



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab para
Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo
Orden en Vibraciones Mecánicas

TESIS

Para optar el título profesional de
Licenciado en Matemáticas

Autoras:

Bach. Mat. Sanchez Baldera Jose Gustavo

Bach. Mat. Nuñez Quispe Jose Adrian

Asesor:

Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl

LAMBAYEQUE – PERÚ

2026

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab para Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden en Vibraciones Mecánicas**, presentada por los bachilleres en matemáticas, Sanchez Baldera Jose Gustavo y Nuñez Quispe Jose Adrian, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de licenciadas en matemáticas.



Dr. Ahumada Abanto César Augusto
Presidente Jurado de Tesis



Dr. Coronado Juárez William Wilmer
Secretario Jurado de Tesis



Dra. Guzmán Roldán Carmen Margarita
Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: 21 de abril de 2026.

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab para
Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo
Orden en Vibraciones Mecánicas



Bach. Mat. Sanchez Baldera Jose Gustavo

Autor



Bach. Mat. Nuñez Quispe Jose Adrian

Autor



Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl

Asesor

Lambayeque – Perú

Marzo-2026



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DECANATO

Ciudad Universitaria – Lambayeque

LICENCIADA - RESOLUCIÓN DEL CONSEJO DIRECTIVO N° 015 -2023-SUNEDU / CD



0064



ACTA DE SUSTENTACIÓN N° 35.-2026-D/FACFyM

Siendo las 12:50 m. del día 21 de abril del 2026, se reunieron los miembros del jurado evaluador de la Tesis titulada:

Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab para Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden en Vibraciones Mecánicas

Designados por Resolución N° 710.-2024.- D/FACFyM de fecha 12 de julio de 2024

Con la finalidad de evaluar y calificar la sustentación de la tesis antes mencionada, conformada por los siguientes docentes:

Dr. Lic. Mat. César Augusto Ahumada Abanto Presidente

Dr. Lic. Mat. William Wilmer Coronado Juarez Secretario

Dr. Lic. Mat. Carmen Margarita Guzmán Roldán Vocal

La tesis fue asesorada por (el) (la) Dr. Lic. Mat. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez nombrado por Resolución N° 710.-2024.- D/FACFyM de fecha 12 de julio de 2024.

El Acto de Sustentación fue autorizado por Resolución N° 307.-2026.- D/FACFyM de fecha 14 de abril de 2026.

La Tesis fue presentada y sustentada por (el) (los) Bachiller (es): Sanchez, Baldera Jose Gustavo y Nuñez Quipe Jose Adrian y tuvo una duración de 30 minutos.

Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado se procedió a la calificación respectiva, otorgándole el Calificativo de diecisiete (17) en la escala vigesimal, mención B.U.E.S.D.

Por lo que queda(n) apto(s) para obtener el Título Profesional de licenciado en matemáticas, de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Siendo las 12:50 p.m. se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto con la firma de los miembros del jurado.

Dr. Lic. Mat. César Augusto Ahumada Abanto
Presidente

Dr. Lic. M. William Wilmer Coronado Juarez
Secretario

Dr. Lic. Mat. Carmen Margarita Guzmán Roldán
Vocal

Dr. Lic. Mat. Alcides Raúl Cuti Gutiérrez
Asesor

CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, **Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl**, usuario revisor de la tesis titulada: **Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab para Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden en Vibraciones Mecánicas**, cuyas autoras son: Bach. **Sanchez Baldera Jose Gustavo** identificado con DNI 48120593 y Bach. **Núñez Quispe Jose Adrian** identificado con DNI 47540569, ha arrojado un porcentaje de similitud de **15%**, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 15 de marzo de 2026



Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl
DNI: 32802095
Asesor

Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab para Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden en Vibraciones Mecánicas

INFORME DE ORIGINALIDAD

15%	12%	4%	9%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	repositorio.unprg.edu.pe		3%
	Fuente de Internet		
2	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo		2%
	Trabajo del estudiante		
3	hdl.handle.net	 Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl DNI: 32802095	1%
	Fuente de Internet		
4	revistas.uclave.org	Departamento de: Matemática Asesor	1%
	Fuente de Internet		
5	Submitted to Instituto Superior de Artes, Ciencias y Comunicación IACC		1%
	Trabajo del estudiante		
6	web.cs.elte.hu		1%
	Fuente de Internet		
7	Submitted to Universidad Anahuac México Sur		1%
	Trabajo del estudiante		



Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Sanchez Baldera Jose Gustavo, Nuñez Quispe Jose Adrian
Título del ejercicio: Quick Submit
Título de la entrega: Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab para Resol...
Nombre del archivo: TESIS_GUSTAVO-JOSE.pdf
Tamaño del archivo: 5.07M
Total páginas: 135
Total de palabras: 28,181
Total de caracteres: 145,861
Fecha de entrega: 15-mar-2026 02:44a.m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 2903412982



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab para
Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo
Orden en Vibraciones Mecánicas

TESIS

Para optar el título profesional de
Licenciado en Matemáticas

Autoras:

Bach. Mat. Sanchez Baldera Jose Gustavo
Bach. Mat. Nuñez Quispe Jose Adrian

Aasesor:

Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl

LAMBAYEQUE - PERÚ
2026



Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl
DNI: 32802095
Departamento de: Matemática
Asesor

Agradecimientos

A Dios, por darme sabiduría e inteligencia para culminar con éxito esta etapa de mi vida.

A mi madre y hermanos por su amor, fortaleza y apoyo incondicional.

A nuestro asesor por impartir con nosotras sus conocimientos y guiarnos hasta el día de hoy.

Gustavo

Agradezco a Dios por guiarme y darme la fortaleza necesaria para culminar esta etapa.

A mis padres, José Javier Núñez Moreno y Sara Quispe Millones, por su amor, apoyo y sacrificio constante.

A mis hermanos, por su motivación y aliento permanente.

A mi esposa, Yanella, por su amor, comprensión y por impulsarme siempre a seguir adelante.

A todas las personas que contribuyeron de alguna manera en la realización de esta tesis, mi sincero agradecimiento.

Jose

Dedicatoria

A mi abuela, quien hoy me acompaña espiritualmente, demostrándome una vez más su fortaleza ante la vida.

A mi madre, mi pilar de vida, motivo y orgullo de ser quien soy.

A mis hermanos, gracias por confiar en mí.

Gustavo

Quiero dedicar esta tesis a mis padres, José Javier Núñez Moreno y Sara Quispe Millones, por su amor incondicional, por ser mi soporte en esta vida, esta tesis es un esfuerzo y sacrificio que los llena de orgullo, a mis hermanos, que son mi impulso para mejorar cada día más. A mi esposa Yanella, por empujarme siempre a seguir adelante y seguir compartiendo esta vida juntos. A Dios, por guiarme y protegerme siempre y llevarme por un buen camino, y enseñarme a ser una buena persona y profesional.

Jose

Índice

Agradecimientos	I
Dedicatoria	II
Índice	III
Índice de tablas	v
Índice de figuras	VI
Resumen	VIII
Abstract	IX
Introducción	x
I. DISEÑO TEÓRICO	1
1.1 Antecedentes de la Investigación	1
1.1.1 A nivel internacional	1
1.1.2 A nivel nacional	4
1.1.3 A nivel local	5
1.2 Base Teórica	9
1.3 Bases Conceptuales	19
II. DISEÑO METODOLÓGICO	25
2.1 Tipo de Investigación	25
2.2 Método de Investigación	25
2.3 Diseño de Contrastación	25
2.4 Población, Muestra y Muestreo	26
2.5 Técnicas, Instrumentos, Equipos y Materiales de Recolección de Datos	26
2.6 Procesamiento y Análisis de Datos	26
	III

III. RESULTADOS	28
3.1 Diseño de la Interfaz Gráfica de Usuario (GUI)	28
3.2 Aplicación 1: Movimiento no amortiguado (Caso 1)	35
3.3 Aplicación 2: Movimiento sobreamortiguado (Caso 2)	43
3.4 Aplicación 3: Movimiento críticamente amortiguado (Caso 3)	51
3.5 Aplicación 4: Movimiento subamortiguado (Caso 4)	58
3.6 Aplicación 5: Vibración forzada (Caso 5)	66
3.7 Aplicación 6: Vibración forzada sin amortiguamiento (Caso 6)	74
3.8 Aplicación 7: Vibración forzada sin amortiguamiento (Resonancia) (Caso 7) .	82
3.9 Aplicación 8: Sistema de suspensión de un automóvil	90
IV. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	97
V. CONCLUSIONES	106
RECOMENDACIONES	107
Referencias Bibliográficas	108
Anexos	110

Índice de tablas

1.	Comparación de solución de la aplicación 1, para $N=4$	41
2.	Comparación de solución de la aplicación 1, para $N=50$	42
3.	Comparación de solución de la aplicación 2, para $N=4$	48
4.	Comparación de solución de la aplicación 2, para $N=50$	50
5.	Comparación de solución de la aplicación 3, para $N=4$	55
6.	Comparación de solución de la aplicación 3, para $N=50$	57
7.	Comparación de solución de la aplicación 4, para $N=4$	63
8.	Comparación de solución de la aplicación 4, para $N=50$	65
9.	Comparación de solución de la aplicación 5, para $N=4$	72
10.	Comparación de solución de la aplicación 5, para $N=50$	73
11.	Comparación de solución de la aplicación 6, para $N=4$	79
12.	Comparación de solución de la aplicación 6, para $N=50$	81
13.	Comparación de solución de la aplicación 7, para $N=4$	87
14.	Comparación de solución de la aplicación 7, para $N=50$	89

Índice de figuras

1.	<i>Ingreso a guide.</i>	28
2.	<i>Componentes de la GUI.</i>	28
3.	<i>Uso de 2 static text.</i>	29
4.	<i>Guardar la GUI.</i>	29
5.	<i>Colocar el nombre la GUI.</i>	30
6.	<i>Se generan 2 archivos.</i>	30
7.	<i>Ingreso de 2 paneles.</i>	31
8.	<i>Ingreso de 9 static text.</i>	31
9.	<i>Ingreso de 8 edit text.</i>	32
10.	<i>Ingreso de una table.</i>	32
11.	<i>Ingreso de un axes.</i>	33
12.	<i>Ingreso de 4 pushbutton.</i>	33
13.	<i>Diseño de la GUI.</i>	34
14.	<i>Diseño final de la GUI.</i>	34
15.	<i>Solución de la aplicación 1, para $N=4$.</i>	40
16.	<i>Solución de la aplicación 1, para $N=50$.</i>	43
17.	<i>Solución de la aplicación 2, para $N=4$.</i>	48
18.	<i>Solución de la aplicación 2, para $N=50$.</i>	49
19.	<i>Solución de la aplicación 3, para $N=4$.</i>	55
20.	<i>Solución de la aplicación 3, para $N=50$.</i>	56
21.	<i>Solución de la aplicación 4, para $N=4$.</i>	63
22.	<i>Solución de la aplicación 4, para $N=50$.</i>	64
23.	<i>Solución de la aplicación 5, para $N=4$.</i>	71
24.	<i>Solución de la aplicación 5, para $N=50$.</i>	72
25.	<i>Solución de la aplicación 6, para $N=4$.</i>	79
26.	<i>Solución de la aplicación 6, para $N=50$.</i>	80
27.	<i>Solución de la aplicación 7, para $N=4$.</i>	87

28.	<i>Solución de la aplicación 7, para $N=50$.</i>	88
29.	<i>Solución de la aplicación 8, para $N=500$.</i>	93

Resumen

La investigación tuvo como objetivo general desarrollar un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en Matlab para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en vibraciones mecánicas mediante el método de Runge-Kutta de orden 4. El estudio fue de tipo aplicada, con enfoque cuantitativo-experimental, ya que se orientó a construir una herramienta útil para el análisis numérico y gráfico de sistemas vibratorios. La metodología comprendió el diseño de la interfaz gráfica, la programación del método numérico, la transformación de ecuaciones de segundo orden en sistemas de primer orden, el desarrollo analítico y numérico de siete casos de estudio, y la validación de resultados mediante comparación con la solución analítica y con ode45 de Matlab. Los casos desarrollados fueron: movimiento no amortiguado, movimiento sobreamortiguado, movimiento críticamente amortiguado, movimiento subamortiguado, vibración forzada, vibración forzada sin amortiguamiento y vibración forzada sin amortiguamiento en resonancia. En todos ellos se trabajó la solución analítica, la solución numérica y la verificación mediante el ejecutable. Los resultados mostraron que la herramienta permitió resolver, comparar y visualizar cada caso de manera clara. También se observó que, con pocos subintervalos, el método RK4 presentó errores en algunos problemas; sin embargo, al aumentar el número de subintervalos, la aproximación mejoró notablemente y se acercó a la solución analítica y a ode45. Se concluyó que el ejecutable desarrollado cumplió con facilitar la resolución y el análisis de problemas vibratorios, y que su estructura permitió cambiar datos de entrada de forma sencilla, por lo que pudo adaptarse para resolver cualquier ecuación aplicada a vibraciones mecánicas dentro del modelo trabajado.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias, vibraciones mecánicas, interfaz gráfica de usuario, método de Runge-Kutta de orden 4, MATLAB.

Abstract

The general objective of the research was to develop an executable graphical user interface in Matlab to solve second-order ordinary differential equations in mechanical vibrations using the fourth-order Runge-Kutta method. The study was applied in nature, with a quantitative-experimental approach, since it was aimed at building a useful tool for the numerical and graphical analysis of vibratory systems. The methodology included the design of the graphical interface, the programming of the numerical method, the transformation of second-order equations into first-order systems, the analytical and numerical development of seven study cases, and the validation of results through comparison with the analytical solution and with Matlab's ode45. The developed cases were: undamped motion, overdamped motion, critically damped motion, underdamped motion, forced vibration, forced vibration without damping, and forced vibration without damping in resonance. In all of them, the analytical solution, the numerical solution, and the verification through the executable were carried out. The results showed that the tool made it possible to solve, compare, and visualize each case clearly. It was also observed that, with a small number of subintervals, the RK4 method produced errors in some problems; however, when the number of subintervals was increased, the approximation improved considerably and became closer to the analytical solution and to ode45. It was concluded that the developed executable fulfilled its purpose of facilitating the solution and analysis of vibratory problems, and that its structure allowed input data to be changed easily, so it could be adapted to solve any equation applied to mechanical vibrations within the developed model.

Keywords: Ordinary differential equations, mechanical vibrations, graphical user interface, fourth-order Runge-Kutta method, MATLAB.

Introducción

La resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden ocupan un lugar importante en el estudio de las vibraciones mecánicas, debido a que permitió describir matemáticamente el comportamiento de sistemas como el masa-resorte y el masa-resorte-amortiguador. Estos modelos fueron fundamentales para analizar fenómenos de oscilación, amortiguamiento, vibración forzada y resonancia, los cuales estuvieron presentes en diversas aplicaciones de la ingeniería, la física y la industria. Sin embargo, en muchos casos, la solución analítica de estas ecuaciones resultó extensa y compleja, especialmente cuando se requirió comparar resultados, representar gráficas o analizar varios casos con diferentes condiciones iniciales y parámetros físicos.

A nivel internacional, diferentes investigaciones mostraron que el uso de herramientas computacionales y de interfaces gráficas permitió mejorar el análisis de sistemas dinámicos y vibratorios. Por ejemplo, Urbikain et al. (2025) desarrollaron una herramienta en MATLAB para simular vibraciones, fuerzas y estabilidad en procesos de fresado, demostrando que este entorno permitió estudiar fenómenos dinámicos de manera accesible y visual. De forma similar, Pozo et al. (2022) evidenciaron que una interfaz gráfica de usuario en MATLAB resultó útil para modelar vibraciones mecánicas mediante ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y el método de Runge-Kutta, facilitando la identificación y análisis del comportamiento vibratorio. Estos antecedentes internacionales confirmaron que la integración entre modelado matemático, métodos numéricos y entornos visuales constituyó una estrategia valiosa para resolver problemas complejos de vibraciones mecánicas.

A nivel del Perú, también se observaron avances en el estudio de vibraciones mecánicas, sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales apoyados en MATLAB. Rincón (2021) propuso un modelo discreto de múltiples grados de libertad para una viga en voladizo con un absorbedor dinámico, mostrando que MATLAB permitió evaluar la reducción de amplitudes vibracionales en distintos escenarios. Asimismo, Cabrera (2021) diseñó un módulo educativo para el estudio de vibraciones mecánicas mediante la variación de parámetros como inercia, rigidez y fuerza de excitación, concluyendo que este tipo de propuestas fortaleció la

comprensión del comportamiento vibratorio desde una perspectiva aplicada. Estos trabajos nacionales reflejaron que el software matemático fue una herramienta útil para representar, analizar y comprender sistemas vibratorios, tanto en investigación como en formación académica (Rincón, 2021).

A nivel de Lambayeque, se identificó una producción de tesis enfocadas en la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales asistidos con MATLAB. En este contexto, Chapoñan (2024) desarrolló un ejecutable de interfaz gráfica en MATLAB para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas mediante el método de Runge-Kutta de orden cuatro, demostrando la viabilidad de integrar métodos numéricos y visualización en una sola herramienta. De igual manera, Alcántara y Díaz (2021) resolvieron ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden usando Splines Cúbicos asistidos con MATLAB, obteniendo resultados numéricos cercanos a la solución exacta. Estos antecedentes locales mostraron que en Lambayeque existió interés por desarrollar recursos computacionales aplicados a ecuaciones diferenciales, aunque todavía fue necesario fortalecer propuestas orientadas específicamente a vibraciones mecánicas de segundo orden con una herramienta ejecutable, visual y funcional (Chapoñan, 2024).

Frente a esta situación, el uso de herramientas computacionales adquirió gran relevancia, ya que facilitó el tratamiento numérico de problemas vibratorios y permitió obtener resultados de manera más rápida, ordenada y visual. En este contexto, MATLAB se consolidó como un entorno adecuado para el desarrollo de aplicaciones matemáticas, debido a su capacidad para programar algoritmos, representar resultados en tablas y gráficos, y construir interfaces gráficas de usuario. Estas ventajas hicieron posible integrar en una sola herramienta el cálculo numérico, la visualización del comportamiento dinámico y la interacción directa con el usuario.

A partir de ello, la presente investigación se centró en la siguiente formulación del problema: ¿Es posible desarrollar un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en Matlab para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en vibraciones mecánicas?. Esta interrogante surgió de la necesidad de contar con una herramienta que no solo resolviera

las ecuaciones planteadas, sino que también facilitara su comprensión y análisis mediante un entorno visual, accesible y práctico.

En respuesta a esta problemática, se planteó como objetivo general desarrollar un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en Matlab para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en vibraciones mecánicas por el método de Runge-Kutta de orden 4. De manera complementaria, la investigación buscó resolver de forma analítica y numérica distintos casos de vibraciones mecánicas, comparar los resultados obtenidos y verificar el funcionamiento del ejecutable a través de ejemplos representativos.

La hipótesis de trabajo sostuvo que el desarrollo de un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en Matlab permitiría resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en vibraciones mecánicas por el método de Runge-Kutta de orden 4 de manera rápida y eficiente. Esta proposición se fundamentó en la idea de que una herramienta computacional bien diseñada podía reducir el tiempo de cálculo, mejorar la presentación de resultados y facilitar la comparación entre la solución numérica y otras referencias de validación.

Metodológicamente, la investigación fue de tipo aplicada y adoptó un enfoque cuantitativo-experimental. Se diseñó la interfaz gráfica, se programó el método de Runge-Kutta de orden 4, se transformaron las ecuaciones de segundo orden en sistemas de primer orden para su tratamiento computacional y se validó el funcionamiento del ejecutable mediante la comparación de resultados con la solución analítica y con ode45 de Matlab. Para ello, se trabajaron siete casos de estudio: movimiento no amortiguado, movimiento sobreamortiguado, movimiento críticamente amortiguado, movimiento subamortiguado, vibración forzada, vibración forzada sin amortiguamiento y vibración forzada sin amortiguamiento en resonancia.

La importancia de esta investigación radicó en que permitió integrar el modelado matemático, la solución numérica y la visualización gráfica en una sola aplicación ejecutable. Además, aportó una herramienta útil para estudiantes, docentes e investigadores, ya que facilitó el ingreso de datos, la modificación de parámetros y el análisis de diferentes problemas vibratorios sin necesidad de reprogramar cada caso. De esta manera, el estudio contribuyó tanto al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales como al análisis práctico de sistemas

mecánicos vibratorios.

La investigación quedó estructurada en varios apartados. En primer lugar, se presentó el problema de investigación, los antecedentes y las bases teóricas relacionadas con las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, las vibraciones mecánicas, el método de Runge-Kutta de orden 4 y las interfaces gráficas en Matlab. Luego, se desarrolló el diseño metodológico. Posteriormente, se mostraron los resultados obtenidos en cada una de las aplicaciones estudiadas, acompañados de su análisis, discusión, conclusiones y recomendaciones. En conjunto, el trabajo permitió demostrar la viabilidad de desarrollar un ejecutable en Matlab como apoyo para la resolución de ecuaciones diferenciales en vibraciones mecánicas.

I. DISEÑO TEÓRICO

1.1 Antecedentes de la Investigación

1.1.1 *A nivel internacional*

Urbikain et al. (2025) tuvieron como objetivo general desarrollar Mill+, una herramienta intuitiva para simular procesos de fresado, vibraciones, fuerzas de corte y calidad superficial. La metodología se sustentó en la construcción de un software abierto con arquitectura modular, orientado a resolver ecuaciones dinámicas con retardo asociadas al fresado, además de generar diagramas de estabilidad y predicciones de rugosidad superficial. Los autores incorporaron parámetros de operación típicos, como velocidad del husillo y profundidad axial de corte, y usaron visualizaciones que facilitaron el análisis del comportamiento dinámico del sistema. Los resultados mostraron que la aplicación permitió estudiar vibraciones inestables y apoyar la toma de decisiones sin depender únicamente del ensayo y error. Se concluyó que el uso de software basado en MATLAB favoreció la simulación accesible de problemas vibratorios en ingeniería. Aunque estuvo orientado a manufactura, este antecedente fue relevante porque evidenció que MATLAB puede convertirse en una plataforma robusta para herramientas gráficas ejecutables aplicadas a sistemas dinámicos con vibraciones.

Urbikain et al. (2025) plantearon como objetivo general desarrollar Turn+, una aplicación en MATLAB para análisis dinámico del torneado, predicción del chatter y estimación de rugosidad superficial. La metodología consistió en integrar, dentro de una interfaz intuitiva, datos geométricos de la herramienta, coeficientes de corte y datos modales de la máquina, resolviendo la ecuación diferencial con retardo mediante un esquema semiplícito de Euler. Además, incorporaron un posprocesador para generar mapas de estabilidad y reconstruir trayectorias de la herramienta. Los resultados indicaron una concordancia aceptable con soluciones analíticas clásicas y ensayos de corte, con diferencias del 6 % para la profundidad crítica de corte y del 8 % para la rugosidad promedio. Los autores concluyeron que la separación entre GUI y motores de solución favoreció la ampliación futura del software y su aplicación educativa e industrial. Este antecedente aportó directamente al tema

porque mostró una estructura clara para construir ejecutables en MATLAB orientados al estudio de fenómenos vibratorios.

Pena et al. (2022) tuvieron como objetivo general presentar un programa GUI en Matlab Simscape para apoyar la enseñanza de sistemas dinámicos en cursos introductorios de vibraciones mecánicas y teoría de control. La metodología se basó en el diseño del simulador, la elaboración de actividades virtuales de aula y tareas, y la aplicación de estas actividades a 19 estudiantes. El estudio se desarrolló desde un enfoque educativo, integrando simulación computacional y recolección de percepciones estudiantiles. Los resultados mostraron que la interfaz permitió representar el modelado y control de sistemas dinámicos de forma más comprensible, y las encuestas reflejaron valoraciones ampliamente positivas sobre su utilidad para el aprendizaje. Se concluyó que una GUI en MATLAB puede fortalecer la comprensión de conceptos matemáticos complejos en vibraciones y control, especialmente cuando se usa junto con actividades didácticas bien estructuradas. Este antecedente fue muy cercano al tema porque confirmó la utilidad pedagógica y funcional de una interfaz gráfica en MATLAB para sistemas vibratorios.

Espinoza (2020) tuvo como objetivo general determinar la respuesta de un sistema masa-resorte sometido a una vibración forzada no amortiguada con excitación armónica. La metodología se basó en un análisis teórico y matemático. Primero, estableció la ecuación de movimiento del sistema aplicando las leyes de Newton. Después, resolvió la ecuación diferencial mediante la ecuación característica y, de manera complementaria, presentó la transformada de Laplace como otro procedimiento de solución. Asimismo, explicó el fenómeno de resonancia cuando la frecuencia de excitación coincidió con la frecuencia natural del sistema. Los resultados mostraron que el modelo permitió describir el comportamiento dinámico del sistema masa-resorte y reconocer las condiciones en las que la amplitud de la vibración aumentó significativamente. En conclusión, el autor señaló que las ecuaciones diferenciales constituyeron una herramienta fundamental para analizar vibraciones mecánicas no amortiguadas, comprender la resonancia y representar matemáticamente la respuesta de sistemas mecánicos sometidos a fuerzas externas.

Pozo et al. (2022) tuvieron como objetivo general evaluar el uso de una interfaz gráfica de usuario desarrollada en MATLAB para modelar vibraciones mecánicas mediante la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con el método de Runge-Kutta. La metodología se basó en representar el problema general de vibraciones mecánicas a partir de ecuaciones con coeficientes constantes y transformarlas en un sistema de ecuaciones de primer orden para su tratamiento numérico. La propuesta se aplicó a vibraciones no amortiguadas, vibraciones amortiguadas libres y vibraciones forzadas. Además, la aplicabilidad de la interfaz fue validada por expertos mediante Design Thinking y una prueba de usabilidad. Los resultados mostraron que la interfaz permitió identificar, analizar y formular soluciones sobre problemas de vibraciones mecánicas y mantenimiento preventivo. En conclusión, los autores sostuvieron que la herramienta fue útil, práctica y pertinente para apoyar el modelado matemático y la interpretación computacional de fenómenos vibratorios en contextos industriales.

Arias et al. (2020) tuvieron como objetivo general verificar si el uso de una herramienta computacional para el análisis de vibraciones mecánicas mejoró el rendimiento académico en la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos. La metodología comparó a estudiantes que utilizaron la herramienta con otros que no la emplearon. En el grupo experimental se aplicó análisis cuantitativo mediante pruebas de evaluación y observación, mientras que el análisis cualitativo se realizó mediante entrevistas y cuestionarios aplicados solo a dicho grupo. La herramienta fue desarrollada sobre la plataforma Scilab/MATLAB y se utilizó para apoyar el estudio del modelo masa-resorte y del absorbedor dinámico. Los resultados evidenciaron una mejora estadísticamente significativa en el rendimiento del grupo que usó simulación, observándose un incremento del 14.3% en el promedio final. En conclusión, los autores afirmaron que la simulación computacional favoreció la comprensión de vibraciones mecánicas y fortaleció el aprendizaje de estudiantes de ingeniería.

1.1.2 A nivel nacional

Rincón (2025) tuvo como objetivo general estudiar un absorber activo de vibraciones controlado por un electroimán e implementado en una viga en voladizo para un rango definido de frecuencias de excitación. La metodología consideró un modelo continuo del sistema viga-absorber, el diseño de parámetros de masa y rigidez, y la definición de un controlador capaz de ajustar la respuesta del electroimán en tiempo real. Posteriormente, el sistema se simuló en Matlab Simulink bajo excitación cercana a la primera y segunda frecuencia de resonancia. Los resultados indicaron que el absorber activo fue capaz de sintonizarse a distintas frecuencias y reducir la amplitud de vibración hasta alrededor del 5 % del caso sin absorber. Se concluyó que el enfoque era extrapolable a sistemas más complejos mediante modelos analíticos o elementos finitos. Este antecedente fue muy útil porque unió vibraciones mecánicas, ecuaciones diferenciales, simulación computacional y control dinámico en MATLAB.

Rincón (2021) tuvo como objetivo general proponer un modelo discreto de múltiples grados de libertad para una viga en voladizo con un absorber dinámico, con el fin de cuantificar la reducción de la amplitud de vibración en distintos casos de estudio. La metodología se centró en representar la viga como un sistema discreto de grados de libertad finitos, lo cual permitió trabajar con ecuaciones diferenciales ordinarias más manejables. Luego, el comportamiento fue evaluado mediante simulaciones en MATLAB, comparando escenarios con y sin absorber. Los resultados mostraron que el rango de frecuencias donde el absorber fue efectivo aumentó al incrementarse la masa del absorber, y que la amplitud de vibración pudo reducirse a valores menores al 1 % del caso original. Se concluyó que el modelo discreto constituyó una alternativa sólida para estudiar y atenuar vibraciones no deseadas. Este antecedente fue muy importante porque se vinculó directamente con vibraciones mecánicas, sistemas de segundo orden y simulación en MATLAB.

Cabrera (2021) tuvo como objetivo general diseñar un módulo educativo para el estudio de vibraciones mecánicas mediante la variación de parámetros como inercia, rigidez y fuerza de excitación. La metodología partió de reconocer la importancia de la ingeniería

de vibraciones en la formación profesional y, desde allí, propuso un entorno experimental que permitiera observar de manera práctica el efecto de esos parámetros en la respuesta dinámica del sistema. El trabajo se enfocó en el diseño de un módulo académico orientado a la comprensión del fenómeno vibratorio desde una perspectiva aplicada. Los resultados evidenciaron que la propuesta permitió visualizar experimentalmente cómo cambian las vibraciones al modificar las variables principales del sistema. Se concluyó que este tipo de diseño ayudó a fortalecer la enseñanza y comprensión del comportamiento vibratorio. Aunque no fue una GUI, sí resultó relevante para tu investigación porque aportó la base física y educativa de los sistemas vibratorios que luego pueden resolverse en un ejecutable de MATLAB.

Baca (2019) mencionó el progreso en las técnicas de evaluación de señales vibratorias y su papel en el tratamiento de datos. Se señaló que, debido a los altos costos de los programas comerciales, ha surgido la necesidad de explorar otras opciones para detectar inconvenientes en sistemas vibratorios. Se creó una interfaz gráfica que replica un dispositivo vibratorio auténtico, lo que facilita la modelización de sistemas más complejos y la detección de defectos en sistemas vibratorios genuinos. Se llevaron a cabo entrevistas, se determinó la función de transferencia del sistema vibratorio, se efectuó un modelado matemático del sistema y se construyó la interfaz gráfica usando MATLAB. Esta interfaz puede emplearse para analizar diversas anomalías en maquinaria y dispositivos.

1.1.3 A nivel local

Espinoza y Sernaque (2025) tuvieron como objetivo general solucionar numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en circuitos eléctricos utilizando Matlab. La metodología, según el registro del repositorio, se apoyó en la aplicación iterativa de un método numérico asistido por Matlab para estudiar sistemas lineales vinculados con circuitos eléctricos. Aunque el repositorio visible no mostró el resumen completo, sí confirmó que la investigación se centró en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y en su tratamiento computacional dentro del entorno de Matlab. Los resultados consignados

en el registro permitieron identificar que la propuesta logró resolver numéricamente dichos sistemas dentro del contexto de circuitos eléctricos. En conclusión, este trabajo constituyó un antecedente relevante porque mostró que Matlab fue utilizado en Lambayeque como herramienta para analizar sistemas de ecuaciones diferenciales en aplicaciones de ingeniería. Además, reforzó la idea de que el software matemático facilitó la aproximación numérica y el estudio práctico de modelos dinámicos lineales.

Chapoñan y Llanos (2025) tuvieron como objetivo general comparar los métodos de forma canónica de Jordan y Runge-Kutta de orden cuatro para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas asistidos con Matlab. La metodología consistió en aplicar ambos métodos a sistemas lineales homogéneos de primer orden y desarrollar una interfaz gráfica de usuario en Matlab para cada procedimiento. Además, diseñaron dos aplicaciones específicas que detallaron el proceso de solución y permitieron verificar la precisión de los resultados obtenidos. Los resultados indicaron diferencias claras entre los métodos. La forma canónica de Jordan presentó una solución analítica, especialmente útil en sistemas con valores propios repetidos. Por su parte, Runge-Kutta de orden cuatro se aproximó a dicha solución con un margen mínimo de error. En conclusión, afirmaron que la GUI mejoró la interactividad, la accesibilidad y la rapidez del proceso, por lo que la herramienta resultó adecuada como apoyo para resolver sistemas homogéneos de manera sencilla y confiable.

Espinoza y Sernaque (2025) tuvieron como objetivo general solucionar numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en circuitos eléctricos utilizando Matlab. La metodología, según el registro del repositorio, se apoyó en la aplicación iterativa de un método numérico asistido por Matlab para estudiar sistemas lineales vinculados con circuitos eléctricos. Aunque el repositorio visible no mostró el resumen completo, sí confirmó que la investigación se centró en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y en su tratamiento computacional dentro del entorno de Matlab. Los resultados consignados en el registro permitieron identificar que la propuesta logró resolver numéricamente dichos sistemas dentro del contexto de circuitos eléctricos. En conclusión, este trabajo constituyó un antecedente relevante porque mostró que Matlab fue utilizado en Lambayeque como he-

herramienta para analizar sistemas de ecuaciones diferenciales en aplicaciones de ingeniería. Además, reforzó la idea de que el software matemático facilitó la aproximación numérica y el estudio práctico de modelos dinámicos lineales.

Chapoñan (2024) tuvo como objetivo general desarrollar un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en MATLAB para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas utilizando el método de Runge-Kutta de orden cuatro. La metodología se orientó al diseño de un recurso computacional ejecutable que facilitara el ingreso de datos, el procesamiento numérico y la presentación de resultados a través de una interfaz gráfica. El estudio se ubicó en la línea de solución numérica asistida con software, integrando el algoritmo de Runge-Kutta en un entorno interactivo construido en MATLAB. Los resultados reportados por el repositorio señalaron que el trabajo logró concretar el ejecutable propuesto para resolver este tipo de sistemas. Asimismo, el texto indexado indicó que los sistemas no homogéneos fueron abordados como problemas complejos que requerían apoyo computacional. En conclusión, el estudio aportó un antecedente muy cercano para tesis basadas en ejecutables y GUI, porque demostró la viabilidad de integrar métodos numéricos y visualización en una sola herramienta matemática aplicada.

Coronado y Flores (2021) tuvieron como objetivo general hallar la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales mediante el método de Runge-Kutta asistido con Matlab. La metodología se basó en dos aplicaciones. La primera correspondió a un sistema de dos ecuaciones no lineales. La segunda trabajó un modelo epidemiológico SEIR relacionado con el sarampión. En ambos casos aplicaron el método de Runge-Kutta de orden cuatro y usaron Matlab para simplificar el proceso de cálculo y visualización. En la segunda aplicación realizaron dos análisis: uno para una semana y otro para treinta semanas, con el fin de observar el comportamiento del tratamiento frente a la enfermedad. Los resultados mostraron que, conforme transcurrió el tiempo y se mantuvo el tratamiento, el sarampión tendió a desaparecer. En conclusión, señalaron que Matlab permitió resolver sistemas no lineales de forma rápida y eficiente, aportando claridad al análisis del comportamiento dinámico del modelo estudiado.

Carrasco y Heredia (2020) tuvieron como objetivo general hallar la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas mediante el método de Runge-Kutta asistido con Matlab. La metodología consistió en desarrollar dos aplicaciones. La primera abordó un sistema de dos ecuaciones no homogéneas. La segunda trató un problema de balance de masas en dos tanques, a partir del cual construyeron un sistema lineal no homogéneo con coeficientes constantes. Luego resolvieron el sistema de forma analítica por variación de parámetros y de forma numérica por Runge-Kutta de orden cuatro, usando Matlab como apoyo computacional. Los resultados mostraron que la solución numérica se aproximó a la solución analítica con un margen mínimo de error. En conclusión, determinaron que Matlab permitió resolver estos sistemas de manera sencilla, rápida y confiable, por lo que el estudio constituyó un antecedente importante para investigaciones que emplearon métodos numéricos en sistemas de ecuaciones diferenciales.

Alcántara y Díaz (2021) tuvieron como objetivo general solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden mediante el método de Splines Cúbicos asistido con Matlab. La metodología consistió en resolver de manera analítica y numérica ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas y no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, aplicadas a problemas de valores iniciales. En las ecuaciones homogéneas utilizaron el polinomio característico para identificar los distintos tipos de raíces y construir la solución correspondiente. En las ecuaciones no homogéneas aplicaron el método de variación de parámetros y el procedimiento de Splines Cúbicos, usando Matlab para facilitar el cálculo y la verificación. Los resultados mostraron que las soluciones numéricas obtenidas presentaron una alta cercanía con las soluciones exactas, con errores mínimos. En conclusión, los autores señalaron que el uso de Splines Cúbicos y Matlab constituyó una alternativa útil, precisa y confiable para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

1.2 Base Teórica

■ Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes

Castro (2022) define lo siguiente:

Definición 1. *Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes son de la forma:*

$$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad (1)$$

Donde a_0, a_1 y a_2 son constantes.

Se tiene el polinomio característico.

$$P(r) = a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \quad (2)$$

Se considerará la solución (3).

$$y = e^{rx} \quad (3)$$

por lo que el “Conjunto Fundamental de Soluciones” que se abrevia con las letras “CFS” representada en la ecuación (4).

$$CFS = \begin{cases} y = e^{rx} \\ y' = r e^{rx} \\ y'' = r^2 e^{rx} \end{cases} \quad (4)$$

Reemplazando la ecuación (1) se tiene la ecuación (5):

$$a_2 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0 \quad (5)$$

factorizando se tiene:

$$e^{rx} (a_2 r^2 + a_1 r + a_0) = 0 \quad (6)$$

Por lo tanto, este polinomio característico $P(r) = 0$ es de grado 2, por cual se pueden

obtener las siguientes raíces r_1, r_2 , las cuales pueden ser:

- Reales y distintas.
- Reales y de multiplicidad.
- Números complejos.

Entonces, para dar solución se deben tener en cuenta los siguientes casos:

- **Primer Caso**

Las raíces del polinomio característico $P(r) = 0$ son reales y distintas, es decir $r_1 \neq r_2$ el conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFSe^{r_1x}, e^{r_2x} \quad (7)$$

Y la solución homogénea es:

$$y_g = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \quad (8)$$

- **Segundo Caso**

Las raíces del polinomio característico $P(r) = 0$ son reales y de multiplicidad, es decir $r_1 = r_2$ donde r es la raíz de multiplicidad 2, entonces el conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFSe^{r_1x}, xe^{r_1x} \quad (9)$$

Y la solución homogénea es:

$$y_g = c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_2x} \quad (10)$$

- **Tercer Caso**

Cuando $P(r) = 0$ tiene algunas raíces complejas estas son: $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, r_2 =$

$\alpha_1 - i\beta_1$ Entonces el sistema fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x \quad (11)$$

y la solución homogénea es:

$$y_g = c_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + c_2 e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x \quad (12)$$

■ **Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes**

Castro (2022) definió lo siguiente:

Definición 2. *Estas ecuaciones diferenciales son de la forma.*

$$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = R(x) \quad (13)$$

Donde a_0, a_1, a_2 son constantes y elementos de los reales.

Para dar soluciones a este tipo de problemas, es determinar la solución homogénea y_g y la solución particular y_p . Por lo que solución general de una ecuación diferencial no homogénea es igual a la suma de la solución general y particular (14).

$$y = y_g + y_p \quad (14)$$

Entonces, el problema se reduce a solucionar y_p de la ecuación diferencial no homogénea. Para ello se va analizar la función $R(x)$:

$$R(x) = e^{ax} [P_n(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x)] \quad (15)$$

Donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ sean polinomios de grado n y m respectivamente por lo que:

$$y_p = x^s e^{\alpha x} [\widehat{P_k(x)} \cos(\beta x) + \widehat{Q_k(x)} \sin(\beta x)] \quad (16)$$

Donde $k = \max\{m, n\}$ y s es el orden de multiplicidad de la raíz: $r = \alpha \pm i\beta$ y $\widehat{P_k(x)}, \widehat{Q_k(x)}$ son polinomios de grado k de coeficientes indeterminados.

■ Movimiento no amortiguadas (armónico simple)

Pozo et al. (2020) mencionaron que un experimento teórico para vibraciones mecánicas de un cuerpo de masa m está conectado horizontalmente a una pared por un resorte con constante k y en experimento. Cuando el cuerpo se aleja de su punto de equilibrio una distancia x_0 y luego se suelta con una velocidad v_0 , el resorte ejerce una fuerza hacia la derecha que captura el resorte y lo retiene en otro punto, haciendo que el cuerpo se mueva a la izquierda y la fuerza del resorte está determinada por su distancia de compresión o extensión, que se rige por la ley de Hooke. Este experimento teórico proporciona un modelo para estudiar las vibraciones mecánicas en los sistemas con resortes, ecuación (17).

$$F_R = -kx \quad (17)$$

Donde “ k es la constante de rigidez con el signo negativo que indica la fuerza restauradora y x es la deformación del resorte”.

Se le aplica al cuerpo, la “segunda ley de Newton”, dada por:

$$F = ma = m\ddot{x} \quad (18)$$

De la ecuación (18) se obtiene el modelado del sistema masa-resorte.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ m\ddot{x} + kx &= 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \end{aligned}$$

■ Vibraciones amortiguadas libres

Pozo et al. (2020) menciona que Las fuerzas perturbadoras dependen de la velocidad; entre mayor sea la velocidad, mayor es la fuerza que ejerce y se expresa $F_A = bv$ donde

b es la constante de proporcionalidad y v la velocidad de la oscilación, expresada por:

$$F_A = -bv = -b\dot{x} \quad (19)$$

El signo negativo indica la fuerza amortiguadora se opone a la velocidad del cuerpo.

Aplicando la “segunda ley de newton” se tiene:

$$\sum F_x = ma = F_r + F_A \quad (20)$$

$$ma = -kx - bv$$

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

Entonces la ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (21)$$

■ Método de Runge-Kutta de orden 4

Montalvan y Burga (2022) mencionaron el algoritmo de la forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (22)$$

Donde:

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

N = número de subintervalos.

■ Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

Pozo et al. (2020) mencionaron el siguiente modelo matemático:

$$\begin{aligned} F &= ma \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - b \frac{dx}{dt} + Fe \\ mx'' &= -kx - bx' + Fe \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (23) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes de vibraciones mecánicas sería:

$$mx'' + bx' + kx = Fe \quad (23)$$

Dónde:

$x = x(t)$ es la posición, $\frac{dx}{dt} = x'$ es la velocidad, $\frac{d^2x}{dt^2} = x''$ es la aceleración, b es el coeficiente de amortiguamiento, k es el coeficiente del resorte y Fe es la fuerza externa.

“Convirtiendo una ecuación diferencial de segundo orden en un sistema” se tiene:

$$mx'' + bx' + kx = Fe$$

$$\text{Con condiciones iniciales: } \begin{cases} x(0) = i_0 \\ x'(0) = i_1 \end{cases} \quad \text{Se tiene:}$$

$$\begin{aligned} mx'' &= -bx' - kx + Fe(\div m) \\ \frac{m}{m}x'' &= -\frac{b}{m}x' - \frac{k}{m}x + \frac{Fe}{m} \end{aligned}$$

despejando se tiene:

$$x'' = -\frac{b}{m}x' - \frac{k}{m}x + \frac{Fe}{m}$$

Condiciones a aplicar:

$$x = x_1$$

$$x' = x'_1 = x_2$$

$$x'' = x''_1 = x'_2 = x_3$$

Se obtiene un sistema equivalente

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{Fe}{m} \end{cases}$$

Con condiciones iniciales: $x_1(0) = i_0$ y $x_2(0) = i_1$ ”

■ Matlab

El sistema informático y de cálculo numérico llamado MATLAB proporciona a los usuarios un entorno de desarrollo integrado, o IDE, así como un lenguaje propio del que se hablará más adelante. El beneficio de este software es que es una aplicación multiplataforma, lo que significa que es disponible para Unix, Windows, Mac OS X y GNU/Linux. “El nombre de este programa viene de la abreviatura de MATrix LABoratory, ya que una de sus principales utilidades es la que se encarga de realizar operaciones matriciales, aparte de poder representar en gráficas diferentes conjuntos de datos y funciones, crear algoritmos, crear y desarrollar diferentes interfaces (MATLAB App Designer), y hace que sea posible la comunicación con otros programas, aunque posean un lenguaje diferente”. (Toledano, 2019)

Interfaces Gráficas en Matlab

Las GUI (también conocidas como interfaces gráficas de usuario o interfaces de usuario) permiten un control sencillo de las aplicaciones de software, lo cual elimina la necesidad de aprender un lenguaje y escribir comandos a fin de ejecutar una aplicación. “Las apps de MATLAB son programas autónomos de MATLAB con un frontal gráfico de usuario GUI que automatizan una tarea o un cálculo. Por lo general, la GUI incluye controles tales como menús, barras de herramientas, botones y controles

deslizantes. Muchos productos de MATLAB, como Curve Fitting Toolbox, Signal Processing Toolbox y Control System Toolbox, incluyen apps con interfaces de usuario personalizadas". También es posible crear apps personalizadas propias, incluidas las interfaces de usuario correspondientes, para que otras personas las utilicen. (MathWorks, 2023)

Fundamentación matemática de vibraciones mecánicas (masa-resorte)

1. Sistema físico y ecuaciones básicas

- **Definición (Ley de Hooke).** La fuerza restauradora del resorte es proporcional y opuesta al alargamiento:

$$F_R = -k x,$$

donde $k > 0$ es la rigidez y x la deformación.

- **Definición (Segunda ley de Newton).** La fuerza neta sobre la masa satisface $F = m a = m \ddot{x}$ (Pozo et al., 2022).

- **Ecuación de movimiento sin amortiguamiento.** Para el sistema masa-resorte ideal:

$$m \ddot{x} + k x = 0,$$

que describe un movimiento armónico simple.

- **Frecuencia natural (caso $b = 0$).** La frecuencia natural es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

parámetro central en la dinámica del oscilador (Pozo et al., 2022).

2. Amortiguamiento viscoso y ecuación general

- **Definición (fuerza amortiguadora viscosa).** La fuerza de rozamiento lineal

se modela como

$$F_A = -b \dot{x},$$

con $b > 0$ proporcional a la velocidad (Pozo Parra et al., 2022).

- **Ecuación de movimiento con amortiguamiento (libre y forzada).**

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = 0 \quad (\text{vibración libre}),$$

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = F_e(t) \quad (\text{vibración forzada}),$$

donde $F_e(t)$ es la excitación externa (Pozo Parra et al., 2022).

3. Clasificación de vibraciones libres (según el discriminante)

- Considerando la ecuación característica $mr^2 + br + k = 0$:
- **Sobreamortiguado** ($b^2 - 4mk > 0$): dos raíces reales y negativas; no hay oscilación,

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

- **Críticamente amortiguado** ($b^2 - 4mk = 0$): raíz doble $r = -\frac{b}{2m}$,

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-(b/2m)t}.$$

- **Subamortiguado** ($b^2 - 4mk < 0$): raíces complejas conjugadas,

$$x(t) = e^{-(b/2m)t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)), \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

- **Resultado cualitativo.** Existe una transición sobreamortiguado $\rightarrow$ subamortiguado con régimen crítico como frontera, con interpretación física estándar en el sistema masa-resorte-amortiguador (Pozo et al., 2022).

4. Vibraciones forzadas y resonancia

- **Modelo forzado.** Para una excitación sinusoidal $F_e(t) = F_0 \cos(\omega_e t)$:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = F_0 \cos(\omega_e t).$$

La solución total es suma de la homogénea y una particular del tipo $A \sin(\omega_e t) + B \cos(\omega_e t)$ (método de coeficientes indeterminados) (Pozo et al., 2022).

- **Resonancia (caso ideal $b = 0$).** Si $\omega_e \approx \omega = \sqrt{k/m}$, la amplitud crece notablemente; para $\omega_e = \omega$ se requiere un ansatz con factor t (solución en resonancia) (Pozo et al., 2022).
- **Nota aplicada.** Las vibraciones forzadas son relevantes en ingeniería (desequilibrios, fuerzas centrífugas, etc.).

5. Forma de primer orden (para implementación numérica)

- Reescritura del PVI de segundo orden como sistema de primer orden, definiendo $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\frac{b}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 + \frac{1}{m} F_e(t), \end{cases} \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

formulación estándar para resolver con integradores numéricos (Pozo et al., 2022).

6. Método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4)

- **Definición (RK4 clásico).** Para el problema $y' = f(x, y)$ con paso h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k), \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_2\right), \\ k_4 &= f(x_k + h, y_k + h k_3), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

1.3 Bases Conceptuales

1. Ejecutable de interfaz gráfica de usuario

Un ejecutable de interfaz gráfica de usuario es un programa que permite al usuario trabajar con botones, cuadros de texto, tablas y gráficos sin necesidad de escribir comandos. En MATLAB, este tipo de herramienta ayuda a ingresar datos, ejecutar cálculos y observar resultados de manera rápida. Cuando la interfaz se convierte en ejecutable, puede usarse en otras computadoras sin necesidad de modificar el código fuente. Esto resulta útil en educación, investigación e ingeniería, porque facilita el uso de métodos numéricos para resolver problemas matemáticos. Además, hace que temas complejos sean más accesibles para personas que no tienen mucha experiencia en programación. Por ello, un ejecutable con interfaz gráfica no solo cumple una función técnica, sino también una función de apoyo al aprendizaje (MathWorks, 2026).

2. Interfaz gráfica de usuario en MATLAB

La interfaz gráfica de usuario, también llamada GUI, es un entorno visual que permite crear aplicaciones interactivas dentro de MATLAB. Según MathWorks (2026), GUIDE permite diseñar, editar y compartir aplicaciones con elementos visuales y programación integrada. Esto hace posible construir una herramienta en la que el usuario ingrese datos como masa, amortiguamiento, rigidez, condiciones iniciales o tiempo, y obtenga automáticamente tablas, gráficos y soluciones aproximadas. La GUI es importante porque organiza mejor el proceso de cálculo, reduce errores al ingresar datos y mejora la interacción con el programa. En trabajos de investigación, una GUI permite unir matemáticas, programación y visualización en una sola herramienta, lo cual ayuda a comprender mejor los problemas planteados.

3. MATLAB como entorno de cálculo científico

MATLAB es un programa muy utilizado en matemáticas, ingeniería y ciencias, porque permite realizar cálculos numéricos, programar algoritmos, trabajar con matrices y

generar gráficos. También permite resolver ecuaciones diferenciales, crear aplicaciones y representar resultados de forma visual. En vibraciones mecánicas, MATLAB es útil porque ayuda a modelar sistemas como masa-resorte-amortiguador y a observar cómo cambia su movimiento con el tiempo. Además, ofrece herramientas para convertir una aplicación en un archivo ejecutable. Por esta razón, MATLAB no solo se usa como software de cálculo, sino también como una plataforma para diseñar aplicaciones científicas que ayuden a resolver problemas reales (MathWorks, 2026).

4. Ecuación diferencial ordinaria

Una ecuación diferencial ordinaria es una expresión matemática en la que aparece una función desconocida y una o más de sus derivadas respecto de una sola variable independiente. Estas ecuaciones se usan para describir fenómenos que cambian con el tiempo, como el movimiento, el crecimiento, la corriente eléctrica o las vibraciones. Su importancia está en que permiten representar situaciones reales mediante un modelo matemático. En vibraciones mecánicas, la posición de una masa cambia con el tiempo y depende de factores como la fuerza del resorte, el amortiguamiento y la fuerza externa. Por ello, las ecuaciones diferenciales ordinarias son la base para estudiar el movimiento oscilatorio de muchos sistemas físicos (Zill, 2023).

5. Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden son aquellas en las que la derivada de mayor grado es la segunda derivada. Este tipo de ecuaciones es muy importante en mecánica, porque la segunda derivada representa la aceleración. En muchos problemas físicos, especialmente en vibraciones, se necesita conocer la posición inicial y la velocidad inicial para determinar una solución única. Cuando se aplica la segunda ley de Newton, la ecuación que resulta suele ser de segundo orden. Por eso, estas ecuaciones permiten describir cómo cambia el desplazamiento de un sistema en función del tiempo, considerando la masa, la rigidez, el amortiguamiento y las fuerzas externas que actúan sobre él (Zill, 2023).

6. Problema de valor inicial

Un problema de valor inicial está formado por una ecuación diferencial y por los valores iniciales necesarios para encontrar una solución específica. En una ecuación de segundo orden, normalmente se necesita conocer la posición inicial y la velocidad inicial. En vibraciones mecánicas, estos datos representan el estado del sistema en el momento en que empieza el análisis. Por ejemplo, una masa puede comenzar desde cierta posición y con cierta velocidad. Estas condiciones son importantes porque cambian la respuesta del sistema. Incluso si dos sistemas tienen la misma ecuación diferencial, su comportamiento puede ser distinto si sus condiciones iniciales no son iguales. Por ello, el problema de valor inicial completa el modelo matemático y permite representar casos reales de forma más precisa (Zill, 2023).

7. Vibraciones mecánicas

Las vibraciones mecánicas son movimientos repetitivos que ocurren alrededor de una posición de equilibrio. Este tipo de movimiento aparece en máquinas, estructuras, vehículos, puentes y muchos otros sistemas de ingeniería. Su estudio es importante porque permite entender cómo responde un sistema cuando recibe una perturbación o una fuerza externa. Una vibración ocurre cuando un cuerpo es desplazado de su posición de equilibrio y aparecen fuerzas que intentan devolverlo a ese punto. Dependiendo de las características del sistema, el movimiento puede disminuir, mantenerse o aumentar. Por ello, las vibraciones mecánicas son fundamentales en ingeniería, ya que ayudan a prevenir fallas, mejorar diseños y comprender el comportamiento dinámico de diferentes estructuras y mecanismos (Pozo et al., 2022).

8. Sistema masa-resorte-amortiguador

El sistema masa-resorte-amortiguador es uno de los modelos más usados para estudiar vibraciones mecánicas. Está formado por una masa que se mueve, un resorte que trata de devolverla a su posición de equilibrio y un amortiguador que reduce el movimiento. Cuando además actúa una fuerza externa, el sistema se representa mediante la

ecuación

$$my'' + cy' + ky = F(t),$$

donde m es la masa, c es el coeficiente de amortiguamiento, k es la rigidez del resorte y $F(t)$ es la fuerza aplicada. Este modelo es importante porque resume en una sola ecuación los principales factores que intervienen en el movimiento vibratorio de muchos sistemas reales. Por ello, se considera una base fundamental para el análisis de vibraciones y para el desarrollo de aplicaciones en MATLAB (Pozo et al., 2022).

9. Vibración libre no amortiguada

La vibración libre no amortiguada ocurre cuando un sistema se mueve sin fuerza externa y sin pérdida de energía por fricción o resistencia. En este caso, la ecuación del movimiento es

$$my'' + ky = 0.$$

La respuesta del sistema es periódica y depende de su frecuencia natural. Este movimiento es conocido como movimiento armónico simple. Este caso es el más sencillo dentro del estudio de vibraciones y sirve para comprender conceptos básicos como amplitud, frecuencia, período y fase. Además, es muy útil en una aplicación de MATLAB, porque permite comprobar si el algoritmo está funcionando correctamente al reproducir el comportamiento esperado de un sistema ideal sin amortiguamiento (Pozo et al., 2022).

10. Vibración libre amortiguada

La vibración libre amortiguada aparece cuando el sistema vibra sin fuerza externa, pero pierde energía debido al rozamiento o a la resistencia del medio. En este caso, la ecuación se expresa como

$$my'' + cy' + ky = 0.$$

La principal característica es que la amplitud disminuye con el tiempo. Dependiendo del valor del amortiguamiento, el sistema puede ser subamortiguado, críticamente

amortiguado o sobreamortiguado. Estas formas de respuesta permiten estudiar cómo vuelve el sistema a su posición de equilibrio. Este análisis es importante porque ayuda a entender cómo reducir vibraciones no deseadas en máquinas y estructuras. Dentro de una interfaz gráfica en MATLAB, este caso permite observar visualmente cómo cambia la respuesta cuando se modifica el coeficiente de amortiguamiento (Pozo et al., 2022).

11. Vibración forzada y resonancia

La vibración forzada ocurre cuando una fuerza externa actúa continuamente sobre el sistema. En ese caso, la ecuación mantiene el término $F(t)$, que representa la excitación externa. Este tipo de vibración es muy importante porque en la realidad muchas máquinas y estructuras están sometidas a fuerzas periódicas. Un concepto fundamental es la resonancia, que aparece cuando la frecuencia de la fuerza externa se acerca a la frecuencia natural del sistema. Cuando esto sucede, la amplitud del movimiento puede aumentar mucho y causar daños o fallas. Por ello, estudiar la resonancia es esencial en ingeniería. En una aplicación numérica, este caso permite simular situaciones reales y analizar cómo influyen la fuerza, la frecuencia y el amortiguamiento en la respuesta del sistema (Pozo et al., 2022).

12. Conversión de una ecuación de segundo orden en un sistema de primer orden

Para resolver numéricamente una ecuación diferencial de segundo orden, muchas veces se transforma en un sistema de ecuaciones de primer orden. Esto se hace definiendo nuevas variables. Por ejemplo, si y representa el desplazamiento, se puede definir $v = y'$ como la velocidad. Así, la ecuación original se convierte en dos ecuaciones de primer orden: una para la posición y otra para la velocidad. Este procedimiento es importante porque muchos métodos numéricos, como Runge-Kutta, trabajan de forma más directa con sistemas de primer orden. Además, en vibraciones mecánicas esta representación tiene sentido físico, ya que describe por separado el comportamiento

del desplazamiento y de la velocidad. En MATLAB, esta transformación facilita la programación y la interpretación de los resultados (Pozo et al., 2022).

13. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

El método de Runge-Kutta de cuarto orden es uno de los métodos numéricos más usados para resolver problemas de valor inicial. Su ventaja principal es que ofrece buena precisión sin necesidad de procesos demasiado complicados. Este método calcula aproximaciones sucesivas usando pendientes intermedias, lo que mejora la exactitud de la solución. En problemas de vibraciones mecánicas, resulta muy útil porque permite obtener la evolución del desplazamiento y de la velocidad cuando la solución exacta es difícil de encontrar. Además, se adapta muy bien al uso de MATLAB, ya que puede programarse de forma ordenada y mostrar resultados en tablas y gráficos. Por ello, cuando se incluye dentro de una interfaz gráfica, se convierte en una herramienta valiosa para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden de forma práctica y comprensible (Chapra & Canale, 2021).

14. Importancia de un ejecutable para el estudio de vibraciones mecánicas

Elaborar un ejecutable de interfaz gráfica en MATLAB para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden en vibraciones mecánicas tiene gran importancia en el campo académico y aplicado. Desde el punto de vista académico, ayuda a comprender mejor conceptos como frecuencia natural, amortiguamiento y resonancia. Desde el punto de vista práctico, permite que estudiantes, docentes e ingenieros usen la herramienta sin necesidad de programar. También facilita el análisis de diferentes casos cambiando parámetros de entrada y observando resultados de forma inmediata. Además, al convertirse en ejecutable, la aplicación puede compartirse y utilizarse en otros equipos de manera más sencilla. En consecuencia, esta propuesta convierte un modelo matemático en una herramienta accesible, útil y funcional para el estudio de las vibraciones mecánicas (MathWorks, 2026).

II. DISEÑO METODOLÓGICO

2.1 Tipo de Investigación

La presente investigación es de tipo aplicada, ya que se enfoca en el desarrollo de una solución concreta a una necesidad académica: resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden asociadas a vibraciones mecánicas. Para ello, se diseña un ejecutable mediante una interfaz gráfica de usuario (GUI) desarrollada en Matlab GUIDE, la cual permite ingresar datos, ejecutar el método numérico y visualizar los resultados. Esta herramienta busca facilitar la comprensión y análisis de sistemas vibratorios, tanto para fines educativos como para aplicaciones técnicas básicas.

2.2 Método de Investigación

Se adopta un método cuantitativo-experimental, dado que el estudio se basa en el análisis de datos numéricos generados a partir de simulaciones realizadas en la interfaz desarrollada. Estos resultados serán comparados con soluciones exactas o generadas por software especializado, lo que permitirá validar la precisión del sistema propuesto y su utilidad en el aprendizaje y resolución de ecuaciones diferenciales en el contexto de las vibraciones mecánicas.

2.3 Diseño de Contrastación

El diseño adoptado es de tipo iterativo, estructurado en las siguientes etapas:

- **Diseño de la interfaz gráfica de usuario en Matlab GUIDE:** Se desarrolló una GUI funcional que permita al usuario ingresar coeficientes, condiciones iniciales y parámetros del problema, así como visualizar resultados numéricos y gráficos en tiempo real.
- **Implementación del método numérico:** Se programó el método de Runge-Kutta de orden 4 adaptado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, transformadas en sistemas de primer orden para su tratamiento computacional.

- **Pruebas experimentales:** Se ejecutaron casos de prueba con funciones que tienen solución conocida. Se identificaron errores numéricos, se realiza el ajuste correspondiente y se optimiza la interfaz.
- **Validación de resultados:** Los valores obtenidos en la interfaz se compararon con soluciones exactas o generadas por software reconocido, garantizando que el ejecutable funcione correctamente y que su uso sea confiable en entornos educativos.

2.4 Población, Muestra y Muestreo

Esta investigación no considera población ni muestra, ya que está centrada en el desarrollo, prueba y validación de una herramienta computacional. El análisis se enfoca en la precisión del método implementado y la funcionalidad de la interfaz gráfica de usuario.

2.5 Técnicas, Instrumentos, Equipos y Materiales de Recolección de Datos

- **Técnicas:** Simulación computacional, análisis de error numérico, comparación con soluciones exactas.
- **Instrumentos:** Interfaz gráfica de usuario ejecutable en Matlab GUIDE, código fuente en Matlab R2021a, herramientas de visualización y depuración.
- **Equipos:** Computadora con capacidad suficiente para ejecutar Matlab y compilar el ejecutable.
- **Materiales:** Casos de ecuaciones diferenciales de segundo orden, condiciones iniciales definidas, tablas de resultados comparativos y bibliografía técnica relacionada con métodos numéricos.

2.6 Procesamiento y Análisis de Datos

- **Procesamiento de datos:** Los resultados se generaron automáticamente a través del ejecutable, una vez que el usuario ingresa los datos del sistema vibratorio. Estos valores se almacenan para su análisis.

- **Análisis de datos:** Se evaluó el desempeño del método aplicado en la GUI, comparando los resultados obtenidos con soluciones exactas o calculadas con otros programas. Se calculan errores absolutos y relativos para medir la precisión.
- **Validación:** Se realizaron múltiples pruebas con distintos tipos de ecuaciones, condiciones iniciales y parámetros. Se observa la estabilidad de los resultados conforme se ajustan los valores de entrada, garantizando la confiabilidad del sistema en distintos contextos.

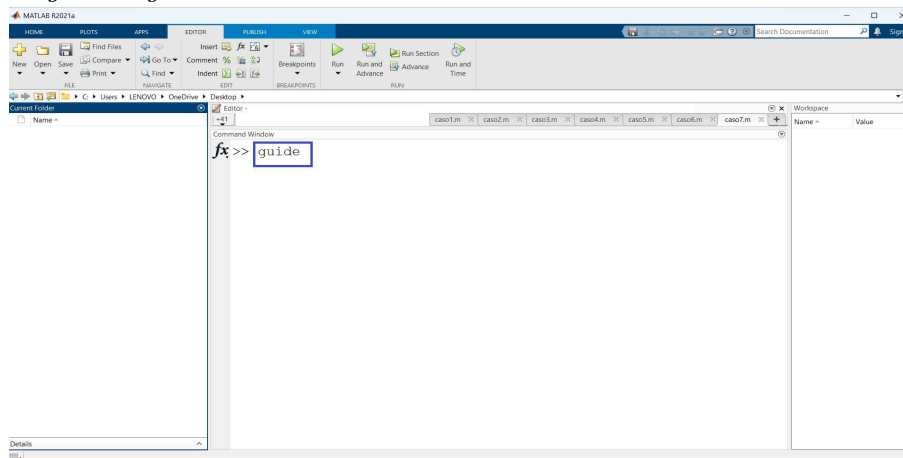
III. RESULTADOS

3.1 Diseño de la Interfaz Gráfica de Usuario (GUI).

Paso 1: La Figura (1) muestra como se debe ingresar en guide.

Figura 1

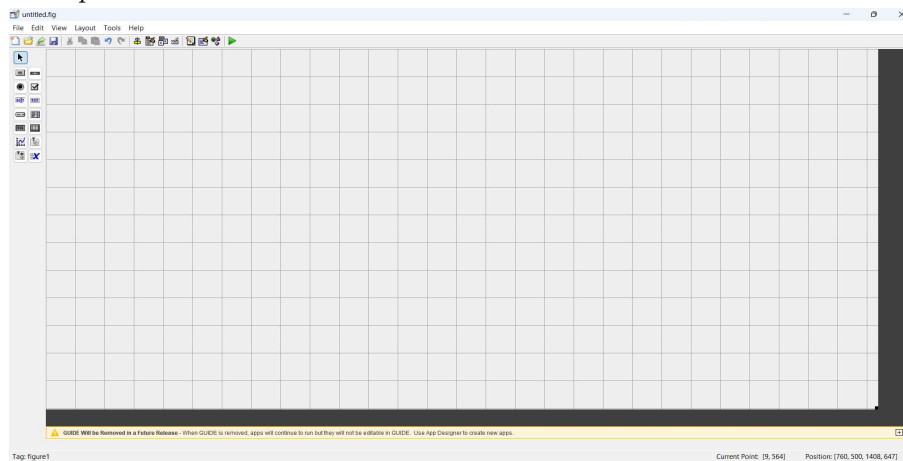
Ingreso a guide.



Paso 2: La Figura (2) muestra todo los componentes de la guide.

Figura 2

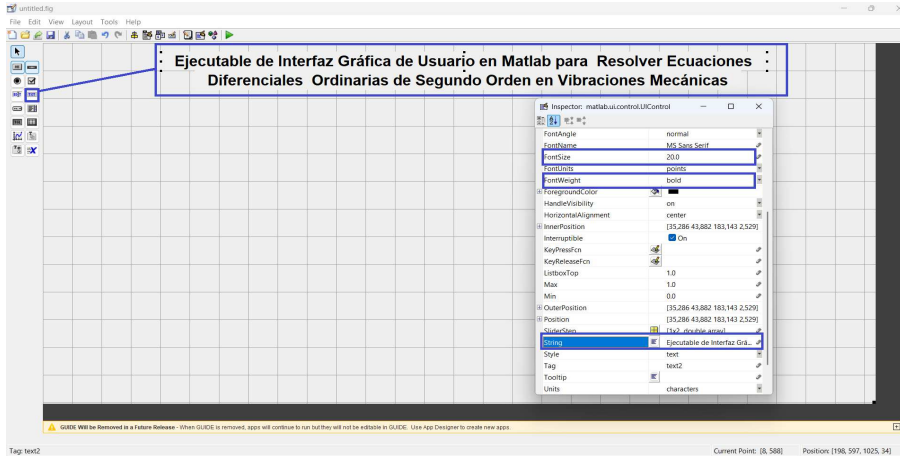
Componentes de la GUI.



Paso 3: La Figura (3) muestra que se utilizó 2 static text para colocar el título de nuestra investigación.

Figura 3

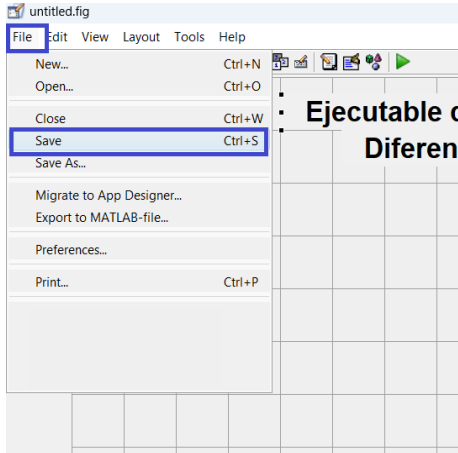
Uso de 2 static text.



Paso 4: La Figura (4) muestra como se debe guardar la GUI.

Figura 4

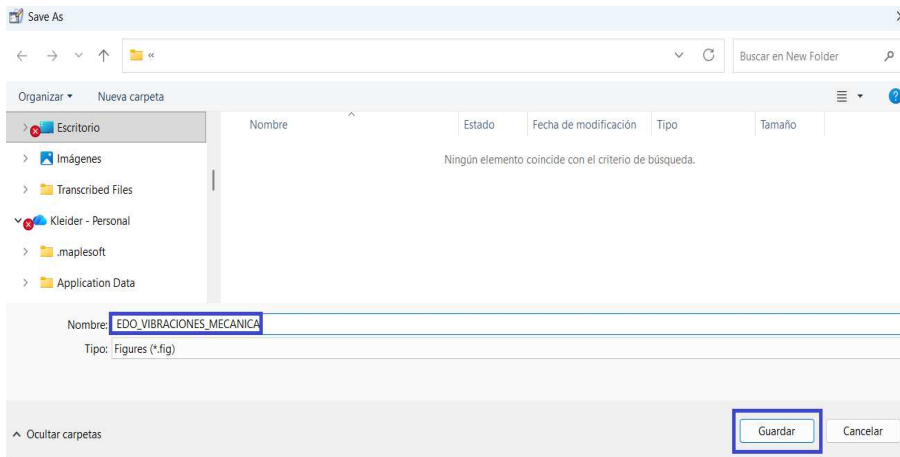
Guardar la GUI.



Paso 5: La Figura (5) muestra con que nombre se guarda la GUI

Figura 5

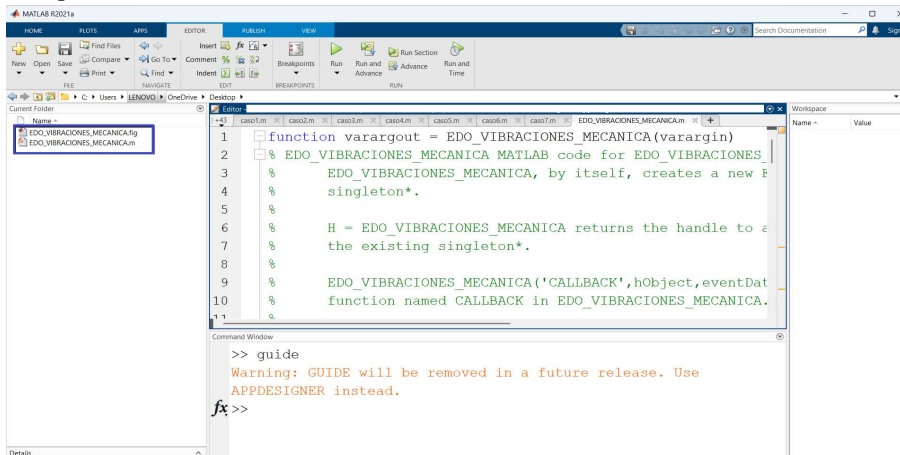
Colocar el nombre la GUI.



Paso 6: La Figura (6) muestra que al momento de guardar la GUI se generan 2 archivos, uno con la extensión .fig y el otro con la extensión .m.

Figura 6

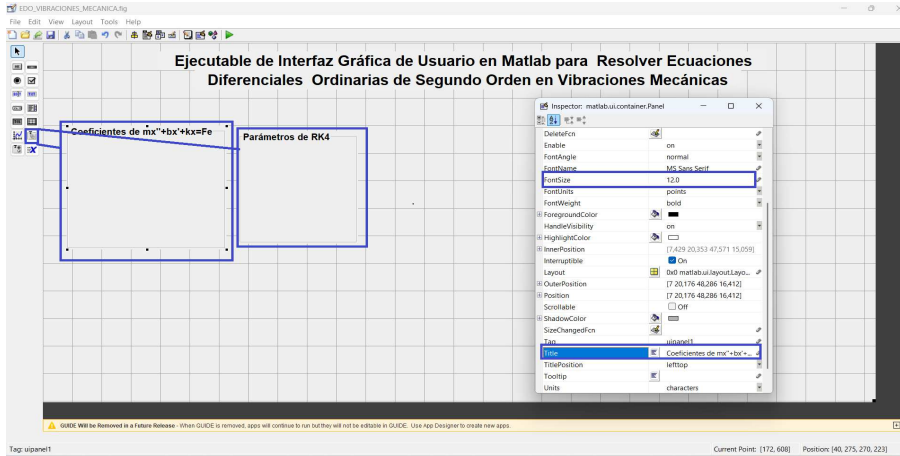
Se generan 2 archivos.



Paso 7: La Figura (7) muestra 2 paneles que sirven para encapsular los datos de la ecuación diferencial de segundo y sus parámetros.

Figura 7

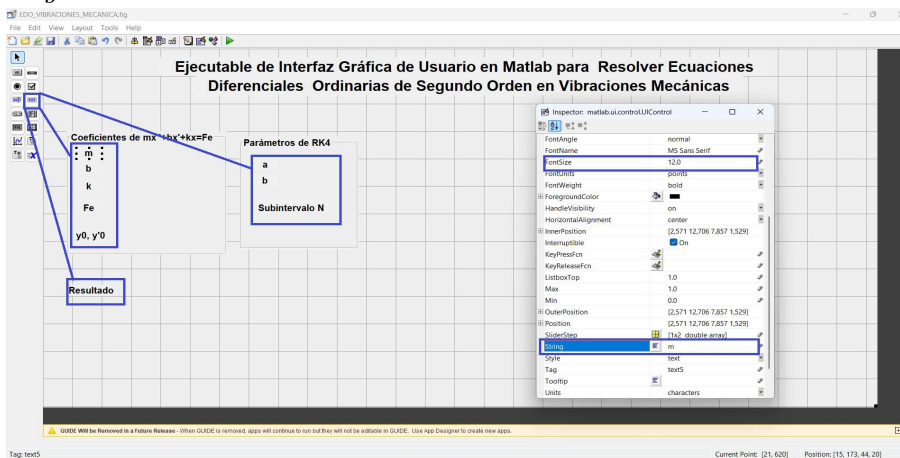
Ingreso de 2 paneles.



Paso 8: La Figura (8) muestra que se utilizó 9 static text para colocar los nombres de la ecuación, parámetros y resultado.

Figura 8

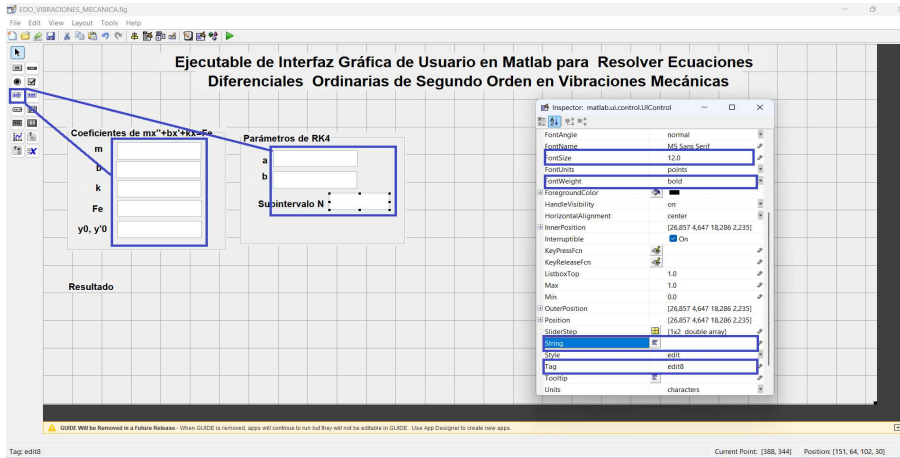
Ingreso de 9 static text.



Paso 9: La Figura (9) muestra que se utilizó 8 edit text, para ingresar los valores de la ecuación diferencial de segundo orden.

Figura 9

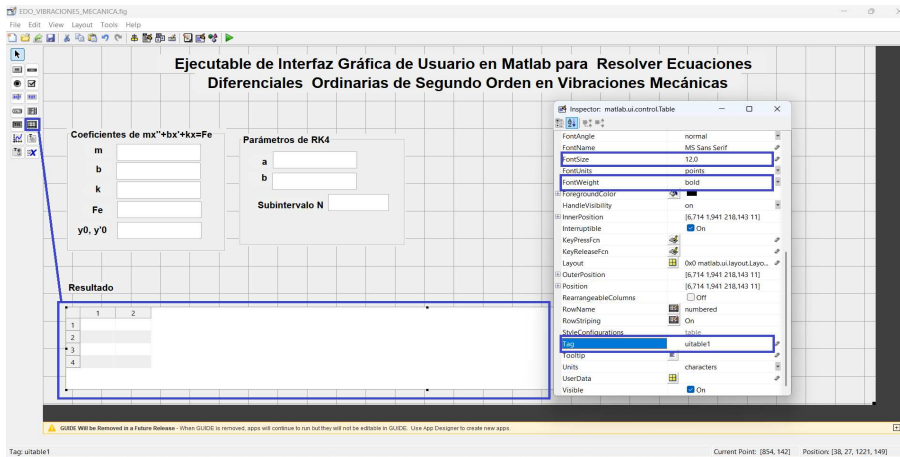
Ingreso de 8 edit text.



Paso 10: La Figura (10) muestra que se agregó una tabla para mostrar los resultados.

Figura 10

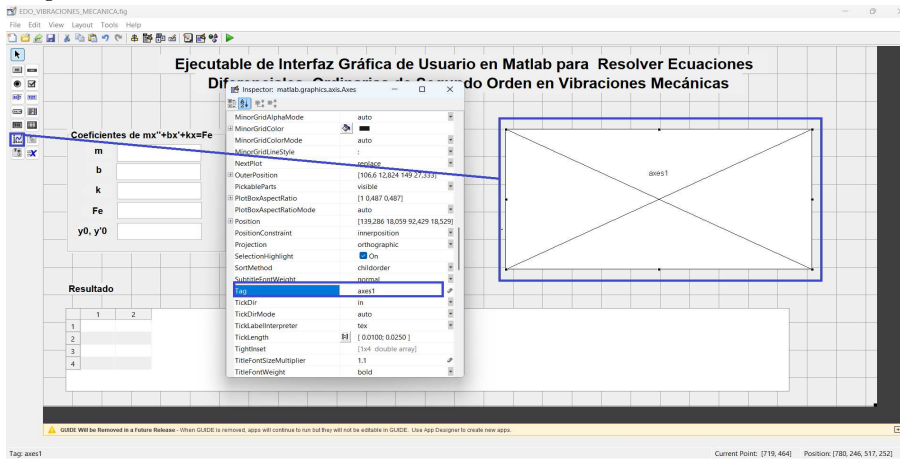
Ingreso de una table.



Paso 11: La Figura (11) muestra como se agregó un axes para mostrar la gráfica.

Figura 11

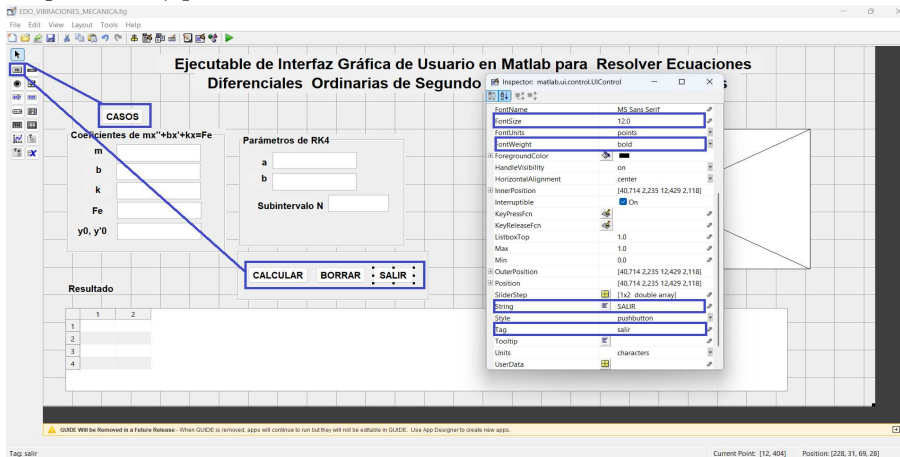
Ingreso de un axes.



Paso 12: La Figura (12) muestra como se ingresó 4 pushbutton que son para los botones casos, calcular, borrar y salir.

Figura 12

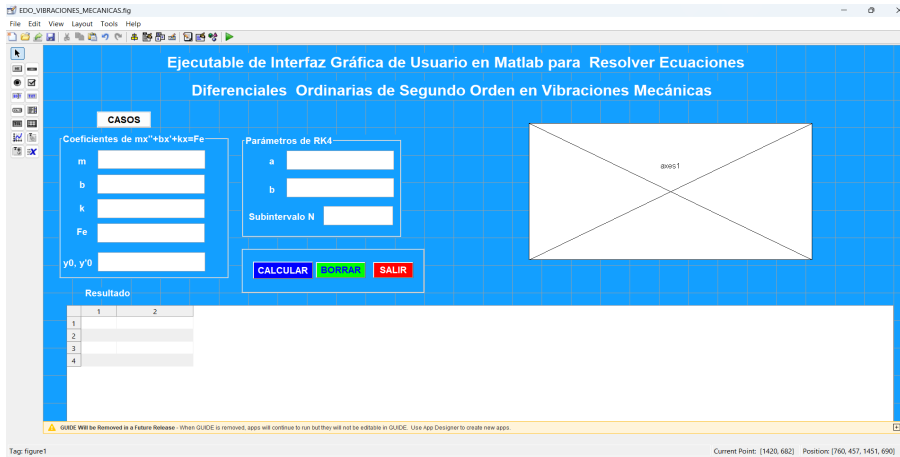
Ingreso de 4 pushbutton.



Paso 13: La Figura (13) muestra el diseño de la GUI.

Figura 13

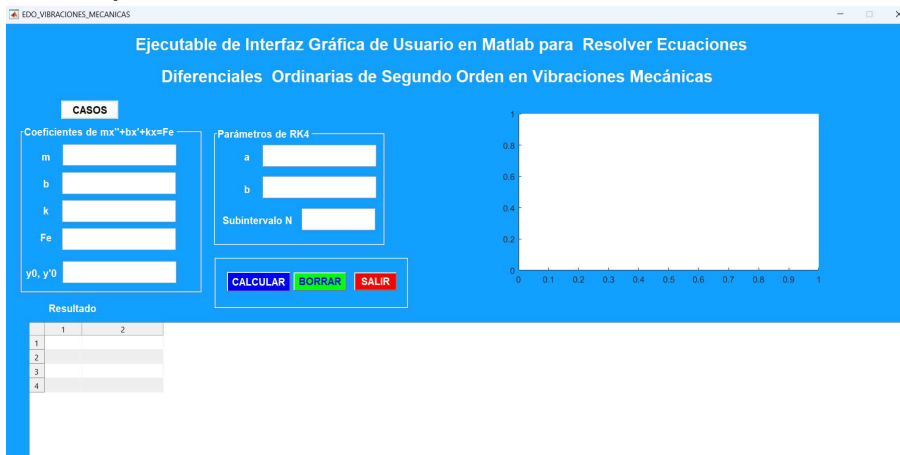
Diseño de la GUI.



Paso 14: La Figura (14) muestra el diseño final de la GUI

Figura 14

Diseño final de la GUI.



3.2 Aplicación 1: Movimiento no amortiguado (Caso 1)

Un cuerpo de masa de $4Kg$ que está sujeto a una pared mediante un resorte de constante $k = 400 \text{ N/m}$; que se contrae el resorte a una distancia de $0.06m$ y se lo suelta con una velocidad de 0.8 m/s hacia la posición de equilibrio. Encuentre la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, calcule la frecuencia, la amplitud y el ángulo de fase.

Solución

1. Solución analítica

a) Planteamiento del problema.

Ecuación del sistema masa-resorte (sin fuerza externa):

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

con los datos:

$$m = 4, \quad k = 400, \quad x(0) = x_0 = -0.06, \quad \dot{x}(0) = v_0 = 0.8.$$

Al sustituir:

$$4\ddot{x} + 400x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 100x = 0.$$

b) Ecuación característica y frecuencia.

Buscando soluciones del tipo $x(t) = e^{rt}$:

$$r^2 + 100 = 0 \Rightarrow r = \pm 10i.$$

Entonces la frecuencia angular (natural) es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10 \text{ rad/s}.$$

La frecuencia en Hz y el periodo:

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} \approx 1.59155 \text{ Hz}}, \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} \approx 0.62832 \text{ s}}.$$

c) Solución general.

Como las raíces son imaginarias puras, la solución general es:

$$x(t) = C_1 \cos(10t) + C_2 \sin(10t).$$

La velocidad:

$$\dot{x}(t) = -10C_1 \sin(10t) + 10C_2 \cos(10t).$$

d) Determinación de constantes con condiciones iniciales.

Aplicando $x(0) = -0.06$:

$$x(0) = C_1 = -0.06.$$

Aplicando $\dot{x}(0) = 0.8$:

$$\dot{x}(0) = 10C_2 = 0.8 \Rightarrow C_2 = 0.08.$$

e) Soluciones finales (posición y velocidad).

Sustituyendo C_1 y C_2 :

$$\boxed{x(t) = -0.06 \cos(10t) + 0.08 \sin(10t)},$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = 0.6 \sin(10t) + 0.8 \cos(10t)}.$$

f) Amplitud y ángulo de fase.

Se escribe $x(t) = A \cos(10t - \phi)$, donde:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(-0.06)^2 + (0.08)^2} = \sqrt{0.01} = 0.1.$$

$$\boxed{A = 0.1 \text{ m}}.$$

Y la fase:

$$\cos \phi = \frac{C_1}{A} = \frac{-0.06}{0.1} = -0.6, \quad \sin \phi = \frac{C_2}{A} = \frac{0.08}{0.1} = 0.8,$$

$$\boxed{\phi = \text{atan2}(0.8, -0.6) \approx 2.2143 \text{ rad} \approx 126.87^\circ}.$$

Por tanto:

$$\boxed{x(t) = 0.1 \cos(10t - 2.2143)}.$$

2. Solución numérica

a) Reducción a un sistema de primer orden.

La EDO

$$4\ddot{x} + 400x = 0, \quad x(0) = -0.06, \quad \dot{x}(0) = 0.8,$$

se escribe como sistema con $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{k}{m}y_1 = -\frac{400}{4}y_1 = -100y_1, \end{cases} \quad \text{con } (y_1(0), y_2(0)) = (-0.06, 0.8).$$

b) Parámetros y esquema RK4 (vectorial).

Intervalo $[0, 1]$, número de pasos $N = 4 \Rightarrow h = \frac{1-0}{4} = 0.25$.

Para $y' = f(t, y)$, el paso RK4 desde (t_n, y_n) a (t_{n+1}, y_{n+1}) es:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Aquí:

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -100y_1 \end{pmatrix}.$$

c) **Paso** $0 \rightarrow 1$ (de $t_0 = 0$ a $t_1 = 0.25$) con $y_0 = \begin{pmatrix} -0.06 \\ 0.8 \end{pmatrix}$.

$$k_1 = f(t_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 6.0 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{pmatrix} -0.06 \\ 0.8 \end{pmatrix} + 0.125\begin{pmatrix} 0.8 \\ 6.0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 0.04 \\ 1.55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.55 \\ -4.0 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{pmatrix} -0.06 \\ 0.8 \end{pmatrix} + 0.125\begin{pmatrix} 1.55 \\ -4.0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 0.13375 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ -13.375 \end{pmatrix},$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + h k_3) = f\left(\begin{pmatrix} -0.06 \\ 0.8 \end{pmatrix} + 0.25\begin{pmatrix} 0.3 \\ -13.375 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 0.015 \\ -2.54375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.54375 \\ -1.5 \end{pmatrix}.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0.25}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} 0.0215104167 \\ -0.4604166667 \end{pmatrix}.$$

d) **Paso** $1 \rightarrow 2$ (de $t_1 = 0.25$ a $t_2 = 0.5$) con $y_1 = \begin{pmatrix} 0.0215104167 \\ -0.4604166667 \end{pmatrix}$.

$$k_1 = f(t_1, y_1) = \begin{pmatrix} -0.4604166667 \\ -2.1510416667 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0.0215104167 \\ -0.4604166667 \end{pmatrix} + 0.125\begin{pmatrix} -0.4604166667 \\ -2.1510416667 \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\begin{pmatrix} -0.0360416666 \\ -0.7292968750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7292968750 \\ 3.6041666667 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0.0215104167 \\ -0.4604166667 \end{pmatrix} + 0.125\begin{pmatrix} -0.7292968750 \\ 3.6041666667 \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\begin{pmatrix} -0.0696516927 \\ -0.0098958333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0098958333 \\ 6.9651692708 \end{pmatrix},$$

$$k_4 = f(t_1 + h, y_1 + h k_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0.0215104167 \\ -0.4604166667 \end{pmatrix} + 0.25\begin{pmatrix} -0.0098958333 \\ 6.9651692708 \end{pmatrix}\right)$$

$$= f\begin{pmatrix} 0.0190364584 \\ 1.2808756510 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2808756510 \\ -1.9036458333 \end{pmatrix}.$$

$$y_2 = y_1 + \frac{0.25}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} -0.0059031847 \\ 0.2514160156 \end{pmatrix}.$$

e) **Paso 2 $\rightarrow$ 3 (de $t_2 = 0.5$ a $t_3 = 0.75$) con $y_2 = \begin{pmatrix} -0.0059031847 \\ 0.2514160156 \end{pmatrix}$.**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_2, y_2) = \begin{pmatrix} 0.2514160156 \\ 0.5903184679 \end{pmatrix}, \\ k_2 &= f\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{pmatrix} -0.0059031847 \\ 0.2514160156 \end{pmatrix} + 0.125\begin{pmatrix} 0.2514160156 \\ 0.5903184679 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\begin{pmatrix} 0.0255238182 \\ 0.3252058241 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3252058241 \\ -2.5523818240 \end{pmatrix}, \\ k_3 &= f\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{pmatrix} -0.0059031847 \\ 0.2514160156 \end{pmatrix} + 0.125\begin{pmatrix} 0.3252058241 \\ -2.5523818240 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\begin{pmatrix} 0.0347475433 \\ -0.0676317124 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0676317124 \\ -3.4747543330 \end{pmatrix}, \\ k_4 &= f(t_2 + h, y_2 + h k_3) = f\left(\begin{pmatrix} -0.0059031847 \\ 0.2514160156 \end{pmatrix} + 0.25\begin{pmatrix} -0.0676317124 \\ -3.4747543330 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\begin{pmatrix} -0.0228111130 \\ -0.6172725676 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6172725676 \\ 2.2811113000 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$y_3 = y_2 + \frac{0.25}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} 0.0003173026 \\ -0.1312024293 \end{pmatrix}.$$

f) **Paso 3 $\rightarrow$ 4 (de $t_3 = 0.75$ a $t_4 = 1$) con $y_3 = \begin{pmatrix} 0.0003173026 \\ -0.1312024293 \end{pmatrix}$.**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_3, y_3) = \begin{pmatrix} -0.1312024293 \\ -0.0317302633 \end{pmatrix}, \\ k_2 &= f\left(t_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0.0003173026 \\ -0.1312024293 \end{pmatrix} + 0.125\begin{pmatrix} -0.1312024293 \\ -0.0317302633 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\begin{pmatrix} -0.0160830011 \\ -0.1351687122 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1351687122 \\ 1.6083001100 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0.0003173026 \\ -0.1312024293 \end{pmatrix} + 0.125\begin{pmatrix} -0.1351687122 \\ 1.6083001100 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} -0.0197857540 \\ 0.0698350845 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.0698350845 \\ 1.9785754000 \end{pmatrix}, \\
k_4 &= f(t_3 + h, y_3 + h k_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0.0003173026 \\ -0.1312024293 \end{pmatrix} + 0.25\begin{pmatrix} 0.0698350845 \\ 1.9785754000 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} 0.0177760737 \\ 0.3634414207 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.3634414207 \\ -1.7776073700 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$y_4 = y_3 + \frac{0.25}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} 0.0012088670 \\ 0.0655900652 \end{pmatrix}.$$

g) **Resultado.**

t_n	$x_{RK4}(t_n) = y_1(t_n)$	$v_{RK4}(t_n) = y_2(t_n)$
0.00	-0.0600000000	0.8000000000
0.25	0.0215104167	-0.4604166667
0.50	-0.0059031847	0.2514160156
0.75	0.0003173026	-0.1312024293
1.00	0.0012088670	0.0655900652

3. Solución con el ejecutable.

Figura 15

Solución de la aplicación 1, para $N=4$.



La Figura (15) compara la respuesta del sistema masa-resorte sin amortiguamiento y sin

Tabla 1*Comparación de solución de la aplicación 1, para $N=4$*

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	-0.06	0.8	-0.06	0.8	-0.06	0.8
0.25	0.095946388	-0.281831606	0.021510417	-0.460416667	0.09594639	-0.28183161
0.5	-0.093733673	-0.348424816	-0.005903185	0.251416016	-0.09373368	-0.34842481
0.75	0.054241879	0.84010824	0.000317303	-0.131202429	0.05424188	0.84010825
1	0.006822603	-0.99766989	0.001208867	0.065590065	0.0068226	-0.99766989

fuerza externa ($m = 1$, $b = 0$, $k = 100$, $F_e(t) = 0$), con condiciones iniciales $x(0) = -0,06$ y $v(0) = 0,8$. En este caso, el comportamiento corresponde a un oscilador armónico simple, por lo que $x(t)$ y $v(t)$ presentan una respuesta oscilatoria.

La Tabla (1) muestra que la solución analítica y la obtenida con ode45 son prácticamente idénticas en todos los instantes evaluados, confirmando que ode45 reproduce con alta precisión la solución exacta y puede tomarse como referencia. En cambio, la aproximación RK4 con $N = 4$ ($h = 0,25$) presenta diferencias apreciables respecto a la solución exacta/ode45, especialmente en la velocidad, debido a que el paso es grande para un sistema oscilatorio. Por ello, para reducir el error y mejorar el ajuste de RK4, se recomienda incrementar N (disminuir h), logrando mayor coincidencia en amplitud y fase.

En la Tabla (2) los resultados se observa que la solución analítica y ode45 coinciden prácticamente en todos los puntos, lo cual valida el modelo y confirma que ode45 reproduce con alta precisión la solución exacta. Por ejemplo, en $t = 0,50$ se obtiene $x(t) \approx -0,093733673$ y $v(t) \approx -0,348424816$, valores que ode45 reproduce con diferencias despreciables. Asimismo, en $t = 1$ se mantiene la coincidencia $x(1) \approx 0.006822603$, $v(1) \approx -0,997669890$.

Por su parte, la aproximación RK4 también muestra un alto nivel de concordancia con la solución exacta cuando se usa el paso $\Delta t = 0,02$, presentando diferencias pequeñas que se atribuyen al error numérico acumulado. A modo de ejemplo, en $t = 0,02$ RK4 estima $x(t) = -0,042910667$ frente a -0.042910448 (analítica), y en $t = 1$ calcula $x(1) = 0,006835564$ frente a 0.006822603 (analítica), manteniendo diferencias de magnitud muy reducida. En síntesis, la tabla evidencia que al emplear una discretización fina ($\Delta t = 0,02$) el método RK4 mejora notablemente su precisión, logrando resultados consistentes con la solución analítica y con

ode45, lo que respalda su uso para simular sistemas oscilatorios en vibraciones mecánicas.

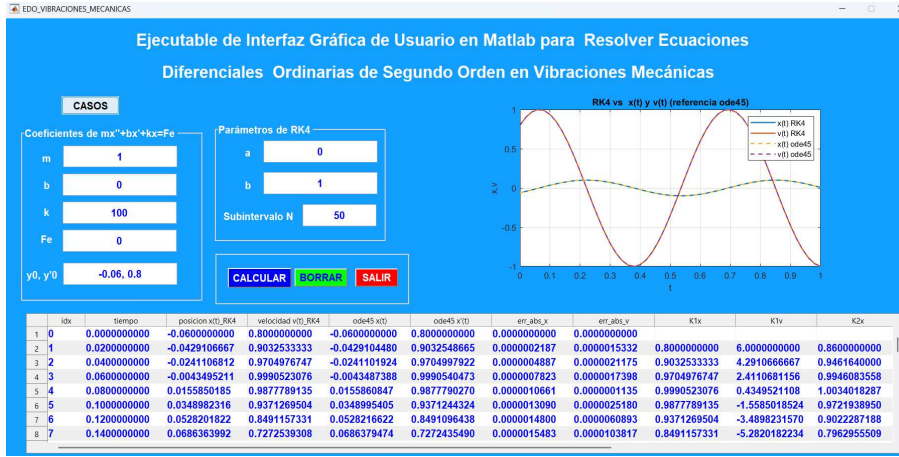
Tabla 2

Comparación de solución de la aplicación 1, para $N=50$

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	-0.06	0.8	-0.06	0.8	-0.06	0.8
0.02	-0.042910448	0.903254861	-0.042910667	0.903253333	-0.04291045	0.90325487
0.04	-0.024110192	0.970499801	-0.024110681	0.970497675	-0.02411019	0.97049979
0.06	-0.004348739	0.999053976	-0.004349521	0.999052308	-0.00434874	0.99905405
0.08	0.015586085	0.987779022	0.015585019	0.987778914	0.01558608	0.98777903
0.1	0.03489954	0.937124436	0.034898232	0.93712695	0.03489954	0.93712443
0.12	0.052821662	0.849109655	0.052820182	0.849115733	0.05282166	0.84910964
0.14	0.06863795	0.727243552	0.068636399	0.727253931	0.06863795	0.72724355
0.16	0.08171786	0.576384544	0.081716358	0.576399689	0.08171786	0.57638454
0.18	0.091539936	0.402546903	0.09153862	0.402566957	0.09153993	0.40254691
0.2	0.097712604	0.212660987	0.097711613	0.212685732	0.09771261	0.21266099
0.22	0.099989779	0.014296948	0.099989252	0.014325791	0.0999898	0.01429695
0.24	0.098280677	-0.184637064	0.098280738	-0.184605083	0.09828068	-0.18463706
0.26	0.092653435	-0.37621018	0.092654188	-0.376176355	0.09265344	-0.37621018
0.28	0.083332392	-0.552784982	0.083333911	-0.552750892	0.08333239	-0.55278498
0.3	0.07068915	-0.707321992	0.07069147	-0.707289427	0.07068915	-0.707322
0.32	0.055227755	-0.833660307	0.055230871	-0.833631179	0.05522776	-0.8336603
0.34	0.037564603	-0.926763215	0.037568462	-0.926739461	0.0375646	-0.92676323
0.36	0.01840387	-0.982918999	0.018408374	-0.982902466	0.01840387	-0.98291902
0.38	-0.001490569	-0.999888904	-0.001485562	-0.999881246	-0.00149057	-0.99988906
0.4	-0.021325582	-0.976996394	-0.021320257	-0.976998963	-0.02132558	-0.97699637
0.42	-0.040310413	-0.915154121	-0.040304986	-0.915167872	-0.04031041	-0.91515412
0.44	-0.057688194	-0.81682754	-0.057682909	-0.816852953	-0.0576882	-0.81682755
0.46	-0.072766129	-0.685936624	-0.072761241	-0.685973639	-0.07276613	-0.6859366
0.48	-0.084943108	-0.527699579	-0.084938877	-0.527747565	-0.08494311	-0.52769957
0.5	-0.093733673	-0.348424816	-0.093730347	-0.348482562	-0.09373368	-0.34842481
0.52	-0.098787373	-0.155259456	-0.098785176	-0.155325187	-0.09878737	-0.15525946
0.54	-0.099902732	0.044095608	-0.099901851	0.044024177	-0.09990274	0.04409561
0.56	-0.097035284	0.24169272	-0.097035861	0.241618307	-0.09703529	0.24169272
0.58	-0.090299345	0.429654306	-0.090301462	0.429579959	-0.09029935	0.42965429
0.6	-0.079963457	0.60048693	-0.079967131	0.600415904	-0.07996346	0.60048692
0.62	-0.066439678	0.747380036	-0.066444857	0.747315648	-0.06643968	0.74738004
0.64	-0.050267159	0.864477458	-0.050273719	0.864422939	-0.05026716	0.86447744
0.66	-0.032090646	0.947110892	-0.032098394	0.94706923	-0.03209065	0.94711092
0.68	-0.012634781	0.991986003	-0.012643457	0.991959792	-0.01263478	0.99198599
0.7	0.007324793	0.997313763	0.007315504	0.997305061	0.00732479	0.99731374
0.72	0.02699235	0.96288177	0.026982809	0.96289198	0.02699235	0.96288175
0.74	0.045583808	0.89006272	0.045574405	0.890092487	0.04558381	0.89006271
0.76	0.062357983	0.781759677	0.062349126	0.781808825	0.06235798	0.78175966
0.78	0.076646142	0.642290344	0.076638236	0.642357838	0.07664614	0.64229036
0.8	0.087878662	0.477214921	0.087872089	0.477298877	0.08787866	0.47721491
0.82	0.095607736	0.293114445	0.095602843	0.293212169	0.09560774	0.29311444
0.84	0.099525232	0.097328422	0.099522308	0.097436491	0.09952523	0.09732842
0.86	0.099474971	-0.102337779	0.099474235	-0.102223395	0.09947497	-0.10233778
0.88	0.095458956	-0.297924096	0.095460544	-0.29780789	0.09545895	-0.2979241
0.9	0.087637295	-0.481633118	0.087641247	-0.481519866	0.08763729	-0.48163312
0.92	0.07632181	-0.646140949	0.07632807	-0.646035515	0.07632181	-0.64614096
0.94	0.061963617	-0.784889178	0.061972025	-0.784796306	0.06196362	-0.78488919
0.96	0.045135129	-0.892346353	0.04514543	-0.892270456	0.04513513	-0.89234633
0.98	0.026507246	-0.964228495	0.026519091	-0.964173452	0.02650725	-0.96422852
1	0.006822603	-0.99766989	0.006835564	-0.997638855	0.0068226	-0.99766989

Figura 16

Solución de la aplicación 1, para $N=50$.



3.3 Aplicación 2: Movimiento sobreamortiguado (Caso 2)

Considerando un sistema masa-resorte-amortiguador con las condiciones siguientes:

$$b = 5N \cdot \frac{\text{seg}}{m}; m = 2kg; k = 2\frac{N}{m}; x_0 = 1m; v_0 = 0\frac{m}{s}.$$

Resuelva la ecuación diferencial y grafique la posición del tiempo.

Solución

1. Solución analítica

a) Planteamiento del problema.

Ecuación del sistema masa-resorte-amortiguador (sin fuerza externa):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

con los datos

$$m = 2, \quad b = 5, \quad k = 2, \quad x(0) = x_0 = 1, \quad \dot{x}(0) = v_0 = 0.$$

Al sustituir:

$$2\ddot{x} + 5\dot{x} + 2x = 0.$$

b) Ecuación característica y clasificación.

Buscando soluciones del tipo $x(t) = e^{rt}$, se obtiene la ecuación característica

$$2r^2 + 5r + 2 = 0.$$

El discriminante es

$$\Delta = b^2 - 4mk = 5^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9 > 0,$$

por lo que el sistema es *sobreamortiguado* (raíces reales negativas). Las raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow r_1 = -\frac{1}{2}, \quad r_2 = -2.$$

c) Solución general.

Con raíces reales y distintas, la solución general es

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{-t/2} + C_2 e^{-2t}.$$

La velocidad resulta

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}C_1 e^{-t/2} - 2C_2 e^{-2t}.$$

d) Determinación de constantes con condiciones iniciales.

Aplicando $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -\frac{1}{2}C_1 - 2C_2 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$C_2 = -\frac{1}{3}, \quad C_1 = \frac{4}{3}.$$

e) **Soluciones finales (posición y velocidad).**

Sustituyendo C_1 y C_2 :

$$\boxed{x(t) = \frac{4}{3} e^{-t/2} - \frac{1}{3} e^{-2t}}, \quad \boxed{\dot{x}(t) = -\frac{2}{3} e^{-t/2} + \frac{2}{3} e^{-2t}}.$$

2. Solución numérica

a) **Reducción a un sistema de primer orden.**

La EDO

$$2\ddot{x} + 5\dot{x} + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

se escribe como sistema con $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2 = -1 \cdot y_1 - 2.5 y_2, \end{cases} \quad \text{con } (y_1(0), y_2(0)) = (1, 0).$$

b) **Parámetros y esquema RK4 (vectorial).**

Intervalo $[0, 8]$, número de pasos $N = 4 \Rightarrow h = \frac{8-0}{4} = 2$.

Para $y' = f(t, y)$, el paso RK4 desde (t_n, y_n) a (t_{n+1}, y_{n+1}) es:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Aquí $f(t, y) = (y_2, -y_1 - 2.5 y_2)^\top$.

c) **Paso** $0 \rightarrow 1$ (de $t_0 = 0$ a $t_1 = 2$) **con** $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$k_1 = f(t_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -3.75 \end{pmatrix},$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + h k_3) = f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -7.5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -7.5 \\ 14.75 \end{pmatrix}.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ \frac{37}{12} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.1666666667 \\ 3.0833333333 \end{pmatrix}.$$

d) **Paso** $1 \rightarrow 2$ (de $t_1 = 2$ a $t_2 = 4$) **con** $y_1 = \begin{pmatrix} -1.1666666667 \\ 3.0833333333 \end{pmatrix}$.

$$k_1 = f(t_1, y_1) = \begin{pmatrix} 3.0833333333 \\ -6.5416666667 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{pmatrix} -1.1666666667 \\ 3.0833333333 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.0833333333 \\ -6.5416666667 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} 1.9166666666 \\ -3.4583333334 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3.4583333333 \\ 6.7291666667 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{pmatrix} -1.1666666667 \\ 3.0833333333 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3.4583333333 \\ 6.7291666667 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} -4.6250000000 \\ 9.8125000000 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 9.8125000000 \\ -19.9062500000 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(t_1 + h, y_1 + h k_3) = f\left(\begin{pmatrix} -1.1666666667 \\ 3.0833333333 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19.6250000000 \\ -39.8125000000 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} 18.4583333333 \\ -36.7291666667 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -36.7291666667 \\ 73.3645833333 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} -8.1458333333 \\ 16.5729166667 \end{pmatrix}.$$

e) **Paso 2 $\rightarrow$ 3 (de $t_2 = 4$ a $t_3 = 6$) con $y_2 = \begin{pmatrix} -8.1458333333 \\ 16.5729166667 \end{pmatrix}$.**

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_2, y_2) = \begin{pmatrix} 16.5729166667 \\ -33.2864583333 \end{pmatrix}, \\
k_2 &= f\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{pmatrix} -8.1458333333 \\ 16.5729166667 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16.5729166667 \\ -33.2864583333 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} 8.4270833334 \\ -16.7135416666 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -16.7135416667 \\ 33.3567708333 \end{pmatrix}, \\
k_3 &= f\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{pmatrix} -8.1458333333 \\ 16.5729166667 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16.7135416667 \\ 33.3567708333 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} -24.8593750000 \\ 49.9296875000 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 49.9296875000 \\ -99.9648437500 \end{pmatrix}, \\
k_4 &= f(t_2 + h, y_2 + h k_3) = f\left(\begin{pmatrix} -8.1458333333 \\ 16.5729166667 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 99.8593750000 \\ -199.9296875000 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} 91.7135416667 \\ -183.3567708333 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -183.3567708333 \\ 366.6783854167 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} -41.5963541667 \\ 83.2981770833 \end{pmatrix}.}$$

f) **Paso 3 $\rightarrow$ 4 (de $t_3 = 6$ a $t_4 = 8$) con $y_3 = \begin{pmatrix} -41.5963541667 \\ 83.2981770833 \end{pmatrix}$.**

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_3, y_3) = \begin{pmatrix} 83.2981770833 \\ -166.6490885417 \end{pmatrix}, \\
k_2 &= f\left(t_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{pmatrix} -41.5963541667 \\ 83.2981770833 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 83.2981770833 \\ -166.6490885417 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} 41.7018229166 \\ -83.3509114584 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -83.3509114583 \\ 166.6754557292 \end{pmatrix}, \\
k_3 &= f\left(t_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{pmatrix} -41.5963541667 \\ 83.2981770833 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -83.3509114583 \\ 166.6754557292 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} -124.9472656250 \\ 249.9736328125 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 249.9736328125 \\ -499.9868164063 \end{pmatrix}, \\
k_4 &= f(t_3 + h, y_3 + h k_3) = f\left(\begin{pmatrix} -41.5963541667 \\ 83.2981770833 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 499.9472656250 \\ -999.9736328125 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} 458.3509114583 \\ -916.6754557292 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -916.6754557292 \\ 1833.3377278646 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} -208.3069661458 \\ 416.6534830729 \end{pmatrix}.$$

g) **Resultado.**

t_n	$x_{RK4}(t_n) = y_1(t_n)$	$v_{RK4}(t_n) = y_2(t_n)$
0	1.0000000000	0.0000000000
2	-1.1666666667	3.0833333333
4	-8.1458333333	16.5729166667
6	-41.5963541667	83.2981770833
8	-208.3069661458	416.6534830729

3. Solución con el ejecutable

Figura 17

Solución de la aplicación 2, para $N=4$.

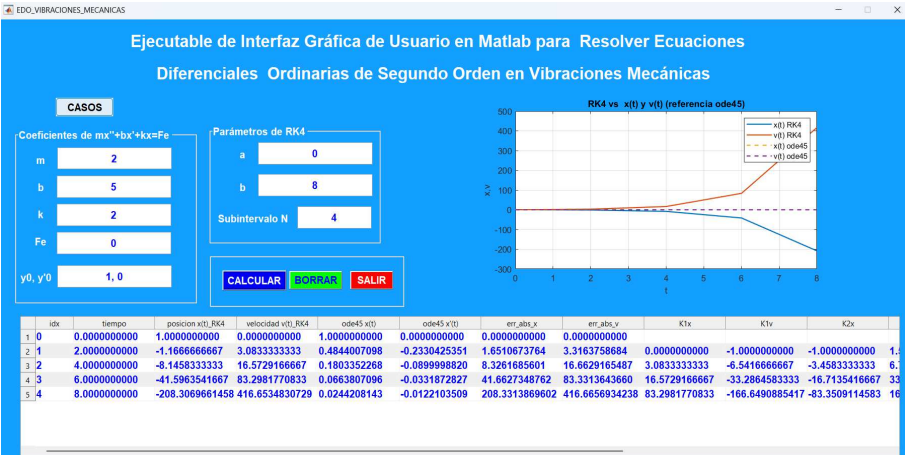


Tabla 3

Comparación de solución de la aplicación 2, para $N=4$

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	1	0	1	0	1	0
2	0.484400709	-0.23304253	-1.16666667	3.08333333	0.48440071	-0.23304254
4	0.180335223	-0.08999988	-8.14583333	16.5729167	0.18033523	-0.08999988
6	0.06638071	-0.03318728	-41.5963542	83.2981771	0.06638071	-0.03318728
8	0.024420814	-0.01221035	-208.306966	416.653483	0.02442081	-0.01221035

En la Figura (17) y la Tabla (3) se comparan tres resultados para el sistema masa-resorte-amortiguador sin fuerza externa ($m = 2, b = 5, k = 2, F_e = 0, x(0) = 1, v(0) = 0$) en el intervalo $t \in [0, 8]$. Primero, la solución analítica y la solución numérica con ode45 coin-

ciden prácticamente en todos los puntos evaluados (por ejemplo, en $t = 8 : x(8) \approx 0,0244$ y $v(8) \approx -0,0122$). Esto confirma que el modelo está bien planteado y que el comportamiento esperado es amortiguado, es decir, la posición y la velocidad disminuyen con el tiempo y tienden a cero por efecto del amortiguamiento.

En cambio, los resultados obtenidos con RK4 usando $N = 4$ (paso $h = 2$) muestran una respuesta inestable y no física: desde $t = 2$ ya aparece un cambio fuerte de signo y aumento de magnitud ($x_{RK4}(2) \approx -1,1667, v_{RK4}(2) \approx 3,0833$), y para $t = 8$ los valores crecen de forma exagerada ($x_{RK4}(8) \approx -208,31, v_{RK4}(8) \approx 416,65$). Por esta razón, los errores absolutos frente a ode45 aumentan rápidamente con el tiempo, llegando aproximadamente a $|e_x| \approx 208,33$ y $|e_v| \approx 416,67$ en $t = 8$.

En conclusión, la comparación evidencia que RK4 falla en este caso debido al tamaño de paso demasiado grande ($h = 2$), lo que provoca inestabilidad numérica.

En la Figura (18) y Tabla (4) se observa que la solución analítica y ode45 coinciden prácticamente en todos los tiempos, lo que confirma que el modelo está bien y que ode45 funciona como referencia confiable. Además, RK4 también coincide muy bien con ambos: las diferencias entre $x(t)$ y $v(t)$ de RK4 frente a la solución analítica/ode45 son mínimas (solo cambian en las últimas cifras decimales), lo que indica alta precisión cuando se usa un paso adecuado.

Figura 18

Solución de la aplicación 2, para $N=50$.

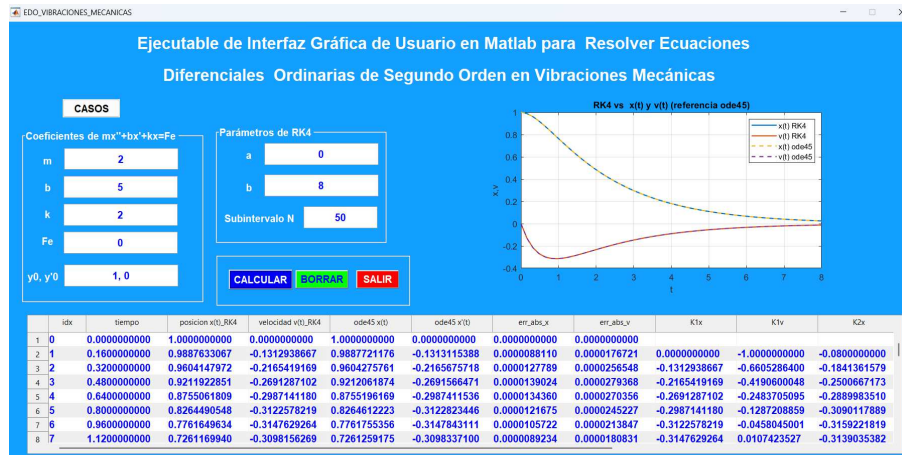


Tabla 4

Comparación de solución de la aplicación 2, para $N=50$

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	1	0	1	0	1	0
0.16	0.988772116	-0.13131154	0.98876331	-0.13129387	0.98877212	-0.13131154
0.32	0.960427577	-0.21656758	0.9604148	-0.21654192	0.96042758	-0.21656757
0.48	0.921206186	-0.26915665	0.92119229	-0.26912871	0.92120619	-0.26915665
0.64	0.875519616	-0.29874116	0.87550618	-0.29871412	0.87551962	-0.29874115
0.8	0.826461222	-0.31228235	0.82644905	-0.31225782	0.82646122	-0.31228234
0.96	0.776175535	-0.31478429	0.77616496	-0.31476293	0.77617554	-0.31478431
1.12	0.726125917	-0.30983371	0.72611699	-0.30981563	0.72612592	-0.30983371
1.28	0.677288319	-0.29999179	0.67728095	-0.2999768	0.67728832	-0.29999179
1.44	0.63029142	-0.28707833	0.63028544	-0.2870661	0.63029142	-0.28707833
1.6	0.585517884	-0.27237784	0.58551309	-0.272368	0.58551788	-0.27237784
1.76	0.543177404	-0.25678898	0.54317361	-0.25678114	0.5431774	-0.25678898
1.92	0.503359314	-0.24093286	0.50335635	-0.24092666	0.50335931	-0.24093286
2.08	0.46607039	-0.22523142	0.4660681	-0.22522656	0.46607039	-0.22523142
2.24	0.431261922	-0.20996425	0.43126017	-0.20996048	0.43126192	-0.20996425
2.4	0.398849034	-0.19530964	0.39884771	-0.19530672	0.39884903	-0.19530964
2.56	0.368724393	-0.18137419	0.3687234	-0.18137194	0.36872439	-0.18137419
2.72	0.340767875	-0.1682142	0.34076715	-0.16821248	0.34076787	-0.16821419
2.88	0.314853308	-0.1558511	0.31485278	-0.1558498	0.31485331	-0.1558511
3.04	0.290853124	-0.14428247	0.29085276	-0.14428149	0.29085312	-0.14428247
3.2	0.268641505	-0.13348997	0.26864126	-0.13348924	0.2686415	-0.13348997
3.36	0.248096455	-0.12344496	0.2480963	-0.12344442	0.24809646	-0.12344496
3.52	0.22910111	-0.11411249	0.22910102	-0.11411121	0.22910111	-0.11411249
3.68	0.211544502	-0.10545415	0.21154447	-0.10545387	0.2115445	-0.10545415
3.84	0.195321958	-0.09742999	0.19532196	-0.09742979	0.19532196	-0.09742999
4	0.180335223	-0.08999988	0.18033525	-0.08999974	0.18033523	-0.08999988
4.16	0.166492418	-0.08312441	0.16649247	-0.08312432	0.16649242	-0.08312441
4.32	0.153707866	-0.07676549	0.15370793	-0.07676543	0.15370787	-0.07676549
4.48	0.141901857	-0.07088671	0.14190193	-0.07088668	0.14190186	-0.07088671
4.64	0.131000357	-0.06545354	0.13100044	-0.06545353	0.13100036	-0.06545354
4.8	0.120934695	-0.06043348	0.12093478	-0.06043349	0.12093469	-0.06043348
4.96	0.11164124	-0.05579603	0.11164132	-0.05579604	0.11164124	-0.05579603
5.12	0.103061083	-0.05151269	0.10306117	-0.05151271	0.10306108	-0.05151268
5.28	0.095139715	-0.04755689	0.0951398	-0.04755692	0.09513972	-0.04755689
5.44	0.087826729	-0.04390395	0.08782681	-0.04390398	0.08782673	-0.04390395
5.6	0.081075525	-0.04053093	0.0810756	-0.04053096	0.08107553	-0.04053093
5.76	0.074843041	-0.03741656	0.07484311	-0.03741659	0.07484304	-0.03741656
5.92	0.069089486	-0.03454114	0.06908956	-0.03454117	0.06908949	-0.03454114
6.08	0.063778107	-0.03188644	0.06377818	-0.03188647	0.06377811	-0.03188644
6.24	0.058874957	-0.02943558	0.05887502	-0.02943561	0.05887496	-0.02943558
6.4	0.054348685	-0.02717296	0.05434875	-0.02717299	0.05434868	-0.02717296
6.56	0.050170341	-0.02508417	0.0501704	-0.0250842	0.05017034	-0.02508417
6.72	0.046313193	-0.02315587	0.04631325	-0.0231559	0.04631319	-0.02315587
6.88	0.042752561	-0.02137575	0.04275261	-0.02137578	0.04275256	-0.02137575
7.04	0.039465658	-0.01973245	0.03946571	-0.01973247	0.03946566	-0.01973245
7.2	0.036431444	-0.01821544	0.03643149	-0.01821547	0.03643144	-0.01821544
7.36	0.033630498	-0.01681505	0.03363054	-0.01681507	0.0336305	-0.01681505
7.52	0.031044889	-0.01552223	0.03104493	-0.01552232	0.03104489	-0.01552223
7.68	0.028658064	-0.01432893	0.0286581	-0.01432895	0.02865806	-0.01432893
7.84	0.026454741	-0.01322729	0.02645478	-0.01322731	0.02645474	-0.01322729
8	0.024420814	-0.01221035	0.02442085	-0.01221037	0.02442081	-0.01221035

3.4 Aplicación 3: Movimiento críticamente amortiguado (Caso 3)

Considerando un sistema masa-resorte-amortiguador con las condiciones siguientes:

$$b = 4N \cdot \frac{\text{seg}}{m}; m = 2kg; k = 2\frac{N}{m}; x_0 = 1m; v_0 = 0\frac{m}{s}.$$

Resuelva la ecuación diferencial y elabore una gráfica de este movimiento.

Solución

1. Solución analítica

a) Planteamiento del problema.

Ecuación del sistema masa-resorte-amortiguador (sin fuerza externa):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

con los datos

$$m = 2, \quad b = 4, \quad k = 2, \quad x(0) = x_0 = 1, \quad \dot{x}(0) = v_0 = 0.$$

Al sustituir:

$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0.$$

Dividiendo entre 2:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0.$$

b) Ecuación característica y clasificación.

Buscando soluciones del tipo $x(t) = e^{rt}$, se obtiene:

$$r^2 + 2r + 1 = 0.$$

El discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4mk = 4^2 - 4(2)(2) = 16 - 16 = 0,$$

por lo que el sistema es *críticamente amortiguado* (raíz real doble). Además:

$$b = \sqrt{4mk} = \sqrt{4(2)(2)} = 4.$$

La raíz doble es:

$$r = \frac{-2}{2} = -1.$$

c) Solución general.

Con raíz doble $r = -1$, la solución general es:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}.$$

La velocidad:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}[(C_1 + C_2 t)e^{-t}] = (C_2 - (C_1 + C_2 t))e^{-t}.$$

d) Determinación de constantes con condiciones iniciales.

Aplicando $x(0) = 1$:

$$x(0) = (C_1 + 0)e^0 = C_1 = 1.$$

Aplicando $\dot{x}(0) = 0$:

$$\dot{x}(0) = (C_2 - C_1)e^0 = C_2 - C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 1.$$

e) Soluciones finales (posición y velocidad).

Sustituyendo $C_1 = 1$ y $C_2 = 1$:

$$\boxed{x(t) = (1+t)e^{-t}}, \quad \boxed{\dot{x}(t) = -te^{-t}}.$$

2. Solución numérica

a) Reducción a un sistema de primer orden.

La EDO

$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

se escribe como sistema con $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2 = -\frac{2}{2}y_1 - \frac{4}{2}y_2 = -y_1 - 2y_2, \end{cases} \quad \text{con } (y_1(0), y_2(0)) = (1, 0).$$

b) Parámetros y esquema RK4 (vectorial).

Intervalo $[0, 8]$, número de pasos $N = 4 \Rightarrow h = \frac{8-0}{4} = 2$.

Para $y' = f(t, y)$, el paso RK4 desde (t_n, y_n) a (t_{n+1}, y_{n+1}) es:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Aquí $f(t, y) = (y_2, -y_1 - 2y_2)^\top$.

c) **Paso** $0 \rightarrow 1$ (**de** $t_0 = 0$ **a** $t_1 = 2$) **con** $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$k_1 = f(t_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + h k_3) = f\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.3333333333 \\ 0.6666666667 \end{pmatrix}.$$

d) **Paso** $1 \rightarrow 2$ (**de** $t_1 = 2$ **a** $t_2 = 4$) **con** $y_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

$$k_1 = f(t_1, y_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$k_4 = f(t_1 + h, y_1 + h k_3) = f\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.3333333333 \\ 0.4444444444 \end{pmatrix}.$$

e) **Paso** $2 \rightarrow 3$ (**de** $t_2 = 4$ **a** $t_3 = 6$) **con** $y_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

$$y_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{27} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.1851851852 \\ 0.2222222222 \end{pmatrix}.$$

f) **Paso 3 $\rightarrow$ 4 (de $t_3 = 6$ a $t_4 = 8$) con $y_3 = \left(-\frac{5}{27}, \frac{2}{9}\right)$.**

$$y_4 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{81} \\ \frac{8}{81} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.0864197531 \\ 0.0987654321 \end{pmatrix}.$$

g) **Resultado.**

t_n	$x_{RK4}(t_n) = y_1(t_n)$	$v_{RK4}(t_n) = y_2(t_n)$
0	1.0000000000	0.0000000000
2	-0.3333333333	0.6666666667
4	-0.3333333333	0.4444444444
6	-0.1851851852	0.2222222222
8	-0.0864197531	0.0987654321

3. Solución con el ejecutable

Figura 19

Solución de la aplicación 3, para $N=4$.

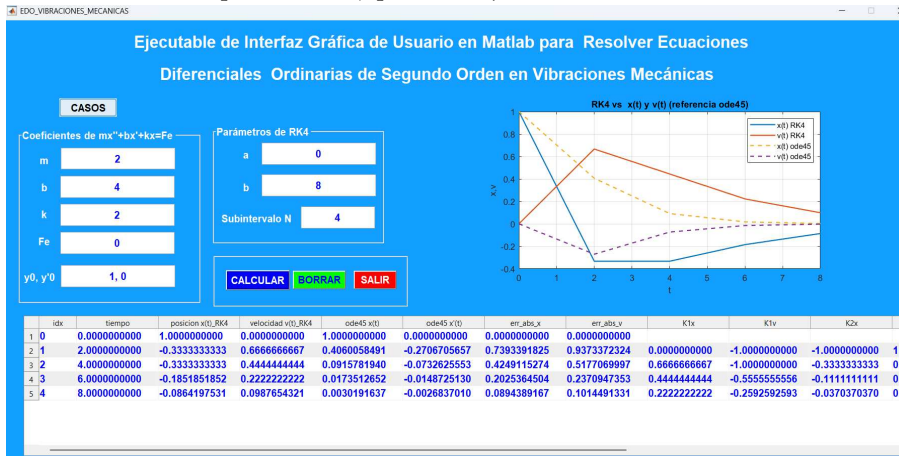


Tabla 5

Comparación de solución de la aplicación 3, para $N=4$

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	1	0	1	0	1	0
2	0.484400709	-0.233042535	-0.333333333	0.666666667	0.40600585	-0.27067057
4	0.180335223	-0.08999988	-0.333333333	0.444444444	0.09157819	-0.07326256
6	0.06638071	-0.033187283	-0.185185185	0.222222222	0.01735127	-0.01487251
8	0.024420814	-0.012210351	-0.086419753	0.098765432	0.00301916	-0.0026837

Los resultados de la Tabla (5) y Figura (19) mostraron una comparación entre la solución analítica, el método RK4 y el método ode45 en los tiempos $t = 0, 2, 4, 6$ y 8 . En $t = 0$, los tres métodos coincidieron exactamente, porque partieron de las mismas condiciones iniciales.

La solución analítica presentó una disminución progresiva en la posición y en la velocidad, lo que indicó un comportamiento amortiguado del sistema de vibración. De igual manera, los valores obtenidos con ode45 siguieron una tendencia parecida, aunque con pequeñas diferencias respecto a la solución exacta.

Sin embargo, los resultados del método RK4 fueron diferentes a los esperados, ya que la posición tomó valores negativos y la velocidad permaneció positiva, lo cual no coincidió con la solución analítica ni con ode45. Esto permitió observar que el algoritmo implementado en RK4 presentó errores en su formulación o en su programación.

En general, se pudo concluir que la solución analítica fue la referencia más confiable, ode45 proporcionó una aproximación aceptable, y el método RK4 necesitó ser corregido para que la interfaz gráfica muestre resultados correctos y coherentes con el problema de vibraciones mecánicas.

Figura 20

Solución de la aplicación 3, para $N=50$.

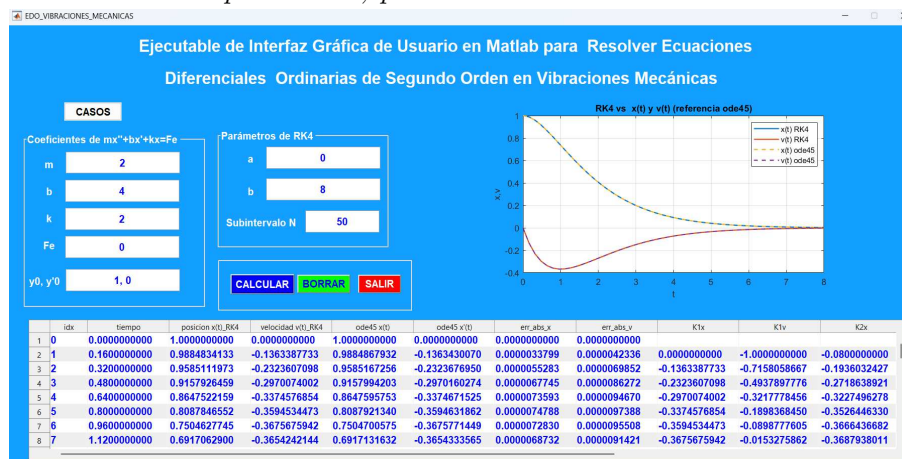


Tabla 6

Comparación de solución de la aplicación 3, para $N=50$.

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	1	0	1	0	1	0
0.16	0.988772116	-0.13131154	0.988483413	-0.136338773	0.98848679	-0.13634301
0.32	0.960427577	-0.216567577	0.958511197	-0.23236071	0.95851673	-0.2323677
0.48	0.921206186	-0.26915665	0.915792646	-0.2970074	0.91579942	-0.29701603
0.64	0.875519616	-0.298741158	0.864752216	-0.337457685	0.86475958	-0.33746715
0.8	0.826461222	-0.312282352	0.808784655	-0.359453447	0.80879213	-0.35946319
0.96	0.776175535	-0.314784286	0.750462775	-0.367567594	0.75047006	-0.36757714
1.12	0.726125917	-0.309833706	0.69170629	-0.365424214	0.69171316	-0.36543336
1.28	0.677288319	-0.299991789	0.633918706	-0.355879184	0.63392505	-0.35588775
1.44	0.63029142	-0.287078329	0.578097994	-0.341168106	0.57810373	-0.34117597
1.6	0.585517884	-0.27237784	0.524925838	-0.323027303	0.52493095	-0.32303443
1.76	0.543177404	-0.256788984	0.474839338	-0.302792584	0.47484382	-0.30279896
1.92	0.503359314	-0.240932856	0.42808844	-0.281479721	0.42809233	-0.28148537
2.08	0.46607039	-0.225231416	0.384781722	-0.259849888	0.38478506	-0.25985484
2.24	0.431261922	-0.209964254	0.344922735	-0.238462742	0.34492555	-0.23846705
2.4	0.398849034	-0.195309643	0.308438685	-0.217719373	0.30844104	-0.21772309
2.56	0.368724393	-0.181374185	0.275202932	-0.197896956	0.27520488	-0.19790014
2.72	0.340767875	-0.168214196	0.245052505	-0.179176632	0.24505409	-0.17917933
2.88	0.314853308	-0.155851098	0.217801615	-0.161665843	0.21780288	-0.16166812
3.04	0.290853124	-0.144282474	0.193251961	-0.145416164	0.19325295	-0.14541806
3.2	0.268641505	-0.133489974	0.171200496	-0.130437478	0.17120126	-0.13043905
3.36	0.248096455	-0.123444959	0.151445165	-0.116709178	0.15144573	-0.11671047
3.52	0.22910111	-0.114112492	0.133789048	-0.104188962	0.13378945	-0.10419001
3.68	0.211544502	-0.105454152	0.118043259	-0.092819705	0.11804352	-0.09282055
3.84	0.195321958	-0.097429991	0.104028879	-0.082534763	0.10402903	-0.08253543
4	0.180335223	-0.08999988	0.091578133	-0.073262037	0.09157819	-0.07326256
4.16	0.166492418	-0.083124411	0.080535009	-0.064927046	0.080535	-0.06492744
4.32	0.153707866	-0.076765489	0.070755447	-0.057455205	0.07075538	-0.0574555
4.48	0.141901857	-0.070886705	0.062107214	-0.050773484	0.0621071	-0.05077369
4.64	0.131000357	-0.065453543	0.054469556	-0.044811579	0.05446942	-0.04481172
4.8	0.120934695	-0.060433483	0.047732697	-0.039502704	0.04773253	-0.03950279
4.96	0.11164124	-0.05579603	0.041797229	-0.034784084	0.04179705	-0.03478412
5.12	0.103061083	-0.051512685	0.036573448	-0.030597235	0.03657326	-0.03059724
5.28	0.095139715	-0.047556891	0.031980658	-0.026888059	0.03198047	-0.02688803
5.44	0.087826729	-0.043903949	0.027946465	-0.023606834	0.02794627	-0.02360679
5.6	0.081075525	-0.040530926	0.02440609	-0.020708097	0.0244059	-0.02070804
5.76	0.074843041	-0.037416556	0.021301699	-0.018150474	0.02130151	-0.0181504
5.92	0.069089486	-0.034541138	0.018581762	-0.015896463	0.01858159	-0.01589639
6.08	0.063778107	-0.031886436	0.01620046	-0.013912196	0.01620029	-0.01391211
6.24	0.058874957	-0.029435578	0.014117114	-0.012167183	0.01411695	-0.0121671
6.4	0.054348685	-0.027172962	0.012295674	-0.010634051	0.01229552	-0.01063397
6.56	0.050170341	-0.025084168	0.010704237	-0.009288293	0.0107041	-0.00928821
6.72	0.046313193	-0.023155869	0.009314606	-0.008108017	0.00931447	-0.00810794
6.88	0.042752561	-0.021375752	0.008101896	-0.007073708	0.00810178	-0.00707363
7.04	0.039465658	-0.019732445	0.007044169	-0.006168004	0.00704406	-0.00616793
7.2	0.036431444	-0.018215443	0.006122107	-0.005375487	0.006122	-0.00537542
7.36	0.033630498	-0.016815047	0.005318713	-0.004682486	0.00531862	-0.00468242
7.52	0.031044889	-0.015522298	0.004619056	-0.004076898	0.00461897	-0.00407684
7.68	0.028658064	-0.014328925	0.004010021	-0.003548024	0.00400994	-0.00354797
7.84	0.026454741	-0.013227293	0.003480106	-0.003086417	0.00348003	-0.00308637
8	0.024420814	-0.012210351	0.003019228	-0.002683749	0.00301916	-0.0026837

Los resultados obtenidos de la Tabla (6) y Figura (20), permitieron comparar la solución analítica con las soluciones numéricas calculadas mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y el método ode45 de MATLAB, para distintos valores de tiempo entre $t = 0$ y $t = 8$.

Se observó que la solución analítica mostró una disminución progresiva tanto en la posición $x(t)$ como en la velocidad $v(t)$, lo que indicó un comportamiento amortiguado del

sistema de vibración mecánica. Esto significa que, con el paso del tiempo, el movimiento fue perdiendo amplitud hasta acercarse poco a poco al estado de equilibrio.

Asimismo, los valores obtenidos con RK4 y con ode45 fueron muy cercanos entre sí en todos los puntos evaluados. Las diferencias encontradas fueron mínimas, por lo que se pudo comprobar que el método RK4 implementado en la interfaz gráfica funcionó correctamente y logró aproximar de manera adecuada la solución del problema.

Además, en la gráfica se apreció que las curvas de RK4 y ode45 prácticamente coincidieron, tanto para la posición como para la velocidad. Esto confirmó que la interfaz desarrollada en MATLAB permitió obtener resultados numéricos confiables, estables y coherentes con el comportamiento esperado de un sistema de vibraciones mecánicas amortiguadas.

3.5 Aplicación 4: Movimiento subamortiguado (Caso 4)

Considerando un sistema masa-resorte-amortiguador con las condiciones siguiente

$$b = 2N \cdot \frac{\text{seg}}{\text{m}}; m = 10 \text{ kg}; k = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; x_0 = 1 \text{ m}; v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Resuelva la ecuación diferencial y elabore una gráfica de este movimiento.

Solución

1. Solución analítica

a) Planteamiento del problema.

Ecuación del sistema masa-resorte-amortiguador (sin fuerza externa):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

con los datos

$$m = 10, \quad b = 2, \quad k = 5, \quad x(0) = x_0 = 1, \quad \dot{x}(0) = v_0 = 0.$$

Al sustituir:

$$10\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0.$$

Dividiendo entre 10:

$$\ddot{x} + 0.2\dot{x} + 0.5x = 0.$$

b) Ecuación característica y clasificación.

Buscando soluciones del tipo $x(t) = e^{rt}$, se obtiene la ecuación característica

$$10r^2 + 2r + 5 = 0.$$

El discriminante es

$$\Delta = b^2 - 4mk = 2^2 - 4(10)(5) = 4 - 200 = -196 < 0,$$

por lo que el sistema es *subamortiguado* (raíces complejas conjugadas). Además:

$$b^2 < 4mk \Rightarrow b < \sqrt{4mk} = \sqrt{4(10)(5)} = \sqrt{200}.$$

c) Cálculo de raíces y parámetros.

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-2 \pm \sqrt{-196}}{20} = \frac{-2 \pm 14i}{20}.$$

Entonces:

$$r_{1,2} = -0.1 \pm 0.7i.$$

De modo que:

$$\alpha = 0.1, \quad \omega_d = 0.7.$$

d) Solución general.

Para el caso subamortiguado:

$$x(t) = e^{-\alpha t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) = e^{-0.1t} (C_1 \cos(0.7t) + C_2 \sin(0.7t)).$$

La velocidad:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} [e^{-0.1t} (C_1 \cos(0.7t) + C_2 \sin(0.7t))]$$

$$\dot{x}(t) = e^{-0.1t} [-0.1(C_1 \cos(0.7t) + C_2 \sin(0.7t)) - 0.7C_1 \sin(0.7t) + 0.7C_2 \cos(0.7t)].$$

e) **Determinación de constantes con condiciones iniciales.**

Aplicando $x(0) = 1$:

$$x(0) = e^0(C_1) = C_1 = 1.$$

Aplicando $\dot{x}(0) = 0$:

$$\dot{x}(0) = -0.1C_1 + 0.7C_2 = 0.$$

Con $C_1 = 1$:

$$-0.1 + 0.7C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{0.1}{0.7} = \frac{1}{7} \approx 0.1428571429.$$

f) **Soluciones finales (posición y velocidad).**

$$x(t) = e^{-0.1t} \left(\cos(0.7t) + \frac{1}{7} \sin(0.7t) \right),$$

$$\dot{x}(t) = e^{-0.1t} \left[-0.1 \left(\cos(0.7t) + \frac{1}{7} \sin(0.7t) \right) - 0.7 \sin(0.7t) + 0.1 \cos(0.7t) \right].$$

(Equivalente: $\dot{x}(t) = e^{-0.1t} [-0.7 \sin(0.7t) - \frac{1}{70} \sin(0.7t)]$ al simplificar.)

2. Solución numérica

a) **Reducción a un sistema de primer orden.**

La EDO

$$10\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0, \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0,$$

se escribe como sistema con $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2 = -\frac{5}{10}y_1 - \frac{2}{10}y_2 = -0.5y_1 - 0.2y_2, \end{cases} \quad \text{con } (y_1(0), y_2(0)) = (1, 0).$$

b) **Parámetros y esquema RK4 (vectorial).**

Intervalo $[0, 12]$, número de pasos $N = 4 \Rightarrow h = \frac{12 - 0}{4} = 3$.

Para $y' = f(t, y)$, el paso RK4 desde (t_n, y_n) a (t_{n+1}, y_{n+1}) es:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Aquí $f(t, y) = (y_2, -0.5y_1 - 0.2y_2)^\top$.

c) **Paso $0 \rightarrow 1$ (de $t_0 = 0$ a $t_1 = 3$) con $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.**

$$k_1 = f(t_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.5\begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 1 \\ -0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ -0.35 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.5\begin{pmatrix} -0.75 \\ -0.35 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} -0.125 \\ -0.525 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.525 \\ 0.1675 \end{pmatrix},$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + h k_3) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -0.525 \\ 0.1675 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} -0.575 \\ 0.5025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5025 \\ 0.187 \end{pmatrix}.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{3}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} -0.0237500000 \\ -0.3390000000 \end{pmatrix}.$$

d) **Paso 1 $\rightarrow$ 2 (de $t_1 = 3$ a $t_2 = 6$) con $y_1 = \begin{pmatrix} -0.02375 \\ -0.339 \end{pmatrix}$.**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_1, y_1) = \begin{pmatrix} -0.339 \\ 0.079675 \end{pmatrix}, \\ k_2 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{pmatrix} -0.02375 \\ -0.339 \end{pmatrix} + 1.5\begin{pmatrix} -0.339 \\ 0.079675 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\begin{pmatrix} -0.53225 \\ -0.2194875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2194875 \\ 0.3100225 \end{pmatrix}, \\ k_3 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{pmatrix} -0.02375 \\ -0.339 \end{pmatrix} + 1.5\begin{pmatrix} -0.2194875 \\ 0.3100225 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\begin{pmatrix} -0.35298125 \\ 0.12603375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.12603375 \\ 0.151283875 \end{pmatrix}, \\ k_4 &= f(t_1 + h, y_1 + h k_3) = f\left(\begin{pmatrix} -0.02375 \\ -0.339 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0.12603375 \\ 0.151283875 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\begin{pmatrix} 0.35435125 \\ 0.114851625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.114851625 \\ -0.20014595 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{3}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} -0.2292779375 \\ 0.0620709000 \end{pmatrix}.$$

e) **Paso 2 $\rightarrow$ 3 (de $t_2 = 6$ a $t_3 = 9$) con $y_2 = \begin{pmatrix} -0.2292779375 \\ 0.0620709000 \end{pmatrix}$.**

$$y_3 \approx \begin{pmatrix} 0.0475294216 \\ 0.0678342189 \end{pmatrix}.$$

f) **Paso 3 $\rightarrow$ 4 (de $t_3 = 9$ a $t_4 = 12$) con $y_3 = \begin{pmatrix} 0.0475294216 \\ 0.0678342189 \end{pmatrix}$.**

$$y_4 \approx \begin{pmatrix} 0.0448627812 \\ -0.0269218606 \end{pmatrix}.$$

g) **Resultado.**

t_n	$x_{RK4}(t_n) = y_1(t_n)$	$v_{RK4}(t_n) = y_2(t_n)$
0	1.0000000000	0.0000000000
3	-0.0237500000	-0.3390000000
6	-0.2292779375	0.0620709000
9	0.0475294216	0.0678342189
12	0.0448627812	-0.0269218606

3. Solución con el ejecutable

Figura 21

Solución de la aplicación 4, para $N=4$.



Tabla 7

Comparación de solución de la aplicación 4, para $N=4$

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0		1		0	1	0
3	-0.282644732		-0.456772305	-0.02375	-0.282645	-0.4567723
6	-0.337393833		0.341664947	-0.229277938	-0.337394	0.34166495
9	0.40748876		-0.004882873	0.047529421	0.407489	-0.00488287
12	-0.119635273		-0.183857318	0.044862779	-0.119635	-0.18385732

Los resultados de la Tabla (7) y la Figura (21) mostraron la comparación entre la solución analítica, el método RK4 y el método ode45 para los tiempos $t = 0, 3, 6, 9$ y 12 . En el tiempo inicial, los tres métodos coincidieron exactamente, ya que partieron de las mismas condiciones iniciales.

Se observó que la solución analítica presentó un movimiento oscilatorio amortiguado, porque la posición y la velocidad cambiaron de signo a lo largo del tiempo y su amplitud fue disminuyendo progresivamente. Este comportamiento también fue reproducido por el método ode45, cuyos resultados coincidieron casi exactamente con la solución analítica en todos los tiempos evaluados.

En cambio, el método RK4 mostró diferencias notorias respecto a la solución analítica. Aunque siguió parcialmente la tendencia del sistema, sus valores de posición y velocidad se alejaron de los resultados exactos, especialmente en los tiempos $t = 3, 6, 9$ y 12 . Esto indicó que, con el número de subintervalos utilizado, la aproximación de RK4 no fue tan precisa como la obtenida con ode45.

Figura 22

Solución de la aplicación 4, para $N=50$.

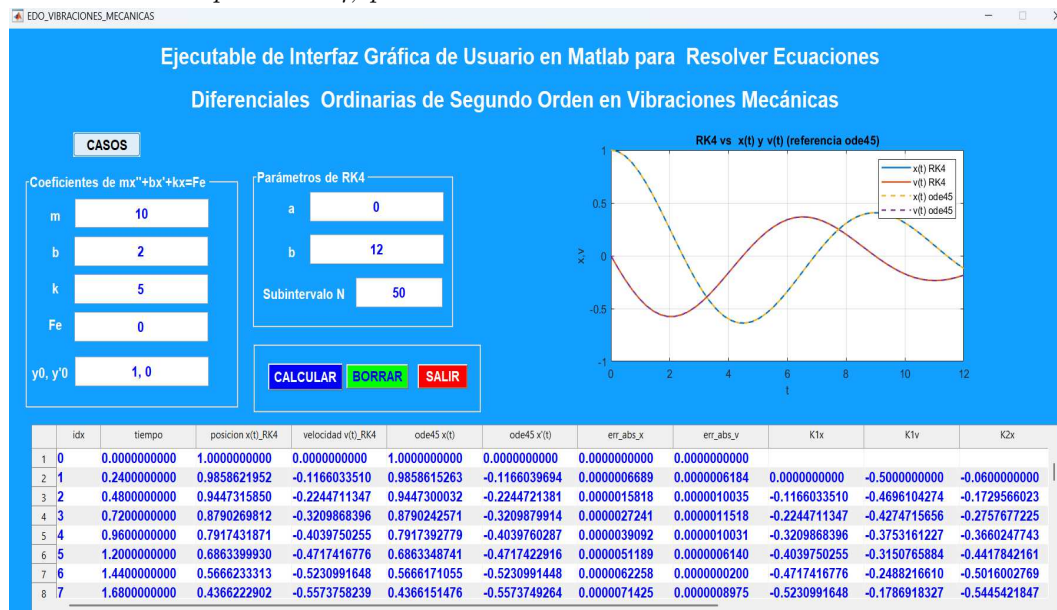


Tabla 8

Comparación de solución de la aplicación 4, para $N=50$

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	1	0	1	0	1	0
0.24	0.985861533	-0.116603969	0.985862195	-0.116603351	0.985862	-0.11660397
0.48	0.944729992	-0.22447214	0.944731585	-0.224471135	0.94473	-0.22447214
0.72	0.879024274	-0.320987978	0.879026981	-0.32098684	0.879024	-0.32098799
0.96	0.791739274	-0.40397603	0.791743187	-0.403975026	0.791739	-0.40397603
1.2	0.686334878	-0.471742287	0.686339993	-0.471741678	0.686335	-0.47174229
1.44	0.56661711	-0.523099135	0.566623331	-0.523099165	0.566617	-0.52309914
1.68	0.436615143	-0.557374945	0.43662229	-0.557375824	0.436615	-0.55737493
1.92	0.300457813	-0.574408724	0.300465632	-0.57441062	0.300458	-0.57440878
2.16	0.162253126	-0.574530705	0.162261301	-0.574533733	0.162253	-0.57453074
2.4	0.025973995	-0.558530056	0.025982165	-0.558534275	0.025974	-0.55853004
2.64	-0.104646879	-0.52761124	-0.104639102	-0.527616647	-0.104647	-0.52761125
2.88	-0.226210462	-0.483340759	-0.226203473	-0.483347288	-0.22621	-0.48334076
3.12	-0.335731094	-0.427586244	-0.335725279	-0.42759377	-0.335731	-0.42758624
3.36	-0.430700877	-0.362449951	-0.430696594	-0.362458294	-0.430701	-0.36244996
3.6	-0.509137632	-0.290198792	-0.509135193	-0.290207722	-0.509138	-0.2901988
3.84	-0.569615868	-0.213193025	-0.569615525	-0.213202276	-0.569616	-0.21319303
4.08	-0.611280679	-0.13381567	-0.611282611	-0.133824944	-0.611281	-0.13381567
4.32	-0.633844984	-0.054404594	-0.633849291	-0.054413578	-0.633845	-0.05440459
4.56	-0.637570971	0.022810961	-0.637577664	0.022802584	-0.637571	0.02281096
4.8	-0.623236998	0.095767815	-0.623246	0.095760355	-0.623237	0.09576782
5.04	-0.592091568	0.162618949	-0.592102713	0.162612695	-0.592092	0.16261894
5.28	-0.545796271	0.221775187	-0.545809311	0.221770395	-0.545796	0.22177518
5.52	-0.486359815	0.271937691	-0.486374423	0.271934574	-0.48636	0.27193769
5.76	-0.416065405	0.312120788	-0.416081191	0.312119511	-0.416065	0.3121208
6	-0.337393833	0.341664947	-0.337410355	0.341665615	-0.337394	0.34166495
6.24	-0.252944624	0.360239993	-0.252961402	0.360242649	-0.252945	0.36023998
6.48	-0.165357549	0.367838934	-0.165374083	0.367843556	-0.165358	0.36783893
6.72	-0.077236688	0.36476301	-0.077252474	0.364769511	-0.077237	0.364763
6.96	0.008920949	0.351598799	0.008906402	0.351607029	0.008921	0.3515988
7.2	0.090790451	0.329188387	0.0907776	0.329198138	0.09079	0.32918839
7.44	0.166276158	0.298593772	0.166265416	0.298604784	0.166276	0.29859377
7.68	0.233559706	0.261056766	0.233551425	0.261068736	0.23356	0.26105677
7.92	0.29113804	0.217955733	0.2911325	0.217968323	0.291138	0.21795573
8.16	0.337850801	0.170760521	0.337848199	0.170773369	0.337851	0.17076052
8.4	0.372896818	0.120986943	0.372897262	0.120999678	0.372897	0.12098694
8.64	0.395839744	0.070152101	0.395843249	0.07016435	0.39584	0.0701521
8.88	0.406603204	0.019731768	0.406609691	0.019743172	0.406603	0.01973177
9.12	0.405456063	-0.028879077	0.405465362	-0.028868854	0.405456	-0.02887908
9.36	0.392988706	-0.074401591	0.393000562	-0.07439285	0.392989	-0.07440159
9.6	0.370081407	-0.115703501	0.370095486	-0.115696498	0.370081	-0.1157035
9.84	0.337866048	-0.151823997	0.337881949	-0.151818938	0.337866	-0.15182399
10.08	0.297682579	-0.181992648	0.297699846	-0.18198968	0.297683	-0.18199265
10.32	0.251031674	-0.205642095	0.251049811	-0.205641303	0.251032	-0.20564209
10.56	0.199525102	-0.222414447	0.199543588	-0.222415849	0.199525	-0.22241445
10.8	0.144835309	-0.232161504	0.144853613	-0.232165055	0.144835	-0.23216151
11.04	0.088645654	-0.234939087	0.088663254	-0.234944678	0.088646	-0.23493919
11.28	0.032602681	-0.230995911	0.032619077	-0.231003374	0.032603	-0.23099592
11.52	-0.021728351	-0.220757569	-0.021713621	-0.22076668	-0.021728	-0.22075757
11.76	-0.072903563	-0.2048063	-0.072890907	-0.204816789	-0.072904	-0.2048063
12	-0.119635273	-0.183857318	-0.119625037	-0.183868876	-0.119635	-0.18385732

Los resultados de la Tabla (8) y Figura (22) permitieron comparar la solución analítica con las soluciones numéricas calculadas mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y el método ode45 de MATLAB, en el intervalo de $t = 0$ a $t = 12$.

Se observó que la solución analítica presentó un comportamiento oscilatorio, ya que la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ cambiaron de signo en varios instantes. Además, la amplitud del movimiento varió de manera progresiva, lo que permitió describir adecuadamente la

dinámica del sistema de vibraciones mecánicas.

Al comparar los resultados, se notó que los valores obtenidos con RK4 fueron muy cercanos a la solución analítica en todos los tiempos evaluados. De igual manera, los resultados calculados con ode45 prácticamente coincidieron con la solución exacta. Las diferencias entre ambos métodos numéricos y la solución analítica fueron mínimas, lo cual indicó una alta precisión en la aproximación.

También, la gráfica mostró que las curvas de RK4 y ode45 casi se superpusieron durante todo el intervalo de estudio, tanto en la posición como en la velocidad. Esto confirmó que el algoritmo implementado en la interfaz gráfica funcionó correctamente y reprodujo de manera adecuada el comportamiento del sistema.

3.6 Aplicación 5: Vibración forzada (Caso 5)

Considerando un sistema masa-resorte-amortiguador con las condiciones siguiente

$$b = 2N \cdot \frac{\text{seg}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}; k = 1N\cdot; F_E = 17 \cos t$$

Determine la posición y velocidad de la masa en todo tiempo que $x_0 = 0 \text{ m}; v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Solución

1. Solución analítica

a) Planteamiento del problema.

Ecuación del sistema masa-resorte-amortiguador (con fuerza externa):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_e(t),$$

con los datos

$$m = 1, \quad b = 2, \quad k = 1, \quad F_e(t) = 17 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Al sustituir:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 17 \cos t.$$

b) **Solución homogénea.**

La ecuación homogénea es:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0.$$

Su ecuación característica:

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r + 1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1 \text{ (raíz doble)}.$$

Entonces:

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}.$$

c) **Solución particular.**

Se propone:

$$x_p(t) = A \cos t + B \sin t.$$

Entonces:

$$x_p'(t) = -A \sin t + B \cos t, \quad x_p''(t) = -A \cos t - B \sin t.$$

Sustituyendo en $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 17 \cos t$:

$$(-A \cos t - B \sin t) + 2(-A \sin t + B \cos t) + (A \cos t + B \sin t) = 17 \cos t,$$

se simplifica a:

$$2(-A \sin t + B \cos t) = 17 \cos t.$$

Comparando coeficientes:

$$-2A = 0 \Rightarrow A = 0, \quad 2B = 17 \Rightarrow B = \frac{17}{2} = 8.5.$$

Por tanto:

$$x_p(t) = 8.5 \sin t.$$

d) **Solución general.**

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 8.5 \sin t.$$

La velocidad:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}[(C_1 + C_2 t)e^{-t}] + 8.5 \cos t = (C_2 - (C_1 + C_2 t))e^{-t} + 8.5 \cos t.$$

e) **Determinación de constantes con condiciones iniciales.**

Aplicando $x(0) = 0$:

$$0 = (C_1 + 0)e^0 + 8.5 \sin 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Aplicando $\dot{x}(0) = 0$:

$$0 = (C_2 - C_1)e^0 + 8.5 \cos 0 \Rightarrow 0 = C_2 + 8.5 \Rightarrow C_2 = -8.5.$$

f) **Soluciones finales (posición y velocidad).**

$$x(t) = -8.5 t e^{-t} + 8.5 \sin t = 8.5(\sin t - t e^{-t}),$$

$$\dot{x}(t) = -8.5(1 - t)e^{-t} + 8.5 \cos t = 8.5(\cos t - (1 - t)e^{-t}).$$

2. Solución numérica

a) **Reducción a un sistema de primer orden.**

La EDO

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 17 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

se escribe como sistema con $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = 17 \cos t - 2y_2 - y_1, \end{cases} \quad \text{con } (y_1(0), y_2(0)) = (0, 0).$$

b) **Parámetros y esquema RK4 (vectorial).**

Intervalo $[0, 16]$, número de pasos $N = 4 \Rightarrow h = \frac{16 - 0}{4} = 4$.

Para $y' = f(t, y)$, el paso RK4 desde (t_n, y_n) a (t_{n+1}, y_{n+1}) es:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + h k_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Aquí $f(t, y) = (y_2, 17 \cos t - 2y_2 - y_1)^\top$.

c) **Paso $0 \rightarrow 1$ (de $t_0 = 0$ a $t_1 = 4$) con $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \end{pmatrix}, \\ k_2 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ -75.0744962200 \end{pmatrix}, \\ k_3 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\begin{pmatrix} 68 \\ -150.1489924400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150.1489924400 \\ 225.2234886600 \end{pmatrix}, \\ k_4 &= f(t_0 + h, y_0 + h k_3) = f\begin{pmatrix} -600.5959697600 \\ 900.8939546400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900.8939546400 \\ -1212.3038811000 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} 445.7306465136 \\ -596.6705974735 \end{pmatrix}.$$

d) **Paso 1 $\rightarrow$ 2 (de $t_1 = 4$ a $t_2 = 8$) con $y_1 = \begin{pmatrix} 445.7306465136 \\ -596.6705974735 \end{pmatrix}$.**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_1, y_1) = \begin{pmatrix} -596.6705974735 \\ 736.4986068800 \end{pmatrix}, \\ k_2 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = \begin{pmatrix} 876.3266162865 \\ -988.7197892600 \end{pmatrix}, \\ k_3 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = \begin{pmatrix} -2574.1101760000 \\ 2966.1593677800 \end{pmatrix}, \\ k_4 &= f(t_1 + h, y_1 + h k_3) = \begin{pmatrix} 11267.9668736600 \\ -12687.6971904300 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{y_2 \approx \begin{pmatrix} 5296.2167510243 \\ -5927.5502151447 \end{pmatrix}}.$$

e) **Paso 2 $\rightarrow$ 3 (de $t_2 = 8$ a $t_3 = 12$) con $y_2 = \begin{pmatrix} 5296.2167510243 \\ -5927.5502151447 \end{pmatrix}$.**

$$\begin{aligned} k_1 &= \begin{pmatrix} -5927.5502151447 \\ 6556.4101786900 \end{pmatrix}, \\ k_2 &= \begin{pmatrix} 7185.2701422353 \\ -7825.9208212000 \end{pmatrix}, \\ k_3 &= \begin{pmatrix} -21579.3918575500 \\ 23477.7624636000 \end{pmatrix}, \\ k_4 &= \begin{pmatrix} 87983.4996392700 \\ -94931.3030820700 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{y_3 \approx \begin{pmatrix} 40808.0207466911 \\ -43975.0232941970 \end{pmatrix}}.$$

f) **Paso 3 $\rightarrow$ 4 (de $t_3 = 12$ a $t_4 = 16$) con $y_3 = \begin{pmatrix} 40808.0207466911 \\ -43975.0232941970 \end{pmatrix}$.**

$$k_1 = \begin{pmatrix} -43975.0232941970 \\ 47156.3713590000 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 50337.7194238100 \\ -53531.0884732000 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -151037.2002405900 \\ 160593.2654196000 \end{pmatrix},$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 598398.0383841900 \\ -633471.5767638600 \end{pmatrix}.$$

$$y_4 \approx \begin{pmatrix} 276157.3897176347 \\ -292102.2576355711 \end{pmatrix}.$$

g) **Resultado.**

t_n	$x_{RK4}(t_n) = y_1(t_n)$	$v_{RK4}(t_n) = y_2(t_n)$
0	0.0000000000	0.0000000000
4	445.7306465136	-596.6705974735
8	5296.2167510243	-5927.5502151447
12	40808.0207466911	-43975.0232941970
16	276157.3897176347	-292102.2576355711

3. Solución con el ejecutable

Figura 23

Solución de la aplicación 5, para $N=4$.



Tabla 9

Comparación de solución de la aplicación 5, para $N=4$

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	0	0	0	0	0	0
3	-0.070050175	-7.568556059	445.7306465	-596.6705975	-7.05555291	-5.088922
6	-2.501448096	8.266794404	5296.216751	-5927.550215	8.38673366	-1.21679023
9	3.493566275	-7.736215359	40808.02075	-43975.02329	-4.5614965	7.17333315
12	-4.561496513	7.173333133	276157.3897	-292102.2576	-2.4471935	-8.14009123

En la Tabla (9) y Figura (23) se comparan los resultados de la solución analítica, del método RK4 y de ode45 para la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$. Al inicio, en $t = 0$, los tres métodos coinciden porque parten de las mismas condiciones iniciales. Sin embargo, conforme avanza el tiempo, el método RK4 comienza a alejarse demasiado de la solución analítica, mostrando valores muy grandes que no corresponden al comportamiento real del sistema. Esto indica que RK4 presentó inestabilidad numérica en este problema.

Por otro lado, ode45 también muestra diferencias con la solución analítica, pero sus resultados son mucho más cercanos y razonables que los de RK4. Esto permite notar que ode45 tuvo un mejor comportamiento en la simulación. En general, los resultados muestran que el método RK4, tal como fue aplicado, no fue adecuado para este caso, mientras que ode45 ofreció una aproximación más confiable.

Figura 24

Solución de la aplicación 5, para $N=50$.

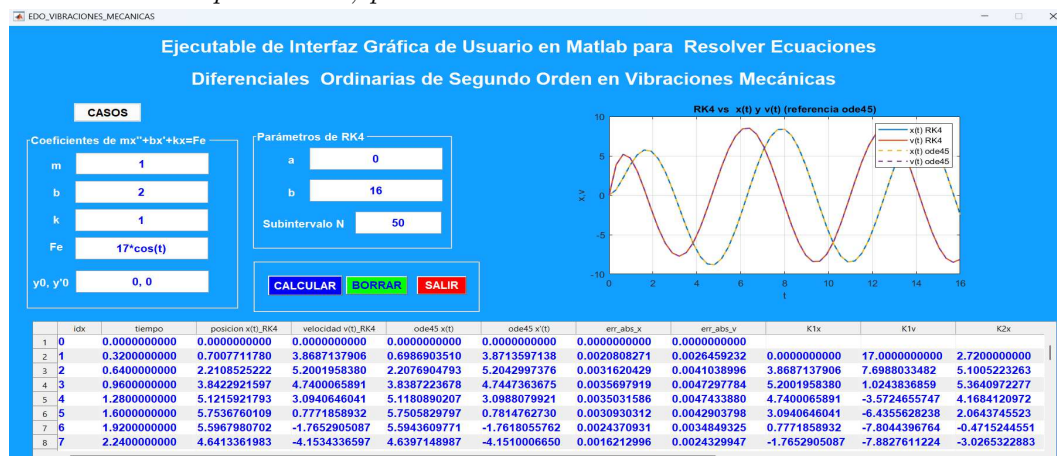


Tabla 10

Comparación de solución de la aplicación 5, para $N=50$

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	0	0	0	0	0	0
0.24	0.415751488	3.174756804	0.700771178	3.868713791	0.69869035	3.87135971
0.48	1.400486754	4.804434252	2.210852522	5.200195838	2.20769048	5.20429974
0.72	2.625845905	5.231878329	3.84229216	4.740006589	3.83872237	4.74473637
0.96	3.838722381	4.7447363	5.121592179	3.094064604	5.11808902	3.09880799
1.2	4.850151269	3.592071073	5.753676011	0.777185893	5.75058298	0.78147627
1.44	5.527400193	1.994711342	5.59679807	-1.765290509	5.59436098	-1.76180558
1.68	5.787946841	0.150854187	4.641336198	-4.15343366	4.6397149	-4.15100067
1.92	5.594360904	-1.761805591	2.988095694	-6.078684238	2.98737002	-6.07744384
2.16	4.949390194	-3.58633705	0.823918017	-7.313809213	0.82408546	-7.31379071
2.4	3.890790788	-5.188302938	-1.605893337	-7.722127933	-1.60491215	-7.72325589
2.64	2.485645339	-6.458175971	-4.027509477	-7.262552539	-4.02586327	-7.26464072
2.88	0.824085478	-7.313790645	-6.169147496	-5.988226378	-6.1670405	-5.99101588
3.12	-0.987524813	-7.702306371	-7.79003392	-4.037752111	-7.78770721	-4.04092136
3.36	-2.833777179	-7.601282799	-8.705378738	-1.619133742	-8.70308769	-1.62233265
3.6	-4.597529675	-7.018592273	-8.805182336	1.012445423	-8.80317269	1.00956219
3.84	-6.167040455	-5.991015939	-8.065190846	3.581086962	-8.06367542	3.57882665
4.08	-7.442601772	-4.581486762	-6.549025618	5.818414095	-6.54816083	5.81701312
4.32	-8.342356073	-2.875051087	-4.401352379	7.49085357	-4.40123449	7.49046638
4.56	-8.807005046	-0.973716894	-1.832829623	8.423280601	-1.83346913	8.42394815
4.8	-8.803172855	1.009562189	0.901611912	8.516680297	0.90027951	8.51833742
5.04	-8.32525247	2.957455766	3.528943249	7.758064627	3.52705344	7.76054427
5.28	-7.3956441	4.755026052	5.786005017	6.221656334	5.7837502	6.2247077
5.52	-6.063381944	6.29632692	7.446431644	4.061229147	7.44404144	4.06454273
5.76	-4.40123443	7.490466519	8.343802555	1.494386197	8.34152067	1.49762545
6	-2.501448096	8.266794404	8.388674862	-1.219626048	8.38673366	-1.21679023
6.24	-0.470381361	8.578921671	7.577773317	-3.806316416	7.57637053	-3.80417238
6.48	1.577663086	8.407347537	5.994409198	-6.003881482	5.99368831	-6.00264705
6.72	3.527053413	7.76054435	3.800089771	-7.589837721	3.80012431	-7.58963876
6.96	5.267512204	6.674440424	1.218173806	-8.403651286	1.21896087	-8.40450824
7.2	6.700485791	5.210331246	-1.488764426	-8.363069583	-1.4873043	-8.36489571
7.44	7.744834831	3.451339276	-4.045561994	-7.472498094	-4.04357666	-7.47510845
7.68	8.341520618	1.497625436	-6.192379582	-5.822573276	-6.19007031	-5.82570285
7.92	8.457019177	-0.539373249	-7.711063695	-3.580976052	-7.70866476	-3.58430733
8.16	8.085268106	-2.543349684	-8.44728098	-0.975419495	-8.44503557	-0.97861446
8.4	7.248035192	-4.399809405	-8.326176383	1.729461262	-8.32431235	1.72672691
8.64	5.99368824	-6.002647119	-7.359964593	4.258969964	-7.35867085	4.25697356
8.88	4.394437149	-7.260240344	-5.64668341	6.356233358	-5.64609188	6.35517769
9.12	2.542206773	-8.100711088	-3.360235115	7.808277061	-3.36040519	7.80826943
9.36	0.543377545	-8.476054179	-0.732726589	8.467645427	-0.73364108	8.46868608
9.6	-1.487304305	-8.364895804	1.969099134	8.267370127	1.96753314	8.26935373
9.84	-3.433297568	-7.773724321	4.470947198	7.22776751	4.46888872	7.23049256
10.08	-5.182940985	-6.736522967	6.51882146	5.454374476	6.51647955	5.45756416
10.32	-6.635849464	-5.312825639	7.904813722	3.127232333	7.9024263	3.13056283
10.56	-7.70866473	-3.584307353	8.488213388	0.482606533	8.48602265	0.48573972
10.8	-8.33983063	-1.650104926	8.209794375	-2.211001773	8.20802276	-2.20838406
11.04	-8.493119226	0.378863789	7.097828806	-4.680116892	7.09665656	-4.67828031
11.28	-8.159705438	2.386256394	5.26521695	-6.674054697	5.26476246	-6.67318558
11.52	-7.358671231	4.256973703	2.898024837	-7.99037464	2.89833487	-7.99056164
11.76	-6.135910378	5.883756508	0.236593351	-8.495433565	0.23763614	-8.49665744
12	-4.561496513	7.173333133	-2.44886322	-8.137954534	-2.4471935	-8.14009123

En la Tabla (10) y Figura (24) se observa que los resultados de RK4 y ode45 son muy parecidos en todos los tiempos evaluados, lo que indica que ambos métodos numéricos trabajaron de forma estable y dieron casi la misma respuesta. Esto muestra que el algoritmo implementado en MATLAB tuvo un comportamiento adecuado desde el punto de vista numérico.

Sin embargo, al comparar esos resultados con la solución analítica, se notan diferencias

importantes. Esto significa que, aunque RK4 y ode45 coinciden entre sí, ambos se están alejando de la solución exacta del problema. Por ello, se entiende que N debe ser más grande para que exista un error pequeño.

3.7 Aplicación 6: Vibración forzada sin amortiguamiento (Caso 6)

Considerando un sistema masa-resorte con los parámetros $m = 1\text{kg}$, $b = 0\text{N}$, s/m , $k = 1\text{N/m}$, $F_0 = 2 \cos 2t$ y con condiciones iniciales $x_0 = \frac{1}{10}$, $v_0 = 0$. Determine la posición, la velocidad y la aceleración en el tiempo t .

Solución

1. Solución analítica

a) Planteamiento del problema.

Ecuación del sistema masa-resorte (con fuerza externa):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_e(t),$$

con los datos

$$m = 1, \quad b = 0, \quad k = 1, \quad F_e(t) = 2 \cos(2t), \quad x(0) = \frac{1}{10}, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Al sustituir:

$$\ddot{x} + x = 2 \cos(2t).$$

b) Solución homogénea.

La ecuación homogénea es:

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Su ecuación característica:

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i.$$

Entonces:

$$x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

c) **Solución particular.**

Se propone:

$$x_p(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t).$$

Entonces:

$$x_p''(t) = -4A \cos(2t) - 4B \sin(2t).$$

Sustituyendo en $\ddot{x} + x = 2 \cos(2t)$:

$$(-4A \cos(2t) - 4B \sin(2t)) + (A \cos(2t) + B \sin(2t)) = 2 \cos(2t),$$

$$(-3A) \cos(2t) + (-3B) \sin(2t) = 2 \cos(2t).$$

Comparando coeficientes:

$$-3A = 2 \Rightarrow A = -\frac{2}{3}, \quad -3B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Por tanto:

$$x_p(t) = -\frac{2}{3} \cos(2t).$$

d) **Solución general.**

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{2}{3} \cos(2t).$$

La velocidad y aceleración:

$$\dot{x}(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{4}{3} \sin(2t),$$

$$\ddot{x}(t) = -C_1 \cos t - C_2 \sin t + \frac{8}{3} \cos(2t).$$

e) **Determinación de constantes con condiciones iniciales.**

Aplicando $x(0) = \frac{1}{10}$:

$$\frac{1}{10} = C_1 - \frac{2}{3} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{10} + \frac{2}{3} = \frac{23}{30}.$$

Aplicando $\dot{x}(0) = 0$:

$$0 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

f) **Soluciones finales (posición, velocidad y aceleración).**

$$x(t) = \frac{23}{30} \cos t - \frac{2}{3} \cos(2t),$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{23}{30} \sin t + \frac{4}{3} \sin(2t),$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{23}{30} \cos t + \frac{8}{3} \cos(2t).$$

2. Solución numérica

a) **Reducción a un sistema de primer orden.**

La EDO

$$\ddot{x} + x = 2 \cos(2t), \quad x(0) = \frac{1}{10}, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

se escribe como sistema con $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = 2 \cos(2t) - y_1, \end{cases} \quad \text{con } (y_1(0), y_2(0)) = \left(\frac{1}{10}, 0\right).$$

b) **Parámetros y esquema RK4 (vectorial).**

Intervalo $[0, 10]$, número de pasos $N = 4 \Rightarrow h = \frac{10 - 0}{4} = 2.5$.

Para $y' = f(t, y)$, el paso RK4 desde (t_n, y_n) a (t_{n+1}, y_{n+1}) es:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\k_4 &= f(t_n + h, y_n + h k_3), \\y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).\end{aligned}$$

Aquí $f(t, y) = (y_2, 2 \cos(2t) - y_1)^\top$.

c) **Paso $0 \rightarrow 1$ (de $t_0 = 0$ a $t_1 = 2.5$) con $y_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$.**

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0.0000000000 \\ 1.9000000000 \end{pmatrix}, \\k_2 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\begin{matrix} 0.1 \\ 2.375 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 2.3750000000 \\ -1.7022872311 \end{pmatrix}, \\k_3 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\begin{matrix} 3.06875 \\ -2.1278590389 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} -2.1278590389 \\ -4.6710372311 \end{pmatrix}, \\k_4 &= f(t_0 + h, y_0 + h k_3) = f\left(\begin{matrix} -5.2196475972 \\ -11.6775930777 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} -11.6775930777 \\ 5.7869719681 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{y_1 = y_0 + \frac{2.5}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} -4.5597129814 \\ -2.1081987318 \end{pmatrix}}.$$

d) **Paso $1 \rightarrow 2$ (de $t_1 = 2.5$ a $t_2 = 5$) con $y_1 = \begin{pmatrix} -4.5597129814 \\ -2.1081987318 \end{pmatrix}$.**

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_1, y_1) = \begin{pmatrix} -2.1081987318 \\ 5.1270373524 \end{pmatrix}, \\k_2 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = \begin{pmatrix} 4.3005979587 \\ 7.8882320318 \end{pmatrix}, \\k_3 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = \begin{pmatrix} 7.7520913080 \\ -0.1227638312 \end{pmatrix}, \\k_4 &= f(t_1 + h, y_1 + h k_3) = \begin{pmatrix} -2.4151083099 \\ -16.4986583468 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$y_2 \approx \begin{pmatrix} 3.5994834735 \\ -0.3751506456 \end{pmatrix}.$$

e) **Paso 2 $\rightarrow$ 3 (de $t_2 = 5$ a $t_3 = 7.5$) con $y_2 = \begin{pmatrix} 3.5994834735 \\ -0.3751506456 \end{pmatrix}$.**

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.3751506456 \\ -5.2776265316 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -6.9721838101 \\ -1.1349486081 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -1.7938364057 \\ 7.1113428475 \end{pmatrix},$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 17.4032064733 \\ -0.6342682849 \end{pmatrix}.$$

$$y_3 \approx \begin{pmatrix} 3.3894898885 \\ 2.1418883804 \end{pmatrix}.$$

f) **Paso 3 $\rightarrow$ 4 (de $t_3 = 7.5$ a $t_4 = 10$) con $y_3 = \begin{pmatrix} 3.3894898885 \\ 2.1418883804 \end{pmatrix}$.**

$$k_1 = \begin{pmatrix} 2.1418883804 \\ -4.9088657142 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -3.9941937623 \\ -5.6279704375 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -4.8930746665 \\ 2.0421322409 \end{pmatrix},$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 7.2472189825 \\ 9.6593609015 \end{pmatrix}.$$

$$y_4 \approx \begin{pmatrix} -0.1044390677 \\ 1.1330628779 \end{pmatrix}.$$

g) Resultado.

t_n	$x_{RK4}(t_n) = y_1(t_n)$	$v_{RK4}(t_n) = y_2(t_n)$
0.0	0.1000000000	0.0000000000
2.5	-4.5597129814	-2.1081987318
5.0	3.5994834735	-0.3751506456
7.5	3.3894898885	2.1418883804
10.0	-0.1044390677	1.1330628779

3. Solución con el ejecutable

Figura 25

Solución de la aplicación 6, para $N=4$.



Tabla 11

Comparación de solución de la aplicación 6, para $N=4$.

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	0.1	0	0	0	0	0
2.5	-0.803318	-1.737394	-4.5099734	-2.1186154	-0.72320386	-1.67754719
5	0.776855	0.009814	3.57582828	-0.36478823	0.74848913	-0.08607863
7.5	0.772212	0.147917	3.40017646	2.13427008	0.73754871	0.24171713
10	-0.915343	1.634343	-0.10896095	1.13796538	-0.83143573	1.57994107

En la Tabla (11) y (25) se observa que ode45 dio resultados más cercanos a la solución analítica que el método RK4. En casi todos los tiempos evaluados, ode45 siguió mejor el comportamiento real de la posición y la velocidad, mientras que RK4 presentó diferencias

más grandes, sobre todo en la posición. Esto muestra que, para este caso, ode45 fue más preciso y más confiable que RK4.

Figura 26

Solución de la aplicación 6, para $N=50$.



En la Tabla (12) y Figura (26) se observa que RK4 y ode45 dieron resultados casi iguales en todos los tiempos, lo que indica que ambos métodos funcionaron de manera estable. Además, sus valores se acercan a la solución analítica, aunque todavía existen pequeñas diferencias.

Tabla 12

Comparación de solución de la aplicación 6, para $N=50$.

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	0.1	0	0	0	0	0
0.2	0.137344	0.366911	0.039335109	0.386781732	0.039337063	0.38677823
0.4	0.241676	0.657921	0.149558621	0.696869456	0.149569521	0.69686252
0.6	0.391185	0.809826	0.308626741	0.866301779	0.30865191	0.86629052
0.8	0.553608	0.782792	0.483895648	0.854545005	0.483937478	0.85452753
1	0.691663	0.567269	0.637575446	0.651442026	0.637632779	0.65141587
1.2	0.769403	0.186054	0.733099757	0.279294822	0.733167662	0.27925818
1.4	0.758456	-0.308861	0.741389242	-0.210267301	0.741459656	-0.21031562
1.6	0.643144	-0.844172	0.646000645	-0.744154823	0.646063448	-0.74421463
1.8	0.423651	-1.336644	0.446326164	-1.239189739	0.446370898	-1.23925895
2	0.116717	-1.706198	0.158314018	-1.615193245	0.158331196	-1.61526828
2.2	-0.246296	-1.88865	-0.187428484	-1.807724891	-0.1874455	-1.80780036
2.4	-0.623668	-1.846075	-0.549874616	-1.778458735	-0.54992846	-1.77852838
2.6	-0.969292	-1.573157	-0.883514939	-1.521550289	-0.88360364	-1.5216071
2.8	-1.239414	-1.098513	-1.145075302	-1.064976428	-1.14519218	-1.06501425
3	-1.399108	-0.480746	-1.299974128	-0.466620103	-1.30010852	-0.466634
3.2	-1.427483	0.200152	-1.327514467	0.194302008	-1.32765305	0.19431505
3.4	-1.32081	0.854733	-1.224001769	0.82913809	-1.22413047	0.82917849
3.6	-1.093082	1.397489	-1.003301126	1.353171744	-1.00340655	1.35323743
3.8	-0.773915	1.759651	-0.694747038	1.698378511	-0.69481839	1.69846477
4	-0.404127	1.89936	-0.338731775	1.823579057	-0.33876238	1.82368099
4.2	-0.029674	1.807673	0.019339921	1.720409425	0.019351888	1.72051573
4.4	0.305107	1.509451	0.335788606	1.414186953	0.33584011	1.41429094
4.6	0.563912	1.059016	0.575043793	0.959553276	0.57512738	0.95964728
4.8	0.723541	0.53129	0.714686087	0.43159662	0.714791213	0.43167402
5	0.776855	0.009814	0.748374626	-0.086134989	0.74848913	-0.08607863
5.2	0.733186	-0.426453	0.686222046	-0.5148319	0.686333917	-0.5147989
5.4	0.616151	-0.715462	0.552582739	-0.792748396	0.552681857	-0.79273861
5.6	0.459264	-0.821599	0.381628105	-0.884714326	0.381707351	-0.88472917
5.8	0.300039	-0.74091	0.211430493	-0.787340601	0.211486595	-0.78737006
6	0.173561	-0.501212	0.077510601	-0.529110533	0.077544207	-0.52915355
6.2	0.106554	-0.157104	0.0068847	-0.165360296	0.006899879	-0.16541264
6.4	0.112887	0.219325	0.013565214	0.23103817	0.013568247	0.2309803
6.6	0.191256	0.550583	0.096234368	0.581797724	0.096232418	0.5817371
6.8	0.325402	0.766729	0.238462728	0.816201911	0.238462336	0.81614022
7	0.486834	0.81712	0.411437706	0.882881048	0.411443364	0.88281849
7.2	0.639614	0.679065	0.578765902	0.758494932	0.578779122	0.7584318
7.4	0.746455	0.361993	0.702580975	0.45192855	0.702599862	0.45186404
7.6	0.775124	-0.09354	0.749978336	0.003318	0.749996459	0.00325187
7.8	0.704151	-0.621878	0.698742537	-0.521956667	0.698755438	-0.522024
8	0.52689	-1.142379	0.541441931	-1.043376424	0.541439493	-1.04344322
8.2	0.25328	-1.572036	0.287220701	-1.477899368	0.287195439	-1.47796263
8.4	-0.091002	-1.838615	-0.039019301	-1.753099965	-0.03907338	-1.7531553
8.6	-0.4679	-1.892238	-0.399942689	-1.818755891	-0.40002791	-1.81879784
8.8	-0.832334	-1.713563	-0.751110057	-1.655047099	-0.75122453	-1.65507073
9	-1.138744	-1.317274	-1.047493971	-1.276061877	-1.04763132	-1.27606198
9.2	-1.347807	-0.750303	-1.250172638	-0.72804135	-1.25032253	-0.72801411
9.4	-1.43228	-0.085042	-1.332161036	-0.082620891	-1.33231052	-0.08256446
9.6	-1.381074	0.591404	-1.282471391	0.57388612	-1.28260557	0.57397107
9.8	-1.200918	1.190252	-1.107769915	1.153494006	-1.10787484	1.15360426
10	-0.915343	1.634343	-0.831371347	1.579811398	-0.83143573	1.57994107

3.8 Aplicación 7: Vibración forzada sin amortiguamiento (Resonancia) (Caso 7)

Dado un sistema masa-resorte con constante $m = 10 \text{ kg}$ & $k = 40 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Sobre el sistema se aplica una fuerza de excitación $F_E = 20 \cos 2t$. Determine la posición de la masa si el sistema se encuentra en reposo en el estado de equilibrio al tiempo $t = 0 \text{ s}$, es decir : $x_0 = 0 \text{ m}$ & $v_0 = 0 \text{ m/s}$.

Solución

1. Solución analítica

a) Planteamiento del problema.

Ecuación del sistema masa-resorte (con fuerza externa y sin amortiguamiento):

$$m\ddot{x} + kx = F_e(t),$$

con los datos

$$m = 10, \quad k = 40, \quad F_e(t) = 20 \cos(2t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Al sustituir:

$$10\ddot{x} + 40x = 20 \cos(2t).$$

Dividiendo entre 10:

$$\ddot{x} + 4x = 2 \cos(2t).$$

b) Frecuencia natural y condición del caso.

La frecuencia natural del sistema es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2.$$

La fuerza externa tiene frecuencia:

$$\omega_e = 2.$$

Entonces:

$$\omega_e = \omega,$$

por lo que el sistema está en **resonancia** (caso $b = 0$ y $\omega_e = \omega$).

c) Solución homogénea.

La ecuación homogénea es:

$$\ddot{x} + 4x = 0.$$

Ecuación característica:

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i.$$

Entonces:

$$x_h(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t).$$

d) Solución particular (por resonancia).

Como el forzamiento $2 \cos(2t)$ tiene la misma frecuencia que la solución homogénea, se propone:

$$x_p(t) = t(A \sin(2t)).$$

Derivadas:

$$x_p'(t) = A \sin(2t) + 2At \cos(2t),$$

$$x_p''(t) = 2A \cos(2t) + 2A \cos(2t) - 4At \sin(2t) = 4A \cos(2t) - 4At \sin(2t).$$

Sustituyendo en $\ddot{x} + 4x = 2 \cos(2t)$:

$$(4A \cos(2t) - 4At \sin(2t)) + 4(At \sin(2t)) = 2 \cos(2t).$$

Se cancelan los términos con $t \sin(2t)$:

$$4A \cos(2t) = 2 \cos(2t) \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Por tanto:

$$x_p(t) = \frac{1}{2} t \sin(2t).$$

e) Solución general.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{1}{2} t \sin(2t).$$

Velocidad:

$$\dot{x}(t) = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) + t \cos(2t).$$

f) Determinación de constantes con condiciones iniciales.

Aplicando $x(0) = 0$:

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{1}{2}(0) \sin 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Aplicando $\dot{x}(0) = 0$:

$$0 = -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 + \frac{1}{2} \sin 0 + 0 \cdot \cos 0 \Rightarrow 0 = 2C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

g) Solución final (posición y velocidad).

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} t \sin(2t)}, \quad \boxed{\dot{x}(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) + t \cos(2t)}.$$

(La aceleración, si se requiere, es $\ddot{x}(t) = 2 \cos(2t) - 2t \sin(2t)$.)

2. Solución numérica

a) **Reducción a un sistema de primer orden.**

La EDO

$$\ddot{x} + 4x = 2 \cos(2t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

se escribe como sistema con $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = 2 \cos(2t) - 4y_1, \end{cases} \quad \text{con } (y_1(0), y_2(0)) = (0, 0).$$

b) **Parámetros y esquema RK4 (vectorial).**

Intervalo $[0, 12]$, número de pasos $N = 4 \Rightarrow h = \frac{12 - 0}{4} = 3$.

Para $y' = f(t, y)$, el paso RK4 desde (t_n, y_n) a (t_{n+1}, y_{n+1}) es:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Aquí $f(t, y) = (y_2, 2 \cos(2t) - 4y_1)^\top$.

c) **Paso $0 \rightarrow 1$ (de $t_0 = 0$ a $t_1 = 3$) con $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.**

$$k_1 = f(t_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(1.5, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1.9203405733 \end{pmatrix},$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(1.5, \begin{pmatrix} 4.5 \\ -2.8805108600 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2.8805108600 \\ -19.9203405733 \end{pmatrix},$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + h k_3) = f\left(3, \begin{pmatrix} -8.6415325800 \\ -59.7610217200 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -59.7610217200 \\ 35.8411964020 \end{pmatrix}.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{3}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx \begin{pmatrix} -27.0117662200 \\ -3.9190837450 \end{pmatrix}.$$

d) **Paso 1 $\rightarrow$ 2 (de $t_1 = 3$ a $t_2 = 6$) con $y_1 = \begin{pmatrix} -27.0117662200 \\ -3.9190837450 \end{pmatrix}$.**

$$y_2 \approx \begin{pmatrix} 1448.0616500000 \\ 205.1967000000 \end{pmatrix}.$$

e) **Paso 2 $\rightarrow$ 3 (de $t_2 = 6$ a $t_3 = 9$) con $y_2 = \begin{pmatrix} 1448.0616500000 \\ 205.1967000000 \end{pmatrix}$.**

$$y_3 \approx \begin{pmatrix} -77154.9300000000 \\ -10955.6200000000 \end{pmatrix}.$$

f) **Paso 3 $\rightarrow$ 4 (de $t_3 = 9$ a $t_4 = 12$) con $y_3 = \begin{pmatrix} -77154.9300000000 \\ -10955.6200000000 \end{pmatrix}$.**

$$y_4 \approx \begin{pmatrix} 4113740.0000000000 \\ 584875.0000000000 \end{pmatrix}.$$

g) **Resultado.**

t_n	$x_{\text{RK4}}(t_n) = y_1(t_n)$	$v_{\text{RK4}}(t_n) = y_2(t_n)$
0	0.0000000000	0.0000000000
3	-27.0117662200	-3.9190837450
6	1448.0616500000	205.1967000000
9	-77154.9300000000	-10955.6200000000
12	4113740.0000000000	584875.0000000000

3. Solución con el ejecutable

Figura 27

Solución de la aplicación 7, para $N=4$.

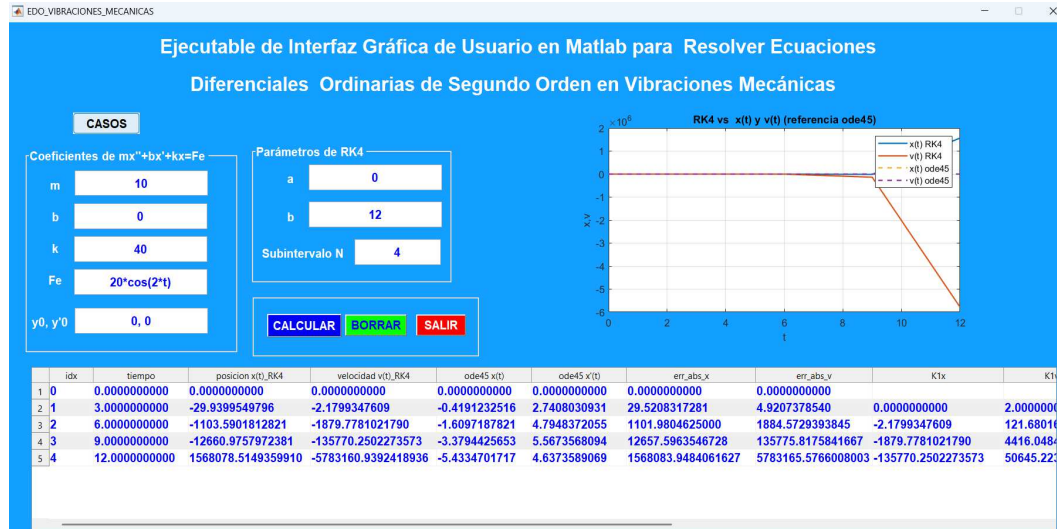


Tabla 13

Comparación de solución de la aplicación 7, para $N=4$.

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	0	0	0	0	0	0
3	-0.419123247	2.740803111	-29.93995498	-2.179934761	-0.41912325	2.74080309
6	-1.609718754	4.794837293	-1103.590181	-1879.778102	-1.60971878	4.79483721
9	-3.37944261	5.567356751	-12660.9758	-135770.2502	-3.37944257	5.56735681
12	-5.433470172	4.637358907	1568078.515	-5783160.939	-5.43347017	4.63735891

La comparación de resultados muestra que el método ode45 reprodujo casi exactamente la solución analítica tanto en la posición $x(t)$ como en la velocidad $v(t)$ en todos los tiempos evaluados. En cambio, el método RK4 empezó a alejarse rápidamente de la solución exacta, presentando errores cada vez mayores conforme avanzó el tiempo. Desde $t = 6$, sus valores crecieron de forma exagerada y en $t = 12$ alcanzaron magnitudes muy altas que no representan el comportamiento real del sistema. En general, ode45 fue preciso y estable, mientras que RK4 presentó una fuerte inestabilidad numérica bajo las condiciones usadas.

Figura 28

Solución de la aplicación 7, para $N=50$.



En la Tabla (14) y Figura (28) se observa que los resultados del método RK4 y del método ode45 son muy cercanos a la solución analítica en casi todos los tiempos evaluados. Esto muestra que ambos métodos numéricos lograron aproximar de manera adecuada la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ del sistema.

Además, ode45 presenta una coincidencia casi exacta con la solución analítica, mientras que RK4 también ofrece valores bastante próximos, aunque con pequeñas diferencias en algunos puntos. Estas diferencias son mínimas y no alteran el comportamiento general de la solución.

En conjunto, los resultados indican que la simulación fue estable y precisa. Por ello, se puede afirmar que tanto RK4 como ode45 representaron correctamente la dinámica del problema, siendo ode45 el método de mayor exactitud y RK4 una aproximación numérica confiable bajo las condiciones usadas.

Tabla 14

Comparación de solución de la aplicación 7, para $N=50$.

t	x(t)- solución analítica	v(t)- solución analítica	x(t)-solución-RK4	v(t)-solución-RK4	x(t)-ode45	v(t)-ode45
0	0	0	0	0	0	0
0.24	0.055413501	0.443768369	0.055393458	0.443619895	0.0554135	0.44376836
0.48	0.196605976	0.684885377	0.196433724	0.684676243	0.19660597	0.6848853
0.72	0.356925005	0.589634244	0.356543216	0.58962582	0.35692501	0.58963422
0.96	0.451029827	0.141359072	0.450509065	0.141855806	0.45102983	0.14135907
1.2	0.405277908	-0.547140868	0.404815194	-0.545965978	0.4052779	-0.54714087
1.44	0.186205932	-1.261700535	0.18606339	-1.259952759	0.18620594	-1.26170052
1.68	-0.182007068	-1.748427083	-0.181606063	-1.746541763	-0.18200707	-1.74842703
1.92	-0.617278792	-1.791964457	-0.616260378	-1.790626114	-0.6172788	-1.79196437
2.16	-0.997918011	-1.287976422	-0.996432992	-1.28791349	-0.99791802	-1.28797641
2.4	-1.195397531	-0.288084744	-1.193825924	-0.28979598	-1.19539753	-0.28808479
2.64	-1.113007819	0.997720885	-1.111878361	0.994218995	-1.1130078	0.9977209
2.88	-0.719484312	2.244927403	-0.719322413	2.240236667	-0.71948432	2.24492746
3.12	-0.067348141	3.095505155	-0.068492507	3.090795209	-0.06734814	3.09550516
3.36	0.710733067	3.256036531	0.708288293	3.252790293	0.71073308	3.25603635
3.6	1.428602155	2.586898664	1.425282724	2.586501241	1.42860219	2.58689864
3.84	1.891014401	1.157175771	1.887620011	1.160452678	1.89101436	1.1571758
4.08	1.945222925	-0.752388365	1.942754125	-0.745545342	1.94522286	-0.75238838
4.32	1.526403087	-2.703261193	1.525794189	-2.694048737	1.52640308	-2.7032612
4.56	0.684185538	-4.199805355	0.686010481	-4.190360287	0.68418553	-4.19980545
4.8	-0.418384275	-4.813665098	-0.41414834	-4.806609183	-0.41838428	-4.81366571
5.04	-1.535524996	-4.300947421	-1.529597024	-4.298712851	-1.53552498	-4.30094749
5.28	-2.393497609	-2.681110339	-2.387205112	-2.685210533	-2.39349766	-2.68111028
5.52	-2.757276819	-0.254357396	-2.752279551	-0.264806269	-2.75727688	-0.25435737
5.76	-2.492961521	2.451318209	-2.490838739	2.436250856	-2.49296145	2.45131824
6	-1.609718754	4.794837293	-1.611518233	4.778417893	-1.60971878	4.79483721
6.24	-0.269141398	6.173607996	-0.275011649	6.159975284	-0.26914139	6.17360813
6.48	1.242678528	6.176201201	1.233659512	6.169369805	1.24267854	6.17620109
6.72	2.575991786	4.697896431	2.56571868	4.700658917	2.57599179	4.69789642
6.96	3.398261027	1.987885168	3.389227045	2.000899167	3.39826111	1.98788513
7.2	3.476367996	-1.387856076	3.47108194	-1.366525765	3.47636792	-1.38785607
7.44	2.739985717	-4.663969668	2.740312002	-4.638676201	2.73998573	-4.66396965
7.68	1.309377973	-7.049239186	1.315966948	-7.025918297	1.30937797	-7.049239
7.92	-0.521347536	-7.916889503	-0.509377372	-7.9017092	-0.52134753	-7.91689178
8.16	-2.34410555	-6.966060892	-2.329121415	-6.963854197	-2.34410558	-6.96606073
8.4	-3.727781541	-4.313483651	-3.713198575	-4.32635107	-3.72778149	-4.31348371
8.64	-4.319996677	-0.489282517	-4.309520769	-0.515746451	-4.31999651	-0.48928253
8.88	-3.935711226	3.667155269	-3.932425491	3.632167246	-3.93571129	3.66715523
9.12	-2.610615575	7.191257588	-2.616130353	7.155511376	-2.61061556	7.19125779
9.36	-0.604626977	9.216960345	-0.618518149	9.189235238	-0.60462698	9.2169606
9.6	1.647911658	9.188172793	1.628204022	9.17615571	1.64791167	9.18817251
9.84	3.632096501	7.00666776	3.610839125	7.014916883	3.63209652	7.00666771
10.08	4.870148784	3.077952809	4.852414769	3.106453475	4.87014877	3.07795285
10.32	5.036027181	-1.760594856	5.026508379	-1.716862615	5.03602721	-1.76059485
10.56	4.03956466	-6.417558807	4.041370094	-6.367840863	4.03956455	-6.41755889
10.8	2.058752655	-9.793669923	2.072493436	-9.749534993	2.05875262	-9.7936701
11.04	-0.489814791	-11.04081789	-0.466400128	-11.01350919	-0.48981478	-11.0407936
11.28	-3.038068945	-9.772960521	-3.00980914	-9.770599003	-3.03806891	-9.77296079
11.52	-4.993062658	-6.176917651	-4.966387559	-6.202239623	-4.99306269	-6.17691745
11.76	-5.874828196	-0.992687638	-5.85632716	-1.041921667	-5.87482817	-0.99268764
12	-5.433470172	4.637358907	-5.428293419	4.574106475	-5.43347017	4.63735891

3.9 Aplicación 8: Sistema de suspensión de un automóvil

Planteamiento del caso real

De acuerdo con Jazar (2017), la respuesta dinámica de un vehículo puede analizarse mediante modelos simplificados de suspensión, como el modelo de cuarto de vehículo. Este modelo considera una masa equivalente, un resorte y un amortiguador viscoso, los cuales permiten representar el movimiento vertical de una parte de la carrocería ante irregularidades de la carretera.

En esta aplicación se analizó el comportamiento vibratorio de la suspensión de un automóvil al pasar por un reductor de velocidad. El propósito fue representar la respuesta vertical de la carrocería cuando el vehículo recibió una perturbación externa durante un intervalo corto de tiempo.

Se consideró un automóvil con una masa total aproximada de 1200 *kg*. Debido a que el modelo correspondió a una cuarta parte del vehículo, se utilizó una masa equivalente de:

$$m = 300 \text{ kg} \quad (24)$$

Asimismo, se emplearon los siguientes parámetros físicos para el sistema de suspensión:

$$b = 1500 \frac{N \cdot s}{m} \quad (25)$$

$$k = 15000 \frac{N}{m} \quad (26)$$

donde:

- m representó la masa equivalente de una cuarta parte de la carrocería del automóvil.
- b representó el coeficiente de amortiguamiento viscoso del sistema de suspensión.
- k representó la rigidez equivalente del resorte.
- $x(t)$ representó el desplazamiento vertical de la carrocería.

- $\dot{x}(t)$ representó la velocidad vertical de la carrocería.
- $F_e(t)$ representó la fuerza externa producida por el paso del automóvil sobre el reductor de velocidad.

La aplicación permitió representar una situación vinculada con la dinámica vehicular. Durante el paso por el reductor, la suspensión recibió una fuerza externa que produjo una vibración vertical. Luego de que el automóvil superó la irregularidad de la vía, la fuerza dejó de actuar y el sistema continuó oscilando de manera amortiguada hasta aproximarse a su posición de equilibrio.

Modelo matemático

La suspensión del automóvil se modeló mediante una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden con amortiguamiento y fuerza externa:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_e(t) \quad (27)$$

Al reemplazar los valores de masa, amortiguamiento y rigidez, se obtuvo:

$$300\ddot{x} + 1500\dot{x} + 15000x = F_e(t) \quad (28)$$

Para representar la perturbación producida por el reductor de velocidad, se consideró la siguiente fuerza externa:

$$F_e(t) = \begin{cases} 589.05 \cos(7.854t) + 750 \sin(7.854t), & 0 \leq t \leq 0.4, \\ 0, & t > 0.4. \end{cases} \quad (29)$$

La expresión anterior indicó que la fuerza externa actuó únicamente durante los primeros 0,4 segundos. Este intervalo representó el tiempo aproximado durante el cual el automóvil pasó por el reductor de velocidad. Después de dicho instante, la fuerza externa fue igual a cero y la suspensión continuó con un movimiento libre amortiguado.

Por tanto, para el intervalo $0 \leq t \leq 0,4$, la ecuación diferencial fue:

$$300\ddot{x} + 1500\dot{x} + 15000x = 589.05 \cos(7.854t) + 750 \sin(7.854t) \quad (30)$$

Para el intervalo posterior, es decir, cuando $t > 0,4$, se tuvo:

$$300\ddot{x} + 1500\dot{x} + 15000x = 0 \quad (31)$$

Las condiciones iniciales consideradas fueron:

$$x(0) = 0 \quad (32)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad (33)$$

Estas condiciones indicaron que, antes de pasar por el reductor, la carrocería del automóvil se encontraba en reposo y en su posición de equilibrio.

Transformación a un sistema de primer orden

Para aplicar el método de Runge-Kutta de orden cuatro, la ecuación diferencial de segundo orden se transformó en un sistema equivalente de primer orden.

Se definieron las variables:

$$x_1 = x \quad (34)$$

$$x_2 = \dot{x} \quad (35)$$

Por tanto:

$$x_1' = x_2 \quad (36)$$

A partir de la ecuación 28, se despejó la aceleración:

$$\ddot{x} = -\frac{1500}{300}\dot{x} - \frac{15000}{300}x + \frac{F_e(t)}{300} \quad (37)$$

Simplificando, se obtuvo:

$$x_2' = -5x_2 - 50x_1 + \frac{F_e(t)}{300} \quad (38)$$

Durante el paso del automóvil sobre el reductor, para $0 \leq t \leq 0,4$, el sistema fue:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -5x_2 - 50x_1 + 1.9635 \cos(7.854t) + 2.5 \sin(7.854t). \end{cases} \quad (39)$$

Luego de superar el reductor, para $t > 0,4$, el sistema quedó expresado como:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -5x_2 - 50x_1. \end{cases} \quad (40)$$

Parámetros ingresados en la interfaz gráfica

Figura 29

Solución de la aplicación 8, para $N=500$.



Esta expresión permitió que el programa aplicara la fuerza externa únicamente durante los primeros 0,4 segundos. Para los valores de tiempo posteriores, la fuerza externa tomó el valor de cero.

Resultados obtenidos

El modelo fue resuelto mediante el método de Runge–Kutta de orden cuatro en el intervalo de tiempo $[0, 5]$, utilizando $N = 500$ subintervalos. El tamaño de paso empleado fue:

$$h = \frac{5 - 0}{500} = 0.01 \quad (41)$$

Los resultados obtenidos mediante RK4 fueron comparados con la solución de referencia calculada mediante la función `ode45` de MATLAB. La tabla generada por el ejecutable mostró los valores de tiempo, posición, velocidad, aproximaciones con RK4, valores obtenidos con `ode45` y errores absolutos.

En los primeros valores de la tabla se observó que los errores absolutos en posición y velocidad fueron muy pequeños, del orden de 10^{-10} . Esto evidenció una alta coincidencia entre el método de Runge–Kutta de orden cuatro y la solución de referencia obtenida mediante `ode45`.

El desplazamiento vertical máximo de la carrocería fue aproximadamente:

$$x_{\text{máx}} \approx 0.0559 \text{ m} \quad (42)$$

Expresado en centímetros, se tuvo:

$$x_{\text{máx}} \approx 5,59 \text{ cm} \quad (43)$$

El desplazamiento máximo se presentó aproximadamente en:

$$t \approx 0.33 \text{ s} \quad (44)$$

Asimismo, la velocidad máxima fue cercana a:

$$v_{\text{máx}} \approx 0.269 \text{ m/s} \quad (45)$$

mientras que la velocidad mínima fue aproximadamente:

$$v_{\text{mín}} \approx -0.277 \text{ m/s} \quad (46)$$

La Figura 29 mostró la comparación entre la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ obtenidas mediante el método de Runge–Kutta de orden cuatro y mediante `ode45`. Las curvas correspondientes a ambos métodos presentaron una superposición casi total, lo cual mostró que la solución obtenida mediante RK4 fue consistente con la solución de referencia.

Durante los primeros 0,4 segundos, el sistema recibió la fuerza externa ocasionada por el paso del automóvil sobre el reductor de velocidad. En este intervalo, la carrocería presentó un incremento de desplazamiento y alcanzó una amplitud máxima aproximada de 5,59 *cm*.

Después de que la fuerza externa dejó de actuar, el sistema continuó oscilando debido a la energía acumulada en el resorte. Sin embargo, la presencia del amortiguador produjo una reducción progresiva de la amplitud. A partir de aproximadamente 2 segundos, la posición y la velocidad se aproximaron a cero, lo cual indicó que el sistema recuperó gradualmente su condición de equilibrio.

Interpretación de la aplicación

La aplicación permitió comprobar que el ejecutable desarrollado no solo resolvió ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de forma teórica, sino que también pudo emplearse para analizar un problema relacionado con una situación real de ingeniería.

El modelo masa–resorte–amortiguador representó de manera simplificada el comportamiento de la suspensión de un automóvil. La masa equivalente representó una parte de la carrocería, la constante k representó la rigidez del resorte y el coeficiente b representó el efecto del amortiguador viscoso.

Los resultados mostraron que, al pasar por un reductor de velocidad, la carrocería experimentó una vibración transitoria. Sin embargo, el amortiguamiento permitió que las oscilaciones disminuyeran progresivamente hasta que la respuesta se aproximó a cero.

En un sistema vehicular real, este comportamiento resulta importante porque permite disminuir las vibraciones transmitidas a los pasajeros, mejorar el confort durante el recorrido y contribuir a la estabilidad del vehículo. Por ello, la aplicación desarrollada evidenció que el ejecutable fue útil para modelar, resolver y visualizar problemas de vibraciones mecánicas asociados con situaciones reales.

IV. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La presente investigación tuvo como finalidad desarrollar un ejecutable de interfaz gráfica de usuario en MATLAB para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en vibraciones mecánicas, integrando la solución analítica, la solución numérica mediante Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y la comparación con ode45. A partir de los resultados obtenidos en las aplicaciones desarrolladas, se observó que el comportamiento del ejecutable dependió no solo del tipo de vibración estudiada, sino también del tamaño de paso utilizado en la aproximación numérica. En este sentido, los hallazgos permitieron discutir tres aspectos principales: la resolución analítica y numérica del problema, la comparación entre métodos, y el diseño e implementación de la interfaz gráfica como recurso ejecutable.

1. Resolver de forma analítica y numérica las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en vibraciones mecánicas

Respecto al primer objetivo específico, los resultados mostraron que fue posible resolver de manera analítica y numérica distintos casos representativos de vibraciones mecánicas: movimiento no amortiguado, sobreamortiguado, críticamente amortiguado, subamortiguado, vibración forzada, vibración forzada sin amortiguamiento y resonancia. Esto permitió confirmar que la formulación del sistema masa-resorte-amortiguador mediante ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden resultó adecuada para describir el comportamiento dinámico de cada caso analizado.

En la Aplicación 1, correspondiente al movimiento no amortiguado, la solución analítica describió correctamente un movimiento oscilatorio periódico, mientras que la solución numérica por RK4 mostró dos comportamientos distintos según el número de subintervalos. Cuando se utilizó un paso grande ($N = 4$), los resultados se alejaron de la solución exacta; en cambio, al usar una discretización más fina ($N = 50$), la aproximación mejoró notablemente. Esto indicó que la resolución numérica sí fue viable, pero dependió de una elección adecuada del tamaño de paso.

Estos resultados coincidieron con lo señalado por Espinoza (2020), quien explicó que la

ecuación diferencial del sistema masa-resorte permitió describir la respuesta dinámica y estudiar fenómenos como la resonancia. También guardaron relación con Pozo et al. (2022), quienes resolvieron ecuaciones de segundo orden en vibraciones mecánicas mediante Runge-Kutta y una interfaz en MATLAB, concluyendo que el modelo matemático y la herramienta computacional facilitaron el análisis del fenómeno vibratorio. En la presente investigación, esa misma relación entre teoría y simulación quedó evidenciada al observar que la solución analítica permitió interpretar el fenómeno físico, mientras que la solución numérica permitió reproducirlo computacionalmente dentro del ejecutable.

En la Aplicación 2, correspondiente al movimiento sobreamortiguado, la solución analítica mostró una disminución progresiva de la posición y la velocidad, lo que reflejó el comportamiento esperado de un sistema con fuerte amortiguamiento. Sin embargo, con $N = 4$, RK4 produjo resultados inestables y físicamente incorrectos, con valores que crecieron exageradamente. Cuando se utilizó $N = 50$, la aproximación mejoró de manera evidente y se acercó mucho a la solución analítica y a ode45. Este comportamiento permitió afirmar que la resolución numérica fue correcta en términos metodológicos, pero sensible a la discretización temporal.

Esto se relacionó con Rincón (2021) y Rincón (2025), quienes mostraron que MATLAB permitió estudiar vibraciones mecánicas y controlar la amplitud de los sistemas cuando el modelo y la simulación fueron correctamente planteados. De manera similar, en la presente investigación se observó que el problema no estuvo en la formulación del modelo, sino en el tamaño de paso elegido para el método numérico. Por ello, los resultados reforzaron la idea de que una resolución numérica confiable exigió controlar adecuadamente los parámetros de cálculo.

En la Aplicación 3, sobre movimiento críticamente amortiguado, los resultados mostraron que con $N = 4$ el método RK4 no reprodujo el comportamiento esperado y se apartó de la solución analítica y de ode45. En cambio, con $N = 50$, la aproximación

mejoró notablemente y mostró coherencia con la tendencia amortiguada del sistema. Esto permitió interpretar que la resolución analítica fue correcta y que la resolución numérica fue funcional cuando el paso fue suficientemente pequeño. En este caso, el ejecutable permitió visualizar claramente cuándo la aproximación fue adecuada y cuándo no lo fue, lo cual representó una ventaja práctica para el análisis.

En la Aplicación 4, sobre movimiento subamortiguado, la solución analítica reflejó una oscilación decreciente, característica de este tipo de sistema. Con $N = 4$, RK4 presentó diferencias notorias respecto de la solución exacta; sin embargo, con $N = 50$, los resultados de RK4 y ode45 fueron muy cercanos a la solución analítica. Este resultado respaldó nuevamente la idea de que el método numérico sí resolvió el problema, pero necesitó una discretización adecuada para representar correctamente el fenómeno.

Este hallazgo estuvo en concordancia con Cabrera (2021), quien sostuvo que el estudio de vibraciones mecánicas mejoró cuando se pudo visualizar el efecto de los parámetros del sistema sobre la respuesta dinámica. De igual modo, en esta tesis, al variar el número de subintervalos, fue posible observar cómo cambiaba la precisión del método y cómo ello afectaba la representación del movimiento vibratorio.

En las Aplicaciones 5, 6 y 7, correspondientes a vibraciones forzadas y resonancia, se observó un patrón similar. Cuando el tamaño de paso fue grande, RK4 presentó errores muy altos e incluso respuestas inestables. En cambio, al aumentar el número de subintervalos, la aproximación mejoró y se acercó de forma clara a ode45 y, en varios casos, también a la solución analítica. En el caso de la resonancia, esto fue especialmente importante porque el sistema era más sensible y requería mayor control numérico.

Estos resultados se relacionaron con los antecedentes internacionales de Urbikain et al. (2025), quienes demostraron que MATLAB podía emplearse como plataforma robusta para estudiar sistemas dinámicos vibratorios mediante herramientas ejecutables e interfaces gráficas. Aunque sus aplicaciones estuvieron orientadas a procesos de ma-

nufactura, el principio fue el mismo: cuando el modelo matemático y el tratamiento numérico se integraron correctamente, fue posible simular fenómenos dinámicos complejos de manera útil y accesible. La presente investigación confirmó esa misma posibilidad, pero aplicada específicamente a ecuaciones diferenciales de segundo orden en vibraciones mecánicas clásicas.

En síntesis, respecto al primer objetivo específico, la investigación demostró que la resolución analítica y numérica de ecuaciones diferenciales de segundo orden en vibraciones mecánicas sí fue alcanzada. Además, se evidenció que la solución numérica por RK4 funcionó correctamente cuando se trabajó con una discretización apropiada, mientras que la solución analítica permitió validar físicamente cada caso de estudio.

2. Comparar los resultados de forma analítica y numérica.

En relación con el segundo objetivo específico, los resultados permitieron comparar de manera clara la solución analítica, la solución numérica por RK4 y la solución obtenida con ode45. Esta comparación fue uno de los aportes más importantes de la investigación, porque no solo mostró cuándo el método RK4 fue preciso, sino también cuándo dejó de ser estable debido al tamaño de paso.

En la mayoría de aplicaciones se observó que ode45 coincidió casi exactamente con la solución analítica, lo que permitió tomarlo como una referencia numérica confiable. Este comportamiento fue visible en la Aplicación 1, la Aplicación 2, la Aplicación 4 y la Aplicación 7, especialmente cuando se analizaron los resultados con discretización más fina. Esto confirmó que ode45 reprodujo de forma consistente el comportamiento esperado del sistema, tanto en la posición como en la velocidad.

Por su parte, RK4 presentó dos escenarios claramente diferenciados. En el primero, cuando se utilizó un número pequeño de subintervalos, aparecieron errores considerables, cambios de signo no esperados, amplitudes exageradas o inestabilidad numérica. En el segundo, cuando se aumentó el número de subintervalos, la aproximación mejoró notablemente y llegó a ser muy cercana a la solución analítica y a ode45. Esto fue

muy evidente en la Aplicación 1 con $N = 50$, en la Aplicación 2 con $N = 50$, en la Aplicación 4 con $N = 50$ y en la Aplicación 7 con $N = 50$.

Estos hallazgos guardaron relación con Carrasco y Heredia (2020), quienes mostraron que la solución numérica por Runge-Kutta podía aproximarse a la solución analítica con un margen mínimo de error. También coincidieron con Alcántara y Díaz (2021), quienes concluyeron que MATLAB permitió obtener soluciones numéricas muy cercanas a las exactas cuando se aplicó correctamente el método. La presente investigación reafirmó esta idea, pero además mostró con mayor claridad una condición importante: la precisión del método no dependió solamente del algoritmo, sino también del valor de h , es decir, del paso temporal elegido.

Asimismo, los resultados también coincidieron con Chapañan y Llanos (2025), quienes compararon métodos analíticos y numéricos en sistemas de ecuaciones diferenciales y encontraron diferencias pequeñas cuando el procedimiento fue bien implementado. Del mismo modo, en esta investigación la comparación entre métodos permitió verificar la confiabilidad de la solución numérica y validar el algoritmo implementado dentro del ejecutable.

Otro punto importante de la comparación fue que permitió detectar casos donde la respuesta numérica necesitó ajustes. Por ejemplo, en la Aplicación 5 y en parte de la Aplicación 6 se observó que, aun cuando RK4 y ode45 llegaron a ser cercanos entre sí en algunos escenarios, todavía existieron diferencias relevantes frente a la solución analítica. Esto puso en evidencia que no bastó con que dos métodos numéricos se parecieran entre sí; también fue necesario contrastarlos con la solución exacta para confirmar que el comportamiento obtenido era realmente correcto. Esta observación fortaleció el valor de la comparación tripartita entre solución analítica, RK4 y ode45.

Por tanto, respecto al segundo objetivo específico, la investigación no solo comparó los resultados, sino que demostró que dicha comparación fue fundamental para evaluar la precisión, estabilidad y utilidad del método numérico implementado. De esta manera,

la comparación entre enfoques permitió validar la herramienta desarrollada y, al mismo tiempo, identificar sus límites cuando el paso fue inadecuado.

3. Diseñar y programar la interfaz gráfica de usuario en Matlab para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden mediante el método de Runge-Kutta de orden 4 y convertirla en un ejecutable

En cuanto al tercer objetivo específico, los resultados evidenciaron que se logró diseñar, programar e implementar una interfaz gráfica de usuario en MATLAB, capaz de recibir datos del sistema masa-resorte-amortiguador, ejecutar el método RK4, mostrar tablas comparativas y representar gráficamente la posición y la velocidad. Además, la herramienta fue presentada como un ejecutable, lo cual amplió su posibilidad de uso más allá del entorno de programación.

La interfaz mostrada permitió ingresar coeficientes como masa, amortiguamiento, rigidez, fuerza externa, condiciones iniciales e intervalo de integración. También permitió visualizar tablas de resultados y gráficos, lo que facilitó la interpretación del comportamiento dinámico del sistema. Esta integración entre cálculo, visualización y automatización confirmó que la propuesta no quedó solo en el plano teórico, sino que se concretó en una herramienta funcional.

Este resultado coincidió directamente con Pozo et al. (2022), quienes concluyeron que una GUI en MATLAB fue útil, práctica y pertinente para el modelado de vibraciones mecánicas. También fue coherente con Pena et al. (2022), quienes encontraron que una interfaz gráfica favoreció la comprensión de sistemas dinámicos y vibraciones en estudiantes. En el mismo sentido, la presente investigación mostró que la GUI no solo sirvió para calcular, sino también para comprender el comportamiento del sistema a través de la visualización de curvas, tablas y comparación entre métodos.

Asimismo, la tesis se relacionó con el antecedente local de Chapoñan (2024), quien desarrolló un ejecutable de interfaz gráfica en MATLAB para sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas. De forma semejante, la presente investigación confirmó

que MATLAB fue una plataforma adecuada para integrar el algoritmo numérico con una interfaz amigable y convertirla en un ejecutable funcional. La diferencia estuvo en que esta investigación se centró en ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden aplicadas específicamente a vibraciones mecánicas, incluyendo casos clásicos y forzados.

También existió relación con Baca (2019), quien señaló que una interfaz gráfica podía emplearse para estudiar anomalías y sistemas vibratorios reales. Aunque el enfoque de aquella investigación estuvo más orientado al análisis de señales vibratorias, ambas coincidieron en que la interfaz gráfica permitió trasladar el análisis matemático a un entorno visual y accesible. En esta tesis, ese aporte se amplió al incorporar no solo simulación, sino también comparación con solución analítica y con ode45.

Por tanto, respecto al tercer objetivo específico, los resultados demostraron que el diseño y programación de la interfaz gráfica sí se cumplieron, y que la conversión a ejecutable constituyó un avance importante, porque hizo posible que la herramienta pudiera utilizarse de forma más directa en contextos educativos y de apoyo al análisis ingenieril.

Aporte de la investigación

El principal aporte de la investigación estuvo en haber integrado, dentro de una sola herramienta, la solución numérica por RK4, la comparación con ode45 que se aproxima a los valores de la solución analítica con mínimo margen de error y la visualización gráfica del comportamiento vibratorio. Este aporte resultó importante porque permitió pasar de una resolución manual o aislada a una resolución automatizada, ordenada y visualmente comprensible.

A diferencia de varios antecedentes, la presente investigación no se limitó únicamente a resolver ecuaciones o a diseñar una interfaz, sino que reunió cuatro elementos en una misma propuesta: primero, el planteamiento matemático de ecuaciones diferenciales de se-

gundo orden; segundo, la transformación a sistemas de primer orden para aplicar RK4; tercero, la validación mediante comparación con la solución analítica y ode45; y cuarto, la implementación en un ejecutable de MATLAB.

Otro aporte relevante fue que la investigación evidenció, a partir de casos concretos, cómo influye el tamaño de paso en la precisión y estabilidad del método RK4. Este aspecto no solo tuvo valor numérico, sino también didáctico, porque permitió mostrar al usuario que una herramienta computacional no debe usarse de manera automática, sino con criterio matemático. En ese sentido, el ejecutable no solo resolvió problemas, sino que ayudó a interpretar el comportamiento del método.

Además, la investigación aportó un recurso útil para el estudio de distintos tipos de vibración mecánica: no amortiguada, sobreamortiguada, críticamente amortiguada, subamortiguada, forzada y resonante. Esto amplió el alcance del ejecutable y lo volvió más completo frente a propuestas que solo trataron uno o dos tipos de movimiento.

Mejora que ofreció la aplicación desarrollada

La mejora principal que ofreció la aplicación fue la automatización del proceso de resolución y comparación. Antes, para resolver cada caso, era necesario desarrollar manualmente la ecuación, aplicar el método analítico, programar el método numérico por separado y luego comparar resultados. Con la herramienta desarrollada, todo ese proceso se realizó en un mismo entorno.

También se observó una mejora en la visualización e interpretación de los resultados, ya que el usuario pudo ingresar datos y obtener inmediatamente tablas y gráficos. Esto simplificó el análisis del sistema vibratorio y permitió identificar si la respuesta era oscilatoria, amortiguada, estable o inestable.

Otra mejora importante fue la portabilidad. Al convertirse en ejecutable, la aplicación pudo utilizarse sin depender de la edición del código fuente. Esto representó una ventaja frente a trabajos que solo presentaron simulaciones o scripts, porque facilitará el uso directo

de la herramienta por parte de estudiantes o investigadores.

Finalmente, la aplicación mejoró el tratamiento didáctico del problema, ya que no se limitó a mostrar una respuesta numérica, sino que permitió comparar métodos y comprender por qué en algunos casos RK4 fue preciso y en otros no. Así, la herramienta no solo resolvió ecuaciones, sino que también ayudó a aprender el comportamiento de los métodos numéricos en vibraciones mecánicas.

La presente investigación aportó una herramienta más específica, orientada a ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en vibraciones mecánicas, con capacidad de comparación entre métodos y presentación ejecutable. Los resultados mostraron que el ejecutable funcionó de manera adecuada, especialmente cuando se eligió un número suficiente de subintervalos, y que constituyó una mejora práctica y académica para el estudio de este tipo de problemas.

V. CONCLUSIONES

1. La presente investigación logró resolver de manera analítica y numérica las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden aplicadas a vibraciones mecánicas en los casos estudiados. La solución analítica permitió describir con claridad el comportamiento físico de cada sistema, mientras que la solución numérica mediante Runge-Kutta de orden 4 permitió aproximar los valores de posición y velocidad en distintos intervalos de tiempo.
2. Se concluyó que la comparación entre la solución analítica, la aproximación numérica por Runge-Kutta de orden 4 y los resultados obtenidos con ode45 permitió verificar la precisión y estabilidad de los métodos empleados. En los casos donde se utilizó un paso grande, el método RK4 presentó diferencias importantes e incluso respuestas inestables; sin embargo, al aumentar el número de subintervalos, los valores obtenidos por RK4 se acercaron mucho a la solución analítica y a ode45. Esto permitió establecer que la precisión del método no dependió solo del algoritmo, sino también de la adecuada elección del tamaño de paso, aspecto que resultó fundamental para obtener resultados confiables en vibraciones mecánicas.
3. Se concluyó que el diseño, programación e implementación del ejecutable de interfaz gráfica de usuario en MATLAB cumplieron con el propósito de facilitar la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en vibraciones mecánicas. La aplicación permitió ingresar parámetros físicos, ejecutar el método RK4, visualizar tablas y gráficas, y comparar resultados de manera rápida y ordenada. Asimismo, el ejecutable permitió transformar una ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones de primer orden, lo que facilitó su tratamiento numérico dentro de la interfaz. De igual manera, la herramienta permitió cambiar los datos de entrada de forma sencilla, haciendo posible analizar diferentes casos de vibraciones mecánicas sin modificar la estructura principal del programa.

RECOMENDACIONES

Se recomienda utilizar en la interfaz gráfica un número adecuado de subintervalos o un tamaño de paso pequeño al aplicar el método de Runge-Kutta de orden 4, especialmente en problemas de vibraciones mecánicas con oscilaciones rápidas, amortiguamiento o fuerza externa, ya que los resultados mostraron que la precisión y estabilidad del método mejoraron notablemente cuando la discretización fue más fina. Además, se sugiere seguir ampliando la aplicación para incorporar más tipos de ecuaciones y opciones de análisis, de modo que pueda emplearse como una herramienta más completa, flexible y útil en el estudio y resolución de problemas de vibraciones mecánicas.

Referencias Bibliográficas

- Aflook, S., & Al-Rammahi, A. (2021). Exponential Acceleration To Improve Simpson's 3/8 rule. *Al Qadisiyah Journal of Pure Science*, 26(1), 104-111. <https://doi.org/10.29350/qjps.2021.26.1.1240>
- Ahmed, T., Islam, T., Abdullah, A., & Md, B. (2021). The Periodicity of the Accuracy of Numerical Integration Methods for the Solution of Different Engineering Problems. *Research-Gate*, 2(4), 203-216. <https://doi.org/10.38032/jea.2021.04.006>
- Burden, R. & Douglas, J. (2002). *Análisis Numérico*. 9^a ed. Cengage.
- Debasish, D., & Sanjit, M. (2024). Anti-Simpson's quadrature formula and its extension for evaluation of elliptic and other integrals in adaptive environment. *South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 20(02), 463-476. <https://doi.org/10.56827/SEAJMMS.2024.2002.33>
- Eidous, O., & Ananbeh, E. (2024). Kernel method for estimating overlapping coefficient using numerical integration methods. *Applied Mathematics and Computation*, 462, 128339. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.128339>
- Guo, W. (2023). Solving problems involving numerical integration (I): Incorporating different techniques. *STEM Education*, 3(2), Article steme-03-02-009. <https://doi.org/10.3934/steme.2023009>
- Jazar, R. (2017). *Vehicle dynamics: Theory and application* (3rd ed.). Springer.
- Kharab, A. & Guenther, R. (2012). *An introduction to numerical methods a Matlab approach*. CRC Pres, New York, USA.
- Madrid, P. (2023). Acerca del Orden de Convergencia de las Reglas de Integración del Trapecio y Simpson para Cierta Clase de Funciones No Diferenciables. *Revista de la Escuela de Física*, 11(1), Article 1. <https://doi.org/10.5377/ref.v11i1.16823>
- Mallma, R., Montoya, O., Huanca, A., & Figueroa, H. (2022). A Measurement Application to Surfaces using Non Linear Interpolation and Numerical Integration Methods. *International Journal of Engineering Trends and Technology*, 70(6), 237-251. <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I6P225>

- MathWorks, (2024). *GUI de MATLAB*. Recuperado de <https://n9.cl/2m35g>
- Md., N., Mohammad, F., & Sadiya, U. (2019). Comparison on Trapezoidal and Simpson's Rule for Unequal Data Space. ResearchGate, 4(1). <https://doi.org/10.5815/ijmsc.2019.04.03>
- Navarro, I. (2020). *Análisis de Métodos de Integración Numérica para Problemas Dinámicos. Implementación y Validación Mediante una Aplicación de Matlab* [Tesis de maestría, Universidad Politécnica de Valencia]. Repositorio Institucional de la Universidad Politécnica de Valencia. <https://n9.cl/yy01q>
- Solano, C. (2023). Nonlinear numerical techniques for the processing of data with discontinuities [Universidad Politécnica de Cartagena]. <https://doi.org/10.31428/10317/13128>
- Tineo, H., & Torres, P. (2022). Métodos de Integración Numérica Asistido por la Interfaz Gráfica de Matlab [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. <http://repositorio.unprg.edu.pe/handle/20.500.12893/12284>

Anexos

Algoritmo del método RK4

```
% --- Executes on button press in calcular.
function calcular_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to calcular (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
%future version of MATLAB
% handles       structure with handles and user data
%(see GUIDATA)
% ===== 0) Asegurar handles actualizados =====
if ishghandle(hObject), handles = guidata(hObject); end

% ===== 1) Validación de controles y entradas =====
campos = { 'm'           , handles.edit1; ...
           'b'           , handles.edit2; ...
           'k'           , handles.edit3; ...
           'Fe(t)'       , handles.edit4; ...
           'y0=[i0,i1]' , handles.edit5; ...
           't0'          , handles.edit6; ...
           'tf'          , handles.edit7; ...
           'N'           , handles.edit8 };

for ii = 1:size(campos,1)
    if ~ishghandle(campos{ii,2})
        errordlg(sprintf('No existe el control para %s.',
            campos{ii,1}), 'Error de GUI');
```

```

        return;
    end
    val = strtrim(get(campos{ii,2},'String'));
    if isempty(val)
        errordlg(sprintf('Te falta ingresar el valor
        de %s.', campos{ii,1}), 'Dato faltante');
        return;
    end
end

% ===== 2) Lectura (acepta fracciones/expresiones)
%=====
m    = parse_num(get(handles.edit1,'String')); % m>0
b    = parse_num(get(handles.edit2,'String'));
k    = parse_num(get(handles.edit3,'String')); % k>0
FeS = strtrim(get(handles.edit4,'String'));
% expresion en t
y0S = strtrim(get(handles.edit5,'String'));
    % "i0, i1"
t0   = parse_num(get(handles.edit6,'String'));
tf   = parse_num(get(handles.edit7,'String'));
N    = round(parse_num(get(handles.edit8,'String')));

if any(isnan([m,b,k,t0,tf,N])) || m<=0 || k<=0
|| N<1 || tf<=t0
    errordlg('Verifica: m>0, k>0, N>=1, tf>t0
    y campos numéricos válidos.','Entradas inválidas');
    return;

```

```

end

y0v = str2num(y0S); %#ok<ST2NM>
if numel(y0v)~=2 || any(isnan(y0v))
    errordlg('y0 debe ser "i0, i1" (ej: 0.1,
        -0.2).', 'Formato de y0');
    return;
end

i0 = y0v(1);    % x(t0)
i1 = y0v(2);    % v(t0)

if isempty(FeS), FeS = '0'; end

% Probar que FeS es válida
try
    Fe_eval_vec(linspace(t0,tf,5), FeS);
catch ME
    errordlg(sprintf('Fe(t) no es válida:\n%s',
        ME.message), 'Error en Fe(t)');
    return;
end

% ===== 3) Sistema (x1=x, x2=v) =====
f = @(t,y) [ y(2);
            -(b/m)*y(2) - (k/m)*y(1) +
            (1/m)*Fe_eval_vec(t, FeS) ];

% ===== 4) RK4 con K1..K4 =====

```

```

[t, Y, K1, K2, K3, K4] = rk4_sys_inline(f, t0,
tf, N, [i0; i1]);
x = Y(:,1);
v = Y(:,2);

% Alinear K por filas (primera fila sin etapa)
K1x = [NaN; K1(:,1)]; K1v = [NaN; K1(:,2)];
K2x = [NaN; K2(:,1)]; K2v = [NaN; K2(:,2)];
K3x = [NaN; K3(:,1)]; K3v = [NaN; K3(:,2)];
K4x = [NaN; K4(:,1)]; K4v = [NaN; K4(:,2)];

% ===== 5) Referencia con ode45 (IVP)
%para comparar =====
odefun = @(tt,yy) [ yy(2);
                    -(b/m)*yy(2) - (k/m)*yy(1)
                    + (1/m)*Fe_eval_vec(tt, FeS) ];

opts = odeset('RelTol',1e-10,'AbsTol',1e-12);
[tt,YY] = ode45(odefun, [t0 tf], [i0; i1], opts);

xb = interp1(tt, YY(:,1), t, 'pchip');
% x(t) referencia
vb = interp1(tt, YY(:,2), t, 'pchip');
% v(t) referencia
ref_ok = true;

% ===== 6) Errores absolutos (posición y velocidad)
% =====

```

```

err_abs_x = abs(x - xb);
err_abs_v = abs(v - vb);

% ===== 7) TABLA (10 decimales; NaN -> vacío)
% =====
idx = (0:N).';
Tnum = [idx, t(:), x(:), v(:), xb(:), vb(:),
err_abs_x(:), err_abs_v(:), ...
        K1x(:), K1v(:), K2x(:), K2v(:), K3x(:),
        K3v(:), K4x(:), K4v(:)];

cols = { 'idx', 'tiempo', 'posicion x(t)_RK4',
'velocidad v(t)_RK4', ...
        'ode45 x(t)', 'ode45 x''(t)', ...
        'err_abs_x', 'err_abs_v', ...
        'K1x', 'K1v', 'K2x', 'K2v', 'K3x', 'K3v', 'K4x',
        'K4v' };

Tdisp = cell(size(Tnum));
Tdisp(:,1) = arrayfun(@(z) sprintf('%d', z),
    Tnum(:,1), 'UniformOutput', false);
for jj = 2:size(Tnum,2)
    Tdisp(:,jj) = fmt10clean(Tnum(:,jj));
end

set(handles.uitable1, 'Data', Tdisp, 'ColumnName', cols);

% ===== 8) Gráfica: RK4 vs referencia =====

```

```

if ishghandle(handles.axes1)
    axes(handles.axes1); cla; hold on; grid on; box on;
    plot(t, x, 'LineWidth',1.35, 'DisplayName',
        'x(t) RK4');
    plot(t, v, 'LineWidth',1.35, 'DisplayName',
        'v(t) RK4');

    if ref_ok
        plot(t, xb, '--', 'LineWidth',1.35,
            'DisplayName','x(t) ode45');
        plot(t, vb, '--', 'LineWidth',1.35,
            'DisplayName','v(t) ode45');
        title('RK4 vs x(t) y v(t) (referencia ode45)');
    else
        title('Solución numérica');
    end

    xlabel('t'); ylabel('x,v'); legend('show');
    zoom on
    hold off;
end

% ===== 9) Guardar estado =====

guidata(hObject, handles);

%% ===== Funciones internas =====

```

```

function val = parse_num(str)

    % Acepta números, fracciones y expresiones:
    % +-*./.^() y 'pi'

    s = strtrim(str);
    val = str2double(s);
    if ~isnan(val), return; end

    s = regexp(s, '(?i)\bpi\b', num2str(pi, '%.17g'));
    try
        val = eval(s); %#ok<EVLDIR>
        if ~isscalar(val) || ~isfinite(val),
            val = NaN; end
    catch
        val = NaN;
    end
end

```

```

function Fe = Fe_eval_vec(t, FeStr)

% Evaluador de Fe(t) desde cadena: + - * / ^, (),
% números, 'pi', funciones:
% sin, cos, tan, asin, acos, atan, sinh, cosh,
% tanh, exp, log, sqrt, abs.

    if isempty(FeStr), FeStr = '0'; end
    s = vectorize(strtrim(FeStr));
    s = regexp(s, '(?i)\bpi\b', num2str(pi, '%.17g'));
    t = t(:); %#ok<NASGU>
    Fe = eval(s); %#ok<EVLDIR>
    if isscalar(Fe), Fe = Fe*ones(numel(t),1); end
    Fe = Fe(:);

```

```

function [t_,Y_,K1_,K2_,K3_,K4_] =
rk4_sys_inline(fun, t0_, tf_, N_, y0_)
    h = (tf_ - t0_)/N_;
    t_ = (t0_:h:tf_).';
    y0_ = y0_(:);
    ny = numel(y0_);
    Y_ = zeros(N_+1,ny);
    Y_(1,:) = y0_.';
    K1_ = zeros(N_,ny);
    K2_ = zeros(N_,ny);
    K3_ = zeros(N_,ny);
    K4_ = zeros(N_,ny);
    for kk = 1:N_
        tk = t_(kk); yk = Y_(kk,:).';
        k1 = fun(tk, yk);
        k2 = fun(tk + h/2, yk + (h/2)*k1);
        k3 = fun(tk + h/2, yk + (h/2)*k2);
        k4 = fun(tk + h, yk + h*k3);
        Y_(kk+1,:) = (yk + (h/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3
+ k4)).';
        K1_(kk,:) = k1.'; K2_(kk,:) = k2.';
        K3_(kk,:) = k3.'; K4_(kk,:) = k4.';
    end

function C = fmt10clean(vec)

```

```

    % Devuelve celda de strings con 10 decimales;
    % NaN/Inf -> ''
    C = cell(numel(vec),1);
    for ii = 1:numel(vec)
        z = vec(ii);
        if isnan(z) || isinf(z)
            C{ii} = '';
        else
            C{ii} = sprintf('%.10f', z);
        end
    end

% --- Executes on button press in borrar.
function borrar_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to borrar (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in
% a future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
% data (see GUIDATA)
% --- Executes on button press in borrar.

% Limpiar cajas de texto
if isfield(handles,'edit1') &&
ishghandle(handles.edit1),
set(handles.edit1,'String',''); end
if isfield(handles,'edit2') &&

```

```

ishghandle(handles.edit2),
set(handles.edit2,'String',''); end
if isfield(handles,'edit3') &&
ishghandle(handles.edit3),
set(handles.edit3,'String',''); end
if isfield(handles,'edit4') &&
ishghandle(handles.edit4),
set(handles.edit4,'String',''); end
if isfield(handles,'edit5') &&
    ishghandle(handles.edit5),
    set(handles.edit5,'String','');
end
if isfield(handles,'edit6') &&
    ishghandle(handles.edit6),
    set(handles.edit6,'String',''); end
if isfield(handles,'edit7') &&
    ishghandle(handles.edit7),
    set(handles.edit7,'String',''); end
if isfield(handles,'edit8') &&
ishghandle(handles.edit8),
set(handles.edit8,'String',''); end

% Limpiar tabla
if isfield(handles,'uitable1') &&
    ishghandle(handles.uitable1)
    set(handles.uitable1,
        'Data',{},{}, 'ColumnName',{ });
end

```

```

% Limpiar ejes
if isfield(handles,'axes1') &&
    ishghandle(handles.axes1)
        axes(handles.axes1);
        cla reset;
        grid on;
        box on;
end

% Actualizar handles
guidata(hObject, handles);

% --- Executes on button press in salir.
function salir_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to salir (see GCBO)
% eventdata    reserved -
to be defined in a future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
%data (see GUIDATA)

opc=questdlg('¿Desea salir del
    programa?', 'SALIR', 'Si', 'No', 'No');
if strcmp(opc, 'No')
    return;

else

```

```

        msgbox({'Gracias por usar nuestra Aplicación',...
                '
                Desarrollado por:',...
                'Sanchez Baldera Jose Gustavo',
                'Nuñez Quispe Jose Adrian',
                'Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl'},
                'Acerca de');

end

clear,clc,close(gcf)

% --- Executes on button press in ejemplo.
function ejemplo_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to ejemplo (see GCBO)
% eventdata  reserved -
% to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and
% user data (see GUIDATA)
% Mostrar selector de casos y devolver
% el índice seleccionado
% Selector de casos. Rellena edit1..edit8.

casos = { ...
    'Caso 1: Movimiento no amortiguado', ...
    'Caso 2: Movimiento sobreamortiguado', ...
    'Caso 3: Críticamente amortiguado', ...
    'Caso 4: Subamortiguado', ...
    'Caso 5: Vibración Forzada ( $b \neq 0$ )', ...
    'Caso 6: Vibración Forzada ( $b = 0$ ,  $\omega_e \neq \omega$ )', ...

```

```

    'Caso 7: Vibración Forzada
    (b = 0, we = w) (Resonancia)' };

[idx, ok] = listdlg('PromptString',
'Selecciona un caso:', ...
    'SelectionMode','single', ...
    'ListString',casos);
if ~ok || isempty(idx), return; end

switch idx
    case 1 % Sobreamortiguado
        m=1; b=0; k=100; Fe='0';
        x0=-0.06; v0=0.8; t0=0; tf=1; N=4;

    case 2 % No amortiguado
        m=2; b=5; k=2; Fe='0';
        x0=1; v0=0; t0=0; tf=8; N=4;

    case 3 % Críticamente amortiguado
        m=2; b=4; k=2; Fe='0'; x0=1;
        v0=0; t0=0; tf=8; N=4;

    case 4 % Subamortiguado
        m=10; b=2; k=5; Fe='0'; x0=1;
        v0=0; t0=0; tf=12; N=4;

    case 5 % Forzado (b ≠ 0)
        m=1; b=2; k=1; Fe='17*cos(t)';
        x0=0; v0=0; t0=0; tf=16; N=4;

    case 6 % Forzado (b = 0, we ≠ w)

```

```

        m=1; b=0; k=1; Fe='2*cos(2*t)';
        x0=0; v0=0; t0=0; tf=10; N=4;
    case 7 % Forzado (b = 0, we = w)
        %Resonancia (VERIFICADO)
        m=10; b=0; k=40; Fe='20*cos(2*t)';
        x0=0; v0=0; t0=0; tf=12; N=4;
        % wn = sqrt(40/10) = 2;
        Fe = cos(2*t) -> we = 2 => resonancia
    end

    % Volcar a la GUI
    set(handles.edit1,'String',num2str(m));
    set(handles.edit2,'String',num2str(b));
    set(handles.edit3,'String',num2str(k));
    set(handles.edit4,'String',Fe);
    set(handles.edit5,'String',
    sprintf('%g, %g',x0,v0));
    set(handles.edit6,'String',num2str(t0));
    set(handles.edit7,'String',num2str(tf));
    set(handles.edit8,'String',num2str(N));

```

Caso 1

```

% Funciones
x = @(t) -0.06*cos(10*t) + 0.08*sin(10*t);
xd = @(t) 0.6*sin(10*t) + 0.8*cos(10*t);

% Valores de t

```

```

t = (0:1/50:1)';

% Evaluación y tabla
T = table(t, x(t), xd(t), 'VariableNames',
    {'t','x','xdot'});
disp(T)

```

Caso 2

```

% Definir funciones
x = @(t) (4/3)*exp(-t/2) - (1/3)*exp(-2*t);
xd = @(t) -(2/3)*exp(-t/2) + (2/3)*exp(-2*t);

% Ejemplo de evaluación
t = 0:8/50:8;           % cambia el intervalo si deseas
X = x(t);
Xd = xd(t);

% Mostrar tabla
T = table(t(:), X(:), Xd(:), 'VariableNames',
    {'t','x','xdot'});
disp(T)

```

Caso 3

```

t = (0:8/100:8)';
x = (4/3)*exp(-t/2) - (1/3)*exp(-2*t);
xdot = -(2/3)*exp(-t/2) + (2/3)*exp(-2*t);

```

```
tabla = table(t, x, xdot)
```

Caso 4

```
t = 0:12/50:12;
```

```
x = exp(-0.1*t).*(cos(0.7*t) + (1/7)*sin(0.7*t));
```

```
dx = exp(-0.1*t).*(-(5/7)*sin(0.7*t));
```

```
tabla = table(t', x', dx', 'VariableNames',
```

```
    {'t', 'x_t', 'dx_t'});
```

```
disp(tabla)
```

Caso 5

```
t = 0:12/50:12;
```

```
x = 8.5*(sin(t) - t.*exp(-t));
```

```
dx = 8.5*(cos(t) - (1 - t).*exp(-t));
```

```
tabla = table(t', x', dx', 'VariableNames',
```

```
    {'t', 'x_t', 'dx_t'});
```

```
disp(tabla)
```

Caso 6

```
t = (0:10/50:10)';
```

```
x = (23/30)*cos(t) - (2/3)*cos(2*t);
```

```
xdot = -(23/30)*sin(t) + (4/3)*sin(2*t);
```

```

T = table(t, round(x,6), round(xdot,6), 'VariableNames',
    {'t', 'x_t', 'xdot_t'});

disp(T)

```

Caso 7

```

t = (0:12/50:12)';

x = 0.5*t.*sin(2*t);
xdot = 0.5*sin(2*t) + t.*cos(2*t);

T = table(t,x,xdot,'VariableNames',{'t','x_t','xdot_t'});
disp(T)

```

Ejecutable de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab para Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden en Vibraciones Mecánicas

INFORME DE ORIGINALIDAD

15%	12%	4%	9%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	repositorio.unprg.edu.pe		3%
	Fuente de Internet		
2	Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo		2%
	Trabajo del estudiante		
3	hdl.handle.net	 Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl DNI: 32802095	1%
	Fuente de Internet		
4	revistas.uclave.org	Departamento de: Matemática Asesor	1%
	Fuente de Internet		
5	Submitted to Instituto Superior de Artes, Ciencias y Comunicación IACC		1%
	Trabajo del estudiante		
6	web.cs.elte.hu		1%
	Fuente de Internet		
7	Submitted to Universidad Anahuac México Sur		1%
	Trabajo del estudiante		

8	qdoc.tips Fuente de Internet		1 %
9	archive.org Fuente de Internet		<1 %
10	namu.wiki Fuente de Internet		<1 %
11	alicia.concytec.gob.pe Fuente de Internet	 Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl DNI: 32802095 Departamento de: Matemática Asesor	<1 %
12	vsip.info Fuente de Internet		<1 %
13	Submitted to CORPORACIÓN UNIVERSITARIA IBEROAMERICANA Trabajo del estudiante		<1 %
14	Jin Zhang, Haobo He, Wei Li, Lidan Kuang, Fei Yu, Jiajia Zhao. "An Improved Biomimetic Olfactory Model and Its Application in Traffic Sign Recognition", Applied Sciences, 2023 Publicación		<1 %
15	Lothar Papula. "Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben", Springer Science and Business Media LLC, 2004 Publicación		<1 %
16	edoc.pub Fuente de Internet		<1 %

17	www.slideshare.net Fuente de Internet	 Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl DNI: 32802095 Departamento de: Matemática Asesor	<1 %
18	www.coursehero.com Fuente de Internet		<1 %
19	documents.mx Fuente de Internet		<1 %
20	phi.pf-control.de Fuente de Internet		<1 %
21	Valdez, Nichole R.. "Shortcomings of Teaching Chemical Group Theory with a Limited Use of Linear Algebra.", University of Idaho, 2017 Publicación		<1 %
22	dokumen.pub Fuente de Internet		<1 %
23	Submitted to UTEC Universidad de Ingeniería & Tecnología (NO TOCAR) Trabajo del estudiante		<1 %
24	repositorio.ujcm.edu.pe Fuente de Internet		<1 %
25	Submitted to University of Sheffield Trabajo del estudiante		<1 %
26	es.slideshare.net Fuente de Internet		<1 %
27	cheetah.vlsi.uwaterloo.ca Fuente de Internet		<1 %

28	e-archivo.uc3m.es	Fuente de Internet	<1 %
29	neoattack.com	Fuente de Internet	<1 %
30	www.materialy.dydaktyka.agh.edu.pl	Fuente de Internet	<1 %
31	Submitted to American University of the Middle East	Trabajo del estudiante	<1 %
32	Submitted to Universidad del Valle de Guatemala	Trabajo del estudiante	<1 %
33	Submitted to Unizin, LLC	Trabajo del estudiante	 Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl DNI: 32802095 Departamento de: Matemática Asesor
34	Submitted to Universidad de Almeria	Trabajo del estudiante	<1 %
35	repositorio.unsch.edu.pe	Fuente de Internet	<1 %
36	ijritcc.org	Fuente de Internet	<1 %
37	pt.scribd.com	Fuente de Internet	<1 %
38	12000.org	Fuente de Internet	<1 %

39	doku.pub Fuente de Internet	<1 %
40	repositorio.unprg.edu.pe:8080 Fuente de Internet	<1 %
41	Canahuire Condori, Adolfo. "Diseño de aplicación multimedia en Visual Basic – Excel para hallar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales", Universidad Nacional del Altiplano de Puno (Peru) Publicación	<1 %
42	dspace.unach.edu.ec Fuente de Internet	<1 %
43	www.grafiati.com Fuente de Internet	<1 %
44	Submitted to Aliat Universidades Trabajo del estudiante	<1 %
45	John Bird, John Bird. "Higher Engineering Mathematics", Routledge, 2019 Publicación	<1 %
46	Perdomo Diaz, Josefa. "Construccion Del Concepto De ecuacion Diferencial Ordinaria En Escenarios De resolucion De Problemas", Universidad de La Laguna (Canary Islands, Spain), 2021 Publicación	<1 %

Excluir citas

Activo

Excluir coincidencias < 15 words

Excluir bibliografía

Activo



Dr. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl

DNI: 32802095

Departamento de: Matemática

Asesor