $(0, 0)$, pues, para valores positivos pequeños de y , el residuo $d_Y(y, F(0)) = y$ no aproxima linealmente a la distancia del conjunto solución de $y \in F(x)$ al origen.

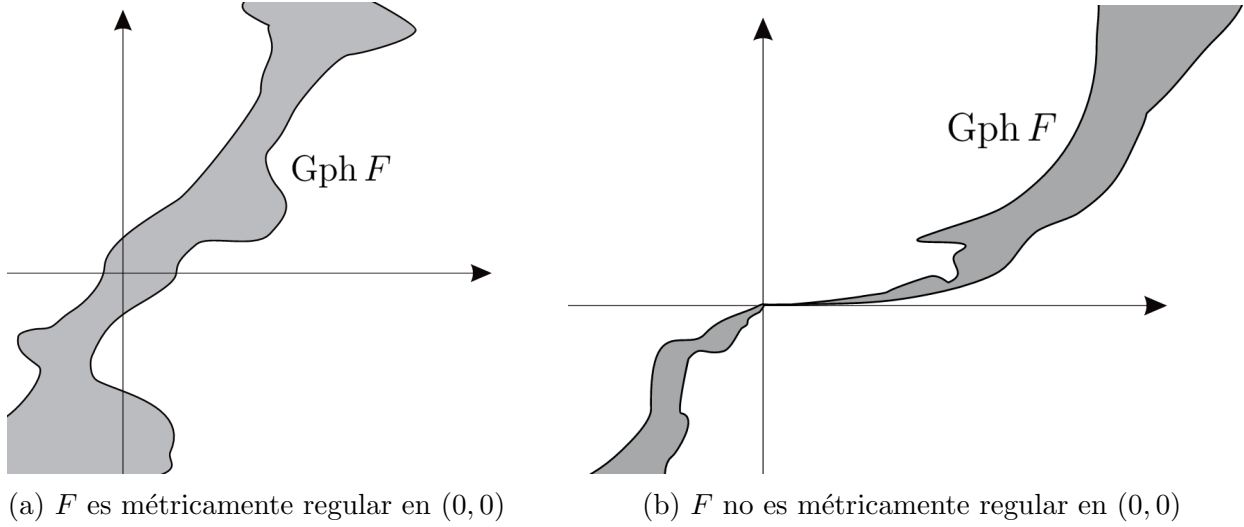


Figura 2.1: Regularidad métrica en el origen

El término “regularidad métrica” fue introducido por Borwein en [3] en 1986 pero su origen podría remontarse al Teorema de la Aplicación Abierta de Banach: para cualquier aplicación lineal acotada entre dos espacios de Banach $L: X \rightarrow Y$, son equivalentes

- (a) L es sobreyectiva;
- (b) L es abierta;
- (c) Existe $\kappa > 0$ tal que para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ de modo que

$$y = Lx$$

y

$$\|x\| \leq \kappa \|y\|.$$

Notemos que (c), es equivalente a que existe una constante $\kappa > 0$ tal que

$$d_X(0, L^{-1}(y)) \leq \kappa \|y\|$$

para todo $y \in Y$. Donde d_X es la distancia inducida por la norma de X .

Como L es lineal, entonces, para cualquier $x \in X$ se tiene que

$$L^{-1}(y - L(x)) = L^{-1}(y) - x,$$

en efecto,

$$\begin{aligned} z \in L^{-1}(y - L(x)) &\Leftrightarrow L(z) = y - L(x) \Leftrightarrow L(z + x) = y \\ &\Leftrightarrow z + x \in L^{-1}(y) \Leftrightarrow z \in L^{-1}(y) - x. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d_X(x, L^{-1}(y)) &= \|L^{-1}(y) - x\| = \|L^{-1}(y - L(x))\| \\ &= d_X(0, L^{-1}(y - L(x))) \leq \kappa \|y - L(x)\| = \kappa d_Y(y, L(x)); \end{aligned}$$

es decir,

$$d_X(x, L^{-1}(y)) \leq \kappa d_Y(y, L(x)) \quad (2.3)$$

para todo $x \in X$, $y \in Y$.

Por otro lado, vemos que en este caso la propiedad es global y el módulo de regularidad no depende del punto y aprovechando (c) tenemos que

$$\text{reg } L = \inf\{\kappa > 0 \mid \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tal que } y = L(x) \wedge \|x\| \leq \kappa \|y\|\} \quad (2.4)$$

Para todo $\kappa > 0$ que satisface (c), tomando $x = 0$ para todo $y \neq 0$ en la desigualdad (2.3),

$$\kappa \geq \frac{d_X(0, L^{-1}(y))}{\|y\|},$$

lo cual implica que

$$\kappa \geq \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{d_X(0, L^{-1}(y))}{\|y\|} = \sup_{\|y\| \leq 1} d_X(0, L^{-1}(y)) = \sup_{\|y\|=1} \inf\{\|x\| : y = L(x)\} \quad (2.5)$$

Llamemos $r = \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{d_X(0, L^{-1}(y))}{\|y\|}$, entonces

$$r = \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{d_X(0, L^{-1}(y))}{\|y\|} \geq \frac{d_X(0, L^{-1}(y))}{\|y\|}, \quad \forall y \in Y,$$

de donde se obtiene,

$$d_X(0, L^{-1}(y)) \leq r \|y\|, \quad \forall y \in Y,$$

esto dice que r satisface (c) y por (2.5) es la menor constante con esta propiedad. Por lo

tanto

$$\operatorname{reg} L = \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{d_X(0, L^{-1}(y))}{\|y\|} = \sup_{\|y\| \leq 1} d_X(0, L^{-1}(y)) = \sup_{\|y\|=1} \inf\{\|x\| : y = L(x)\}. \quad (2.6)$$

Se deduce de (2.6) que si L es un isomorfismo, entonces

$$\operatorname{reg} L = \|L^{-1}\|.$$

Deducimos entonces que una aplicación lineal continua es métricamente regular si y solo si es abierta, si y solo si es sobreyectiva.

Se define la *constante de Banach* de un operador lineal y continuo L que actúa entre dos espacios de Banach X e Y como el número

$$C(L) := \sup\{r \geq 0 : rB_{d_Y}(0, 1) \subset L(B_{d_X}(0, 1))\} = \inf\{\|y\| : y \notin L(B_{d_X}(0, 1))\} \quad (2.7)$$

Proposición 2.1. Sean X e Y dos espacios de Banach y $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces $\operatorname{reg} L = \frac{1}{C(L)}$ con las convenciones $\frac{1}{0} = +\infty$ y $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Demostración. Si $C(L) = +\infty$ entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$nB_{d_Y}(0, 1) \subset L(B_{d_X}(0, 1)) \implies B_{d_Y}(0, 1) \subset L\left(\frac{1}{n}B_{d_X}(0, 1)\right).$$

Entonces, para todo $y \in Y$ con $\|y\| = 1$ existe $x \in B_{d_X}(0, 1)$ tal que $y = L(x/n)$. De (2.6) se deduce que

$$\operatorname{reg} L = \frac{1}{n} \sup_{\|y\|=1} \inf\{\|x\| : y = L(x)\} \leq \frac{1}{n}.$$

Haciendo $n \rightarrow +\infty$ tenemos que $\operatorname{reg} L = 0$.

Si $C(L) = 0$ entonces L no es abierta, por consiguiente $\operatorname{reg} L = +\infty$. Supongamos que $0 < C(L) < +\infty$ y sea $r > 0$ tal que $rB_{d_Y}(0, 1) \subset L(B_{d_X}(0, 1))$. Sea $y \in Y \setminus \{0\}$, entonces $r \frac{y}{\|y\|} \in rB_{d_Y}(0, 1)$ y esto implica que, existe $u \in B_{d_X}(0, 1)$ tal que $r \frac{y}{\|y\|} = L(u)$. Entonces, existe $x = \frac{\|y\|}{r} \cdot u$ tal que $y = L(x)$ y

$$\|x\| = \frac{\|y\|}{r} \|u\| \leq \frac{\|y\|}{r} = \frac{1}{r} \|y\|.$$

Note que para $y = 0$ la desigualdad se satisface trivialmente, pues $0 = L(0)$. Por lo tanto, tomado supremo sobre todos los $r > 0$ con la propiedad antes mencionada, tenemos

$$\operatorname{reg} L \leq \frac{1}{r} \implies C(L) \cdot \operatorname{reg} L \leq 1.$$

Recíprocamente, sea $\kappa > 0$ tal que, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $y = L(x)$ y

$$\|x\| \leq \kappa \|y\| \implies \frac{1}{\kappa} \|x\| \leq \|y\|$$

Sea $y \in \frac{1}{\kappa} B_{d_Y}(0, 1)$, entonces existe $v \in B_{d_Y}(0, 1)$ tal que $y = \frac{1}{\kappa} v$; además, existe $x \in X$ tal que

$$\|x\| \leq \kappa \|y\| = \kappa \cdot \frac{1}{\kappa} \|v\| \leq 1,$$

es decir,

$$\frac{1}{\kappa} B_{d_Y}(0, 1) \subset L(B_{d_X}(0, 1)).$$

Entonces, $\frac{1}{\kappa} \leq C(L)$, tomando ínfimo sobre todos los $\kappa > 0$ con la propiedad antes mencionada, tenemos que $\text{reg } L \cdot C(A) \geq 1$.

□

Otra cosa que podemos mencionar es que, para un par de espacios de Banach X y Y y sus duales X^* y Y^* , cualquier $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tiene un adjunto $L^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ el cual es tal que

$$\langle y^*, Lx \rangle = \langle L^* y^*, x \rangle \quad \text{para todo } x \in X, y^* \in Y^*,$$

donde $\langle y^*, Lx \rangle$ denota a la evaluación $y^*(Lx)$. Si además L es sobreyectiva, entonces L^* es inyectiva y $\|L^*\| = \|L\|$.

Proposición 2.2. *Bajo las condiciones y convensiones de la Proposición 2.1,*

$$\frac{1}{\text{reg } L} = C(L) = \inf\{\|L^* y^*\| : \|y^*\| = 1\}.$$

Demostración. Si $Y = \{0\}$ implica que $\text{reg } L = 0$; también implica que $Y^* = \{0\}$ y por lo tanto el resultado es obvio ya que $\inf \emptyset = +\infty$. Si $L^{-1}(y) = \emptyset$ para algún $y \in Y$, entonces de la ecuación (2.6) se deduce que $\text{reg } L = +\infty$. Por otro lado, $\text{Im } L$ es un subespacio propio de Y y por el Corolario 1.8 de [4], existe $y^* \in Y^*$ tal que

$$\langle y^*, y \rangle = 0, \quad \forall y \in \text{Im } L,$$

lo que implica que

$$0 = \langle y^*, y \rangle = \langle y^*, Lx \rangle = \langle L^* y^*, x \rangle, \quad \forall x \in X;$$

de donde se deduce que $\inf\{\|L^* y^*\| : \|y^*\| = 1\} = 0$ y la igualdad se satisface.

Supongamos que Y es no nulo y denotemos por $\beta > 0$ al lado izquierdo de la ecuación en la proposición. Sea $y \in Y$ tal que $\|y\| = 1$, entonces $\text{reg } L \geq \|x\|$ para algún $x \in X$ con

$y = L(x)$. Sea $y^* \in Y^*$ con $\|y^*\| = 1$, tenemos,

$$\langle y^*, y \rangle = \langle y^*, Lx \rangle = \langle L^*y^*, x \rangle \implies |\langle y^*, y \rangle| \leq \|L^*y^*\| \|x\| \leq \text{reg } L \cdot \|L^*y^*\|,$$

esto implica que,

$$1 = \|y^*\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle y^*, y \rangle| \leq \text{reg } L \cdot \|L^*y^*\|.$$

Tomando ínfimo sobre todos los $y^* \in Y^*$ con $\|y^*\| = 1$ tenemos que $1 \leq \text{reg } L \cdot \beta$.

Además, si $\text{reg } L > 0$ entonces L es abierta, es decir $\text{int } L(B_{d_X}(0, 1)) \neq \emptyset$. Sea $y \notin L(B_{d_X}(0, 1))$, entonces existe $y^* \in Y^*$ con $\|y^*\| = 1$ tal que

$$\begin{aligned} \langle y^*, y \rangle &\geq \sup\{\langle y^*, y \rangle : y \in L(B_{d_X}(0, 1))\} = \sup\{\langle y^*, Lx \rangle : x \in B_{d_X}(0, 1)\} \\ &= \sup\{\langle L^*y^*, x \rangle : x \in B_{d_X}(0, 1)\} = \|L^*y^*\|. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|y\| \geq \langle y^*, y \rangle \geq \|L^*y^*\|.$$

Tomando ínfimo sobre $y \notin L(B_{d_X}(0, 1))$, tenemos

$$\frac{1}{\text{reg } L} = C(A) = \inf\{\|y\| : y \notin L(B_{d_X}(0, 1))\} \geq \|L^*y^*\|.$$

Tomando ínfimo sobre todos los $y^* \in Y^*$ con $\|y^*\| = 1$ se obtiene la desigualdad deseada $\text{reg } L \cdot C(L) \leq 1$. $\square$

La extensión del teorema de la aplicación abierta de Banach a aplicaciones no lineales y multivaluadas se remonta a los trabajos de Lyusternik y Graves. En 1934, L.A. Lyusternik publicó un resultado geométrico que establece que si una función $f : X \rightarrow Y$ es diferenciable en el sentido de Fréchet en un entorno de un punto $\bar{x}$ donde $f(\bar{x}) = 0$ y su derivada $f'(\bar{x})$ es continua y sobreyectiva, entonces el espacio tangente a $f^{-1}(0)$ en $\bar{x}$ es exactamente el conjunto afín $\bar{x} + \ker f'(\bar{x})$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, f^{-1}(0)) \leq \varepsilon \|x - x_0\|$$

siempre que $x \in (\bar{x} + \ker f'(\bar{x}))$ y $\|x - \bar{x}\| \leq \delta$.

En 1950, L. M. Graves obtuvo una generalización del resultado de Lyusternik, como vemos a continuación

Teorema 1 (Graves). Sean X, Y espacios de Banach y sea f una función continua de X en Y , definida en la bola $B_{d_X}(\bar{x}, \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Sea $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ y sea κ la constante correspondiente al ítem (c) del Teorema de la Aplicación Abierta mencionada anteriormente.

Supongamos que existe una constante $\delta < \kappa^{-1}$ tal que, para todo $x_1, x_2 \in B_{d_X}(\bar{x}, \varepsilon)$, se cumple

$$\|f(x_1) - f(x_2) - L(x_1 - x_2)\| \leq \delta \|x_1 - x_2\|. \quad (2.8)$$

Entonces, la ecuación $y = f(x)$ tiene una solución $x \in B_{d_X}(\bar{x}, \varepsilon)$ siempre que $\|y - y_0\| \leq c\varepsilon$, donde $f(\bar{x}) = y_0$ y $c = \kappa^{-1} - \delta$.

La prueba puede seguirse en [9] y en [11]. Notemos que Graves no asume diferenciabilidad sobre f . Si se asume que, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que la condición (2.8) se satisface para todo $x_1, x_2 \in B_{d_X}(\bar{x}, \varepsilon)$, entonces $L = f'(\bar{x})$ es la derivada estricta de f en $\bar{x}$. La diferenciabilidad estricta de f en $\bar{x}$ implica que f es Lipschitz en un entorno de $\bar{x}$.

Entonces, del Teorema de Graves podemos deducir que: si f es estrictamente diferenciable en $\bar{x}$ y la derivada es sobreyectiva, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $c > 0$ tales que, para todo $y \in Y$ con $\|y - f(\bar{x})\| \leq c\varepsilon$, existe $x \in X$ tal que $\|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon$ y $y = f(x)$. En otras palabras,

$$B_{d_Y}(f(\bar{x}), c\varepsilon) \subseteq f(B_{d_X}(\bar{x}, \varepsilon)). \quad (2.9)$$

Más generalmente, sean X y Y espacios de Banach, sea $\bar{x} \in X$ y sea $f : X \rightarrow Y$ una función estrictamente diferenciable en $\bar{x}$. Supongamos que la derivada estricta $f'(\bar{x})$ es sobreyectiva. Entonces, por el Teorema de Graves, existe un entorno U de $\bar{x}$ donde (2.8) ocurre para todo $x_1, x_2 \in U$. Sea $x \in U$ y $\tau > 0$ tal que $B_{d_X}(x, \tau) \subseteq U$, como f satisface (2.8) sobre $B_{d_X}(x, \tau)$, entonces

$$B_{d_Y}(f(x), c\tau) \subseteq f(B_{d_X}(x, \tau)), \quad (2.10)$$

donde $c = \kappa^{-1} - \delta$ y $\delta\kappa < 1$.

La propiedad (2.10) es más fuerte que la propiedad de ser abierta en un punto, ya que es uniforme con respecto a x en un entorno de $\bar{x}$, con la misma constante c para establecer una relación proporcional entre los tamaños de los entornos de x y $f(x)$. Cuando una función f satisface (2.10) se dice que f es *abierto con tasa lineal alrededor de un punto*.

Sea U el entorno de $\bar{x}$ para el cual el Teorema de Graves ocurre. Para $x \in U$ y $y \in Y$ tal que $\|y - f(x)\| \leq c\tau$, donde c y τ son las constantes para las cuales (2.10) ocurre. Tomemos $\tilde{\tau} = c^{-1}\|y - f(x)\|$, como $\tilde{\tau} < \tau$ entonces (2.10) se cumple para $\tilde{\tau}$.

Entonces $y \in B_{d_Y}(f(x), c\tilde{\tau})$, y por (2.10), existe $\tilde{x} \in B_{d_X}(x, \tilde{\tau})$ tal que $f(\tilde{x}) = y$. Luego,

$$d_X(x, f^{-1}(y)) \leq d_X(x, \tilde{x}) \leq \tilde{\tau} = c^{-1}\|y - f(x)\|.$$

Es decir, para todo $x \in U$ y y cerca de $f(x)$ se tiene

$$d_X(x, f^{-1}(y)) \leq \frac{\kappa}{1 - \kappa\delta} \|y - f(x)\|. \quad (2.11)$$

Esto nos dice que la propiedad de ser abierta con tasa lineal alrededor de $\bar{x}$ implica la propiedad de ser métricamente regular en $\bar{x}$. Claramente la constante κ en el Teorema de Graves puede ser substituida por $\text{reg } L$.

Teorema 2 (Lusternik–Graves). *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación estrictamente diferenciable en el sentido de Fréchet, y sea $\bar{x} \in X$. Entonces se cumple la igualdad*

$$\text{reg } f(\bar{x}) = \text{reg } f'(\bar{x}).$$

Por lo tanto, f es métricamente regular en $\bar{x}$ si y solo si $f'(\bar{x})$ es sobreyectiva.

Demostración. Asuma que f es estrictamente diferenciable y $f'(\bar{x})$ es sobreyectiva, entonces en el Teorema de Graves podemos tomar $L = f'(\bar{x})$, lo que hace $\delta = 0$. Por otro lado, de (2.11),

$$\text{reg } f(\bar{x}) \leq \frac{\kappa}{1 - \kappa\delta} = \kappa.$$

Por lo tanto,

$$\text{reg } f(\bar{x}) \leq \text{reg } f'(\bar{x}).$$

Para la otra desigualdad, ver Theorem 1.12 de [15]. □

2.1. Algunas caracterizaciones de regularidad métrica.

En las líneas anteriores, queda bastante claro, la estrecha relación de la regularidad métrica con las propiedades de sobreyectividad y la de ser abierta con tasa lineal, para el caso de funciones y aplicaciones lineales acotadas. En esta sección estudiaremos estas relaciones en el contexto de multifunciones, además relacionaremos regularidad métrica con propiedades del tipo Lipschitz. En lo sucesivo, consideraremos aplicaciones multivaluadas cerradas, a menos que se indique lo contrario.

Definición 2.1. *Una multifunción $F : X \rightsquigarrow Y$ cerrada es **pseudo-Lipschitz** o tiene la **propiedad de Aubin** en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$ si existen $\ell > 0$, vecindades U de $\bar{x}$ y V de $\bar{y}$ tal que*

$$e(F(x) \cap V, F(x')) \leq \ell \|x - x'\|, \text{ para todo } x, x' \in U. \quad (2.12)$$

*La propiedad de ser pseudo Lipschitz puede ser identificada por el **módulo de Lipschitz** definido por*

$$\text{lip } F(\bar{x}, \bar{y}) = \inf\{\ell : \text{existen } U, V \text{ tal que (2.12) ocurre}\} \quad (2.13)$$

La ausencia la propiedad de Aubin es indicada por $\text{lip } F(\bar{x}, \bar{y}) = +\infty$.

Si F es univaluada (es una función), la propiedad pseudo Lipschitz es equivalente a ser Lipschitz sobre U y $\text{lip } F(\bar{x}, \bar{y})$ es el módulo de Lipschitz usual de F .

Definición 2.2. *Se dice que una multifunción cerrada $F : X \rightsquigarrow Y$ es **linealmente abierta** o **abierta con tasa lineal** o **tiene la propiedad de cubrimiento lineal** en $(\bar{x}, \bar{y})$ cuando $\bar{y} \in F(\bar{x})$ y existen constantes positivas ℓ , δ y h_0 tales que*

$$B_{d_Y}(y, h) \subset F(B_{d_X}(x, \ell h)), \quad \forall h \in [0, h_0] \quad y \quad \forall (x, y) \in \text{Gph } F \cap (B_{d_X}(\bar{x}, \delta) \times B_{d_Y}(\bar{y}, \delta)) \quad (2.14)$$

La siguiente proposición da otra forma de definir la propiedad de cubrimiento lineal.

Proposición 2.3. *$F : X \rightsquigarrow Y$ es linealmente abierta si y solo si existe una constante $\kappa > 0$ junto con vecindades U de $\bar{x}$ y V de $\bar{y}$ tales que*

$$B_{d_Y}(y, h) \cap V \subset F(B_{d_X}(x, \kappa h)), \quad \forall (x, y) \in \text{Gph } F \cap (U \times V), \quad \forall h \geq 0. \quad (2.15)$$

Demostración. Asumamos la Definición 2.2. Tomemos $\kappa = \ell$, $U = B_{d_X}(\bar{x}, \delta)$ y $V = B_{d_Y}(\bar{y}, \delta)$.

Si $h \leq h_0$, para todo $(x, y) \in \text{Gph } F \cap (U \times V)$,

$$B_{d_Y}(y, h) \cap V \subset B_{d_Y}(y, h) \subset F(B_{d_X}(x, \kappa h)),$$

entonces (2.15) ocurre.

Para $h > h_0$, tomemos $\kappa = \ell$, $U = B_{d_X}(\bar{x}, \ell \frac{h_0}{2})$ y $V = B_{d_Y}(\bar{y}, \frac{h_0}{2})$. Entonces

$$V \subset B_{d_Y}(y, h), \quad \forall y \in V,$$

en efecto, para cualquier $y' \in V$

$$d_Y(y', y) \leq d_Y(y', \bar{y}) + d_Y(\bar{y}, y) \leq \frac{h_0}{2} + \frac{h_0}{2} = h_0 < h.$$

Como $\frac{h_0}{2} \leq h_0$, de la Definición 2.2 se sigue que

$$V = B_{d_Y}\left(\bar{y}, \frac{h_0}{2}\right) \subset F\left(B_{d_X}\left(\bar{x}, \kappa \frac{h_0}{2}\right)\right).$$

Además, para todo $x \in U$,

$$B_{d_X}\left(\bar{x}, \kappa \frac{h_0}{2}\right) \subset B_{d_X}(x, \kappa h),$$

pues, para cualquier $x' \in B_{d_X}(\bar{x}, \kappa \frac{h_0}{2})$,

$$d_X(x', x) \leq d_X(x', \bar{x}) + d_X(\bar{x}, x) \leq \kappa \frac{h_0}{2} + \kappa \frac{h_0}{2} = \kappa h_0 < \kappa h.$$

Luego, para cualquier $(x, y) \in \text{Gph } F \cap (U \times V)$,

$$B_{d_Y}(y, h) \cap V = V \subset F\left(B_{d_X}\left(\bar{x}, \kappa \frac{h_0}{2}\right)\right) \subset F(B_{d_X}(x, \kappa h)).$$

Por lo tanto, tomando $\kappa = \ell$, $U = B_{d_X}(\bar{x}, a)$ y $V = B_{d_Y}(\bar{y}, b)$, donde $a = \min\{\delta, \ell \frac{h_0}{2}\}$ y $b = \min\{\delta, \frac{h_0}{2}\}$; obtenemos (2.15).

Recíprocamente, asumamos (2.15). Existen constantes positivas a y b tal que $B_{d_X}(\bar{x}, a) \subset U$ y $B_{d_Y}(\bar{y}, b) \subset V$. Tome $\ell = \kappa$, $0 < \delta \leq \min\{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\}$ y $h_0 \leq \delta$.

Para cualesquiera $(x, y) \in \text{Gph } F \cap (B_{d_X}(\bar{x}, \delta) \times B_{d_Y}(\bar{y}, \delta))$ y $h \in [0, h_0]$, se tiene que $B_{d_Y}(y, h) \subset V$, pues para todo $y' \in B_{d_Y}(y, h)$,

$$d_Y(y', \bar{y}) \leq d_Y(y', y) + d_Y(y, \bar{y}) \leq h + \delta \leq h_0 + \delta \leq 2\delta \leq b.$$

Luego, de (2.15) se sigue que

$$B_{d_Y}(y, h) = B_{d_Y}(y, h) \cap V \subset F(B_{d_X}(x, \ell h)).$$

□

En el siguiente teorema se establece la equivalencia entre regularidad métrica, propiedad de Aubin y la propiedad de ser linealmente abierta.

Teorema 3. *Sea $F : X \rightsquigarrow Y$ cerrada y una constante $\ell > 0$, las siguientes propiedades con respecto a $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$ son equivalentes:*

- (a) *F es métricamente regular en $(\bar{x}, \bar{y})$ con constante ℓ .*
- (b) *F^{-1} tiene la propiedad de Aubin en $(\bar{y}, \bar{x})$ con constante ℓ .*
- (c) *F es linealmente abierta en $(\bar{x}, \bar{y})$ con constante ℓ .*

Para la prueba del teorema necesitamos de los siguientes lemas.

Lema 2.1. *Si F es métricamente regular en $(\bar{x}, \bar{y})$ con constante ℓ , vecindades U y V , entonces, $F^{-1}(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in V$.*

Demostración. De la definición,

$$d_X(x, F^{-1}(y)) \leq \ell d_Y(y, F(x)), \quad \forall x \in U \quad y \quad \forall y \in V.$$

Tome $x = \bar{x}$ y supongamos que $F^{-1}(y) = \emptyset$ para algún $y \in V$, entonces

$$+\infty = d_X(\bar{x}, \emptyset) = d_X(\bar{x}, F^{-1}(y)) \leq \ell d_Y(y, F(\bar{x})).$$

Como $d_Y(y, F(\bar{x})) < +\infty$ se concluye que $\ell = +\infty$ lo cual es una contradicción. $\square$

Lema 2.2. *Si F es pseudo-Lipschitz en $(\bar{x}, \bar{y})$ con constante ℓ , vecindades U y V , entonces, $F^{-1}(y) \cup U \neq \emptyset$ para todo $y \in V$.*

Demostración. Seguir el mismo argumento dado en la prueba del Lema 2.1. $\square$

Demostración del Teorema 3. Asumamos (a) con $\ell > 0$, U y V . Por el Lema 2.1, $F^{-1}(y) \neq \emptyset$ para cualquier $y \in V$, entonces $V \subset \text{dom } F^{-1}$. Ahora, sean $y, y' \in V$, entonces, $F^{-1}(y) \neq \emptyset$ y si $F^{-1}(y') \cap U = \emptyset$, el lado izquierdo de la desigualdad en (2.12) es cero, por lo que (b) se cumple automáticamente. Si no, sea $x \in U$ tal que $y' \in F(x)$. Aplicando (a) con este par x y y tenemos

$$d_X(x, F^{-1}(y)) \leq \ell d_Y(y, F(x)) \leq \ell d_Y(y, y') = \ell \|y - y'\|,$$

tomando el supremo en el lado izquierdo con respecto a $x \in F^{-1}(y') \cap U$,

$$\sup_{x \in F^{-1}(y') \cap U} d_X(x, F^{-1}(y)) \leq \ell \|y - y'\|,$$

es decir

$$e(F^{-1}(y') \cap U, F^{-1}(y)) \leq \ell \|y - y'\|,$$

obtenemos (b).

Supongamos que ocurre (b). Es decir, existe vecindades U de $\bar{x}$ y V de $\bar{y}$ tal que para todo $y, y' \in V$,

$$e(F^{-1}(y') \cap U, F^{-1}(y)) \leq \ell \|y - y'\|,$$

Sea $h > 0$ y $(x, y) \in \text{Gph } F \cap (U \times V)$. Del Lema 2.2, para cualquier $y' \in B_{d_Y}(y, h) \cap V$ existe $x' \in U$ tal que $y' \in F(x')$. Es suficiente mostrar que $x' \in B_{d_X}(x, \ell h)$. En efecto,

$$d_X(x', x) \leq e(F^{-1}(y') \cap U, F^{-1}(y)) \leq \ell \|y - y'\| \leq \ell h.$$

Por lo tanto

$$B_{d_Y}(y, h) \cap V \subset F(B_{d_X}(x, \ell h)), \quad \forall (x, y) \in \text{Gph } F \cap (U \times V), \forall h \geq 0,$$

y así, (c) ocurre.

Asumamos (c). Supongamos que $F^{-1}(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in V$, caso contrario, (c) implica que podemos reducir V con tal propósito. Sean $x \in U$, $y \in V$. Si $F(x) = \emptyset$, entonces,

$d_Y(y, F(x)) = +\infty$; lo cual implica que la desigualdad (2.2) se cumple trivialmente. Si $F(x) \neq \emptyset$, tome $y' \in F(x)$. Si $y = y'$ entonces $d_X(x, F^{-1}(y)) = d_Y(y, F(x)) = 0$, cumpliéndose (2.2). Caso contrario sea $r = d_Y(y, y') > 0$, notemos que (c) implica que

$$B_{d_Y}(y, r) \cap V \subset F(B_{d_X}(x, \ell r)).$$

Entonces existe $x' \in B_{d_X}(x, \ell r)$ tal que $y \in F(x')$. Luego,

$$d_X(x, F^{-1}(y)) \leq d_X(x, x') \leq \ell r = \ell d_Y(y, y').$$

Tomando ínfimo respecto a todo $y' \in F(x)$, tenemos la desigualdad deseada

$$d_X(x, F^{-1}(y)) \leq \ell d_Y(y, F(x)).$$

□

2.2. Regularidad métrica y derivada gráfica.

En esta sección se estudia la generalización del Teorema de Lusternik-Graves en el contexto de multifunciones. Para esto se necesita la noción de derivada de una multifunción. Este concepto es conocido, ver por ejemplo [2] y [11]. La noción de derivada de una multifunción se establece aprovechando la naturaleza geométrica de la derivada de una función, Sea $f : X \rightarrow Y$ una función diferenciable en x con derivada $f'(x) : X \rightarrow Y$. Entonces,

$$(u, v) \in \text{Gph } f'(x) \iff (u, v) \in T_{\text{Gph } f}(x, f(x)).$$

En otras palabras, la derivada está completamente representada geoméricamente por el cono tangente al conjunto $\text{Gph } f$ en el punto $(x, f(x))$. De hecho, la diferenciabilidad es, de cierta forma, equivalente a que $T_{\text{Gph } f}(x, f(x))$ resulte ser el gráfico de una aplicación lineal.

Adoptando esta caracterización de diferenciabilidad se define la derivada de una multifunción.

Definición 2.3. Sea $F : X \rightsquigarrow Y$ una multifunción (no necesariamente cerrada). La derivada gráfica de F en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$ es la multifunción $DF(\bar{x}, \bar{y}) : X \rightsquigarrow Y$ cuyo gráfico es el cono tangente al $\text{Gph } F$ en $(\bar{x}, \bar{y})$. Esto es

$$v \in DF(\bar{x}, \bar{y})u \iff (u, v) \in T_{\text{Gph } F}(\bar{x}, \bar{y}). \quad (2.16)$$

La derivada gráfica convexificada $D^{**}F(x, y)$ de F en (x, y) es definida por

$$v \in D^{**}F(x, y)(u) \iff (u, v) \in \text{clco } T_{\text{Gph } F}(x, y),$$

donde clco denota la envoltura convexa cerrada.

La Figura 2.2 muestra la interpretación geométrica de la derivada gráfica. Notase que la derivada gráfica de F depende de la noción de cono tangente. En el sentido de Boulingand, la derivada gráfica de F es llamada *derivada gráfica contingente* o *derivada contingente*. En este sentido tenemos,

$$\begin{aligned} v \in DF(\bar{x}, \bar{y})u &\iff (u, v) \in T_{\text{Gph } F}(\bar{x}, \bar{y}). \\ &\iff \begin{cases} \text{Existen sucesiones } t_n \downarrow 0, u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v \\ \text{tal que } \bar{y} + t_n v_n \in F(\bar{x} + t_n u_n). \end{cases} \end{aligned}$$

Dado que la diferenciación gráfica está definida mediante gráficos de las aplicaciones, y el gráfico de una función se convierte en el de su inversa al intercambiar las variables, tenemos

$$D(F^{-1})(y, x) = (DF(x, y))^{-1}.$$

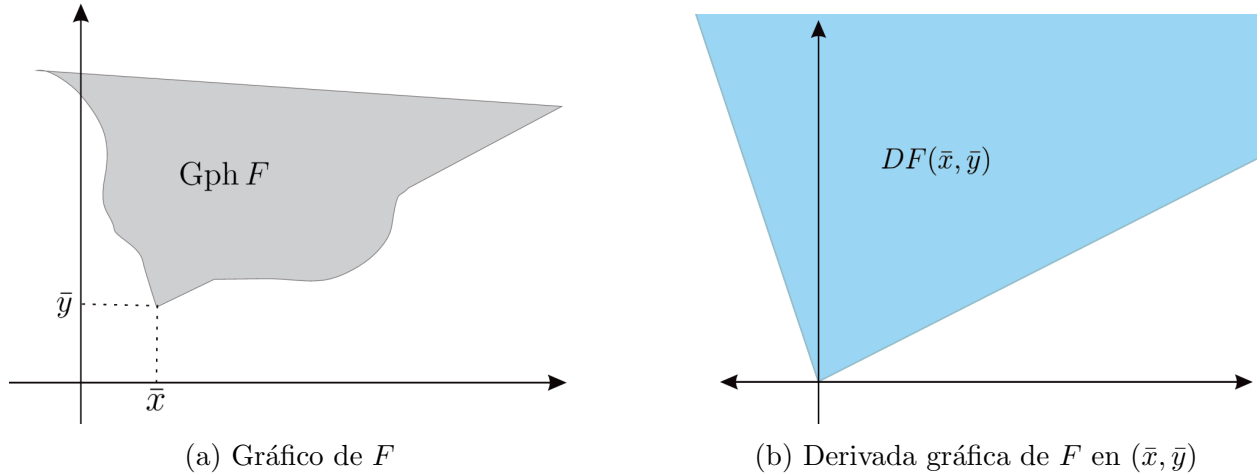


Figura 2.2: Figura de $\text{Gph } F$ y $DF(\bar{x}, \bar{y})$

Proposición 2.4 (Regla de la suma, ver [11]). *Para una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que es diferenciable en x , una aplicación multivaluada $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ y cualquier $y \in F(x)$, se tiene*

$$D(f + F)(x, f(x) + y) = Df(x) + DF(x, y).$$

Demostración. Si $v \in D(f + F)(x, f(x) + y)(u)$, entonces existen sucesiones $\tau_k \rightarrow 0$, $u_k \rightarrow u$ y $v_k \rightarrow v$ tales que

$$f(x) + y - f(x + \tau_k u_k) + \tau_k v_k \in F(x + \tau_k u_k) \quad \text{para todo } k.$$

Usando la definición de derivada para f , obtenemos

$$y + \tau_k(-Df(x)u + v_k) + o(\tau_k) \in F(x + \tau_k u_k).$$

Por lo tanto, aplicando la definición de la derivada gráfica, se concluye que

$$v \in Df(x)u + DF(x, y)(u).$$

Para la otra implicación, si $v - Df(x)u \in DF(x, y)(u)$, entonces existen sucesiones $\tau_k \rightarrow 0$, $u_k \rightarrow u$ y $w_k \rightarrow v - Df(x)u$ tales que

$$y + \tau_k w_k \in F(x + \tau_k u_k).$$

Nuevamente, por la diferenciabilidad de f , se tiene

$$y + f(x) + \tau_k v_k + o(\tau_k) \in (f + F)(x + \tau_k u_k),$$

donde $v_k = w_k + Df(x)u_k$, lo que implica que

$$v \in D(f + F)(x, f(x) + y)(u).$$

□

Ejemplo 2.1 ([11]). Considere para una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, un conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$ y la multifunción $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$

$$F(x) = f(x) - D.$$

Sea $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$. Entonces, se tiene

$$DF(\bar{x} \mid \bar{y})(u) = Df(\bar{x})u - T_D(f(\bar{x}) - \bar{y}).$$

En efecto, aplicando la regla de la suma al caso de una aplicación constante $F \equiv -D$, para la cual la definición de la derivada gráfica da $DF(x \mid z) = T_{-D}(z) = -T_D(-z)$.

Un caso especial, cuando $D = \mathbb{R}_-^s \times \{0\}^{m-s}$ con $f = (f_1, \dots, f_m)$, para $y = (y_1, \dots, y_m)$ la ecuación $y \in F(x)$ toma la forma

$$f_i(x) \begin{cases} \leq y_i & \text{para } i = 1, \dots, s, \\ = y_i & \text{para } i = s + 1, \dots, m. \end{cases}$$

Se deduce entonces que un vector $v = (v_1, \dots, v_m)$ está en $DF(x, y)(u)$ si y solo si

$$\nabla f_i(x)u \begin{cases} \leq v_i & \text{para } i \in [1, s] \text{ con } f_i(x) = y_i, \\ = v_i & \text{para } i = s+1, \dots, m. \end{cases}$$

Se dice que una multifunción $H : X \rightsquigarrow Y$ es positivamente homogénea si $\text{Gph } H$ es un cono, es decir $0 \in H(0)$ y $H(\lambda x) = \lambda H(x)$ para todo $\lambda > 0$. Entonces $DF(x, y)$ es positivamente homogénea, es decir

$$0 \in DF(x, y)(0) \quad \text{y} \quad DF(x, y)(\lambda u) = \lambda DF(x, y)(u) \quad \text{para todo } u \in X \text{ y } \lambda > 0.$$

Para obtener información cuantitativa de una multifunción, se hace necesaria la noción de norma de una multifunción

Definición 2.4. Sea $H : X \rightsquigarrow Y$, se define la norma interior y norma exterior de H respectivamente por

$$\|H\|^- = \sup_{\|x\| \leq 1} \inf_{y \in H(x)} \|y\|, \quad \text{y} \quad \|H\|^+ = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{y \in H(x)} \|y\|.$$

Con la convención $\inf_{y \in \emptyset} \|y\| = +\infty$ y $\sup_{y \in \emptyset} \|y\| = -\infty$.

Note que para un operador lineal acotado H , $\|H\|^- = \|H\|^+ = \|H\|$. Pero en general, las normas interior y exterior no satisfacen la definición de norma como tal, ya que las aplicaciones multivaluadas ni siquiera forman un espacio vectorial.

De la definición se sigue que, si $\text{Dom } H = X$ entonces $\|H\|^+ \geq \|H\|^-$. Si $\text{Dom } H \neq X$ la desigualdad puede fallar, tal como lo muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 2.2. Considere $H : \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1 > 0, \\ \emptyset, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces de la definición, $\inf_{y \in H(-1,0)} \|y\| = \inf_{y \in \emptyset} \|y\| = +\infty$ lo que implica que $\|H\|^- = \infty$. Por otro lado, $\|H\|^+ = 1$.

Observe que de las convenciones sobre el conjunto vacío, se sigue que $\|H\|^- < +\infty$ entonces $\text{Dom } H = X$, es decir

$$\|H^{-1}\|^- < +\infty \Rightarrow H(X) = Y.$$

Cuando H es una aplicación lineal que actúa entre espacios de dimensión finita, la interpretación de las normas interior y exterior es más sencilla. Para la aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y su matriz asociada A .

- Si $m < n$, entonces $\|L^{-1}\|^+ = +\infty$. L es sobreyectiva si y solo si $\|L^{-1}\|^- < +\infty$. Además,

$$\|L^{-1}\|^- = \|A^\top (AA^\top)^{-1}\|.$$

- Si $n < m$, entonces $\|L^{-1}\|^- = +\infty$. L es inyectiva si y solo si $\|L^{-1}\|^+ < +\infty$. Además,

$$\|L^{-1}\|^+ = \|(A^\top A)^{-1} A^\top\|.$$

- Si $m = n$, L es biyectiva y $\|L^{-1}\|^- = \|L^{-1}\|^+ = \|L^{-1}\|$. Además, las normas son finitas ($\|L^{-1}\| < +\infty$) si y solo si A es no singular.

A continuación se establece el criterio de derivada gráfica para regularidad métrica. El teorema enunciado aquí es el principal resultado de [8], omitimos la prueba de este, el teorema para el caso en dimensión finita se encuentra en el Capítulo 4 en [11].

Teorema 4. *Sea $F : X \rightsquigarrow Y$ de gráfico es localmente cerrado en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$. Entonces*

$$\text{reg } F(\bar{x}, \bar{y}) \leq \limsup_{\substack{(x,y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \\ (x,y) \in \text{Gph } F}} \|DF(x, y)^{-1}\|^- , \quad (2.17)$$

y por lo tanto, F es métricamente regular en $(\bar{x}, \bar{y})$ si el lado derecho de (2.17) es finito.

Si X tiene dimensión finita, entonces

$$\text{reg } F(\bar{x}, \bar{y}) = \limsup_{\substack{(x,y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \\ (x,y) \in \text{Gph } F}} \|DF(x, y)^{-1}\|^- , \quad (2.18)$$

y por lo tanto, F es métricamente regular en $(\bar{x}, \bar{y})$ si y solo si el lado derecho de (2.18) es finito. Más aún si X e Y tienen dimensión finita se tiene

$$\text{reg } F(\bar{x}, \bar{y}) = \limsup_{\substack{(x,y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \\ (x,y) \in \text{Gph } F}} \|DF^{**}(x, y)^{-1}\|^- .$$

Sea la ecuación generalizada

$$0 \in G(p, x),$$

Considere $G : P \times X \rightsquigarrow Y$, donde P es un espacio métrico, $x \in X$ es la variable que se busca encontrar y $p \in P$ es un parámetro. Denotemos por $S : P \rightsquigarrow X$ la *aplicación de solución*,

que asocia a un valor p el conjunto de soluciones

$$S(p) := \{x \in X \mid G(p, x) \ni 0\}.$$

La *derivada gráfica parcial* de G respecto a x se denota por $D_x G(p, x \mid y)$ y se define como la derivada gráfica de la aplicación $x \mapsto G(p, x)$, manteniendo p fijo.

El teorema y demostración que siguen son una transcripción directa de [8]. Este resultado establece que si la derivada gráfica parcial de G respecto a x es acotada, entonces G es métricamente regular.

Teorema 5 (Teorema de la multifunción implícita). *Consideremos la multifunción $G : P \times X \rightsquigarrow Y$ y un punto $(\bar{p}, \bar{x}, 0) \in \text{Gph } G$ tal que el gráfico de G es localmente cerrado alrededor de $(\bar{p}, \bar{x}, 0)$ y la función $p \mapsto d(0, G(p, \bar{x}))$ es semicontinua superior en $\bar{p}$. Entonces, para todo escalar positivo c que satisfice*

$$\limsup_{\substack{(p,x,y) \rightarrow (\bar{p},\bar{x},0) \\ (p,x,y) \in \text{Gph } G}} \|D_x G(p, x \mid y)^{-1}\|^- < c \quad (2.19)$$

existen vecindades V de $\bar{p}$ y U de $\bar{x}$ tales que

$$d(x, S(p)) \leq cd(0, G(p, x)) \quad \text{para } x \in U \text{ y } p \in V.$$

Demostración. En el espacio producto $Z := X \times Y$ consideramos la norma

$$|||(x, y)||| := \max\{\|x\|, c\|y\|\}.$$

Lo que sigue convierte a $(Z, |||\cdot|||)$ en un espacio de Banach, y en el espacio $P \times Z$ introducimos la métrica

$$\sigma((p, z), (q, w)) := \max\{\rho(p, q), |||z - w|||\}, \quad \text{para } p, q \in P, z, w \in Z,$$

donde ρ representa la métrica en P .

Una constante c satisface (2.19) si y solo si existe $\eta > 0$ tal que,

$$\begin{aligned} \forall (p, x, y) \in \text{Gph } G, \quad \text{con} \quad \sigma((p, x, y), (\bar{p}, \bar{x}, 0)) \leq 3\eta, \\ \text{y} \quad \forall v \in Y, \quad \exists u \in D_x G(p, x \mid y)^{-1}(v) \text{ con } \|u\| \leq c\|v\|. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Podemos elegir η tan pequeño como fuere necesario para que $\text{Gph } G \cap B_\sigma((\bar{p}, \bar{x}, 0), 3\eta)$ sea cerrado. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$c\varepsilon < 1. \quad (2.21)$$

Probaremos el siguiente lema que es pieza clave para la demostración del teorema.

Lema 2.3. *Para η y ε que satisfacen (2.20) y (2.21), tome cualquier $(p, \omega, \nu) \in \text{Gph } G$ con $(p, \omega, \nu) \in B_\sigma((\bar{p}, \bar{x}, 0), \eta)$ y cualquier s , $0 < s \leq \varepsilon\eta$. Entonces, para todo $y' \in \mathring{B}_{d_Y}(\nu, s)$, existe $\hat{x}$ tal que $(p, \hat{x}, y') \in \text{Gph } G$ y*

$$\|\hat{x} - \omega\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|y' - \nu\|. \quad (2.22)$$

Demostración. Sea $(p, \omega, \nu) \in \text{Gph } G$ y s tal que $0 < s \leq \varepsilon\eta$. Dado que $\text{Gph } G \cap B_\sigma((\bar{p}, \bar{x}, 0), 3\eta)$ es cerrado,

$$E_p := \{(x, y) \mid (p, x, y) \in \text{Gph } G \cap B_\sigma((\bar{p}, \bar{x}, 0), 3\eta)\} \subset X \times Y$$

equipado con la métrica inducida por la norma $||| \cdot |||$, es un espacio métrico completo. Para $y' \in \mathring{B}_{d_Y}(\nu, s)$, la función $V_p : E_p \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V_p(x, y) := \|y' - y\|$$

es continua en su dominio E_p , pues

$$|V_p(x, y) - V_p(x_1, y_1)| = |||y' - y|| - ||y' - y_1||| \leq \|y - y_1\|$$

para todo $(x, y), (x_1, y_1) \in E_p$.

Aplicamos el principio variacional de Ekeland a V_p para (x, y) cerca de (ω, ν) y el ε elegido en (2.21). Entonces existe $(\hat{x}, \hat{y}) \in E_p$ tal que

$$(i) \quad V_p(\hat{x}, \hat{y}) + \varepsilon |||(\omega, \nu) - (\hat{x}, \hat{y})||| \leq V_p(\omega, \nu).$$

$$(ii) \quad \text{Para todo } (x, y) \in E_p \text{ se tiene que, } V_p(\hat{x}, \hat{y}) \leq V_p(x, y) + \varepsilon |||(x, y) - (\hat{x}, \hat{y})|||.$$

Usando la definición de V_p en (i) Y (ii) obtenemos

$$\|y' - \hat{y}\| + \varepsilon |||(\omega, \nu) - (\hat{x}, \hat{y})||| \leq \|y' - \nu\| \quad (2.23)$$

y

$$\|y' - \hat{y}\| \leq \|y' - y\| + \varepsilon |||(x, y) - (\hat{x}, \hat{y})|||, \quad \forall (x, y) \in E_p. \quad (2.24)$$

De (2.23), se deduce

$$\varepsilon |||(\omega, \nu) - (\hat{x}, \hat{y})||| \leq \|y' - \nu\| \Rightarrow |||(\omega, \nu) - (\hat{x}, \hat{y})||| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|y' - \nu\|. \quad (2.25)$$

Como $y' \in \overset{\circ}{B}_{d_Y}(\nu, s)$ tenemos que

$$|||(\omega, \nu) - (\hat{x}, \hat{y})||| \leq \frac{s}{\varepsilon}$$

Dado que $(p, \omega, \nu) \in \text{Gph } G \cap B_\sigma((\bar{p}, \bar{x}, 0), \eta)$,

$$\begin{aligned} \sigma((p, \hat{x}, \hat{y}), (\bar{p}, \bar{x}, 0)) &\leq \sigma((p, \hat{x}, \hat{y}), (p, \omega, \nu)) + \sigma((p, \omega, \nu), (\bar{p}, \bar{x}, 0)) \\ &\leq \eta + |||(\omega, \nu) - (\hat{x}, \hat{y})||| < \eta + \frac{s}{\varepsilon} \leq 2\eta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(p, \hat{x}, \hat{y}) \in \text{Gph } G$ con $\sigma((\bar{p}, \bar{x}, 0), (p, \hat{x}, \hat{y})) \leq 2\eta$, y entonces (2.20) implica que existe $u \in X$ tal que

$$y' - \hat{y} \in D_x G(p, \hat{x} \mid \hat{y})(u) \quad \text{y} \quad \|u\| \leq c\|y' - \hat{y}\|. \quad (2.26)$$

De la definición de la derivada gráfica parcial, existen sucesiones $t_n \downarrow 0$, $u_n \rightarrow u$ y $v_n \rightarrow y' - \hat{y}$ tales que

$$\hat{y} + t_n v_n \in G(p, \hat{x} + t_n u_n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

lo que significa que, para n suficientemente grande, $(\hat{x} + t_n u_n, \hat{y} + t_n v_n) \in E_p$. Ahora, si sustituimos $(\hat{x} + t_n u_n, \hat{y} + t_n v_n)$ en (2.24), obtenemos

$$\begin{aligned} \|y' - \hat{y}\| &\leq \|y' - (\hat{y} + t_n v_n)\| + \varepsilon |||(\hat{x} + t_n u_n, \hat{y} + t_n v_n) - (\hat{x}, \hat{y})||| \\ &\leq \|(y' - \hat{y}) - t_n v_n + t_n(y' - \hat{y}) - t_n(y' - \hat{y})\| + \varepsilon t_n |||(u_n, v_n)||| \\ &\leq (1 - t_n)\|y' - \hat{y}\| + t_n\|v_n - (y' - \hat{y})\| + \varepsilon t_n |||(u_n, v_n)|||. \end{aligned}$$

Restando términos comunes y dividiendo por t_n tenemos que

$$\|y' - \hat{y}\| \leq \varepsilon |||(u_n, v_n)||| + \|v_n - (y' - \hat{y})\|.$$

Luego, cuando $n \rightarrow +\infty$

$$\|y' - \hat{y}\| \leq \varepsilon |||(u, y' - \hat{y})|||.$$

Por lo tanto, de la segunda relación en (2.26), concluimos que

$$\|y' - \hat{y}\| \leq \varepsilon c\|y' - \hat{y}\|.$$

Como $\varepsilon c < 1$, finalmente obtenemos que $y' = \hat{y}$. Entonces, de (2.25)

$$\|\omega - \hat{x}\| \leq |||(\omega, \nu) - (\hat{x}, \hat{y})||| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|y' - \nu\|,$$

se obtiene lo deseado. $\square$

Para continuar con la prueba del Teorema 5, fijemos $s \in (0, \varepsilon\eta/2]$. Dado que la función $p \mapsto d_Y(0, G(p, \bar{x}))$ es semicontinua superior en $\bar{p}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_Y(0, G(p, \bar{x})) \leq \frac{s}{2}, \quad \text{para todo } p \in \mathring{B}_\rho(\bar{p}, \delta). \quad (2.27)$$

Note que δ puede tomarse tan pequeño como se desee, considere $\delta \leq s/\varepsilon$. Para p que satisface (2.27), por definición de distancia y de ínfimo, existe $y \in Y$ tal que $y \in G(p, \bar{x})$ con

$$\|y\| \leq d(0, G(p, \bar{x})) + \frac{s}{3} < s.$$

Note que,

$$\sigma((p, \bar{x}, y), (\bar{p}, \bar{x}, 0)) = \max\{\rho(p, \bar{p}), c\|y\|\} \leq \max\{\delta, cs\} \leq \max\left\{\frac{s}{\varepsilon}, cs\right\} = \frac{s}{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon\eta}{\varepsilon} = \eta,$$

Entonces, aplicando el Lema 2.3 con s , $y' = 0$ y $(p, \omega, \nu) = (p, \bar{x}, y)$ obtenemos $\hat{x}$ tal que $(p, \hat{x}, 0) \in \text{Gph } G$; es decir, $\hat{x} \in S(p)$. Además, de (2.22) con $\omega = \bar{x}$, tenemos que $\hat{x} \in \mathring{B}_{d_X}(\bar{x}, s/\varepsilon)$.

Consideremos $V := \mathring{B}_\rho(\bar{p}, \delta)$, $U := \mathring{B}_{d_X}(\bar{x}, s/\varepsilon)$ y sean $p \in V$ y $x \in U$.

Si $d_Y(0, G(p, x)) \geq 2s$, acabamos de mostrar que existe $\hat{x} \in S(p)$ con $\hat{x} \in \mathring{B}_{d_X}(\bar{x}, s/\varepsilon)$; entonces,

$$\begin{aligned} d_X(x, S(p)) &\leq d_X(\bar{x}, S(p)) + \|x - \bar{x}\| \leq \|\bar{x} - \hat{x}\| + \|x - \bar{x}\| \\ &\leq \frac{s}{\varepsilon} + \frac{s}{\varepsilon} = \frac{2s}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot d_Y(0, G(p, x)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Si por el contrario, $d_Y(0, G(p, x)) < 2s$, por definición de distancia y de ínfimo, para $\gamma > 0$ suficientemente pequeño, podemos encontrar $y_\gamma \in G(p, x)$ tal que

$$\|y_\gamma\| \leq d_Y(0, G(p, x)) + \gamma < 2s.$$

Entonces,

$$c\|y_\gamma\| < 2cs \leq 2c\frac{\varepsilon\eta}{2} < \eta,$$

y, por lo tanto, $(p, x, y_\gamma) \in \text{Gph } G$ es tal que

$$\sigma((p, x, y_\gamma), (\bar{p}, \bar{x}, 0)) \leq \eta.$$

Aplicando el Lema 2.3 para $(p, \omega, \nu) = (p, x, y_\gamma)$, $y' = 0$ y $2s$ en lugar de s , existe $\hat{x}_\gamma \in S(p)$

tal que

$$\|x - \hat{x}_\gamma\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|y_\gamma\|.$$

Entonces, por la elección de y_γ ,

$$d_X(x, S(p)) \leq \|x - \hat{x}_\gamma\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|y_\gamma\| \leq \frac{1}{\varepsilon} (d_Y(0, G(p, x)) + \gamma),$$

por lo que

$$d_X(x, S(p)) \leq \frac{1}{\varepsilon} (d_Y(0, G(p, x)) + \gamma).$$

Haciendo $\gamma \rightarrow 0$, obtenemos

$$d_X(x, S(p)) \leq \frac{1}{\varepsilon} d_Y(0, G(p, x)). \quad (2.29)$$

Dado que $1/\varepsilon$ puede acercarse arbitrariamente a c , entonces (2.28) y (2.29) nos dan la desigualdad deseada para todo $p \in V$ y $x \in U$. □

Note que, el Teorema 4 es una generalización del Teorema de Lyusternik-Graves que fue enunciado en la parte final de la sección anterior para el caso de funciones. Se usa este resultado para probar la equivalencia entre regularidad métrica y la condición de calificación de Mangasarian-Fromovitz, [8].

2.3. Regularidad métrica y variación contingente

En esta sección se estudia una caracterización de regularidad métrica mediante variaciones, las cuales miden el cambio infinitesimal de una aplicación multivaluada. Los conceptos y resultados de esta sección fueron mostrados en [13] y [14], referencias que se recomiendan seguir para tener un panorama más amplio sobre estos temas y sus conexiones.

En esta sección, consideramos espacios de Banach X y Y con $d_X = \|\cdot\|$ y $d_Y = \|\cdot\|$ que son las distancias inducidas por las normas de X y Y respectivamente.

Definición 2.5. Sea $F: X \rightsquigarrow Y$ una multifunción y $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$. La variación contingente de F en $(\bar{x}, \bar{y})$ se define como

$$F^{\sharp 1}(\bar{x}, \bar{y}) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(B_{d_X}(\bar{x}, h)) - \bar{y}}{h},$$

donde $\limsup$ denota el límite superior en el sentido de Painlevé-Kuratowski.

Desde la definición del límite superior en el sentido de Painlevé-Kuratowski, se tiene que $\gamma \in F^{\sharp 1}(\bar{x}, \bar{y})$ si y solo si existen sucesiones $h_n \rightarrow 0^+$, $\gamma_n \rightarrow \gamma$ y $v_n \in B_{d_X}(0, 1)$ tales que $\bar{y} + h_n \gamma_n \in F(\bar{x} + h_n v_n)$.

De la definición se deduce que $F^{\sharp 1}(x, y)$ es subconjunto cerrado de Y pues es límite de secuencias.

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, $x \in X$.

- Si f diferenciable en el sentido de Gâteaux $\implies \overline{f'(x)(B_{d_X}(0, 1))} \subset f^{\sharp 1}(x)$.
- Si f diferenciable en el sentido de Fréchet $\implies f^{\sharp 1}(x) = \overline{f'(x)(B_{d_X}(0, 1))}$.

Ejemplo 2.3. Para $f(x) = x^3$ se tiene que $f^{\sharp 1}(0) = 0$ y $f^{\sharp 1}(x) = [-3x^2, 3x^2]$ cuando $x \neq 0$.

El teorema a continuación establece una caracterización de la regularidad métrica en términos de la variación contingente. Presentamos la versión unificada de los resultados de H. Frankowska, adaptada a nuestra notación.

Para la prueba, necesitamos del *principio variacional de Ekeland*, que es una herramienta clave en análisis y optimización: Sea (E, d_E) un espacio métrico completo, $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferior y acotada inferiormente. Sea $\epsilon > 0$ y un punto $u \in X$ dado tal que $f(u) \leq \inf_E f + \epsilon$. Entonces, para todo $\alpha > 0$, existe un punto $v \in E$ tal que:

- (i) $f(v) \leq f(u)$
- (ii) $d_E(u, v) \leq \alpha$
- (iii) $f(v) - \frac{\epsilon}{\alpha} d_E(v, w) < f(w) \quad \forall w \neq v$.

Teorema 6 ([13], [14]). Sea $F : X \rightsquigarrow Y$ una multifunción cerrada y $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$. Entonces, F es métricamente regular en $(\bar{x}, \bar{y})$ con constante $\rho^{-1} > 0$ si y solo si existe $\delta > 0$, tal que

$$\rho B_{\bar{d}_Y}(0, 1) \subset \bigcap_{(x, y) \in \text{Gph } F \cap B_{d_X}(\bar{x}, \delta) \times B_{d_Y}(\bar{y}, \delta)} F^{\sharp 1}(x, y).$$

Demostración. De la Proposición 3, es suficiente mostrar que existen $h_0 > 0$ y $\bar{\delta} > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in \text{Gph } F \cap B_{d_X}(\bar{x}, \bar{\delta}) \times B_{d_Y}(\bar{y}, \bar{\delta})$,

$$\overset{\circ}{B}_{d_Y}(y, h) \subset F(B_{d_X}(x, \rho^{-1}h)), \quad \forall h \in [0, h_0].$$

Tomemos $\bar{\delta} = \delta/2$ y $0 < h_0 \leq \min\{\delta/4, \rho\delta/2\}$. Sea $(x, y) \in \text{Gph } F \cap B_{d_X}(\bar{x}, \bar{\delta}) \times B_{d_Y}(\bar{y}, \bar{\delta})$, $0 \leq h \leq h_0$ y $y' \in \overset{\circ}{B}_{d_Y}(y, h)$.

Sea $\lambda > 0$ tal que $y' \in \overset{\circ}{B}_{d_Y}(y, \frac{h}{1+\lambda})$, entonces $\|y - y'\|(1 + \lambda) < h$. En consecuencia, podemos elegir $0 < \theta < 1$ tal que $\|y - y'\|(1 + \lambda) = \theta^2 h$.

Consideremos el espacio $E = \text{Gph } F \cap (B(x, \rho^{-1}h) \times Y)$, el cual es cerrado y por lo tanto completo con la métrica $d_E((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})) = \rho\|x - \tilde{x}\| + \lambda\|y - \tilde{y}\|$, y la función continua acotada por debajo $f(x, y) = \|y' - y\|$ sobre E .

Note que (x, y) y $\frac{\theta^2 h}{1+\lambda} > 0$ satisfacen la hipótesis del principio variacional de Ekeland, es decir

$$f(x, y) = \|y' - y\| = \frac{\theta^2 h}{1+\lambda} \leq \inf_E(f) + \frac{\theta^2 h}{1+\lambda},$$

puesto que $\inf_E(f) \geq 0$. Entonces para $\theta h > 0$, existe $(t, z) \in E$ tal que

$$(i) \quad f(t, z) \leq f(x, y)$$

$$(ii) \quad d_E((x, y), (t, z)) \leq \theta h,$$

$$(iii) \quad \text{Para todo } (\tilde{x}, \tilde{y}) \in E, f(t, z) \leq f(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{\theta}{1+\lambda} d_E((\tilde{x}, \tilde{y}), (t, z)).$$

De (i), uno tiene $\|z - y'\| < h \leq \delta/4$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|z - \bar{y}\| &\leq \|z - y'\| + \|y' - y\| + \|y - \bar{y}\| \\ &< \delta/4 + \delta/4 + \delta/2 = \delta, \end{aligned}$$

es decir, $z \in \text{int} B_{d_Y}(\bar{y}, \delta)$.

De (ii), $\rho d_X(t, x) \leq d_E((x, y), (t, z)) \leq \theta h < h$; entonces $d_X(t, x) < \rho^{-1}h$ y

$$d_X(t, \bar{x}) \leq d_X(t, x) + d_X(x, \bar{x}) < \rho^{-1}h + \bar{\delta} \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

es decir, $t \in \text{int} B_{d_X}(\bar{x}, \delta)$.

Si $z = y'$, no hay nada más que probar. Supongamos que $z \neq y'$, entonces tomemos w dado por

$$w = -\rho \frac{z - y'}{\|z - y'\|} \in \rho B_{d_Y}(0, 1) \subset F^{\sharp 1}(t, z).$$

Entonces, existen sucesiones $h_i \rightarrow 0^+$ y $w_i \rightarrow w$ tal que $z + h_i w_i \in F(B_{d_X}(t, h_i))$. Para i

grande, aplicando (iii) en $z + h_i w_i \in F(t + h_i u_i)$, donde $u_i \in B_{d_X}(0, 1)$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \|y' - z\| &\leq \|y' - z - h_i w_i\| + \frac{\theta}{1 + \lambda} (\rho d_X(t + h_i u_i, t) + \lambda \|z + h_i w_i - z\|) \\
 &\leq \|y' - z - h_i w_i\| + \frac{\theta}{1 + \lambda} (\rho h_i + \lambda h_i \|w\| + \lambda h_i \|w - w_i\|) \\
 &\leq \|y' - z - h_i w_i\| + \|h_i(w - w_i)\| + \theta \rho h_i + \frac{\theta \lambda h_i}{1 + \lambda} \|w - w_i\| \\
 &\leq \left\| y' - z - h_i \rho \frac{z - y'}{\|y' - z\|} \right\| + 2h_i \|w - w_i\|_{\bar{d}_Y} + \theta \rho h_i \\
 &= \|y' - z\| \left(1 - \frac{h_i \rho}{\|y' - z\|} \right) + 2h_i \|w - w_i\| + \theta \rho h_i \\
 &= \|y' - z\| - h_i \rho + 2h_i \|w - w_i\| + \theta \rho h_i.
 \end{aligned}$$

Entonces, $\rho h_i \leq h_i \|w - w_i\| + \theta \rho h_i$. Dividiendo por $h_i \rho$ y haciendo $i \rightarrow +\infty$ tenemos que $\theta \geq 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $z = y'$.

Recíprocamente, fijamos $\rho > 0$ tal que $\text{reg } F(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{1}{\rho}$. Entonces, para cada $\rho' \in (0, \rho)$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $(x, y) \in \text{Graph } F \cap (\mathring{B}_{d_X}(\bar{x}, \delta) \times \mathring{B}_{d_Y}(\bar{y}, \delta))$ y $y' \in \mathring{B}_{d_Y}(\bar{y}, \delta)$.

$$d(x, F^{-1}(y')) \leq \frac{1}{\rho'} \|y - y'\|.$$

Tomamos $(x, y) \in \text{Graph } F \cap (\mathring{B}_{d_X}(\bar{x}, \delta) \times \mathring{B}_{d_Y}(\bar{y}, \delta))$ y $0 < h < \frac{\delta}{\rho'}$ suficientemente pequeño de tal manera que $B_{d_Y}(y, h\rho') \subset \mathring{B}_{d_Y}(\bar{y}, \delta)$. Entonces, para cualquier $v \in \mathring{B}_{d_Y}(0, 1)$,

$$d(x, F^{-1}(y + h\rho'v)) \leq \frac{1}{\rho'} \|y - (y + h\rho'v)\| < h.$$

Esto implica que

$$y + h\rho'v \in F(B_{d_X}(x, h)) \implies \rho'v \in \frac{F(B_{d_X}(x, h)) - y}{h}$$

En consecuencia, $\rho' \mathring{B}_{d_Y}(0, 1) \subset F^{\#1}(x, y)$. Dado que $F'_1(x, y)$ es cerrado, esto implica que $\rho' B_{d_Y}(0, 1) \subset F^{\#1}(x, y)$. $\square$

Este criterio es más fuerte que el criterio con derivada gráfica establecida en la sección anterior. La relación entre derivada gráfica y variación contingente y la relación entre estos criterios para regularidad métrica puede seguirse principalmente en [13] y [14].

2.4. Regularidad bi-métrica

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto medible y sea $d \in \mathbb{N}$. Recordemos los espacios de funciones:

- $\mathbb{L}^1(\Omega; \mathbb{R}^d) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \mid f \text{ es medible y } \int_{\Omega} \|f(t)\| dt < +\infty \right\}$, es el espacio de funciones modulo integrables que provisto de la norma

$$\|f\|_{\mathbb{L}^1} := \int_{\Omega} \|f(t)\| dt.$$

es un espacio de Banach.

- $\mathbb{L}^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \mid f \text{ es medible y } \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} \|f(t)\| < +\infty \right\}$, es el espacio de las funciones esencialmente acotadas que provisto de la norma

$$\|f\|_{\mathbb{L}^{\infty}} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} \|f(t)\|.$$

es un espacio de Banach.

- $\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d) := \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \mid f, f' \in \mathbb{L}^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d) \}$, es el espacio de Sobolev de las funciones Lipschitz continuas y cuyas derivadas (en el sentido de distribuciones) son esencialmente acotadas. Este espacio, provisto de la norma

$$\|f\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}} := \|f\|_{\mathbb{L}^{\infty}} + \|f'\|_{\mathbb{L}^{\infty}}.$$

es un espacio de Banach.

Es claro que la inclusión $\mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d) \subset \mathbb{L}^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ es continua, pues

$$\|f\|_{\mathbb{L}^{\infty}} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^{\infty}} + \|f'\|_{\mathbb{L}^{\infty}} = \|f\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}}, \quad \forall f \in \mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

Propiedades de estos espacios se pueden encontrar en literatura de análisis funcional y ecuaciones diferenciales parciales, se sugiere [4].

Sea $\hat{\sigma} : [0, 2] \rightarrow U$ definida por $\hat{\sigma}(t) = -1 + t$, donde $U = [-1, 1]$ y la multifunción

$$F : \mathbb{L}^1([0, 2], [-1, 1]) \rightsquigarrow \mathbb{L}^{\infty}([0, 2], \mathbb{R})$$

tal que

$$F(u(t)) = \hat{\sigma}(t) + N_U(u(t)).$$

$$F^{-1}(0) = \hat{u}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1), \\ -1 & \text{si } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

¿Es F métricamente regular en $(\hat{u}, 0)$? La respuesta es No!. En efecto, fijemos $b > 0$, sea $\epsilon > 0$ y sean σ, σ' tal que

- $\|\hat{\sigma} - \sigma\|_{\mathbb{L}^\infty} = \|\hat{\sigma} - \sigma'\|_{\mathbb{L}^\infty} = b$
- $\|\sigma - \sigma'\|_{\mathbb{L}^\infty} = \epsilon$

tal y como se ilustra en la Figura 2.3

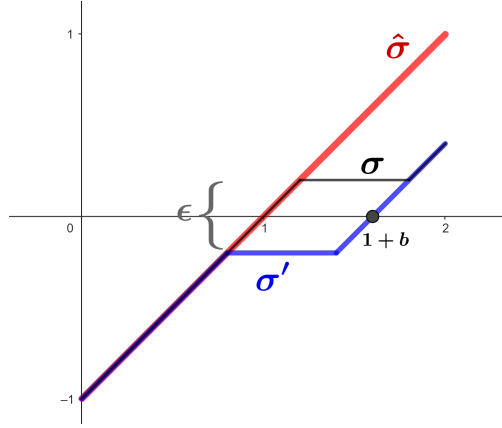


Figura 2.3: Ilustración de $\hat{\sigma}$, σ y σ'

No es difícil calcular

$$u = F^{-1}(\sigma) \quad \text{y} \quad u' = F^{-1}(\sigma')$$

y son tal que $\|u - u'\|_{\mathbb{L}^1} \geq b$. Si F fuese métricamente regular en $(\hat{u}, 0)$ entonces para algún $\kappa \geq 0$

$$b \leq \|u - u'\|_{\mathbb{L}^1} \leq \kappa \|\sigma - \sigma'\|_{\mathbb{L}^\infty} = \kappa \epsilon \quad (\Rightarrow \Leftarrow).$$

Pero se muestra en [21] que si se toman $\sigma, \sigma' \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{W}^{1,\infty}([0, 2], \mathbb{R})$,

$$\|u - u'\|_{\mathbb{L}^1} \leq 4 \|\sigma - \sigma'\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}}.$$

Es decir $F: \mathbb{L}^1 \rightsquigarrow \mathbb{W}^{1,\infty}$ es métricamente regular en $(\hat{u}, 0)$. Más aún,

$$\|u - u'\|_{\mathbb{L}^1} \leq 4 \|\sigma - \sigma'\|_{\mathbb{L}^\infty}.$$

Este fenómeno originó el una nueva versión de *regularidad métrica* que fue llamada *regularidad bi-métrica*, al considerar dos métricas en el espacio imagen. Este concepto fue introducido en [20].

Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) y $(Y, \bar{d}_Y)$ espacios métricos, con $d_Y \leq \bar{d}_Y$, es decir la inclusión entre los espacios topológicos (Y, τ_{d_Y}) y $(Y, \tau_{\bar{d}_Y})$ es continua, donde la notación τ_d simboliza a la topología generada por la métrica d .

Definición 2.6. Una multifunción cerrada $F: X \rightsquigarrow Y$ es bi-métricamente regular en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$ si existen $\varsigma > 0$, $a > 0$ y $b > 0$ tales que

$$e_X(F^{-1}(y) \cap B_{d_X}(\bar{x}, a), F^{-1}(y')) \leq \varsigma d_Y(y, y') \quad \text{para todo } y, y' \in B_{\bar{d}_Y}(\bar{y}, b). \quad (2.30)$$

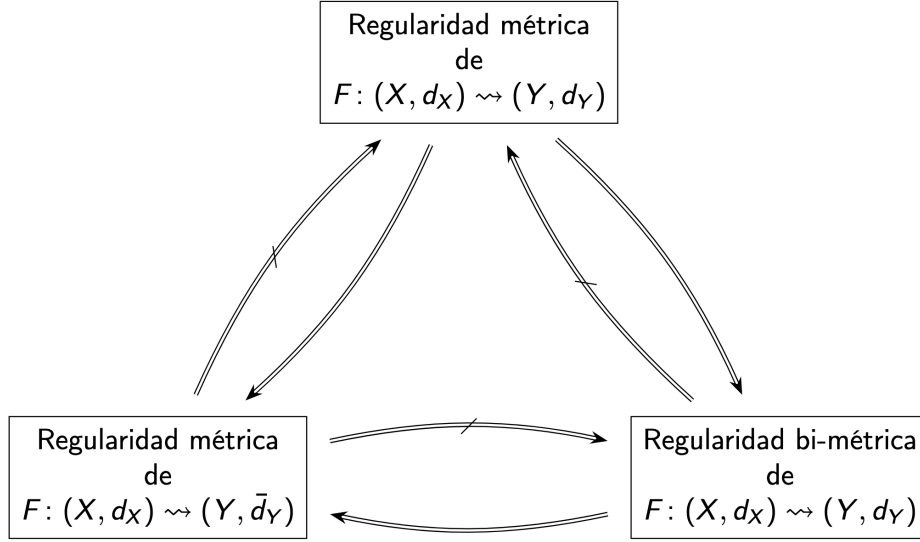


Figura 2.4: Implicaciones de regularidad métrica y bi-métrica

Puesto que $B_{\bar{d}_Y}(\bar{y}, b) \subset B_{d_Y}(\bar{y}, b)$, se observan algunas implicaciones que se muestran en la Figura 2.4.

- Si F es bi-métricamente regular, entonces F es métricamente regular con respecto a (X, d_X) y $(Y, \bar{d}_Y)$.
- La regularidad bi-métrica no implica la regularidad métrica con respecto a (X, d_X) y (Y, d_Y) .

Hasta el momento, de manera oficial, no se conocen caracterizaciones de esta propiedad. El autor de este trabajo y sus colaboradores esperan obtener resultados al respecto pronto.

2.5. Regularidad (bi-)métrica de orden superior

La versión Hölder de regularidad métrica y sus variantes se define de manera natural, tal y como ocurre con las funciones Hölder continuas.

Sea $F: X \rightsquigarrow Y$ una aplicación multivaluada cerrada entre dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) . Sea $\kappa \geq 1$, se define en [13] que F es *uniformemente abierta con tasa κ o abierta*

con tasa κ o tiene la propiedad de cubrimiento de orden κ en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$ si existen $\epsilon > 0$ y $\rho > 0$ tales que, para todo $h \in [0, \epsilon]$

$$B_{d_Y}(y, \rho h^\kappa) \subset F(B_{d_X}(x, h)), \quad \forall (x, y) \in \text{Gph } F \cap B_{d_X}(\bar{x}, \epsilon) \times B_{d_Y}(\bar{y}, \epsilon). \quad (2.31)$$

Cuando $\kappa = 1$, F se llama *abierto con tasa lineal* o *linealmente abierto* que fue definida en las secciones anteriores. En este caso, está bien establecida la equivalencia entre apertura lineal, regularidad métrica y propiedad de Aubin en la Sección 2.1.

Decimos que F es *Hölder métricamente regular de orden κ* en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$, cuando existen vecindades U de $\bar{x}$ y V de $\bar{y}$ y una constante $\tau > 0$ tal que

$$d_X(x, F^{-1}(y)) \leq \tau d_Y(y, F(x))^{1/\kappa}, \quad \text{para todo } (x, y) \in U \times V. \quad (2.32)$$

Análogamente, F^{-1} tiene la *propiedad de Aubin de orden κ* en $(\bar{x}, \bar{y})$, cuando existen vecindades U de $\bar{x}$ y V de $\bar{y}$ y $\rho > 0$ tales que

$$e_X(F^{-1}(y) \cap U, F^{-1}(y')) \leq \rho d_Y(y, y')^{1/\kappa}, \quad \text{para todo } y, y' \in V. \quad (2.33)$$

Para $\kappa \geq 1$, la equivalencia entre la propiedad de cubrimiento de orden κ y Hölder regularidad métrica se muestra en [13]. La siguiente proposición recoge las equivalencias entre (2.31), (2.32) y (2.33) en el caso $\kappa \geq 1$.

Proposición 2.5. *Para una aplicación multivaluada cerrada $F: X \rightsquigarrow Y$ y $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$; y para $\kappa \geq 1$, son equivalentes:*

1. F es uniformemente abierta con tasa κ en $(\bar{x}, \bar{y})$.
2. Existen $r_0 > 0$, $\delta > 0$ y $\gamma > 0$ tales que $B_{d_Y}(y, r^\kappa) \subset F(B_{d_X}(x, \gamma r))$, para todo $(x, y) \in \text{Gph } F \cap B_{d_X}(\bar{x}, \delta) \times B_{d_Y}(\bar{y}, \delta)$ y $r \in [0, r_0]$.
3. Existen constantes $a > 0$, $b > 0$ y $\gamma > 0$ tales que $B_{d_Y}(y, r^\kappa) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, b) \subset F(B_{d_X}(x, \gamma r))$ para todo $(x, y) \in \text{Gph } F \cap B_{d_X}(\bar{x}, a) \times B_{d_Y}(\bar{y}, b)$ y $r \geq 0$.
4. F es métricamente regular de orden κ en el sentido de Hölder en $(\bar{x}, \bar{y})$.
5. F^{-1} tiene la propiedad de Aubin de orden κ en $(\bar{y}, \bar{x})$.

Demostración. Supongamos 1. Tomando $r_0 = \rho^{1/\kappa}\epsilon$, $\gamma = \rho^{-1/\kappa}$ y $0 < \delta \leq \epsilon$ obtenemos 2. Ahora, supongamos 2. Tomamos $a, b \leq \delta$. Dado que $B_{d_Y}(y, r^\kappa) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, b) \subset B_{d_Y}(y, r^\kappa)$, entonces 3 se cumple para $r \leq r_0$. Cuando $r > r_0$, tomando $a \leq \gamma \frac{r_0}{2}$ y $b \leq \min \left\{ \frac{r_0^\kappa}{2^{1/\kappa}}, \frac{r_0^\kappa}{2^\kappa} \right\}$ se tiene $b \leq \frac{r_0^\kappa}{2}$ y

$$B_{d_Y}(\bar{y}, b) \subset B_{d_Y}(y, r^\kappa), \quad \forall y \in B(\bar{y}, b),$$

ya que, para cualquier $y' \in B_{d_Y}(\bar{y}, b)$,

$$d_Y(y', y) \leq d_Y(y', \bar{y}) + d_Y(\bar{y}, y) \leq 2b \leq r_0^\kappa < r^\kappa.$$

Por 2,

$$B_{d_Y}(\bar{y}, b) \subset B_{d_Y}\left(\bar{y}, \left(\frac{r_0}{2}\right)^\kappa\right) \subset F\left(B_{d_X}\left(\bar{x}, \gamma \frac{r_0}{2}\right)\right).$$

Además,

$$B_{d_X}\left(\bar{x}, \gamma \frac{r_0}{2}\right) \subset B_{d_X}(x, \gamma r), \quad \forall x \in B(\bar{x}, a),$$

porque, para cualquier $x' \in B_{d_X}(\bar{x}, \gamma \frac{r_0}{2})$

$$d_X(x', x) \leq d_X(x', \bar{x}) + d_X(\bar{x}, x) \leq \gamma \frac{r_0}{2} + a < \gamma \frac{r_0}{2} + \gamma \frac{r_0}{2} \leq \gamma r.$$

Entonces, para cualquier $(x, y) \in \text{Gph } F \cap B_{d_X}(\bar{x}, a) \times B_{d_Y}(\bar{y}, b)$

$$B_{d_Y}(y, r^\kappa) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, b) = B_{d_Y}(\bar{y}, b) \subset F\left(B_{d_X}\left(\bar{x}, \gamma \frac{r_0}{2}\right)\right) \subset F(B_{d_X}(x, \gamma r))$$

Por tanto, tomando $a \leq \min\{\delta, \gamma \frac{r_0}{2}\}$ y $b \leq \min\{\delta, \frac{r_0^\kappa}{2^{1/\kappa}}, \frac{r_0^\kappa}{2^\kappa}\}$, 3 se cumple para todo $r \in [0, \infty]$.

Supongamos 3. Definimos $\rho = \frac{1}{\gamma^\kappa}$ y $\epsilon \leq \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \gamma \left(\frac{b}{2}\right)^{1/\kappa}\right\}$, entonces para todo $(x, y) \in \text{Gph } F \cap B_{d_X}(\bar{x}, \epsilon) \times B_{d_Y}(\bar{y}, \epsilon)$ y $h \in [0, \epsilon]$ tenemos

$$B_{d_Y}(y, \rho h^\kappa) \subset B_{d_Y}(\bar{y}, b),$$

ya que para cualquier $y' \in B_{d_Y}(y, \rho h^\kappa)$,

$$d_Y(y', \bar{y}) \leq d_Y(y', y) + d_Y(y, \bar{y}) \leq \rho h^\kappa + \epsilon \leq \left(\frac{\epsilon}{\gamma}\right)^\kappa + \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

Luego, usando 3

$$B_{d_Y}(y, \rho h^\kappa) = B_{d_Y}(y, \rho h^\kappa) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, b) \subset F(B_{d_X}(x, \gamma \rho^{1/\kappa} h)) = F(B_{d_X}(x, h)).$$

Supongamos que 3 se cumple. Entonces para $(\bar{x}, \bar{y})$ y $r_0 > 0$ tal que $r_0^\kappa \leq b$, tenemos

$$B_{d_Y}(\bar{y}, r_0^\kappa) \subset F(B_{d_X}(\bar{x}, \gamma r_0)).$$

Mostraremos que, para $a' = \min\{a, \gamma r_0\}$,

$$d_X(x, F^{-1}(y)) \leq \gamma d_Y(y, F(x) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, r_0^\kappa))^{1/\kappa}, \quad \text{para todo } (x, y) \in B_{d_X}(\bar{x}, a') \times B_{d_Y}(\bar{y}, r_0^\kappa). \quad (2.34)$$

Sea $(x, y) \in B_{d_X}(\bar{x}, a') \times B_{d_Y}(\bar{y}, r_0^\kappa)$ y $y' \in F(x) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, r_0^\kappa)$; si no existe tal y' entonces el lado derecho en (2.34) es $+\infty$ y la desigualdad es trivial, si $y' = y$ entonces (2.34) se cumple. Sea $r = d_Y(y, y')^{1/\kappa}$ y $\theta > 0$, entonces $y \in B_{d_Y}(y', (1+\theta)r^\kappa) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, r_0^\kappa)$. Entonces, 3 implica que existe $x' \in B_{d_X}(x, \gamma r(1+\theta)^{1/\kappa})$ tal que $y \in F(x')$. Por tanto,

$$d_X(x, F^{-1}(y)) \leq d_X(x, x') \leq \gamma r(1+\theta)^{1/\kappa} = (1+\theta)^{1/\kappa} \gamma d_Y(y, y')^{1/\kappa}.$$

Tomando ínfimo en el lado derecho con respecto a $y' \in F(x) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, r_0^\kappa)$ y haciendo $\theta \rightarrow 0$ se obtiene (2.34).

Consideremos $U = B_{d_X}(\bar{x}, a'/2)$ y $V = B_{d_Y}(\bar{y}, (r_0/2)^\kappa)$ y $\tau = \gamma$, escojamos cualquier $x \in U$ y $y \in V$. Si $F(x) = \emptyset$ entonces 4 se cumple, en caso contrario, sea $y' \in F(x)$. Si $d_Y(y, y') > (r_0/2)^\kappa$, entonces

$$\begin{aligned} d_X(x, F^{-1}(y)) &\leq d_X(x, \bar{x}) + d_X(\bar{x}, F^{-1}(y)) \leq a'/2 + \gamma d_Y(y, F(\bar{x}) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, r_0^\kappa)) \\ &\leq \gamma r_0/2 + \gamma d_Y(y, \bar{y})^{1/\kappa} \leq \gamma r_0/2 + \gamma r_0/2 < \gamma d_Y(y, y')^{1/\kappa}. \end{aligned}$$

Si $d_Y(y, y') \leq (r_0/2)^\kappa$,

$$d_Y(y', \bar{y}) \leq d_Y(y, y') + d_Y(y, \bar{y}) \leq (r_0/2)^\kappa + (r_0/2)^\kappa = \frac{r_0^\kappa}{2^{\kappa-1}} \leq r_0^\kappa;$$

es decir, $y' \in F(x) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, r_0^\kappa)$. Entonces,

$$d_X(x, F^{-1}(y)) \leq \gamma d_Y(y, F(x) \cap B_{d_Y}(\bar{y}, r_0^\kappa))^{1/\kappa} \leq \gamma d_Y(y, y')^{1/\kappa}.$$

Tomando ínfimo del lado derecho sobre $y' \in F(x)$ obtenemos 4.

Supongamos 4 y sean $y, y' \in V$ y $\rho = \gamma$. De 4, $f^{-1}(y') \neq \emptyset$ y si $F^{-1}(y) \cap U = \emptyset$, hemos terminado, porque el lado izquierdo en 5 es 0. Sea $x \in F^{-1}(y) \cap U$, entonces 4 implica que

$$d_X(x, F^{-1}(y')) \leq \gamma d_Y(y', F(x))^{1/\kappa} \leq \rho d_Y(y', y)^{1/\kappa}.$$

Tomando supremo del lado izquierdo sobre $x \in F^{-1}(y) \cap U$, tenemos

$$e_X(F^{-1}(y) \cap U, F^{-1}(y')) \leq \rho d_Y(y, y')^{1/\kappa}.$$

Supongamos 5. Existe $\beta > 0$ tal que $B_{d_X}(\bar{x}, \beta) \subset U$ y $B_{d_Y}(\bar{y}, \beta) \subset V$. Consideremos el

número real positivo $\epsilon = \min \left\{ \frac{\beta}{2}, \rho \left(\frac{\beta}{2} \right)^{1/\kappa} \right\}$, cualquier $(x, y) \in \text{Gph } F \cap B_{d_X}(\bar{x}, \epsilon) \times B_{d_Y}(\bar{y}, \epsilon)$ y $0 \leq h \leq \epsilon$. Sea $y' \in B_{d_Y}(y, \rho^{-\kappa} h^\kappa)$, entonces

$$d_Y(y', \bar{y}) \leq d_Y(y', y) + d_Y(y, \bar{y}) \leq \rho^{-\kappa} h^\kappa + \epsilon \leq \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta;$$

es decir, $y' \in B_{d_Y}(\bar{y}, \beta) \subset V$. Como $y, y' \in V$, 5 implica que

$$d_X(x, F^{-1}(y')) \leq e_X(F^{-1}(y) \cap U, F^{-1}(y')) \leq \rho d_Y(y, y')^{1/\kappa} \leq h.$$

Por tanto, existe $x' \in F^{-1}(y') \cap B_{d_X}(x, h)$, es decir, $y' \in F(B_{d_X}(x, h))$. □

Tal y como en la sección anterior, sean (X, d_X) , (Y, d_Y) y $(Y, \bar{d}_Y)$ espacios métricos, con $d_Y \leq \bar{d}_Y$. La versión Hölder de la regularidad bi-métrica queda establecida en la siguiente definición.

Definición 2.7. *Una aplicación multivaluada cerrada $F: X \rightsquigarrow Y$ es Hölder bi-métricamente regular de orden $\kappa \geq 1$ en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$ si existen números $\varsigma > 0$, $a > 0$ y $b > 0$ tales que,*

$$e_X(F^{-1}(y) \cap B_{d_X}(\bar{x}, a), F^{-1}(y')) \leq \varsigma d_Y(y, y')^{1/\kappa} \quad \forall y, y' \in B_{\bar{d}_Y}(\bar{y}, b).$$

Cuando la aplicación $B_{\bar{d}_Y}(\bar{y}, b) \ni y \mapsto F^{-1}(y) \cap B_{d_X}(\bar{x}, a)$ es una función Hölder continua, se dice que F es *Hölder bi-métricamente regular fuerte de orden $\kappa \geq 1$ en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gph } F$* .

Nótese que:

- Si F es Hölder bi-métricamente regular de orden $\kappa \geq 1$, entonces F es Hölder métricamente regular de orden $\kappa \geq 1$ con respecto a (X, d_X) y $(Y, \bar{d}_Y)$.
- La Hölder regularidad bi-métrica de orden $\kappa \geq 1$ no implica la Hölder regularidad métrica de orden $\kappa \geq 1$ con respecto a (X, d_X) y (Y, d_Y) .

Caracterizaciones de esta propiedad aún no están disponibles para compartir en este trabajo. Ejemplos de esta propiedad son presentados como aplicaciones en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Aplicaciones

3.1. Aplicación de regularidad métrica en optimización

En esta sección se estudia la equivalencia de la condición de calificación de Mangazarian-Fromovitz con regularidad métrica de una multifunción definida a partir del conjunto factible de un problema de programación no lineal.

Corresponde al siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeto a} && g(x) \leq 0 \\ &&& h(x) = 0. \end{aligned} \tag{P}$$

donde f , g y h son funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^\ell$, respectivamente.

Sea $E = \{x \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ el conjunto factible y

$$I(\bar{x}) = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid g_j(\bar{x}) = 0\}$$

el conjunto de índices de las restricciones activas en $\bar{x}$.

Supongamos que f , h y g son funciones continuamente diferenciables. Sea $\bar{x}$ una solución de (P) y $d \in \mathbb{R}^n$ una dirección factible en $\bar{x}$, es decir: existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\bar{x} + td \in E, \quad \forall t \in [0, \epsilon].$$

Entonces

$$f(\bar{x} + td) = f(\bar{x}) + t \nabla f(\bar{x})^\top d + o(t).$$

Dividiendo por t y tomando $t \rightarrow 0^+$ obtenemos

$$\nabla f(\bar{x})^\top d \geq 0. \quad (3.1)$$

El conjunto de direcciones factibles en $\bar{x}$ es un cono y está contenido en el *cono tangente de Bouligand* a E en $\bar{x}$, denotado por $\mathcal{T}_E(\bar{x})$ y definido por

$$\mathcal{T}_E(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \rightarrow 0^+, d_k \rightarrow d \text{ tales que } x + t_k d_k \in E, \forall k \in \mathbb{N}\}. \quad (3.2)$$

La condición de optimalidad de primer orden primal establece que si $\bar{x}$ es solución de (P), entonces (3.1) es válida para todo $d \in \mathcal{T}_E(\bar{x})$. Uno de los desafíos por lo tanto es calcular $\mathcal{T}_E(\bar{x})$, este problema puede ser muy difícil, pero es conocido que este cono puede aproximarse mediante el cono de direcciones factibles de primer orden, que se define a continuación.

Consideremos $x \in E$ y $d \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para cualquier $i = 1, 2, \dots, \ell$, por la aproximación de Taylor de primer orden tenemos

$$h_i(x + d) \approx h_i(x) + \nabla h_i(x)^\top d.$$

Para garantizar factibilidad en la dirección d , debe cumplirse $h_i(x + d) = 0$, luego $\nabla h_i(x)^\top d = 0$. Análogamente, para cualquier $j \in I(x)$,

$$g_j(x + d) \approx g_j(x) + \nabla g_j(x)^\top d.$$

Para garantizar factibilidad en la dirección d , debe cumplirse $g_j(x + d) \leq 0$, luego $\nabla g_j(x)^\top d \leq 0$.

Así, el conjunto de direcciones factibles de primer orden en x es

$$\mathcal{L}(x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_i(x)^\top d = 0, i = 1, \dots, \ell, \quad \nabla g_j(x)^\top d \leq 0, j \in I(x)\} \quad (\text{CL})$$

el cual es un cono y se denomina *cono linealizado*.

En general, $\mathcal{T}_E(x) \subset \mathcal{L}(x)$, pero bajo condiciones especiales, llamadas *condiciones de calificación*, se tiene $\mathcal{T}_E(x) = \mathcal{L}(x)$.

Un de las condiciones de calificación más populares es la llamada *Condición de calificación de Mangasarian-Fromovitz*, esta, queda establecida en la siguiente definición.

Definición 3.1 (Condición de calificación de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ)). *Sea $\bar{x}$ un punto factible del problema (P), es decir, $\bar{x} \in E$. Se dice que en $\bar{x}$ se satisface la condición de calificación de Mangasarian-Fromovitz si:*

1. Los gradientes de las restricciones de igualdad $\{\nabla h_1(\bar{x}), \dots, \nabla h_\ell(\bar{x})\}$ son linealmente

independientes.

2. Existe un vector $w \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} \nabla h_i(\bar{x})^\top w = 0 & \text{para } i = 1, \dots, \ell, \\ \nabla g_j(\bar{x})^\top w < 0 & \text{para } j \in I(\bar{x}). \end{cases}$$

Por comodidad y siguiendo la notación de [8] modificamos la notación en (P).

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f_0(x) \\ & \text{sujeto a} && f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ & && f_i(x) \leq 0, \quad i = r + 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{P}$$

donde $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, m$.

Sea $F: \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$F(x) = f(x) + K$$

donde, $f(x) = f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ y $K = \{0\}^r \times \mathbb{R}_+^{m-r}$. Supongamos que f de clase $\mathcal{C}^1$ en una vecindad de una solución $\bar{x}$. Sea $\bar{J} = \{i \in \{r + 1, \dots, m\}: f_i(\bar{x}) = 0\}$ el conjunto de restricciones activas en $\bar{x}$.

El siguiente resultado es una transcripción directa del Teorema 4.1 de [8]. En este se establece la equivalencia de las condiciones de calificación de Mangazarian-Fromovitz y regularidad métrica.

Teorema 7 ([8]). *F es métricamente regular en $(\bar{x}, 0)$ si y solo si las condiciones de Mangazarian-Fromovitz son satisfechas en $\bar{x}$: Los vectores $\nabla f_i(\bar{x})$, $i = 1, \dots, r$ son linealmente independientes y también existe $w \in \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\begin{cases} \nabla f_i(\bar{x})w = 0 & \text{si } i = 1, 2, \dots, r \\ \nabla f_i(\bar{x})w < 0 & \text{si } i \in \bar{J}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Demostración. Supongamos que (MFCQ) se satisface en $\bar{x}$. Por el Corolario 3F.5 de [11] debemos mostrar que la linealización parcial

$$F(x) = f(\bar{x}) + A(x - \bar{x}) + K \tag{3.4}$$

es métricamente regular en $(\bar{x}, 0)$, donde $A = f'(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})$.

Por la forma específica de K ,

$$v \in DK(x, y)(u) \iff \begin{cases} v_i = 0 & \text{para } i \in I(y), \\ v_i \geq 0 & \text{para } i \in J(y), \end{cases}$$

donde

$$I(y) = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid y_i = 0\}, \quad J(y) = \{i \in \{r+1, \dots, m\} \mid y_i = 0\}.$$

Entonces $\bar{J} = J(f(\bar{x}))$. Dado que $f_i(\bar{x}) < 0$ para $i \in \{r+1, \dots, m\} \setminus \bar{J}$, tenemos que $y_i - f_i(x) > 0$ para todos tales i y para (x, y) cerca de $(\bar{x}, 0)$. Esto significa que para dichos (x, y) , el conjunto $J(y)$ es un subconjunto de $\bar{J}$.

Luego, el criterio de Aubin para la regularidad métrica de F se convierte en la siguiente condición: para cada $I \subset \{1, \dots, r\}$ y para cada $J \subset \bar{J}$ tenemos:

$$\forall v \in \mathbb{R}^{I \cup J}, \exists u \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \quad (v - Au)_i = 0 \text{ para } i \in I, \quad (v - Au)_i \geq 0 \text{ para } i \in J. \quad (3.5)$$

Sea $I \subset \{1, \dots, r\}$ y $J \subset \bar{J}$. Si $I = \emptyset$ o $J = \emptyset$, omitimos la demostración. Supongamos que $I \neq \emptyset$. Entonces la matriz $H = [\nabla f_i(\bar{x})]_{i \in I}$ (matriz con columnas l.i.) es sobreyectiva y, por tanto métricamente regular, por la regularidad métrica de H , existe una constante κ tal que

$$\forall v \in \mathbb{R}^I, \exists u \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \quad v = Hu \quad \text{y} \quad \|u\| \leq \kappa \|v\|.$$

Esto implica, en particular, que tomando v con norma suficientemente pequeña, podemos encontrar un u correspondiente en la ecuación anterior con norma arbitrariamente pequeño. Entonces, dado que $\nabla f_i(\bar{x}) \cdot w < -\alpha$ para todo $i \in J$ y algún $\alpha > 0$, obtenemos que para cualquier $v \in \mathbb{R}^{I \cup J}$ con norma suficientemente pequeña,

$$v_i - \nabla f_i(\bar{x})(u + w) = \begin{cases} 0, & i \in I, \\ \geq 0, & i \in J. \end{cases}$$

Por la homogeneidad positiva, de las dos ecuaciones anteriores obtenemos (3.5).

Recíprocamente, si (3.5) se cumple, entonces tomando $I = \{1, \dots, r\}$ y $J = \emptyset$ concluimos que los $\nabla f_i(\bar{x})$, $i = 1, \dots, r$, deben ser linealmente independientes. Luego, tomando $I = \{1, \dots, r\}$ y $J = \bar{J}$, para

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{para } i = 1, \dots, r, \\ -\varepsilon & \text{para } i \in \bar{J} \end{cases}$$

con algún $\varepsilon > 0$ obtenemos lo deseado. □

3.2. Aplicación de regularidad métrica en control óptimo

Consideremos el problema de control óptimo afín

$$\begin{aligned} \min J(u) &:= \int_0^T [g(t, x(t)) + \langle h(t, x(t)), u(t) \rangle] dt \\ \text{sujeto a } \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U := [-1, 1]^d, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $u: [0, T] \rightarrow U$ representan, respectivamente, la función de estado y la función de control. Las funciones $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $B: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ son funciones dadas y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar euclidiano. La condición inicial es x_0 y $T > 0$ es el horizonte temporal (finito).

La condición de optimalidad de primer orden correspondiente al problema (3.6), conocida como el principio del máximo (mínimo en este caso) de Pontryagin, se expresa como

$$0 = -\dot{x}(t) + f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad x(0) - x_0 = 0, \tag{3.7}$$

$$0 = \dot{p}(t) + H_x(t, x(t), u(t), p(t)), \quad p(T) = 0, \tag{3.8}$$

$$0 \in H_u(t, x(t), u(t), p(t)) + N_U(u(t)), \tag{3.9}$$

donde p es una función absolutamente continua definida en $[0, T]$, H es el Hamiltoniano definido en $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times [-1, 1] \times \mathbb{R}^n$ por

$$H(t, x, u, p) = g(t, x) + \langle h(t, x), u \rangle + \langle p, f(t, x) + B(t, x)u \rangle,$$

y N_U denota el cono normal en U ,

$$N_U(u) = \begin{cases} \{w \in \mathbb{R}^d : \langle w, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in U\}, & \text{si } u \in U, \\ \emptyset, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que, la inclusión (3.9) se reescribe como

$$0 \in h(t, x(t)) + B^\top(t, x(t))p(t) + N_U(u(t)).$$

Si h y B no dependen de x , la inclusión anterior se puede expresar como

$$0 \in F(u(t)) := \hat{\sigma}(t) + N_U(u(t)),$$

donde $\hat{\sigma}(t) := h(t) + B^\top(t)p(t)$.

En esta sección se estudia las propiedades del tipo regularidad métrica en $(\hat{u}, 0) \in \text{Gph } F$ de la multifunción

$$F(u(t)) := \hat{\sigma}(t) + N_U(u(t)) \quad (3.10)$$

definida sobre $\mathbb{L}^1([0, T], U)$ y tomando valores en $\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$ o $\mathbb{W}^{1,\infty}([0, T], \mathbb{R}^d)$. A partir de ahora $\hat{\sigma}$ no necesariamente es de la forma deducida anteriormente y U es un politopo convexo y compacto.

En adelante, $\mathbb{L}^1([0, T], U)$ representa el espacio de las funciones medibles e integrables de $[0, T]$ a U con la norma estándar $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^1}$, $\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$ es el espacio de las funciones esencialmente acotadas de $[0, T]$ a $\mathbb{R}^d$ con la norma estándar $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty}$ y $\mathbb{W}^{1,\infty}([0, T], \mathbb{R}^d)$ es el espacio de las funciones absolutamente continuas x de $[0, T]$ a $\mathbb{R}^d$ tal que la derivada $\dot{x}$ tiene una norma $\mathbb{L}^\infty$ finita, equipado con la norma estándar $\|x\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}} = \|x\|_{\mathbb{L}^\infty} + \|\dot{x}\|_{\mathbb{L}^\infty}$. Por simplicidad, los espacios anteriormente mencionados serán denotados por $\mathbb{L}^1$, $\mathbb{L}^\infty$ y $\mathbb{W}^{1,\infty}$. Además, las bolas cerradas y abiertas centradas en a y radio $r > 0$, serán denotadas por $B_K(a, r)$ y $\mathring{B}_K(a, r)$ respectivamente, donde $K = \mathbb{L}^1, \mathbb{L}^\infty$ o $\mathbb{W}^{1,\infty}$.

Se han establecido condiciones suficientes para (sub)regularidad métrica (fuerte) de F en varios trabajos, por citar algunos, [6], [5], [18], [19], [21]. En todas estas referencias, la siguiente propiedad sobre $\hat{\sigma}$ es asumida.

Siguiendo las notaciones de [18], denotamos por V el conjunto de todos los vértices de U y por E el conjunto de todos los vectores unitarios $e \in \mathbb{R}^d$ que son paralelos a alguna arista de U , denotamos $|E|$ al número de elementos de E , el cual es finito. Para cada vector unitario $e \in \mathbb{R}^d$, definimos

$$\hat{\sigma}_e(t) = \langle \hat{\sigma}(t), e \rangle.$$

Es claro que cuando $U = [-1, 1]^n$ entonces $\hat{\sigma}_e(t) = \hat{\sigma}_j(t)$ son las funciones coordenadas de $\hat{\sigma}$ salvo signo. Para un vértice $v \in V$, denotamos por $E(v)$ el conjunto de todos los vectores unitarios $(v' - v)/\|v' - v\|$, donde v' es cualquier vértice adyacente a v (es decir, el segmento $[v, v']$ es una arista de U). Nótese que $E = \bigcup_{v \in V} E(v)$.

Hipótesis 1. *Supongamos existen $\hat{\alpha} > 0$ y $\hat{\tau} > 0$, tal que, para todo $e \in E$ y para todo $\hat{z} \in [0, T]$ con $\hat{\sigma}_e(\hat{z}) = 0$ se cumple que*

$$|\hat{\sigma}_e(t)| \geq \hat{\alpha}|t - \hat{z}|, \quad \forall t \in [\hat{z} - \hat{\tau}, \hat{z} + \hat{\tau}] \cap [0, T].$$

Más recientemente, una nueva propiedad sobre $\hat{\sigma}$ es considerada en [7]. De esta última referencia, una versión para U politopo convexo y compacto se escribe como

Hipótesis 2. Supongamos que existen $\beta > 0$ y $\delta > 0$, tal que, para todo $\varphi \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(0, \delta)$ y para todo $e \in E$

$$\text{meas}(\{t \mid |\sigma_e(t)| \leq \epsilon\}) \leq \beta\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0,$$

donde $\sigma_e(t) := \varphi_e(t) - \hat{\sigma}_e(t)$.

La siguiente proposición muestra la relación que hay entre estas dos propiedades.

Proposición 3.1. Para una función continua $\sigma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, la Hipótesis 1 implica la Hipótesis 2 para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Demostración. Para una función $\sigma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ continua que satisface la Hipótesis 1 con constantes $\alpha > 0$, $\tau > 0$. Para $e \in E$, definimos

$$I_e(\sigma, \tau) = \bigcup_{\sigma_e(z)=0} (z - \delta, z + \delta) \cap [0, T], \quad I(\sigma, \tau) = \bigcup_{e \in E} I_e(\sigma, \tau) \quad (3.11)$$

y

$$l_{\min}(\sigma, \tau) = \min_{e \in E} \min_{t \in [0, T] \setminus I_e(\sigma, \tau)} |\sigma_e(t)| > 0 \quad (3.12)$$

Asumamos 1. Por Lema 4.4 de [6], existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\varphi \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(0, \delta)$, la función $\sigma_e(t) := \varphi_e(t) - \hat{\sigma}_e(t)$, para todo $e \in E$; satisface la Hipótesis 1 con constantes $\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{4}$ y $\tau < \hat{\tau}$.

Sea $0 < \epsilon \leq \{1, \alpha\tau, l_{\min}(\sigma, \tau)\}$, entonces

$$\{t \mid |\sigma_e(t)| \leq \epsilon\} \subset \bigcup_{\sigma_e(z)=0} [z - \epsilon/\alpha, z + \epsilon/\alpha].$$

Luego,

$$\text{meas}(\{t \mid |\sigma_e(t)| \leq \epsilon\}) \leq \lambda \left(\frac{2\epsilon}{\alpha} \right) \leq \left(\Lambda \frac{2}{\alpha} \right) \epsilon,$$

donde $\lambda \leq \frac{T}{\tau} + 1$ es el número de ceros de σ_e y $\Lambda \leq (\frac{T}{\tau} + 1)|E|$ es la suma del número de ceros de σ_e para todo $e \in E$; donde $|E|$ es el número de aristas de U .

Podemos tomar $\beta = (\frac{T}{\tau} + 1)|E|$, pues no depende de la elección de $\varphi \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(0, \delta)$. Para uniformizar ϵ consideremos la función $G: C([0, T]) \rightarrow (0, +\infty)$ definida por

$$G(\sigma) = \min_{e \in E} \min_{t \in [0, T] \setminus I_e(\sigma, \tau)} |\sigma_e(t)| = l_{\min}(\sigma, \tau).$$

Dado que G es continua y $B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(0, \delta)$ es compacto en $C([0, T])$, existe $\eta > 0$ tal que

$$0 < \eta < \min_{\sigma \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(0, \delta) - \hat{\sigma}} G(\sigma).$$

Entonces, para todo $0 < \epsilon \leq \{1, \alpha\tau, \eta\}$, $e \in E$ y $\varphi \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(0, \delta)$, para $\beta = (\frac{T}{\tau} + 1)|E|$,

$$\text{meas}(\{t \mid |\sigma_e(t)| \leq \epsilon\}) \leq \beta\epsilon,$$

donde $\sigma_e(t) = \varphi_e(t) - \hat{\sigma}_e(t)$. □

La Hipótesis 2 no implica la Hipótesis 1 para todo $\epsilon > 0$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. *En el intervalo $[0, 1]$ consideremos la función*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2n(n+1)\left(x - \frac{1}{n+1}\right), & x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)}\right], \quad n \geq 1, \\ -2n(n+1)\left(x - \frac{1}{n}\right), & x \in \left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n}\right], \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Notemos que, para $\epsilon > 0$ pequeño, el conjunto solución de la inecuación $|f(x)| \leq \epsilon$ alrededor de la raíz $\frac{1}{n+1}$ es (ver Figura 3.1)

$$\left[\frac{1}{n+1} - \frac{\epsilon}{2(n+1)(n+2)}, \frac{1}{n+1} + \frac{\epsilon}{2n(n+1)} \right],$$

cuya longitud es

$$L = \frac{\epsilon}{n(n+2)}.$$

Entonces,

$$\text{meas}(\{x \mid |f(x)| \leq \epsilon\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\epsilon}{n(n+2)} = \frac{3}{4}\epsilon,$$

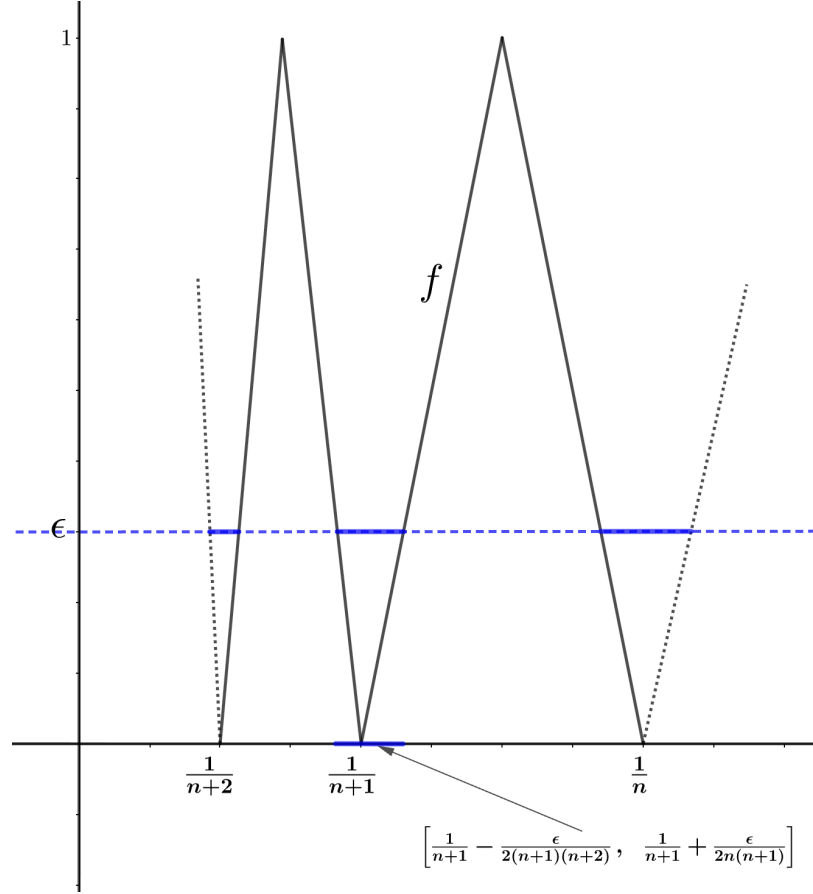
y por lo tanto, f satisface la Hipótesis 2.

Por otro lado, f tiene infinitos ceros y por lo tanto no satisface la Hipótesis 1.

Lema 3.1. *Consideremos $F(u(t)) = \hat{\sigma}(t) + N_U(u(t))$ tal que $\hat{\sigma}$ satisface la Hipótesis 1. Entonces, $\hat{u} \in F^{-1}(0)$ es continua a trozos y $\hat{u}(t)$ es un vértice de U para casi todo t .*

Demostración. Note que $\hat{\sigma}_e$ tiene a lo más $\frac{T}{\tau} + 1$ ceros en $[0, T]$. Entonces, el número de ceros de $\hat{\sigma}_e$ para todo $e \in E$ es a lo más $(\frac{T}{\tau} + 1)|E|$, donde $|E|$ es el número de aristas de U . Es decir, el número de ceros de $\hat{\sigma}_e$ para todo $e \in E$ es finito, lo cual permite ordenarlos de mayor a menor en $[0, T]$.

Sean z_1 y z_2 dos ceros consecutivos. Entonces, $\hat{\sigma}_e$ no se anula en el intervalo abierto (z_1, z_2) para todo $e \in E$. Como $\hat{\sigma}_e$ es continua para todo $e \in E$, estas funciones tienen el mismo signo sobre estos intervalos. Entonces, $\langle \hat{\sigma}(t), v \rangle$ tiene un único minimizador $v \in U$, el


 Figura 3.1: Gráfica de f

cual es un vértice de U , y dicho vértice es el mismo para todo $t \in (z_1, z_2)$. Luego, se tiene que $\hat{u}(t) = v$ en (z_1, z_2) , salvo en un conjunto de medida cero. $\square$

3.2.1. Regularidad bi-métrica

En la siguiente proposición se dan algunas condiciones para que F sea métricamente subregular en $(\hat{u}, 0)$.

Proposición 3.2. *Sea $F: \mathbb{L}^1 \rightsquigarrow \mathbb{L}^\infty$ definida por $F(u(t)) = \hat{\sigma}(t) + N_U(u(t))$. Supongamos que existe $\beta > 0$ tal que para todo $e \in E$,*

$$\text{meas}(\{t \mid |\hat{\sigma}_e(t)| \leq \epsilon\}) \leq \beta\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Entonces, F es métricamente subregular en $(\hat{u}, 0)$.

Lema 3.2. *Si $\hat{\sigma}$ satisface la Hipótesis de la Proposición 3.2. Entonces, $\hat{u} \in F^{-1}(0)$ es tal que $u(t)$ un vértice de U para casi todo t .*

Demostración. Note que $\text{meas}(\{t \mid \hat{\sigma}_e(t) = 0\}) = 0$ para todo $e \in E$. Además, $\{t \mid \hat{\sigma}(t) = 0\} \subset \{t \mid \hat{\sigma}_e(t) = 0\}$. Entonces $\text{meas}(\{t \mid \hat{\sigma}(t) = 0\}) = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \hat{u} \in F^{-1}(0) &\Leftrightarrow \langle -\hat{\sigma}(t), v(t) - \hat{u}(t) \rangle \leq 0, \quad \forall v(t) \in U \\ &\Leftrightarrow \langle \hat{\sigma}(t), \hat{u}(t) \rangle \leq \langle \hat{\sigma}(t), v(t) \rangle, \quad \forall v(t) \in U. \end{aligned}$$

Es decir, para casi todo $t \in [0, T]$

$$\hat{u}(t) \in \text{argmin}_{v \in U} \langle \hat{\sigma}(t), v \rangle. \quad (3.13)$$

Al ser U un politopo convexo y compacto se deduce que, $\hat{u}(t)$ es un vértice de U cuando $\hat{\sigma}(t) \neq 0$. Si llamamos $A = \{t \mid \hat{\sigma}(t) = 0\}$ entonces,

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} U, & \text{si } t \in A, \\ \text{vértice de } U, & \text{si } t \in [0, T] \setminus A. \end{cases} \quad (3.14)$$

□

Demostración de la Proposición 3.2. Sea $(u, \sigma) \in \text{Gph } F$. Por definición de cono normal, para cualquier $v : [0, T] \rightarrow U$ tal que $v(t) \in U$ para casi todo $t \in [0, T]$, tenemos

$$\langle \sigma(t) - \hat{\sigma}(t), v(t) - u(t) \rangle \leq 0 \quad \text{y} \quad \langle -\hat{\sigma}(t), v(t) - \hat{u}(t) \rangle \leq 0.$$

En particular,

$$\langle \sigma(t) - \hat{\sigma}(t), u(t) - \hat{u}(t) \rangle \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle \hat{\sigma}(t), u(t) - \hat{u}(t) \rangle \geq 0.$$

Dado que para cada vértice $v \in V$ y cada $u \in U$, existe una representación

$$u = v + \sum_{e \in E(v)} \lambda_e e, \quad \lambda_e \geq 0.$$

Además, $\hat{u}(t) \in V$ para casi todo t . Entonces para casi todo t , existen representaciones

$$u(t) = \hat{u}(t) + \sum_{e(t) \in E(\hat{u}(t))} \lambda_e(t) e(t), \quad \lambda_e(t) \geq 0. \quad (3.15)$$

Como $\langle \hat{\sigma}(t), u(t) - \hat{u}(t) \rangle \geq 0$ entonces,

$$0 \leq \langle \hat{\sigma}(t), u(t) - \hat{u}(t) \rangle = \sum_{e(t) \in E(\hat{u}(t))} \lambda_e(t) \hat{\sigma}_{e(t)}(t), \quad (3.16)$$

esto dice que, para casi todo t , $\hat{\sigma}_{e(t)}(t) \geq 0$ para todo $e(t) \in E(\hat{u}(t))$.

Luego,

$$\int \langle \sigma(t), u(t) - \hat{u}(t) \rangle dt \geq \int \langle \hat{\sigma}(t), u(t) - \hat{u}(t) \rangle dt = \int \sum_{e(t) \in E(\hat{u}(t))} \lambda_e(t) \hat{\sigma}_{e(t)}(t) dt.$$

Sea $\ell = \text{diam}(U)$ el diámetro de U , es decir, $\ell = \sup_{u,v \in U} \|u - v\|$. Considere $\epsilon = \frac{1}{2\ell\beta|E|} \|u - \hat{u}\|_{\mathbb{L}^1}$ y $A = \{t \mid |\hat{\sigma}_{e(t)}(t)| \leq \epsilon\}$. Note que

$$A \subset \bigcup_{e \in E} \{t \mid |\hat{\sigma}_e(t)| \leq \epsilon\} \implies \text{meas}(A) \leq |E|\beta\epsilon.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \langle \sigma(t), u(t) - \hat{u}(t) \rangle dt &\geq \int \sum_{e(t) \in E(\hat{u}(t))} \lambda_e(t) |\hat{\sigma}_{e(t)}(t)| dt \\ &= \int_A \sum_{e(t) \in E(\hat{u}(t))} \lambda_e(t) |\hat{\sigma}_{e(t)}(t)| dt + \int_{A^c} \sum_{e(t) \in E(\hat{u}(t))} \lambda_e(t) |\hat{\sigma}_{e(t)}(t)| dt \\ &\geq \int_{A^c} \sum_{e(t) \in E(\hat{u}(t))} \lambda_e(t) |\hat{\sigma}_{e(t)}(t)| dt \geq \epsilon \int_{A^c} \sum_{e(t) \in E(\hat{u}(t))} \lambda_e(t) dt \\ &= \epsilon \int_{A^c} \|u(t) - \hat{u}(t)\| dt = \epsilon \left(\|u - \hat{u}\|_{\mathbb{L}^1} - \int_A \|u(t) - \hat{u}(t)\| dt \right) \\ &\geq \epsilon (\|u - \hat{u}\|_{\mathbb{L}^1} - \ell(\text{meas}(A))) \geq \epsilon (\|u - \hat{u}\|_{\mathbb{L}^1} - \ell\beta\epsilon|E|) \\ &= \frac{1}{4\ell\beta|E|} \|u - \hat{u}\|_{\mathbb{L}^1}^2. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce que

$$\frac{1}{4\ell\beta|E|} \|u - \hat{u}\|_{\mathbb{L}^1} \leq \|\sigma\|_{\mathbb{L}^\infty},$$

□

Corolario 3.1. *Asumiendo las hipótesis de la Proposición 3.2, la multifunción F definida en $\mathbb{L}^1$ con valores en $\mathbb{W}^{1,\infty}$ es métricamente subregular en $(\hat{u}, 0)$.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{W}^{1,\infty} \subset \mathbb{L}^\infty$ y $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \|\cdot\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}}$, tenemos

$$\frac{1}{4\ell\beta|E|} \|u - \hat{u}\|_{\mathbb{L}^1} \leq \|\sigma\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \|\sigma\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}}.$$

□

A continuación se muestran resultados asumiendo la Hipótesis 1 y para el caso $U = [-1, 1]^d$. Iniciamos introduciendo algunas notaciones.

Para una función continua $\sigma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ con la Hipótesis 1 con constantes $\alpha, \tau > 0$. Para $\delta > 0$ definimos

$$I_j(\sigma, \delta) = \bigcup_{\sigma_j(z)=0} (z - \delta, z + \delta) \cap [0, T], \quad I(\sigma, \delta) = \bigcup_{1 \leq j \leq d} I_j(\sigma, \delta) \quad (3.17)$$

y

$$l_{\min}(\sigma, \delta) = \min_{1 \leq j \leq d} \min_{t \in [0, T] \setminus I_j(\sigma, \delta)} |\sigma_j(t)| > 0 \quad (3.18)$$

El siguiente Lema es el caso $\kappa = 1$ del Lema 3.1 en [19].

Lema 3.3. *Sea $\sigma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función continua que cumple Hipótesis 1. Entonces, existe $c > 0$ tal que*

$$\|v\|_{\mathbb{L}^\infty} \int_0^T \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t) v_j(t)| dt \geq c \|v\|_{\mathbb{L}^1}^2, \quad \text{para cualquier } v \in \mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d) \quad (3.19)$$

Demostración. Sea $v \in \mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$. Si $v = 0$, la desigualdad en el Lema 3.3 se cumple. Si $v \neq 0$, es suficiente demostrar el Lema en el caso de $\|v\|_{\mathbb{L}^\infty} = 1$.

Elijamos $\bar{\delta} \in (0, \tau)$ tal que

$$\alpha \bar{\delta} < l_{\min}(\sigma, \delta), \quad (3.20)$$

vemos que, para todo $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ y para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$,

$$|\sigma_j(t)| \geq \alpha \delta \quad \text{para todo } t \in [0, T] \setminus I(\sigma, \delta). \quad (3.21)$$

En efecto, sea $t \in [0, T] \setminus I(\sigma, \delta)$, entonces, $t \notin I(\sigma, \delta)$ y $I(\sigma, \delta) \subset I(\sigma, \tau)$. Tenemos dos posibilidades:

1. Si $t \in I_j(\sigma, \tau) \setminus I(\sigma, \delta)$, entonces por la Hipótesis 1 la desigualdad se cumple.
2. Si $t \notin I_j(\sigma, \tau)$, entonces por (3.20) obtenemos $\alpha \delta \leq \alpha \bar{\delta} < l_{\min}(\sigma, \delta) \leq |\sigma_j(t)|$.

Definamos $\varphi(v) := \int_0^T \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t) v_j(t)| dt$ y $\lambda :=$ número de ceros de todas las σ_j , $j = 1, \dots, d$.

A partir de (3.21), tenemos

$$\begin{aligned}
 \varphi(v) &= \int_0^T \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt = \int_{I(\sigma,\delta)} \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt + \int_{[0,T]\setminus I(\sigma,\delta)} \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt \\
 &\geq \int_{[0,T]\setminus I(\sigma,\delta)} \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt \geq \int_{[0,T]\setminus I(\sigma,\delta)} \alpha\delta \sum_{j=1}^d |v_j(t)|dt \\
 &= \alpha\delta \left(\int_0^T \sum_{j=1}^d |v_j(t)|dt - \int_{I(\sigma,\delta)} \sum_{j=1}^d |v_j(t)|dt \right) \\
 &\geq \alpha\delta \left(\|v\|_{\mathbb{L}^1} - \int_{I(\sigma,\delta)} dt \right) \geq \alpha\delta (\|v\|_{\mathbb{L}^1} - 2\delta\lambda)
 \end{aligned}$$

Si $\|v\|_{\mathbb{L}^1} \geq 4\lambda\bar{\delta}$, tomamos $\delta := \bar{\delta}$. Entonces, $\frac{\|v\|_{\mathbb{L}^1}}{2} \geq 2\lambda\bar{\delta}$ y $\|v\|_{\mathbb{L}^1} - 2\lambda\bar{\delta} \geq \|v\|_{\mathbb{L}^1} - \frac{\|v\|_{\mathbb{L}^1}}{2}$. Por tanto,

$$\varphi(v) \geq \frac{\alpha\bar{\delta}}{2} \|v\|_{\mathbb{L}^1}. \quad (3.22)$$

Además, como $\|v\|_{\mathbb{L}^1} \leq T\|v\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq T$, se tiene $1 \geq \frac{\|v\|_{\mathbb{L}^1}}{T}$, por lo tanto, sustituyendo en (3.22),

$$\varphi(v) \geq \frac{\alpha\bar{\delta}}{2T} \|v\|_{\mathbb{L}^1}^2. \quad (3.23)$$

Si $\|v\|_{\mathbb{L}^1} \leq 4\lambda\bar{\delta}$, elegimos $\delta := \frac{\|v\|_{\mathbb{L}^1}}{4\lambda} < \bar{\delta}$. Sustituyendo, tenemos

$$\varphi(v) \geq \frac{\alpha}{2^3\lambda} \|v\|_{\mathbb{L}^1}^2. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, escogiendo $c = \min \left\{ \frac{\alpha\bar{\delta}}{2T}, \frac{\alpha}{2^3\lambda} \right\}$ tenemos

$$\int_0^T \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt \geq c\|v\|_{\mathbb{L}^1}^2. \quad (3.25)$$

□

El siguiente Lema se basa en la Proposición 3.4 [21] en y la Proposición 4.3 en [19]. Este establece la estabilidad de la Hipótesis 1 en una vecindad de $\hat{\sigma}$.

Lema 3.4. *Supongamos que $\hat{\sigma}$ satisface la Hipótesis 1 con $\hat{\alpha}, \hat{\tau} > 0$; $\dot{\hat{\sigma}}_j$ es continua en los ceros de $\hat{\sigma}_j$. Entonces, existen constantes positivas α , τ y b tales que, si $\sigma \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, b)$, entonces, para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ y $z \in [0, T]$ con $\sigma_j(z) = 0$, tenemos*

$$|\sigma_j(t)| \geq \alpha|t - z| \quad \text{para todo } t \in [z - \tau, z + \tau] \cap [0, T] \quad (3.26)$$

Demostración. Para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ y $t \in [0, T]$,

$$||\sigma_j(t) - \hat{\sigma}_j(t)|| \leq |\sigma_j(t) - \hat{\sigma}_j(t)| \quad (3.27)$$

$$|\sigma_j(t)| \geq |\hat{\sigma}_j(t)| - |\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)|. \quad (3.28)$$

Establezcamos $\hat{z}$ tal que $\hat{\sigma}_j(\hat{z}) = 0$. Para $\frac{\hat{\alpha}}{4}$, por la continuidad de $\dot{\hat{\sigma}}_j$, existe $\tau_1 \in (0, \tau]$ tal que, si $\theta \in [0, T]$ y $|\theta - \hat{z}| < \tau_1$, entonces

$$|\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| < \frac{\hat{\alpha}}{4}. \quad (3.29)$$

Luego, para $t \in (\hat{z} - \tau_1, \hat{z} + \tau_1) \cap [0, T]$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}|t - \hat{z}| &\leq |\hat{\sigma}_j(t)| = |\hat{\sigma}_j(t) - \hat{\sigma}_j(\hat{z})| = \left| \int_{\hat{z}}^t \dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) d\theta \right| \\ &= \left| \int_{\hat{z}}^t (\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z}) + \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})) d\theta \right| \\ &\leq \int_{\hat{z}}^t |\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| d\theta + \int_{\hat{z}}^t |\dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| d\theta \\ &\leq \frac{\hat{\alpha}}{4}|t - \hat{z}| + |\dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})||t - \hat{z}|. \end{aligned}$$

Así, $|\dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| \geq \frac{3\hat{\alpha}}{4}$ para cualquier cero $\hat{z}$ de $\hat{\sigma}_j$.

Tomemos $\tau = \frac{\tau_1}{2}$ y $b < \min \left\{ l_{\min} \left(\hat{\sigma}, \frac{\tau}{2} \right), \frac{\hat{\alpha}}{4} \right\}$. Si $\sigma \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, b)$, a partir de la ecuación (3.42)

$$|\sigma_j(t)| \geq |\hat{\sigma}_j(t)| - |\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)| \geq l_{\min} \left(\hat{\sigma}, \frac{\tau}{2} \right) - b > 0.$$

Eso significa que todos los ceros z de σ_j están en $I_j \left(\hat{\sigma}, \frac{\tau}{2} \right)$. Entonces, $z \in (\hat{z} - \frac{\tau}{2}, \hat{z} + \frac{\tau}{2}) \cap [0, T]$ para algún $\hat{z}$ cero de $\hat{\sigma}_j$.

Tomemos $t \in [z - \tau, z + \tau] \cap [0, T]$, entonces $z, t \in (\hat{z} - \tau_1, \hat{z} + \tau_1) \cap [0, T]$ y

$$\begin{aligned} |\sigma_j(t)| &= |\sigma_j(t) - \sigma_j(z)| = \left| \int_z^t \dot{\sigma}_j(\theta) d\theta \right| \\ &= \left| \int_z^t \left[\dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z}) + (\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})) + (\dot{\sigma}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\theta)) \right] d\theta \right| \\ &\geq \frac{3\hat{\alpha}}{4}|t - z| - \frac{\hat{\alpha}}{4}|t - z| - b|t - z| \\ &\geq \left(\frac{3\hat{\alpha}}{4} - \frac{\hat{\alpha}}{4} - \frac{\hat{\alpha}}{4} \right) |t - z| = \frac{\hat{\alpha}}{4}|t - z|. \end{aligned}$$

Así, σ satisface el Lema (3.3) con constantes $\tau = \frac{\tau_1}{2}$ y $\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{4}$.

□

Los lemas anteriores permiten probar lo siguiente.

Proposición 3.3. *Suponga que $U = [-1, 1]^d$ y $\hat{\sigma}$ satisface las hipótesis del Lema 3.4. Entonces, la multifunción $F: \mathbb{L}^1([0, T], U) \rightsquigarrow \mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$ tal que $F(u) = N_U(u)$, es bi-métricamente regular en $(\hat{u}, -\hat{\sigma})$ respecto a las métricas inducidas por $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty}$ y $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}}$.*

Demostración. De hecho, por el Lema 3.4, existe una constante $b > 0$ tal que si $\sigma \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, b)$, entonces σ satisface la Hipótesis 1.

Tomemos $\sigma, \tilde{\sigma} \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, b)$. Entonces,

$$u(t) = F^{-1}(\sigma(t)) = \arg \min_{y \in U} \langle y, \sigma(t) \rangle \quad \text{y} \quad \tilde{u}(t) = F^{-1}(\tilde{\sigma}(t)) = \arg \min_{y \in U} \langle y, \tilde{\sigma}(t) \rangle,$$

tenemos que $\langle u(t), \sigma(t) \rangle \leq \langle \tilde{u}(t), \sigma(t) \rangle$ y $\langle \tilde{u}(t), \tilde{\sigma}(t) \rangle \leq \langle u(t), \tilde{\sigma}(t) \rangle$. Entonces, $\langle \sigma(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle \geq 0$ y $\langle -\tilde{\sigma}(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle \geq 0$, para todo $t \in [0, T]$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle \sigma(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt + \int_0^T \langle -\tilde{\sigma}(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt \\ &\geq \int_0^T \langle \sigma(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Fijemos $j \in \{1, 2, \dots, d\}$. Definimos $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t))$ tal que $y_j(t) = \tilde{u}_j(t)$ y $y_i(t) = u_i(t)$ para todo $i \neq j$. Entonces, $\sigma_j(t)(\tilde{u}_j(t) - u_j(t)) = \langle \sigma(t), y(t) - u(t) \rangle \geq 0$. Por lo tanto, $\sigma_j(t)(\tilde{u}_j(t) - u_j(t)) \geq 0$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Dado que σ satisface la hipótesis del Lema 3.3 y $\tilde{u}(t) - u(t) \in \mathbb{L}^\infty$, existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt &\geq \int_0^T \langle \sigma(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)(\tilde{u}_j(t) - u_j(t))| dt \\ &\geq \frac{c \|\tilde{u} - u\|_{\mathbb{L}^1}^2}{\|\tilde{u} - u\|_{\mathbb{L}^\infty}}. \end{aligned}$$

Dado que $\tilde{u}_j(t) - u_j(t) \in [-2, 2]$ y aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathbb{L}^1} \leq \frac{2}{c} \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{\mathbb{L}^\infty} \quad (3.30)$$

Esto implica que

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathbb{L}^1} \leq \frac{2}{c} \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}}.$$

Entonces, F es métricamente regular en $(\hat{u}, -\hat{\sigma})$. Más aún, la desigualdad (3.30) dice que $F: \mathbb{L}^1([0, T], U) \rightsquigarrow \mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$ es bi-métricamente regular en $(\hat{u}, -\hat{\sigma})$ con respecto a las métricas inducidas por $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty}$ y $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}}$ en $\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$. $\square$

3.2.2. Regularidad bi-métrica de orden superior

En esta sección se muestran las versiones Hölder de algunos de los resultados de la sección anterior. Comenzamos introduciendo la versión Hölder de la Hipótesis 1.

Hipótesis 3. *Supongamos que para $\hat{\sigma}(t) = (\hat{\sigma}_1(t), \hat{\sigma}_2(t), \hat{\sigma}_3(t), \dots, \hat{\sigma}_d(t))$, existe un número real $\kappa \geq 1$ y $\hat{\alpha}, \hat{\tau} > 0$ tal que para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ y $\hat{z} \in [0, T]$ con $\hat{\sigma}_j(\hat{z}) = 0$ tenemos*

$$|\hat{\sigma}_j(t)| \geq \hat{\alpha}|t - \hat{z}|^\kappa, \quad \forall t \in [\hat{z} - \hat{\tau}, \hat{z} + \hat{\tau}] \cap [0, T]. \quad (3.31)$$

Para una función continua $\sigma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ que satisface la Hipótesis 3 con constantes $\alpha, \tau > 0$. Para $\delta > 0$ definimos

$$I_j(\sigma, \delta) = \bigcup_{\sigma_j(z)=0} (z - \delta, z + \delta) \cap [0, T], \quad I(\sigma, \delta) = \bigcup_{1 \leq j \leq d} I_j(\sigma, \delta) \quad (3.32)$$

y

$$l_{\min}(\sigma, \delta) = \min_{1 \leq j \leq d} \min_{t \in [0, T] \setminus I_j(\sigma, \delta)} |\sigma_j(t)| > 0 \quad (3.33)$$

El siguiente Lema es exactamente el Lema 3.1 en [19].

Lema 3.5. *Sea $\sigma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función continua que cumple la Hipótesis 3 con constantes κ, α y τ . Entonces, existe $c > 0$ tal que*

$$\|v\|_{\mathbb{L}^\infty}^\kappa \int_0^T \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t) v_j(t)| dt \geq c \|v\|_{\mathbb{L}^1}^{\kappa+1}, \quad \text{para cualquier } v \in \mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d) \quad (3.34)$$

Demostración. Sea $v \in \mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$. Si $v = 0$, la desigualdad en el Lema (3.5) se cumple. Si $v \neq 0$, es suficiente demostrar el Lema en el caso de $\|v\|_{\mathbb{L}^\infty} = 1$.

Elija $\bar{\delta} \in (0, \tau)$ de manera que

$$\alpha \bar{\delta}^\kappa < l_{\min}(\sigma, \tau), \quad (3.35)$$

Observamos que, para todo $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ y para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$,

$$|\sigma_j(t)| \geq \alpha \delta^\kappa \quad \text{para todo } t \in [0, T] \setminus I(\sigma, \delta). \quad (3.36)$$

En efecto, si $t \in [0, T] \setminus I(\sigma, \delta)$, entonces $t \notin I(\sigma, \delta)$ y $I(\sigma, \delta) \subset I(\sigma, \tau)$. Tenemos dos posibilidades:

1. Si $t \in I_j(\sigma, \tau) \setminus I(\sigma, \delta)$, entonces por la Hipótesis 3 la desigualdad se cumple.
2. Si $t \notin I_j(\sigma, \tau)$, entonces por (3.35) tenemos $\alpha\delta^\kappa \leq \alpha\bar{\delta}^\kappa < l_{\min}(\sigma, \tau) \leq |\sigma_j(t)|$.

Sea $\varphi(v) := \int_0^T \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt$ y $\lambda :=$ número de ceros de todas las σ_j .

A partir de (3.36), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \varphi(v) &= \int_0^T \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt \\
 &= \int_{I(\sigma, \delta)} \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt + \int_{[0, T] \setminus I(\sigma, \delta)} \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt \\
 &\geq \int_{[0, T] \setminus I(\sigma, \delta)} \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt \geq \int_{[0, T] \setminus I(\sigma, \delta)} \alpha\delta^\kappa \sum_{j=1}^d |v_j(t)|dt \\
 &= \alpha\delta^\kappa \left(\int_0^T \sum_{j=1}^d |v_j(t)|dt - \int_{I(\sigma, \delta)} \sum_{j=1}^d |v_j(t)|dt \right) \\
 &\geq \alpha\delta^\kappa \left(\|v\|_{\mathbb{L}^1} - \int_{I(\sigma, \delta)} dt \right) \geq \alpha\delta^\kappa (\|v\|_{\mathbb{L}^1} - 2\delta\lambda)
 \end{aligned}$$

Si $\|v\|_{\mathbb{L}^1} \geq 4\lambda\bar{\delta}$, tomamos $\delta := \bar{\delta}$. Entonces, $\frac{\|v\|_{\mathbb{L}^1}}{2} \geq 2\lambda\bar{\delta}$ y $\|v\|_{\mathbb{L}^1} - 2\lambda\bar{\delta} \geq \|v\|_{\mathbb{L}^1} - \frac{\|v\|_{\mathbb{L}^1}}{2}$. Así,

$$\varphi(v) \geq \frac{\alpha\bar{\delta}^\kappa}{2} \|v\|_{\mathbb{L}^1}. \quad (3.37)$$

Además, dado que $\|v\|_{\mathbb{L}^1} \leq T\|v\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq T$, tenemos $1 \geq \frac{\|v\|_{\mathbb{L}^1}^\kappa}{T^\kappa}$. Sustituyendo en (3.37),

$$\varphi(v) \geq \frac{\alpha\bar{\delta}^\kappa}{2T^\kappa} \|v\|_{\mathbb{L}^1}^{\kappa+1}. \quad (3.38)$$

Si $\|v\|_{\mathbb{L}^1} \leq 4\lambda\bar{\delta}$, elegimos $\delta := \frac{\|v\|_{\mathbb{L}^1}}{4\lambda} < \bar{\delta}$. Sustituyendo, obtenemos $\varphi(v) \geq \frac{\alpha}{2^{2\kappa+1}\lambda^\kappa} \|v\|_{\mathbb{L}^1}^{\kappa+1}$. Así, eligiendo $c = \min \left\{ \frac{\alpha\bar{\delta}^\kappa}{2T^\kappa}, \frac{\alpha}{2^{2\kappa+1}\lambda^\kappa} \right\}$, tenemos

$$\int_0^T \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)v_j(t)|dt \geq c\|v\|_{\mathbb{L}^1}^{\kappa+1}. \quad (3.39)$$

□

El siguiente Lema se basa en la Proposición 3.4 en [21] y la Proposición 4.3 en [19].

Lema 3.6. *Supongamos que $\hat{\sigma}$ satisface la Hipótesis 3 con constantes $\kappa, \hat{\alpha}$ y $\hat{\tau} > 0$; $\dot{\hat{\sigma}}_j$ es continua en los ceros de $\hat{\sigma}_j$ y existe $\gamma > 0$ tal que $|\dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| \geq \gamma$ para todo j y $\hat{z}$ cero de $\hat{\sigma}_j$. Entonces, existen constantes positivas α, τ y b tales que, si $\sigma \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, b)$ entonces, para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ y $z \in [0, T]$ con $\sigma_j(z) = 0$, tenemos*

$$|\sigma_j(t)| \geq \alpha |t - z|^\kappa \quad \text{para todo } t \in [z - \tau, z + \tau] \cap [0, T]. \quad (3.40)$$

Demostración. Para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ y $t \in [0, T]$,

$$||\sigma_j(t)| - |\hat{\sigma}_j(t)|| \leq |\sigma_j(t) - \hat{\sigma}_j(t)| \quad (3.41)$$

$$|\sigma_j(t)| \geq |\hat{\sigma}_j(t)| - |\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)|. \quad (3.42)$$

Definamos $\hat{z}$ tal que $\hat{\sigma}_j(\hat{z}) = 0$ y $\beta < \min\{\hat{\alpha}, \gamma\}$. Para $\frac{\beta}{2}$, por la continuidad de $\dot{\hat{\sigma}}_j$, existe $\tau_1 \in (0, \hat{\tau}] \cap (0, \frac{1}{2})$ tal que, si $\theta \in [0, T]$ y $|\theta - \hat{z}| < \tau_1$, entonces

$$|\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| < \frac{\beta}{2}. \quad (3.43)$$

Tomamos $\tau = \frac{\tau_1}{2}$ y $b < \min\{l_{\min}(\hat{\sigma}, \frac{\tau}{2}), \frac{\beta}{4}\}$. Si $\sigma \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, b)$, a partir de (3.42)

$$|\sigma_j(t)| \geq |\hat{\sigma}_j(t)| - |\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)| \geq l_{\min}\left(\hat{\sigma}, \frac{\tau}{2}\right) - b > 0.$$

Esto significa que todos los ceros z de σ_j están en $I_j(\hat{\sigma}, \frac{\tau}{2})$. Luego, $z \in (\hat{z} - \frac{\tau}{2}, \hat{z} + \frac{\tau}{2}) \cap [0, T]$ para algún $\hat{z}$ cero de $\hat{\sigma}_j$.

Tomando $t \in [z - \tau, z + \tau] \cap [0, T]$, entonces $z, t \in (\hat{z} - \tau_1, \hat{z} + \tau_1) \cap [0, T]$ y

$$\begin{aligned} |\sigma_j(t)| &= |\sigma_j(t) - \sigma_j(z)| = \left| \int_z^t \dot{\sigma}_j(\theta) d\theta \right| \\ &= \left| \int_z^t \left[\dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z}) + (\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})) + (\dot{\sigma}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\theta)) \right] d\theta \right| \\ &\geq \gamma |t - z| - \frac{\beta}{2} |t - z| - b |t - z| \geq \left(\beta - \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{4} \right) |t - z| = \frac{\beta}{4} |t - z|. \end{aligned}$$

Dado que $|t - z| \leq 1$ y $\kappa \geq 1$, entonces $|\sigma_j(t)| \geq \frac{\beta}{4} |t - z|^\kappa$. Así, σ cumple con la Hipótesis 3 con constantes $\tau = \frac{\tau_1}{2}$ y $\alpha = \frac{\beta}{4}$.

□

Una versión más débil (menos hipótesis) del lema anterior se muestra a continuación.

Lema 3.7. *Supongamos que $\hat{\sigma}$ satisface la Hipótesis 3 con constantes $\kappa \geq 1$, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\tau} > 0$; $\dot{\hat{\sigma}}_j$ es continua en los ceros de $\hat{\sigma}_j$. Entonces, existen constantes positivas α , τ y b tales que, si $\sigma \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, b)$, tenemos*

$$|\sigma_j(t)| \geq \alpha |t - z|^\kappa \quad \text{para todo } t \in [z - \tau, z + \tau] \cap [0, T],$$

para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, $z \in [0, T]$ cero de σ_j y $\kappa \geq 1$.

Demostración. Para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ y $t \in [0, T]$,

$$||\sigma_j(t)| - |\hat{\sigma}_j(t)|| \leq |\sigma_j(t) - \hat{\sigma}_j(t)|, \quad (3.44)$$

$$|\sigma_j(t)| \geq |\hat{\sigma}_j(t)| - |\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)|. \quad (3.45)$$

Definimos $\hat{z}$ tal que $\hat{\sigma}_j(\hat{z}) = 0$. Para $\frac{\hat{\alpha}}{4}$, por la continuidad de $\dot{\hat{\sigma}}_j$, existe $\tau_1 \in (0, \hat{\tau}] \cap (0, \frac{1}{2})$ tal que, si $\theta \in [0, T]$ y $|\theta - \hat{z}| < \tau_1$, entonces

$$|\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| < \frac{\hat{\alpha}}{4}. \quad (3.46)$$

Entonces, para $t \in (\hat{z} - \tau_1, \hat{z} + \tau_1) \cap [0, T]$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} |t - \hat{z}| &\leq |\hat{\sigma}_j(t)| = |\hat{\sigma}_j(t) - \hat{\sigma}_j(\hat{z})| = \left| \int_{\hat{z}}^t \dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) d\theta \right| = \left| \int_{\hat{z}}^t (\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z}) + \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})) d\theta \right| \\ &\leq \int_{\hat{z}}^t |\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| d\theta + \int_{\hat{z}}^t |\dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| d\theta \leq \frac{\hat{\alpha}}{4} |t - \hat{z}| + |\dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| |t - \hat{z}|. \end{aligned}$$

Entonces, $|\dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})| \geq \frac{3\hat{\alpha}}{4}$ para cualquier cero $\hat{z}$ de $\hat{\sigma}_j$.

Tomemos $\tau = \frac{\tau_1}{2}$ y $b < \min \left\{ l_{\min} \left(\hat{\sigma}, \frac{\tau}{2} \right), \frac{\hat{\alpha}}{4} \right\}$. Si $\sigma \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, b)$, a partir de (3.45)

$$|\sigma_j(t)| \geq |\hat{\sigma}_j(t)| - |\sigma(t) - \hat{\sigma}(t)| \geq l_{\min} \left(\hat{\sigma}, \frac{\tau}{2} \right) - b > 0.$$

Esto significa que todos los ceros z de σ_j están en $I_j \left(\hat{\sigma}, \frac{\tau}{2} \right)$. Entonces, $z \in (\hat{z} - \frac{\tau}{2}, \hat{z} + \frac{\tau}{2}) \cap [0, T]$ para algún $\hat{z}$ cero de $\hat{\sigma}_j$.

Tomemos $t \in [z - \tau, z + \tau] \cap [0, T]$, entonces $z, t \in (\hat{z} - \tau_1, \hat{z} + \tau_1) \cap [0, T]$ y

$$\begin{aligned} |\sigma_j(t)| &= |\sigma_j(t) - \sigma_j(z)| = \left| \int_z^t \dot{\sigma}_j(\theta) d\theta \right| \\ &= \left| \int_z^t \left[\dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z}) + (\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\hat{z})) + (\dot{\hat{\sigma}}_j(\theta) - \dot{\hat{\sigma}}_j(\theta)) \right] d\theta \right| \\ &\geq \frac{3\hat{\alpha}}{4} |t - z| - \frac{\hat{\alpha}}{4} |t - z| - b |t - z| \geq \left(\frac{3\hat{\alpha}}{4} - \frac{\hat{\alpha}}{4} - \frac{\hat{\alpha}}{4} \right) |t - z| = \frac{\hat{\alpha}}{4} |t - z|. \end{aligned}$$

Dado que $|t - z| \leq 1$, para todo $\kappa \geq 1$ tenemos $|\sigma_j(t)| \geq \frac{\hat{\alpha}}{4}|t - z|^\kappa$. Por lo tanto, σ satisface la Hipótesis 3 para todo $\kappa \geq 1$, con constantes $\tau = \frac{\tau_1}{2}$ y $\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{4}$. $\square$

Proposición 3.4. *La aplicación multivaluada $F: \mathbb{L}^1([0, T], U) \rightsquigarrow \mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$ definida por $F(u) = N_U(u)$, es Hölder bi-métricamente regular de orden $\kappa \geq 1$ en $(\hat{u}, -\hat{\sigma})$ con respecto a las métricas inducidas por $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty}$ y $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}}$. Donde $U = [-1, 1]^d$ y $\hat{\sigma}$ satisface la hipótesis del Lema 3.7.*

Demostración. De hecho, por el Lema 3.7, existe una constante $b > 0$ tal que si $\sigma \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, b)$, entonces σ satisface la Hipótesis 3.

Tomemos $\sigma, \tilde{\sigma} \in B_{\mathbb{W}^{1,\infty}}(\hat{\sigma}, b)$. Entonces,

$$u(t) = F^{-1}(\sigma(t)) = \arg \min_{y \in U} \langle y, \sigma(t) \rangle \quad \text{y} \quad \tilde{u}(t) = F^{-1}(\tilde{\sigma}(t)) = \arg \min_{y \in U} \langle y, \tilde{\sigma}(t) \rangle,$$

tenemos que $\langle u(t), \sigma(t) \rangle \leq \langle \tilde{u}(t), \sigma(t) \rangle$ y $\langle \tilde{u}(t), \tilde{\sigma}(t) \rangle \leq \langle u(t), \tilde{\sigma}(t) \rangle$. Entonces,

$$\langle \sigma(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle -\tilde{\sigma}(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle \geq 0, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle \sigma(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt + \int_0^T \langle -\tilde{\sigma}(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt \\ &\geq \int_0^T \langle \sigma(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Fijamos $j \in \{1, 2, \dots, d\}$. Definimos $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t))$ tal que $y_j(t) = \tilde{u}_j(t)$ y $y_i(t) = u_i(t)$ para todo $i \neq j$. Entonces, $\sigma_j(t)(\tilde{u}_j(t) - u_j(t)) = \langle \sigma(t), y(t) - u(t) \rangle \geq 0$. Por lo tanto, $\sigma_j(t)(\tilde{u}_j(t) - u_j(t)) \geq 0$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Dado que σ satisface la hipótesis del Lema (3.5) y $\tilde{u}(t) - u(t) \in \mathbb{L}^\infty$, existe $c_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt &\geq \int_0^T \langle \sigma(t), \tilde{u}(t) - u(t) \rangle dt \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^d |\sigma_j(t)(\tilde{u}_j(t) - u_j(t))| dt \\ &\geq \frac{c_0 \|\tilde{u} - u\|_{\mathbb{L}^1}^{\kappa+1}}{\|\tilde{u} - u\|_{\mathbb{L}^\infty}^\kappa}. \end{aligned}$$

Dado que $\tilde{u}_j(t) - u_j(t) \in [-2, 2]$ y aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathbb{L}^1}^\kappa \leq \frac{2^\kappa}{c_0} \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{\mathbb{L}^\infty} \quad (3.47)$$

Esto implica que

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathbb{L}^1}^\kappa \leq \frac{2^\kappa}{c_0} \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}} \quad (3.48)$$

Entonces, F es métricamente regular de orden κ en $(\hat{u}, -\hat{\sigma})$.

La desigualdad (3.47) muestra que $F: \mathbb{L}^1([0, T], U) \rightsquigarrow \mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$ es Hölder bi-métricamente regular de orden κ en $(\hat{u}, -\hat{\sigma})$ con respecto a las métricas inducidas por $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty}$ y $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^{1,\infty}}$ en $\mathbb{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$.

□

Capítulo 4

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha estudiado el papel de la regularidad métrica y sus variantes, subregularidad, regularidad bi-métrica y regularidad métrica y sus variantes Hölder, como herramientas fundamentales para el análisis de estabilidad en optimización y control óptimo. Se han estudiado caracterizaciones de estas propiedades mediante conceptos como la derivada gráfica, la variación contingente y condiciones de cubrimiento, las cuales permiten una verificación práctica en problemas concretos. En el ámbito de la optimización no lineal, se ha mostrado la equivalencia entre la condición de calificación de Mangasarian–Fromovitz y la regularidad métrica de una multifunción asociada al conjunto factible, lo que proporciona un puente entre la teoría de condiciones de calificación y el análisis de sensibilidad. En el contexto del control óptimo afín, se han obtenido condiciones suficientes, basadas en propiedades de crecimiento de la función de switching, que garantizan regularidad métrica y sus variantes para inclusiones variacionales provenientes del principio de Pontryagin. Estos criterios permiten verificar la estabilidad de soluciones en sistemas con controles bang-bang y, además, sugieren futuras direcciones de investigación, como extender el estudio de la regularidad métrica a problemas con restricciones de estado o a sistemas descritos por ecuaciones en derivadas parciales.

Bibliografía

- [1] Alt, W., Schneider, C., Seydenschwanz, M. (2016). Regularization and implicit Euler discretization of linear-quadratic optimal control problems with bang-bang solutions. *Applied Mathematics and Computation*, **287-288**, 104–124.
- [2] Aubin, J.-P., Frankowska, H. (2009). *Set-Valued Analysis*. Birkhäuser Boston.
- [3] Borwein, J. M. (1986). Stability and regular points of inequality systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **48**(1), 9–52.
- [4] Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer.
- [5] Corella, A. D., Veliov, V. M. (2022). Hölder regularity in bang-bang type affine optimal control problems. En I. Lirkov & S. Margenov (Eds.), *Large-Scale Scientific Computing* (pp. 306–313). Springer.
- [6] Corella, A. D., Quincampoix, M., Veliov, V. (2021). Strong bi-metric regularity in affine optimal control problems.
- [7] Corella, A. D., Jork, N., Veliov, V. (2022). Stability in affine optimal control problems constrained by semilinear elliptic partial differential equations. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **28**, 79.
- [8] Dontchev, A., Quincampoix, M., Zlateva, N. (2006). Aubin criterion for metric regularity. *Journal of Convex Analysis*, **13**(2), 281–297.
- [9] Dontchev, A. L (2020). The Graves theorem revisited. *Journal of Convex Analysis*, **27**(3).
- [10] Dontchev, A. L. (2021). *Lectures on Variational Analysis*. Springer.

- [11] Dontchev, A. L., Rockafellar, R. T. (2014). *Implicit Functions and Solution Mappings*. Springer.
- [12] Felgenhauer, U. (2003). On stability of bang-bang type controls. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **41**(6), 1843–1867.
- [13] Frankowska, H. (1990). Some inverse mapping theorems. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **7**(3), 183–234.
- [14] Frankowska, H., Quincampoix, M. (2012). Hölder metric regularity of set-valued maps. *Mathematical Programming*, **132**(1-2), 333–354.
- [15] Ioffe, A. D. (2017). *Variational Analysis of Regular Mappings*. Springer.
- [16] Mordukhovich, B. S. (2006). *Variational Analysis and Generalized Differentiation II*. Springer.
- [17] Mordukhovich, B. S. (2019). *Variational Analysis and Applications*. Springer.
- [18] Osmolovskii, N. P., Veliov, V. M. (2020). Metric sub-regularity in optimal control of affine problems with free end state. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **26**, 53.
- [19] Preininger, J., Scarinci, T., Veliov, V. M. (2019). Metric regularity properties in bang-bang type linear-quadratic optimal control problems. *Set-Valued and Variational Analysis*, **27**(2), 381–404.
- [20] Quincampoix, M., Veliov, V. M. (2013). Metric regularity and stability of optimal control problems for linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **51**(5), 4118–4137.
- [21] Quincampoix, M., Scarinci, T., Veliov, V. (2020). On the metric regularity of affine optimal control problems. *Journal of Convex Analysis*, **27**(2), 605–626.
- [22] Rockafellar, R. T., Wets, R. J. (1998). *Variational Analysis*. Springer.
- [23] Veliov, V. M. (1987). On the convexity of integrals of multivalued mappings: Applications in control theory. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **54**(3), 541–563.