



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



**Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab
mediante los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5 para
la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
ordinarias no homogéneas**

TESIS

**Para optar el título profesional de
Licenciado(a) en Matemáticas**

Autores:

Bach. Mat. Requejo Cueva Korina

Bach. Mat. Leon Rueda Orlando Aldair

Asesor:

Dr. Arriaga Delgado Walter

LAMBAYEQUE – PERÚ

2026

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab mediante los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5 para la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales ordinarias no homogéneas**, presentada por los bachilleres en matemáticas, Requejo Cueva Korina y Leon Rueda Orlando Aldair, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de licenciados en matemáticas.



Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl

Presidente Jurado de Tesis



M. Sc. Baca Ferreyros Miguel Angel

Secretario Jurado de Tesis



Dr. Uriarte Bernal Edgar

Vocal Jurado de Tesis

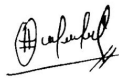
Fecha de Defensa: 22 de mayo de 2026.

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

**Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab
mediante los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5 para
la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
ordinarias no homogéneas**



Bach. Mat. Requejo Cueva Korina
Autora



Bach. Mat. Leon Rueda Orlando Aldair
Autor



Dr. Arriaga Delgado Walter
Asesor

Lambayeque – Perú
Junio-2026



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DECANATO

Ciudad Universitaria – Lambayeque

LICENCIADA - RESOLUCIÓN DEL CONSEJO DIRECTIVO N° 015 -2023-SUNEDU / CD



0083



ACTA DE SUSTENTACIÓN N° 46-2026-D/FACFyM

Siendo las 19:30 p.m. del día 22 de mayo del 2026, se reunieron los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada:

"Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab mediante los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5 para la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales ordinarias no homogéneas"

Designados por Resolución N° 237-2025 D/FACFyM de fecha 11 de marzo de 2025

Con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

<u>Dr. Lic. Mat. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez</u>	Presidente
<u>Mg. Lic. Mat. Miguel Ángel Baca Ferrayro</u>	Secretario
<u>Dr. Lic. Mat. Edgar Uriarte Bernal</u>	Vocal

La tesis fue asesorada por (el) (la) Dr. Walter Arriaga Delgado, nombrado por Resolución N° 237-2025 D/FACFyM de fecha 11 de marzo 2025

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N° 374-2026 D/FACFyM de fecha 18 de mayo de 2026

La Tesis fue presentada y sustentada por (el) (los) Bachiller (es): Requejo Puente, Korina y Leon Rueda, Orlando Aldair y tuvo una duración de 25 minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de Dieciocho (18) en la escala vigesimal, mención (muy bueno).

Por lo que queda(n) apto(s) para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas, de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Siendo las 1:10 p.m. se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

Alcides Raúl Cuti Gutiérrez
Dr. Lic. mat. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez
Presidente

Edgar Uriarte Bernal
Dr. Lic. Mat. Edgar Uriarte Bernal
Vocal

Miguel Ángel Baca Ferrayro
Mg. Lic. Mat. Miguel Ángel Baca Ferrayro
Secretario

Walter Arriaga Delgado
Dr. Walter Arriaga Delgado
Asesor

CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, **Dr. Arriaga Delgado Walter**, usuario revisor de la tesis titulada: **Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab mediante los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5 para la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales ordinarias no homogéneas**, cuyos autores son: **Requejo Cueva Korina**, identificada con D.N.I. N°. **77171378** y **Leon Rueda Orlando Aldair**, identificado con D.N.I. N°. **77165577**, ha arrojado un porcentaje de similitud de **12%**, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 01 de mayo de 2026



Dr. Arriaga Delgado Walter
DNI: 16732082
Asesor

Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab mediante los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5 para la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales ordinarias no homogéneas

INFORME DE ORIGINALIDAD

12%	12%	5%	5%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	hdl.handle.net	Fuente de Internet	4%
2	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo	Trabajo del estudiante	2%
3	repositorio.unprg.edu.pe	Fuente de Internet	1%
4	qdoc.tips	Fuente de Internet	1%
5	www.coursehero.com	Fuente de Internet	<1%
6	www.apuntesmareaverde.org.es	Fuente de Internet	<1%
7	es.slideshare.net	Fuente de Internet	<1%



Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Requejo Cueva Korina, Leon Rueda Orlando Aldair
Título del ejercicio: Quick Submit
Título de la entrega: Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab mediante ...
Nombre del archivo: TESIS_KORINA-ORLANDO_2026.pdf
Tamaño del archivo: 3.21M
Total páginas: 160
Total de palabras: 23,323
Total de caracteres: 117,495
Fecha de entrega: 01-may-2026 04:15p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 2949914796



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab
mediante los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5 para
la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
ordinarias no homogéneas

TESIS

Para optar el título profesional de
Licenciada en Matemáticas

Autoras:

Bach. Mat. Requejo Cueva Korina
Bach. Mat. Leon Rueda Orlando Aldair

Asesor:

Dr. Arriaga Delgado Walter

LAMBAYEQUE - PERÚ

2026

Dr. Arriaga Delgado Walter
Departamento de Matemática
DNI: 16732082
Asesor

Agradecimientos

Agradezco a Dios, por haberme brindado vida, salud, fortaleza y sabiduría para culminar esta etapa profesional. Su presencia me acompañó en cada momento, dándome esperanza, tranquilidad y fuerzas para seguir adelante hasta alcanzar este logro.

Agradezco a mi familia, por su cariño, comprensión y apoyo constante durante todo este proceso. De manera especial, a mi madre, por su esfuerzo, sacrificio y amor incondicional, los cuales fueron ejemplo de lucha, perseverancia y entrega.

También expreso mi gratitud a mis docentes, quienes compartieron sus conocimientos y experiencias, aportando a mi formación académica y profesional. De forma especial, a mi asesor, por su orientación, paciencia y acompañamiento en el desarrollo de esta tesis.

Finalmente, agradezco a mi esposo, por su amor, apoyo permanente y motivación diaria, que me dieron ánimo para continuar, superar las dificultades y cumplir una de mis metas más anheladas.

Korina

Expresó su agradecimiento a Dios, por haberle dado vida, salud y perseverancia para concluir esta etapa de su formación profesional.

Agradeció a su padre, por haber sido ejemplo de esfuerzo, lucha y sacrificio. Reconoció su amor incondicional, sus consejos y el apoyo brindado en los momentos más difíciles, considerando que este logro también le pertenecía. También manifestó su gratitud a su asesor, por la orientación, paciencia y compromiso durante el desarrollo de la investigación. Sus observaciones y enseñanzas ayudaron a mejorar y dar forma al trabajo realizado.

De igual manera, agradeció al amigo Luis Villegas, por guiarnos en la tesis. Finalmente, expresó su reconocimiento a los profesores de la carrera de Matemática de la UNPRG, por compartir sus conocimientos y contribuir a su formación profesional. Asimismo, agradeció a sus amigos por su compañía, alegría y apoyo, los cuales hicieron que este proceso fuera más llevadero.

Orlando

Dedicatoria

Dedicó esta tesis a mi familia, por el amor, apoyo y comprensión que me brindaron durante todo este proceso. De manera especial, dedicó este logro a mis hijas, Zoe y Elodie, quienes fueron mi mayor motivo para seguir superándome. Ellas representaron mi inspiración y la fuerza necesaria para continuar avanzando hasta cumplir mis metas. También este logro les pertenece, porque fueron la razón que impulsó mis sueños, esfuerzos y deseos de salir adelante cada día.

Korina

A mi padre , Santos Orlando , por apoyarme en todo este camino, con su ayuda incondicional en todo momento.

Orlando

Índice

Agradecimientos	I
Dedicatoria	III
Índice	IV
Índice de tablas	VII
Índice de figuras	VIII
Resumen	IX
Abstract	X
Introducción	XI
I. DISEÑO TEÓRICO	1
1.1 Antecedentes de la Investigación	1
1.1.1 A nivel internacional	1
1.1.2 A nivel nacional	2
1.1.2 A nivel local	3
1.2 Base Teórica	5
1.2.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales	5
1.2.2 Sistema de Ecuaciones Diferenciales ordinarias no Homogéneas	6
1.2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes	7
1.2.4 Método de Runge-Kutta de orden 4	8
1.2.5 Método de Runge-Kutta de Orden 5 (RKF5)	9
1.2.6 Interfaz Gráfica de Usuario (GUI)	10
1.3 Bases Conceptuales	11
1.3.1 Interfaz Gráfica de Usuario (GUI)	11

IV

1.3.2 MATLAB:	11
1.3.3 Ejecutable	12
1.3.4 Matlab Compiler	12
1.3.5 Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5	12
1.3.6 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)	12
1.3.7 Solución Numérica	12
1.3.8 Variable independiente	13
1.3.9 Variable dependiente	13
1.3.10 Operacionalización de variables	14
II. DISEÑO METODOLÓGICO	16
2.1 Tipo de Investigación	16
2.2 Método de Investigación	16
2.3 Diseño de Contrastación	16
2.4 Población, Muestra y Muestreo	17
2.5 Técnicas, Instrumentos, Equipos y Materiales de Recolección de Datos	17
2.6 Procesamiento y Análisis de Datos	18
III. RESULTADOS	19
3.1 Interfaz Gráfica de Usuario	19
3.2 Aplicación 1	27
3.2.1 Solución de la aplicación 1 mediante RK5	31
3.2.2 Solución de la aplicación 1 mediante RK4	51
3.3 Aplicación 2	68
3.3.1 Solución de la aplicación 2 mediante RK5	68
3.3.2 Solución de la aplicación 2 mediante RK4	103
3.4 Aplicación 3	116
IV. DISCUSIÓN	120

V. CONCLUSIONES	126
RECOMENDACIONES	128
Referencias Bibliográficas	129
Referencias Bibliográficas	129
Anexos	131

Índice de tablas

1.	Operacionalización de variables.	15
2.	Resultados obtenidos mediante el método de Runge-Kutta de orden 5 (RK5)	51
3.	Solución de aplicación 1 aproximada mediante el método RK4 con $N = 4$.	64
4.	Comparación de resultados entre la solución analítica, RK4 y RK5 para 1 minuto	65
5.	Resultados de la aplicación 2.	102
6.	Solución de la aplicación 2 aproximada mediante el método RK4 con $N = 4$.	113
7.	Comparación de resultados de la aplicación 2.	113

Índice de figuras

1.	<i>Entorno de Matlab R2021a</i>	19
2.	<i>Entorno de la guide.</i>	19
3.	<i>Se colocó el título de investigación.</i>	20
4.	<i>Guardar la guide.</i>	20
5.	<i>Nombre de la guide.</i>	21
6.	<i>Generación de archivos con la extensión .fig y .m..</i>	21
7.	<i>Uso de paneles.</i>	22
8.	<i>Uso del pushbutton.</i>	22
9.	<i>Uso de 6 static text.</i>	23
10.	<i>Uso de 2 tablas para mostrar resultados.</i>	23
11.	<i>Uso de 1 axes.</i>	24
12.	<i>Uso de 4 edit text.</i>	24
13.	<i>Diseño de la guide.</i>	25
14.	<i>Diseño final de la guide.</i>	25
15.	<i>Deploytool.</i>	26
16.	<i>Proceso de convertir a ejecutable.</i>	26
17.	<i>Ejecutable.</i>	26
18.	<i>2 tanques conectados con entrada y salidas.</i>	27
19.	<i>Comportamiento de entradas en el tanque A.</i>	28
20.	<i>Comportamiento de salidas en el tanque A</i>	29
21.	<i>Comportamiento de entradas en el tanque B.</i>	29
22.	<i>Comportamiento de salidas en el tanque B.</i>	29
23.	<i>Resultado de la aplicación 1 para $N=4$.</i>	66
24.	<i>Resultado de la aplicación 2 para $N=4$.</i>	115
25.	<i>Resultado de la aplicación 3 para $N=4$.</i>	119

Resumen

La presente investigación tuvo como objetivo general desarrollar un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en Matlab mediante los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5 para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas. La metodología fue de tipo aplicada, con método descriptivo y enfoque computacional, porque se orientó al diseño, programación y validación de una herramienta numérica en Matlab. Para ello, se diseñó una interfaz gráfica en GUIDE, se programaron los métodos RK4 y RK5, se incorporó el método ode45 como referencia de comparación y luego se convirtió la interfaz en ejecutable mediante MATLAB Compiler. La validación se realizó mediante tres aplicaciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas, desarrollando paso a paso cada método y comparando los resultados obtenidos. Los resultados mostraron que el ejecutable permitió ingresar funciones, condiciones iniciales, intervalo de solución y número de pasos. Asimismo, presentó los resultados en tablas y gráficas, facilitando la interpretación del comportamiento de cada variable del sistema. En las tres aplicaciones se comprobó que los métodos RK4 y RK5 proporcionaron soluciones aproximadas confiables; sin embargo, el método RK5 presentó mejores resultados numéricos, debido a que mostró mayor precisión al compararse con RK4 y con los valores obtenidos mediante ode45. Se concluyó que el ejecutable desarrollado fue funcional, práctico y útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas. Además, permitió reducir errores manuales, mejorar la visualización de resultados y fortalecer el aprendizaje de los métodos numéricos en Matlab.

Palabras clave: Interfaz gráfica de usuario; Runge-Kutta; ecuaciones diferenciales no homogéneas; MATLAB.

Abstract

The general objective of this research was to develop a graphical user interface executable in MATLAB using the fourth- and fifth-order Runge-Kutta methods for solving systems of nonhomogeneous ordinary differential equations. The methodology was applied, descriptive, and computational, because it focused on the design, programming, and validation of a numerical tool in MATLAB. For this purpose, a graphical interface was designed in GUIDE, the RK4 and RK5 methods were programmed, the ode45 method was incorporated as a reference for comparison, and the interface was later converted into an executable using MATLAB Compiler. The validation was carried out through three applications of systems of nonhomogeneous ordinary differential equations, developing each method step by step and comparing the results obtained. The results showed that the executable allowed users to enter functions, initial conditions, solution intervals, and the number of steps. It also displayed the results in tables and graphs, which made it easier to interpret the behavior of each variable in the system. In the three applications, it was verified that the RK4 and RK5 methods provided reliable approximate solutions; however, the RK5 method showed better numerical results because it presented greater accuracy when compared with RK4 and with the values obtained using ode45. It was concluded that the developed executable was functional, practical, and useful for solving systems of nonhomogeneous ordinary differential equations. In addition, it helped reduce manual errors, improve the visualization of results, and strengthen the learning of numerical methods in MATLAB.

Keywords: Graphical User Interface; Runge-Kutta; Nonhomogeneous Differential Equations; MATLAB.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias constituyeron una herramienta matemática importante para describir fenómenos donde una o varias variables cambiaron respecto al tiempo u otra variable independiente. Dentro de este campo, los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas permitieron representar situaciones donde las variables dependientes estuvieron relacionadas entre sí y, además, fueron afectadas por una fuerza, entrada o función externa. Por ello, este tipo de sistemas tuvo aplicaciones en problemas de ingeniería, física, química, biología y otras áreas donde se necesitó estudiar procesos de variación, acumulación, transferencia o movimiento.

A nivel internacional, el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas y de los métodos numéricos adquirió importancia debido a la necesidad de resolver problemas que, en muchos casos, no pudieron solucionarse de manera exacta o cuya solución analítica resultó extensa y compleja. Comet et al. (2024) señalaron que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas debía integrar métodos algebraicos, gráficos, numéricos y recursos tecnológicos para mejorar la comprensión de los estudiantes. En esa misma línea, Hussain y Hasan (2023) desarrollaron un método mejorado de Runge-Kutta de cuarto orden, demostrando que estos métodos podían alcanzar mayor precisión en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Asimismo, Senu et al. (2021) destacaron que los métodos derivados de Runge-Kutta podían mejorar la estabilidad y precisión en problemas con comportamiento periódico. Por otro lado, Pozo et al. (2022) evidenciaron que una interfaz gráfica en MATLAB permitió modelar vibraciones mecánicas mediante ecuaciones diferenciales, reduciendo el tiempo de cálculo y facilitando el análisis de resultados.

A nivel nacional y local, también se encontraron investigaciones relacionadas con la solución numérica de ecuaciones diferenciales y el uso de MATLAB como herramienta computacional. Muñoz (2020) y Carrasco y Heredia (2020) resolvieron sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas mediante el método de Runge-Kutta de orden 4 asistido con MATLAB, obteniendo resultados cercanos a las soluciones analíticas. Del mismo modo, Montalvan y Burga (2023) implementaron una interfaz gráfica en MATLAB

para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias mediante Runge-Kutta de cuarto orden, demostrando que la GUI facilitó el ingreso de datos, el cálculo numérico y la visualización de resultados. Prada y Díaz (2025) desarrollaron una interfaz gráfica que integró RK4 y RK5, además de convertirla en ejecutable mediante MATLAB Compiler. Chapoñan (2024), por su parte, desarrolló un ejecutable en MATLAB para resolver sistemas no homogéneos mediante RK4; sin embargo, la presente investigación amplió dicho aporte al incorporar la comparación entre RK4, RK5 y ode45.

En el contexto local, se observó la necesidad de contar con herramientas computacionales que facilitaran la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas en estudiantes y docentes vinculados al área de matemática aplicada. En muchos casos, el desarrollo manual de los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5 resultó extenso, repetitivo y propenso a errores, debido al cálculo de varios valores intermedios en cada iteración. Esta dificultad hizo necesario diseñar un recurso que permitiera ingresar los datos del sistema, procesarlos automáticamente y mostrar los resultados de forma clara mediante tablas y gráficas.

En esta investigación se desarrolló un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en MATLAB mediante los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5 para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas. La herramienta permitió ingresar la función del sistema, las condiciones iniciales, el intervalo de solución y el número de pasos. Además, se logró insertar el método ode45 como referencia computacional para comparar los resultados obtenidos. El ejecutable fue validado mediante tres aplicaciones, en las cuales se desarrollaron paso a paso los métodos RK4 y RK5, se compararon los resultados numéricos y se evidenció que RK5 presentó mejor precisión frente a RK4 en las aplicaciones evaluadas.

A partir de esta situación, se formuló el siguiente problema de investigación: ¿De qué manera puede desarrollarse un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en MATLAB mediante los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5 para facilitar la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas?

El objetivo general fue desarrollar un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en MATLAB

mediante los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5 para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas.

La hipótesis planteó que el desarrollo de un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en MATLAB permitirá la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas mediante la implementación de los métodos numéricos de Runge-Kutta de orden 4 y 5, garantizando resultados precisos y un proceso computacional eficiente.

Finalmente, la investigación se justificó porque ofreció una herramienta tecnológica útil para resolver sistemas diferenciales no homogéneos de manera interactiva, ordenada y eficiente. Además, permitió integrar teoría matemática, métodos numéricos, programación en MATLAB, visualización gráfica y comparación de resultados en un solo entorno. Con ello, se buscó contribuir al aprendizaje de los métodos numéricos y al uso de recursos computacionales en la solución de problemas matemáticos aplicados.

Se realizó el estudio del diseño teórico, diseño metodológico, resultados, discusión, conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y anexos.

I. DISEÑO TEÓRICO

1.1 Antecedentes de la Investigación

1.1.1 *A nivel internacional*

Hussain y Hasan (2023) desarrollaron un método de Runge-Kutta de cuarto orden llamado TFIRK4, el cual incorporó un ajuste trigonométrico para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con soluciones oscilatorias. El estudio buscó mejorar la aproximación numérica en problemas con valores iniciales. Para lograrlo, ampliaron el método Runge-Kutta mejorado de cuarto orden usando expresiones trigonométricas y condiciones obtenidas a partir de funciones exponenciales. Después, aplicaron el procedimiento a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y compararon sus resultados con otros métodos numéricos. Los resultados mostraron que el método TFIRK4 obtuvo un error global menor frente a los métodos clásicos de Runge-Kutta y otros métodos con ajuste trigonométrico. Se concluyó que este procedimiento permitió resolver problemas oscilatorios con aproximaciones más cercanas a la solución esperada.

Pozo et al. (2022) analizaron el uso de una interfaz gráfica de usuario para representar vibraciones mecánicas mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden, resueltas con el método de Runge-Kutta. La investigación trabajó con vibraciones no amortiguadas, amortiguadas libres y forzadas. Para ello, se diseñó una interfaz en MATLAB que permitió ingresar datos, resolver los modelos y comparar los resultados numéricos con las soluciones analíticas. La validación se realizó mediante Design Thinking y una prueba de usabilidad basada en la escala SUS. Los resultados indicaron que la interfaz ayudó a estudiar problemas de vibraciones mecánicas y a apoyar decisiones relacionadas con el mantenimiento preventivo. Las soluciones obtenidas con Runge-Kutta fueron cercanas a las soluciones analíticas. Además, la prueba de usabilidad alcanzó un puntaje SUS de 84, ubicado en el percentil 95 %. Se concluyó que la interfaz elaborada en MATLAB permitió modelar vibraciones mecánicas y comprender mejor los resultados obtenidos.

Senu et al. (2021) propusieron un método numérico de cuarto orden denominado PFAF-

DITDRK para resolver problemas de valores iniciales con soluciones periódicas. El trabajo buscó mejorar el ajuste de fase y la amplificación en este tipo de problemas. Para ello, los autores construyeron el método propuesto y lo compararon con otros procedimientos numéricos existentes. También realizaron pruebas numéricas para revisar su precisión y estabilidad, empleando técnicas implícitas diagonales y derivadas de segundo orden. Los resultados mostraron que el método propuesto obtuvo mejores aproximaciones que otros métodos de Runge-Kutta aplicados a problemas periódicos. Además, presentó un comportamiento numérico más estable. Se concluyó que el método PFAFDITDRK fue una alternativa útil para simular problemas de valores iniciales con soluciones periódicas.

Muñoz (2020) tuvo como propósito obtener la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden asistido con MATLAB. El estudio buscó comprobar si este método podía generar aproximaciones cercanas a la solución real. Para ello, se desarrollaron dos aplicaciones: una aplicada a un sistema de dos ecuaciones diferenciales no homogéneas y otra relacionada con el balance de masas en dos tanques. Ambos casos fueron resueltos con Runge-Kutta de cuarto orden y comparados con soluciones analíticas obtenidas mediante variación de parámetros. Los resultados mostraron aproximaciones con un margen de error mínimo de 0.000001. También se observó que MATLAB permitió organizar los cálculos y obtener resultados en menor tiempo. Se concluyó que el método de Runge-Kutta de cuarto orden sirvió para resolver sistemas diferenciales no homogéneos y comparar sus resultados con soluciones analíticas.

1.1.2 A nivel nacional

Apaza (2024) buscó resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes mediante el uso de la respuesta impulsiva y la factorización. El trabajo tuvo como finalidad presentar un procedimiento más directo y compararlo con métodos conocidos, como coeficientes indeterminados y variación de parámetros. La investigación se desarrolló bajo un enfoque analítico-deductivo y con diseño no experimental. Para ello, se

revisaron los fundamentos de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas y se analizó la respuesta impulsiva a partir de la factorización de operadores diferenciales. Luego, los resultados fueron comparados con los obtenidos mediante los métodos clásicos. Los resultados mostraron que la respuesta impulsiva permitió solucionar ecuaciones de segundo y tercer orden usando una sola integral, lo que redujo el desarrollo algebraico. Además, las soluciones encontradas fueron iguales a las obtenidas con los otros procedimientos. Se concluyó que la respuesta impulsiva fue una opción práctica para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes y que también podía utilizarse como recurso de apoyo en la enseñanza de ecuaciones diferenciales en ciencias físicas y matemáticas.

1.1.2 A nivel local

Prada y Díaz (2025) tuvieron como propósito resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden mediante el método de Runge-Kutta de orden 5 y diseñar una interfaz gráfica en Matlab. El estudio fue de tipo aplicado, con enfoque cuantitativo y diseño experimental iterativo. Primero desarrollaron las ecuaciones de forma analítica; luego aplicaron RK5 paso a paso y compararon los valores obtenidos con las soluciones exactas. También elaboraron una GUI en Matlab R2021a, donde incorporaron los métodos RK5 y RK4. Los resultados mostraron que la interfaz permitió ingresar la función, la condición inicial, el intervalo y el número de subintervalos. Además, los datos fueron presentados mediante tablas y gráficas. Se observó que RK4 presentó mayor precisión y estabilidad que RK5 cuando se trabajó con una cantidad moderada de divisiones. Los autores concluyeron que la herramienta pudo transformarse en ejecutable mediante MATLAB Compiler, permitiendo su uso sin tener instalado Matlab. Este antecedente se relacionó con la presente investigación porque trabajó con RK4, RK5, GUI y ejecutable, aunque no abordó directamente sistemas no homogéneos.

Chapoñan (2024) buscó desarrollar un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en Matlab para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas mediante Runge-Kutta de orden 4. La investigación fue aplicada y computacional, porque

estuvo orientada a construir una herramienta ejecutable para realizar cálculos numéricos sin depender directamente del entorno de Matlab. Los resultados mostraron que el ejecutable permitió ingresar funciones, condiciones iniciales, intervalos y número de pasos para resolver sistemas no homogéneos. También organizó los resultados para facilitar su revisión. Se concluyó que el ejecutable elaborado en Matlab apoyó el aprendizaje y la solución de sistemas diferenciales, ya que el usuario pudo obtener resultados sin realizar todo el procedimiento manual. Este trabajo tuvo relación con la presente investigación porque trató sobre sistemas no homogéneos, interfaz gráfica y ejecutable; sin embargo, la presente tesis amplió el análisis al comparar Runge-Kutta de orden 4 con Runge-Kutta de orden 5.

Montalvan y Burga (2023) tuvieron como finalidad resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden e implementarlo en una interfaz gráfica de Matlab. El estudio se orientó a obtener soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales. Para ello, diseñaron y programaron una interfaz donde el usuario podía ingresar la función, la condición inicial, el intervalo de tiempo y el número de iteraciones. La GUI mostró las constantes del método, la solución numérica, la gráfica y la solución general. Se desarrollaron tres aplicaciones: las dos primeras fueron resueltas de forma analítica y numérica con RK4, y luego fueron comprobadas en la interfaz; la tercera se trabajó directamente desde la GUI. Los resultados indicaron que RK4 permitió obtener aproximaciones cercanas a la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden. También se observó que la interfaz de Matlab ayudó en el ingreso de datos, el cálculo por iteraciones y la visualización de resultados. Se concluyó que la GUI sirvió como apoyo para el aprendizaje y la resolución de ecuaciones diferenciales.

Carrasco y Heredia (2020) tuvieron como objetivo obtener la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas mediante el método de Runge-Kutta asistido con Matlab. Para ello, desarrollaron dos aplicaciones. La primera correspondió a un sistema de dos ecuaciones no homogéneas, mientras que la segunda se relacionó con el balance de masas en dos tanques, a partir del cual se formuló un sistema no

homogéneo. Ambas aplicaciones fueron resueltas paso a paso con Runge-Kutta de orden 4. En la segunda aplicación también se usó el método de variación de parámetros para hallar una solución analítica y compararla con la solución numérica. Los resultados mostraron que RK4 permitió aproximar la solución de los sistemas con un margen de error bajo. Al comparar los valores numéricos con los analíticos, se observó que las soluciones fueron cercanas. Se concluyó que MATLAB permitió desarrollar los cálculos de manera ordenada y que Runge-Kutta de orden 4 sirvió para comparar soluciones numéricas con procedimientos analíticos.

1.2 Base Teórica

1.2.1 *Sistemas de ecuaciones diferenciales*

Zill (1998). Si $f_1, \dots, f_n$ son funciones de $n + 1$ variables $(t, y_1, \dots, y_n)$, consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales en forma normal

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Para escribir este sistema en forma compacta, introducimos

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{f}(t, \bar{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \bar{y}) \\ f_2(t, \bar{y}) \\ \vdots \\ f_n(t, \bar{y}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Si $(t, \bar{y}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, entonces $\bar{f}$ es una función de Ω a $\mathbb{R}^n$. Con esta notación, el sistema anterior se convierte en

$$\bar{y}' = \bar{f}(t, \bar{y}) \quad (2)$$

1.2.2 Sistema de Ecuaciones Diferenciales ordinarias no Homogéneas

Zill (1998). La forma general de un sistema lineal de primer orden es:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + g_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + g_n(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Por conveniencia y eficiencia, escribimos el sistema (3) en términos de matrices y vectores.

En particular, dejamos

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema (3) se puede escribir en la forma equivalente

$$\bar{y}'(t) = A(t)\bar{y}(t) + \bar{g}(t) \quad (4)$$

con el correspondiente sistema homogéneo

$$\bar{y}'(t) = A(t)\bar{y}(t) \quad (5)$$

Teorema 1. Si $A(t)$ y $\bar{g}(t)$ son continuas en un intervalo I , entonces existe exactamente

una solución $\overline{y}(t)$ de (4) que satisface la inicial condición $\overline{y}(t_0) = \overline{y}_0$, donde

$$\overline{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

es cualquier vector con n componentes, que consta de números reales arbitrarios. Además, $\overline{y}(t)$ se define en todas partes en I .

Teorema 2. Si $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \dots, \overline{y}_n$ son soluciones de (5), entonces cualquier combinación lineal $c_1\overline{y}_1 + c_2\overline{y}_2 + \dots + c_n\overline{y}_n$ de estas soluciones también es una solución de (5).

Demostración. Basta probarlo para $n = 2$; el caso general se seguirá fácilmente del Principio de Inducción Matemática.

Sean $\overline{y}_1, \overline{y}_2$ dos soluciones de (5). Entonces

$$(c_1\overline{y}_1 + c_2\overline{y}_2)' = c_1\overline{y}_1' + c_2\overline{y}_2' = c_1(A(t)\overline{y}_1) + c_2(A(t)\overline{y}_2) = A(t)(c_1\overline{y}_1 + c_2\overline{y}_2).$$

Esto muestra que $c_1\overline{y}_1 + c_2\overline{y}_2$ es un solución de (5). □

1.2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Zill (1998).

Es de la forma:

$$\overline{y}' = A\overline{y} \tag{6}$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz constante, es decir, las entradas $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$, son constantes y no es singular.

1.2.4 Método de Runge-Kutta de orden 4

Para resolver un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas, consideramos el problema en su forma general:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

donde:

- $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector solución.
- $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función que puede incluir términos explícitos en t , haciendo al sistema no homogéneo.

Dado un tamaño de paso h y suponiendo que en el instante t_n se tiene la aproximación $\mathbf{y}_n \approx \mathbf{y}(t_n)$, el método de Runge-Kutta de orden 4 se implementa de la siguiente forma:

1. Cálculo de $\mathbf{k}_1$:

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$$

2. Cálculo de $\mathbf{k}_2$:

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right)$$

3. Cálculo de $\mathbf{k}_3$:

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right).$$

4. Cálculo de $\mathbf{k}_4$:

$$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3)$$

5. Actualización de la solución: Se obtiene la aproximación en el siguiente paso $t_{n+1} = t_n + h$ mediante

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4).$$

Este proceso iterativo se repite a lo largo del intervalo de integración, proporcionando una aproximación numérica de la solución del sistema de ecuaciones.

1.2.5 Método de Runge-Kutta de Orden 5 (RKF5)

El método de Runge-Kutta de orden 5 (RKF5) es un método numérico ampliamente utilizado para la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales. Este método pertenece a la familia de los métodos de Runge-Kutta y se caracteriza por emplear múltiples evaluaciones de la función para obtener una aproximación más precisa de la solución en cada paso de integración.

Sea el problema de valor inicial:

$$X'(t) = f(t, X), \quad X(t_0) = X_0$$

donde $X(t)$ representa un vector de funciones desconocidas y $f(t, X)$ es una función vectorial conocida y continua en el intervalo de interés.

El método RKF5 construye la solución aproximada en el punto siguiente X_{n+1} a partir del valor conocido X_n , utilizando un tamaño de paso h y evaluando la función en distintos puntos intermedios del intervalo. Estas evaluaciones se representan mediante coeficientes auxiliares denominados K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 y K_6 , los cuales permiten capturar el comportamiento local de la solución.

La formulación general del método se expresa de manera compacta mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= X_n + h \left(\frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6 \right), \\
K_1 &= f(t_n, X_n), \\
K_2 &= f \left(t_n + \frac{1}{4}h, X_n + h\frac{1}{4}K_1 \right), \\
K_3 &= f \left(t_n + \frac{3}{8}h, X_n + h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right) \right), \\
K_4 &= f \left(t_n + \frac{12}{13}h, X_n + h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right) \right), \\
K_5 &= f \left(t_n + h, X_n + h \left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 \right) \right), \\
K_6 &= f \left(t_n + \frac{1}{2}h, X_n + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) \right)
\end{aligned} \tag{7}$$

En esta expresión, cada coeficiente K_i representa una pendiente evaluada en un punto específico dentro del intervalo de integración, lo que permite obtener una aproximación más precisa de la solución. La combinación lineal de estos coeficientes, junto con el tamaño de paso h , da como resultado el valor aproximado de la solución en el siguiente punto.

Una de las principales ventajas del método RKF5 es su alta precisión, ya que considera múltiples puntos intermedios para mejorar la aproximación. Además, este método es ampliamente utilizado en aplicaciones científicas e ingeniería debido a su capacidad para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de manera eficiente y confiable.

En el contexto de la presente investigación, el método RKF5 es implementado en una interfaz gráfica de usuario desarrollada en MATLAB, lo que permite automatizar el proceso de cálculo, facilitar la visualización de resultados y mejorar la comprensión del comportamiento de los sistemas estudiados.

1.2.6 Interfaz Gráfica de Usuario (GUI)

Una Interfaz Gráfica de Usuario, conocida como GUI, se entendió como un medio interactivo que permitió la comunicación entre el usuario y un programa informático. A través de botones, cuadros de texto, menús, tablas y gráficos, el usuario pudo realizar procesos

que antes requerían instrucciones escritas en código. En MATLAB, este tipo de interfaz pudo desarrollarse mediante herramientas como GUIDE o App Designer, las cuales ofrecieron recursos para crear aplicaciones visuales. En el campo educativo, la GUI ayudó a que los estudiantes trabajaran con procedimientos estadísticos de manera directa, sin necesitar conocimientos avanzados de programación (MathWorks, 2024).

Una GUI orientada al aprendizaje de la estadística descriptiva en MATLAB pudo incorporar opciones para calcular medidas estadísticas, ordenar datos en tablas de frecuencia y mostrar representaciones como histogramas, gráficos de dispersión y otros recursos visuales. También permitió ingresar datos, elegir operaciones y observar los resultados al instante en tablas y gráficos. De esta manera, el estudiante pudo relacionar la teoría con la práctica y comprender mejor los conceptos estadísticos mediante la exploración de ejemplos.

1.3 Bases Conceptuales

1.3.1 Interfaz Gráfica de Usuario (GUI)

Una interfaz gráfica de usuario (GUI) es una herramienta que permite a los usuarios interactuar con un programa de manera visual y amigable, en lugar de utilizar comandos textuales. En el contexto de MATLAB, una GUI permite al usuario ejecutar cálculos estadísticos y visualizar resultados sin necesidad de escribir códigos directamente, facilitando el proceso de aprendizaje al ofrecer una plataforma interactiva.

1.3.2 MATLAB:

MATLAB es un entorno de programación y un lenguaje de cálculo numérico que facilita el análisis de datos, el desarrollo de algoritmos y la creación de modelos. Es ampliamente utilizado en la educación e investigación, especialmente en áreas como matemáticas, ingeniería y ciencias aplicadas. Su capacidad para crear GUIs lo convierte en una herramienta poderosa para desarrollar aplicaciones educativas.

1.3.3 Ejecutable

Es un programa listo para usarse en la computadora sin necesidad de ver el código fuente. En este contexto, se refiere a la aplicación desarrollada en Matlab, que el usuario puede ejecutar de forma directa.

1.3.4 Matlab Compiler

Es una herramienta que permite convertir el código de Matlab en un programa independiente, de modo que se pueda ejecutar en computadoras que no tienen Matlab instalado. Esto facilita la distribución y el uso de la aplicación sin depender del entorno de Matlab.

1.3.5 Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5

Son técnicas numéricas para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.

- El de Orden 4 utiliza cuatro evaluaciones de la función en cada paso para lograr un equilibrio adecuado entre precisión y rapidez.
- El de Orden 5 (o métodos similares como el RKF45) realiza evaluaciones adicionales para aumentar la precisión y controlar el error de la aproximación.

1.3.6 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Son conjuntos de ecuaciones que describen cómo cambian varias variables con respecto a una única variable independiente, normalmente el tiempo. Se usan para modelar procesos en los que múltiples factores evolucionan al mismo tiempo.

1.3.7 Solución Numérica

Es una aproximación obtenida mediante cálculos computacionales para resolver ecuaciones que, en la mayoría de los casos, no tienen solución exacta. Estos métodos permiten obtener respuestas suficientemente precisas para aplicaciones prácticas.

1.3.8 Variable independiente

Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab mediante los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5.

- **Definición conceptual:** Se refiere al proceso de diseñar e implementar una aplicación en MATLAB que combine una interfaz visual intuitiva con algoritmos numéricos (Runge-Kutta de orden 4 y 5) para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas. Este desarrollo implica integrar la lógica matemática y la presentación gráfica, permitiendo que el usuario ingrese datos y observe los resultados de forma interactiva.
- **Definición operacional:** Se evaluará a través de la implementación y puesta en marcha del ejecutable, considerando aspectos como la facilidad de uso de la interfaz, la correcta integración de los métodos numéricos y la eficiencia en el cálculo. Esto se medirá mediante pruebas de rendimiento, encuestas de usabilidad y comparación de los resultados obtenidos con soluciones de referencia.

1.3.9 Variable dependiente

Solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Homogéneas

- **Definición conceptual:** Se refiere a la precisión, estabilidad y eficiencia con las que el ejecutable resuelve los sistemas de ecuaciones diferenciales que incluyen términos externos. Esta variable engloba la exactitud de los resultados numéricos, la robustez del método utilizado y la capacidad del algoritmo para adaptarse a diversas condiciones y escenarios.
- **Definición operacional:** Se medirá comparando los resultados numéricos obtenidos por el ejecutable con soluciones analíticas o valores de referencia. Los indicadores incluyen el error relativo, el tiempo de ejecución y la consistencia de las soluciones en diferentes pruebas computacionales, lo que permitirá evaluar la efectividad del método en la resolución de los sistemas propuestos.

1.3.10 Operacionalización de variables

Tabla 1

Operacionalización de variables.

Variable	Definición Operacional	Dimensiones	Indicadores
Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en MATLAB mediante los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5	Implementación de un ejecutable en MATLAB con interfaz gráfica que utilice los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5 para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas, evaluado mediante pruebas de rendimiento y usabilidad.	Diseño y estructura de la interfaz	Distribución organizada de los elementos visuales, claridad en la navegación, accesibilidad a las opciones de configuración de métodos numéricos.
		Funcionalidades técnicas	Precisión y eficiencia en la ejecución de los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5, consistencia en los resultados numéricos.
		Interactividad y retroalimentación	Respuesta inmediata de la interfaz ante las acciones del usuario, visualización en tiempo real de gráficos y resultados numéricos.
		Validación funcional	Pruebas realizadas con ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales que verifiquen el correcto funcionamiento de los métodos implementados.
Solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Homogéneas	Evaluación de la precisión y eficiencia en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas utilizando el ejecutable en MATLAB con métodos de Runge-Kutta.	Distribución ejecutable	Correcta generación de un ejecutable independiente que contenga todas las funcionalidades de la interfaz gráfica y los métodos numéricos implementados.
		Precisión numérica	Error relativo y absoluto en la solución numérica en comparación con soluciones analíticas o de referencia.
		Eficiencia computacional	Tiempo de ejecución de los métodos numéricos, uso de recursos computacionales (memoria y procesamiento).
		Estabilidad del método	Consistencia de los resultados ante variaciones en el tamaño de paso y condiciones iniciales.
		Validación de resultados	Coincidencia de los resultados con soluciones analíticas y pruebas de verificación en diferentes escenarios.
		Evaluación funcional de ejemplos	Número y calidad de ejemplos resueltos con distintos niveles de complejidad para validar la capacidad del ejecutable.

II. DISEÑO METODOLÓGICO

2.1 Tipo de Investigación

La investigación es de tipo aplicada, ya que se enfoca en crear un programa en MATLAB con una interfaz visual que utiliza los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5 para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas. El propósito es facilitar el proceso de solución numérica y mejorar la comprensión de estos métodos en un contexto educativo y práctico.

2.2 Método de Investigación

El método de investigación es aplicado y descriptivo. Se enfoca en desarrollar una herramienta práctica (el ejecutable en MATLAB) y en describir su funcionamiento, utilidad y efectividad para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas.

2.3 Diseño de Contrastación

El diseño de contrastación se basa en un enfoque iterativo que incluye las siguientes etapas:

- **Diseño de la Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) en MATLAB:** Se diseña una interfaz intuitiva que permite al usuario ingresar datos, elegir métodos numéricos y visualizar resultados de manera interactiva.
- **Implementación de los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5:** Se programan estos métodos numéricos en MATLAB para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas, asegurando precisión y eficiencia en los cálculos.
- **Pruebas Iterativas:** La interfaz se prueba repetidamente con diferentes ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales. Se verifican los resultados comparándolos con soluciones teóricas o de referencia para asegurar la precisión y consistencia.
- **Validación:** Si los resultados obtenidos con la interfaz coinciden con los cálculos teóricos, se valida el correcto funcionamiento de la herramienta.

2.4 Población, Muestra y Muestreo

Este estudio no está enfocado en una población específica, ya que el objetivo principal es desarrollar y validar el ejecutable en MATLAB. La herramienta está diseñada para ser útil en entornos educativos y profesionales, donde se requiera resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas.

- **Muestra:** No se contempla una muestra definida de usuarios, ya que no se realiza un análisis estadístico sobre un grupo específico. La validación se basa en pruebas funcionales y de usabilidad para asegurar el correcto funcionamiento del ejecutable.
- **Muestreo:** No se utiliza un muestreo convencional. Se enfoca en un proceso iterativo de desarrollo y prueba, donde se evalúan continuamente la funcionalidad y usabilidad del ejecutable, haciendo ajustes para optimizar su desempeño y adaptabilidad a diferentes entornos educativos y profesionales.

2.5 Técnicas, Instrumentos, Equipos y Materiales de Recolección de Datos

- **Técnicas:** Se utilizan técnicas de desarrollo de software enfocadas en crear una interfaz gráfica de usuario intuitiva en MATLAB. Además, se aplican pruebas de usabilidad y validación para garantizar que el ejecutable funcione correctamente y cumpla con sus objetivos educativos.
- **Instrumentos:** Se utilizan pruebas de funcionalidad, encuestas de usabilidad y observaciones directas para recopilar información sobre el desempeño de la interfaz y la experiencia del usuario. Estos instrumentos ayudan a identificar áreas de mejora en el diseño y funcionalidad.
- **Equipos:** Se utilizan computadoras con MATLAB instalado para desarrollar, probar y ejecutar el programa. También se prueban en diferentes dispositivos para evaluar la adaptabilidad del ejecutable en distintos entornos operativos.

- **Materiales:** Incluyen documentación técnica de MATLAB, guías de usuario para la interfaz, ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas y plantillas para evaluar la usabilidad y precisión del ejecutable.

2.6 Procesamiento y Análisis de Datos

- **Procesamiento de Datos:** Los datos obtenidos de las pruebas se procesan en MATLAB para analizar la precisión, eficiencia y usabilidad del ejecutable.
- **Análisis de Datos:** Se comparan los resultados obtenidos con el ejecutable con soluciones teóricas o de referencia. También se analizan las respuestas de los usuarios en las encuestas de usabilidad para mejorar la experiencia interactiva.
- **Validación de Resultados:** La validación se realiza comparando los resultados numéricos con soluciones analíticas o métodos tradicionales, asegurando la precisión y estabilidad del ejecutable. Además, se llevan a cabo pruebas de sensibilidad para verificar la robustez de los métodos numéricos implementados.

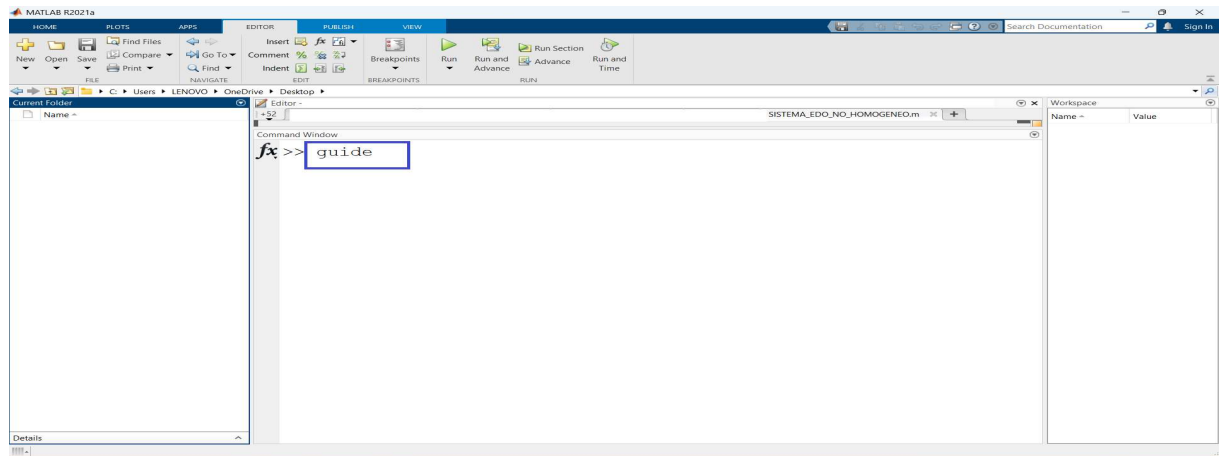
III. RESULTADOS

3.1 Interfaz Gráfica de Usuario

Paso 1: La Figura (1) muestra el entorno de trabajo de Matlab, escribir la palabra `guide` en el comand windows y dar enter para que se muestre la GUI de MATLAB.

Figura 1

Entorno de Matlab R2021a



Paso 2: La Figura (2) muestra el entorno de guide de MATLAB R2021a.

Figura 2

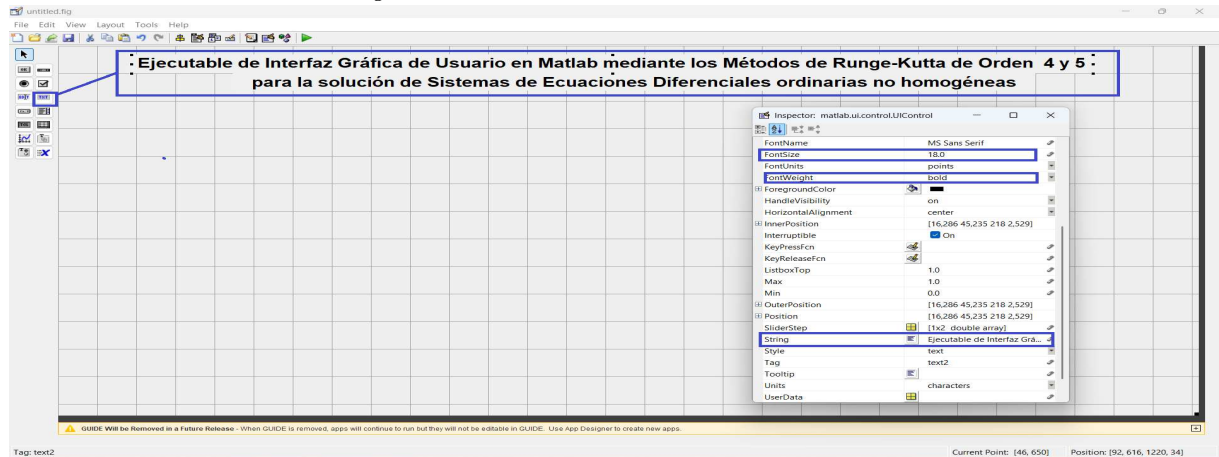
Entorno de la guide.



Paso 3: La Figura (3) se agregó 2 static text para colocar el título de investigación.

Figura 3

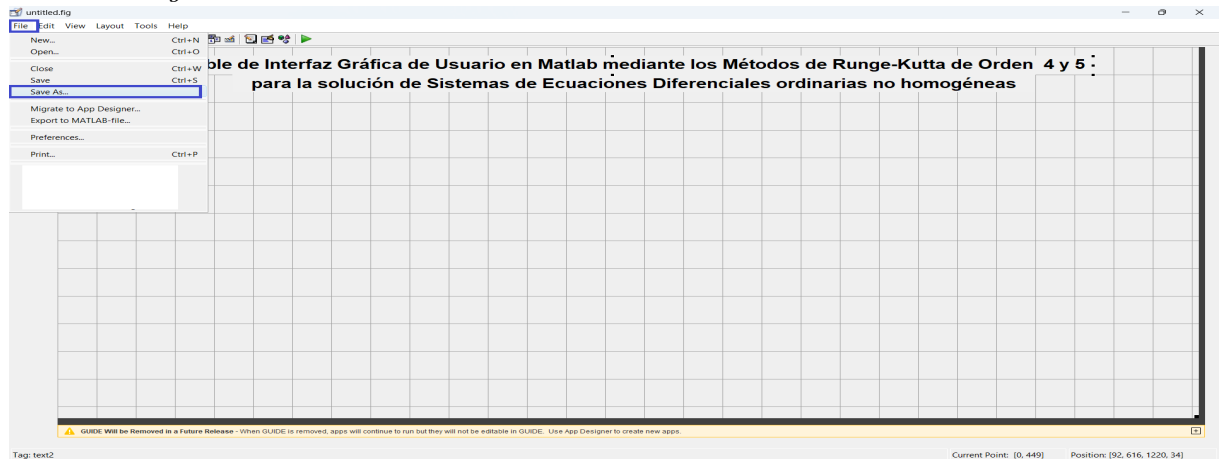
Se colocó el título de investigación.



Paso 4: La Figura (4) muestra el proceso de guardar la GUI

Figura 4

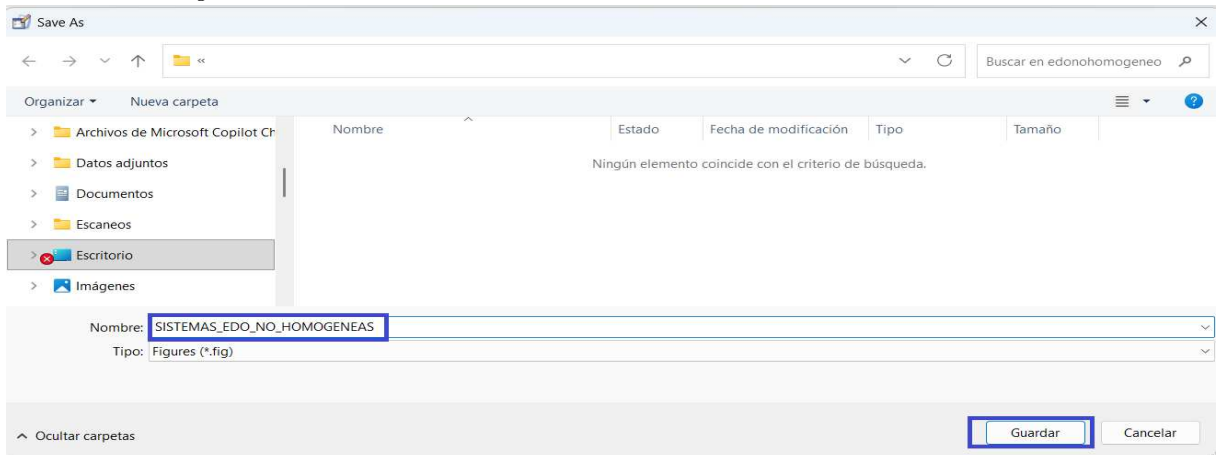
Guardar la guide.



Paso 5: La Figura (5) muestra con que nombre se guarda la guide

Figura 5

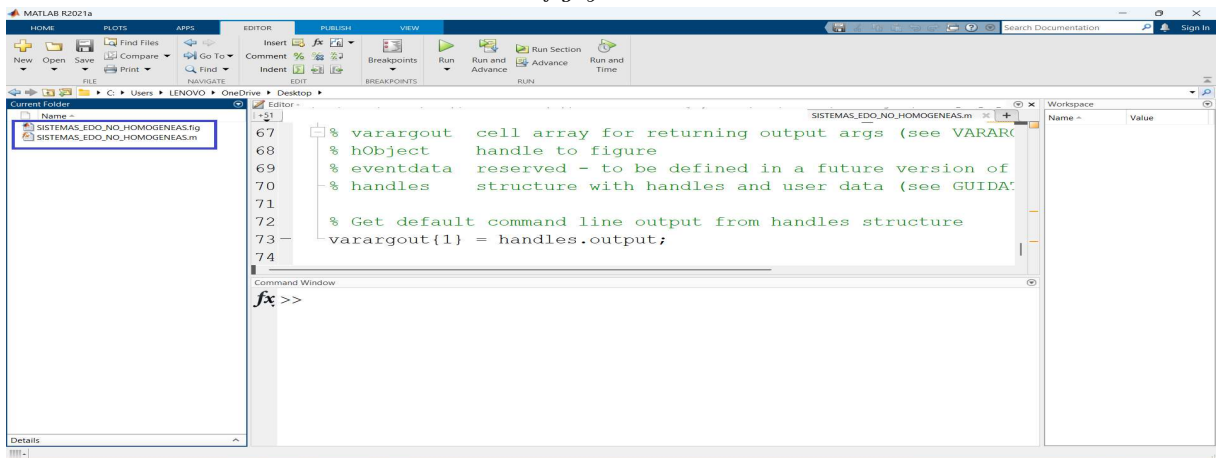
Nombre de la guide.



Paso 6: La Figura (6) muestra que al momento de guardar la guide, se generaron 2 archivos, el primero con la extensión .fig y el otro con la extensión .m.

Figura 6

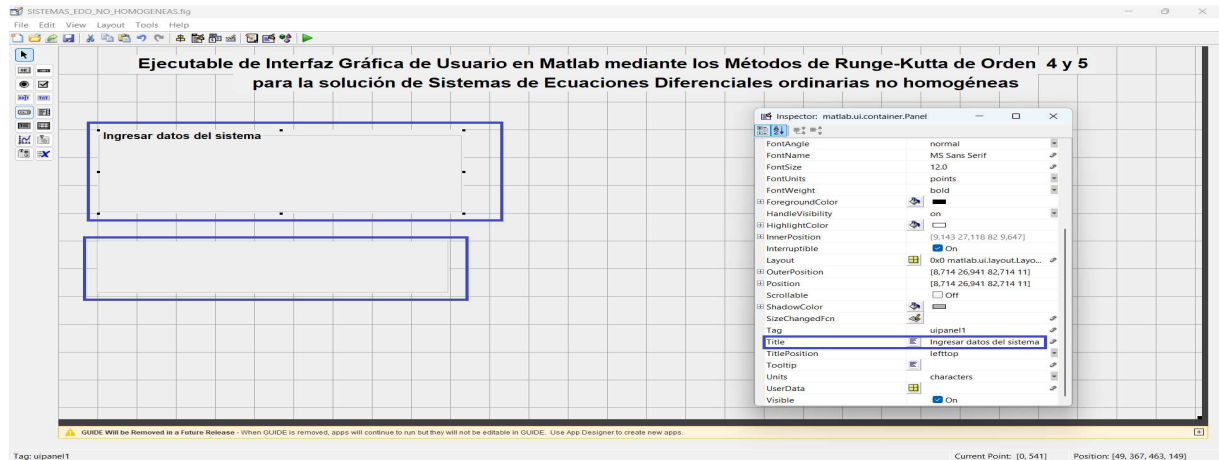
Generación de archivos con la extensión .fig y .m..



Paso 7: La Figura (7) muestra que se agregó 2 paneles para encapsular los datos del sistema y los botones calcular, borrar y salir.

Figura 7

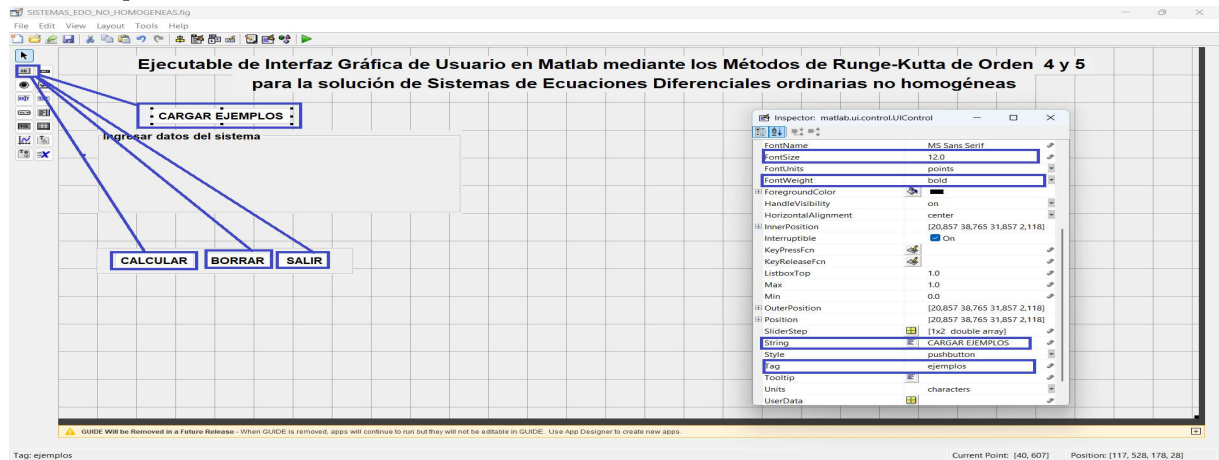
Uso de paneles.



Paso 8: La Figura (8) muestra que se agregaron 4 pushbutton, para cargar ejemplos, calcular, borrar y salir.

Figura 8

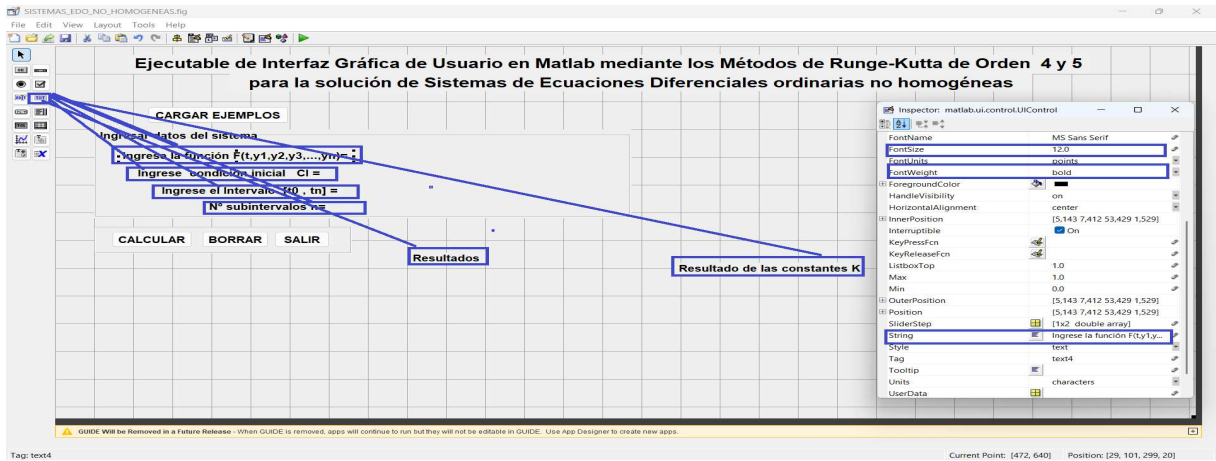
Uso del pushbutton.



Paso 9: La Figura (9) muestra que se agregó 6 static text.

Figura 9

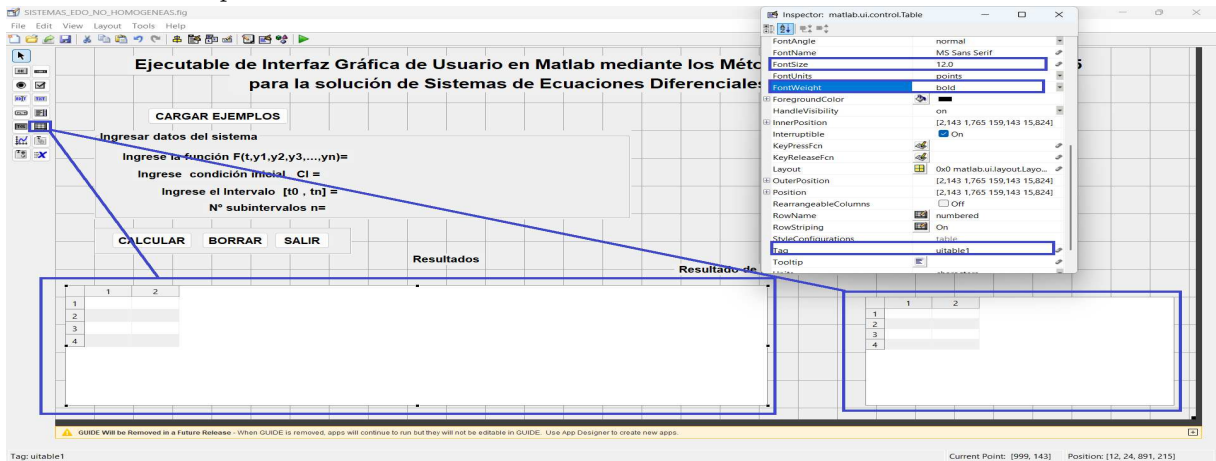
Uso de 6 static text.



Paso 10: La Figura (10) muestra que se agregó 2 tablas, para mostrar los resultados.

Figura 10

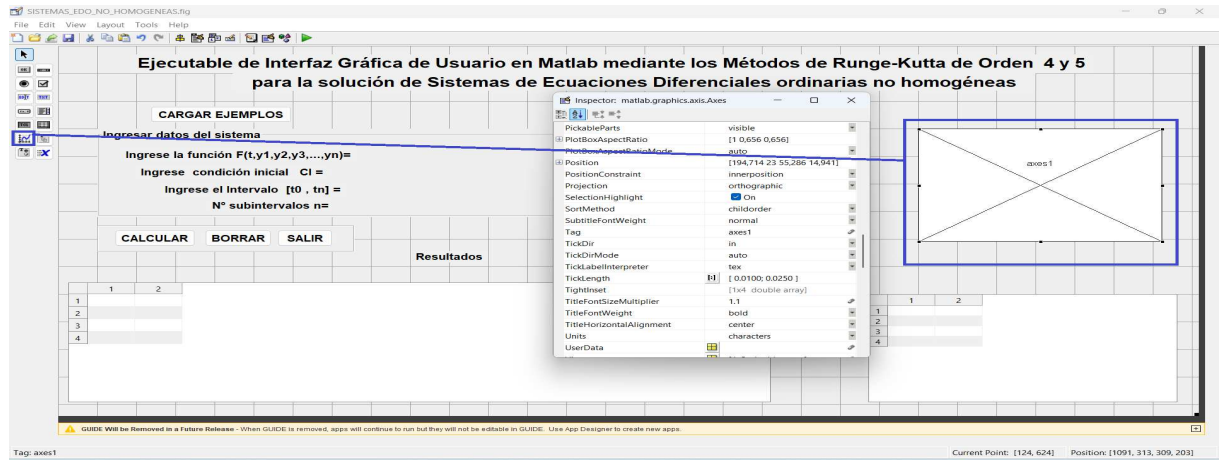
Uso de 2 tablas para mostrar resultados.



Paso 11: La Figura (11) muestra que se ingresó un axes, para mostrar la solución gráfica.

Figura 11

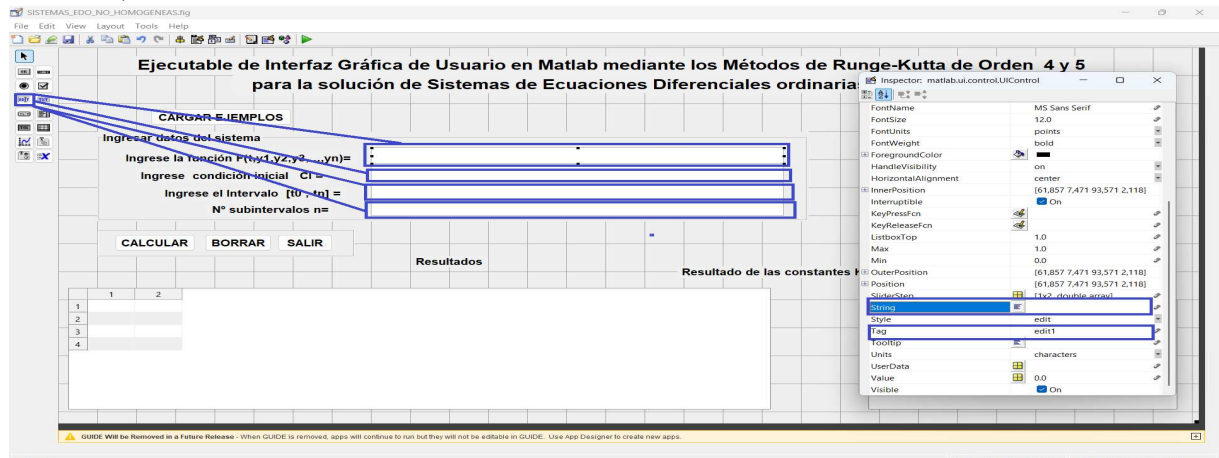
Uso de 1 axes.



Paso 12: La Figura (12) muestra que se ingresó 4 edit text, para agregar los datos del sistema no homogéneo.

Figura 12

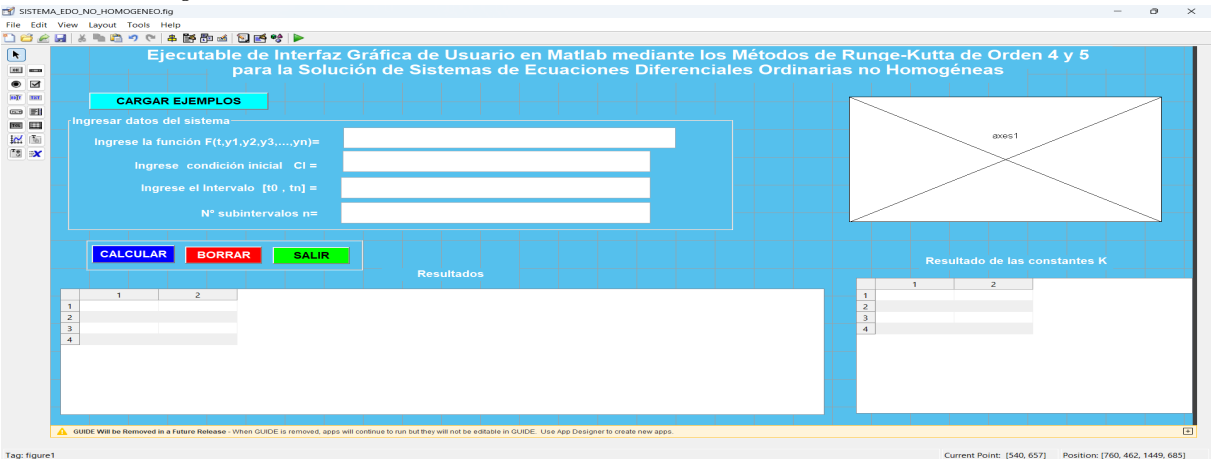
Uso de 4 edit text.



Paso 13: La Figura (13) muestra el diseño de la guide.

Figura 13

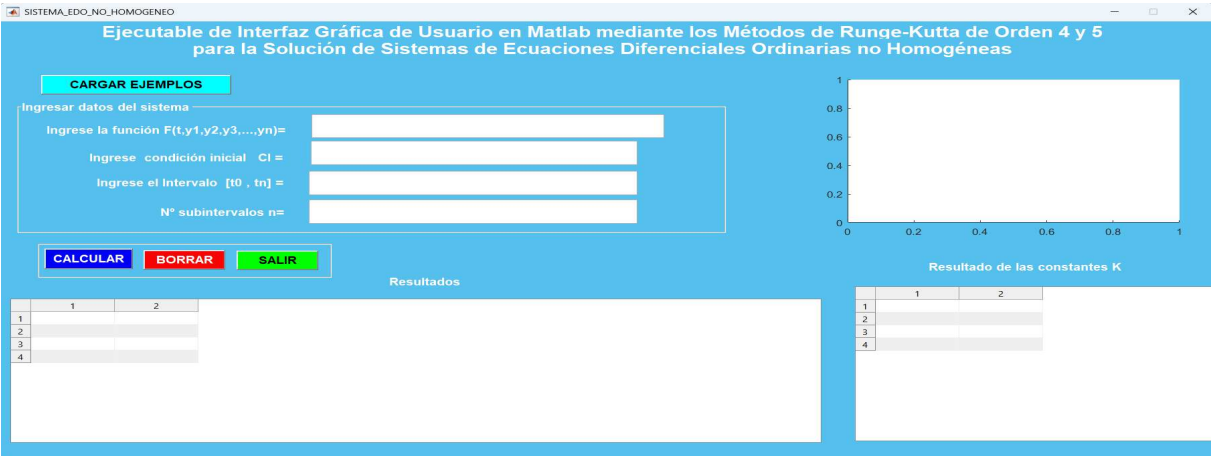
Diseño de la guide.



Paso 14: La Figura (14) muestra diseño final de la guide.

Figura 14

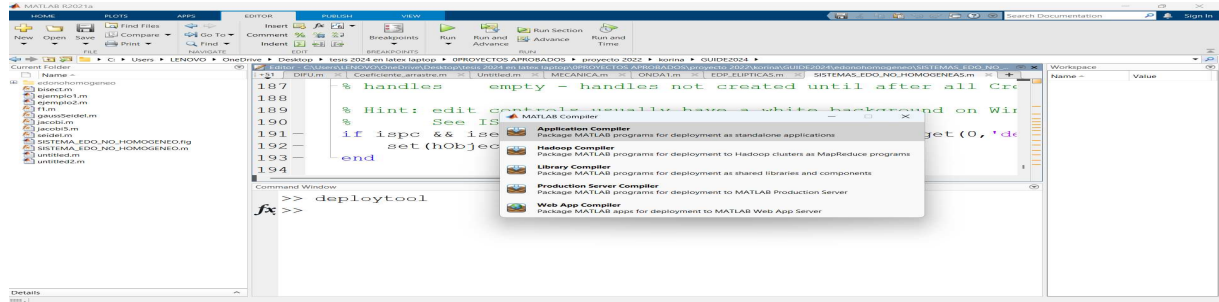
Diseño final de la guide.



Paso 15: La Figura (15) muestra el proceso de convertir a ejecutable, escribir la palabra deploytool en el command window y dar enter para que muestre una ventana y seleccionar matlab compiler y cli para que se abra una nueva ventana

Figura 15

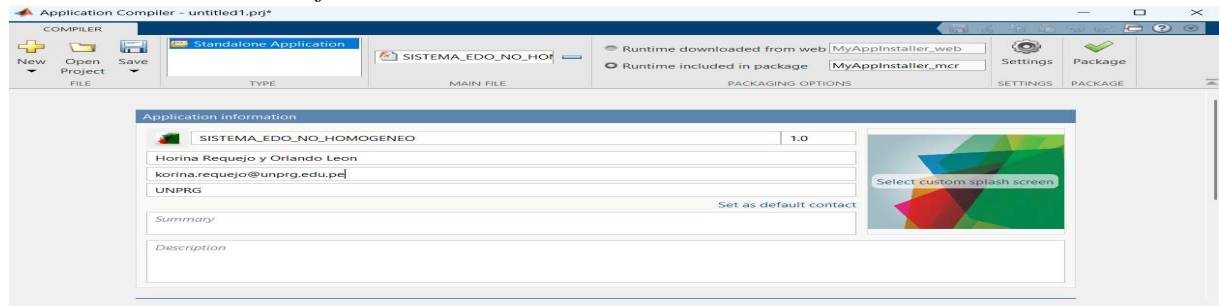
Deploytool.



Paso 16: La Figura (16) muestra como cargar los archivos m y agregar los datos, ademas cli package.

Figura 16

Proceso de convertir a ejecutable.



Paso 17: La Figura (17) muestra que al momento de convertirse en ejecutable se debe activar los 4 cheks para que se convierta en ejecutable.

Figura 17

Ejecutable.



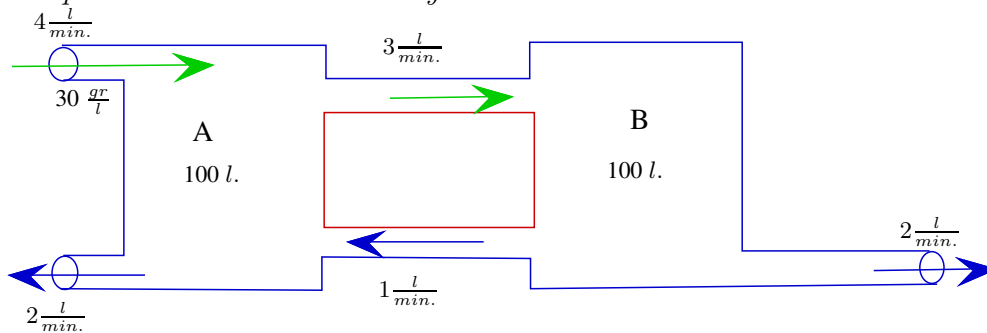
3.2 Aplicación 1

Carrasco y Heredia (2020).

Dos tanques están conectados como se muestra en la Figura (18). Inicialmente en el depósito *B* hay 1 *kg.* de sal disuelto y en el tanque *A* sólo hay agua. En ese mismo instante se comienza a bombear una disolución de agua y sal con un caudal de $4\frac{l}{min.}$ y una concentración de $30\frac{g}{l}$ al tanque *A*. La disolución circula entre los tanques y hacia el exterior de acuerdo a los datos de la Figura (18), y se supone que se encuentra uniformemente distribuida.

Figura 18

2 tanques conectados con entrada y salidas.



Donde:

Flecha verde: Indica entrada de concentración.

Flecha Azul: Indica Salida de concentración.

Hallar la concentración de sal en cada tanque en cualquier instante.

Solución

Solucionaremos este tipo de problema utilizando balance de masas:

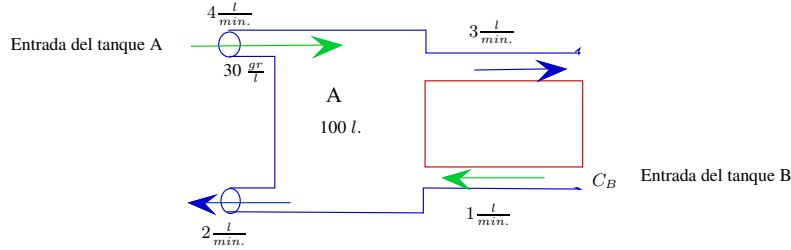
$$\text{Acumulación} = \text{Entradas-Salidas}$$

Ahora designaremos los símbolos $c_A(t)$ y $c_B(t)$ las funciones que nos proporcionan las concentraciones en los tanques A y B a lo largo del tiempo.

1. Analizaremos el comportamiento de las entradas en el tanque A

Figura 19

Comportamiento de entradas en el tanque A.



Se tiene:

$$\dot{m}_{eA} = \begin{bmatrix} \text{Concentración} \\ \text{en masa A} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de masa} \\ \text{al sistema en A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Concentración} \\ \text{en masa B} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de masa} \\ \text{al sistema B} \end{bmatrix}$$

$$\dot{m}_{eA} = \left(30 \frac{g}{l}\right) \times \left(4 \frac{l}{min}\right) + \left(c_B \frac{g}{l}\right) \times \left(1 \frac{l}{min}\right) = 120 \frac{g}{min} + c_B \frac{g}{min} = (120 + c_B) \frac{g}{min}$$

2. Analizaremos el comportamiento de las salidas en el tanque A

Se tiene:

$$\dot{m}_{sA} = \left(3 \frac{l}{min} + 2 \frac{l}{min}\right) \times c_A \frac{g}{l} = 5 \frac{l}{min} \times c_A \frac{g}{l} = 5c_A \frac{g}{min}$$

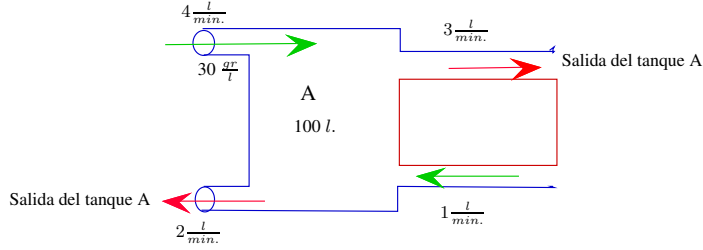
3. Analizaremos la acumulación en el tanque A.

De la Figura (18) muestra que el volumen permanece constante lo cual se tiene:

$$\frac{d(c_A V)}{dt} = V c'_A = 100 c'_A$$

Figura 20

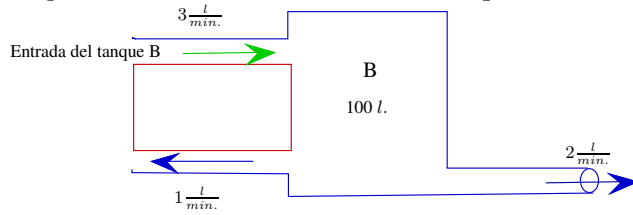
Comportamiento de salidas en el tanque A



4. Analizaremos el comportamiento de las entradas en el tanque B.

Figura 21

Comportamiento de entradas en el tanque B.



Se tiene:

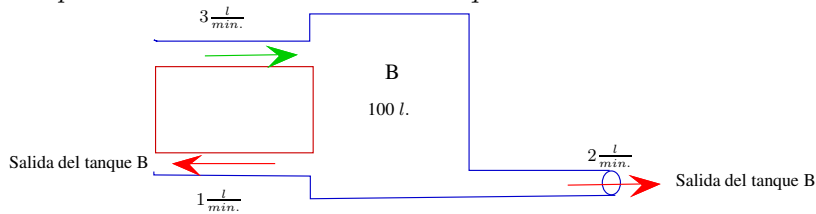
$$\dot{m}_{eB} = \begin{bmatrix} \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de masa} \\ \text{al sistema en B} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{Concentración} \\ \text{en masa A} \end{bmatrix}$$

$$\dot{m}_{eB} = \left(3 \frac{l}{min}\right) \times \left(c_A \frac{g}{l}\right) = 3c_A \frac{g}{min}$$

5. Analizaremos el comportamiento de las salidas en el tanque B.

Figura 22

Comportamiento de salidas en el tanque B.



Se tiene:

$$\dot{m}_{sB} = \left(2\frac{l}{min} + 1\frac{l}{min}\right) \times c_B \frac{g}{min} = 3\frac{l}{min} \times c_B \frac{g}{min} = 3c_B \frac{g}{min}$$

6. Analizaremos la acumulación en el tanque B:

De la Figura (18) muestra que el volumen permanece constante lo cual se tiene:

$$\frac{d(c_B V)}{dt} = V c'_B = 100c'_B$$

7. Analizaremos la concentración inicial en el tanque A:

De acuerdo a los datos del problema indica que no hay sal disuelta en el tanque A, lo cual se tiene:

$$c_A(0) = 0\frac{g}{l}$$

8. Analizaremos la concentración inicial en el tanque B:

De acuerdo a los datos del problema indica que hay 1Kg de sal disuelta en el tanque B, lo cual se tiene:

$$c_B(0) = \frac{\text{gramos del soluto}}{\text{litros de la solución}} = \frac{1Kg}{100l} = \frac{1000g}{100l} = 10\frac{g}{l}$$

El balance de materia en cada tanque da lugar a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \frac{d(c_A V)}{dt} = \dot{m}_{eA} - \dot{m}_{sA} \\ \frac{d(c_B V)}{dt} = \dot{m}_{eB} - \dot{m}_{sB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100c'_A = 120 + c_B - 5c_A \\ 100c'_B = 3c_A - 3c_B \end{cases}$$

Se forma el siguiente sistema no homogéneo:

$$\begin{cases} c'_A &= -\frac{5}{100}c_A + \frac{1}{100}c_B + \frac{120}{100} \\ c'_B &= \frac{3}{100}c_A - \frac{3}{100}c_B \end{cases} \quad (8)$$

con una condición inicial: $c_A(0) = 0$, $c_B(0) = 10$.

Solución

3.2.1 Solución de la aplicación 1 mediante RK5

Utilizaremos el método de Runge-Kutta de orden 5 para resolver de manera iterativa el sistema (8) y analizaremos el comportamiento de los tanques en 1 minuto.

Para $N = 4$ y $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} c'_A &= -0.05c_A + 0.01c_B + 1.2, \\ c'_B &= 0.03c_A - 0.03c_B. \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} c_A \\ c_B \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad h = 0.25$$

$$\Rightarrow f(t, X) = \begin{bmatrix} -0.05X_1 + 0.01X_2 + 1.2 \\ 0.03X_1 - 0.03X_2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = f(t_n, X_n)$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{1}{4}h, X_n + h\frac{1}{4}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{3}{8}h, X_n + h\left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2\right)\right)$$

$$K_4 = f\left(t_n + \frac{12}{13}h, X_n + h\left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3\right)\right)$$

$$K_5 = f\left(t_n + h, X_n + h\left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4\right)\right)$$

$$K_6 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, X_n + h\left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5\right)\right)$$

$$X_{n+1} = X_n + h\left(\frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6\right)$$

Primera iteración: $t_1 = 0.25$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.05(0) + 0.01(10) + 1.2 \\ 0.03(0) - 0.03(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.300000 \\ -0.300000 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + 0.25\left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 1.300000 \\ -0.300000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.081250 \\ 9.981250 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.05(0.081250) + 0.01(9.981250) + 1.2 \\ 0.03(0.081250) - 0.03(9.981250) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.295750 \\ -0.297000 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + h \left(\frac{3}{32} K_1 + \frac{9}{32} K_2 \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{3}{32} \begin{bmatrix} 1.300000 \\ -0.300000 \end{bmatrix} + \frac{9}{32} \begin{bmatrix} 1.295750 \\ -0.297000 \end{bmatrix} \right]$$

$$X_0 + h \left(\frac{3}{32} K_1 + \frac{9}{32} K_2 \right) = \begin{bmatrix} 0.121576 \\ 9.972086 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.05(0.121576) + 0.01(9.972086) + 1.2 \\ 0.03(0.121576) - 0.03(9.972086) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.293642 \\ -0.295515 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + h \left(\frac{1932}{2197} K_1 - \frac{7200}{2197} K_2 + \frac{7296}{2197} K_3 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{1932}{2197} \begin{bmatrix} 1.300000 \\ -0.300000 \end{bmatrix} - \frac{7200}{2197} \begin{bmatrix} 1.295750 \\ -0.297000 \end{bmatrix} + \frac{7296}{2197} \begin{bmatrix} 1.293642 \\ -0.295515 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.298204 \\ 9.932035 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.05(0.298204) + 0.01(9.932035) + 1.2 \\ 0.03(0.298204) - 0.03(9.932035) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.284410 \\ -0.289015 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + h \left(\frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{439}{216} \begin{bmatrix} 1.300000 \\ -0.300000 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1.295750 \\ -0.297000 \end{bmatrix} + \frac{3680}{513} \begin{bmatrix} 1.293642 \\ -0.295515 \end{bmatrix} \right]$$

$$-\frac{845}{4104} \begin{bmatrix} 1.284410 \\ -0.289015 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.322900 \\ 9.926477 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.05(0.322900) + 0.01(9.926477) + 1.2 \\ 0.03(0.322900) - 0.03(9.926477) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.283120 \\ -0.288107 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} -\frac{8}{27} \begin{bmatrix} 1.300000 \\ -0.300000 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.295750 \\ -0.297000 \end{bmatrix} - \frac{3544}{2565} \begin{bmatrix} 1.293642 \\ -0.295515 \end{bmatrix} \\ + \frac{1859}{4104} \begin{bmatrix} 1.284410 \\ -0.289015 \end{bmatrix} - \frac{11}{40} \begin{bmatrix} 1.283120 \\ -0.288107 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.161966 \\ 9.962877 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -0.05(0.161966) + 0.01(9.962877) + 1.2 \\ 0.03(0.161966) - 0.03(9.962877) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.291530 \\ -0.294027 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = X_0 + h \left(\frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6 \right)$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración: $t_2 = 0.50$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.05(0.322885) + 0.01(9.926491) + 1.2 \\ 0.03(0.322885) - 0.03(9.926491) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.283121 \\ -0.288108 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + 0.25 \left(\frac{1}{4} \right) \begin{bmatrix} 1.283121 \\ -0.288108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.403080 \\ 9.908484 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.05(0.403080) + 0.01(9.908484) + 1.2 \\ 0.03(0.403080) - 0.03(9.908484) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.278931 \\ -0.285162 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{3}{32} \begin{bmatrix} 1.283121 \\ -0.288108 \end{bmatrix} + \frac{9}{32} \begin{bmatrix} 1.278931 \\ -0.285162 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.442883 \\ 9.899688 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.05(0.442883) + 0.01(9.899688) + 1.2 \\ 0.03(0.442883) - 0.03(9.899688) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.276853 \\ -0.283704 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} \frac{1932}{2197} \begin{bmatrix} 1.283121 \\ -0.288108 \end{bmatrix} - \frac{7200}{2197} \begin{bmatrix} 1.278931 \\ -0.285162 \end{bmatrix} + \frac{7296}{2197} \begin{bmatrix} 1.276853 \\ -0.283704 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.617219 \\ 9.861247 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.05(0.617219) + 0.01(9.861247) + 1.2 \\ 0.03(0.617219) - 0.03(9.861247) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.267752 \\ -0.277321 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + h \left(\frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} \frac{439}{216} \begin{bmatrix} 1.283121 \\ -0.288108 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1.278931 \\ -0.285162 \end{bmatrix} + \frac{3680}{513} \begin{bmatrix} 1.276853 \\ -0.283704 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{845}{4104} \begin{bmatrix} 1.267752 \\ -0.277321 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.641595 \\ 9.855915 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.05(0.641595) + 0.01(9.855915) + 1.2 \\ 0.03(0.641595) - 0.03(9.855915) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.266479 \\ -0.276430 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + h \left(-\frac{8}{27} K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565} K_3 + \frac{1859}{4104} K_4 - \frac{11}{40} K_5 \right)$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -0.05(0.482749) + 0.01(9.890848) + 1.2 \\ 0.03(0.482749) - 0.03(9.890848) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.274771 \\ -0.282243 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix}$$
$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.05(0.641580) + 0.01(9.855928) + 1.2 \\ 0.03(0.641580) - 0.03(9.855928) \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.032079 + 0.098559 + 1.2 \\ 0.019247 - 0.295678 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_2 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + 0.25 \left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix}$$

$$0.25 \left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix} = 0.0625 \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.079155 \\ -0.017277 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.079155 \\ -0.017277 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.720735 \\ 9.838651 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = f\left(t_2 + \frac{1}{4}h, X_2 + h\frac{1}{4}K_1\right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.05(0.720735) + 0.01(9.838651) + 1.2 \\ 0.03(0.720735) - 0.03(9.838651) \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.036037 + 0.098387 + 1.2 \\ 0.021622 - 0.295160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.262350 \\ -0.273537 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_2 + h\left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2\right) = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{3}{32} \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix} + \frac{9}{32} \begin{bmatrix} 1.262350 \\ -0.273537 \end{bmatrix} \right]$$

$$\frac{3}{32}K_1 = \begin{bmatrix} 0.118733 \\ -0.025915 \end{bmatrix}$$

$$\frac{9}{32}K_2 = \begin{bmatrix} 0.355036 \\ -0.076932 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 = \begin{bmatrix} 0.473769 \\ -0.102847 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.473769 \\ -0.102847 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.118442 \\ -0.025712 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right) = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.118442 \\ -0.025712 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.760022 \\ 9.830216 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = f \left(t_2 + \frac{3}{8}h, X_2 + h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right) \right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.05(0.760022) + 0.01(9.830216) + 1.2 \\ 0.03(0.760022) - 0.03(9.830216) \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.038001 + 0.098302 + 1.2 \\ 0.022801 - 0.294906 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.260301 \\ -0.272106 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_2 + h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{1932}{2197} \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix} - \frac{7200}{2197} \begin{bmatrix} 1.262350 \\ -0.273537 \end{bmatrix} + \frac{7296}{2197} \begin{bmatrix} 1.260301 \\ -0.272106 \end{bmatrix} \right]$$

$$\frac{1932}{2197}K_1 = \begin{bmatrix} 1.113894 \\ -0.243096 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{7200}{2197}K_2 = \begin{bmatrix} -4.137507 \\ 0.896389 \end{bmatrix}$$

$$\frac{7296}{2197}K_3 = \begin{bmatrix} 4.185613 \\ -0.874797 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 = \begin{bmatrix} 1.162074 \\ -0.221886 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 1.162074 \\ -0.221886 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290519 \\ -0.055471 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right) = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.290519 \\ -0.055471 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.932099 \\ 9.800457 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = f \left(t_2 + \frac{12}{13}h, X_2 + h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right) \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.05(0.932099) + 0.01(9.793357) + 1.2 \\ 0.03(0.932099) - 0.03(9.793357) \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.046605 + 0.097934 + 1.2 \\ 0.027963 - 0.293801 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.251329 \\ -0.265838 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_5

$$X_2 + h \left(\frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{439}{216} \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1.262350 \\ -0.273537 \end{bmatrix} + \frac{3680}{513} \begin{bmatrix} 1.260301 \\ -0.272106 \end{bmatrix} - \frac{845}{4104} \begin{bmatrix} 1.251329 \\ -0.265838 \end{bmatrix} \right]$$

$$\frac{439}{216} K_1 = \begin{bmatrix} 2.573711 \\ -0.561816 \end{bmatrix}$$

$$-8K_2 = \begin{bmatrix} -10.098800 \\ 2.188296 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3680}{513} K_3 = \begin{bmatrix} 9.039980 \\ -1.951792 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{845}{4104} K_4 = \begin{bmatrix} -0.257611 \\ 0.054729 \end{bmatrix}$$

$$\frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4 = \begin{bmatrix} 1.258319 \\ -0.270733 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 1.258319 \\ -0.270733 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.314580 \\ -0.067683 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + h \left(\frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4 \right) = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.314580 \\ -0.067683 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.956160 \\ 9.788245 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.05(0.956160) + 0.01(9.788245) + 1.2 \\ 0.03(0.956160) - 0.03(9.788245) \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.047808 + 0.097882 + 1.2 \\ 0.028685 - 0.293647 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.250074 \\ -0.264963 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_6

$$X_2 + h \left(-\frac{8}{27} K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565} K_3 + \frac{1859}{4104} K_4 - \frac{11}{40} K_5 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} -\frac{8}{27} \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.262350 \\ -0.273537 \end{bmatrix} - \frac{3544}{2565} \begin{bmatrix} 1.260301 \\ -0.272106 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1859}{4104} \begin{bmatrix} 1.251329 \\ -0.265838 \end{bmatrix} \Bigg]$$

$$- \frac{11}{40} \begin{bmatrix} 1.250074 \\ -0.264963 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{8}{27}K_1 = \begin{bmatrix} -0.375254 \\ 0.081905 \end{bmatrix}$$

$$2K_2 = \begin{bmatrix} 2.524700 \\ -0.547074 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{3544}{2565}K_3 = \begin{bmatrix} -1.741883 \\ 0.376078 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1859}{4104}K_4 = \begin{bmatrix} 0.567118 \\ -0.120448 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{11}{40}K_5 = \begin{bmatrix} -0.343770 \\ 0.072865 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 = \begin{bmatrix} 0.631166 \\ -0.136674 \end{bmatrix}$$

$$h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.631166 \\ -0.136674 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.157792 \\ -0.034169 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.157792 \\ -0.034169 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.799372 \\ 9.821738 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -0.05(0.799372) + 0.01(9.821738) + 1.2 \\ 0.03(0.799372) - 0.03(9.821738) \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -0.039969 + 0.098217 + 1.2 \\ 0.023981 - 0.294652 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.258249 \\ -0.270671 \end{bmatrix}$$

Actualización para obtener X_3

$$X_3 = X_2 + h \left(\frac{16}{135} K_1 + \frac{6656}{12825} K_3 + \frac{28561}{56430} K_4 - \frac{9}{50} K_5 + \frac{2}{55} K_6 \right)$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{16}{135} \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix} + \frac{6656}{12825} \begin{bmatrix} 1.260301 \\ -0.272106 \end{bmatrix} + \frac{28561}{56430} \begin{bmatrix} 1.251329 \\ -0.265838 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. - \frac{9}{50} \begin{bmatrix} 1.250074 \\ -0.264963 \end{bmatrix} + \frac{2}{55} \begin{bmatrix} 1.258249 \\ -0.270671 \end{bmatrix} \right]$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix}$$

Cuarta iteración: $t_4 = 1.00$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1

$$K_1 = f(t_3, X_3)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.05(0.956145) + 0.01(9.788258) + 1.2 \\ 0.03(0.956145) - 0.03(9.788258) \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.047807 + 0.097883 + 1.2 \\ 0.028684 - 0.293648 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_3 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + 0.25 \left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix}$$

$$0.25 \left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix} = 0.0625 \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.078130 \\ -0.016560 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.078130 \\ -0.016560 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.034275 \\ 9.771698 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.05(1.034275) + 0.01(9.771698) + 1.2 \\ 0.03(1.034275) - 0.03(9.771698) \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.051714 + 0.097717 + 1.2 \\ 0.031028 - 0.293151 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.246003 \\ -0.262123 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_3 + h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right) = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{3}{32} \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix} + \frac{9}{32} \begin{bmatrix} 1.246003 \\ -0.262123 \end{bmatrix} \right]$$

$$\frac{3}{32}K_1 = \begin{bmatrix} 0.117194 \\ -0.024840 \end{bmatrix}$$

$$\frac{9}{32}K_2 = \begin{bmatrix} 0.350438 \\ -0.073722 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 = \begin{bmatrix} 0.467632 \\ -0.098562 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.467632 \\ -0.098562 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.116908 \\ -0.024641 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right) = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.116908 \\ -0.024641 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.073053 \\ 9.763618 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.05(1.073053) + 0.01(9.763618) + 1.2 \\ 0.03(1.073053) - 0.03(9.763618) \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.053653 + 0.097636 + 1.2 \\ 0.032192 - 0.292909 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.243984 \\ -0.260717 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_3 + h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{1932}{2197} \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix} - \frac{7200}{2197} \begin{bmatrix} 1.246003 \\ -0.262123 \end{bmatrix} + \frac{7296}{2197} \begin{bmatrix} 1.243984 \\ -0.260717 \end{bmatrix} \right]$$

$$\frac{1932}{2197}K_1 = \begin{bmatrix} 1.099470 \\ -0.233044 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{7200}{2197}K_2 = \begin{bmatrix} -4.083910 \\ 0.858943 \end{bmatrix}$$

$$\frac{7296}{2197}K_3 = \begin{bmatrix} 4.130469 \\ -0.865151 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 = \begin{bmatrix} 1.146830 \\ -0.239789 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 1.146830 \\ -0.239789 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.286708 \\ -0.059947 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right) = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.286708 \\ -0.059947 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.242902 \\ 9.728311 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.05(1.242902) + 0.01(9.728311) + 1.2 \\ 0.03(1.242902) - 0.03(9.728311) \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.062145 + 0.097283 + 1.2 \\ 0.037287 - 0.291849 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.235138 \\ -0.254562 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_5

$$X_3 + h \left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{439}{216} \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1.246003 \\ -0.262123 \end{bmatrix} + \frac{3680}{513} \begin{bmatrix} 1.243984 \\ -0.260717 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. - \frac{845}{4104} \begin{bmatrix} 1.235138 \\ -0.254562 \end{bmatrix} \right]$$

$$\frac{439}{216}K_1 = \begin{bmatrix} 2.540372 \\ -0.538334 \end{bmatrix}$$

$$-8K_2 = \begin{bmatrix} -9.968026 \\ 2.096982 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3680}{513}K_3 = \begin{bmatrix} 8.922978 \\ -1.870236 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{845}{4104}K_4 = \begin{bmatrix} -0.254276 \\ 0.052414 \end{bmatrix}$$

$$\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 = \begin{bmatrix} 1.242028 \\ -0.259368 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 1.242028 \\ -0.259368 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.310507 \\ -0.064842 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + h \left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 \right) = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.310507 \\ -0.064842 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.266652 \\ 9.723416 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.05(1.266652) + 0.01(9.723416) + 1.2 \\ 0.03(1.266652) - 0.03(9.723416) \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.063333 + 0.097234 + 1.2 \\ 0.038000 - 0.291702 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.233902 \\ -0.253703 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_6

$$X_3 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + 0.25 \left[-\frac{8}{27} \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.246003 \\ -0.262123 \end{bmatrix} - \frac{3544}{2565} \begin{bmatrix} 1.243984 \\ -0.260717 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \frac{1859}{4104} \begin{bmatrix} 1.235138 \\ -0.254562 \end{bmatrix} - \frac{11}{40} \begin{bmatrix} 1.233902 \\ -0.253703 \end{bmatrix} \right]$$

$$-\frac{8}{27}K_1 = \begin{bmatrix} -0.370393 \\ 0.078508 \end{bmatrix}$$

$$2K_2 = \begin{bmatrix} 2.492006 \\ -0.524245 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{3544}{2565}K_3 = \begin{bmatrix} -1.719323 \\ 0.360338 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1859}{4104}K_4 = \begin{bmatrix} 0.559735 \\ -0.115322 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{11}{40}K_5 = \begin{bmatrix} -0.339323 \\ 0.069768 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 = \begin{bmatrix} 0.622992 \\ -0.130979 \end{bmatrix}$$

$$h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.622992 \\ -0.130979 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.155748 \\ -0.032745 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.155748 \\ -0.032745 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.111893 \\ 9.755495 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -0.05(1.111893) + 0.01(9.755495) + 1.2 \\ 0.03(1.111893) - 0.03(9.755495) \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -0.055595 + 0.097555 + 1.2 \\ 0.033357 - 0.292665 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.241960 \\ -0.259308 \end{bmatrix}$$

Actualización para obtener X_4

$$X_4 = X_3 + h \left(\frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6 \right)$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} \frac{16}{135} \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix} + \frac{6656}{12825} \begin{bmatrix} 1.243984 \\ -0.260717 \end{bmatrix} + \frac{28561}{56430} \begin{bmatrix} 1.235138 \\ -0.254562 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{9}{50} \begin{bmatrix} 1.233902 \\ -0.253703 \end{bmatrix} + \frac{2}{55} \begin{bmatrix} 1.241960 \\ -0.259308 \end{bmatrix} \Bigg]$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 1.266637 \\ 9.723429 \end{bmatrix}$$

Tabla 2

Resultados obtenidos mediante el método de Runge-Kutta de orden 5 (RK5)

n	t	$c_A(t)$	$c_B(t)$
0	0.00	0.000000	10.000000
1	0.25	0.322885	9.926491
2	0.50	0.641580	9.855928
3	0.75	0.956145	9.788258
4	1.00	1.266637	9.723429

3.2.2 Solución de la aplicación 1 mediante RK4

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} c'_A = -0.05c_A + 0.01c_B + 1.2, \\ c'_B = 0.03c_A - 0.03c_B. \end{cases}$$

Se define:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_A \\ c_B \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$X' = f(t, X)$$

donde:

$$f(t, X) = \begin{bmatrix} -0.05X_1 + 0.01X_2 + 1.2 \\ 0.03X_1 - 0.03X_2 \end{bmatrix}$$

La condición inicial es:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Se considera el intervalo: $[0,1]$ y el número de subintervalos: $N=4$

Entonces, el tamaño de paso es: $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$

Además:

$$\frac{h}{2} = 0.125$$

$$\frac{h}{6} = \frac{0.25}{6} = 0.0416666667$$

El método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas está dado por:

$$K_1 = f(t_n, X_n)$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, X_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, X_n + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = f(t_n + h, X_n + hK_3)$$

Luego:

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Primera iteración: cálculo de X_1

Para la primera iteración: $t_0 = 0$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1

$$K_1 = f(t_0, X_0)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.05(0) + 0.01(10) + 1.2 \\ 0.03(0) - 0.03(10) \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.300000 \\ -0.300000 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

Primero se calcula: $X_0 + \frac{h}{2}K_1$

$$X_0 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 1.300000 \\ -0.300000 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.162500 \\ -0.037500 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.162500 \\ 9.962500 \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$K_2 = f \left(0.125, \begin{bmatrix} 0.162500 \\ 9.962500 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.05(0.162500) + 0.01(9.962500) + 1.2 \\ 0.03(0.162500) - 0.03(9.962500) \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.291500 \\ -0.294000 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

Primero se calcula: $X_0 + \frac{h}{2}K_2$

$$X_0 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 1.291500 \\ -0.294000 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.161438 \\ -0.036750 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.161438 \\ 9.963250 \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$K_3 = f \left(0.125, \begin{bmatrix} 0.161438 \\ 9.963250 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.05(0.161438) + 0.01(9.963250) + 1.2 \\ 0.03(0.161438) - 0.03(9.963250) \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1.291561 \\ -0.294054 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

Primero se calcula: $X_0 + hK_3$

$$X_0 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} 1.291561 \\ -0.294054 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.322890 \\ -0.073514 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.322890 \\ 9.926486 \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$K_4 = f \left(0.25, \begin{bmatrix} 0.322890 \\ 9.926486 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.05(0.322890) + 0.01(9.926486) + 1.2 \\ 0.03(0.322890) - 0.03(9.926486) \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1.283120 \\ -0.288108 \end{bmatrix}$$

Cálculo de X_1

$$X_1 = X_0 + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 1.300000 \\ -0.300000 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.291500 \\ -0.294000 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.291561 \\ -0.294054 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.283120 \\ -0.288108 \end{bmatrix}$$

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 7.749242 \\ -1.764217 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + 0.041666667 \begin{bmatrix} 7.749242 \\ -1.764217 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$X(0.25) = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración: cálculo de X_2

Ahora: $t_1 = 0.25$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1 $K_1 = f(t_1, X_1)$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.05(0.322885) + 0.01(9.926491) + 1.2 \\ 0.03(0.322885) - 0.03(9.926491) \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.283121 \\ -0.288108 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_1 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 1.283121 \\ -0.288108 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.160390 \\ -0.036014 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.483275 \\ 9.890477 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = f\left(0.375, \begin{bmatrix} 0.483275 \\ 9.890477 \end{bmatrix}\right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.05(0.483275) + 0.01(9.890477) + 1.2 \\ 0.03(0.483275) - 0.03(9.890477) \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.274741 \\ -0.282216 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_1 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 1.274741 \\ -0.282216 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.159343 \\ -0.035277 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.482228 \\ 9.891214 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = f \left(0.375, \begin{bmatrix} 0.482228 \\ 9.891214 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.05(0.482228) + 0.01(9.891214) + 1.2 \\ 0.03(0.482228) - 0.03(9.891214) \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1.274801 \\ -0.282270 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_1 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} 1.274801 \\ -0.282270 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.318700 \\ -0.070567 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.641585 \\ 9.855924 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = f \left(0.50, \begin{bmatrix} 0.641585 \\ 9.855924 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.05(0.641585) + 0.01(9.855924) + 1.2 \\ 0.03(0.641585) - 0.03(9.855924) \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix}$$

Cálculo de X_2

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 1.283121 \\ -0.288108 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.274741 \\ -0.282216 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.274801 \\ -0.282270 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix}$$

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 7.648684 \\ -1.693510 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = X_1 + \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 7.648684 \\ -1.693510 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.322885 \\ 9.926491 \end{bmatrix} + 0.0416666667 \begin{bmatrix} 7.648684 \\ -1.693510 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$X(0.50) = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix}$$

Tercera iteración: cálculo de X_3

Ahora: $t_2 = 0.50$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1 $K_1 = f(t_2, X_2)$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.05(0.641580) + 0.01(9.855928) + 1.2 \\ 0.03(0.641580) - 0.03(9.855928) \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_2 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.158310 \\ -0.034554 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.799890 \\ 9.821374 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = f\left(0.625, \begin{bmatrix} 0.799890 \\ 9.821374 \end{bmatrix}\right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.05(0.799890) + 0.01(9.821374) + 1.2 \\ 0.03(0.799890) - 0.03(9.821374) \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.258219 \\ -0.270645 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_2 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 1.258219 \\ -0.270645 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.157277 \\ -0.033831 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.798858 \\ 9.822098 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = f \left(0.625, \begin{bmatrix} 0.798858 \\ 9.822098 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.05(0.798858) + 0.01(9.822098) + 1.2 \\ 0.03(0.798858) - 0.03(9.822098) \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1.258278 \\ -0.270697 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_2 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} 1.258278 \\ -0.270697 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.314570 \\ -0.067674 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.956150 \\ 9.788254 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = f \left(0.75, \begin{bmatrix} 0.956150 \\ 9.788254 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.05(0.956150) + 0.01(9.788254) + 1.2 \\ 0.03(0.956150) - 0.03(9.788254) \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix}$$

Cálculo de X_3

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 1.266480 \\ -0.276430 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.258219 \\ -0.270645 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.258278 \\ -0.270697 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix}$$

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 7.549550 \\ -1.624077 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = X_2 + \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 7.549550 \\ -1.624077 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.641580 \\ 9.855928 \end{bmatrix} + 0.0416666667 \begin{bmatrix} 7.549550 \\ -1.624077 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$X(0.75) = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix}$$

Cuarta iteración: cálculo de X_4

Ahora: $t_3 = 0.75$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1

$$K_1 = f(t_3, X_3)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.05(0.956145) + 0.01(9.788258) + 1.2 \\ 0.03(0.956145) - 0.03(9.788258) \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_3 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.156259 \\ -0.033120 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 1.112404 \\ 9.755138 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = f \left(0.875, \begin{bmatrix} 1.112404 \\ 9.755138 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.05(1.112404) + 0.01(9.755138) + 1.2 \\ 0.03(1.112404) - 0.03(9.755138) \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.241931 \\ -0.259282 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_3 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 1.241931 \\ -0.259282 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.155241 \\ -0.032410 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 1.111386 \\ 9.755848 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = f \left(0.875, \begin{bmatrix} 1.111386 \\ 9.755848 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.05(1.111386) + 0.01(9.755848) + 1.2 \\ 0.03(1.111386) - 0.03(9.755848) \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1.241989 \\ -0.259334 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_3 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} 1.241989 \\ -0.259334 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.310497 \\ -0.064833 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + hK_3 = \begin{bmatrix} 1.266642 \\ 9.723425 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = f \left(1.00, \begin{bmatrix} 1.266642 \\ 9.723425 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.05(1.266642) + 0.01(9.723425) + 1.2 \\ 0.03(1.266642) - 0.03(9.723425) \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1.233902 \\ -0.253703 \end{bmatrix}$$

Cálculo de X_4

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 1.250075 \\ -0.264963 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.241931 \\ -0.259282 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.241989 \\ -0.259334 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.233902 \\ -0.253703 \end{bmatrix}$$

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 7.451818 \\ -1.555899 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = X_3 + \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 7.451818 \\ -1.555899 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0.956145 \\ 9.788258 \end{bmatrix} + 0.0416666667 \begin{bmatrix} 7.451818 \\ -1.555899 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 1.266637 \\ 9.723429 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$X(1) = \begin{bmatrix} 1.266637 \\ 9.723429 \end{bmatrix}$$

Tabla resumen de resultados

Tabla 3

Solución de aplicación 1 aproximada mediante el método RK4 con $N = 4$

Iteración	t_n	$c_A(t_n)$	$c_B(t_n)$
0	0.00	0.000000	10.000000
1	0.25	0.322885	9.926491
2	0.50	0.641580	9.855928
3	0.75	0.956145	9.788258
4	1.00	1.266637	9.723429

Después de aplicar el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $N = 4$, se obtuvo:

$$c_A(1) \approx 1.266637$$

$$c_B(1) \approx 9.723429$$

Por tanto:

$$X(1) \approx \begin{bmatrix} 1.266637 \\ 9.723429 \end{bmatrix}$$

La concentración en cada tanque en el instante de 1min es:

Tabla 4

Comparación de resultados entre la solución analítica, RK4 y RK5 para 1 minuto

n	t	Solución Analítica		RK4		RK5	
		$C_A(t)$	$C_B(t)$	$C_A(t)$	$C_B(t)$	$C_A(t)$	$C_B(t)$
0	0.00	0.000000	10.000000	0.000000	10.000000	0.000000	10.000000
1	0.25	0.322885	9.926491	0.322884	9.926490	0.322885	9.926491
2	0.50	0.641580	9.855280	0.641581	9.855290	0.641580	9.855280
3	0.75	0.956145	9.788258	0.956144	9.788259	0.956145	9.788258
4	1.00	1.266637	9.723429	1.266638	9.723428	1.266637	9.723429

De acuerdo con la Tabla (4), se observa la comparación entre la solución analítica, el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y el método de Runge-Kutta de quinto orden (RK5), aplicados al sistema de dos tanques conectados. En este problema, el tanque A inicia solamente con agua, mientras que el tanque B contiene inicialmente 1 kg de sal disuelta. A partir del instante inicial, ingresa al tanque A una disolución de agua con sal, por lo que la cantidad de sal en ambos tanques cambia con respecto al tiempo.

En el instante inicial $t = 0$, la concentración en el tanque A es $C_A(0) = 0$, porque no contiene sal al inicio. En cambio, el tanque B presenta $C_B(0) = 10$, lo cual representa la concentración inicial de sal en dicho depósito. A medida que transcurre el tiempo, se aprecia que la concentración en el tanque A aumenta progresivamente. Esto ocurre porque la solución salina que ingresa al sistema llega primero al tanque A , haciendo que su concentración pase de 0,000000 a 1,266637 en el intervalo de 0 a 1 minuto.

Por otro lado, la concentración en el tanque B disminuye ligeramente, pasando de 10,000000 a 9,723429 al finalizar el primer minuto. Este comportamiento se debe a que la mezcla circula entre los tanques y también sale hacia el exterior, generando una redistribución de la sal dentro del sistema. Aunque el tanque B inicia con mayor concentración, parte de esa sal se va mezclando con el contenido proveniente del tanque A y con los flujos de salida.

También se observa que los valores obtenidos mediante RK4 y RK5 son muy cercanos

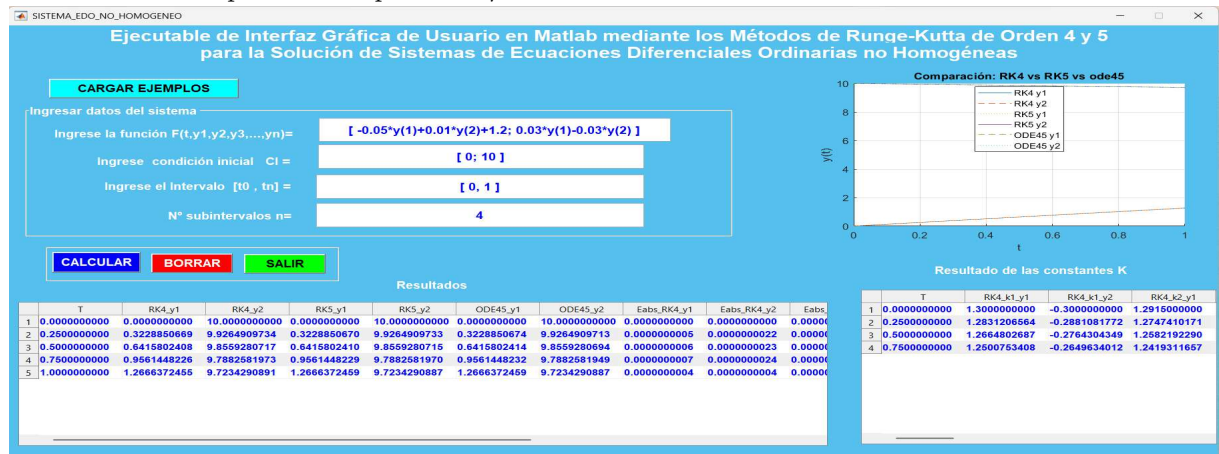
a la solución analítica. En todos los tiempos evaluados, las diferencias aparecen recién en las últimas cifras decimales. Por ejemplo, para $t = 1,00$, la solución analítica da $C_A(t) = 1,266637$ y $C_B(t) = 9,723429$, mientras que RK4 obtiene $C_A(t) = 1,266638$ y $C_B(t) = 9,723428$, y RK5 reproduce los valores $C_A(t) = 1,266637$ y $C_B(t) = 9,723429$. Esto evidencia que ambos métodos numéricos aproximan correctamente el comportamiento del sistema.

En consecuencia, la tabla permite afirmar que el método RK5 presenta una aproximación prácticamente igual a la solución analítica, mientras que RK4 también ofrece resultados muy precisos, con errores mínimos. Por ello, ambos métodos son adecuados para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que modela la mezcla de sal en los dos tanques, siendo RK5 ligeramente más preciso en los valores mostrados.

Solución con el ejecutable

Figura 23

Resultado de la aplicación 1 para $N=4$.



La Figura (23) muestra la interfaz gráfica desarrollada en MATLAB para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas mediante los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y Runge-Kutta de orden 5. En la parte superior se observa el título del aplicativo, el cual permite identificar claramente el propósito de la herramienta computacional: obtener soluciones numéricas para sistemas diferenciales no homogéneos y comparar los

resultados con el solucionador interno ode45.

En el panel izquierdo se ingresan los datos del problema: la función vectorial $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$, las condiciones iniciales, el intervalo de solución y el número de subintervalos. En este caso, el sistema está formado por dos ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas, con condición inicial $[0; 10]$, intervalo $[0, 1]$ y $n = 4$ subintervalos. Esto significa que el método calcula la solución en los puntos $t = 0, t = 0,25, t = 0,50, t = 0,75$ y $t = 1$.

En la parte inferior izquierda se presenta la tabla de resultados, donde se comparan los valores obtenidos por RK4, RK5 y ode45 para cada variable del sistema. Se observa que los valores de RK4 y RK5 son prácticamente iguales a los resultados generados por ode45, lo cual evidencia una buena aproximación numérica. Además, los errores absolutos mostrados en la tabla son muy pequeños, cercanos a cero, indicando que ambos métodos presentan alta precisión para el problema evaluado.

En la parte superior derecha se muestra la gráfica comparativa de las soluciones. Las curvas correspondientes a RK4, RK5 y ode45 prácticamente se superponen, lo que confirma visualmente que los métodos implementados en la interfaz producen resultados consistentes. La variable $y_1(t)$ presenta un crecimiento progresivo desde 0 hasta aproximadamente 1.2666, mientras que la variable $y_2(t)$ disminuye desde 10 hasta aproximadamente 9.7234. Este comportamiento refleja la dinámica del sistema diferencial planteado.

Finalmente, en la parte inferior derecha se presenta la tabla de las constantes internas K , correspondientes a los cálculos intermedios del método de Runge-Kutta. Esta información permite verificar el desarrollo numérico paso a paso y fortalece la transparencia del procedimiento computacional. En conjunto, la figura (23) demuestra que la interfaz gráfica cumple adecuadamente con el ingreso de datos, el cálculo numérico, la comparación de métodos, la visualización gráfica y la presentación ordenada de resultados, convirtiéndose en una herramienta útil para el aprendizaje y análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas.

3.3 Aplicación 2

Chapoñan (2024).

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales usando el método de Runge-Kutta de orden 5 con $N = 4$.

$$y_1' = -3y_1 + 0y_2 + 2y_3 + e^t$$

$$y_2' = y_1 - y_2 + 0y_3 + e^t$$

$$y_3' = -2y_1 - y_2 + 0y_3 + e^t$$

Condiciones iniciales

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$h = \frac{1 - 0}{4} = 0.25$$

Solución

3.3.1 Solución de la aplicación 2 mediante RK5

Se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales y haciendo el cambio de variable:

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 2x_3 + e^t, \\ x_2' = x_1 - x_2 + e^t, \\ x_3' = -2x_1 - x_2 + e^t. \end{cases}$$

La función vectorial es:

$$f(t, X) = \begin{bmatrix} -3x_1 + 2x_3 + e^t \\ x_1 - x_2 + e^t \\ -2x_1 - x_2 + e^t \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales son:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0$$

Por tanto:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como:

$$0 \leq t \leq 1, \quad N = 4$$

entonces:

$$h = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

Fórmulas del método Runge-Kutta de orden 5.

$$K_1 = f(t_n, X_n)$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{1}{4}h, X_n + h\frac{1}{4}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{3}{8}h, X_n + h\left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2\right)\right)$$

$$K_4 = f\left(t_n + \frac{12}{13}h, X_n + h\left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3\right)\right)$$

$$K_5 = f\left(t_n + h, X_n + h\left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4\right)\right)$$

$$K_6 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, X_n + h\left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5\right)\right)$$

$$X_{n+1} = X_n + h\left(\frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6\right)$$

Primera iteración: $t_1 = 0.25$

$$t_0 = 0, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1

$$K_1 = f(t_0, X_0)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3(0) + 2(0) + e^0 \\ 0 - 0 + e^0 \\ -2(0) - 0 + e^0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_0 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.25 \left(\frac{1}{4} \right) \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$$

$$0.25 \left(\frac{1}{4} \right) = 0.062500$$

$$X_0 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.062500 \\ 0.062500 \\ 0.062500 \end{bmatrix}$$

$$t_0 + \frac{1}{4}h = 0 + \frac{1}{4}(0.25) = 0.062500$$

$$K_2 = f \left(0.062500, \begin{bmatrix} 0.062500 \\ 0.062500 \\ 0.062500 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -3(0.062500) + 2(0.062500) + e^{0.062500} \\ 0.062500 - 0.062500 + e^{0.062500} \\ -2(0.062500) - 0.062500 + e^{0.062500} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.001994 \\ 1.064494 \\ 0.876994 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_0 + h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{3}{32} \\ \frac{3}{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \end{bmatrix} + \frac{9}{32} \begin{bmatrix} 1.001994 \\ 1.064494 \\ 0.876994 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{32}K_1 = \begin{bmatrix} 0.093750 \\ 0.093750 \\ 0.093750 \end{bmatrix}$$

$$\frac{9}{32}K_2 = \begin{bmatrix} 0.281811 \\ 0.299389 \\ 0.246655 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 = \begin{bmatrix} 0.375561 \\ 0.393139 \\ 0.340405 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.375561 \\ 0.393139 \\ 0.340405 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.093890 \\ 0.098285 \\ 0.085101 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right) = \begin{bmatrix} 0.093890 \\ 0.098285 \\ 0.085101 \end{bmatrix}$$

$$t_0 + \frac{3}{8}h = 0 + \frac{3}{8}(0.25) = 0.093750$$

$$K_3 = f \left(0.093750, \begin{bmatrix} 0.093890 \\ 0.098285 \\ 0.085101 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -3(0.093890) + 2(0.085101) + e^{0.093750} \\ 0.093890 - 0.098285 + e^{0.093750} \\ -2(0.093890) - 0.098285 + e^{0.093750} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.986817 \\ 1.093891 \\ 0.812220 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_0 + h \left(\frac{1932}{2197} K_1 - \frac{7200}{2197} K_2 + \frac{7296}{2197} K_3 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{1932}{2197} \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \end{bmatrix} - \frac{7200}{2197} \begin{bmatrix} 1.001994 \\ 1.064494 \\ 0.876994 \end{bmatrix} + \frac{7296}{2197} \begin{bmatrix} 0.986817 \\ 1.093891 \\ 0.812220 \end{bmatrix} \right]$$

$$X_0 + h \left(\frac{1932}{2197} K_1 - \frac{7200}{2197} K_2 + \frac{7296}{2197} K_3 \right) = \begin{bmatrix} 0.218190 \\ 0.255879 \\ 0.175648 \end{bmatrix}$$

$$t_0 + \frac{12}{13}h = 0 + \frac{12}{13}(0.25) = 0.230769$$

$$K_4 = f \left(0.230769, \begin{bmatrix} 0.218190 \\ 0.255879 \\ 0.175648 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -3(0.218190) + 2(0.175648) + e^{0.230769} \\ 0.218190 - 0.255879 + e^{0.230769} \\ -2(0.218190) - 0.255879 + e^{0.230769} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0.956294 \\ 1.221880 \\ 0.567309 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_5

$$X_0 + h \left(\frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{439}{216} \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1.001994 \\ 1.064494 \\ 0.876994 \end{bmatrix} + \frac{3680}{513} \begin{bmatrix} 0.986817 \\ 1.093891 \\ 0.812220 \end{bmatrix} - \frac{845}{4104} \begin{bmatrix} 0.956294 \\ 1.221880 \\ 0.567309 \end{bmatrix} \right]$$

$$X_0 + h \left(\frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4 \right) = \begin{bmatrix} 0.224618 \\ 0.277971 \\ 0.181524 \end{bmatrix}$$

$$t_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$$

$$K_5 = f \left(0.25, \begin{bmatrix} 0.224618 \\ 0.277971 \\ 0.181524 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -3(0.224618) + 2(0.181524) + e^{0.25} \\ 0.224618 - 0.277971 + e^{0.25} \\ -2(0.224618) - 0.277971 + e^{0.25} \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 0.973218 \\ 1.230673 \\ 0.556818 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_6

$$X_0 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.25 \left[-\frac{8}{27} \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1.001994 \\ 1.064494 \\ 0.876994 \end{bmatrix} - \frac{3544}{2565} \begin{bmatrix} 0.986817 \\ 1.093891 \\ 0.812220 \end{bmatrix} + \frac{1859}{4104} \begin{bmatrix} 0.956294 \\ 1.221880 \\ 0.567309 \end{bmatrix} - \frac{11}{40} \begin{bmatrix} 0.973218 \\ 1.230673 \\ 0.556818 \end{bmatrix} \right]$$

$$X_0 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) = \begin{bmatrix} 0.127443 \\ 0.134083 \\ 0.109830 \end{bmatrix}$$

$$t_0 + \frac{1}{2}h = 0 + \frac{1}{2}(0.25) = 0.125000$$

$$K_6 = f \left(0.125000, \begin{bmatrix} 0.127443 \\ 0.134083 \\ 0.109830 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -3(0.127443) + 2(0.109830) + e^{0.125000} \\ 0.127443 - 0.134083 + e^{0.125000} \\ -2(0.127443) - 0.134083 + e^{0.125000} \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 0.970479 \\ 1.126508 \\ 0.744180 \end{bmatrix}$$

Actualización para obtener X_1

$$X_1 = X_0 + h \left(\frac{16}{135} K_1 + \frac{6656}{12825} K_3 + \frac{28561}{56430} K_4 - \frac{9}{50} K_5 + \frac{2}{55} K_6 \right)$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.25 \frac{16}{135} \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 1.000000 \\ 1.000000 \end{bmatrix} + \frac{6656}{12825} \begin{bmatrix} 0.986817 \\ 1.093891 \\ 0.812220 \end{bmatrix} + \frac{28561}{56430} \begin{bmatrix} 0.956294 \\ 1.221880 \\ 0.567309 \end{bmatrix} - \frac{9}{50} \begin{bmatrix} 0.973218 \\ 1.230673 \\ 0.556818 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{2}{55} \begin{bmatrix} 0.970479 \\ 1.126508 \\ 0.744180 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.243696 \\ 0.281027 \\ 0.188504 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración: $t_2 = 0.50$

$$t_1 = 0.25, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0.243696 \\ 0.281027 \\ 0.188504 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1

$$K_1 = f(t_1, X_1)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3(0.243696) + 2(0.188504) + e^{0.25} \\ 0.243696 - 0.281027 + e^{0.25} \\ -2(0.243696) - 0.281027 + e^{0.25} \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.929945 \\ 1.246695 \\ 0.515606 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_1 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.243696 \\ 0.281027 \\ 0.188504 \end{bmatrix} + 0.25 \left(\frac{1}{4} \right) \begin{bmatrix} 0.929945 \\ 1.246695 \\ 0.515606 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.301818 \\ 0.358945 \\ 0.220729 \end{bmatrix}$$

$$t_1 + \frac{1}{4}h = 0.25 + 0.062500 = 0.312500$$

$$K_2 = f \left(0.312500, \begin{bmatrix} 0.301818 \\ 0.358945 \\ 0.220729 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -3(0.301818) + 2(0.220729) + e^{0.312500} \\ 0.301818 - 0.358945 + e^{0.312500} \\ -2(0.301818) - 0.358945 + e^{0.312500} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.902844 \\ 1.309710 \\ 0.404257 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_1 + h \left(\frac{3}{32} K_1 + \frac{9}{32} K_2 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.243696 \\ 0.281027 \\ 0.188504 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{3}{32} \begin{bmatrix} 0.929945 \\ 1.246695 \\ 0.515606 \end{bmatrix} + \frac{9}{32} \begin{bmatrix} 0.902844 \\ 1.309710 \\ 0.404257 \end{bmatrix} \right]$$

$$X_1 + h \left(\frac{3}{32} K_1 + \frac{9}{32} K_2 \right) = \begin{bmatrix} 0.328973 \\ 0.402335 \\ 0.229013 \end{bmatrix}$$

$$t_1 + \frac{3}{8}h = 0.25 + 0.093750 = 0.343750$$

$$K_3 = f \left(0.343750, \begin{bmatrix} 0.328973 \\ 0.402335 \\ 0.229013 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -3(0.328973) + 2(0.229013) + e^{0.343750} \\ 0.328973 - 0.402335 + e^{0.343750} \\ -2(0.328973) - 0.402335 + e^{0.343750} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.881333 \\ 1.336864 \\ 0.349945 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_1 + h \left(\frac{1932}{2197} K_1 - \frac{7200}{2197} K_2 + \frac{7296}{2197} K_3 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.243696 \\ 0.281027 \\ 0.188504 \end{bmatrix} + 0.25 \frac{1932}{2197} \begin{bmatrix} 0.929945 \\ 1.246695 \\ 0.515606 \end{bmatrix} - \frac{7200}{2197} \begin{bmatrix} 0.902844 \\ 1.309710 \\ 0.404257 \end{bmatrix} + \frac{7296}{2197} \begin{bmatrix} 0.881333 \\ 1.336864 \\ 0.349945 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + h \left(\frac{1932}{2197} K_1 - \frac{7200}{2197} K_2 + \frac{7296}{2197} K_3 \right) = \begin{bmatrix} 0.440144 \\ 0.591957 \\ 0.261182 \end{bmatrix}$$

$$t_1 + \frac{12}{13}h = 0.25 + \frac{12}{13}(0.25) = 0.480769$$

$$K_4 = f \left(0.480769, \begin{bmatrix} 0.440144 \\ 0.591957 \\ 0.261182 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -3(0.440144) + 2(0.261182) + e^{0.480769} \\ 0.440144 - 0.591957 + e^{0.480769} \\ -2(0.440144) - 0.591957 + e^{0.480769} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0.819250 \\ 1.465505 \\ 0.145072 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_5

$$X_1 + h \left(\frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.243696 \\ 0.281027 \\ 0.188504 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{439}{216} \begin{bmatrix} 0.929945 \\ 1.246695 \\ 0.515606 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 0.902844 \\ 1.309710 \\ 0.404257 \end{bmatrix} + \frac{3680}{513} \begin{bmatrix} 0.881333 \\ 1.336864 \\ 0.349945 \end{bmatrix} - \frac{845}{4104} \begin{bmatrix} 0.819250 \\ 1.465505 \\ 0.145072 \end{bmatrix} \right]$$

$$X_1 + h \left(\frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4 \right) = \begin{bmatrix} 0.448904 \\ 0.617113 \\ 0.262084 \end{bmatrix}$$

$$t_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.50$$

$$K_5 = f \left(0.50, \begin{bmatrix} 0.448904 \\ 0.617113 \\ 0.262084 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -3(0.448904) + 2(0.262084) + e^{0.50} \\ 0.448904 - 0.617113 + e^{0.50} \\ -2(0.448904) - 0.617113 + e^{0.50} \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 0.826178 \\ 1.480512 \\ 0.133801 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_6

$$X_1 + h \left(-\frac{8}{27} K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565} K_3 + \frac{1859}{4104} K_4 - \frac{11}{40} K_5 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.243696 \\ 0.281027 \\ 0.188504 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} -\frac{8}{27} \\ 1.246695 \\ 0.515606 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0.929945 \\ 1.309710 \\ 0.404257 \end{bmatrix} - \frac{3544}{2565} \begin{bmatrix} 0.881333 \\ 1.336864 \\ 0.349945 \end{bmatrix} + \frac{1859}{4104} \begin{bmatrix} 0.819250 \\ 1.465505 \\ 0.145072 \end{bmatrix} - \frac{11}{40} \begin{bmatrix} 0.826178 \\ 1.480512 \\ 0.133801 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) = \begin{bmatrix} 0.357779 \\ 0.445929 \\ 0.238792 \end{bmatrix}$$

$$t_1 + \frac{1}{2}h = 0.25 + 0.125 = 0.375000$$

$$K_6 = f \left(0.375000, \begin{bmatrix} 0.357779 \\ 0.445929 \\ 0.238792 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -3(0.357779) + 2(0.238792) + e^{0.375000} \\ 0.357779 - 0.445929 + e^{0.375000} \\ -2(0.357779) - 0.445929 + e^{0.375000} \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 0.859239 \\ 1.366841 \\ 0.293505 \end{bmatrix}$$

Actualización para obtener X_2

$$X_2 = X_1 + h \left(\frac{16}{135} K_1 + \frac{6656}{12825} K_3 + \frac{28561}{56430} K_4 - \frac{9}{50} K_5 + \frac{2}{55} K_6 \right)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix}$$

Tercera iteración: $t_3 = 0.75$

$$t_2 = 0.50, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1

$$K_1 = f(t_2, X_2)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3(0.459895) + 2(0.264189) + e^{0.50} \\ 0.459895 - 0.622657 + e^{0.50} \\ -2(0.459895) - 0.622657 + e^{0.50} \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.379685 + 0.528378 + 1.648721 \\ 0.459895 - 0.622657 + 1.648721 \\ -0.919790 - 0.622657 + 1.648721 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.797413 \\ 1.485960 \\ 0.106274 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_2 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + 0.25 \left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 0.797413 \\ 1.485960 \\ 0.106274 \end{bmatrix}$$

$$0.25 \left(\frac{1}{4}\right) = 0.062500$$

$$0.062500 \begin{bmatrix} 0.797413 \\ 1.485960 \\ 0.106274 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.049838 \\ 0.092872 \\ 0.006642 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.049838 \\ 0.092872 \\ 0.006642 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.509734 \\ 0.715529 \\ 0.270831 \end{bmatrix}$$

$$t_2 + \frac{1}{4}h = 0.50 + \frac{1}{4}(0.25) = 0.562500$$

$$K_2 = f \left(0.562500, \begin{bmatrix} 0.509734 \\ 0.715529 \\ 0.270831 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -3(0.509734) + 2(0.270831) + e^{0.562500} \\ 0.509734 - 0.715529 + e^{0.562500} \\ -2(0.509734) - 0.715529 + e^{0.562500} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.529202 + 0.541662 + 1.755055 \\ 0.509734 - 0.715529 + 1.755055 \\ -1.019468 - 0.715529 + 1.755055 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.767516 \\ 1.549259 \\ 0.020058 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_2 + h \left(\frac{3}{32} K_1 + \frac{9}{32} K_2 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{3}{32} \begin{bmatrix} 0.797413 \\ 1.485960 \\ 0.106274 \end{bmatrix} + \frac{9}{32} \begin{bmatrix} 0.767516 \\ 1.549259 \\ 0.020058 \end{bmatrix} \right]$$

$$\frac{3}{32} K_1 = \begin{bmatrix} 0.074758 \\ 0.139309 \\ 0.009963 \end{bmatrix}$$

$$\frac{9}{32} K_2 = \begin{bmatrix} 0.215864 \\ 0.435729 \\ 0.005641 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{32} K_1 + \frac{9}{32} K_2 = \begin{bmatrix} 0.290621 \\ 0.575038 \\ 0.015604 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{3}{32} K_1 + \frac{9}{32} K_2 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.290621 \\ 0.575038 \\ 0.015604 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.072655 \\ 0.143759 \\ 0.003901 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + h \left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2 \right) = \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.072655 \\ 0.143759 \\ 0.003901 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.532551 \\ 0.766416 \\ 0.268090 \end{bmatrix}$$

$$t_2 + \frac{3}{8}h = 0.50 + \frac{3}{8}(0.25) = 0.593750$$

$$K_3 = f \left(0.593750, \begin{bmatrix} 0.532551 \\ 0.766416 \\ 0.268090 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -3(0.532551) + 2(0.268090) + e^{0.593750} \\ 0.532551 - 0.766416 + e^{0.593750} \\ -2(0.532551) - 0.766416 + e^{0.593750} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -1.597652 + 0.536180 + 1.810766 \\ 0.532551 - 0.766416 + 1.810766 \\ -1.065101 - 0.766416 + 1.810766 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.749294 \\ 1.576901 \\ -0.020752 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_2 + h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} \frac{1932}{2197} \begin{bmatrix} 0.797413 \\ 1.485960 \\ 0.106274 \end{bmatrix} - \frac{7200}{2197} \begin{bmatrix} 0.767516 \\ 1.549259 \\ 0.020058 \end{bmatrix} + \frac{7296}{2197} \begin{bmatrix} 0.749294 \\ 1.576901 \\ -0.020752 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1932}{2197}K_1 = \begin{bmatrix} 0.701396 \\ 1.307033 \\ 0.093478 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{7200}{2197}K_2 = \begin{bmatrix} -2.515298 \\ -5.077626 \\ -0.065716 \end{bmatrix}$$

$$\frac{7296}{2197}K_3 = \begin{bmatrix} 2.488557 \\ 5.659481 \\ -0.068732 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 = \begin{bmatrix} 0.674255 \\ 1.888888 \\ -0.040970 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.674255 \\ 1.888888 \\ -0.040970 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168564 \\ 0.472222 \\ -0.010243 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right) = \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.168564 \\ 0.472222 \\ -0.010243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.628459 \\ 1.094879 \\ 0.253946 \end{bmatrix}$$

$$t_2 + \frac{12}{13}h = 0.50 + \frac{12}{13}(0.25) = 0.730769$$

$$K_4 = f \left(0.730769, \begin{bmatrix} 0.628459 \\ 0.989211 \\ 0.253891 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -3(0.628459) + 2(0.253891) + e^{0.730769} \\ 0.628459 - 0.989211 + e^{0.730769} \\ -2(0.628459) - 0.989211 + e^{0.730769} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -1.885378 + 0.507782 + 2.076677 \\ 0.628459 - 0.989211 + 2.076677 \\ -1.256918 - 0.989211 + 2.076677 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0.699082 \\ 1.715926 \\ -0.169452 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_5

$$X_2 + h \left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{439}{216} \begin{bmatrix} 0.797413 \\ 1.485960 \\ 0.106274 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 0.767516 \\ 1.549259 \\ 0.020058 \end{bmatrix} + \frac{3680}{513} \begin{bmatrix} 0.749294 \\ 1.576901 \\ -0.020752 \end{bmatrix} - \frac{845}{4104} \begin{bmatrix} 0.699082 \\ 1.715926 \\ -0.169452 \end{bmatrix} \right]$$

$$\frac{439}{216}K_1 = \begin{bmatrix} 1.620444 \\ 3.019226 \\ 0.215974 \end{bmatrix}$$

$$-8K_2 = \begin{bmatrix} -6.140127 \\ -12.394073 \\ -0.160464 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3680}{513}K_3 = \begin{bmatrix} 5.375048 \\ 11.311083 \\ -0.148882 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{845}{4104}K_4 = \begin{bmatrix} -0.143928 \\ -0.353322 \\ 0.034876 \end{bmatrix}$$

$$\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 = \begin{bmatrix} 0.711659 \\ 1.582714 \\ -0.058496 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.711659 \\ 1.582714 \\ -0.058496 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.177915 \\ 0.395679 \\ -0.014624 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + h \left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 \right) = \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.177915 \\ 0.395679 \\ -0.014624 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.637810 \\ 1.018335 \\ 0.249565 \end{bmatrix}$$

$$t_2 + h = 0.50 + 0.25 = 0.75$$

$$K_5 = f \left(0.75, \begin{bmatrix} 0.637810 \\ 1.018801 \\ 0.249578 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -3(0.637810) + 2(0.249578) + e^{0.75} \\ 0.637810 - 1.018801 + e^{0.75} \\ -2(0.637810) - 1.018801 + e^{0.75} \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -1.913430 + 0.499156 + 2.117000 \\ 0.637810 - 1.018801 + 2.117000 \\ -1.275620 - 1.018801 + 2.117000 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 0.702727 \\ 1.736008 \\ -0.177421 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_6

$$X_2 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + 0.25 \left[-\frac{8}{27} \begin{bmatrix} 0.797413 \\ 1.485960 \\ 0.106274 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0.767516 \\ 1.549259 \\ 0.020058 \end{bmatrix} - \frac{3544}{2565} \begin{bmatrix} 0.749294 \\ 1.576901 \\ -0.020752 \end{bmatrix} + \frac{1859}{4104} \begin{bmatrix} 0.699082 \\ 1.715926 \\ -0.169452 \end{bmatrix} - \frac{11}{40} \begin{bmatrix} 0.702727 \\ 1.736008 \\ -0.177421 \end{bmatrix} \right]$$

$$-\frac{8}{27}K_1 = \begin{bmatrix} -0.236271 \\ -0.440284 \\ -0.031489 \end{bmatrix}$$

$$2K_2 = \begin{bmatrix} 1.535032 \\ 3.098518 \\ 0.040116 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{3544}{2565}K_3 = \begin{bmatrix} -1.035562 \\ -2.179204 \\ 0.028680 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1859}{4104}K_4 = \begin{bmatrix} 0.316705 \\ 0.777342 \\ -0.076758 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{11}{40}K_5 = \begin{bmatrix} -0.193250 \\ -0.477402 \\ 0.048791 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 = \begin{bmatrix} 0.386894 \\ 0.778550 \\ 0.009340 \end{bmatrix}$$

$$h\left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5\right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.386894 \\ 0.778550 \\ 0.009340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.096724 \\ 0.194637 \\ 0.002335 \end{bmatrix}$$

$$X_2 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) = \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.096724 \\ 0.194637 \\ 0.002335 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.556619 \\ 0.817294 \\ 0.266524 \end{bmatrix}$$

$$t_2 + \frac{1}{2}h = 0.50 + 0.125 = 0.625000$$

$$K_6 = f \left(0.625000, \begin{bmatrix} 0.556619 \\ 0.817490 \\ 0.266522 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -3(0.556619) + 2(0.266522) + e^{0.625000} \\ 0.556619 - 0.817490 + e^{0.625000} \\ -2(0.556619) - 0.817490 + e^{0.625000} \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -1.669857 + 0.533044 + 1.868246 \\ 0.556619 - 0.817490 + 1.868246 \\ -1.113238 - 0.817490 + 1.868246 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 0.731434 \\ 1.607375 \\ -0.062482 \end{bmatrix}$$

Actualización para obtener X_3

$$X_3 = X_2 + h \left(\frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6 \right)$$

$$\begin{aligned}
X_3 = & \begin{bmatrix} 0.459895 \\ 0.622657 \\ 0.264189 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} \frac{16}{135} \begin{bmatrix} 0.797413 \\ 1.485960 \\ 0.106274 \end{bmatrix} + \frac{6656}{12825} \begin{bmatrix} 0.749294 \\ 1.576901 \\ -0.020752 \end{bmatrix} + \frac{28561}{56430} \begin{bmatrix} 0.699082 \\ 1.715926 \\ -0.169452 \end{bmatrix} \\ & - \frac{9}{50} \begin{bmatrix} 0.702727 \\ 1.736008 \\ -0.177421 \end{bmatrix} + \frac{2}{55} \begin{bmatrix} 0.731434 \\ 1.607375 \\ -0.062482 \end{bmatrix} \Bigg] \\ & X_3 = \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Cuarta iteración: $t_4 = 1.00$

$$t_3 = 0.75, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1

$$K_1 = f(t_3, X_3)$$

$$\begin{aligned}
K_1 = & \begin{bmatrix} -3(0.644224) + 2(0.250620) + e^{0.75} \\ 0.644224 - 1.024896 + e^{0.75} \\ -2(0.644224) - 1.024896 + e^{0.75} \end{bmatrix} \\ & K_1 = \begin{bmatrix} -1.932672 + 0.501240 + 2.117000 \\ 0.644224 - 1.024896 + 2.117000 \\ -1.288448 - 1.024896 + 2.117000 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.685568 \\ 1.736328 \\ -0.196344 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_3 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + 0.25 \left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 0.685568 \\ 1.736328 \\ -0.196344 \end{bmatrix}$$

$$0.25 \left(\frac{1}{4}\right) = 0.062500$$

$$0.062500 \begin{bmatrix} 0.685568 \\ 1.736328 \\ -0.196344 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.042848 \\ 0.108521 \\ -0.012272 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + h\frac{1}{4}K_1 = \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.042848 \\ 0.108521 \\ -0.012272 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.687072 \\ 1.133416 \\ 0.238349 \end{bmatrix}$$

$$t_3 + \frac{1}{4}h = 0.75 + 0.062500 = 0.812500$$

$$K_2 = f \left(0.812500, \begin{bmatrix} 0.687072 \\ 1.133416 \\ 0.238349 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -3(0.687072) + 2(0.238349) + e^{0.812500} \\ 0.687072 - 1.133416 + e^{0.812500} \\ -2(0.687072) - 1.133416 + e^{0.812500} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -2.061217 + 0.476697 + 2.253535 \\ 0.687072 - 1.133416 + 2.253535 \\ -1.374145 - 1.133416 + 2.253535 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.669015 \\ 1.807191 \\ -0.254026 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_3 + h \left(\frac{3}{32} K_1 + \frac{9}{32} K_2 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{3}{32} \begin{bmatrix} 0.685568 \\ 1.736328 \\ -0.196344 \end{bmatrix} + \frac{9}{32} \begin{bmatrix} 0.669015 \\ 1.807191 \\ -0.254026 \end{bmatrix} \right]$$

$$\frac{3}{32} K_1 = \begin{bmatrix} 0.064272 \\ 0.162781 \\ -0.018407 \end{bmatrix}$$

$$\frac{9}{32} K_2 = \begin{bmatrix} 0.188160 \\ 0.508272 \\ -0.071445 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{32} K_1 + \frac{9}{32} K_2 = \begin{bmatrix} 0.252432 \\ 0.671053 \\ -0.089852 \end{bmatrix}$$

$$h\left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2\right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.252432 \\ 0.671053 \\ -0.089852 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.063108 \\ 0.167763 \\ -0.022463 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + h\left(\frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2\right) = \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.063108 \\ 0.167763 \\ -0.022463 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707332 \\ 1.192659 \\ 0.228157 \end{bmatrix}$$

$$t_3 + \frac{3}{8}h = 0.75 + 0.093750 = 0.843750$$

$$K_3 = f\left(0.843750, \begin{bmatrix} 0.707332 \\ 1.192659 \\ 0.228157 \end{bmatrix}\right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -3(0.707332) + 2(0.228157) + e^{0.843750} \\ 0.707332 - 1.192659 + e^{0.843750} \\ -2(0.707332) - 1.192659 + e^{0.843750} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -2.121997 + 0.456314 + 2.325070 \\ 0.707332 - 1.192659 + 2.325070 \\ -1.414665 - 1.192659 + 2.325070 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.659387 \\ 1.839743 \\ -0.282254 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_3 + h\left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} \frac{1932}{2197} \begin{bmatrix} 0.685568 \\ 1.736328 \\ -0.196344 \end{bmatrix} - \frac{7200}{2197} \begin{bmatrix} 0.669015 \\ 1.807191 \\ -0.254026 \end{bmatrix} + \frac{7296}{2197} \begin{bmatrix} 0.659387 \\ 1.839743 \\ -0.282254 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1932}{2197}K_1 = \begin{bmatrix} 0.602985 \\ 1.526991 \\ -0.172681 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{7200}{2197}K_2 = \begin{bmatrix} -2.192219 \\ -5.922320 \\ 0.832443 \end{bmatrix}$$

$$\frac{7296}{2197}K_3 = \begin{bmatrix} 2.189038 \\ 6.109839 \\ -0.937685 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 = \begin{bmatrix} 0.599933 \\ 1.714510 \\ -0.277923 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.599933 \\ 1.714510 \\ -0.277923 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.149983 \\ 0.428628 \\ -0.069481 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + h \left(\frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3 \right) = \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.149983 \\ 0.428628 \\ -0.069481 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.794207 \\ 1.453524 \\ 0.181139 \end{bmatrix}$$

$$t_3 + \frac{12}{13}h = 0.75 + 0.230769 = 0.980769$$

$$K_4 = f \left(0.980769, \begin{bmatrix} 0.794257 \\ 1.453387 \\ 0.181244 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -3(0.794257) + 2(0.181244) + e^{0.980769} \\ 0.794257 - 1.453387 + e^{0.980769} \\ -2(0.794257) - 1.453387 + e^{0.980769} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -2.382772 + 0.362488 + 2.666506 \\ 0.794257 - 1.453387 + 2.666506 \\ -1.588515 - 1.453387 + 2.666506 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0.646222 \\ 2.007377 \\ -0.375395 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_5

$$X_3 + h \left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{439}{216} \begin{bmatrix} 0.685568 \\ 1.736328 \\ -0.196344 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 0.669015 \\ 1.807191 \\ -0.254026 \end{bmatrix} + \frac{3680}{513} \begin{bmatrix} 0.659387 \\ 1.839743 \\ -0.282254 \end{bmatrix} - \frac{845}{4104} \begin{bmatrix} 0.646222 \\ 2.007377 \\ -0.375395 \end{bmatrix} \right]$$

$$\frac{439}{216}K_1 = \begin{bmatrix} 1.392509 \\ 3.526876 \\ -0.398849 \end{bmatrix}$$

$$-8K_2 = \begin{bmatrix} -5.352122 \\ -14.457525 \\ 2.032209 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3680}{513}K_3 = \begin{bmatrix} 4.730848 \\ 13.198156 \\ -2.024855 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{845}{4104}K_4 = \begin{bmatrix} -0.133034 \\ -0.413209 \\ 0.077291 \end{bmatrix}$$

$$\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 = \begin{bmatrix} 0.638278 \\ 1.854298 \\ -0.314204 \end{bmatrix}$$

$$h \left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.638278 \\ 1.854298 \\ -0.314204 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.159570 \\ 0.463574 \\ -0.078551 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + h \left(\frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4 \right) = \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.159570 \\ 0.463574 \\ -0.078551 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.803794 \\ 1.488470 \\ 0.172069 \end{bmatrix}$$

$$t_3 + h = 0.75 + 0.25 = 1.00$$

$$K_5 = f \left(1.00, \begin{bmatrix} 0.803794 \\ 1.488762 \\ 0.172046 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -3(0.803794) + 2(0.172046) + e^{1.00} \\ 0.803794 - 1.488762 + e^{1.00} \\ -2(0.803794) - 1.488762 + e^{1.00} \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -2.411382 + 0.344092 + 2.718282 \\ 0.803794 - 1.488762 + 2.718282 \\ -1.607588 - 1.488762 + 2.718282 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 0.650991 \\ 2.033314 \\ -0.378068 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_6

$$X_3 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + 0.25 \left[-\frac{8}{27} \begin{bmatrix} 0.685568 \\ 1.736328 \\ -0.196344 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0.669015 \\ 1.807191 \\ -0.254026 \end{bmatrix} - \frac{3544}{2565} \begin{bmatrix} 0.659387 \\ 1.839743 \\ -0.282254 \end{bmatrix} \right]$$

$$+\frac{1859}{4104}\begin{bmatrix} 0.646222 \\ 2.007377 \\ -0.375395 \end{bmatrix}-\frac{11}{40}\begin{bmatrix} 0.650991 \\ 2.033314 \\ -0.378068 \end{bmatrix}\Bigg]\Bigg]$$

$$-\frac{8}{27}K_1=\begin{bmatrix} -0.203131 \\ -0.514468 \\ 0.058176 \end{bmatrix}$$

$$2K_2=\begin{bmatrix} 1.338031 \\ 3.614381 \\ -0.508052 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{3544}{2565}K_3=\begin{bmatrix} -0.911264 \\ -2.542458 \\ 0.390018 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1859}{4104}K_4=\begin{bmatrix} 0.292757 \\ 0.909511 \\ -0.170073 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{11}{40}K_5=\begin{bmatrix} -0.179023 \\ -0.559161 \\ 0.103969 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{8}{27}K_1+2K_2-\frac{3544}{2565}K_3+\frac{1859}{4104}K_4-\frac{11}{40}K_5=\begin{bmatrix} 0.337539 \\ 0.908110 \\ -0.126035 \end{bmatrix}$$

$$h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) = 0.25 \begin{bmatrix} 0.337539 \\ 0.908110 \\ -0.126035 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.084385 \\ 0.227028 \\ -0.031509 \end{bmatrix}$$

$$X_3 + h \left(-\frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5 \right) = \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.084385 \\ 0.227028 \\ -0.031509 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.728609 \\ 1.251923 \\ 0.219111 \end{bmatrix}$$

$$t_3 + \frac{1}{2}h = 0.75 + 0.125 = 0.875000$$

$$K_6 = f \left(0.875000, \begin{bmatrix} 0.728609 \\ 1.251923 \\ 0.219128 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -3(0.728609) + 2(0.219128) + e^{0.875000} \\ 0.728609 - 1.251923 + e^{0.875000} \\ -2(0.728609) - 1.251923 + e^{0.875000} \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -2.185827 + 0.438257 + 2.398875 \\ 0.728609 - 1.251923 + 2.398875 \\ -1.457218 - 1.251923 + 2.398875 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 0.651305 \\ 1.875561 \\ -0.310266 \end{bmatrix}$$

Actualización para obtener X_4

$$X_4 = X_3 + h \left(\frac{16}{135} K_1 + \frac{6656}{12825} K_3 + \frac{28561}{56430} K_4 - \frac{9}{50} K_5 + \frac{2}{55} K_6 \right)$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0.644224 \\ 1.024896 \\ 0.250620 \end{bmatrix} + 0.25 \left[\frac{16}{135} \begin{bmatrix} 0.685568 \\ 1.736328 \\ -0.196344 \end{bmatrix} + \frac{6656}{12825} \begin{bmatrix} 0.659387 \\ 1.839743 \\ -0.282254 \end{bmatrix} + \frac{28561}{56430} \begin{bmatrix} 0.646222 \\ 2.007377 \\ -0.375395 \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \frac{9}{50} \begin{bmatrix} 0.650991 \\ 2.033314 \\ -0.378068 \end{bmatrix} + \frac{2}{55} \begin{bmatrix} 0.651305 \\ 1.875561 \\ -0.310266 \end{bmatrix} \right]$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0.808485 \\ 1.494594 \\ 0.174874 \end{bmatrix}$$

Tabla 5

Resultados de la aplicación 2.

n	t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
0	0.00	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.25	0.243696	0.281027	0.188504
2	0.50	0.459895	0.622657	0.264189
3	0.75	0.644224	1.024896	0.250620
4	1.00	0.808485	1.494594	0.174874

3.3.2 Solución de la aplicación 2 mediante RK4

Se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 0x_2 + 2x_3 + e^t, \\ x'_2 = x_1 - x_2 + 0x_3 + e^t, \\ x'_3 = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + e^t. \end{cases}$$

Las condiciones iniciales son:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0,$$

con intervalo: $0 \leq t \leq 1$. Se define:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Entonces: $X' = f(t, X)$

donde:

$$f(t, X) = \begin{bmatrix} -3x_1 + 2x_3 + e^t \\ x_1 - x_2 + e^t \\ -2x_1 - x_2 + e^t \end{bmatrix}$$

Como: $N=4$

se tiene: $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$

Además: $\frac{h}{2} = 0.125$

$$\frac{h}{6} = \frac{0.25}{6} = 0.0416666667$$

El método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas está dado por:

$$K_1 = f(t_n, X_n)$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, X_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, X_n + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = f(t_n + h, X_n + hK_3)$$

Finalmente:

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Primera iteración: cálculo de X_1

Para la primera iteración: $t_0 = 0$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1

$$K_1 = f(t_0, X_0)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3(0) + 2(0) + e^0 \\ 0 - 0 + e^0 \\ -2(0) - 0 + e^0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_0 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.125000 \\ 0.125000 \\ 0.125000 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = f \left(0.125, \begin{bmatrix} 0.125000 \\ 0.125000 \\ 0.125000 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -3(0.125000) + 2(0.125000) + e^{0.125} \\ 0.125000 - 0.125000 + e^{0.125} \\ -2(0.125000) - 0.125000 + e^{0.125} \end{bmatrix}$$

$$e^{0.125} \approx 1.133148$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.008148 \\ 1.133148 \\ 0.758148 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_0 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 1.008148 \\ 1.133148 \\ 0.758148 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.126019 \\ 0.141644 \\ 0.094769 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = f \left(0.125, \begin{bmatrix} 0.126019 \\ 0.141644 \\ 0.094769 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -3(0.126019) + 2(0.094769) + e^{0.125} \\ 0.126019 - 0.141644 + e^{0.125} \\ -2(0.126019) - 0.141644 + e^{0.125} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.944630 \\ 1.117523 \\ 0.739468 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_0 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} 0.944630 \\ 1.117523 \\ 0.739468 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.236157 \\ 0.279381 \\ 0.184867 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = f \left(0.25, \begin{bmatrix} 0.236157 \\ 0.279381 \\ 0.184867 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -3(0.236157) + 2(0.184867) + e^{0.25} \\ 0.236157 - 0.279381 + e^{0.25} \\ -2(0.236157) - 0.279381 + e^{0.25} \end{bmatrix}$$

$$e^{0.25} \approx 1.284025$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0.945287 \\ 1.240802 \\ 0.532330 \end{bmatrix}$$

Cálculo de X_1

$$X_1 = X_0 + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 5.850844 \\ 6.742146 \\ 4.527562 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.0416666667 \begin{bmatrix} 5.850844 \\ 6.742146 \\ 4.527562 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.243785 \\ 0.280923 \\ 0.188648 \end{bmatrix}$$

$$X(0.25) = \begin{bmatrix} 0.243785 \\ 0.280923 \\ 0.188648 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración: cálculo de X_2 $t_1 = 0.25$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.243785 \\ 0.280923 \\ 0.188648 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1

$$K_1 = f(t_1, X_1)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3(0.243785) + 2(0.188648) + e^{0.25} \\ 0.243785 - 0.280923 + e^{0.25} \\ -2(0.243785) - 0.280923 + e^{0.25} \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.929967 \\ 1.246888 \\ 0.515532 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_1 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.243785 \\ 0.280923 \\ 0.188648 \end{bmatrix} + 0.125 \begin{bmatrix} 0.929967 \\ 1.246888 \\ 0.515532 \end{bmatrix}$$

$$X_1 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.360031 \\ 0.436784 \\ 0.253090 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = f \left(0.375, \begin{bmatrix} 0.360031 \\ 0.436784 \\ 0.253090 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.881078 \\ 1.378239 \\ 0.298146 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_1 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.353920 \\ 0.453203 \\ 0.225917 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = f \left(0.375, \begin{bmatrix} 0.353920 \\ 0.453203 \\ 0.225917 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.845065 \\ 1.355709 \\ 0.293949 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_1 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.455051 \\ 0.619850 \\ 0.262136 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = f \left(0.50, \begin{bmatrix} 0.455051 \\ 0.619850 \\ 0.262136 \end{bmatrix} \right)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0.807838 \\ 1.483923 \\ 0.118769 \end{bmatrix}$$

Cálculo de X_2

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 5.190092 \\ 8.198705 \\ 1.818490 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = X_1 + 0.0416666667 \begin{bmatrix} 5.190092 \\ 8.198705 \\ 1.818490 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.460039 \\ 0.622535 \\ 0.264419 \end{bmatrix}$$

$$X(0.50) = \begin{bmatrix} 0.460039 \\ 0.622535 \\ 0.264419 \end{bmatrix}$$

Tercera iteración: cálculo de X_3

$$t_2 = 0.50$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.460039 \\ 0.622535 \\ 0.264419 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1

$$K_1 = f(t_2, X_2)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.797442 \\ 1.486225 \\ 0.106108 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_2 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.559719 \\ 0.808314 \\ 0.277682 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.744453 \\ 1.619652 \\ -0.059506 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_2 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.553096 \\ 0.824992 \\ 0.256981 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.722920 \\ 1.596350 \\ -0.062937 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_2 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.640769 \\ 1.021623 \\ 0.248685 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0.692062 \\ 1.736146 \\ -0.186161 \end{bmatrix}$$

Cálculo de X_3

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 4.424251 \\ 9.654373 \\ -0.324940 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = X_2 + 0.0416666667 \begin{bmatrix} 4.424251 \\ 9.654373 \\ -0.324940 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.644383 \\ 1.024801 \\ 0.250880 \end{bmatrix}$$

$$X(0.75) = \begin{bmatrix} 0.644383 \\ 1.024801 \\ 0.250880 \end{bmatrix}$$

Cuarta iteración: cálculo de X_4 $t_3 = 0.75$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.644383 \\ 1.024801 \\ 0.250880 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_1 $K_1 = f(t_3, X_3)$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.685611 \\ 1.736582 \\ -0.196567 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_2

$$X_3 + \frac{h}{2}K_1 = \begin{bmatrix} 0.730084 \\ 1.241874 \\ 0.226309 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.661241 \\ 1.887086 \\ -0.303167 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_3

$$X_3 + \frac{h}{2}K_2 = \begin{bmatrix} 0.727038 \\ 1.260687 \\ 0.212984 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.643730 \\ 1.865226 \\ -0.315887 \end{bmatrix}$$

Cálculo de K_4

$$X_3 + hK_3 = \begin{bmatrix} 0.805315 \\ 1.491108 \\ 0.171908 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0.646152 \\ 2.032489 \\ -0.383456 \end{bmatrix}$$

Cálculo de X_4

$$K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 3.941704 \\ 11.273695 \\ -1.818130 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = X_3 + 0.0416666667 \begin{bmatrix} 3.941704 \\ 11.273695 \\ -1.818130 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0.808620 \\ 1.494538 \\ 0.175124 \end{bmatrix}$$

$$X(1) = \begin{bmatrix} 0.808620 \\ 1.494538 \\ 0.175124 \end{bmatrix}$$

Tabla 6

Solución de la aplicación 2 aproximada mediante el método RK4 con $N = 4$.

Iteración	t_n	$x_1(t_n)$	$x_2(t_n)$	$x_3(t_n)$
0	0.00	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.25	0.243785	0.280923	0.188648
2	0.50	0.460039	0.622535	0.264419
3	0.75	0.644383	1.024801	0.250880
4	1.00	0.808620	1.494538	0.175124

Tabla 7

Comparación de resultados de la aplicación 2.

n	t	Solución analítica			Runge-Kutta de orden 4			Runge-Kutta de orden 5		
		$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
0	0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.25	0.243697	0.281022	0.188507	0.243785	0.280923	0.188648	0.243696	0.281027	0.188504
2	0.50	0.459898	0.622650	0.264195	0.460039	0.622535	0.264419	0.459895	0.622657	0.264189
3	0.75	0.644227	1.024889	0.250628	0.644383	1.024801	0.250880	0.644224	1.024896	0.250620
4	1.00	0.808488	1.494589	0.174882	0.808620	1.494538	0.175124	0.808485	1.494594	0.174874

En la Tabla (7) se presenta la comparación entre la solución analítica, el método de Runge-Kutta de orden 4 y el método de Runge-Kutta de orden 5 para el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto, considerando un intervalo $0 \leq t \leq 1$, con $N = 4$ y tamaño de paso $h = 0.25$.

Se observa que los valores obtenidos mediante ambos métodos numéricos se aproximan de manera adecuada a la solución analítica en cada uno de los puntos evaluados. Sin embargo, el método de Runge-Kutta de orden 5 presenta valores ligeramente más cercanos a la solución exacta en comparación con el método de Runge-Kutta de orden 4. Esta diferencia se debe a que RK5 realiza una mayor cantidad de evaluaciones intermedias de la función, lo que permite capturar con mayor precisión el comportamiento del sistema en cada subintervalo.

Para la variable $x_1(t)$, se aprecia que los resultados de RK5 prácticamente coinciden con la solución analítica en todos los puntos de la tabla. Por ejemplo, en $t = 1.00$, la solución analítica es $x_1(1) = 0.808488$, mientras que RK5 obtiene $x_1(1) = 0.808485$, mostrando una diferencia mínima. En cambio, RK4 obtiene $x_1(1) = 0.808620$, que también es una buena aproximación, pero con una desviación ligeramente mayor.

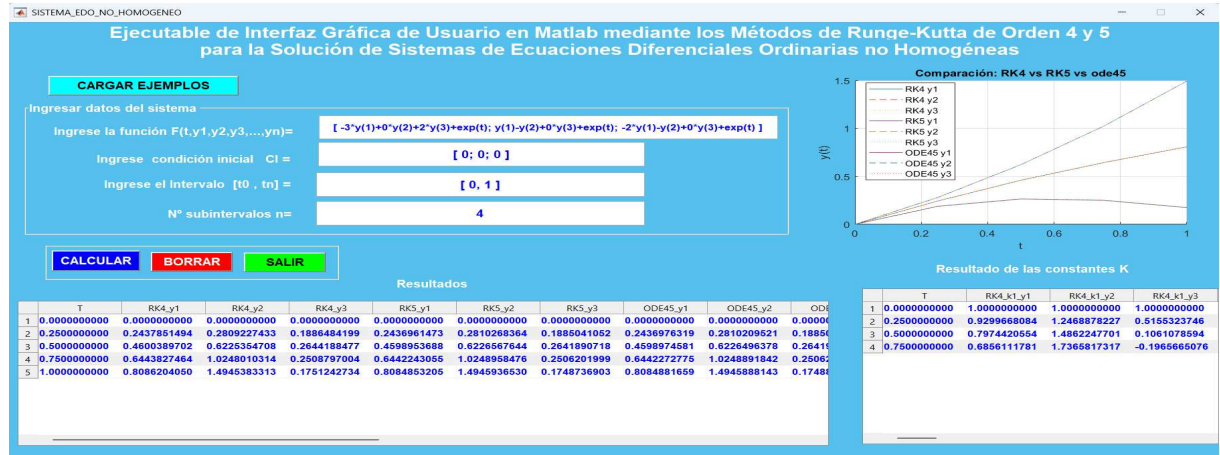
De manera similar, para la variable $x_2(t)$, los resultados muestran que ambos métodos siguen correctamente la tendencia creciente de la solución. En $t = 1.00$, la solución analítica es $x_2(1) = 1.494589$, mientras que RK5 proporciona $x_2(1) = 1.494594$, valor prácticamente igual al exacto. Esto evidencia la alta precisión del método RK5 para aproximar esta componente del sistema.

En el caso de $x_3(t)$, se observa que la solución aumenta inicialmente hasta aproximadamente $t = 0.50$ y luego empieza a disminuir. Este comportamiento es capturado correctamente por la solución analítica y por ambos métodos numéricos. No obstante, RK5 vuelve a mostrar una mejor aproximación. En $t = 1.00$, la solución analítica es $x_3(1) = 0.174882$, mientras que RK5 obtiene $x_3(1) = 0.174874$, con una diferencia muy pequeña.

Solución con el ejecutable

Figura 24

Resultado de la aplicación 2 para $N=4$.



La Figura (24) muestra que en la gráfica comparativa confirma visualmente esta coincidencia, ya que las curvas correspondientes a RK4, RK5 y ode45 prácticamente se superponen. La variable $y_2(t)$ presenta el mayor crecimiento durante el intervalo, alcanzando un valor cercano a 1.5 en $t = 1$. La variable $y_1(t)$ también aumenta de manera progresiva, aunque con menor intensidad. En cambio, $y_3(t)$ crece al inicio, alcanza un valor máximo intermedio y luego disminuye ligeramente hacia el final del intervalo. Este comportamiento refleja la interacción entre las ecuaciones del sistema y el efecto del término no homogéneo e^t .

En conjunto, la Figura (24) demuestra que la interfaz gráfica cumple correctamente con el ingreso de datos, la resolución numérica, la comparación de métodos y la visualización de resultados. Además, se concluye que, aunque RK4 ofrece resultados confiables, el método RK5 es el más preciso para este caso, porque sus valores presentan una mejor aproximación respecto a ode45. Por ello, RK5 puede considerarse el método más recomendable cuando la prioridad es la exactitud numérica.

3.4 Aplicación 3

Chapoñan (2024).

Hussain y Hasan (2023) plantearon el siguiente sistema no homogéneo:

$$u_1'(t) = u_3(t), u_1(0) = 1$$

$$u_2'(t) = -u_1(t) + 0,001 \cos(t), u_3(0) = 0$$

$$u_3'(t) = u_4(t), u_2(0) = 0$$

$$u_4'(t) = -u_2(t) + 0,001 \sin(t), u_4(0) = 0,9995$$

Su solución exacta es:

$$u_1(t) = \cos(t) + 0,0005t \sin(t)$$

$$u_2(t) = -0,9995 \sin(t) + 0,0005t \cos(t)$$

$$u_3(t) = \sin(t) - 0,0005t \cos(t)$$

$$u_4(t) = 0,9995 \cos(t) + 0,0005t \sin(t).$$

La aplicación será solucionada mediante el ejecutable

Para ingresar este sistema en el ejecutable, se reemplazaron las variables $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ y $u_4(t)$ por las variables usadas por el programa:

$$u_1(t) = y(1), \quad u_2(t) = y(2), \quad u_3(t) = y(3), \quad u_4(t) = y(4).$$

De esta manera, el sistema quedó expresado como una función vectorial:

$$f(t, Y) = \begin{bmatrix} y(3) \\ -y(1) + 0.001 \cos(t) \\ y(4) \\ -y(2) + 0.001 \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Por tanto, en el campo del ejecutable llamado *Ingrese la función* $f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ se

ingresó:

$$\begin{bmatrix} y(3) \\ -y(1) + 0.001 \cos(t) \\ y(4) \\ -y(2) + 0.001 \sin(t) \end{bmatrix}$$

En formato de entrada para MATLAB, se escribió:

$$[\ y(3); \ -y(1)+0.001*\cos(t); \ y(4); \ -y(2)+0.001*\sin(t) \]$$

Las condiciones iniciales fueron:

$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(0) = 0, \quad u_4(0) = 0.9995.$$

Entonces, el vector de condiciones iniciales ingresado en el ejecutable fue:

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9995 \end{bmatrix}.$$

En el campo *Ingrese condición inicial* c_1 se escribió:

$$[\ 1; \ 0; \ 0; \ 0.9995 \]$$

El intervalo de trabajo fue:

$$0 \leq t \leq 1.$$

Por ello, en el campo *Ingrese el intervalo* $[t_0, t_n]$ se ingresó:

$$[0, 1]$$

Finalmente, como se trabajó con cuatro subintervalos, se tuvo:

$$N = 4.$$

En el campo $N.^o$ *subintervalos* n se escribió:

$$4$$

Por consiguiente, los datos ingresados en el ejecutable fueron:

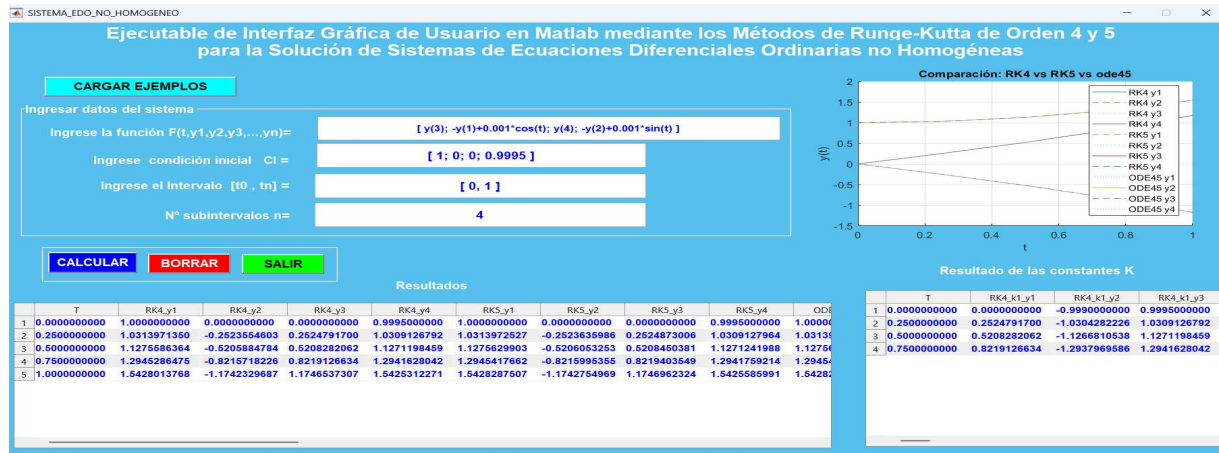
Campo del ejecutable	Dato ingresado
Función $f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$	[$y(3)$; $-y(1)+0.001*\cos(t)$; $y(4)$; $-y(2)+0.001*\sin(t)$]
Condición inicial c_1	[1; 0; 0; 0.9995]
Intervalo $[t_0, t_n]$	[0, 1]
N. ^o de subintervalos n	4

Con estos datos, el ejecutable reconoció el sistema como un problema de valor inicial de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, listo para ser resuelto mediante los métodos numéricos implementados.

Solución con el ejecutable

Figura 25

Resultado de la aplicación 3 para $N=4$.



La Figura (25) muestra que al comparar RK4 y RK5, ambos métodos muestran una aproximación adecuada; sin embargo, RK5 presenta una ligera ventaja en precisión, debido a que es un método de mayor orden. En la tabla se aprecia que los valores de RK5 se mantienen muy próximos a los obtenidos por ode45, considerado como referencia computacional. Por ello, para este ejemplo, el método RK5 resulta más recomendable cuando se busca mayor exactitud numérica. No obstante, RK4 también ofrece resultados confiables y puede ser útil cuando se desea reducir el número de cálculos internos.

Finalmente, la tabla de constantes K permite visualizar los valores intermedios generados durante el proceso iterativo del método de Runge-Kutta. Esto es importante porque no solo se presenta el resultado final, sino también parte del procedimiento numérico utilizado por el algoritmo. En conjunto, la figura evidencia que el aplicativo cumple con el ingreso de datos, el cálculo de soluciones, la comparación gráfica y la presentación ordenada de resultados, validando su utilidad como herramienta computacional para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas.

IV. DISCUSIÓN

Discusión del primer objetivo específico

El primer objetivo específico fue analizar la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas y su aplicación en la modelización matemática. A partir del desarrollo realizado, se comprendió que estos sistemas permiten representar fenómenos reales donde intervienen varias variables dependientes relacionadas entre sí y afectadas por una entrada externa. Esta característica los diferencia de los sistemas homogéneos, porque en los sistemas no homogéneos aparece un término independiente que modifica el comportamiento natural del modelo.

Este resultado guarda relación con Comet et al. (2024), quienes señalaron que el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas debe integrar métodos algebraicos, gráficos, numéricos y recursos tecnológicos para lograr una mejor comprensión del tema. En ese sentido, la presente investigación coincide con dicho antecedente, porque no se limitó únicamente a explicar la teoría, sino que la relacionó con la modelización matemática y con su posterior implementación computacional.

Asimismo, Muñoz (2020) y Carrasco y Heredia (2020) trabajaron con sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas, empleando aplicaciones como el balance de masas en tanques. Estos antecedentes demostraron que este tipo de sistemas permite representar situaciones reales de acumulación, entrada y salida de sustancias. De manera semejante, en la presente investigación se incorporó una aplicación de dos tanques conectados, donde se planteó el modelo matemático mediante el principio de acumulación igual a entradas menos salidas.

En dicha aplicación, se analizó el comportamiento de la concentración de sal en los tanques A y B, considerando los caudales de entrada, salida y circulación entre los depósitos. Como resultado, se obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes, donde el término no homogéneo aparece por la entrada externa de una disolución de agua y sal al tanque A. Esto permitió evidenciar que la teoría no solo tiene valor abstracto, sino que puede aplicarse a problemas reales de

transferencia y acumulación.

El aporte de la presente investigación en este objetivo consiste en relacionar la teoría de los sistemas no homogéneos con una aplicación real de balance de masas. De esta manera, el estudio no solo explica la forma general del sistema, sino que muestra cómo se construye paso a paso el modelo matemático a partir de un fenómeno físico. Esto permite que el estudiante o usuario comprenda que las ecuaciones diferenciales no homogéneas no son expresiones aisladas, sino herramientas útiles para describir procesos reales de variación, acumulación y transferencia.

Discusión del segundo objetivo específico

El segundo objetivo específico fue implementar los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5 en MATLAB para la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas, evaluando su precisión y estabilidad numérica. Los resultados obtenidos permitieron comprobar que ambos métodos son adecuados para aproximar soluciones de sistemas no homogéneos, siempre que se definan correctamente la función vectorial, las condiciones iniciales, el intervalo de integración y el número de subintervalos.

Este resultado coincide con Hussain y Hasan (2023), quienes desarrollaron un método mejorado de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con soluciones oscilatorias, demostrando que los métodos de Runge-Kutta pueden mejorar la precisión cuando se aplican adecuadamente. Del mismo modo, Senu et al. (2021) destacaron la importancia de la precisión y estabilidad en métodos derivados de Runge-Kutta para problemas periódicos.

En la presente investigación, el sistema de los dos tanques fue resuelto mediante Runge-Kutta de orden 5, considerando un número de subintervalos definido y un tamaño de paso adecuado. Para ello, el sistema fue expresado en forma vectorial, considerando como variables principales las concentraciones de sal en los tanques A y B. A partir de esta formulación, se aplicaron las constantes del método RK5, calculando los valores intermedios necesarios en cada iteración.

Los resultados obtenidos permitieron observar que la concentración en el tanque A

aumenta de manera progresiva debido al ingreso de sal desde la disolución externa, mientras que la concentración en el tanque B disminuye gradualmente por el intercambio y salida de mezcla. Este comportamiento es coherente con el modelo físico planteado, lo que permite afirmar que el método numérico reproduce adecuadamente la dinámica del sistema.

Los antecedentes de Muñoz (2020) y Carrasco y Heredia (2020) demostraron que el método de Runge-Kutta de cuarto orden proporciona resultados muy cercanos a la solución analítica en sistemas no homogéneos. La presente investigación amplía dicho aporte porque no solo implementa RK4, sino también RK5, permitiendo comparar ambos métodos en una misma herramienta computacional. Además, se confirma lo señalado por Prada y Díaz (2025), quienes indicaron que RK4 y RK5 pueden integrarse en una interfaz gráfica y que su comparación permite observar diferencias de precisión y estabilidad.

El aporte de esta investigación en este objetivo consiste en implementar computacionalmente los métodos RK4 y RK5 en MATLAB para resolver sistemas no homogéneos de forma ordenada, iterativa y verificable. La aplicación de los tanques permitió comprobar que el método no solo produce valores numéricos, sino que también ayuda a interpretar el comportamiento físico del sistema. Por ello, la implementación numérica fortalece el análisis matemático, ya que permite observar cómo evolucionan las variables dependientes en cada paso del intervalo de estudio.

Discusión del tercer objetivo específico

El tercer objetivo específico fue diseñar y programar una Interfaz Gráfica de Usuario en MATLAB que permita la solución interactiva de sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas mediante los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5, facilitando la visualización y análisis de resultados. Los resultados evidencian que la GUI desarrollada permitió organizar los datos de entrada, ejecutar los métodos numéricos y mostrar los resultados en tablas y gráficas.

Este resultado se relaciona con Pozo et al. (2022), quienes desarrollaron una interfaz gráfica en MATLAB para modelar vibraciones mecánicas mediante ecuaciones diferenciales y el método de Runge-Kutta. Dichos autores demostraron que una GUI permite reducir

el tiempo de cálculo, mejorar la presentación de resultados y facilitar el análisis numérico. De manera semejante, la presente investigación utilizó GUIDE de MATLAB R2021a para construir una interfaz orientada a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas.

En el desarrollo de la interfaz gráfica se siguió un proceso ordenado. Primero, se ingresó al entorno de MATLAB y se abrió GUIDE desde el Command Window. Luego, se creó la ventana principal de la GUI, se agregó el título de la investigación y se guardó el proyecto, generándose dos archivos principales: uno correspondiente al diseño visual y otro correspondiente al código de programación.

Posteriormente, se incorporaron paneles para organizar los datos del sistema y los botones principales. También se añadieron botones para cargar ejemplos, calcular, borrar y salir. Estos elementos permitieron que la herramienta no solo realice cálculos, sino que también tenga una estructura interactiva y ordenada para el usuario. Además, se agregaron cuadros de entrada para ingresar la función, las condiciones iniciales, el intervalo y el número de pasos; tablas para mostrar los resultados numéricos; y un espacio gráfico para visualizar la solución.

Este procedimiento fortalece lo señalado por Montalvan y Burga (2023), quienes indicaron que la interfaz gráfica de MATLAB facilita el ingreso de datos, la obtención de soluciones numéricas y la visualización de gráficas. Asimismo, se relaciona con Chapoñan (2024), quien desarrolló un ejecutable de interfaz gráfica para resolver sistemas no homogéneos mediante RK4. Sin embargo, la presente investigación amplía dicho trabajo al integrar en la misma GUI los métodos RK4 y RK5.

El aporte de esta investigación en este objetivo consiste en diseñar una GUI funcional, organizada y orientada al aprendizaje, donde el usuario puede ingresar los datos del sistema no homogéneo y obtener resultados sin desarrollar manualmente todas las iteraciones. Además, al incluir tablas y gráficas, la interfaz permite analizar de manera más clara el comportamiento de cada variable del sistema. Esto convierte a la herramienta en un recurso didáctico y computacional útil para estudiantes, docentes e investigadores.

Discusión del cuarto objetivo específico

El cuarto objetivo específico fue validar la funcionalidad y usabilidad del ejecutable desarrollado a través de pruebas con distintos sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas, midiendo su precisión, eficiencia computacional y facilidad de uso. Los resultados muestran que la interfaz gráfica pudo convertirse en ejecutable mediante las herramientas propias de MATLAB, lo cual permitió obtener un programa independiente para resolver sistemas no homogéneos sin necesidad de trabajar directamente desde el entorno de programación.

Este resultado coincide con Prada y Díaz (2025), quienes indicaron que una GUI desarrollada en MATLAB puede convertirse en ejecutable mediante MATLAB Compiler, permitiendo su uso sin instalar MATLAB. De igual manera, Chapañan (2024) concluyó que un ejecutable de interfaz gráfica favorece el aprendizaje y la solución de sistemas diferenciales, porque el usuario puede obtener resultados sin realizar manualmente todas las operaciones del método.

En la presente investigación, el proceso de conversión a ejecutable se realizó desde el entorno de MATLAB, cargando los archivos generados por GUIDE y configurando el empaquetado del programa. Este procedimiento permitió transformar la interfaz en una aplicación ejecutable, fortaleciendo su funcionalidad y utilidad práctica.

La validación de la herramienta también se realizó mediante la aplicación de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas, como el modelo de los dos tanques. En este caso, el ejecutable permitió ingresar el sistema, las condiciones iniciales, el intervalo y el número de pasos, obteniendo resultados mediante RK4 y RK5. La presentación de los resultados en tablas y gráficas facilitó la comparación e interpretación de las soluciones.

Este resultado se relaciona con Pozo et al. (2022), quienes validaron una interfaz gráfica considerando su funcionalidad y usabilidad. Aunque en la presente investigación la validación se orientó principalmente a la comprobación del funcionamiento del ejecutable y la coherencia de los resultados numéricos, también se evidenció que la herramienta facilita el uso del método, reduce el tiempo de cálculo y mejora la presentación de los resultados.

El aporte de esta investigación en este objetivo consiste en validar un ejecutable que integra el planteamiento matemático, la implementación numérica y la visualización interactiva de resultados. A diferencia de una solución desarrollada únicamente en código, el ejecutable permite que el usuario trabaje de manera más sencilla, ingresando datos y observando directamente las soluciones aproximadas. Además, al incorporar RK4 y RK5, la herramienta permite comparar dos métodos numéricos dentro de un mismo entorno, lo cual fortalece la precisión, la eficiencia computacional y la facilidad de uso.

Discusión general

De manera general, los resultados de la presente investigación permiten afirmar que el desarrollo de un ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en MATLAB mediante los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5 constituye una alternativa útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas. Los antecedentes revisados demuestran que los métodos de Runge-Kutta son confiables para obtener soluciones aproximadas con buena precisión, mientras que las interfaces gráficas permiten mejorar la interacción del usuario con los procesos numéricos.

La presente tesis se diferencia de los antecedentes porque integra en una sola herramienta cuatro aspectos importantes: la teoría de los sistemas no homogéneos, la implementación de RK4, la implementación de RK5 y la conversión de la GUI en ejecutable. Además, la aplicación del modelo de dos tanques permitió demostrar que la herramienta no solo resuelve sistemas matemáticos abstractos, sino también problemas contextualizados en fenómenos reales de balance de masas.

Por tanto, el principal aporte de esta investigación es el desarrollo de una herramienta computacional que permite modelar, resolver, visualizar y comparar soluciones numéricas de sistemas diferenciales ordinarios no homogéneos. Esta herramienta fortalece el aprendizaje de los métodos numéricos, reduce errores manuales, mejora la presentación de resultados y facilita el análisis de sistemas aplicados. En consecuencia, el ejecutable desarrollado representa un recurso académico, tecnológico y didáctico para la enseñanza universitaria y la solución computacional de modelos matemáticos.

V. CONCLUSIONES

- En el presente trabajo de investigación se analizó la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas y su aplicación en la modelización matemática. A partir de ello, se concluyó que este tipo de sistemas permitió representar fenómenos reales, como el balance de masas en tanques, donde las entradas, salidas y acumulaciones dieron lugar a la construcción de un modelo matemático no homogéneo.
- Se implementaron los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5 en MATLAB para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas. Además, se desarrolló paso a paso cada método, mostrando el procedimiento iterativo, el cálculo de los valores intermedios y la obtención de las soluciones aproximadas. También se logró insertar el método ode45 como una alternativa de comparación numérica dentro del proceso de solución. Los resultados permitieron concluir que RK4, RK5 y ode45 son adecuados para resolver este tipo de problemas; sin embargo, al comparar los resultados obtenidos en las aplicaciones desarrolladas, el método de Runge-Kutta de orden 5 presentó mejor precisión numérica que el método de Runge-Kutta de orden 4.
- Se diseñó y programó una Interfaz Gráfica de Usuario en MATLAB GUIDE para resolver de manera interactiva sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas mediante los métodos RK4, RK5 y ode45. La GUI permitió ingresar funciones, condiciones iniciales, intervalos y número de pasos; además, mostró los resultados en tablas y gráficas para facilitar su análisis. Se concluyó que la interfaz mejora la comprensión del procedimiento, porque permite visualizar el comportamiento de las soluciones y comparar directamente los resultados obtenidos por los métodos implementados.
- Se validó la funcionalidad y usabilidad del ejecutable desarrollado mediante tres aplicaciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas. En cada aplicación se desarrollaron paso a paso los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y 5,

se insertó ode45 como método de referencia computacional y luego se compararon los resultados numéricos obtenidos. Esta validación permitió comprobar que el ejecutable funciona correctamente, organiza los datos de manera clara y facilita la interpretación de las soluciones. Asimismo, al comparar las tres aplicaciones, se evidenció que el método RK5 obtuvo mejores resultados que RK4, debido a que presentó aproximaciones más precisas.

RECOMENDACIONES

Se recomienda aplicar el ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario desarrollado en MATLAB en diferentes sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas, tanto académicos como aplicados, con la finalidad de fortalecer su validación y comprobar su desempeño en nuevos escenarios. Asimismo, se sugiere seguir utilizando la comparación entre RK4, RK5 y ode45, debido a que permite analizar con mayor claridad la precisión de los resultados, identificar el método más conveniente según el problema y mejorar el aprendizaje de los métodos numéricos en estudiantes universitarios.

Referencias Bibliográficas

- Apaza, W. (2024). *Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes: Mediante el método de respuesta impulsiva usando factorización* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. <https://n9.cl/u0gr0>
- Burden, R. & Faires, J. (2001). *Análisis Numérico*. 7^a ed. Cengage.
- Carrasco, L., & Heredia, J. (2020). *Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas por el método de Runge Kutta asistido con Matlab* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. <https://n9.cl/x88wr>
- Chapoñan, V. (2024). Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab para Sistema de Ecuaciones Diferenciales no Homogéneas por el Método de Runge-Kutta de Orden 4 [Tesis de maestría, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo].
- Comet, A., Batard, L., & Mola, C. (2024). *Alternativa didáctica para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con parámetro pequeño*. ResearchGate, LXIV(1). <https://n9.cl/vpwie>
- Hussain, K., & Hasan, W. (2023). *Improved Runge-Kutta Method for Oscillatory Problem Solution Using Trigonometric Fitting Approach*. Ibn AL Haitham Journal For Pure and Applied Sciences, 36(1), 345-354. <https://n9.cl/5tpst5>
- Kharab, A. & Guenther, R. (2012). *An introduction to numerical methods a Matlab approach*. CRC Pres, New York, USA.
- Mathworks (2024). *Matlab*. <https://lc.cx/ZLkuVy>
- Momox, E., & Alonso, L. (2023). *A MATLAB GUI for Engineering Education in the Undergraduate Laboratory*. International Journal of Information and Education Technology, 13(5), 861-866. <https://n9.cl/2a1xk>
- Montalvan, M. & Burga, A. (2023). Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales mediante Runge-Kutta de Cuarto Orden y su Implementación en la Interfaz Gráfica de Matlab [Tesis de título profesional, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo].

- Muñoz, F. (2020). Solución numérica de ecuaciones diferenciales usando MATLAB. Objetivos instructivos. ResearchGate. <https://n9.cl/hed1rz>
- Pozo, F., Cuenca, C., Silva, L., & Chipugsi, F. (2022). Modelización de vibraciones mecánicas usando la interfaz gráfica de usuario en Matlab. <https://n9.cl/l8sg7>
- Prada, R. & Díaz, A. (2025). Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden mediante el método de Runge-Kutta de orden 5 y su implementación en la interfaz gráfica de usuario en Matlab [Tesis de título profesional, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo].
- Tan, X., Chan, K., & Lim, S. (2024). *Development of a MATLAB-based graphical user interface to illustrate Coulomb's law and Gauss's law*. Computer Applications in Engineering Education, n/a(n/a), e22759. <https://doi.org/10.1002/cae.22759>
- Zill, D. (1998). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones*, Edición Grupo editorial Iberoamericana.

Anexos

Algoritmo de la ecuación de Reacción-Difusión mediante Diferencias Finitas

```
% --- Executes on button press in calcular.

function calcular_Callback(hObject, eventdata, handles)

% ===== LEER DATOS =====

fun = get(handles.edit1, 'String');
% Ej: '-y + t' o '[y(2); -y(1)]'
ci = str2num(get(handles.edit2, 'String'));
%#ok<ST2NM> % vector CI
intv = str2num(get(handles.edit3, 'String')); %#ok<ST2NM>
% [a b]
n = str2double(get(handles.edit4, 'String'));

% ----- Validaciones básicas -----

if isempty(fun)
    errordlg('Ingrese la función en edit1
    (ej: -y + t, o [y(2); -y(1)]).', 'Dato faltante');
    return;
end

if isempty(ci) || ~isnumeric(ci)
    errordlg('Ingrese la condición inicial en edit2
    (ej: [1;2] o 1).', 'Dato inválido');
    return;
end

if isempty(intv) || numel(intv) ~= 2
    errordlg('Ingrese el intervalo en edit3
```

```

        como [a b].', 'Dato inválido');
    return;
end
if isnan(n) || n <= 0 || fix(n) ~= n
    errordlg('Ingrese en edit4 un número
    entero positivo de pasos n.', 'Dato inválido');
    return;
end

% Función vectorial
F = str2func(['@(t,y)', fun]);

a = intv(1); b = intv(2);
h = (b - a)/n;

ci = ci(:); % columna
m = length(ci); % número de ecuaciones

% ===== MALLA FIJA =====
T = zeros(n+1,1);
T(1) = a;

% ===== SOLUCIONES =====
y4 = zeros(m,n+1); y4(:,1) = ci;
y5 = zeros(m,n+1); y5(:,1) = ci;

% ===== k para RK4 =====
k1_4 = zeros(m,n); k2_4 = zeros(m,n); k3_4 =

```



```

zeros(m,n); k4_4 = zeros(m,n);

% ===== k para RK5 (Fehlberg orden 5, paso fijo) =====
k1_5 = zeros(m,n); k2_5 = zeros(m,n); k3_5 = zeros(m,n);
k4_5 = zeros(m,n); k5_5 = zeros(m,n); k6_5 = zeros(m,n);

% ===== BUCLE =====
for i = 1:n
    ti = T(i);

    % ===== RK4 =====
    y4i = y4(:,i);

    K1 = F(ti, y4i);          K1 = K1(:);
    K2 = F(ti + h/2, y4i + (h/2)*K1); K2 = K2(:);
    K3 = F(ti + h/2, y4i + (h/2)*K2); K3 = K3(:);
    K4 = F(ti + h, y4i + h*K3); K4 = K4(:);

    y4(:,i+1) = y4i + h*(K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6;

    k1_4(:,i) = K1; k2_4(:,i) = K2; k3_4(:,i) =
    K3; k4_4(:,i) = K4;

    % ===== RK5 (Fehlberg orden 5) =====
    y5i = y5(:,i);

    L1 = F(ti, y5i);

    L1 = L1(:);

```

```

L2 = F(ti + h*(1/4), y5i + h*(1/4)*L1);
L2 = L2(:);

L3 = F(ti + h*(3/8), y5i + h*((3/32)*L1 + (9/32)*L2));
L3 = L3(:);

L4 = F(ti + h*(12/13), y5i + h*((1932/2197)*L1 +
(-7200/2197)*L2 + (7296/2197)*L3));
L4 = L4(:);

L5 = F(ti + h*(1), y5i + h*((439/216)*L1 +
(-8)*L2 + (3680/513)*L3 + (-845/4104)*L4));
L5 = L5(:);

L6 = F(ti + h*(1/2), y5i + h*((-8/27)*L1 +
(2)*L2 + (-3544/2565)*L3 + (1859/4104)*L4 + (-11/40)*L5));
L6 = L6(:);

% Pesos de orden 5 (Fehlberg)
y5(:,i+1) = y5i + h*((16/135)*L1 + (6656/12825)*L3
+ (28561/56430)*L4 + (-9/50)*L5 + (2/55)*L6);

k1_5(:,i) = L1; k2_5(:,i) = L2; k3_5(:,i) = L3;
k4_5(:,i) = L4; k5_5(:,i) = L5; k6_5(:,i) = L6;

% tiempo
T(i+1) = ti + h;

end

```

```

% ===== ODE45 =====
opts = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-9);
[t45, y45] = ode45(@(t,y) F(t,y), [a b], ci, opts);
% y45: (Nsteps x m)

% Interpolar a malla fija T
Y45 = interp1(t45, y45, T, 'pchip'); % (n+1) x m

% ===== FORMATO PARA TABLAS =====
Y4 = y4.'; % (n+1) x m
Y5 = y5.'; % (n+1) x m

% ---- Errores respecto a ode45 ----
Eabs_RK4 = abs(Y4 - Y45);
Eabs_RK5 = abs(Y5 - Y45);

eps0 = 1e-12;
Erel_RK4 = Eabs_RK4 ./ max(abs(Y45), eps0);
Erel_RK5 = Eabs_RK5 ./ max(abs(Y45), eps0);

% ===== Nombres base y1,y2,... =====
M = cell(1,m);
for j = 1:m
    M{j} = ['y', num2str(j)];
end

% ===== Nombres para uitable1 =====

```

```

y4_names    = strcat('RK4_', M);
y5_names    = strcat('RK5_', M);
y45_names   = strcat('ODE45_', M);

eabs4_names = strcat('Eabs_RK4_', M);
eabs5_names = strcat('Eabs_RK5_', M);

erel4_names = strcat('Erel_RK4_', M);
erel5_names = strcat('Erel_RK5_', M);

% ===== UITABLE 1: SOLUCIÓN + ERROR

columnNames1 = [{'T'}, y4_names, y5_names,
y45_names, eabs4_names, eabs5_names, erel4_names, erel5_names];
data1_num = [T, Y4, Y5, Y45, Eabs_RK4, Eabs_RK5,
Erel_RK4, Erel_RK5];

% ===== MOSTRAR 10 DECIMALES Y SIN NOTACIÓN CIENTÍFICA

data1_num = round(data1_num, 10);
data1 = arrayfun(@(x) sprintf('%.10f', x), data1_num, 'UniformOutput', false);

set(handles.uitable1, 'ColumnName', columnNames1);

set(handles.uitable1, 'Data', data1);

% ===== UITABLE 2: CONSTANTES k =====
K1_4 = k1_4.'; K2_4 = k2_4.'; K3_4 = k3_4.'; K4_4 = k4_4.';

```

```

    % (n x m)

K1_5 = k1_5.'; K2_5 = k2_5.'; K3_5 = k3_5.'; K4_5 = k4_5.';

    % (n x m)

K5_5 = k5_5.'; K6_5 = k6_5.';

                                % (n x m)


Tstep = T(1:end-1); % (n x 1) tiempo por paso


k1_4_names = strcat('RK4_k1_', M);
k2_4_names = strcat('RK4_k2_', M);
k3_4_names = strcat('RK4_k3_', M);
k4_4_names = strcat('RK4_k4_', M);


k1_5_names = strcat('RK5_k1_', M);
k2_5_names = strcat('RK5_k2_', M);
k3_5_names = strcat('RK5_k3_', M);
k4_5_names = strcat('RK5_k4_', M);
k5_5_names = strcat('RK5_k5_', M);
k6_5_names = strcat('RK5_k6_', M);


columnNames2 = [{'T'}, ...
    k1_4_names, k2_4_names, k3_4_names, k4_4_names, ...
    k1_5_names, k2_5_names, k3_5_names, k4_5_names,
    k5_5_names, k6_5_names];


data2_num = [Tstep, ...
    K1_4, K2_4, K3_4, K4_4, ...
    K1_5, K2_5, K3_5, K4_5, K5_5, K6_5];

```

```

data2_num = round(data2_num, 10);
data2 = arrayfun(@(x) sprintf('%.10f', x),
data2_num, 'UniformOutput', false);

set(handles.uitable2, 'ColumnName', columnNames2);
set(handles.uitable2, 'Data', data2);

% ===== GUARDAR EN HANDLES (numérico para cálculos)

handles.T = T;
handles.Y4 = Y4;
handles.Y5 = Y5;
handles.Y45 = Y45;

handles.ErrAbs.RK4 = Eabs_RK4;
handles.ErrAbs.RK5 = Eabs_RK5;
handles.ErrRel.RK4 = Erel_RK4;
handles.ErrRel.RK5 = Erel_RK5;

handles.RK4.k1 = K1_4; handles.RK4.k2 = K2_4; handles.RK4.k3
= K3_4; handles.RK4.k4 = K4_4;
handles.RK5.k1 = K1_5; handles.RK5.k2 = K2_5; handles.RK5.k3
= K3_5; handles.RK5.k4 = K4_5; handles.RK5.k5 =
K5_5; handles.RK5.k6 = K6_5;

handles.ode45.t = t45;
handles.ode45.y = y45;

```

```

% ===== GRAFICAR EN axes1 =====
axes(handles.axes1);
cla(handles.axes1,'reset');
hold(handles.axes1,'on');
grid(handles.axes1,'on');

for j = 1:m
    plot(handles.axes1, T, Y4(:,j), '-'); % RK4
    plot(handles.axes1, T, Y5(:,j), '--'); % RK5
    plot(handles.axes1, T, Y45(:,j), ':'); % ODE45
end

xlabel(handles.axes1,'t');
ylabel(handles.axes1,'y(t)');
title(handles.axes1,'Comparación: RK4 vs RK5 vs ode45');

leg = {};
for j = 1:m, leg{end+1} = ['RK4 y', num2str(j)]; end
for j = 1:m, leg{end+1} = ['RK5 y', num2str(j)]; end
for j = 1:m, leg{end+1} = ['ODE45 y', num2str(j)]; end
legend(handles.axes1, leg, 'Location','best');

hold(handles.axes1,'off');
zoom on
guidata(hObject, handles);
% --- Executes on button press in pushbutton2.

```

```

% --- Executes on button press in ejemplos.
function ejemplos_Callback(hObject, eventdata, handles)

% Lista de ejemplos
opciones = { ...
    'Ejemplo 1: Sistema de tanques A y B', ...
    'Ejemplo 2: Sistema de 3 ecuaciones con exp(t) ', ...
    'Ejemplo 3: Sistema no homogéneo de 4 ecuaciones'};

% Ventana de selección
[indice, ok] = listdlg( ...
    'PromptString', 'Seleccione el ejemplo que desea cargar:', ...
    'SelectionMode', 'single', ...
    'ListString', opciones, ...
    'Name', 'Ejemplos disponibles', ...
    'ListSize', [320 140]);

% Si no selecciona nada
if ok == 0
    return;
end

switch indice

    case 1

        % EJEMPLO 1

```



```

%
% cA' = -0.05cA + 0.01cB + 1.2
% cB' = 0.03cA - 0.03cB
%
% X0 = [0;10]
% 0 <= t <= 1
% N = 4
% =====
fun = '[ -0.05*y(1)+0.01*y(2)+1.2; 0.03*y(1)-0.03*y(2) ]';
ci = '[ 0; 10 ]';
int = '[ 0, 1 ]';
n = '4';

```

case 2

```

% =====
% EJEMPLO 2
%
% y1' = -3y1 + 0y2 + 2y3 + e^t
% y2' = y1 - y2 + 0y3 + e^t
% y3' = -2y1 - y2 + 0y3 + e^t
%
% y1(0)=0, y2(0)=0, y3(0)=0
% 0 <= t <= 1
% N = 4
% =====
fun = '[ -3*y(1)+0*y(2)+2*y(3)+exp(t); y(1)-y(2)+
0*y(3)+exp(t); -2*y(1)-y(2)+0*y(3)+exp(t) ]';
ci = '[ 0; 0; 0 ]';

```

```

    int = '[ 0, 1 ]';
    n    = '4';

case 3
    % =====
    % EJEMPLO 3
    %
    %  $u_1'(t) = u_3(t)$ 
    %  $u_2'(t) = -u_1(t) + 0.001 \cdot \cos(t)$ 
    %  $u_3'(t) = u_4(t)$ 
    %  $u_4'(t) = -u_2(t) + 0.001 \cdot \sin(t)$ 
    %
    %  $u_1(0)=1, u_2(0)=0, u_3(0)=0, u_4(0)=0.9995$ 
    %  $0 \leq t \leq 1$ 
    % N = 4
    % =====
    fun = '[ y(3); -y(1)+0.001*cos(t); y(4); -y(2)+0.001*sin(t) ]';
    ci  = '[ 1; 0; 0; 0.9995 ]';
    int = '[ 0, 1 ]';
    n    = '4';

end

% Cargar en los edit
set(handles.edit1, 'String', fun);
set(handles.edit2, 'String', ci);
set(handles.edit3, 'String', int);

```

```

set(handles.edit4, 'String', n);

msgbox(['Se cargó correctamente el ', opciones{indice}, '.'], ...
    'Ejemplo cargado', 'help');

guidata(hObject, handles);

% --- Executes on button press in pushbutton4.
function pushbutton4_Callback(hObject, eventdata, handles)

% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)
set(handles.edit1,'String',' ');
set(handles.edit2,'String',' ');
set(handles.edit3,'String',' ');
set(handles.edit4,'String', ' ');
set(handles.uitable1,'Data', [ ]);
set(handles.uitable1,'ColumnName',{' ',' ',' ',' '})
set(handles.uitable2,'Data', [ ]);
set(handles.uitable2,'ColumnName',{' ',' ',' ',' '})
plot(1,1)
zoom on

% --- Executes on button press in pushbutton5.
function pushbutton5_Callback(hObject, eventdata, handles)

% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)
opc=questdlg('¿Desea salir del programa?', 'SALIR', 'Si', 'No', 'No');
if strcmp(opc, 'No')
return;

```

```
else
    msgbox({'Gracias por usar nuestra Aplicación',...
           '
           Desarrollado por:',...
           'Requejo Cueva Korina','Leon Rueda Orlando Aldair',
           'Dr. Arriaga Delgado Walter'},'Acerca de');
end
clear,clc,close(gcbf)
```

Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab mediante los Métodos de Runge-Kutta de Orden 4 y 5 para la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales ordinarias no homogéneas

INFORME DE ORIGINALIDAD

12%	12%	5%	5%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	hdl.handle.net	Fuente de Internet	4%
2	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo	Trabajo del estudiante	2%
3	repositorio.unprg.edu.pe	Fuente de Internet	1%
4	qdoc.tips	Fuente de Internet	1%
5	www.coursehero.com	Fuente de Internet	<1%
6	www.apuntesmareaverde.org.es	Fuente de Internet	<1%
7	es.slideshare.net	Fuente de Internet	<1%

Dr. Arriaga Delgado Walter
Departamento de Matemática
DNI: 16732082
Asesor



8	Submitted to Alcuin School		<1 %
	Trabajo del estudiante		
9	pdfcookie.com		<1 %
	Fuente de Internet		
10	revista.gnerando.org	Dr. Arriaga Delgado Walter Departamento de Matemática DNI: 16732082 Asesor	<1 %
	Fuente de Internet		
11	dokumen.pub		<1 %
	Fuente de Internet		
12	Submitted to The University of Manchester		<1 %
	Trabajo del estudiante		
13	Saenz Lopez, David. "Estudio de los metodos espectrales en ecuaciones diferenciales de una dimension y su comparacion con el metodo de diferencias finitas.", Pontificia Universidad Catolica del Peru - CENTRUM Catolica (Peru), 2021		<1 %
	Publicación		
14	www.math.univ-toulouse.fr		<1 %
	Fuente de Internet		
15	www.slideshare.net		<1 %
	Fuente de Internet		
16	Submitted to UTEC Universidad de Ingeniería & Tecnología (NO TOCAR)		<1 %
	Trabajo del estudiante		
	goedel.chonbuk.ac.kr		

17	Fuente de Internet		<1 %
18	files.core.ac.uk Fuente de Internet		<1 %
19	Stavroyiannis, S.. "Optimization as a function of the phase-lag order of nonlinear explicit two-step P-stable method for linear periodic IVPs", Applied Numerical Mathematics, 200910 Publicación		<1 %
20	www.programacioncpp.irandohosting.0lx.net Fuente de Internet		<1 %
21	Submitted to Instituto Superior de Artes, Ciencias y Comunicación IACC Trabajo del estudiante		<1 %
22	Submitted to Universidad TecMilenio Trabajo del estudiante		<1 %
23	denebola.if.usp.br Fuente de Internet		<1 %
24	www.diee.unica.it Fuente de Internet	Dr. Arriaga Delgado Walter Departamento de Matemática DNI: 16732082 Asesor	<1 %
25	Submitted to University of Birmingham Trabajo del estudiante		<1 %
26	Submitted to Universidad Estatal Amazonica- Trabajo del estudiante		<1 %

27	Submitted to Universidad Politécnica de Madrid	Trabajo del estudiante	<1 %
28	Submitted to University of Central Lancashire	Trabajo del estudiante	<1 %
29	revistaparadigma.online	Fuente de Internet	<1 %
30	www.scribd.com	Fuente de Internet	<1 %
31	archive.org	Fuente de Internet	<1 %
32	dspace.ups.edu.ec	Fuente de Internet	<1 %

Excluir citas

Activo

Excluir coincidencias

< 15 words

Excluir bibliografía

Activo



Dr. Arriaga Delgado Walter
Departamento de Matemática
DNI: 16732082
Asesor