

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

ESCUELA DE POSGRADO

Maestría en Gerencia de Obras y Construcción



Tesis

**Estudio del Campo Eléctrico y Distribución de Potencial en Aisladores
Tipo Vara de 60 kV Contaminados Ambientalmente**

**para obtener el grado académico de:
Maestro en Gerencia de Obras y Construcción**

Autor:

Ronald José Marrufo Ventura
<https://orcid.org/0009-0008-9265-3901>

Asesor:

Dr. Fredy Dávila Hurtado
<https://orcid.org/0000-0001-8604-8811>

Lambayeque, 04 de agosto del 2026

**Estudio del Campo Eléctrico y Distribución de Potencial en Aisladores
Tipo Vara de 60 kV Contaminados Ambientalmente**



Ronald José Marrufo Ventura
Autor

Dr. Ing. Fredy Dávila Hurtado
Asesor

Tesis presentada a la escuela de posgrado de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo para
optar el grado académico de:
Maestro en Gerencia de Obras y Construcción

Aprobado por:



Dr. Ing. Hamilton Vladimir Cueva Campos
Presidente del Jurado

M.Sc. Ing. Domingo Jorge L. Dávila Vidarte
Secretario del Jurado

M.Sc. Ing. Roberto Carlos Cachay Silva
Vocal del Jurado

Lambayeque, 04 de agosto del 2026



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL DE SISTEMAS Y DE ARQUITECTURA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN



**ACTA DE SUSTENTACIÓN
N° 006-2026-UI-FICSA**

Siendo las 11:00 am horas del día 4 agosto del 2026 en la sala de sustentaciones de la Facultad de Ingeniería Civil de Sistemas y de Arquitectura se reunieron los miembros de jurado de la Tesis de MAESTRÍA EN GERENCIA DE OBRAS Y CONSTRUCCIÓN; Titulada: “ESTUDIO DEL CAMPO ELECTRICO Y DISTRIBUCION DE POTENCIAL EN AISLADORES TIPO VARA DE 60 KV CONTAMINADOS AMBIENTALMENTE”, designados mediante Resolución Decanal N°075-2025-UNPRG-FICSA de fecha 19 de noviembre del 2025 con la finalidad de Evaluar y Calificar la sustentación de la Tesis de Maestría en Gerencia de Obras y Construcción antes mencionado, conformado por los siguientes docentes:

DR. ING. HAMILTON VLADIMIR CUEVA CAMPOS	PRESIDENTE
MSC. ING. DOMINGO JORGE LUIS DAVILA VIDARTE	SECRETARIO
MSC. ING. ROBERTO CARLOS CACHAY SILVA	VOCAL

Asesorado por DR. ING. FREDY DAVILA HURTADO.

El acto de sustentación fue autorizado por Oficio Virtual N° 175-2026-UIFICSA La Tesis de *Maestría en Gerencia de Obras y Construcción* fue presentada y sustentada por el Tesista **RONALD JOSE MARRUFO VENTURA**, tuvo una duración de 60.00 minutos. Después de la sustentación, y absueltas las preguntas y observaciones de los miembros del jurado; se procedió a la calificación respectiva:

	NUMERO	LETRAS	CALIFICATIVO
RONALD JOSE MARRUFO VENTURA	<u>16.00</u>	<u>Dieciséis</u>	<u>Bueno</u>

Por lo que queda APTO para obtener el Grado Académico de: MAESTRO EN GERENCIA DE OBRAS Y CONSTRUCCIÓN; de acuerdo con la Ley Universitaria 30220 y la normatividad vigente de la Facultad de Ingeniería Civil De Sistemas y de Arquitectura de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Siendo las 12.20pm horas del mismo día, se dio por concluido el presente acto académico, dándose conformidad al presente acto, con la firma de los miembros del jurado.

DR. ING. HAMILTON VLADIMIR CUEVA CAMPOS
PRESIDENTE

MSC. ING. DOMINGO JORGE LUIS DAVILA VIDARTE
SECRETARIO

MSC. ING. ROBERTO CARLOS CACHAY SILVA
VOCAL

DR. ING. FREDY DAVILA HURTADO
ASESOR



CONSTANCIA DE VERIFICACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, Dr. Fredy Dávila Hurtado, usuario revisor de la tesis titulada:

Tesis de Maestría: “ESTUDIO DEL CAMPO ELÉCTRICO Y DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN AISLADORES TIPO VARA DE 60 KV CONTAMINADOS AMBIENTALMENTE”

Cuyo autor es, Ronald José Marrufo Ventura, identificado con documento de identidad N°17635370; declaro que la evaluación realizada por el Programa informático, ha arrojado un porcentaje de similitud de 10 %, verificable en el Resumen de Reporte automatizado de similitudes que se acompaña.

El suscrito analizó dicho reporte y concluyó que cada una de las coincidencias detectadas dentro del porcentaje de similitud permitido no constituyen plagio y que el documento cumple con la integridad científica y con las normas para el uso de citas y referencias establecidas en los protocolos respectivos.

Se cumple con adjuntar el Recibo Digital a efectos de la trazabilidad respectiva del proceso.

Lambayeque, 04 de julio del 2026



Dr. Fredy Dávila Hurtado
Departamento Académico de Ingeniería Mecánica
DNI No: 16670066
Asesor

ESTUDIO DEL CAMPO ELÉCTRICO Y DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN AISLADORES TIPO VARA DI CONTAMINADOS AMBIENTALMENTE

INFORME DE ORIGINALIDAD

10% INDICE DE SIMILITUD	6% FUENTES DE INTERNET	5% PUBLICACIONES	3% TRABAJOS DEL ESTUD
-----------------------------------	----------------------------------	----------------------------	---------------------------------

FUENTES PRIMARIAS

1	idoc.pub Fuente de Internet	
2	documentop.com Fuente de Internet	
3	qdoc.tips Fuente de Internet	
4	José Manuel Bueno Barrachina. "Contribución al mantenimiento de aisladores de alta tensión en servicio basado en medidas de corrientes de fuga", Universitat Politècnica de València, 2023 Publicación	
5	archive.org Fuente de Internet	
6	kupdf.net Fuente de Internet	
7	baixardoc.com Fuente de Internet	
8	Submitted to University of Technology Trabajo del estudiante	
9	hdl.handle.net Fuente de Internet	
10	Submitted to INACAP Trabajo del estudiante	
11	dokumen.pub Fuente de Internet	 Dr. Fredy Dávila Hurtado 16670066 Asesor
12	hirise.lpl.arizona.edu Fuente de Internet	
13	docshare.tips Fuente de Internet	
14	silo.tips Fuente de Internet	

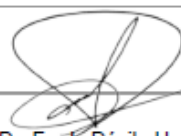
-
- 15 **doku.pub**
Fuente de Internet
-
- 16 **Submitted to University College London**
Trabajo del estudiante
-
- 17 **www.physionet.org**
Fuente de Internet
-
- 18 **dspace.su.edu.ly**
Fuente de Internet
-
- 19 **usermanual.wiki**
Fuente de Internet
-
- 20 **dn720803.ca.archive.org**
Fuente de Internet
-
- 21 **igd210a.projects.glos.ac.uk**
Fuente de Internet
-
- 22 **Submitted to Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo**
Trabajo del estudiante
-
- 23 **www.doom2.net**
Fuente de Internet
-
- 24 **Submitted to Universitat Oberta de Catalunya**
Trabajo del estudiante
-
- 25 **Montserrat García Gabaldón. "Estudio electroquímico y recuperación del estaño y del paladio mediante un reactor electroquímico de compartimentos separados", Universitat Politècnica de Valencia, 2005**
Publicación
-
- 26 **Mª Covadonga Delgado Bueno. "Modelización numérica del comportamiento adherent acero-hormigón en presencia de compresión transversal.", Universitat Politècnica de Valencia, 2008**
Publicación
-
- 27 **Submitted to Aliat Universidades**
Trabajo del estudiante
-
- 28 **Submitted to Eskisehir Osmangazi University**
Trabajo del estudiante
-
- 29 **Submitted to Universidad Nacional Abierta y a Distancia, UNAD,UNAD**
Trabajo del estudiante
-



Dr. Fredy Dávila Hurtado
16670066
Asesor

- 30 Submitted to Universidad Tecnológica de Bolívar,UTB
Trabajo del estudiante
-
- 31 Submitted to Universiteit Utrecht
Trabajo del estudiante
-
- 32 www.ballhelper.com
Fuente de Internet
- 33 www.academia.edu
Fuente de Internet
-
- 34 Juan César D'Ávila Baumgratz. "Bases de Schauder em espaços de Banach: incondicionalidade, contratibilidade, limitação completa e espaços combinatórios", Universidade de São Paulo. Agência de Bibliotecas e Coleções Digitais, 2025
Publicación
-
- 35 Submitted to Universidad ESAN -- Escuela de Administración de Negocios para Graduados
Trabajo del estudiante
-
- 36 Submitted to Universidad Nacional de Colombia
Trabajo del estudiante
-
- 37 acikbilim.yok.gov.tr
Fuente de Internet
-
- 38 Bedoya Arango, Jesus Maria. "Distribucion de voltaje en aisladores de suspension utilizando el metodo de elemento finito", Proquest, 20111108
Publicación
-
- 39 Submitted to EP NBS S.A.C.
Trabajo del estudiante
-
- 40 Submitted to ITESM: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Trabajo del estudiante
-
- 41 Submitted to Curtin University of Technology
Trabajo del estudiante
-
- 42 Giner Maravilla, Eugenio. "Estimation of the finite element discretization error in the stress intensity factor", Proquest, 20111108
Publicación
-
- 43 ENVIRONMENTAL HYGIENE & SAFETY SRLTDA. "DIA para el Proyecto de Línea de Subtransmisión 30 kV SE Cantera Caliza - Cemento Yura-IGA0013047", R.D. N° 072-2011: PRODUCE/DVMYPE-I/DIGGAM , 2021
Publicación
-
- 44 Guerrero Escudero, Esteban Emanuel. "Análisis numérico y Experimental De Inestabilidades electrocinéticas En Microcanal De configuración Cruzada", Pontificia Universidad Católica de Chile (Chile), 2021

-
- 45** CESEL S A. "Modificación de la DIA del Proyecto Construcción de la Nueva Subestación Amarilis y los Enlaces de Conexión en 138 kV-IGA0011278", R.D. N° 0123-2019-MINEM/DGAAE , 2021
Publicación
-
- 46** Cabello Lopez, Ramon. "Desarrollo y parametrización de una planta frigorífica de compresión simple de vapor, para la evaluación de los parámetros energéticos con datos empíricos, obtenidos utilizando como fluido de trabajo el refrigerante HCFC-22, y los refrigerantes alternativos HFC-134a y HFC-407C", Proquest, 20111108
Publicación
-
- 47** Submitted to Copperbelt University
Trabajo del estudiante
-
- 48** Melendres Quispe, Kenny Alberto. "Cálculo y diseño de un absorbente de vibraciones torsionales tipo péndulo para un motor de combustión interna de 2 cilindros y 4 tiempos.", Pontificia Universidad Católica del Perú - CENTRUM Católica (Perú), 2020
Publicación
-
- 49** Arshad, A. Nekahi, S. G. McMeekin, M. Farzaneh. "Effect of pollution severity and dry bulb location on the flashover characteristics of silicone rubber surfaces", Electrical Engineering, 2016
Publicación
-
- 50** Submitted to Saglik Bilimleri Universitesi
Trabajo del estudiante
-
- 51** www.oleiros.org
Fuente de Internet
-
- 52** Loc Nguyen. "Mathematical Approaches to User Modeling", Open Science Framework, 2019
Publicación
-
- 53** Submitted to Universidad Católica Los Angeles de Chimbote
Trabajo del estudiante
-
- 54** e-spacio.uned.es
Fuente de Internet
-
- 55** Submitted to Indian Institute of Science, Bangalore
Trabajo del estudiante
-
- 56** Submitted to Victoria University
Trabajo del estudiante
-
- 57** Hernandez, Hector Maurício Osório(Assis, André Pacheco de). "Ensaio de simulação de deposição hidráulica (ESDH) para a caracterização de rejeitos utilizados em barragens e aterro hidráulico", RIUnB, 2007.



Dr. Fredy Dávila Hurtado

16670066

Asesor



Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Ronald Marrufo Ventura
 Título del ejercicio: Quick Submit
 Título de la entrega: ESTUDIO DEL CAMPO ELÉCTRICO Y DISTRIBUCIÓN DE POTENC...
 Nombre del archivo: Estudio_del_Campo_El_ctrico_y_Distribuci_n_de_Potencial.pdf
 Tamaño del archivo: 6.13M
 Total páginas: 210
 Total de palabras: 57,778
 Total de caracteres: 269,230
 Fecha de entrega: 30-jun-2026 07:32p. m. (UTC-0500)
 Identificador de la entrega: 2991948461



UNIVERSIDAD NACIONAL
PEDRO RUIZ GALLO
ESCUELA DE POSTGRADO



MAESTRIA EN GERENCIA DE OBRAS Y
CONSTRUCCIÓN

ESTUDIO DEL CAMPO ELÉCTRICO Y DISTRIBUCIÓN DE
POTENCIAL EN AISLADORES TIPO VARA DE 60 KV
CONTAMINADOS AMBIENTALMENTE

TESIS

Presentado para optar el grado Académico de Maestro en Gerencia de
Obras y Construcción

Investigador:

Ronald José Marrufo Ventura

Asesor:

Dr. Fredy Dávila Hurtado

LAMBAYEQUE - PERÚ - 2024

Dr. Fredy Dávila Hurtado
16670066
Asesor

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de investigación a los seres que amo, respeto y admiro:

A mi Señor Dios todopoderoso, por escucharme, darme la fortaleza y sabiduría para comprender el ¿por qué? es necesaria ir cumpliendo metas en la vida.

A mi esposa Rosa Elena, por su tolerancia, paciencia, comprensión y amor, quién me apoya a seguir en esta trayectoria de constantes pruebas y retos que asumo y que me conducen en la dirección del cumplimiento de mis objetivos. “te amo esposa mía”

A mis hijos Celia Raquel y José y a mi hermosa nieta Fernanda Valentina, porque son el motor de mi vida, que con su aliento y amor me impulsan a seguir por esta senda de constantes adversidades. “los amo mis queridos hijos”

A mi querida madre Beatriz Esperanza, por aconsejarme, encaminarme, estar pendiente continuamente de mi persona y brindarme sus buenos ejemplos, gracias Señor Dios por darme una extraordinaria mamá. “te amo mi querida madre”

A mis hermanos: Yover, Iván y Milagritos, por su apoyo y aliento constante, el que me permite seguir adelante con los proyectos que me trazo en la vida.

A todos mis Colaboradores, por permitirme formar un gran equipo de trabajo, esperando que siempre estén alineados a sus objetivos personales.

AGRADECIMIENTO

En el caminar de mi vida me he encontrado con muchas personas, algunas de ellas muy gratas que sin darme cuenta han pasado a formar parte de mi vida, y que he compartido desde un saludo hasta un eterno agradecimiento. En mi caso, a estos seres e instituciones de gran prestigio quiero agradecerles de una manera muy especial por el logro obtenido:

✓ *A Dios todopoderoso por sus favores concedidos, esperando que siempre me escuche como hasta el día de hoy, mil gracias “mi Señor Dios”*

✓ *A la Escuela de Postgrado de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Sus Autoridades, por haberme aceptado formar parte de la maestría de esta prestigiosa casa de estudios.*

✓ *A los Docentes de la maestría en Gerencia de Obras y Construcción, por haber compartido sus conocimientos y experiencias que son parte de mi formación de maestrante.*

✓ *Al Dr. Fredy Dávila Hurtado, por su gran aporte, ayuda, asesoría y comprensión brindada. Sin su apoyo, este proyecto no se habría realizado. Muchísimas Gracias mi estimado Dr. Fredy.*

✓ *Al M.Sc. Justo Yanque Montufar, por haberme permitido sumergirme en el mundo de los aislantes sólidos al exterior y sobre todo por brindarme información relevante referente a este tema.*

✓ *A mi Tío, Matemático Ademar Ventura Zapata, por haberme apoyado en aclarar conceptos relevantes aplicados en el desarrollo de la tesis.*

✓ *A mis Compañeros Maestranter, por haber compartido todo este tiempo de estudios con mí persona.*

A mi esposa Rosa Elena, mis hijos Raquel y José, mi nieta Fernanda Valentina, mi madre Beatriz Esperanza, mis hermanos Yover, Iván y Milagritos y todas aquellas personas que forman parte de mi vida y que de una forma directa o indirecta aportaron a la iniciativa de mi carrera y al logro de este trabajo de grado.

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA	x
AGRADECIMIENTO	xi
ÍNDICE GENERAL	xii
ÍNDICE DE TABLAS	xviii
ÍNDICE DE FIGURAS	xx
RESUMEN	xxvi
ABSTRAC	xxvii
LISTADO DE SIGLAS, ACRÓNIMOS Y SÍMBOLOS	xxviii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I. DISEÑO TEÓRICO	5
1.1 Antecedentes de la Investigación	5
1.2 Bases Teóricas	10
1.2.1 Formación de la Capa Contaminante en Aisladores de Polímero de Alta Tensión	10
1.2.1.1 La Contaminación de Aisladores	10
1.2.1.2 Humedad y Conductividad de la Superficie Contaminada	13
1.2.2 Escalares	13
1.2.3 Vectores	14
1.2.4 Campos Vectoriales	15
1.2.5 Gradiente de un Campo Escalar	15
1.2.6 Divergencia de un Campo Vectorial	17
1.2.7 Rotacional de un Campo Vectorial	17
1.2.8 Distribución de Potencial a lo Largo del Aislador de Polímero	18
1.2.8.1 Distribución de Potencial – Método Expresión Simplificada	18
1.2.8.1.1 Potencial Soportado por Cada Aislador	18
1.2.8.1.2 Capacitancias Parásitas en Aisladores Poliméricos	19
1.2.8.1.2.1 Origen de las Capacitancias Parásitas	19
1.2.8.1.2.2 Funcionamiento de las Capacitancias Parásitas	20
1.2.8.1.2.3 Consecuencias Macro de las Capacitancias Parásitas	20

1.2.8.1.2.4 Evaluación de las Capacitancias Parásitas	21
1.2.8.1.2.5 Determinación de la Expresión C_l	21
1.2.7.1.2.6 Determinación de la Expresión C_t	22
1.2.8.2 Distribución de Potencial - Método Gráfico	22
1.2.8.3 Distribución de Potencial Método Analítico	23
1.2.9 Las Descargas en la Superficie Contaminada de los Aisladores	24
1.2.9.1 El Arco Eléctrico en el Aire	24
1.2.9.2 Caída de Tensión en el Arco Eléctrico	26
1.2.9.3 Mecanismo de Flameo de los Aisladores Contaminados	26
1.2.9.4 Aparición de Descargas en los Aisladores	27
1.2.10 Fundamentos del Campo Eléctrico	29
1.2.10.1 Carga Eléctrica	29
1.2.10.2 Líneas de Campo Eléctrico	30
1.2.10.3 Ley de Coulomb	31
1.2.10.4 Intensidad de Campo Eléctrico	32
1.2.10.5 Flujo Eléctrico y Densidad de Flujo Eléctrico	33
1.2.10.6 Potencial Eléctrico	35
1.2.10.7 Campo Debido a una Carga Puntual	40
1.2.10.8 Campo Debido a una Línea con Carga Uniforme	41
1.2.10.9 Flujo Eléctrico a Través de una Superficie	42
1.2.10.10 Superficie Gaussiana	43
1.2.10.11 Ecuaciones de Poisson y Laplace	44
1.3 Objetivos	47
1.3.1 Objetivo General	47
1.3.2 Objetivos Específicos	47
1.4 Hipótesis	48
1.4.1 Hipótesis General	48
1.4.2 Hipótesis Específica	48
1.5 Variables	49
1.5.1 Variables Dependientes	49
1.5.1.1 Indicadores	49
1.5.2 Variables Independientes	50
1.5.2.1 Indicadores	51

1.5.3 Variables Intervinientes	51
1.5.4 Cuadro de Operacionalización de Variables	52
1.6 Justificación e Importancia del Estudio	53
1.6.1 Justificación Teórica	53
1.6.2 Justificación Práctica	53
1.7 Limitaciones de la Investigación	55
CAPÍTULO II: DISEÑO METODOLÓGICO	57
2.1 Diseño de Contrastación de la Hipótesis	57
2.2 Población Muestra	58
2.3 Materiales, Técnicas e Instrumentación de Recolección de Datos	59
2.4 Métodos y Procedimientos para la Recolección de Datos	59
CAPÍTULO III: RESULTADOS	60
3.1 Resultados del Procesamiento de Datos	60
3.1.1 Distribución de Potencial a lo Largo del Aislador Polimérico	60
3.1.1.1 Distribución de Potencial - Método Expresión Simplificada	60
3.1.1.2 Distribución de Potencial – Método Gráfico	63
3.1.1.3 Distribución de Potencial - Método Analítico	68
3.1.2 Las Descargas en la Superficie Contaminada de los Aisladores	72
3.1.3 Aplicación del Método de Elementos Finitos	88
CAPÍTULO IV: DISCUSIÓN DE RESULTADOS	91
4.1 Análisis de Resultados de los Métodos Utilizados para Determinar la Distribución de Potencial, Campo Eléctrico y Corriente de Fuga en el Aislador Polimérico en Condiciones de <i>Superficie No Contaminado</i>	91
4.2 Análisis de Resultados de la Tensión y Gradiente de Tensión Necesaria para Sostener la Descarga, Tensión y Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción, Tensión y Gradiente de Tensión Crítica en el Aislador Polimérico en Condiciones de <i>Superficie Contaminada</i>	93
4.3 Análisis de Resultados de la Aplicación del Método de Elementos Finitos del Aislador Polimérico en Condiciones de <i>Superficie No Contaminada</i> .	95
CAPÍTULO V: PROPUESTA DE INTERVENCIÓN	96
5.1 Análisis de los Métodos Utilizados	96
CONCLUSIONES	97

RECOMENDACIONES	100
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101
ANEXOS	105
ANEXO A	105
1. Potencial Soportado por Cada Cobertizo del Aislador	105
1.1. Hipótesis Simplificada	105
1.2. Análisis del Circuito Simplificado	106
1.2.1. Corriente de Fuga a lo Largo del Aislador	106
1.2.2. Cálculo del Potencial a lo Largo del Aislador	108
2. Corriente de Fuga que Fluye a Través de Cada Cobertizo del Aislador	112
3. Método Gráfico Clásico para Determinar la Distribución de Potencial en Aisladores Poliméricos	115
ANEXO B	120
1. Cálculo de las Capacitancias Parásitas de Dispersión C_t y C_l	120
1.1. Principios Generales	120
1.2. Consideraciones Generales	122
2. Capacitancia a Tierra C_t	122
2.1. Deducción de la Expresión	123
3. Capacitancia a Línea C_l	124
3.1. Deducción de la Expresión	124
ANEXO C	128
1. Las Descargas	128
1.1. Descripción de la Característica Estática General	129
2. Condiciones para la Existencia y Estabilidad de las Descargas	131
ANEXO D	136
1. Determinación de los Parámetros que Intervienen en el Mecanismo de Descarga en la Superficie del Aislador Polimérico	136
1.1. Densidad de Corriente Superficial	136
1.2. Resistencia Lineal Superficial	138
1.3. Conductividad Superficial	140
1.4. Resistencia en Serie de la Capa Contaminante	143

ANEXO E	148
1. Estudio de la Derivación en Corriente Alterna	148
1.1. Estudio del Modelo de Corriente Continua	148
1.2. Análisis del Incremento de las Descargas	148
1.2.1. Condiciones de la Evolución de las Descargas	150
1.2.2. Determinación de la Corriente de Fuga Crítica y Corriente de Fuga Máxima	153
ANEXO F	157
Método de Elementos Finitos (FEM)	157
1. Fundamentos del Método de Elementos Finitos (FEM)	157
2. Pasos para el Procedimiento del Método de Elementos Finitos (FEM)	157
3. Enfoque Variacional hacia la Formulación del Método de Elementos Finitos (FEM)	158
4. Formulación del Método de Elementos Finitos (FEM) en un Sistema 2D en un Solo Medio Dieléctrico	159
5. Formulación del Método de Elementos Finitos (FEM) en un Sistema 2D en un Medio Multidieléctrico	164
6. Formulación del Método de Elementos Finitos (FEM) en un Sistema Axisimétrico	165
7. Función de Forma, Coordenadas Globales y Naturales	166
ANEXO G	169
1. Transformación de la Ecuación de Laplace de Coordenadas Rectangulares a Coordenadas Cilíndricas	169
1.1. Nociones Básicas Respecto a las Coordenadas Cilíndricas	169
1.2. Regla de la Cadena	170
1.2.1. Cálculo de las Derivadas Parciales de Primer y Segundo Orden de f Respecto a x	170
1.2.2. Cálculo de las Derivadas Parciales de Primer y Segundo Orden de f Respecto a y	173
1.2.3. Cálculo de las Derivadas Parciales de Primer y Segundo Orden de f Respecto a z	175

ANEXO H	178
1. Solución de la Integral y Derivada Parcial del Capítulo I. Subtítulo 1.2.10.8 (Campo Debido a una Línea con Carga Uniforme)	178
ANEXO I	180
Vocabulario Técnico	183
ANEXO J	184
PLANO:	
Sistema Eléctrico de Chiclayo Adaptado del Diagrama Unifilar del COES – SINAC. Esquema Unifilar por Nivel de Tensión de 220 – 60 KV	

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla I-1	Constantes de la Ecuación de Ayrton para Arcos a Presión Atmosférica	25
Tabla I-2	Materiales Utilizados en el Modelado de Aisladores Poliméricos	34
Tabla III-1	Características Mecánicas y Eléctricas de la Unidad Aislante Estudiada	60
Tabla III-2	Valores de C_l a Diferentes c (Radio Medio Cilíndrico)	61
Tabla III-3	Valores de C_t a Diferentes a (Radio Medio Esférico)	61
Tabla III-4	Valores Medidos de la Capacitancia Propia con el Medidor LCR/ESR METER	62
Tabla III-5	Valores de la Distribución de Potencial U_x – Método de la Expresión Simplificada	63
Tabla III-6	Valores de la Capacitancia Parásita a Tierra C_t para un 5 % de la Capacitancia Propia C – Método Gráfico	64
Tabla III-7	Valores de la Capacitancia Parásita a Tierra C_t para un 10 % de la Capacitancia Propia C – Método Gráfico	65
Tabla III-8	Valores de la Capacitancia Parásita a Tierra C_t para un 15 % de la Capacitancia Propia C – Método Gráfico	66
Tabla III-9	Valores de la Capacitancia Parásita a Tierra C_t para un 22.27 % de la Capacitancia Propia C – Método Gráfico	67
Tabla III-10	Valores de la Distribución de Potencial en Cada Cobertizo del Aislador Polimérico para un $C_t = (5 - 25) \% * C$ – Método Analítico	69
Tabla III-11	Resumen de Valores de la Distribución del Campo Eléctrico en Aislador de 60 kV	70
Tabla III-12	Resumen de Valores de la Distribución de Potencial de Acuerdo a los 3 Métodos Estudiados	71
Tabla III-13	Valores de la Corriente de Fuga en p.u. a Través de Cada cobertizo de la Unidad Aislante Valores de la Corriente	72
Tabla III-14	Componentes Conformantes de las Sustancias Electrolíticas de la Capa Contaminante	74
Tabla III-15	Incidencia de la Contribución por Componente para Estimar la Conductividad Total	75

Tabla III-16	Valores de la Conductividad de la Capa Contaminante de la Superficie del Aislador	75
Tabla III-17	Valores de la Conductividad Superficial, ESDD, Corriente de Fuga y Resistencia de la Superficie Contaminada del Aislador Polimérico	77
Tabla III-18	Valores de las Constantes n y A ; Así como También de la Corriente de Fuga, Corriente de Inflexión, Gradiente de Tensión Necesaria para Sostener la Descarga y Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción de la Descarga en la Superficie Contaminada del Aislador Polimérico	81
Tabla III-19	Valores Críticos Alcanzados Después de Aplicar un Tensión de 42 kV entre los Electrodo del Aislador Polimérico	83
Tabla III-20	Tensión, Gradiente de Tensión, Corriente de Fuga y Valores Críticos en una Franja Estrecha	86
Tabla III-21	Tensión, Gradiente de Tensión, Corriente de Fuga y Valores Críticos en una Franja Estrecha	88
Tabla IV-1	Comparación de los Datos Técnicos y de los Datos Obtenidos del Cálculo del Aislador Polimérico en Estudio	95
Tabla C-1	Forma Aproximada de las Descargas que Tienen Lugar en el Aire a Diversas Presiones e Indicador de los Dispositivos de Descarga Comerciales que Operan a estas Presiones	131

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura I-1	Esfera de Radio $\overline{OM}$ con un Punto Tangente M y un Punto Exterior P	14
Figura I-2	Representación Gráfica del Vector $\vec{A}$ n el Eje de Coordenadas Cartesianas	14
Figura I-3	Origen de las Capacitancias Parásitas	20
Figura I-4	Mecanismo de Flameo en los Aisladores Contaminados	28
Figura I-5	Líneas de Campo Eléctrico Debido a (a) Una Carga Fuente Positiva, (b) Una Carga Fuente Negativa	31
Figura I-6	Líneas de Campo Eléctrico Debido a un Par de Cargas. Positiva y Negativa	31
Figura I-7	Fuerzas Electrostáticas de Interacción Entre Dos Cargas Puntuales	31
Figura I-8	Superficie Relacionada con la Densidad de Flujo Eléctrico Donde el Flujo Eléctrico No es Normal a la Superficie que Atraviesa	34
Figura I-9	Gráfica de la Definición de Potencial Eléctrico	36
Figura I-10	Ejemplos de Potenciales (a) Campo Uniforme; (b) Campo No Uniforme	37
Figura I-11	Gradiente de Potencial Eléctrico e Intensidad de Campo Eléctrico	37
Figura I-12	Relación del Gradiente de Potencial e Intensidad de Campo Eléctrico	39
Figura I-13	Campo Debido a una Carga Puntual	40
Figura I-14	Campo Debido a una Línea con Carga Uniforme	41
Figura I-15	Evaluación del flujo Eléctrico Total a través de una Superficie	43
Figura I-16	Superficie Gaussiana Esférica	44
Figura I-17	Superficie Gaussiana Cilíndrica	44
Figura III-1	Componentes del Aislador Tipo Vara	60
Figura III-2	Variación de C_l en Función al Radio Medio Cilíndrico " c " y Distancia " l " Posición del Cobertizo	61
Figura III-3	Variación de C_t en Función al Radio Medio Esférico " a "	62

Figura III-4	Modelo del Aislador Polimérico Sometido a una Tensión de 42 kV	62
Figura III-5	Distribución de Potencial en Aislador Polimérico – Método Expresión Simplificada	63
Figura III-6	Distribución de Potencial en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 5 \% * C$ – Método Gráfico	64
Figura III-7	Potencial que Soporta Cada Cobertizo en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 5 \% * C$ – Método Gráfico	64
Figura III-8	Distribución de Potencial en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 10 \% * C$ – Método Gráfico	65
Figura III-9	Potencial que Soporta Cada Cobertizo en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 10 \% * C$ – Método Gráfico	65
Figura III-10	Distribución de Potencial en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 15 \% * C$ – Método Gráfico	66
Figura III-11	Potencial que Soporta Cada Cobertizo en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 15 \% * C$ – Método Gráfico	66
Figura III-12	Distribución de Potencial en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 22.27 \% * C$ – Método Gráfico	67
Figura III-13	Potencial que Soporta Cada Cobertizo en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 22.27 \% * C$ – Método Gráfico	67
Figura III-14	Resumen de la Distribución de Potencial en Aislador Polimérico para Varios Valores de C_t – Método Gráfico	68
Figura III-15	Resumen de la Distribución de Potencial en Aislador Polimérico para Varios Valores de C_t - Método Analítico	68
Figura III-16	Distribución del Campo Eléctrico en Aislador Polimérico de 60 kV	70
Figura III-17	Resumen Gráfico de la Distribución de Potencial en Aislador Polimérico de Acuerdo a los 3 Métodos Estudiados	71
Figura III-18	Corriente de Fuga a Través de Cada Cobertizo de la Unidad Aislante	72
Figura III-19	Recorrido de la Línea Eléctrica L6547 (Torres Metálicas: 45 unidades; Postes de Concreto: 154 unidades)	73
Figura III-20	Diagrama Unifilar del Sistema Eléctrico de la C.H. Zaña de Acuerdo al COES-SINAC	74

Figura III-21	Representación del Espesor de la Capa Contaminante Uniforme en el Cobertizo Número 16 del Aislador Polimérico	75
Figura III-22	Variación de la Corriente de Fuga con la Conductividad Eléctrica Superficial	76
Figura III-23	Variación de la Corriente de Fuga con la Raíz de la Descarga	76
Figura III-24	Variación de la Conductividad con el Espesor del Electrolito Contaminante	76
Figura III-25	Variación del ESDD con el Peso Total del Compuesto Contaminante	78
Figura III-26	Variación de la Corriente de Fuga con el ESDD de la Superficie Contaminada	78
Figura III-27	Variación del ESDD con la Conductividad Eléctrica	78
Figura III-28	Variación de la Resistencia del Contaminante con la Longitud de la Descarga	79
Figura III-29	Variación de la Resistencia del Contaminante con la Corriente de Fuga	79
Figura III-30	Gradiente de Tensión Necesaria para Sostener la Descarga	80
Figura III-31	Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción de la Descarga	80
Figura III-32	Corriente de Inflexión para Mantener la Conducción de la Descarga	80
Figura III-33	Gradiente de Tensión – Corriente de Inflexión para Mantener la Conducción de la Descarga	81
Figura III-34	Variación de la Corriente de Fuga Crítica en una Franja Estrecha	85
Figura III-35	Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción en una Franja Estrecha	85
Figura III-36	Gradiente de Tensión de Descarga Disruptiva en una Franja Estrecha	85
Figura III-37	Variación de la Corriente de Fuga Crítica en una Franja Ancha	87
Figura III-38	Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción en una Franja Ancha	87
Figura III-39	Gradiente de Tensión de Descarga Disruptiva en una Franja Ancha	87

Figura III-40	Representación Gráfica en AutoCAD a Escala Real del Aislador Polimérico como Dato de Entrada al Programa COMSOL MULTIPHYSICS	88
Figura III-41	Discretización en Elementos Triangulares del Aislador Polimérico	89
Figura III-42	Líneas de Campo Eléctrico en Dirección Línea - Tierra en el Aislador Polimérico Después de Ser Sometido a Tensión Eléctrica	89
Figura III-43	Distribución de Potencial Eléctrico en la Superficie Longitudinal del Aislador Polimérico	90
Figura III-44	Superficie Equipotencial por Colores del Aislador Polimérico Sometido a una Tensión Eléctrica de 42 kV	90
Figura A-1	Representación Gráfica del Circuito Equivalente del Aislador Polimérico en Estudio	106
Figura A-2	Representación Gráfica del Aislador Polimérica Tipo Vara Considerado como una Línea de Doble Dispersión Capacitiva	109
Figura A-3	Representación Gráfica de las Tensiones y Corrientes en un Aislador Polimérico Tipo Vara	113
Figura A-4	Representación Gráfica de un Aislador Tipo Vara de " n " Unidades de Cobertizos	116
Figura A-5	Representación Gráfica de la Distribución de Potencial de un Aislador Polimérico Tipo Vara de " n " Unidades de Cobertizos Mediante el Método Gráfico	119
Figura B-1	Dos Conductores Esféricos Concéntricos de Radios a y b	123
Figura B-2	Cuatro Líneas Conductoras Sobre el Eje x Simétricas con Respecto al Origen	124
Figura B-3	Dos Conductores con Centros O_1 y O_2 y sus Imágenes con Centros O'_1 y O'_2 Distribuidos Simétricamente Sobre el Eje x con Respecto al Origen	125
Figura C-1	Característica Estática de la Descarga	130
Figura C-2	Característica Estática de una Descarga Para Identificar Puntos Estables y No Estables	133
Figura C-3	Características Cualitativas de las Longitudes de Arco l_1, l_2, l_3	135
Figura D-1	Elemento Conductor de la Capa Contaminante	137
Figura D-2	Modelo de Proceso de Flameo de la Capa Contaminada del Cilindro	139

Adoptado para Representar la Superficie del Aislador

Figura D-3	Representación de las Imágenes de la Franja Ancha Correspondientes a la Raíz de la Descarga de Acuerdo a la Superficie Rectangular (Figura D-2)	144
Figura D-4	Representación de las Imágenes de la Franja Estrecha Correspondiente a la Raíz de la Descarga de Acuerdo a la Superficie Rectangular (Figura D-2)	147
Figura E-1	Modelo Utilizado para el Análisis del Incremento de las Descargas	149
Figura E-2	Dependencia de V_{min} con la Longitud x	152
Figura F-1	Representación de la Región de Interés, el Elemento y los Nodos para la Formulación del FEM	157
Figura F-2	Elemento Triangular Lineal	160
Figura F-3	Conectividad Nodal: (a) Elemento Hexagonal; (b) Elemento Octogonal	163
Figura F-4	Discretización Elemental para un Medio Multidieléctrico	164
Figura F-5	Elemento Triangular para una Formación Axisimétrica	165
Figura F-6	(a) Triángulo en Estado Deformado y No Deformado; (b) Interpolación de un Punto Interior	166
Figura F-7	Representación de Coordenadas Naturales	168
Figura G-1	Gráfica del Punto "P" en Coordenadas Rectangulares y Coordenadas Cilíndricas	169
Figura G-2	Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Coordenadas Cilíndricas	170
Figura G-3	Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Determinar la $\frac{\partial f}{\partial x}$	171
Figura G-4	Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Determinar la $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	172
Figura G-5	Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Determinar la $\frac{\partial f}{\partial y}$	173
Figura G-6	Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Determinar la $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	174

- Figura G-7 Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para 175
Determinar la $\frac{\partial f}{\partial z}$
- Figura G-8 Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para 176
Determinar la $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

RESUMEN

La degradación prematura por el uso continuo de la exposición al ambiente del aislador polimérico impacta negativamente al desplazamiento desordenado de las líneas de campo y modifica la distribución no lineal del potencial eléctrico en las unidades aislantes de una línea de transmisión de alta tensión. Por tal motivo, *el objetivo de este estudio fue analizar el comportamiento del campo eléctrico y mejorar la repartición no lineal de potencial frente al efecto causado por la contaminación ambiental, mediante el control de variables que reduzcan la patología de la degradación prematura del aislador y aumente la confiabilidad operativa en las líneas de transmisión.* En tal sentido, se modeló la unidad aislante bajo dos escenarios; *aislador con superficie no contaminada y aislador con superficie contaminada.* Para el primer caso, *aislador con superficie no contaminada*, se estudiaron 3 métodos: método expresión simplificada, método del modelo gráfico y método del modelo analítico, considerando al aislador como una línea de doble dispersión capacitiva; así como también, se realizó la simulación de la unidad aislante utilizando el software COMSOL MULTIPHYSICS 5.5. Para el segundo caso, *aislador con superficie contaminada*, se determinaron las principales variables de interés como tensión y gradiente de tensión necesaria para sostener la descarga, tensión y gradiente de tensión mínima para mantener la conducción de la descarga y se determinó la tensión, gradiente de tensión y corriente crítica manteniendo constante la resistencia serie por unidad de longitud del compuesto contaminante; asimismo, se calcularon estas mismas variables para los casos de contaminación de franja ancha y franja estrecha con la acotación de la variación de la resistencia serie por unidad de longitud. El compuesto reactivo contaminante considerado fue la mezcla de las cenizas de combustión de la caña de azúcar y el NaCl que se combinó con la humedad ambiental y el agua de lluvia.

Los resultados obtenidos son de 89,94 mA; 253,28 mA de corriente crítica y 409,70 V/cm; 723,19 V/cm de gradiente de tensión para una franja estrecha y franja ancha respectivamente. Por lo que se concluye que, estos valores de gradiente de tensión crítico representan el 1,37 % y 2,41 %; 40,97 % y 72,32 % de la disrupción del aire en estado seco y húmedo cuyos valores son de 30 kv/cm y 1 kV/cm respectivamente.

Palabras Clave: Campo Eléctrico, Potencial Eléctrico, Longitud de Descarga y Corriente de Fuga Crítica

ABSTRAC

Premature degradation of polymeric insulators due to continuous exposure to the environment negatively affects the disordered displacement of field lines and alters the nonlinear distribution of electrical potential in the insulating units of a high-voltage transmission line. For this reason, *the objective of this study was to analyze the behavior of the electric field and improve the nonlinear potential distribution in response to the effects of environmental contamination by controlling variables that reduce the premature degradation of insulators and increase the operational reliability of transmission lines.* To this end, the insulator was modeled under two scenarios: *an insulator with an uncontaminated surface and an insulator a contaminated surface.* For the first case, *an insulator with an uncontaminated surface*, three methods were studied: the simplified expression method, the graphical model method, and the analytical model method, treating the insulator as a double-capacitive dispersion line; additionally, the insulator unit was simulated using COMSOL MULTIPHYSICS 5.5 software. For the second case, *an insulator with a contaminated surface*, the main variables of interest were determined, such as the voltage and voltage gradient required to sustain the discharge, and the minimum voltage and voltage gradient required to maintain the discharge; the voltage, voltage gradient, and critical current were also determined while keeping the series resistance per unit length of the contaminant constant; likewise, these same variables were calculated for cases of wide-band and narrow-band contamination, taking into account the variation in series resistance per unit length. The reactive polluting compound considered was the mixture of sugarcane combustion ash and NaCl combined with ambient humidity and rainwater.

The results obtained are 89.94 mA and 253.28 mA for critical current, and 409.70 V/cm and 723.19 V/cm for voltage gradient for a narrow strip and a wide strip, respectively. Therefore, it is concluded that these values represent 1.37% and 2.41%; 40.97% and 72.32% of the breakdown voltage of dry and humid air, whose values are 30 kV/cm and 1 kV/cm, respectively.

Keywords: Electric Field, Electric Potential, Discharge Length, and Critical Leakage Current

LISTADO DE SIGLAS Y ACRÓNIMOS

AC	: Corriente Alterna – Pulso Ondulado o Senoidal
ANSI	: Instituto Nacional Americano de Estándares
ATH	: Trihidrato de Alúmina – Compuesto Inorgánico
CFC	: Clorofluorocarbonados
CH ₄	: Metano
CH	: Central Hidroeléctrica
CO	: Monóxido de Carbono
CIGRE	: Consejo Internacional de Grandes Sistemas Eléctricas
COES-SINAC	: Comité de Operación Económica del Sistema Eléctrico Interconectado Nacional
COELVISAC	: Consorcio Eléctrico de Villacuri SAC
DC	: Corriente Continua – Pulso Constante
DP	: Descarga Parcial
EC	: Epoxi Cicloalifáticas
ENSA	: Empresa Regional de Servicio Público de Electricidad del Norte S.A.
EPDM	: Monómero de Etileno, Propileno y Dieno
EPG	: Escuela de Postgrado
EPM	: Monómero de Etileno y Propileno
EPR	: Caucho de Etileno y Propileno
EPRI	: Instituto de Investigación de Energía Eléctrica
ESDD	: Densidad de Depósito de Sal Equivalente
EVA	: Etilvinilacetato
FEM	: Método de Elementos Finitos

FIME	: Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
FVRP	: Plástico Reforzado con Fibra de Vidrio
HCR	: Caucho Curado a Alta Temperatura
HTV	: Goma de Silicona Vulcanizado Curado a Alta Temperatura
H ₂ SO ₄	: Ácido Sulfúrico
HV	: Alta Tensión. Término Genérico para Especificar Tensiones Nominales de 60, 66, 138 y 220 kV en el SEIN
IEC	: Comisión Electrotécnica Internacional
kV	: Kilovoltios – Unidad de Medida de la Tensión Eléctrica o de la Energía por unidad de carga Eléctrica
LIM	: Moldeo por Inyección Líquida
LSR	: Caucho de Silicona Líquida
LT	: Línea de Transmisión
MW	: Megavatio = 1 000 000 vatios – Unidad de Medida de la Potencia Eléctrica
GWh	: Gigavatio hora = 1 000 megavatios hora – Unidad de Medida de la Energía Eléctrica
NCI	: Nomenclatura de Compuestos Inorgánicos
NO _x	: Óxido de Nitrógeno
ONAN	: Enfriamiento por Convección Natural del Aceite y Enfriamiento por Convección Natural del Aire
ONAF	: Enfriamiento por Convección Forzada del Aceite y Enfriamiento por Convección Natural del Aire
OSINERGMIN	: Organismo Supervisor de la Inversión en Energía y Minería
O ₃	: Ozono
PTFE	: Politetrafluoroetileno o Teflón
RP	: Ruptura Parcial o Disrupción Parcial

r_p	: Resistencia de la Superficie Contaminada por Unidad de Longitud
R_{SFA}	: Resistencia Superficial Franja Ancha
R_{SFE}	: Resistencia Superficial Franja Estrecha
RTV	: Goma de Silicona Vulcanizada Curada a Temperatura Ambiente
SEIN	: Sistema Eléctrico Interconectado Nacional
SEP	: Sistema Eléctrico de Potencia
SET	: Subestación de Transformación
SiR	: Caucho de Silicona o Goma de Silicona
SO_x	: Óxido de Azufre
$S/. /MWh$	: Costo Marginal: soles por Megavatio hora = $\frac{dP}{dQ}$
UNPRG	: Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo
VIRP	: Tensión de Inicio de Disrupción Parcial

LISTADO DE SÍMBOLOS

A	: Amperios. Unidad de Medida de la Corriente Eléctrica
C	: Capacitancia Propia. Representa al Modelo del Cobertizo
C_l	: Capacitancia Parásita de Dispersión a Línea
C_t	: Capacitancia Parásita de Dispersión a Tierra
$\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$	: Divergencia del Vector Campo Eléctrico $\vec{E}$
G	: Conductividad del Material, Inversa de la Reactancia
$\text{gra } V = \nabla V$	: Gradiente de Tensión Escalar V
I_x	: Corriente en Amperios que Soporta cada Cobertizo en la Ubicación x del Aislador Polimérico
J	: Densidad de Corriente Eléctrica en A/cm^2
L_{arco}	: Longitud de Arco del Aislador Polimérico
L_{fuga}	: Longitud de Línea de Fuga del Aislador Polimérico
L_{total}	: Longitud Total del Aislador Polimérico
$NaCl$	: Cloruro de Sodio
Q	: Carga Eléctrica
R	: Resistencia del Conductor Eléctrico
$\text{Senh } \theta$	: Seno Hiperbólico del Ángulo θ
V_x	: Tensión en kilovoltios que soporta cada Cobertizo en la Ubicación x del Aislador Polimérico
Y	: Admitancia del Sistema, Suma de la Conductancia y la Susceptancia, en Siemens
Z	: Impedancia del Sistema, Suma de la Resistencia y la Reactancia, en Ohms
ρ	: Resistividad del Material en Ohm-m
σ_s	: Conductividad Superficial del Material, Inversa de la Resistencia, en Siemens

σ_e : Conductividad Específica, en Siemens

INTRODUCCIÓN

En la coyuntura que nos encontramos actualmente respecto al crecimiento económico de nuestro país (3% el año 2 025 y se espera un crecimiento para este año electoral 2 026 del 3,2%), puedo afirmar contundentemente que el Perú viene creciendo en demanda y energía eléctrica suministrada a los centros de consumo, cuya magnitud pasó de 2 139,711 MW y 1 208,526 GWh el mes de enero del año 2 000 a 8 122,574 MW y 5 280,281 GWh al mes de junio del año 2 026, resultado del ingreso gradual al SEIN de pequeñas, medianas y grandes cargas. Esto ha sido posible gracias a la seguridad y confiabilidad en la transmisión y distribución de la energía eléctrica. Ello conlleva inmediatamente a plantearnos la siguiente interrogante. *¿Qué pasaría si se produjera una interrupción intempestiva del suministro eléctrico en las grandes ciudades, plantas industriales, agroindustrias, medianos y grandes centros mineros, centros hospitalarios, grandes sistemas de ordenadores, centros comerciales y cargas importantes en expansión?*, como lo sucedido el año 2025 en España y Chile; o lo sucedido en nuestro en nuestro País, con la rotura de la tubería alimentadora de gas ocurrido en la primera semana de marzo del presente año. La respuesta sería inmediata, el impacto negativo ocasionado producirá un evento catastrófico en la economía peruana; puesto que toda la energía generada bajo las diferentes tecnologías de generación de nuestro parque energético se encuentra muy alejadas de los centros de consumo, entonces deben de ser inmediatamente despachada mediante el uso de líneas de transmisión aérea. La razón del despacho inmediato de la energía generada es netamente económica (S/. /MWh); sin embargo, la distribución de la energía desde las SET para uso residencial, comercial e industrial son realizados mediante redes aéreas de distribución en media y baja tensión.

Ahora bien, toda la infraestructura eléctrica como líneas de transmisión y distribución expuestas al aire libre utilizadas en la actualidad en el SEP deben estar aisladas y aterradas de sus componentes de soporte por razones de seguridad y para evitar fallas eléctricas en los centros de generación o en las subestaciones de transformación. Entonces, la confiabilidad y seguridad en el transporte de la energía eléctrica desde las centrales de generación hasta los centros de consumo depende en gran medida del aislamiento utilizado en dichas líneas aéreas o, dicho de otra forma, el transporte de energía depende sustancialmente *del aislamiento exterior*.

Es por ello, que los aislantes de polímero están siendo utilizados en todo el mundo como aislantes al exterior del tipo suspensión, aislantes tipo pin, line-post y terminaciones para

cables de distribución subterránea. Por lo tanto, es necesario para las empresas operadoras e ingenieros de diseño, operación y mantenimiento conozcan a profundidad sobre el aislamiento en una línea de transmisión y distribución, con la finalidad de mantener una operación continua de su sistema eléctrico; así como también, poder seleccionar adecuadamente el tipo de aislador polimérico para un mantenimiento correctivo, ya que estos se rigen básicamente por tres condiciones anormales de operatividad, como son:

- ✓ Sobretensiones debidas a fenómenos atmosféricos;
- ✓ Sobretensiones debidas a maniobras, y
- ✓ Existencia de gradientes anormales de tensión en el sistema de aislamiento, *debido a una contaminación superficial conductiva capacitiva.*

Esta última condición de falla del aislamiento es la que nos interesa conocer a detalle, y puedo afirmar que si se produjera una reducción en la capacidad del aislamiento superficial bajo el efecto de la contaminación atmosférica, ello produciría un bajo desempeño efectivo del aislante, por consiguiente, una elevada concentración desordenada en las líneas de campo eléctrico llegando a superar en mucho de los casos la magnitud de la rigidez dieléctrica del aire del entorno que tiene un valor de 30 kV/cm en condiciones de estado seco y de 1 kV/cm en condiciones de estado húmedo; así como también, aumenta la no linealidad de la distribución de potencial eléctrico a lo largo del cuerpo aislante.

Aunque los aislantes de polímero, *también denominados aisladores poliméricos, aisladores compuestos o aisladores no cerámicos*, son productos relativamente nuevos para las empresas del rubro eléctrico, en la actualidad han generado una gran aceptación en el mercado nacional e internacional. Por tal motivo, representan un cambio importante en el diseño, y reemplazo de aisladores convencionales que han sido utilizados por muchos años, puesto que sus ventajas sobre estos aisladores de material de porcelana y vidrio los han convertido en elementos muy atractivos para los concesionarios eléctricos. Tal es así, que en su fabricación se utilizan diversos materiales como en el Núcleo: FVRP recubierto con SiR del tipo HTV o RTV como material resistente a la intemperie; en los Cobertizos: EPM, EPDM, EC, PTFE, SiR; y como relleno para evitar la descomposición del polímero a unos 250°C se utiliza el ATH y la sílice pirogénica; estos aislantes de polímero cuentan con mejores diseños (mayor longitud de fuga y menor peso) y métodos de fabricación innovadores (cuerpo y superficie repelente al agua – hidrófobos).

Dado que los aislantes de polímero por ser un material orgánico son vulnerables a la degradación prematura por el uso continuo de la exposición al ambiente (problema netamente a solucionar por el fabricante) y por la formación de descargas en su superficie de banda seca (materia de investigación del presente estudio). Por tal motivo, se presenta este estudio con la finalidad de plantear una alternativa de solución a la patología encontrada. Este logro será posible, si aplicamos bases teóricas referente a campos y potenciales eléctricos mediante el uso de métodos matemáticos como el método de las imágenes, potencial complejo, métodos analíticos, gráficos, ajuste de la ecuación Poisson y desarrollo de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas y para la visualización en realidad virtual del comportamiento del aislador sometido a una tensión de 42 kV se utiliza el software COMSOL MULTIPHYSICS 5.5, programa basado en el FEM.

La investigación está conformada por 5 capítulos:

Capítulo I: Diseño Teórico. - Describe los antecedentes, bases teóricas utilizadas para el desarrollo de la investigación, objetivos planteados, hipótesis que se espera validar, variables, justificación e importancia y limitaciones del estudio.

Capítulo II: Diseño Metodológico. – Describe la forma como se contrastará la hipótesis planteada que se espera validar, que población muestra o caso real de estudio considerado como referencia, qué materiales y técnicas de recolección de datos se ha utilizado y los procedimientos y métodos empleados.

Capítulo III: Resultados. – En este capítulo describo mediante gráficas y tablas los resultados obtenidos de los cálculos; así como también, los resultados de la simulación del aislador con su superficie no contaminada utilizando el software COMSOL MULTIPHYSICS 5.5.

Capítulo IV: Discusión de Resultados. – Se contrastan los resultados obtenidos con los resultados de los artículos y tesis publicados que se han tomado como referencia.

Capítulo V: Propuesta de Intervención. – Se compara el resultado obtenido de la tensión y el gradiente de tensión crítico de una franja ancha con los datos del fabricante de la tensión y gradiente de tensión de flameo a baja frecuencia.

y 10 anexos:

Anexo A.- Se desarrollan los siguientes puntos: Potencial Soportado por Cada Cobertizo del Aislador, Corriente de Fuga que Fluye a Través de Cada Cobertizo del Aislador y

Método Gráfico Clásico para Determinar la Distribución de Potencial en Aisladores Poliméricos.

Anexo B.- Se desarrolla el siguiente punto: Cálculo de las Capacitancias de Dispersión C_t y C_l .

Anexo C.- Se desarrolla el siguiente punto: Las Descargas y Condiciones para la Existencia y Estabilidad de las Descargas

Anexo D.- Se desarrolla el siguiente punto: Determinación de los Parámetros que Intervienen en el Mecanismo de Descarga en la Superficie del Aislador Polimérico

Anexo E.- Se desarrolla el siguiente punto: Estudio de la Derivación de la descarga en Corriente Alterna

Anexo F.- Se desarrolla el siguiente punto: Método de Elementos Finitos (FEM)

Anexo G.- Se desarrolla el siguiente punto: Transformación de la Ecuación de Laplace de Coordenadas Rectangulares a Coordenadas Cilíndricas

Anexo H.- Se desarrolla el siguiente punto: Solución de la Integral y Derivada Parcial del Capítulo I. Subtítulo 1.2.10.8 (Campo Debido a una Línea con Carga Uniforme)

Anexo I.- Vocabulario Técnico y para finalizar el trabajo se presenta

Anexo J.- Plano del sistema eléctrico de Chiclayo adaptado del Diagrama Unifilar que nos proporciona el COES-SINAC, este ha sido elaborado como un esquema unifilar para un nivel de tensión de 220 y 60 kV.

CAPÍTULO I. DISEÑO TEÓRICO

1.1 Antecedentes de la investigación.

Un aislador de alta tensión proporciona una ruta de aislamiento por aire con respecto al soporte aterrado, y juega un rol importante en la transmisión de energía eléctrica a los consumidores finales a través del sistema de potencia [7], [17], [23]. Aisladores de porcelana y de vidrio se utilizaron hace más de un siglo y su uso es mucho más antiguo en aplicaciones de telegrafía, estos fueron introducidos alrededor de 1835, y su aplicación para líneas eléctricas se remonta al año 1882 con la construcción de una línea eléctrica corta de 42,80 km que une Miesbach y Munich en Alemania para una tensión de operación de 1,343 kV en DC, diseñada por Von Miller y Duprez. Estos aisladores fueron introducidos a los Estados Unidos alrededor del año 1903 para aplicaciones en AC [12], [7].

Los primeros diseños de aisladores de polímeros se desarrollaron durante la década de 1960 y las primeras instalaciones de prueba durante la década de 1970. Las ventajas de los aisladores de polímeros son su ligereza, resistencia al vandalismo, perfil pequeño y, en algunos casos, mejor rendimiento a la contaminación [9], [16]. Al igual que con los aisladores de porcelana y vidrio, los diseños iniciales estuvieron plagados de problemas y sufrieron especialmente los efectos del deterioro prematuro del material. A través de una evolución continua de los diseños, los aisladores poliméricos se han convertido en un producto que ha alcanzado el grado de desarrollo adecuado y que, desde la década de 1980 han sido aceptados y utilizados en grandes cantidades de líneas de transmisión en todo el mundo [12].

El año 1884 en el Perú se pone en operación la central hidroeléctrica Tarijas en Huaraz, con generación y transporte de potencia en AC, pero el desarrollo de esta industria eléctrica data entre los años 1895 al año 1915, cuando las redes eléctricas en Lima y demás ciudades de nuestro País alcanzaban una tensión máxima de transporte de 33 kV [9], pero el uso de los aislantes de polímero en los sistemas de transmisión eléctrica se inicia a finales del año 1980, cuyos primeros aisladores instalados fueron de material EPDM los que se utilizaron como parte de la atención a las emergencias producidas por el terrorismo. A partir del año 1998, la concesionaria REP efectuó el cambio de aisladores convencionales de vidrio y porcelana por aisladores poliméricos en las zonas de alta contaminación con un promedio de línea de fuga de 8 000 mm o su equivalente de 35

mm/kV para un nivel de tensión de 138 y 220 kV [22], con el paso del tiempo estos aisladores fallaron por contaminación, generándose así un problema con el que diariamente lidian las empresas operadoras.

En el mundo actual las empresas que operan sistemas eléctricos enfrentan problemas semejantes al ocurrido en nuestro país. En tal sentido, para mayor robustez científica de mi trabajo, describo las investigaciones que a mi parecer aportan en mayor magnitud sobre este tema y que los considero referentes en el desarrollo del trabajo de investigación.

✓ **Gorur Ravi S.** en su artículo [16] presenta una revisión de la tecnología de aislamiento de alta tensión, así como también, describe detalladamente las desventajas técnicas de los aisladores de porcelana y vidrio frente al aislante de polímero. Por otra parte, aborda como los aislantes de polímero alivian en gran medida los problemas suscitados por los aisladores convencionales. También presenta la experiencia de servicio de las empresas de servicio público de los Estados Unidos, las que se evidencian mediante ilustraciones de pruebas aceleradas más utilizadas, ventajas, desventajas y factores que deben tenerse en cuenta en el desarrollo de una prueba de laboratorio significativa que es relevante para la cuantificación de la experiencia de servicio. Este artículo es de vital importancia para mi investigación, puesto que me ha permitido comprender las grandes diferencias técnicas existentes entre ambos tipos de tecnología de materiales de fabricación de aislantes para alta tensión.

✓ **Gorur y Venkataraman** en su artículo [13] desarrollaron un estudio donde presentan un modelo teórico para predecir tensiones de contorno (tensión de descarga disruptiva) en aisladores no cerámicos. Este modelo está basado en la reignición y las constantes de arco derivadas de simulaciones de campo eléctrico y datos experimentales de tensión de descarga disruptiva en el que se cuantificó el indicador de densidad de depósito de sal equivalente (ESDD) y se midió la resistencia de superficie. Se evaluaron campos nuevos y envejecidos en muestras de goma de silicona (SiR) y goma de monómero de etileno propileno dieno (EPDM). Los autores concluyen que, para aisladores tradicionales de porcelana y vidrio, existe un amplio rango en los valores predichos de tensión de descarga eléctrica en condiciones contaminadas, lo que les indica una comprensión bastante pobre del proceso de contorno e indicaron una situación más complicada para los aisladores no cerámicos. En este estudio también se consideró la naturaleza hidrofóbica de la superficie de los aisladores no cerámicos.

Este artículo lo consideramos como un referente, puesto que el modelo planteado por los autores se puede predecir contorneos en aisladores de polímeros de silicona (SiR) y en monómeros de etileno propileno dieno (EPDM) en condiciones de contaminación en seco y húmedas solamente considerando el ESDD y la resistencia de superficie para cualquier nivel de tensión, para nuestro estudio se determinan los indicadores ESDD y la resistencia de superficie del aislador de goma de silicona (SiR), adicionalmente a ello se consideran parámetros adicionales.

✓ **Gorur y Moreno** en su artículo [14] y [15] desarrollaron un estudio de la influencia del efecto corona longitudinal sobre la degradación de los materiales de la superficie del aislador compuesto no cerámico (NCI) de tensiones en 345 y 500 kV. Los autores obtuvieron muestras de polímero a partir del NCI a escala completa, empleando tres diferentes tipos de materiales: goma de silicona (SiR), goma de monómero de etileno propileno dieno (EPDM) y una mezcla de EPDM con goma de silicona. Evaluaron el efecto de los factores de aceleración aplicado externamente como la humedad relativa y el estrés mecánico. Observaron varios modos de degradación: agrietamiento, rugosidad y decoloración. En general, la severidad de la degradación aumentó con el nivel de humedad relativa y la aplicación de estrés mecánico. El monitoreo periódico de la magnitud de la descarga corona y la velocidad de repetición del pulso permitió un cálculo simplista de la energía necesaria para el inicio de los cambios superficiales. Ellos realizaron una comparación de estos valores calculados con las condiciones esperadas en el campo. También afirmaron que incluso en condiciones de operación severa durante un período de muchos años, la degradación de los materiales de la superficie evaluada debido a la corona de gotas de agua es altamente improbable. Se concluye que las condiciones climáticas generadas por la humedad como la contaminación por NCI y otras sustancias agresivas que se encuentran en el ambiente costero deterioran prematuramente la superficie del material de goma de EPDM y goma de Silicona y se retarda este deterioro con el material de mezcla de EPDM y goma de silicona.

Este artículo lo consideramos como un referente de alta importancia, porque en él se evalúa el efecto corona longitudinal generado por las gotas de agua y cómo éste deteriora la superficie de aisladores no cerámicos con dos anillos corona en los extremos en los tres tipos de materiales como el SiR, EPDM y la combinación de EPDM con SiR ensayados, cabe mencionar que para determinar los campos eléctricos se utilizó el programa informático COULOMBTM, basado en el método de elementos de frontera (BEM). En

nuestro estudio desarrollaremos las ecuaciones que justifican la distribución de campo y utilizaremos el programa informático COMSOL MULTIPHYSICS, los resultados obtenidos se compararán con los resultados teóricos.

✓ **Comber y Zhao** en su artículo [6] desarrollaron un estudio sobre el cálculo del campo eléctrico, distribución del potencial y desarrollo de aisladores no cerámicos para aplicaciones de transmisión de alta tensión. Para este estudio aplicaron un programa de análisis de campo eléctrico bidimensional (2-D) llamado ELECTRO© y tridimensional (3-D) llamado COULOMB© basados en el método de elementos de frontera (BEM) para estudiar el campo y la distribución de potencial a lo largo de los aisladores bajo condiciones limpias y secas; es decir sin contaminación. Se analizó una torre de transmisión trifásica con tensión de 345 kV con aisladores de suspensión no cerámicos (dos cadenas paralelas verticales en I y una cadena en V) con cada fase como un caso individual. Investigaron los efectos de los conductores, las configuraciones de la torre y los dispositivos de clasificación en el campo eléctrico y la distribución del potencial a lo largo de los aisladores. Se concluye que los resultados del cálculo mostraron que los factores investigados tenían diferentes niveles de efectos en la distribución del campo y potencial y que el modelado del aislador solo, sin tener en cuenta el efecto de la estructura de la torre y los conductores, conduce a estimaciones muy imprecisas del campo eléctrico y la distribución del potencial para un aislador instalado en servicio.

Este artículo lo consideramos como un referente de alta importancia, ya que todas estas teorías de este estudio se aplicarán en nuestro trabajo, pero considerando la contaminación en seco y húmedo, se realizará el análisis de los campos eléctricos en 2-D y 3-D, adicionalmente se considerará como influyen los conductores, las estructuras de las torres y la ferretería del anillo corona con la distribución del campo y potencial a lo largo del aislador polimérico contaminado.

✓ **Salam y Stanek** en su artículo [23] desarrollaron un estudio en donde describen un método para optimizar el estrés del campo en aisladores de alta tensión (HV) modificando su perfil, buscando una distribución uniforme del campo tangencial entre la superficie del aislador, para obtener como resultado un aumento de la tensión de inicio para el contorno en la superficie y un ahorro significativo del espacio de la instalación del aislador de HV. El proceso de optimización se logró mediante un algoritmo desarrollado para calcular el componente de campo tangencial y las expresiones matemáticas del perfil a corregir a través de un procedimiento iterativo. El algoritmo se basó en una técnica de simulación de

carga modificada para satisfacer una mejor coincidencia de las condiciones de contorno con las superficies del electrodo y el aislador involucrados en la instalación del aislador de HV. El algoritmo se amplía para estudiar el efecto de la contaminación en la distribución del campo tangencial encontrando que cuanto mayor es la conductividad de la capa de contaminación, mayor es la uniformidad del campo a lo largo de la superficie del aislador. Se concluye que lograron optimizar el estrés del campo con la técnica de simulación de carga convencional y que se modifica para satisfacer mejor la coincidencia de las condiciones del límite con las superficies del electrodo y el aislador involucradas en la instalación investigada y que para los aislantes contaminados, cuanto mayor sea la conductividad de la capa de contaminación, mayor será el grado de uniformidad del campo tangencial sobre la superficie.

Este artículo lo consideramos como un referente de muy alta importancia, ya que efectivamente los autores logran optimizar la distribución del campo eléctrico en aisladores de alta tensión modificando su perfil y teniendo como restricción la componente tangencial del campo eléctrico que es la magnitud que actúa en la superficie del aislador, estas teorías son la base para el desarrollo de nuestro trabajo, las cuales se aplican para modelar óptimamente la distribución del potencial en aisladores no cerámicos de goma de silicona (SiR), considerando los efectos de los conductores, estructuras de las torres y la ferretería del anillo corona.

✓ **Yanque** en su tesis de maestría [29] desarrolló un estudio de la contaminación en cadenas de aisladores de porcelana y de vidrio, aplicó bases teóricas y experimentales necesarias para una exploración mucho más completa en el que obtuvo resultados que nos informan con certeza sobre la existencia de la interdependencia entre los diversos parámetros considerados para el modelado. El autor concluye que la cadena de aisladores en estudio se puede modelar mediante la extensión del análisis de una línea doble capacitiva y determinó la capacitancia parásita a línea utilizando la tensión compleja utilizando el método de las imágenes.

Este artículo lo consideramos como un referente de muy alta importancia, ya que en él se presenta un modelo matemático de cómo determinar la distribución de potencial en aisladores de porcelana y vidrio y estas mismas teorías serán aplicadas a nuestro estudio.

1.2 Bases Teóricas.

Esta parte del trabajo de investigación la considero de vital importancia dentro de la estructura de la tesis, puesto que me permite exponer de una forma clara concisa y contundente los conceptos puntuales que utilizo para el desarrollo del estudio.

1.2.1 Formación de la Capa Contaminante en Aisladores de Polímero de Alta Tensión.

Aquí expongo de forma general el proceso de la formación de la capa contaminante en los aisladores de polímero, asimismo, menciono las sustancias más comunes que se encuentran en eventos reales. Se tiene muy en cuenta que la adherencia del electrolito contaminante en el aislador de polímero es de menor orden cuantitativo que en un aislador de porcelana, esto debido a que el aislador de polímero o aislador compuesto tiene una superficie cuasi uniforme y sus partículas conformantes tienen mucha menor distancia entre sus centros; es decir, la superficie es cuasi impermeable al agua, esta característica la denominamos HIDROFOBICIDAD; esta característica propia de los aislantes de polímero se sustenta en la baja energía superficial que ejerce la superficie sobre el agua. La hidrofobicidad disminuye considerablemente después de haberse producido una descarga y en consecuencia un flameo en la banda seca por acción de una alta concentración de ESDD lo que origina una alta concentración del gradiente anormal de tensión en la capa contaminante al ser sometido a una elevada tensión de operación; por lo tanto, la superficie del aislador pasa de ser impermeable a ser permeable al agua, a esta característica la denominamos HIDROFILICIDAD. Cuando el aislador llega a este estado, aparecen las descargas y flameo con mucha mayor frecuencia, lo que ocasiona la degradación prematura del componente aislante y por consiguiente el fuera de servicio de la línea eléctrica.

1.2.1.1 La Contaminación de Aisladores.

Los aisladores en general están expuestos al mal tiempo y son objeto de acumulación irregular y progresiva de electrolitos contaminantes en toda su superficie, tanto superior, inferior y perimetral (contaminación no uniforme) [29]. En la superficie se depositan materiales solubles e insolubles que forman una capa contaminante de mayor espesor en cuanto mayor sea el tiempo de exposición, la importancia de la concentración de estos compuestos como ácidos y sales varía según la geometría de la superficie del aislante.

De aquí tenemos que, de acuerdo con la ecuación del movimiento de una partícula dentro de un campo eléctrico, su aceleración la podemos cuantificar como:

$$\vec{a} = k_1 q \vec{E} + k_2 \vec{v} \vec{E}^2 + k_3 \vec{v} + \vec{g} \quad \text{I.1}$$

donde:

$\vec{E}$: Intensidad de campo eléctrico

q : Carga de la partícula

$\vec{v}$: Velocidad relativa del aire

$\vec{g}$: Constante gravitacional

De la ecuación (I.1), las fuerzas eléctricas son máximas donde la intensidad del campo eléctrico es máximo y el más concentrado; es decir, *que los equipotenciales del campo no tienen tendencia al paralelismo axial; por lo tanto, el campo es radial y se vuelven numerosos en la superficie protegida*, específicamente en las bandas secas [1], [2], [6], [24] y [29].

Las partículas aerotransportadas que siempre tienen una permitividad dieléctrica más alta, son atraídas por la superficie del aislador, lo que ocasiona una acumulación masiva de contaminante. Por lo tanto, la influencia de la distribución del campo eléctrico sobre su superficie es importante.

Las fuentes de contaminación pueden ser muchas y variadas, pero las que se encuentran con mayor frecuencia en el ambiente son:

1) Contaminación Industrial. - Pueden ser.

- ✓ Polvos de naturaleza de carbón
- ✓ Polvos de naturaleza química (vapores)

2) Viento. – Pueden ser.

- ✓ Componentes salinos húmedos
- ✓ Polvo de naturaleza terrestre

3) Contaminación de Motores de Combustión Interna.

4) Contaminación Agrícola.

La importancia de la contaminación varía de una región a otra, dependiendo de la densidad urbana, centros industriales y su ubicación en la zona costera.

A continuación, se muestra referencialmente un análisis químico de contaminantes en una superficie de 0,2 m² tomada un año después de la instalación de aislantes al exterior [29].

➤ Contaminantes Insolubles (que no son disueltos en el agua)

✓ C (carbono)	18,5 %
✓ SiO ₂ (óxido de silicio)	44 %
✓ Fe (hierro)	4,6 %
✓ AlO ₃ (tríóxido de aluminio)	19 %

➤ Contaminantes Solubles (que se disuelven en agua)

✓ Na ⁺ (sodio)	6,70 mg/lit
✓ K ⁺ (potasio)	0,53 mg/lit
✓ SO ₄ (sulfato)	56,40 mg/lit
✓ Cl (cloro)	10,20 mg/lit

Además, en una zona contaminada también se pueden encontrar otras sales y ácidos químicos volátiles, como SO₂ (dióxido de azufre), SO₃ (tríóxido de azufre o anhídrido sulfúrico) y HCl (cloruro de hidrógeno).

Todas estas sustancias existen en una capa superficial contaminada, las mismas que se dividen en dos grupos [6], [23] y [29], de acuerdo a su comportamiento frente a los niveles de tensión eléctrica en un ambiente húmedo.

➤ Materiales Conductores. - Que da lugar a la conducción iónica en una solución electrolítica, estos son:

✓ ácidos	conductividad alta
✓ sales	conductividad promedio
✓ polvo aislado	agregan iones adicionales

➤ Materiales Inertes. – No son conductores, puesto que:

- ✓ se conservan cuando son viscosos, el agua que puede contener iones, lo que facilita la conducción
- ✓ se uniformiza la distribución en la capa superficial cuando la humedad ambiental no sea del 100 %
- ✓ se mejora la tendencia del agua a moverse a lo largo de la superficie de una zona húmeda a una zona seca (permeación)

1.2.1.2 Humedad y Conductividad de la Superficie Contaminada.

Las sustancias solubles en la superficie contaminada pueden, para diversas condiciones meteorológicas de un lugar en específico, tener cierto grado de humedad, dependiendo del contenido del aire, al disolver sustancias iónicas y agua en forma de,

- ✦ Niebla. – Puede arrastrar por sí misma elementos conductores solubles y ácidos volátiles.
- ✦ Condensación. – Se produce después de enfriar objetos en una atmósfera húmeda.
- ✦ Lluvia. – Bastante beneficioso en corto tiempo, limpia la superficie de los aisladores.

La lluvia es un fenómeno de gran importancia, puesto que da lugar a la formación de pre descargas cuando el valor de la conductividad es un valor crítico correspondiente a una corriente de fuga crítica.

Los indicadores que inciden directamente en el aumento de la conductividad son.

- ✓ Densidad de depósito de sal equivalente (ESDD) en la superficie del aislante
- ✓ Concentración de agua en la superficie contaminada
- ✓ Espesor del electrolito de la superficie contaminada
- ✓ Temperatura de la superficie contaminante

El campo de las altas conductividades superficiales corresponde a las condiciones más extremas, dado que el valor de la tensión soportada por la superficie del aislador contaminado puede caer por debajo de la tensión de operación.

1.2.2 Escalares.

Una cantidad escalar no se modifica por una rotación de los ejes de coordenadas, y se define por un número. Si definimos un escalar en cada punto del espacio, tendríamos un campo de escalares $a(x, y, z)$. Eventualmente, este escalar puede variar con el tiempo en algún punto del espacio, en cuyo caso la función se escribiría como $a(x, y, z, t)$. *Los escalares que utilizamos comúnmente en nuestros cálculos son el potencial escalar $V(x, y, z)$ y la densidad de carga eléctrica $\rho(x, y, z)$.*

Un escalar no siempre está asociado a un único punto del espacio (figura I-1), como la cantidad $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$,

donde:

x, y, z : coordenadas cartesianas del punto P

ξ, η, ζ : coordenadas del punto M

r : distancia del punto P al punto M

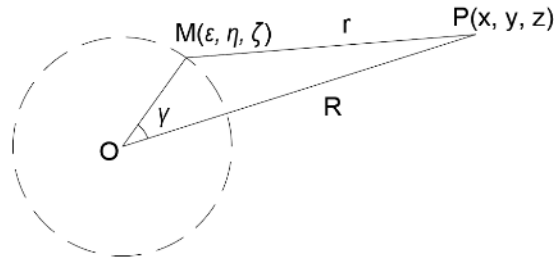


Figura I-1: Esfera de Radio $\overline{OM}$ con un Punto Tangente M y un Punto Exterior P

En muchos casos es más conveniente denotar las coordenadas de un punto por x_1, x_2, x_3 en lugar de x, y, z , esto permite designar estas coordenadas de forma global utilizando la notación $x_u, \forall u = 1, 2, 3$ [10]. Del mismo modo, las tres derivadas parciales pueden escribirse de forma general como:

$$\partial_u \text{ en lugar de } \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

en coordenadas cartesianas se escriben así

$$\partial_u \text{ en lugar de } \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}$$

1.2.3 Vectores.

Un vector se representa mediante una línea recta tal como muestra la figura I-2.

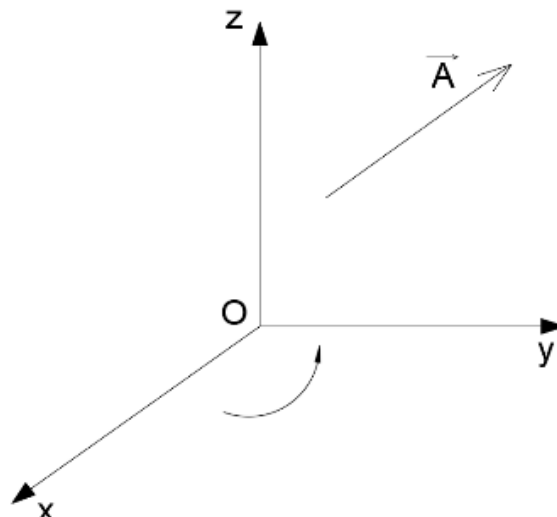


Figura I-2: Representación Gráfica del Vector $\vec{A}$ en el Eje de Coordenadas Cartesianas

Analíticamente, se define por sus tres componentes en coordenadas cartesianas rectangulares. El vector se representa utilizando la notación $\vec{A}$ y las componentes se escriben como A_x, A_y y A_z , o simplemente $A_u, \forall u = x, y, z$ en coordenadas cartesianas.

Las componentes A_u de un vector con los índices en la parte superior e inferior se llaman componentes *covariantes* y *contravariantes* respectivamente. Es decir, con los índices en la parte superior A^u se llaman covariantes y en la parte inferior A_u se llaman contravariantes [10].

Solamente en el sistema de ejes cartesianos se cumple que $A^u = A_u$; es decir, las componentes covariantes son iguales a las componentes contravariantes.

1.2.4 Campos Vectoriales.

En lugar de un vector aplicado a un único punto del espacio, a menudo tenemos que considerar un número infinito de vectores. Si existe un vector definido en cada punto del espacio, nos encontramos ante un campo vectorial. Para que sea posible definir un campo de este tipo necesitamos dar tres funciones A_u de las variables x, y, z y posiblemente del tiempo t [10]. Entre los muchos campos vectoriales que conocemos, podemos citar los siguientes:

$\vec{B}^*, \vec{E}$: inducción de campo magnético y campo eléctrico

$\vec{E}^*, \vec{B}$: inducción de campo eléctrico y campo magnético

$\vec{j}, \vec{j}^*$: densidad de corriente eléctrica y magnética

Otro campo vectorial que necesitaremos a menudo viene definido por:

$$r_u = x_u - \xi_u$$

donde r_u es el vector que une el punto ξ_u con el punto x_u . También se puede escribir como

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{\xi}$$

1.2.5 Gradiente de un Campo Escalar.

Es un operador fundamental del cálculo vectorial que nos permite analizar y comprender el comportamiento de los campos escalares en el espacio tridimensional, este operador es aplicable a funciones escalares que tienen un solo valor en cada punto del espacio. *Mide como cambia esta función escalar en el espacio en diferentes direcciones proporcionándonos un vector que apunta hacia la dirección de mayor crecimiento y su magnitud de este vector nos indica que tan rápido está cambiando la función en esa dirección.*

Sea $\Phi(x, y, z)$ una función escalar en coordenadas cartesianas. Las tres derivadas parciales forman un vector $\vec{A}_u$ que por definición es el gradiente de la función Φ [10], y se escribe como:

$$A_u = \partial_u \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi \quad \text{o} \quad \vec{A} = \vec{\nabla} \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \Phi \quad \text{I.2}$$

la $\vec{\partial}_u \Phi$ es un vector, puesto que, los símbolos de derivación parcial ∂_u se transforman como los componentes de un vector en una rotación de los ejes. Se muestran dos ejemplos de gradientes:

$$\partial_u r = \frac{r_u}{r} \quad \text{o} \quad \vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{I.3}$$

$$\partial_u \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{r_u}{r^3} \quad \text{o} \quad \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{I.4}$$

En estas dos ecuaciones las derivadas se toman con respecto a las variables x_u . Para las funciones de r también podemos tomar las derivadas con respecto a las variables ξ_u ; denotando las gradientes correspondientes por *grad*, tenemos:

$$\vec{\nabla} f(r) = -\vec{\nabla}' f(r)$$

A menudo utilizamos esta última relación.

Los símbolos de derivación parcial se representan a menudo mediante los vectores simbólicos $\vec{\partial}$ o $\vec{\nabla}$. Sin embargo, no debemos olvidar que se trata de símbolos de derivación que, cambian entre sí, pero no cambian en lo absoluto con una función de las coordenadas. Si, por ejemplo, necesitamos tomar el gradiente de un producto de dos escalares a y b , se escribe como:

$$\partial_u(ab) = a\partial_u b + b\partial_u a$$

La derivada de una función $f(x, y, z)$ en una dirección con vector unitario $\vec{n}$, se determina por la expresión:

$$n_u \partial_u f = (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) f = \frac{df}{dn} \quad \text{I.5}$$

A menudo nos encontraremos con expresiones de este tipo con el vector unitario de la normal positiva a una superficie. El operador $n_u \partial_u = \frac{d}{dn}$ puede aplicarse a cualquier tensor (escalar, vectorial, etc.) [10].

1.2.6 Divergencia de un Campo Vectorial.

Es otro de los operadores fundamentales del cálculo vectorial que nos permite analizar y comprender el comportamiento de los campos vectoriales en el espacio tridimensional, este operador es aplicable a campos vectoriales donde cada punto del espacio tiene asociado un vector. *Mide si el campo se expande o contrae en un punto determinado. Un valor positivo indica que el campo diverge (se expande) desde ese punto como si fuera una fuente, un valor negativo indica que el campo converge (se contrae) hacia el punto como un sumidero y un valor cero indica que no hay expansión ni contracción neta.*

La divergencia de un vector $\vec{A}$ es un escalar definido por la expresión [10]:

$$\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

o también lo podemos escribir como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_u A^u = (\vec{\partial} \cdot \vec{A}) \quad \text{I.6}$$

La divergencia puede considerarse como un producto escalar simbólico, y no se modifica por una rotación de los ejes

$$\partial_u r^u = \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \quad \text{I.7}$$

1.2.7 Rotacional de un Campo Vectorial.

Es otro de los operadores fundamentales del cálculo vectorial que nos permite analizar y comprender el comportamiento de los campos vectoriales en el espacio tridimensional, este operador es aplicable a campos vectoriales y *mide la tendencia del campo a rotar alrededor de un punto el cual produce un vector perpendicular al plano de rotación cuya magnitud indica la intensidad de la rotación. Si el rotacional es cero, el campo no presenta rotación en ese punto y si es diferente de cero existe una componente rotacional.*

El rotacional de un vector $\vec{A}$ es un vector $\vec{B}$ definido por [10].

$$B_{uv} = [\partial_u A^v - \partial_v A^u]; \text{ donde } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ son una permutación circular de } 1, 2, 3 \quad \text{I.8}$$

La ecuación (I.8) podemos escribirla como.

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} = \vec{\partial} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{I.9}$$

Por lo tanto, el rotacional puede verse como un producto vectorial simbólico del vector $\vec{\nabla}$ y el vector $\vec{A}$. En algunos países europeos el rotacional se escribe como $\overrightarrow{curl}$ en lugar de $\overrightarrow{rot}$.

1.2.8 Distribución de Potencial a lo Largo del Aislador de Polímero.

1.2.8.1 Distribución de Potencial - Método Expresión Simplificada.

1.2.8.1.1 Potencial Soportado por Cada Aislador.

Sabemos que el origen de las descargas sometido a la tensión de servicio en la superficie contaminada, está dado por el aumento del gradiente de tensión en una determinada zona, y cada unidad aislante está fabricado para soportar sin ningún tipo de inconvenientes restricciones eléctricas correspondientes a un valor nominal de la tensión, a este nivel de tensión nominal, en el caso de una superficie contaminada con una distribución uniforme se estima que tiene un valor de 0.5 kV/cm [29] y [18], por otro lado, [18] sostiene que para la formación de una descarga se requiere como mínimo un campo eléctrico de 30 kV/cm para romper la rigidez dieléctrica del aire. Este valor se reduce significativamente al tener superficies contaminadas que pueden ser secas o húmedas, y por consiguiente en la interfaz de los herrajes metálicos de los terminales con el material aislante se producen las descargas corona [3].

En el anexo A, utilizando el cálculo diferencial, se presenta la deducción de la expresión que nos permite determinar el valor del potencial U_x , en cualquier elemento del aislador de n cobertizos y capacitancias de fuga de valor constante.

$$U_x = U_n \left\{ \frac{C_l}{C_t + C_l} - \frac{C_l \sinh \left[\sqrt{\frac{C_t + C_l}{C}} x \right] - C_t \sinh \left[\sqrt{\frac{C_t + C_l}{C}} (L - x) \right]}{(C_t + C_l) \sinh \left(\sqrt{\frac{C_t + C_l}{C}} L \right)} \right\} \quad \text{I.10}$$

donde:

U_x : Tensión en la ubicación del cobertizo x a lo largo del aislador polimérico, en kV

U_n : Tensión nominal aplicada entre electrodos del aislador, en kV

C_l : Capacitancia parásita de dispersión a línea, en pF

C_t : Capacitancia parásita de dispersión a tierra, en pF

C : Capacitancia propia, en pF

x : Posición del cobertizo a evaluar, en m

L : Longitud o número de cobertizos a lo largo del aislador, en m

Esta ecuación, nos proporciona el valor de la tensión desde el electrodo fuente hasta la ubicación x del aislador, lo que permite calcular el potencial aproximado a lo largo del aislador al mostrar que la distribución es desigual y no lineal.

También se ha podido determinar la corriente de fuga i_x a través de cada cobertizo en la unidad aislante (ver anexo B). Además, conocemos que la corriente que fluye por el cobertizo que se encuentra más próximo al lado del electrodo fuente es mayor que en el resto de cobertizos que se alejan del electrodo fuente.

$$I_x = I_t \frac{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{C_t+C_l}{c}\right)x}\right]}{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{C_t+C_l}{c}\right)L}\right]} + I_n \frac{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{C_t+C_l}{c}\right)(L-x)}\right]}{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{C_t+C_l}{c}\right)L}\right]} \quad \text{I.11}$$

donde:

I_x : Corriente en la ubicación del cobertizo x a lo largo del aislador polimérico, en mA

$I_t = I_f$: Corriente de fuga medida o estimada, en mA

I_n : Suma de corrientes laterales y corriente de fuga I_t o corriente nominal del sistema, en mA

Esta ecuación, nos proporciona el valor de la corriente de fuga que fluye a través de cada cobertizo desde el electrodo fuente hasta la ubicación x del aislador, lo que permite calcular la corriente aproximada a lo largo del aislador.

1.2.8.1.2 Capacitancias Parásitas en Aisladores de Polímero.

Las capacitancias parásitas se definen como el resultado de la interacción de carga entre electrodos energizados a través del dieléctrico, pueden ser intrínsecas (fijas) propias de los aislamientos sólidos según su forma o líquidos según el contenedor y (variables) en aislamientos gaseosos los cuales conforman redes y según su ubicación pueden ser:

- Capacitancias parásitas (C_l) entre partes de: Potencial a Potencial (son pequeñas)
- Capacitancias parásitas (C_t) entre partes de: Potencial a Tierra o Masa (son grandes)

Su presencia es inevitable e inconveniente por sus consecuencias generales que son [29], [30], [31]:

- Repartición desigual de potencial en las partes energizadas
- Consumo de Energía Reactiva Capacitiva como parámetro repartido (conductancia y perditancia en el dieléctrico)

1.2.8.1.2.1 Origen de las Capacitancias Parásitas.

Las capacitancias parásitas de las brechas de aire (a tierra) y espacios del dieléctrico (a línea) entre electrodos, se cargan con la corriente (de pérdidas) que circula desde el conductor a tierra, a través de la resistencia de los dieléctricos; luego la conductancia

lateral o perditancia, no involucra la corriente de fuga superficial [29], [30], [31], tal como se detalla en la figura (I.3).

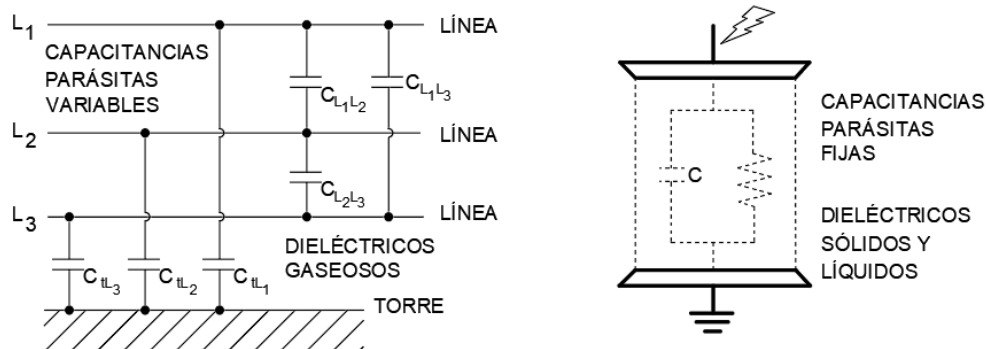


Figura I-3. Origen de las Capacitancias Parásitas

1.2.8.1.2.2 Funcionamiento de las Capacitancias Parásitas.

Están presentes en todo tipo de barras y líneas de conducción eléctrica, tanto entre conductores como entre conductores y masas, objetos, suelo o tierra y en los distintos componentes del propio aislamiento mixto, participan decisivamente en las perturbaciones y procesos de régimen permanente, transitorios y fallas [31]. El funcionamiento de las capacitancias parásitas provoca diferentes comportamientos dependiendo el tipo de corriente, tal como se detalla a continuación:

- En corriente continua, el campo eléctrico siendo unidireccional, provee la carga de las capacitancias parásitas, sólo en el instante de la energización, ello no inhibe su permanente participación.
- En corriente alterna, el campo eléctrico es oscilatorio y debe proveer en forma permanente la carga que insumen las capacitancias parásitas, inclusive estando las líneas eléctricas en vacío, dicha energía reactiva asegura el enlace de cambio de polaridad (que es lento respecto a la propagación).

1.2.8.1.2.3 Consecuencias Macro de las Capacitancias Parásitas.

Los desbalances reactivos capacitivos bruscos en los sistemas de Alta Tensión, son originadas por las perturbaciones o fallas que, mediante anulación de capacitancias repartidas o inducción de sobretensiones, provocan la recomposición temporal o transitoria, de las interacciones capacitivas [31], tal como se detalla a continuación:

- Fallas a tierra anulan la capacitancia de la fase fallada, se incrementan las tensiones en las fases sanas.

- Los impulsos de rayo o maniobra crean sobretensiones a través del coeficiente de acoplamiento (K).

Por otra parte, para los modelados, la presencia de capacitancia en los conductores lineales implica que:

- La distribución de carga eléctrica en la superficie del conductor, sea considerada uniforme
- Las capacitancias de secciones alimentadoras del sistema sean agrupables en las barras de cabecera.

1.2.8.1.2.4 Evaluación de las Capacitancias Parásitas.

La corriente de carga de la capacitancia (I_C) de equipos, de componentes y la energía (W) que estos insumen bajo tensión alterna (U), pueden ser calculadas con las siguientes expresiones [31]:

$$I_C = 2\pi fCU = UX_C \quad \text{I.12}$$

$$W = \frac{1}{2} U^2 C \quad \text{I.13}$$

En Aisladores de Polímero. - Siendo ensambladas o del tipo de vara continua, con dieléctrico de material rígido o flexible, las capacitancias se reparten en pequeños valores, pero del mismo modo inciden deformando la repartición del potencial, siendo un aislante externo, se les puede balancear [31], tal como se detalla en la figura A-2.

1.2.8.1.2.5 Determinación de la Expresión C_l .

De la figura B-3, el sistema representa un conductor cilíndrico hueco que rodea los otros 2 conductores y sus respectivas imágenes.

Aplicando el potencial complejo, método de las imágenes y comparando la expresión obtenida de un conductor cilíndrico hueco que rodea a 4 conductores, obtenemos C_l

$$C_l = \pi \varepsilon_0 \frac{l}{\ln \left[\frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2} * \frac{2a}{c} \right]} \quad \text{I.14}$$

donde:

ε_0 : Permitividad del espacio libre cuyo valor es 8.854×10^{-12} .

l : Longitud libre del conductor auxiliar entre cobertizos, en metros

R : Radio del cilindro que encierra a ambos conductores; o dicho de otra forma, distancia del conductor a tierra que se puede determinar como $R = \sqrt{ab}$, en metros.

$2a$: Distancia entre la línea conductora y el extremo de la posición que ocupa el cobertizo n , en metros

c : Radio cilíndrico promedio del núcleo del aislador polimérico, en metros

1.2.8.1.2.6 Determinación de la Expresión C_t .

De la figura B-1, el sistema representa un conductor esférico 1 de radio a y potencial V_1 concéntrico a un conductor 2 de radio b y potencial V_2 .

Aplicando la ecuación de Laplace que se reduce a una constante en el conductor 1, calculando la densidad superficial, realizando algunos arreglos algebraicos y realizando la comparación con ecuaciones ya deducidas, obtenemos C_t

$$C_t = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right) \quad \text{I.15}$$

donde:

ϵ_0 : Permitividad del espacio libre cuyo valor es 8.854×10^{-12} .

b : Distancia a tierra, en metros.

a : Radio esférico promedio del conductor auxiliar entre cobertizos, en metros.

1.2.8.2 Distribución de Potencial - Método Gráfico.

Para determinar la repartición de potencial mediante el método gráfico representado en la figura A-5, se procede de la siguiente manera [25]:

✓ Tomamos una distancia horizontal r_1b , tal que, $ba = r_1q_1 = C$, y $q_1p_1 = C_t$; por lo tanto, $p_1r_1 = p_1q_1 + q_1r_1 = C_t + C = C_1$.

✓ Trazamos las diagonales del cuadrilátero formado por los vértices a, b, r_1, p_1 , el punto de intersección de las diagonales es el punto q_2 . Desde el punto q_2 se traza una perpendicular al segmento r_1b , obteniendo el punto r_2 . Trasladamos la recta del segmento $p_1q_1 = C_t$ hasta el punto r_2 y luego trazamos la perpendicular al segmento r_1p_1 obteniendo el punto p_2 .

✓ Entonces, $q_2r_2 = \frac{C \cdot C_1}{C_1 + C}$ y $p_2q_2 = C_t$; por lo tanto:

$$p_2r_2 = p_2'r_1 = p_2q_2 + q_2r_2 = C_t + \frac{C \cdot C_1}{C_1 + C} = C_2$$

✓ Similarmente:

$$p_3 r_3 = p_3' r_1 = p_3 q_3 + q_3 r_3 = C_t + \frac{C * C_2}{C_2 + C} = C_3$$

En general

$$p_n r_n = p_n' r_1 = p_n q_n + q_n r_n = C_t + \frac{C * C_{n-1}}{C_{n-1} + C} = C_n$$

✓ Ahora, tomamos el triángulo de vértices r_1, a, b y con la imagen de este triángulo formamos el triángulo de vértices r_1, b, S_n ; donde $bS_n = E_n$. Desde el vértice r_1 del segmento $r_1 S_n$ se traza la paralela al punto r_n formando el segmento $r_n S_{n-1}$. Se traza desde el vértice r_1 el segmento $r_1 S_{n-1}$, para trazar la paralela al punto r_{n-1} formando el segmento $r_{n-1} S_{n-2}$. Este proceso continúa hasta llegar a formar el segmento $r_2 S_1$. La figura A-5 representa gráficamente esta explicación detallada (los segmentos paralelos se identifican con flechas), entonces, se cumple que:

$$\frac{bS_{n-1}}{bS_n} = \frac{br_n}{br_1} = \frac{q_n r_n}{q_{n-1} r_{n-1}} = \frac{\frac{C_{n-1} C}{C_{n-1} + C}}{C_{n-1}} = \frac{C}{C_{n-1} + C} \Rightarrow bS_{n-1} = \frac{bS_n C}{C_{n-1} + C} = \frac{E_n}{f_{n-1} + 1} = E_{n-1}$$

y

$$S_n S_{n-1} = bS_n - bS_{n-1} = E_n - E_{n-1} = e_{(n)}$$

1.2.8.3 Distribución de Potencial - Método Analítico.

Las ecuaciones que se obtienen analíticamente de la figura A-5 que sirven como justificación para la distribución de potencial de la forma gráfica, son [25]:

$$\begin{aligned} C_1 &= C + C_t & \text{Obtenemos: } f_1 &= \frac{C_1}{C} \\ C_2 &= \frac{C_1 C}{C_1 + C} + C_t & \text{Obtenemos: } f_2 &= \frac{C_2}{C} \\ &\vdots & & \vdots \\ C_m &= \frac{C_{m-1} * C}{C_{m-1} + C} + C_t & \text{Obtenemos: } f_m &= \frac{C_m}{C} \end{aligned} \tag{I.16}$$

$$\begin{aligned} &\vdots & & \vdots \\ C_{n-1} &= \frac{C_{n-2} * C}{C_{n-2} + C} + C_t & \text{Obtenemos: } f_{n-1} &= \frac{C_{n-1}}{C} \end{aligned} \tag{I.17}$$

Con la ecuación (I.17) se determina la capacitancia equivalente y el factor adimensional en el cobertizo $(n - 1)$

$$E_{n-1} = E_n \left(\frac{1}{f_{n-1} + 1} \right) \quad \text{Obtenemos: } E_{n-1} \quad \text{I.18}$$

$$E_{n-2} = E_{n-1} \left(\frac{1}{f_{n-2} + 1} \right) = E_n \left(\frac{1}{f_{n-1} + 1} \right) \left(\frac{1}{f_{n-2} + 1} \right) \quad \text{I.19}$$

Con la ecuación (I.18) e (I.19) se determina el potencial de derivación a tierra en el enlace m del cobertizo $(n - 1)$ y $(n - 2)$

$$e_{(n)} = E_n - E_{n-1} = E_n - E_n \left(\frac{1}{f_{n-1} + 1} \right) = E_n \left(\frac{f_{n-1}}{f_{n-1} + 1} \right) \quad \text{I.20}$$

Con la ecuación (A.27) se determina el potencial soportado por el cobertizo en el enlace n .

La eficiencia o el desempeño del aislador lo determinamos con la relación entre el potencial derivado de cada enlace y tierra y el potencial que soporta cada cobertizo multiplicado por el número de cobertizos.

$$eficiencia \text{ del aislador} = \frac{E_n}{ne_{(n)}} = \frac{E_n}{nE_n \left(\frac{f_{n-1}}{f_{n-1} + 1} \right)} = \frac{(f_{n-1} + 1)}{nf_{n-1}} \quad \text{I.21}$$

Ahora, también es posible determinar el potencial del enlace m y el que atraviesa la unidad de cobertizo (m) :

$$E_m = E_{m+1} \left(\frac{1}{f_m + 1} \right) = E_n \left[\left(\frac{1}{f_{n-1} + 1} \right) \left(\frac{1}{f_{n-2} + 1} \right) \cdots \left(\frac{1}{f_m + 1} \right) \right] \quad \text{I.22}$$

Lo mismo se puede realizar con el potencial soportado por el cobertizo m .

$$e_{(m)} = E_m - E_{m-1} = E_m - E_m \left(\frac{1}{f_{m-1} + 1} \right) = E_m \left(\frac{f_{m-1}}{f_{m-1} + 1} \right) \quad \text{I.23}$$

$$e_{(m)} = E_n \left[\left(\frac{1}{f_{n-1} + 1} \right) \left(\frac{1}{f_{n-2} + 1} \right) \cdots \left(\frac{1}{f_m + 1} \right) \right] \left(\frac{f_{m-1}}{f_{m-1} + 1} \right)$$

1.2.9 Las Descargas en la Superficie Contaminada de los Aisladores.

1.2.9.1 El Arco Eléctrico en el Aire.

Un arco eléctrico se define como una descarga autónoma por emisión termoiónica de un cátodo incandescente a presión atmosférica que, además de tener una tensión baja, es capaz de soportar grandes corrientes; su característica principal es que muestra una pendiente negativa, a menos que la corriente implicada sea del orden de miles de amperios; en el

anexo C, se trata detalladamente las características cualitativas y la estabilidad de la descarga que arde en el aire [3].

La característica votio-amperio en el plano R^2 a longitud constante puede obtenerse variando la tensión o la resistencia; tomado de Ayrton [3] después de haber ensayado electrodos de carbono en el aire, se concluye que la curva para cada longitud x se compone de 2 partes.

a) Parte Hiperbólica. – Correspondiente a los arcos silenciosos, cuya ecuación empírica viene dada por.

$$V_d = a + bx + \frac{c + dx}{i} \quad \text{I.24}$$

donde:

V_d : tensión de arco o tensión de descarga, en V.

a, b, c, d : constantes experimentales de Ayrton (ver tabla I-1).

x : longitud de la separación de arco, en mm.

i : corriente de arco, en Amp.

Verificado y adaptado para otros materiales y tomado de Nottingham [3], se propuso la expresión simplificada de la forma.

$$V_d = V_E + \frac{xA}{i^n} \quad \text{I.25}$$

donde:

$n = 2,62 * 10^{-4} * T$: Función lineal constante que depende de la temperatura absoluta (T) de ebullición del ánodo y la naturaleza del gas ambiental [3].

A : Constantes que depende de la correlación entre la corriente de arco ($i_{\min}$) y la expresión que contiene ($x_{\max}$) y ($V_{\min}$), en cm.

V_E : Constante que tiene en cuenta la caída de tensión a través de los electrodos, en V.

Tabla I-1: Constantes de la Ecuación de Ayrton para Arcos a Presión Atmosférica

Electrodos	Gas	a	b	c	d
Carbono.....	Aire	38.90	2.00	16.60	10.50
	Argón	24.80	0.90	10.20	0.00
	Nitrógeno	48.20	2.60	23.30	5.30
	Dióxido de Carbono	44.50	1.70	18.20	8.70
Plata.....	Aire	19.00	11.40	14.20	3.60
Cobre.....	Aire	15.20	10.70	21.40	3.00
Hierro.....	Aire	15.00	9.40	15.70	2.50

b) Parte de la Característica del Arco. – Correspondiente a los arcos silbantes.

1.2.9.2 Caída de Tensión en el Arco Eléctrico.

La distribución de la tensión en una descarga de arco puede representarse esquemáticamente en tres regiones [3], [29].

➤ **Caída de Tensión Catódica.** – Caracterizada por la existencia de una carga espacial muy grande de iones positivos y por su magnitud de la corriente catódica, que es prácticamente independiente de la corriente de arco.

➤ **Caída de Tensión de la Columna Positiva.** – El gradiente de tensión longitudinal es uniforme; y su magnitud depende de la presión del gas y de la corriente de arco que a su vez esta depende de la magnitud de la longitud de la columna. Se trata de una región en que la concentración del plasma es elevada y la conductividad es similar a la de los metales.

➤ **Caída de Tensión Anódica.** – La caída de tensión para los electrodos metálicos es menor que la del cátodo, sin embargo, para el carbono llega a ser igual de grande. Es una región de alta concentración de cargas espaciales electrónicas (negativas) que son atraídas a su proximidad por el ánodo, los iones positivos producidos por colisión con los electrones se desplazan hacia el cátodo.

1.2.9.3 El Mecanismo de Flameo de los Aisladores Contaminados.

Se sabe que la capa contaminante acumulada irregularmente en la superficie de un aislador sometido a tensión eléctrica está compuesta por materiales solubles, que en presencia de una atmósfera húmeda permanente forman electrolitos que pueden dar lugar a una conducción iónica y, por lo tanto, a un aumento en el flujo de la corriente de fuga i_f a través de esta capa. *En algunos casos, este aumento de i_f calienta la capa húmeda, cuya temperatura aumenta de forma desigual, produciéndose así la vaporización en las zonas donde la conductividad de la capa es mayor, es entonces cuando la contribución de la humedad ambiental juega un papel importante; si es predominante y se mantiene la corriente de fuga, no habrá secado; en cambio, si no se compensa la vaporización, es inminente la formación de una zona seca, que hace que el gradiente de tensión superficial medio sea aún menos uniforme.*

Una vez en presencia de una zona seca con una resistencia relativamente elevada al paso de i_f , se produce un aumento exagerado del gradiente de potencial en sus bordes, que

puede alcanzar el valor del gradiente disruptivo local, provocando la ionización por choques en la zona comprometida, lo que puede conducir al inicio de un pequeño arco cuasi estable en el aire [28], [32]. A partir de este punto, el arco se mantendrá y se desarrollará por la propagación de sus puntos de unión gracias al calor liberado que provoca la expansión de la zona seca al tiempo que se incrementa el arco; la evolución de este arco se produce de forma aleatoria hasta que esté completamente “punteado”; es decir, hasta que exista en todos los puntos a lo largo del aislador, es decir, punteado; la velocidad de alargamiento sería tanto mayor cuanto menor sea la cantidad de agua contenida por unidad de superficie.

Los parámetros considerados para su análisis matemático se han deducido en el anexo D.

1.2.9.4 Aparición de Descargas en los Aisladores.

Si se mantiene en todo momento las condiciones de uniformidad de contaminación y humidificación, el gradiente de tensión puede permanecer constante a lo largo de un generador (figura D-2) independientemente del valor de la corriente de fuga, lo que significa que no produciría una corriente de derivación [29], pero en realidad esto no es así; dado que el valor medio del gradiente de tensión en la superficie del aislador es aproximadamente inferior a 0.5 kV/cm antes de que se produzcan la descarga, lo que no significa que estén distribuidos uniformemente; la posterior aparición de zonas secas alrededor de la varilla provoca las mayores tensiones eléctricas, y casi toda la tensión aplicada a una unidad aislante se puede considerar distribuido entre estas zonas con una disminución en el flujo de corriente de fuga superficial.

En ausencia de descarga, este gradiente de tensión se mantendrá justo por debajo del gradiente disruptivo del aire de 30 kV/cm. Pero una vez que los fenómenos de descargas parciales seguida de la ionización del aire por choque (pre-descargas) comienzan a repetirse por debajo de la superficie de los cobertizos debido a la tensión excesiva en esa región, tenemos la aparición simultánea de varias descargas en paralelo, por ruptura del espacio entre cobertizos, porque cada descarga aumenta la tensión en los otros intervalos del aire circundante [29]. La multiplicación del número de arcos reduce así la probabilidad de que se alinien en la dirección del campo, y esto es lo que dificulta la aparición del bypass que supone la existencia de un número reducido de descargas o solo una [25]. A continuación, explico gráficamente el proceso del mecanismo de descargas aplicado al aislante en estudio.

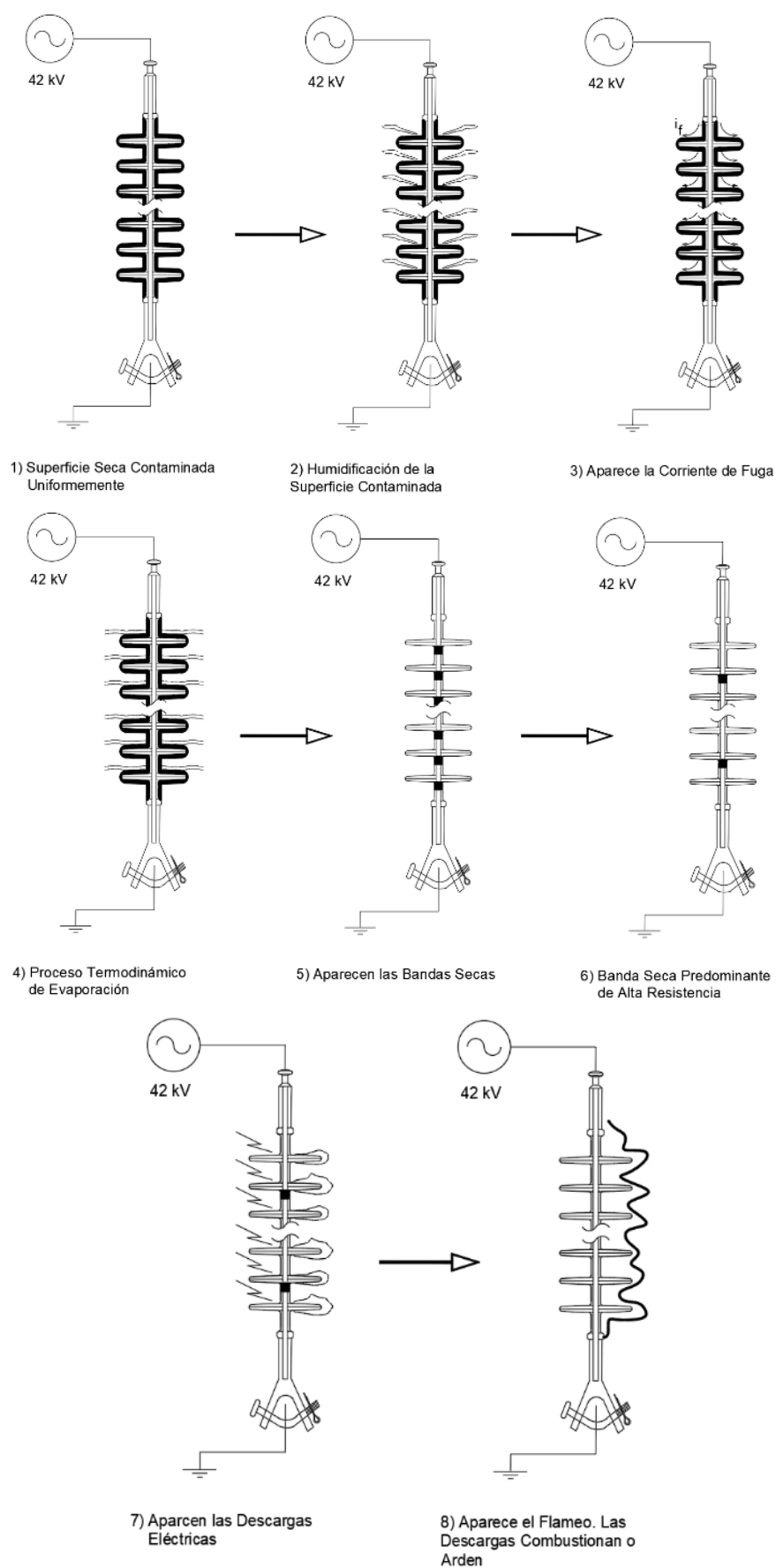


Figura I-4. Mecanismo de Flameo de los Aisladores Contaminados

1.2.10 Fundamentos del Campo Eléctrico.

En la naturaleza o en nuestro mundo real existen dos fuerzas que se producen sin contacto y que actúan a distancia, estas fuerzas son: La fuerza gravitacional y la fuerza eléctrica; la fuerza gravitacional es predominante a grandes distancias, mientras que la fuerza eléctrica lo hace a distancias más cortas. La causa fundamental de las fuerzas eléctricas es la *carga eléctrica*; cuyo efecto se extiende por todo el espacio circundante, pero disminuye rápidamente con la distancia. *Por lo tanto, podemos definir al campo eléctrico como una región del espacio en la que se produce una fuerza eléctrica por la existencialidad de cargas eléctricas*, cuya presencia se detecta observando la fuerza sobre un cuerpo cargado ubicado dentro de la región del campo. La intensidad del campo eléctrico se obtiene dividiendo la fuerza eléctrica entre la magnitud de la carga de prueba.

Para poder obtener un parámetro de campo eléctrico independiente de la carga del cuerpo de prueba, introducimos el concepto de potencial eléctrico en su análisis, de modo que la intensidad del campo eléctrico, que dicho de paso es una magnitud vectorial y se calcula como la derivada parcial del potencial eléctrico o dicho de otra forma es el gradiente del potencial eléctrico que es una magnitud escalar. Para un material dado, la intensidad del campo eléctrico depende de la densidad de flujo eléctrico, que a su vez depende de la cantidad de cargas fuente presente en la región del campo. Para el análisis del campo eléctrico se consideran varios tipos de configuraciones de carga, como cargas puntuales, lineales, de anillo y de disco [8], [27].

1.2.10.1 Carga Eléctrica.

Variable causante de la interacción a corta distancia de la fuerza eléctrica. Sabemos que la carga eléctrica es una propiedad intrínseca de la materia transportada por partículas elementales; si nos basamos en la Teoría Atómica de Einstein, normalmente las cargas eléctricas son de dos tipos: Positivas y Negativas. Al comprender claramente la estructura atómica, se descubrió que las cargas positivas (principalmente protones) se ubican en el centro del átomo; es decir, en el núcleo y las cargas negativas (electrones) giran alrededor del núcleo.

La evidencia experimental muestra que todos los electrones tienen la misma cantidad de carga negativa, como carga positiva de los protones en un sistema cerrado (Ley de la Conservación de la Carga). En consecuencia, se deduce que la carga existe en unidades cuantitativas iguales a la carga de un electrón o protón, que es una constante física

fundamental. Por lo tanto, la carga eléctrica de cualquier cuerpo se presenta en múltiplos enteros de la carga elemental e , excepto para las partículas llamadas *quarks*, cuyas cargas son múltiplos enteros de $e/3$. La unidad de la carga eléctrica en el SI es el Coulomb (C). Un Coulomb es igual a $6,241509324 \times 10^{18}$ unidades naturales de carga eléctrica, como la carga de electrones o protones individuales. Por el contrario, un electrón tiene una carga negativa de $1,60217657 \times 10^{-19} \text{ C}$ y un protón tiene una carga positiva de $1,60217657 \times 10^{-19} \text{ C}$. Otras partículas, por ejemplo, los positrones también tienen cargas que son múltiplos de la magnitud de la carga electrónica [8], [10], [27].

La carga eléctrica también se conserva; es decir, en cualquier sistema aislado o en cualquier reacción química o nuclear, la carga eléctrica neta es constante. La suma algebraica de las cargas elementales permanece constante. Esto quiere decir, que, si una cantidad dada de carga negativa aparece en una parte de un sistema aislado, siempre va acompañada de la aparición de una cantidad igual a la carga positiva en otra parte del sistema. En la teoría atómica moderna se ha demostrado que, aunque las partículas fundamentales de la materia aparecen, desaparecen y se transforman de forma continua y espontánea, siempre obedecen a la restricción de que la cantidad neta de carga se conserva; justificación *del principio de la conservación de la carga eléctrica*.

1.2.10.2 Líneas de Campo Eléctrico.

Afirmamos que, si una carga está presente en el espacio, entonces otra carga experimentará una fuerza al ser llevada a ese espacio. En otras palabras, el efecto de la primera carga, que también puede ser llamada carga fuente se extiende al espacio que la rodea. Esto se conoce como *campo eléctrico* causado por la carga fuente. Si no hay carga en el espacio, entonces no habrá campo eléctrico. Si la carga fuente es de polaridad positiva y la carga de prueba es de polaridad negativa, entonces la carga de prueba experimentará una fuerza de atracción. Por otro lado, si la carga de prueba también es de polaridad positiva, entonces experimentará una fuerza de repulsión. Si la carga de prueba es libre de moverse, entonces se moverá de acuerdo con la dirección de la fuerza. Los lugares geométricos del movimiento de la carga de prueba dentro del campo eléctrico se conocen como *líneas eléctricas de fuerza o líneas de campo eléctrico* [8], [11], [27].

Según el sistema de unidades SI, 1 culomb de carga fuente da lugar a 1 culomb de líneas de campo

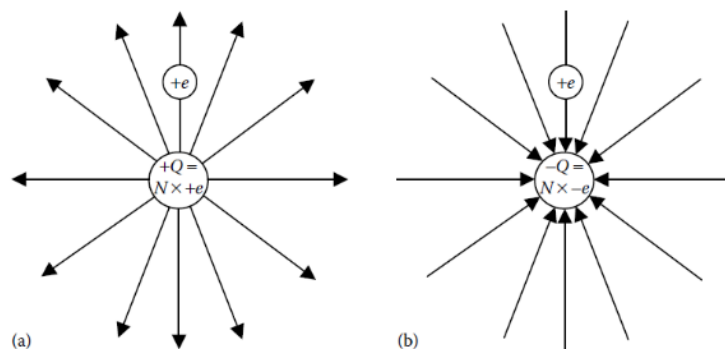


Figura I-5. Líneas de Campo Eléctrico Debido a (a) Una Carga Fuente Positiva, (b) Una Carga Fuente Negativa

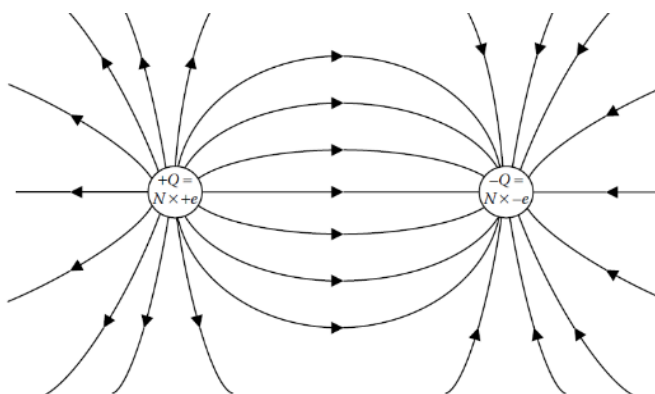


Figura I-6. Líneas de Campo Eléctrico Debido a Un Par de Cargas. Positiva y Negativa

1.2.10.3 Ley de Coulomb.

Ley que describe la interacción electrostática entre partículas con carga eléctrica, la unidad de medida de esta fuerza, como todas las fuerzas, es el Newton. Al ser una fuerza, la intensidad de la interacción electrostática es una cantidad vectorial que tiene magnitud, dirección y sentido [8], [27].

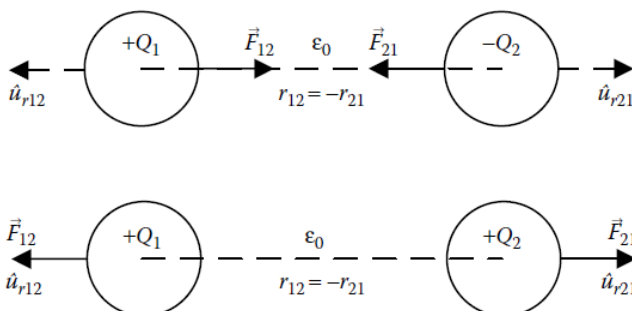


Figura I-7. Fuerzas Electrostáticas de Interacción Entre Dos Cargas Puntuales

Es preciso indicar que, se deben cumplir dos condiciones para la validez de la Ley de Coulomb.

1. Las cargas individuales deben de ser puntuales

2. Las cargas deben ser estacionarias entre sí

Matemáticamente la fuerza se puede determinar como:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{\pm Q_2 * Q_1}{|\vec{r}_{21}|^2} \vec{u}_{r21} \quad \text{y} \quad \vec{F}_{12} = k \frac{Q_2 * \pm Q_1}{|\vec{r}_{12}|^2} \vec{u}_{r12} \quad \text{de modo que} \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \text{I.26}$$

donde

$\vec{u}_{r21} = \vec{r}_{21}/|\vec{r}_{21}|$ y $\vec{u}_{r12} = \vec{r}_{12}/|\vec{r}_{12}|$ son los vectores unitarios

$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ son los vectores de distancia donde $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son los vectores de posición de la ubicación de las cargas puntuales Q_1 y Q_2 , respectivamente, con respecto a un origen definido

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,987552617 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \approx 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \text{ constante de Coulomb}$$

ϵ_0 : permitividad del espacio libre, cuyo valor es $\approx 8,854187 \times 10^{-12}$ F/m

Cuando el producto escalar de Q_1 y $\pm Q_2$ es positivo, la fuerza es repulsiva, y cuando el producto es negativo, la fuerza es atractiva.

1.2.10.4 Intensidad de Campo Eléctrico.

El campo vectorial $\vec{E}(r)$, denominado *intensidad de campo eléctrico*, es la fuerza ejercida sobre una carga unitaria de prueba de polaridad positiva ubicada en el vector de posición $\vec{r}$, entonces, la fuerza sobre una carga de prueba se expresa como [8], [10], [27].

$$\vec{F}(r) = q\vec{E}(r) \quad \text{I.27}$$

La intensidad de campo eléctrico se escribe como.

$$\vec{E}(r) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad \text{I.28}$$

o

$$\vec{E}(r) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad \text{I.29}$$

Las líneas de campo eléctrico de una sola carga Q ubicada en una posición dada son puramente radiales y se dirigen hacia afuera si la carga es positiva o hacia dentro si la carga es negativa (ver figura I-5). Por lo tanto, la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto ubicado a una distancia radial r de la carga fuente Q será la fuerza

experimentada por una carga de prueba unitaria de polaridad positiva en ese punto, y está dada por.

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{I.30}$$

cuya unidad de medida es el N/C.

1.2.10.5 Flujo Eléctrico y Densidad de Flujo Eléctrico.

La cantidad de líneas de campo eléctrico que atraviesan una determinada área es el flujo eléctrico que la atraviesa. Considerando el caso de una carga puntual de polaridad positiva, la magnitud de esta carga fuente es Q culomb, entonces la cantidad total de líneas de campo eléctrico que salen de la carga fuente también será Q culomb. Ahora bien, si consideramos una esfera ficticia de radio r , de modo que la carga fuente se encuentre en el centro de la esfera, entonces el flujo eléctrico a través de la superficie de la esfera será Q culomb, ya que la superficie de la esfera encierra completamente la carga fuente, y todas las líneas de campo eléctrico que salen radialmente de la carga fuente puntual Q pasan por la superficie esférica, El flujo eléctrico es una magnitud vectorial y se denota típicamente de forma escalar como ψ .

La densidad de flujo eléctrico se define como el flujo eléctrico por unidad de área normal a la dirección del flujo eléctrico. Para el caso de una carga puntual, las líneas de campo eléctrico se dirigen radialmente desde la carga fuente, y, por lo tanto, siempre son normales a la superficie de la esfera que tiene la carga puntual en su centro. Entonces, para una carga puntual de magnitud Q culomb, el flujo eléctrico que pasa a través de la superficie esférica de magnitud $4\pi r^2$ es también Q culomb. La densidad de flujo eléctrico $\vec{D}$ a una distancia radial r de la carga puntual, viene dada por.

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r \quad \text{I.31}$$

sí reemplazamos la ecuación (I-30) en la ecuación (I-31), se obtiene.

$$\vec{D}(r) = \epsilon_0 \vec{E}(r) \quad \text{cuando el medio es el espacio libre, o}$$

$$\vec{D}(r) = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}(r) \quad \text{para cualquier medio particular de permitividad relativa } \epsilon_r \quad \text{I.32}$$

A continuación, se presentan valores de permitividad relativa y conductividad de materiales utilizados en el modelado de aisladores poliméricos [17].

Tabla I-2: Propiedades de Materiales Usados en el Modelado de Aisladores Poliméricos

Material	Permitividad, ϵ_r	Conductividad, σ (S/m)
Goma de Silicona (SiR)	4.3	1×10^{-12}
Varilla de Plástico Reforzado con Fibra de Vidrio (FVRP)	7.2	1×10^{-12}
Acero Forjado (Extremos Metálicos Conectados a Tierra y a Línea)	1	5.9×10^7
Aire	1	1×10^{-15}
Capa de Contaminación Uniforme	7.1	6×10^{-7}
Gotas de Agua	80	1×10^{-6}

La densidad de flujo eléctrico $\vec{D}$ es una cantidad vectorial, dado que tiene una dirección a lo largo de las líneas de campo en la posición donde se calcula la densidad de flujo.

La ecuación (I-32) se considera como una de las ecuaciones básicas de la teoría del campo eléctrico. Sin embargo, no es necesario que el flujo eléctrico sea siempre normal al área considerada; en tal sentido, se debe tomar la componente del área normal al flujo eléctrico para calcular la densidad de flujo eléctrico. La figura I-8 muestra un caso en el que un flujo eléctrico de magnitud ψ atraviesa un área de magnitud A , que no es normal a la dirección del flujo eléctrico.

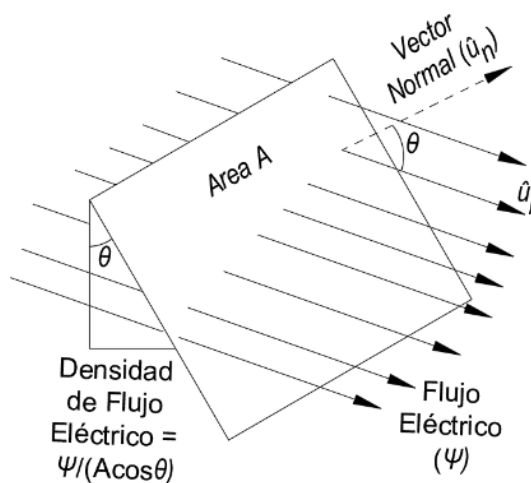


Figura I-8. Superficie Relacionada con la Densidad de Flujo Eléctrico Donde el Flujo Eléctrico No es Normal a la Superficie que la Atraviesa

entonces, el flujo y la densidad de flujo eléctrico escalarmente se relacionan como.

$$\psi = |\vec{D}| A \cos \theta \quad \text{I.33}$$

de la figura I-8 se tiene que $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_n = \cos \theta$, entonces reemplazamos esta expresión en la ecuación (I.33), se tiene.

$$\psi = |\vec{D}| A \vec{u}_r \cdot \vec{u}_n = |\vec{D}| \vec{u}_r * A \vec{u}_n = \vec{D} \cdot \vec{A} \quad \text{I.34}$$

La ecuación (I.34) presenta una idea importante de introducir un vector de área $\vec{A}$, cuyo valor es igual al valor escalar del área considerada, pero tiene una dirección normal a dicha área. En el caso de superficies cerradas, el vector de área se toma convencionalmente en la dirección de la normal externa. Para una superficie abierta, cualquier dirección normal puede considerarse positiva, mientras que la dirección normal opuesta debe considerarse negativa [8], [11], [27].

1.2.10.6 Potencial Eléctrico.

Para tener una mejor comprensión del potencial eléctrico, consideremos una carga de prueba de magnitud q que se encuentra en una posición dada dentro de un campo eléctrico producido por un sistema de cargas fuente. La carga de prueba q experimentará una fuerza debido a las cargas fuente. *Si la carga de prueba q se mueve en la dirección de las fuerzas de campo, entonces el trabajo es realizado por las fuerzas de campo en mover la carga de prueba de la posición 1 a la posición 2. En otras palabras, la energía es gastada por el campo eléctrico. Por lo tanto, la energía potencial de la carga de prueba en la posición 2 será menor que la de la posición 1. Pero si la carga de prueba q se mueve contra las fuerzas de campo debido a la fuerza de un agente externo, entonces el trabajo realizado por el agente externo se almacenará como energía potencial en la carga de prueba q ; es decir, la energía potencial de la carga de prueba en la posición 2 será mayor que la de la posición 1.* Se recalca, que la fuerza experimentada por la carga de prueba q dentro de un campo eléctrico depende de la magnitud de la carga de prueba. Entonces, la energía potencial de la carga en cualquier posición depende de su magnitud y de la distancia por la que se mueve dentro del campo eléctrico con respecto a una referencia.

Dicho esto, introducimos el concepto de potencial eléctrico para convertirlo en una propiedad que depende exclusivamente de la ubicación dentro de un campo eléctrico y que es independiente de la carga de prueba. En otras palabras, el potencial eléctrico es una propiedad del propio campo eléctrico y no está relacionada con la partícula de prueba. Entonces, *el potencial eléctrico (U) en cualquier punto dentro de un campo eléctrico se define como la energía potencial por unidad de carga en ese punto.* Su unidad es el voltio (V) que equivale a julios por culombio (J/C). Es necesario precisar que, la intensidad de campo eléctrico se define como la fuerza por unidad de carga mientras que el potencial eléctrico se define como la energía potencial por unidad de carga [8].

El trabajo realizado al mover una unidad de carga positiva de un punto a otro dentro de un campo eléctrico es igual a la diferencia de energías potenciales y, por lo tanto, a la diferencia de potenciales eléctricos en ambos puntos [10], [27].

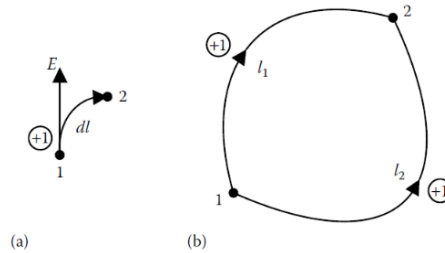


Figura I-9. Gráfica de la Definición de Potencial Eléctrico

De la figura I-9a, la carga positiva unitaria $+1 C$ se desplaza del punto 1 al punto 2 y recorre una pequeña distancia dl . La fuerza que experimenta la carga positiva unitaria en el punto 1 es la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$. Entonces la diferencia de potencial entre el punto 1 y el punto final 2 está dada por.

$$U_2 - U_1 = -\vec{E} \cdot \vec{dl} \quad \text{I.35}$$

de la figura I-9b, la carga positiva unitaria $+1 C$ recorre una distancia l dentro de un campo eléctrico desde el punto 1 al punto 2, entonces, tanto la magnitud como la dirección de $\vec{E}$ pueden no ser las mismas en todos los lugares a lo largo de la trayectoria recorrida por la carga positiva unitaria. Por lo tanto, en este caso, la diferencia de potencial entre el punto 2 y el punto 1 se evalúa integrando la parte derecha de la ecuación (I.35) sobre la línea l del punto 1 al punto 2, se obtiene.

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad \text{I.36}$$

ahora, si el punto 1 se encuentra a una distancia infinita con respecto a las cargas fuente que causan el campo eléctrico, entonces la energía potencial en el punto 1 debido a las cargas fuente será cero y, por lo tanto, U_1 será cero. La ecuación (I.36) toma la forma.

$$U_2 = -\int_{\infty}^2 \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad \text{I.37}$$

La unidad de la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$ es el V/m y del potencial U_2 es el V

El trabajo realizado al mover una carga positiva unitaria desde el infinito hasta un punto dado dentro del campo eléctrico podría ser el mismo para varios puntos dentro de dicho campo, dependiendo de la distribución de los vectores de la intensidad del campo eléctrico dentro de la región del campo. Por lo tanto, el potencial eléctrico de todos estos puntos será el mismo. Si se unen todos estos puntos, se puede obtener una línea recta o superficie en la

que cada punto tiene el mismo potencial eléctrico, dicha línea o superficie se denomina *equipotencial*.

La figura 1.10a muestra líneas equipotenciales y líneas de campo eléctrico para un campo eléctrico en el que $\vec{E}$ es constante en todas partes, lo que se denomina campo uniforme.

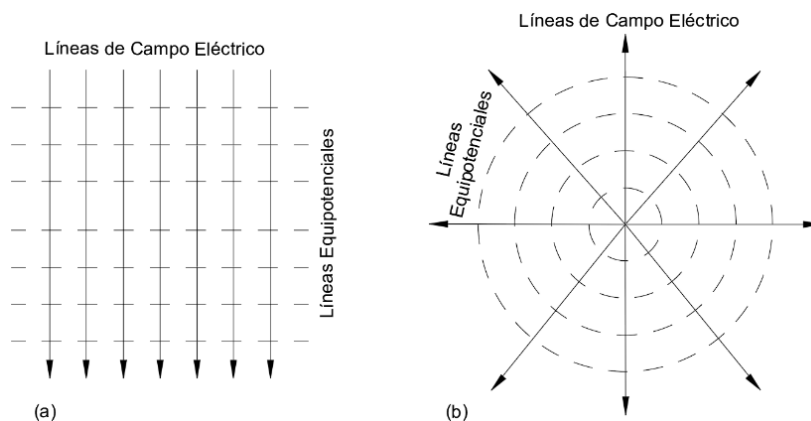


Figura I-10. Ejemplos de Potenciales a) Campo Uniforme, b) Campo No Uniforme

La figura 1.10b muestra líneas equipotenciales y líneas de campo eléctrico para una carga puntual de polaridad positiva. En este caso, $\vec{E}$ varía con la posición y se denomina campo no uniforme. Para el caso de sistemas tridimensionales, tales equipotenciales serán superficies.

✓ **Gradiente de Potencial Eléctrico.** – Se define como la tasa positiva de cambio del potencial eléctrico con respecto a la distancia en la dirección de mayor cambio. Para comprender el significado de la dirección de mayor cambio, consideremos que los equipotenciales son conocidos dentro de la región de campo (ver figura I-11).

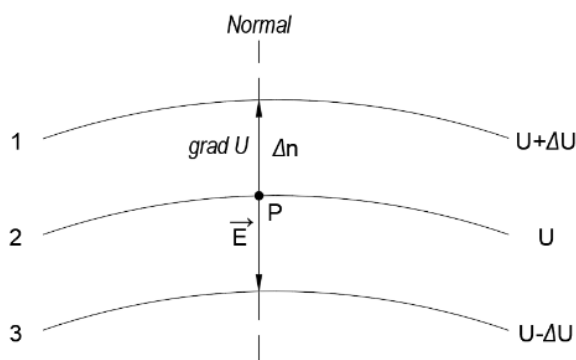


Figura I-11. Gradiente de Potencial Eléctrico e Intensidad de Campo Eléctrico

En la figura I-11, se muestran tres equipotenciales en la dirección de mayor cambio 1, 2, 3. Ahora, desde el punto P en el equipotencial 2 que tiene un potencial eléctrico U , si uno se mueve a cualquier punto en el equipotencial que tiene un potencial eléctrico $U + \Delta U$, la diferencia de potencial es $+\Delta U$, pero la distancia mínima entre los equipotenciales 1 y 2 es la distancia normal Δn . Por lo tanto, la mayor velocidad de cambio será a lo largo de la

normal al equipotencial; además hay dos direcciones de la normal al equipotencial 2 en P . Entonces, el gradiente de potencial eléctrico se define como la mayor tasa de cambio de potencial en sentido positivo, para lo cual, el gradiente de potencial eléctrico en el punto P , estará dado por.

$$\vec{\nabla} U = \frac{\Delta U}{\Delta n} * \frac{\vec{\Delta n}}{\Delta n} \quad \text{I.38}$$

donde

ΔU : diferencia de potencial

Δn : distancia normal entre los dos equipotenciales 1 y 2

dado que el gradiente de potencial eléctrico tiene magnitud junto con una dirección específica, entonces podemos afirmar que es una cantidad vectorial y es la derivada parcial del potencial eléctrico.

✓ **Gradiente de Potencial Eléctrico e Intensidad de Campo Eléctrico.** – La línea de campo eléctrico o $\vec{E}$ se dirige a lo largo de la normal a la equipotencial, pero como hay dos direcciones normales a la equipotencial (ver figura I-11), la cuestión es, en qué dirección estará $\vec{E}$; en este contexto cuando uno se mueve a lo largo de la dirección del campo eléctrico, entonces la energía potencial disminuye y por lo tanto el potencial eléctrico también disminuye en la dirección del campo eléctrico o $\vec{E}$. Por lo tanto, actuará desde el equipotencial 2 al equipotencial 3 en el punto P ; es decir, $\vec{E}$ actuará a lo largo de la dirección del potencial decreciente. Nuevamente, cuando uno se mueve del equipotencial 1 al equipotencial 2 a lo largo de la distancia normal Δn , entonces, la caída de potencial es ΔU y el trabajo realizado por las fuerzas de campo viene dado por $|\vec{E}|\Delta n$. Por lo tanto.

$$\Delta U = |\vec{E}|\Delta n \quad \text{o} \quad |\vec{E}| = \frac{\Delta U}{\Delta n} \quad \text{I.39}$$

ahora, a partir de las ecuaciones (I.38) e (I.39), se observa que las magnitudes de $\vec{E}$ y $\overrightarrow{\text{grad}} U$ en P son las mismas, pero el $\overrightarrow{\text{grad}} U$ actúa a lo largo de la dirección del potencial creciente y $\vec{E}$ actúa a lo largo de la dirección del potencial decreciente y tanto el $\overrightarrow{\text{grad}} U$ como $\vec{E}$ actúan a lo largo de la normal a la equipotencial en P , entonces se concluye que.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U \quad \text{I.40}$$

La figura I-12 muestra la diferencia de potencial $U_1 - U_2$ entre dos puntos 1 y 2 dentro de una región de campo.

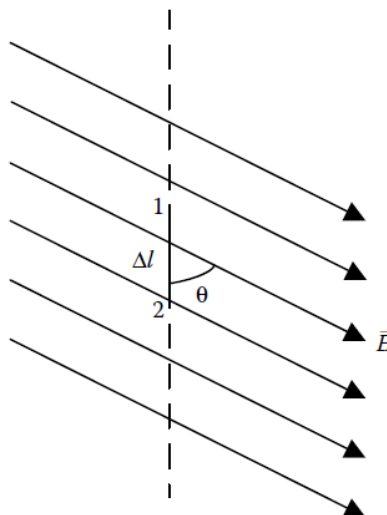


Figura I-12. Relación del Gradiente de Potencial e Intensidad de Campo Eléctrico

la cual viene dada por.

$$\Delta U = -\vec{E} \cdot \vec{\Delta l} \quad \text{o} \quad \Delta U = -|\vec{E}| |\vec{\Delta l}| \cos \theta \quad \text{I.41}$$

donde

$\vec{\Delta l}$: Vector distancia del punto 1 al punto 2

$|\vec{E}| \cos \theta$ es la componente de $\vec{E}$ a lo largo de $\vec{\Delta l}$

ahora, si $\vec{\Delta l}$ se encuentra a lo largo de la dirección del eje x , entonces la ecuación (I.41) se puede escribir en términos de la componente $\vec{E}$ a lo largo de la dirección x ; es decir, E_x y la distancia Δx , de la siguiente manera.

$$E_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \quad \text{I.42}$$

en lugar de la variación discreta, para la variación continua del potencial eléctrico en la dirección x , la ecuación (I.42) se puede escribir en forma de derivada parcial.

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{I.43}$$

similarmente se deduce las ecuaciones para la dirección y y z ; entonces la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$ en sus tres componentes está dado por.

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}\right) U$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U \quad \text{I.44}$$

se define al $\vec{\nabla}$ como un operador interesante, dado que cuando este operador actúa sobre una cantidad escalar, el resultado es una cantidad vectorial y físicamente resulta en la derivada parcial de la cantidad escalar; es decir, es el gradiente de la cantidad escalar. Para

este caso en específico cuando $\vec{\nabla}$ actúa sobre el potencial eléctrico escalar, el resultado es la cantidad vectorial gradiente de potencial eléctrico [8], [27].

1.2.10.7 Campo Debido a una Carga Puntual.

Si tomamos de referencia la figura I-13 [8],

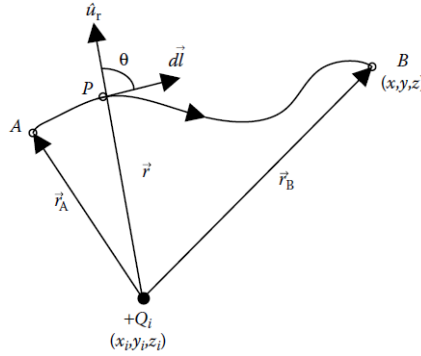


Figura I-13. Campo Debido a una Carga Puntual

debido a una carga puntual $+Q_i$, la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto P a una distancia r de la carga, está dada por.

$$\vec{E} = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

ahora, si P se desplaza del punto A al punto B , la diferencia de potencial será.

$$U_B - U_A = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r dl = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad \text{I.45}$$

y si A está situado en el infinito, entonces el potencial en B será.

$$U_B = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_B} \quad \text{I.46}$$

sí $+Q_i$ está situado en las coordenadas (x_0, y_0, z_0) y B está situado en las coordenadas (x, y, z) (ver figura I-13, entonces.

$$\vec{r}_B = (x - x_i)\vec{i} + (y - y_i)\vec{j} + (z - z_i)\vec{k} \quad \text{de forma que} \quad \text{I.47}$$

$$|\vec{r}_B| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad \text{y} \quad \vec{u}_{r_B} = \frac{\vec{r}_B}{|\vec{r}_B|}$$

entonces la intensidad de campo eléctrico en B viene dada por.

$$\vec{E}_B = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_B|^2} \vec{u}_{r_B} = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]} \frac{(x - x_i)\vec{i} + (y - y_i)\vec{j} + (z - z_i)\vec{k}}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \quad \text{I.48}$$

donde sus componentes son.

$$E_x = \frac{(x - x_i)Q_i}{4\pi\epsilon_0 \left[\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \right]^3}$$

$$E_y = \frac{(y - y_i)Q_i}{4\pi\epsilon_0 \left[\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \right]^3}$$

$$E_z = \frac{(z - z_i)Q_i}{4\pi\epsilon_0 \left[\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \right]^3}$$

I.49

es propicio realizar la siguiente aclaración; que, en presencia de múltiples cargas puntuales en cualquier punto de análisis, el potencial eléctrico U será la suma algebraica de los potenciales eléctricos escalares y la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$ será la suma vectorial en ese punto específico de interés de todas las cargas. Dicho de una forma más sencilla, el efecto de todas las cargas se superpondrá en cualquier punto de la región del campo.

1.2.10.8 Campo Debido a una Línea con Carga Uniforme.

Consideremos una varilla no conductora de longitud L cargada uniformemente. Tomemos un punto P ubicado en la línea perpendicular a la carga lineal con densidad de carga uniforme λ que pasa por el punto medio de la carga. La distancia normal de P a la carga es y . Para determinar el campo consideramos que el origen está situado en el punto medio de la carga lineal (ver figura I-14).

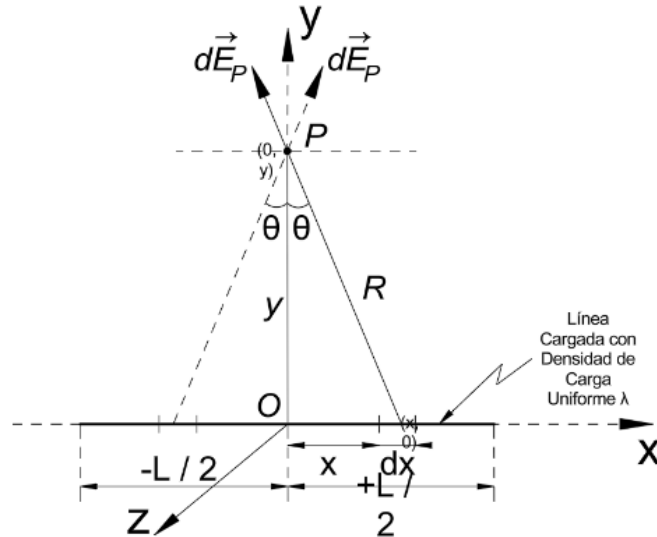


Figura I-14. Campo Debido a una Línea con Carga Uniforme

ahora consideremos una longitud elemental de carga dx situada a una distancia x del origen; entonces la carga en esta longitud elemental es $dq = \lambda dx$ y se puede considerar

como una carga puntual. Por lo tanto, el potencial eléctrico en P debido a esta carga elemental dq , está dado por.

$$dU_P = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sí integramos esta expresión matemática (ver anexo H, ecuación (H.2)), obtenemos el potencial debido a toda la carga lineal.

$$U_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[x + \sqrt{x^2 + y^2} \right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\sqrt{(L/2)^2 + y^2} + L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2} - L/2} \right] \quad \text{I.50}$$

si observamos la figura I-14, podemos darnos cuenta rápidamente que el potencial eléctrico en el punto P solamente depende de y , entonces, al derivar el potencial eléctrico U_P con respecto de y (ver anexo H, ecuación (H.4)), obtenemos la intensidad de campo eléctrico en este punto evaluado, el cual está dado por.

$$E_{yP} = -\frac{\partial U_P}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2} + \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{L}{2}} \right] \right\} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{L}{2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2} + \frac{L}{2}} \right]$$

$$E_{yP} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}} \quad \text{I.51}$$

Concluyendo este punto, se afirma que, la dirección de la intensidad del campo eléctrico en P a lo largo del eje y se puede explicar utilizando la figura I-14, como sigue. Con respecto a la longitud elemental de carga dx en el lado derecho del origen O , se puede suponer que hay otra longitud elemental de carga a la misma distancia x del origen en el lado izquierdo (método de la imagen). Ahora bien, la intensidad del campo eléctrico en P debido a estas dos cargas elementales tendrá la misma magnitud dE_P , pero serán dirigidos a lo largo de los vectores de distancia de las cargas elementales a P . Ellos harán el mismo ángulo θ con el eje y . Por lo tanto, los componentes x de estos dos vectores de intensidad de campo dE_P en P se cancelarán entre sí $dE_P \sin \theta (-\vec{i}) + dE_P \sin \theta (+\vec{i}) = 0$ y sólo el componente y estará presente, ya que los componentes y de los vectores dE_P serán aditivos $dE_P \cos \theta (+\vec{j}) + dE_P \cos \theta (+\vec{j}) = 2dE_P \cos \theta (+\vec{j})$ en P [8], [11], [27].

1.2.10.9 Flujo Eléctrico a Través de una Superficie.

Del punto 1.2.10.5, sabemos que el flujo eléctrico es la cantidad de líneas de campo o intensidad de campo eléctrico originadas por la carga fuente positiva en un campo eléctrico, y la densidad de flujo eléctrico es el flujo eléctrico que atraviesa una determinada sección

S ; es muy importante tener en cuenta que la densidad de flujo eléctrico en diferentes puntos de la sección S puede no ser la misma. Es por ello, que el flujo total a través de la sección S tiene que calcularse subdividiendo toda la superficie en un gran número de superficies más pequeñas de manera que en cada porción de área subdividida el vector de densidad de flujo eléctrico sea uniforme (ver figura I-15). Por lo tanto, para cualquier sección de superficie pequeña dA , el vector de área $d\vec{A}$ y el vector de densidad de flujo $\vec{D}$ podrían estar a lo largo de diferentes direcciones. Entonces el flujo eléctrico a través de dS está dada por $\vec{D} \cdot d\vec{A}$ [8], [10].

Entonces el flujo total a través de la sección S viene dado por la sumatoria de $\vec{D}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \vec{D}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \dots$

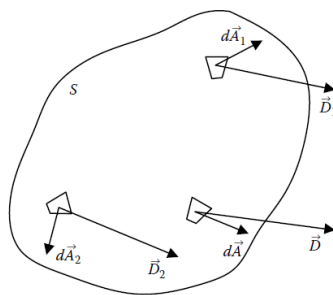


Figura I-15. Evaluación del Flujo Eléctrico Total a Través de una Superficie

si los tamaños de las áreas individuales son infinitesimalmente pequeños, entonces el flujo total a través de la sección S está dada por.

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iint \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad \text{I.52}$$

1.2.10.10 Superficie Gaussiana.

Es una superficie cerrada en un espacio tridimensional a través de la cual se calcula el flujo de un campo vectorial. Esta superficie cerrada es arbitraria sobre la cual se realiza una integral de superficie para evaluar la cantidad total de la fuente contenida, por ejemplo, una carga eléctrica. La superficie gaussiana también se utiliza para calcular el campo eléctrico debido a una distribución de carga dada [8], [11], [27].

Estas superficies, suelen seleccionarse cuidadosamente para aprovechar las simetrías y simplificar la evaluación de la integral de superficie. Si la simetría permite encontrar una superficie donde el campo eléctrico es constante, la evaluación del flujo eléctrico puede realizarse multiplicando el valor del campo por el área de la superficie gaussiana.

Existen dos superficies gaussianas comúnmente utilizadas.

✓ Superficie Gaussiana Esférica. - Elegida para ser concéntrica con la distribución de carga, ella permite determinar la intensidad de campo eléctrico o flujo eléctrico debido a una carga puntual, una capa esférica con densidad de carga uniforme o cualquier otra distribución de carga con simetría esférica (ver figura I-16)

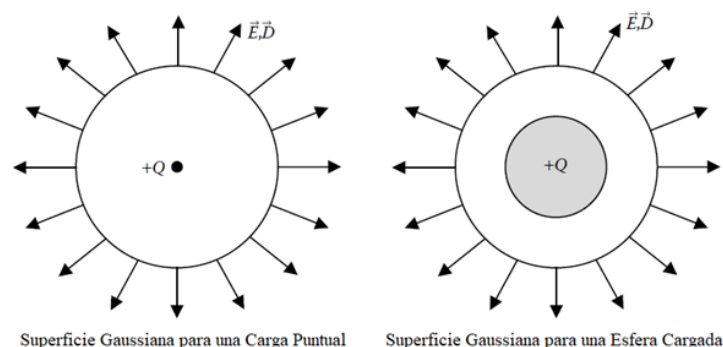


Figura I-16. Superficie Gaussiana Esférica

✓ Superficie Gaussiana Cilíndrica. – Elegida coaxialmente con la distribución de carga, permite determinar la intensidad de campo eléctrico o flujo eléctrico debido a una línea infinitamente larga con densidad de carga uniforme (ver figura I-17)

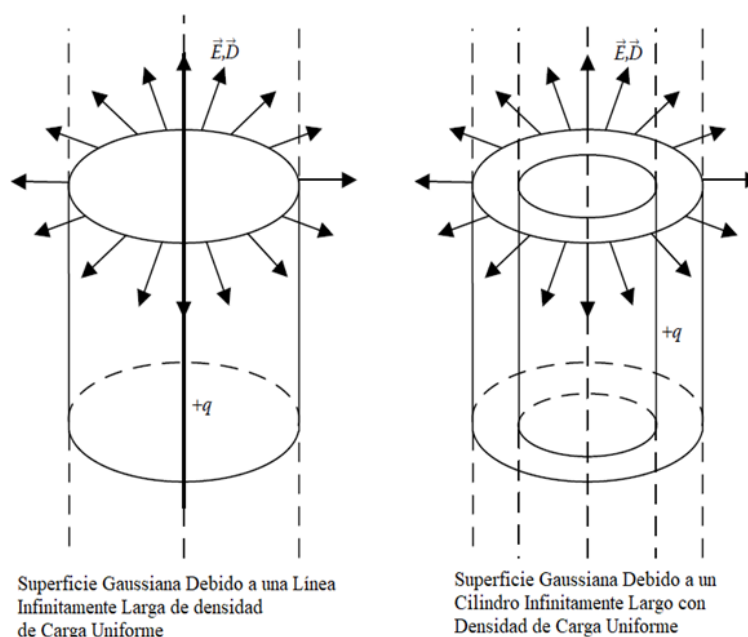


Figura I-17. Superficie Gaussiana Cilíndrica

1.2.10.11 Ecuaciones de Poisson y Laplace.

Estas ecuaciones nos permiten calcular potenciales eléctricos, que consiste en relacionar el potencial eléctrico con la densidad de carga eléctrica, que es generado por el potencial eléctrico entre las cargas fuente y la carga de prueba. Dado que el potencial eléctrico es una magnitud escalar, este enfoque ofrece ventajas sobre el cálculo de la intensidad de campo eléctrico que es una magnitud vectorial. Una vez determinado el potencial eléctrico,

la intensidad de campo eléctrico puede calcularse tomando el gradiente espacial del potencial eléctrico.

De acuerdo a la relación de divergencia, que indica la relación entre la densidad de flujo eléctrico y la densidad de carga eléctrica o densidad de carga volumétrica está dada por la forma diferencial de la Ley de Gauss; es decir $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_V$.

Para un medio homogéneo que tiene una permitividad eléctrica uniforme en todo el volumen de interés, la densidad de flujo eléctrico y la intensidad de campo eléctrico están relacionadas por $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Combinando ambas expresiones, se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_V \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_V \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon} \quad \text{I.53}$$

de acuerdo a la relación de gradiente que indica que la intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico están relacionados por $\vec{E} = -\vec{\nabla} U$, entonces la ecuación (I.53) se puede escribir como.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} U) = \frac{\rho_V}{\epsilon} \rightarrow \vec{\nabla}^2 U = -\frac{\rho_V}{\epsilon} \quad \text{I.54}$$

La ecuación (I.54) es una ecuación diferencial parcial de forma elíptica y se conoce como *la ecuación de Poisson*, y la operación matemática efectuada como, la divergencia del gradiente de una función ($\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$) se llama operador Laplaciano, el cual se escribe como.

$$\vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{I.55}$$

reemplazando la ecuación (I.54) en la ecuación (I.55), se obtiene.

$$\vec{\nabla}^2 U = -\frac{\rho_V}{\epsilon} \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho_V}{\epsilon} \quad \text{I.56}$$

sí expresamos el operador Laplaciano en diferentes sistemas de coordenadas para aprovechar la simetría de una distribución de carga simplifica la solución del potencial eléctrico. Asimismo, es necesario indicar que en campos electrostáticos el medio dieléctrico puede considerarse para efectos de estudio como un aislante ideal, por tal motivo, las cargas libres (carga que implica moverse libremente a distancias mayores que las longitudes de su escala atómica) residen únicamente en los límites del conductor. Por lo tanto, la densidad de carga volumétrica dentro de la región del campo es cero. Entonces la ecuación (I.56) se escribe como.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \dots \text{coordenadas rectangulares}$$

I.57

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \dots \text{coordenadas cilíndricas}$$

La ecuación (I.57) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden y se conoce comúnmente como la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares y en coordenadas cilíndricas respectivamente, y es una forma puntual de la ecuación de Poisson.

Existe un número infinito de funciones que satisfacen la ecuación de Laplace y la solución adecuada se encuentra especificando las condiciones de frontera apropiadas. Sin embargo, en problemas reales, los medios dieléctricos nunca son dieléctricos ideales. Por lo tanto, podrían producirse corrientes de fuga volumétricas, así como también corrientes de fuga superficiales, además, podrían producirse descargas dentro de una zona específica del aislamiento o cargas espaciales acumuladas con el tiempo dentro de la región de interés del campo. En todos los casos, la densidad de carga volumétrica será distinta de cero, por lo que es necesario resolver la ecuación de Poisson para obtener los resultados correctos [8].

1.3 Objetivos.

El objetivo planteado se referencia a la línea de investigación del tipo *Aplicada* la cual se enmarca en el tópico de *Energía y Medio Ambiente, Tecnologías Limpias, Mitigación de Impactos*. Este estudio se encuentra enfocado a la identificación y al análisis de la patología de la degradación prematura por el uso continuo de exposición al ambiente del aislador, causado por los efectos de la contaminación ambiental que genera arcos eléctricos de banda seca, producidos por el incremento de los gradientes anormales de tensión y la distribución no lineal del potencial eléctrico.

1.3.1 Objetivo General.

El objetivo que se pretende alcanzar con el presente estudio se formula como sigue:

OG: Analizar el comportamiento del campo eléctrico circundante y mejorar la repartición no lineal del potencial en aisladores compuestos frente al efecto causado por la contaminación ambiental, mediante el control de variables que reduzca la tasa de fallas y aumente la confiabilidad operativa en líneas de transmisión.

1.3.2 Objetivos Específicos.

Los objetivos impuestos para alcanzar el objetivo general se formulan como sigue:

OE₁: Representar gráficamente el aislador polimérico mostrando todas las variables de interés, elaborar el esquema eléctrico que más se aproxime al sistema real considerándolo como una línea de doble dispersión capacitiva así como extraer sus respectivos modelos matemático.

OE₂: Desarrollar el método gráfico clásico y método analítico clásico para determinar la repartición irregular de potencial y comparar sus resultados.

OE₃: Determinar la distribución del gradiente de potencial eléctrico oscilatorio a lo largo del aislador, influenciado por el indicador del espesor de la capa contaminante y de la resistencia superficial en serie.

OE₄: Comparar los resultados obtenidos en nuestra investigación con los obtenidos en artículos publicados y tesis relacionados al tema de investigación.

1.4 Hipótesis.

La proposición tentativa que se espera demostrar se centra en la hipótesis general

1.4.1 Hipótesis General.

La hipótesis que se pretende demostrar para el presente estudio se formula como sigue:

HG: Si analizamos el comportamiento del campo eléctrico circundante y redistribuimos adecuadamente la repartición no lineal del potencial en aisladores compuestos, entonces lograremos controlar las variables que reducen significativamente la tasa de fallas y asegurar la confiabilidad operativa de líneas eléctricas de alta tensión.

1.4.2 Hipótesis Específicas.

Las hipótesis impuestas para poder llegar a demostrar la hipótesis general se formulan como sigue:

HE₁: Si representamos gráficamente el aislador polimérico mostrando todas las variables de interés y representamos el esquema eléctrico lo más real posible considerándolo como una línea de doble dispersión capacitiva, entonces podremos obtener sin ningún tipo de dificultad sus modelos matemáticos con sus respectivas restricciones.

HE₂: Si desarrollamos y logramos comprender en toda su dimensión el método gráfico y analítico clásico, entonces podremos determinar la repartición irregular del potencial y estos resultados los contrastaremos con la finalidad de seleccionar el método que presente menos dificultad.

HE₃: Si determinamos la distribución del gradiente de potencial eléctrico oscilatorio a lo largo del aislador el cual está influenciado por el indicador del espesor de la capa contaminante y de la resistencia superficial en serie, entonces estaremos en la capacidad de controlar los flameos producidos por esta patología y mejorar el rendimiento del aislador.

HE₄: Si comparamos los resultados obtenidos en nuestra investigación con los obtenidos en artículos y tesis publicados, entonces podremos validar nuestro trabajo.

1.5 Variables.

Dado que el estudio está enfocado a mitigar las consecuencias producidas por la contaminación tanto activa como inerte en ambientes secos y húmedos, es de suma importancia definir de una forma precisa lo siguiente.

Potencial Eléctrico. – Se define como la variable física escalar que se utiliza para describir la energía potencial por unidad de carga que posee una carga eléctrica en un punto particular dentro de un campo eléctrico; es decir, representa al trabajo realizado por unidad de carga positiva de 1 Coulomb al mover una carga desde un punto de referencia hasta un punto arbitrario de análisis en sentido contrario a la dirección de las fuerzas del campo eléctrico, su unidad de medida es el kV.

Campo Eléctrico. – Se define como la variable física vectorial que describe la propiedad que tienen los cuerpos cargados de influir en el espacio que los rodea, la cual es percibida por otros cuerpos cargados eléctricamente y depende sólo de la carga que lo produce, su unidad de medida es el kV/m.

Definidos los conceptos de *Potencial* y *Campo Eléctrico*, ahora, definimos el tipo de variables que justifican nuestro estudio:

1.5.1 Variables Dependientes.

En líneas generales se definen como la variable que podemos manipular y que depende únicamente del valor de la variable independiente; es decir, es la variable efecto o consecuencia de la causa que lo genera. Para este estudio solamente identificamos una variable dependiente, la cual la hemos definido como:

- Campo Eléctrico. - Es la característica cuyo valor se propone conocer como resultado del examen analítico de sus parámetros y su procesamiento de la variable independiente que interviene en el sistema para que el resultado sea satisfactorio, se mide en kV/longitud del aislante.

1.5.1.1 Indicadores. - Son todas aquellas características específicas observables y medibles que nos permiten cuantificar la variable dependiente. Para poder medir el campo eléctrico, se tienen los indicadores siguientes:

- Densidad de Depósito de Sal Equivalente (*ESDD*). - Se utiliza para indicar la gravedad de la contaminación y se expresa en términos de mg de NaCl por unidad de superficie (cm^2) del aislador. [13], [29]

- Resistencia Lineal Superficial. - Se utiliza para indicar contorneos, tipo de niebla y velocidad de humedecimiento, además de predecir la tensión de descarga disruptiva, se expresa en unidades de $M\Omega/cm$. [13], [14]
- Distribución del Gradiente de Potencial. – Indicador que cuantifica la concentración anormal del campo vectorial en el espacio en análisis, este depende de la componente tangencial y la resistencia de la superficie en condiciones de contaminación seca o húmeda, se mide en kV/m . [6], [13]
- Grado de Uniformidad de los Campos Eléctricos. - Se conoce como el factor de Schwaiger, y nos indica la medida de la uniformidad de los campos eléctricos, se cuantifica como la razón entre la magnitud del campo eléctrico medio con la magnitud del campo eléctrico máximo en un dieléctrico, es adimensional y su magnitud varía de 0 a 1. [6]
- Capacitancia Parásita de Dispersión a Tierra C_t . – Se utiliza para indicar el consumo de carga del campo eléctrico fuente en forma de energía reactiva capacitiva la que asegura el enlace de cambio de polaridad, este indicador participa decisivamente en la generación de perturbaciones y procesos en régimen permanente, transitorio y fallas. Se da entre conductor y tierra o masa, su unidad de medida es el pico faradio – pF. [29]
- Capacitancia Parásita de Dispersión a Línea C_l . – Se utiliza para indicar el consumo de carga del campo eléctrico fuente en forma de energía reactiva capacitiva la que asegura el enlace de cambio de polaridad, este indicador participa decisivamente en la generación de perturbaciones y procesos en régimen permanente, transitorio y fallas, y es de menor valor que la capacitancia a tierra, motivo por el cual para aumentar su valor en líneas eléctricas con tensiones mayores a 60 kV se considera la instalación de anillos corono o anillos de clasificación. Se da entre conductor y conductor, su unidad de medida es el pico faradio – pF. [29]
- Capacitancia Propia C . – Indicador que representa eléctricamente al cobertizo del aislador polimérico, su magnitud es de valor constante y depende del nivel de tensión aplicado entre sus electrodos, su unidad de medida es el pico faradio – pF. [29]

1.5.2 Variables Independientes.

Son aquellas variables que no podemos manipular; es decir es la variable o variables que no dependen de otras variables para lograr el objetivo, conocidas también como variables

Causa o variables de origen del fenómeno. Para este estudio solamente identificamos una sola variable independiente, la cual es:

- Tensión Aplicada. – Es la tensión nominal del sistema que se aplica a una línea eléctrica entre los extremos del electrodo y que origina una distribución de potencial no lineal a lo largo del aislador, se mide en kV.

1.5.2.1 Indicadores. - Son todas aquellas características específicas observables y medibles que nos permiten cuantificar la variable independiente. Para poder medir la distribución del potencial, se tiene el siguiente indicador:

- Distribución No Lineal del Potencial Eléctrico. - Indicador que cuantifica la no linealidad del potencial eléctrico a lo largo de la unidad aislante, este depende en gran medida de la tensión aplicada entre los electrodos del dieléctrico; así como también, depende de la permitividad, material y geometría del dieléctrico, se mide en kV. [6], [13]

1.5.3 Variables Intervinientes.

Son aquellas variables que participan indirectamente en el modelo, pero que son muy importantes para obtener los resultados esperados, para el presente estudio se han considerado las siguientes variables.

- Resistencia de puesta a tierra, medido en ohmios (Ω).
- Impedancia de los soportes metálicos (torre y correctores), medido en ohmios (Ω).
- Condiciones atmosféricas de la ubicación de la unidad aislante.

1.5.4 Cuadro de Operacionalización de Variables.

VARIABLES	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DEFINICIÓN OPERACIONAL	DIMENSIONES	INDICADORES	ESCALA DE MEDICIÓN
VARIABLE INDEPENDIENTE: Tensión Aplicada	Tensión Nominal del Sistema que se aplica a una línea eléctrica entre los extremos del electrodo y que origina una distribución de tensión no lineal a lo largo del aislante compuesto	Representación gráfica del aislador compuesto indicando el terminal de tensión aplicada y terminal de referencia aterrado, así como mostrar las capacitancias propias y parásitas en su esquema eléctrico considerado como una línea de doble dispersión capacitiva	Nivel de tensión aplicada, geometría del conductor, espesor de la capa contaminante, Contaminación en Seco y Húmedo, y Tasa de Fallas	Distribución No Lineal del Potencial Eléctrico	Escala de Razón (orden, diferencia y razón. Son importantes)
VARIABLE DEPENDIENTE: Campo Eléctrico	Valor que se propone conocer como resultado analítico de sus parámetros y su procesado de la variable independiente	Aplicación de los conceptos de las bases teóricas como intensidad de campo eléctrico en placas planas paralelas, estrés del campo eléctrico, campo tangencial y capacitancias en aislamientos eléctricos	Espesor de la Capa Contaminante y Contaminación en Seco y Húmedo	* Densidad de Depósito del Sal Equivalente (mg NaCl/cm ²) * Resistencia Superficial (MΩ/cm) * Distribución del Gradiente de Potencial Eléctrico (kV/m) * Grado de Uniformidad de los Campos Eléctricos (es adimensional y se valora de 0 a 1) * Capacitancia Parásita de Dispersión a Tierra (pF) * Capacitancia Parásita de Dispersión a Línea (pF) * Capacitancia Propia (pF)	Escala de Razón y Escala de Intervalo (orden y diferencia. Son importantes, pero la relación de las unidades no es significativa)

1.6 Justificación e Importancia del Estudio.

Conocido el problema que me motiva a desarrollar la presente investigación, este estudio está justificado en:

1.6.1 Justificación Teórica.

La máxima tensión de transporte de energía eléctrica en la actualidad en nuestro país es de 500 kV; tal es así, que la literatura indica que la primera línea de transmisión en extra alta tensión de 500 kV en entrar en operación data con fecha del 23 de junio del 2011 [22]. A junio del 2026 se encuentran operando en el SEIN 21 líneas en este nivel de tensión con una longitud total de recorrido de 4 136,23 km desde la Barra Miguel Grau hasta la Barra de la Central Termoeléctrica Ilo 4 [4], [5]. La totalidad de estas líneas eléctricas longitudinalmente se encuentran instaladas dentro o muy cercana a la franja marina de nuestro litoral peruano [22], de las cuales algunas de estas líneas han sido dimensionadas sin tomar en cuenta la contaminación costera, por lo que en su etapa de operación estas salen fuera de servicio, específicamente la L-5010; L-5032 y la L-5034 [4], [5]. Producto de los contorneos que se producen por la contaminante que se forma en la superficie del aislador, para paliar transitoriamente este problema las empresas operadoras de nuestro país, realizan mantenimientos preventivos periódicos con una frecuencia de corto tiempo o cambiando unidades aislantes considerando un nivel de contaminación de severidad Muy Pesada, cuya longitud de fuga es del orden de los 55 mm/kV de acuerdo a las directrices de la IEC y ANSI [12], elevando sustancialmente los costos de operación y mantenimiento [22], por lo que es necesario conocer y comprender el problema de la repartición desigual de potencial y concentración anormal del campo eléctrico, producto de la contaminación ambiental en su estado seco y húmedo. Por lo tanto, el estudio se justifica por el aporte a la iniciativa de solución de este problema para las existentes y futuras líneas eléctricas en diferentes niveles de tensión y en específico a las líneas eléctricas mayores o iguales a 60 kV, cuya traza se encuentran en zonas altamente contaminadas.

1.6.2 Justificación Práctica.

De las 19 líneas de subtransmisión y 1 línea de transmisión con que cuenta el sistema eléctrico de Chiclayo para un nivel de tensión de 60 kV; de las cuales 16 líneas de subtransmisión se encuentran dentro de la concesión de ENSA, 3 líneas de subtransmisión se encuentran dentro de la concesión de COELVISAC y 1 línea de transmisión es de propiedad de la empresa ELECTROZAÑA SAC (ver Anexo J).

Para una aplicación práctica del presente estudio se ha considerado la línea de transmisión de código L-6547 (cuyo significado es: L: Línea de transmisión; 6: Nivel de tensión de operación, para este caso en específico es 60 kV; 547: Ubicación de la línea de transmisión en el SEIN) con una longitud de 50.70 km, que parte del pórtico de salida de la SET Zaña y culmina en el pórtico de llegada de la SET de Cayaltí con nivel de tensión de 60 kV. Esta línea de transmisión cuenta con 199 estructuras, de las cuales 45 estructuras son torres de celosía metálica entre 18, 21, 33 y 35 m de altura y, 154 estructuras son de concreto armado centrifugado entre 18 y 21 m de altura; las 199 estructuras cuentan con aisladores poliméricos tipo vara o aislantes de polímero de suspensión. Esta línea eléctrica entró en operación en diciembre del año 2018, en la actualidad se le realiza un mantenimiento preventivo anual. Se ha identificado problemas de contaminación, la cual es una combinación de la contaminación activa e inerte.

La contaminación activa en el aislador polimérico tipo vara es producida de 2 formas.

1.- Contaminación indirecta; por la adherencia de partículas de cenizas (menor permitividad eléctrica) en la superficie superior e inferior de los cobertizos y en todo el cuerpo del mismo, producto de la quema indiscriminada de plantaciones de caña de azúcar, esto genera una capa contaminante en la superficie superior e inferior del cobertizo del aislante que al combinarse con la humedad del ambiente o con las lluvias se producen arcos eléctricos que en muchos de los casos se queman y forman un flameo, generando la interrupción intempestiva de la línea eléctrica.

2.- Contaminación directa; en el tramo de la traza de la línea de transmisión, específicamente a partir de la estructura E-170 hasta la estructura E-198, pululan una gran cantidad de aves carroñeras conocidas como gallinazos, estas aves al asentarse en las crucetas metálicas y en los aisladores depositan gran cantidad de heces en la superficie superior de los cobertizos del aislador, produciendo así una capa contaminante que al combinarse con la humedad del ambiente o con las lluvias generan descargas eléctricas y flameos.

La contaminación inerte en el aislador polimérico se produce dado que en la zona por donde pasa la línea eléctrica, específicamente a partir de la estructura E-044 hasta la estructura E-199 la velocidad de viento supera los 4,5 m/s [33], produciendo un levantamiento intempestivo de partículas de polvo (predominantemente mezcla de NaCl) que se asienta en la superficie superior e inferior del cobertizo y en el cuerpo del aislador,

generando una capa de contaminación que al combinarse con la humedad del ambiente o con la lluvia produce el fuera de servicio de la línea eléctrica.

Suscitada esta problemática, es de vital importancia desarrollar este trabajo, puesto que con ello se pretende aportar en el conocimiento detallado de las causas que lo originan y plantear una alternativa de solución al problema presentado, con la única finalidad de permitirle a la empresa operadora trabajar de forma confiable y continua, tratando en lo posible de reducir el perjuicio económico al propietario.

1.7 Limitaciones de la Investigación.

En este punto, preciso que el presente estudio está enfocado a realizar el análisis de cómo el potencial eléctrico escalar y por consiguiente el campo eléctrico vectorial se distribuyen de una forma no lineal y concentrada respectivamente al aplicarse a la unidad aislante una diferencia de potencial entre sus electrodos, puesto que, se considera que el cuerpo de la unidad aislante se encuentra sometido a una contaminación conformada por compuestos solubles y no solubles bajo el escenario de estado seco y húmedo; el primer escenario no genera gran impacto en la continuidad de la transmisión de energía eléctrica, pero en cambio el segundo escenario si necesita ser controlado; por lo tanto, para este caso en específico las limitaciones del estudio para este escenario son.

- Para efectos de los cálculos realizados, el espesor de la capa contaminante es considerada constante con una alta concentración de humedad y de compuestos solubles y no solubles.
- Las condiciones atmosféricas en donde se ubica la unidad aislante en estudio no presentan el fenómeno de lluvia ácida ni mucho menos de niebla salina.
- El espesor de la capa contaminante es considerada constante para los cálculos, estos compuestos son los considerados en la tabla III-14.
- Para el cálculo del campo eléctrico, no se considera el efecto de los campos eléctricos del conductor, ferretería eléctrica y torres de celosía metálica; puesto que se asume que todas las masas metálicas se encuentran aterrizadas a tierra con un potencial en el sumidero de 0 kV.
- La unidad aislante en estudio es considerada de geometría cilíndrica regular, material de superficie uniforme y axisimétrico o simetría axial; así como también, la distribución del campo eléctrico calculado es bidimensional - 2D.

- Para determinar las variables de interés, la permitividad del material de la unidad aislante se considera constante.
- Para los cálculos realizados en el presente estudio se ha considerado como tensión aplicada entre las fases del sistema trifásico a la tensión de cresta con un valor de 72,5 kV y la tensión aplicada entre los electrodos del aislador polimérico una tensión de fase de valor 42 kV, que es el resultado de dividir la tensión de cresta con la raíz cuadrada de 3.
- Carencia de un laboratorio equipado para realizar simulaciones haciendo variar el espesor de la capa contaminante, concentración de ESDD y nivel de tensión aplicada.

CAPÍTULO II. DISEÑO METODOLOGICO

2.1 Diseño de Contrastación de La Hipótesis.

¿Cómo se va a proceder para demostrar la consecuencia lógica?

Es muy importante aclarar que el presente estudio se basa en una investigación netamente analítica, descriptiva y explicativa para aportar en la solución al problema real identificado. Con ello se pretende demostrar la consecuencia lógica y por ende contrastar la hipótesis planteada, la cual se ha procedido de la siguiente manera:

El estudio está conformado por tres componentes bien diferenciados, como son:

➤ Distribución de Potencial y Campo Eléctrico: Para su análisis se ha evaluado mediante tres métodos:

✓ Método Simplificado. – El aislador polimérico se ha representado gráficamente como una línea de doble dispersión capacitiva; es decir en este método se consideran las capacitancias parásitas de dispersión a línea y a tierra, la representación gráfica ha sido realizada con algunas consideraciones y simplificaciones para poder obtener su modelo matemático, de aquí se ha obtenido una ecuación para determinar el potencial y la corriente de fuga a lo largo de todo el aislante compuesto. Con la ecuación de potencial se determina el gradiente de potencial o campo eléctrico circundante a la superficie del aislante de polímero. Para cada caso se han elaborado sus respectivas gráficas.

✓ Método Gráfico. – Para determinar la repartición de potencial existe un método gráfico el cual se explica detalladamente en el estudio (ver anexo A), este método considera solamente la capacitancia parásita de dispersión a tierra la cual se ha hecho variar desde el 5 % hasta el 22.27 % de la capacitancia propia, para cada caso se ha elaborado su gráfica.

✓ Método Analítico. - De las ecuaciones dadas por [25] en la que solamente considera la capacitancia parásita de dispersión a tierra, estas se desarrollaron haciendo variar la capacitancia a tierra desde el 5 % hasta el 25 % de la capacitancia propia, se elaboró su gráfica general de cada resultado obtenido.

Para determinar la capacitancia propia, se realizó una medición con un instrumento especializado denominado LCR/ESR METER, Modelo: PeakTech 2170, proporcionado por el laboratorio de la Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica, cuyo resultado fue de 1 pf (ver tabla III-4).

Para determinar la capacitancia parásita a tierra se ha utilizado el modelo de dos conductores concéntricos a una esfera de radios a y b ; y para la capacitancia a línea se ha utilizado el método de la imagen, donde se consideran dos conductores con sus respectivas imágenes concéntricas a un cilindro, para poder llegar a la expresión de la capacitancia a línea se ha utilizado la teoría del potencial complejo (ver anexo B)

Para analizar la superficie contaminada, se ha considerado la resistencia en serie en los dos escenarios en que se presenta: contaminación en franja estrecha y contaminación en franja ancha, obteniendo el gradiente de tensión crítica y corriente de fuga crítica para ambos escenarios. Para el desarrollo de estos escenarios, se utiliza la siguiente base teórica.

➤ Las Descargas en la Superficie Contaminada de los Aisladores: En este punto se describe concisamente sobre el fenómeno de las descargas, como se producen y sus modelos matemáticos, en el que se representa el gradiente de tensión de ignición de la descarga en la franja no contaminada y la resistencia en serie de la franja contaminada, las ecuaciones han sido tomadas de [27], [28], [29]. Con ello se obtiene la ecuación de potencial necesario para mantener la conducción, la tensión crítica, la corriente crítica tanto para franjas anchas como franjas estrechas. Se han elaborado sus gráficas.

y para poder mostrar gráficamente lo estudiado líneas arriba, se utiliza una simulación, la que se detalla a continuación.

➤ Simulación: Como complemento del estudio, con la única intención de graficar como se distribuye el campo eléctrico vectorial y su potencial eléctrico escalar, se ha utilizado el software libre COMSOL MULTIPHYSICS 5.5.

Con todos estos resultados obtenidos puedo afirmar contundentemente que la hipótesis queda validada.

2.2 Población Muestra.

Por ser un estudio puramente analítico, para el análisis de la variable dependiente se ha considerado 1 unidad de aislador polimérico de suspensión de un universo de 726 aislantes de suspensión y 5 unidades de aislantes Line-Post, todos ellos instalados en la L-6547 de propiedad de la empresa Electrozaña, cuyas características mecánicas y eléctricas se encuentran detalladas en la tabla III-1 del capítulo III.

2.3 Materiales, Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos.

Materiales de Recolección de Datos

Para obtener la resistencia de aislamiento y el valor de la capacitancia propia del espécimen, que son indicadores iniciales para el desarrollo del trabajo, se ha utilizó equipos de medición como megóhmetro y medidor de capacitancias.

Para conocer las sustancias conformantes del compuesto contaminante en la superficie del aislador producto de la quema de plantación de caña de azúcar se obtuvo de la Memoria de Ponencias del año 2013 desarrollado por el instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, y

Para conocer la traza, el número de estructuras, el nivel de tensión y número de líneas eléctricas de transmisión y subtransmisión se utilizó información del propietario Electrozaña, la empresa operadora y del COES.

También se obtuvieron datos relevantes para el estudio de libros texto, artículos y tesis desarrollados por autores e investigadores de reconocida trayectoria nacional e internacional, tal como se detalla en las referencias bibliográficas.

Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

El estudio inicia con la observación cuantitativa del fenómeno producido, para luego buscar información técnica relevante como artículos científicos y tesis de posgrado. Una vez identificada la variable de interés, se procedió a la medición de la capacitancia propia y resistencia de aislamiento del espécimen, para culminar con el procesamiento de datos y sus respectivos resultados.

2.4 Métodos y Procedimientos para la Recolección de Datos.

Los datos de las variables e indicadores de interés utilizados en el presente estudio, fueron recolectados mediante el método de recolección primaria y uso de procedimientos técnicos, ello fue posible, a través de la experiencia de primera mano de los autores consultados, los que han aportado información específica altamente científica, auténtica y precisa.

CAPÍTULO III. RESULTADOS

3.1 Resultados del Procesamiento de Datos.

3.1.1 Distribución de Potencial a lo Largo del Aislador Polimérico.

3.1.1.1 Distribución de Potencial - Método Expresión Simplificada.

Para poder obtener los resultados de la distribución de potencial y campo eléctrico de acuerdo al método de la expresión simplificada, primero se debe identificar sus componentes y características del aislador estudiado.

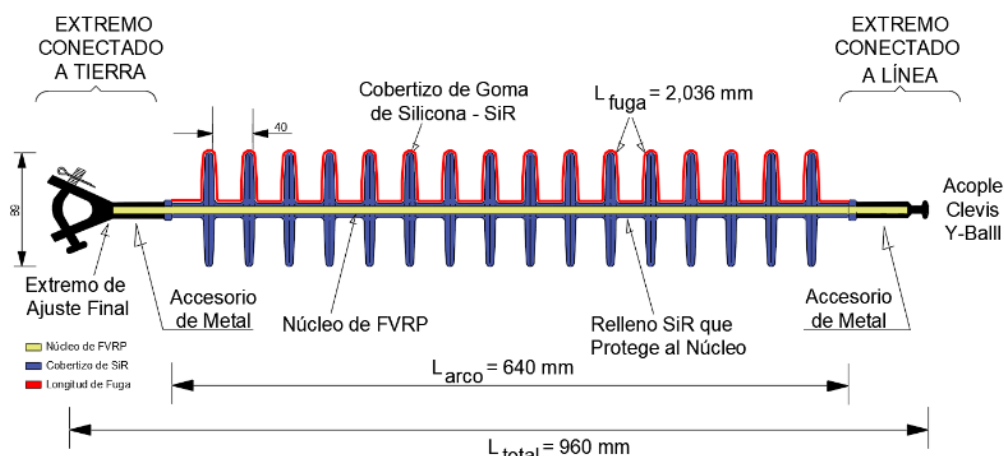


Figura III-1: Componentes del Aislador Polimérico Tipo Vara

Tabla III-1: Características Mecánicas y Eléctricas de la Unidad Aislante Estudiada

Características	STGS - 72.5
Espaciamiento entre Cobertizos (mm)	40
Longitud de Fuga de 1 Unidad de Cobertizo (mm)	110
Longitud de Protección Contra Fuga de 1 Unidad de Cobertizo (mm)	124
Diámetro del Cobertizo (mm)	89
Diámetro del Núcleo (mm)	19
Longitud Libre del Conductor Auxiliar Entre Cobertizos (mm)	4
Radio Cilíndrico Promedio - c (mm)	10
Radio Esférico Promedio - a (mm)	2
Tensión Nominal (kV)	60
Tensión de Cresta o Tensión Máxima (kV)	72.5
Frecuencia Nominal (Hz)	60
Longitud de Fuga (mm)	2,036
Longitud Total (mm)	960
Longitud de Arco (mm)	640
Número de Cobertizos o Discos	16
Tensión Crítica de Flameo al Impulso (kV)	
Positiva	495
Negativa	567
Tensión de Flameo a Baja Frecuencia (kV)	
En Seco	278
En Lluvia	233
Resistencia de Aislamiento (GΩ)	50
Carga Mecánica Garantizada - SML (kN)	120
Carga Mecánica de Rutina o Nominal - RTL (kN)	60

y con estos datos del aislador polimérico obtenidos del fabricante, determinamos el valor de la capacitancia parásita a línea C_l , con la ecuación (I.14).

Tabla III-2: Valores de C_l a diferentes " c " (Radio Medio Cilíndrico)

Número de Cobertizos del Aislador		Capacitancia a Línea C_l (pF) del Aislador STGS - 72.5				
		Distancia a Tierra R (m)				
		1.5	2.0	5.0	10.0	50.0
Línea	1	0.077	0.077	0.077	0.077	0.077
	2	0.052	0.052	0.052	0.052	0.052
	3	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044
	4	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039
	5	0.037	0.037	0.037	0.037	0.037
	7	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033
	10	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030
	12	0.029	0.029	0.028	0.028	0.028
	13	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028
	15	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027
	16	0.027	0.027	0.026	0.026	0.026
Tierra	16	0.027	0.027	0.026	0.026	0.026

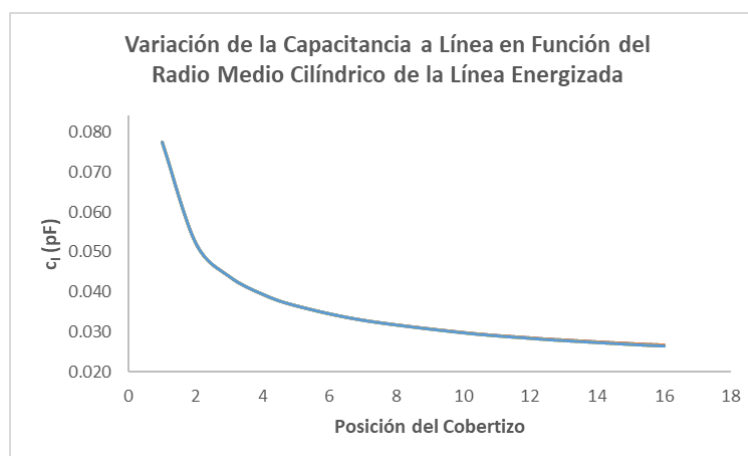


Figura III-2: Variación de C_l en Función al Radio Medio Cilíndrico " c " y Distancia " l " Posición del Cobertizo

cuyo valor considerado para los cálculos es la media donde $R = 2 \text{ m}$, $C_l = 0.0384 \text{ pF}$.

La capacitancia parásita a tierra C_t , se determina con la ecuación (I.15).

Tabla III-3: Valores de C_t a Diferentes " a " (Radio Medio Esférico)

Distancia a Tierra	Capacitancia a Tierra $C_t = cte$ (pF)
b	Tipo de Aislador - Tabla III-1
(m)	STGS - 72.5
1	0.2230
2	0.2227
3	0.2227
5	0.2226
10	0.2226
15	0.2226
20	0.2225

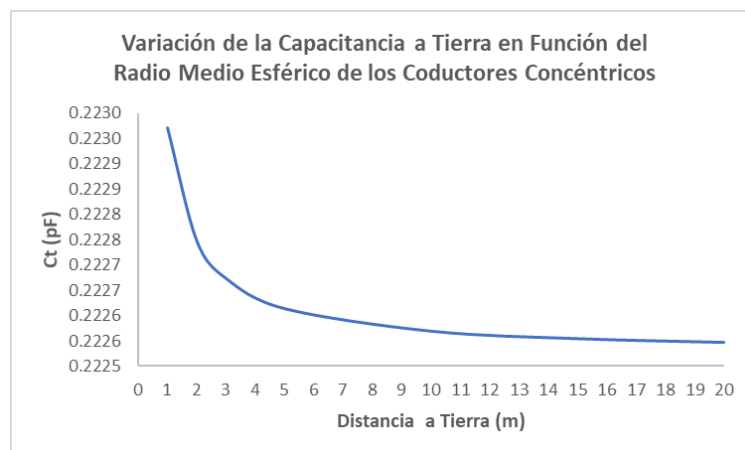


Figura III-3: Variación de C_t en Función al Radio Medio Esférico " a "

cuyo valor considerado para los cálculos es la media de los valores encontrados, $C_t = 0.2227 \text{ pF}$.

La capacitancia propia C , se obtuvo realizando la medida en el laboratorio de electricidad de la FIME de la UNPRG con un instrumento denominado: Medidor de Inductancias L , Capacitancias C y de Resistencias R . Equipo LCR/ESR METER, Modelo: PeakTech 2170.

Tabla III-4: Valores Medidos de la Capacitancia Propia con el Medidor LCR/ESR METER

Frecuencia	Capacitancia (pF)					Promedio
	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Muestra 4	Muestra 5	
100 Hz	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
120 Hz	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1 kHz	1.50	1.80	1.50	1.50	1.55	1.57
10 kHz	1.59	1.83	1.6	1.57	1.70	1.66
100 kHz	1.59	1.83	1.6	1.58	1.70	1.66

El valor de la capacitancia propia C que se toma para los cálculos es de $C = 1 \text{ pF}$ a 100 Hz, frecuencia más aproximada a la real de 60 Hz. Con este valor, se determina la reactancia de la unidad aislante cuyo valor es de $2\,652,58 \text{ M}\Omega$.

El aislador en estudio se comporta como un electrodo, el cual está sometido a una tensión Fase – Tierra de 42 kV, de acuerdo al modelo mostrado.



Figura III-4: Modelo del Aislador Polimérico Sometido a una Tensión de 42 kV.

La tensión U_x se determina con la ecuación (I.10); donde $m = C_l \sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C} \right) x} \right]$, $n = C_t \sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C} \right) (L - x)} \right]$ y $k = (C_t + C_l) \sinh \left(\sqrt{\frac{C_t + C_l}{C}} * L \right)$.

Tabla III-5: Valores de la Distribución de Potencial U_x – Método de la Expresión Simplificada

Número del Aislador x	C_l (pF)	$C_0 = C_t$ (pF)	C (pF)	U_n (kV)	$C_l / (C_t + C_l)$	m	n	k	V_x (kV)
Línea									
1						0.021	237.399		42
2						0.047	142.415		27.57
3						0.085	85.434		19.00
4						0.146	51.252		13.86
5						0.246	30.745		10.77
6						0.412	18.444		8.91
7						0.687	11.064		7.79
8						1.146	6.636		7.10
9	0.0384	0.2227	1.000	42	0.147	1.910	3.979	464.067	6.66
10						3.185	2.384		6.35
11						5.309	1.424		6.09
12						8.850	0.845		5.81
13						14.753	0.492		5.44
14						24.592	0.269		4.88
15						40.993	0.119		3.97
Tierra						68.334	0.000		2.48

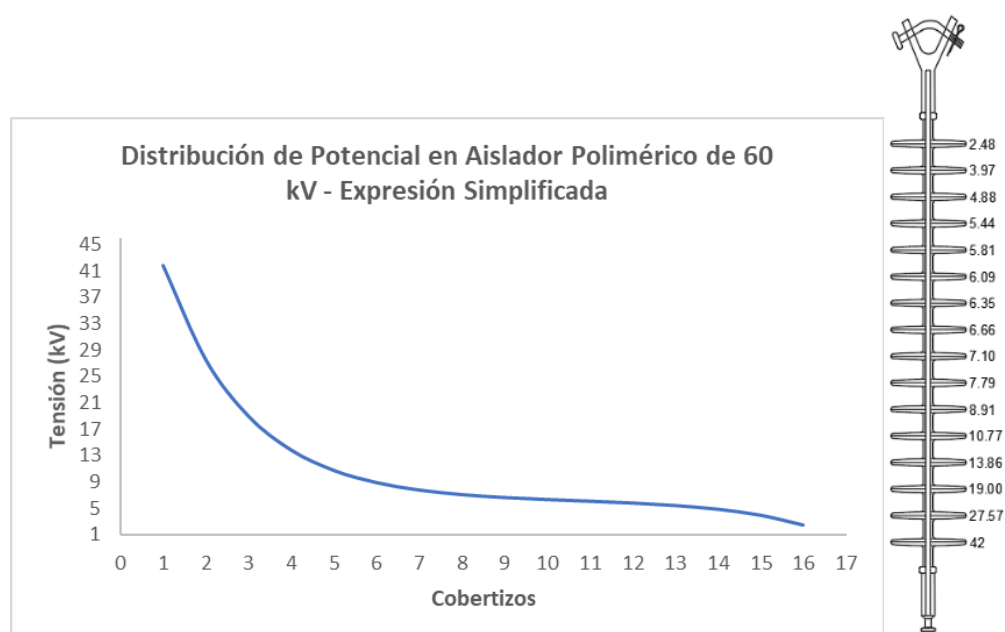


Figura III-5: Distribución de Potencial en el Aislador Polimérico - Método Expresión Simplificada

3.1.1.2 Distribución de Potencial - Método Gráfico.

Como ya se conoce que, para determinar la distribución de potencial del aislador de acuerdo al método gráfico, se desprecia su valor de la capacitancia parásita a línea C_l , y el valor de la capacitancia parásita a tierra C_t la hacemos variar desde el 5% hasta el 22.27% de la capacitancia propia C . Se procede de acuerdo a 1.2.8.2 para encontrar estos valores.

✓ Repartición de Potencial para un $C_t = 5 \% * C$

Tabla III-6: Valores de la Capacitancia Parásita a Tierra C_t para un 5 % de la Capacitancia Propia C – Método Gráfico

C (pF)	1	$C_t = 5\% \times C = 0.5$	C_2	1.05 pF		
Nº de Cobertizos del Aislador		$C/(C_n+C)$	Medida del Plano (pF)	Tensión en Cada Cobertizo (kV)	$e_n = E_n / E_{n-1}$ (kV)	Eficiencia del Aislador $E_n/(n \cdot e_n)$ (%)
Línea	1	1.00	1.0500	42	8.39	31.19
	2	0.80	0.5622	33.47	6.71	
	3	0.80	0.4098	26.76	5.38	
	4	0.80	0.3408	21.38	4.31	
	5	0.80	0.3042	17.08	3.45	
	6	0.80	0.2832	13.62	2.77	
	7	0.80	0.2708	10.85	2.23	
	8	0.79	0.2630	8.63	1.80	
	9	0.79	0.2582	6.83	1.46	
	10	0.79	0.2552	5.37	1.19	
	11	0.78	0.2534	4.19	0.98	
	12	0.77	0.2522	3.21	0.82	
	13	0.75	0.2514	2.40	0.70	
	14	0.71	0.2508	1.70	0.61	
	15	0.64	0.2506	1.09	0.56	
Tierra	16	0.49	0.2504	0.53	0.53	

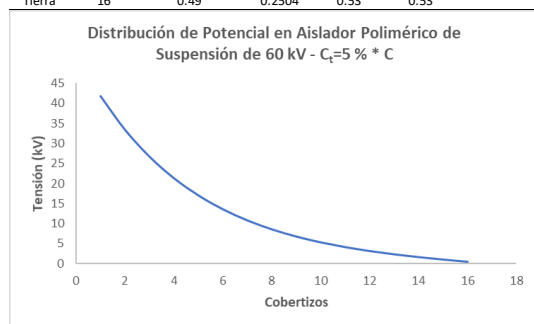


Figura III-6: Distribución de Potencial en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 5 \% * C$ - Método Gráfico

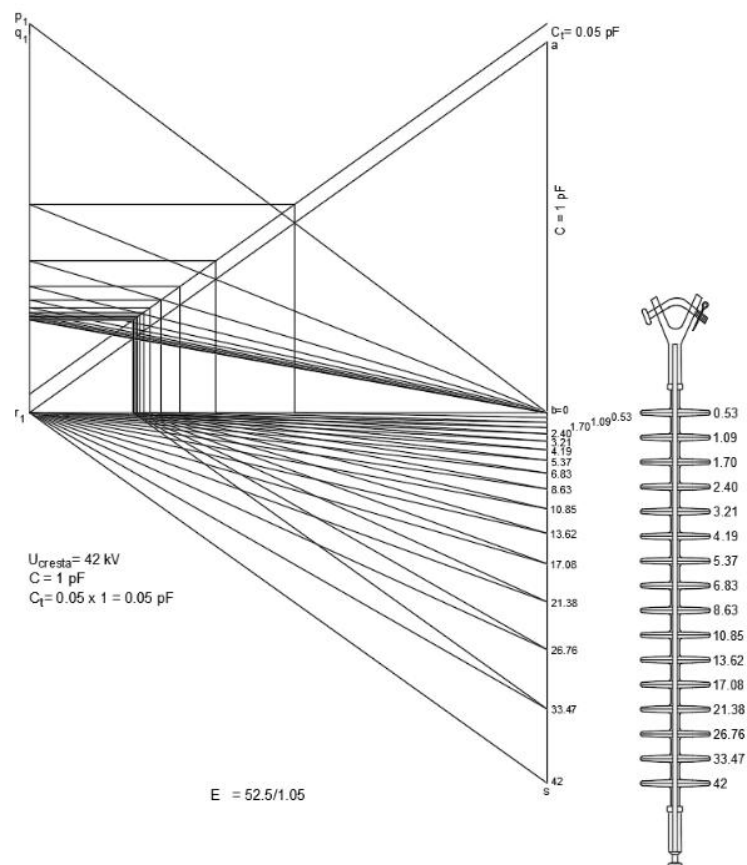


Figura III-7: Potencial que soporta cada Cobertizo en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 5 \% * C$ - Método Gráfico

✓ Repartición de Potencial para un $C_t = 10 \% * C$

Tabla III-7: Valores de la Capacitancia Parásita a Tierra C_t para un 10 % de la Capacitancia Propia C – Método Gráfico

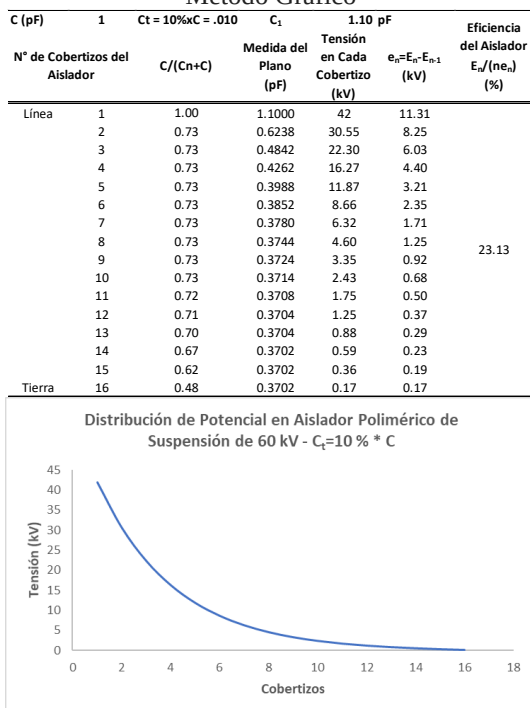


Figura III-8: Distribución de Potencial en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 10 \% * C$ - Método Gráfico

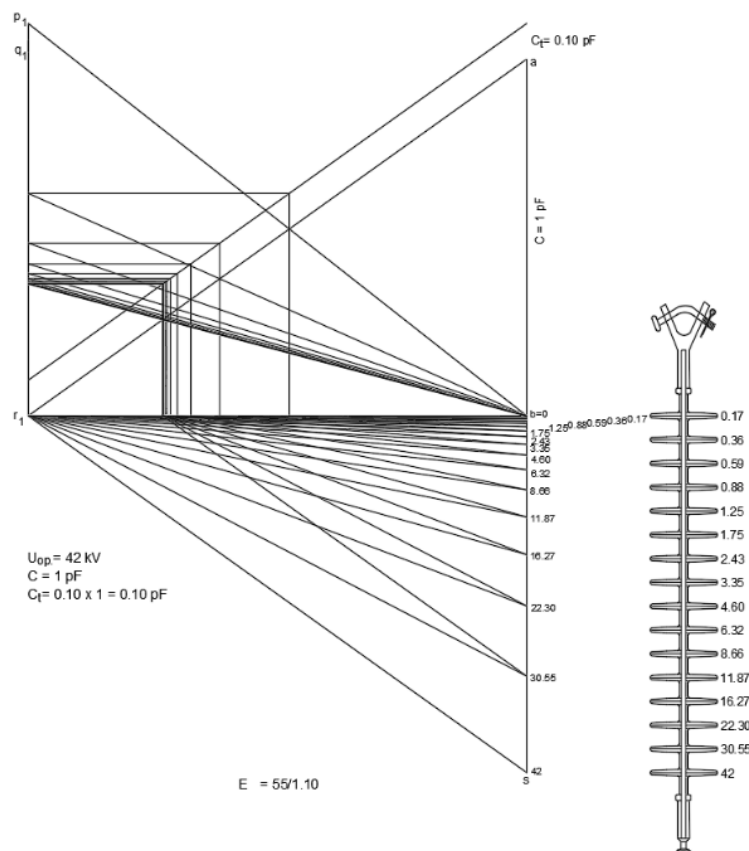


Figura III-9: Potencial que soporta cada Cobertizo en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 10 \% * C$ - Método Gráfico

✓ Repartición de Potencial para un $C_t = 15 \% * C$

Tabla III-8: Valores de la Capacitancia Parásita a Tierra C_t para un 15 % de la Capacitancia Propia C – Método Gráfico

C (pF)	1	$C_t = 15\% * C = 0.15$	C_2	1.15 pF		
N° de Cobertizos del Aislador		$C/(C_n+C)$	Medida del Plano (pF)	Tensión en Cada Cobertizo (kV)	$e_n = E_n - E_{n-1}$ (kV)	Eficiencia del Aislador $E_n/(ne_n)$ (%)
Línea	1	1.00	1.1500	42	13.38	
	2	0.68	0.6848	28.48	9.10	
	3	0.68	0.5564	19.38	6.19	
	4	0.68	0.5076	13.19	4.21	
	5	0.68	0.4866	8.97	2.87	
	6	0.68	0.4774	6.11	1.95	
	7	0.68	0.4732	4.15	1.33	
	8	0.68	0.4712	2.83	0.91	
	9	0.68	0.4702	1.92	0.62	19.56
	10	0.68	0.4698	1.30	0.42	
	11	0.68	0.4696	0.88	0.29	
	12	0.67	0.4696	0.59	0.20	
	13	0.66	0.4696	0.39	0.14	
	14	0.64	0.4696	0.25	0.10	
	15	0.59	0.4696	0.15	0.08	
Tierra	16	0.47	0.4694	0.07	0.07	

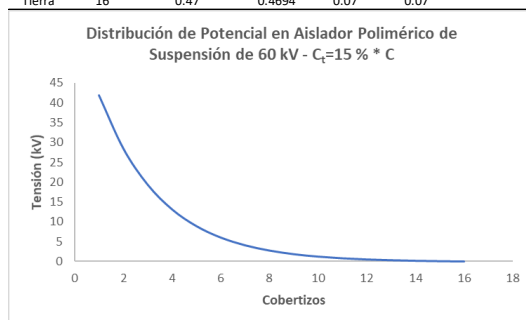


Figura III-10: Distribución de Potencial en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 15 \% * C$ - Método Gráfico

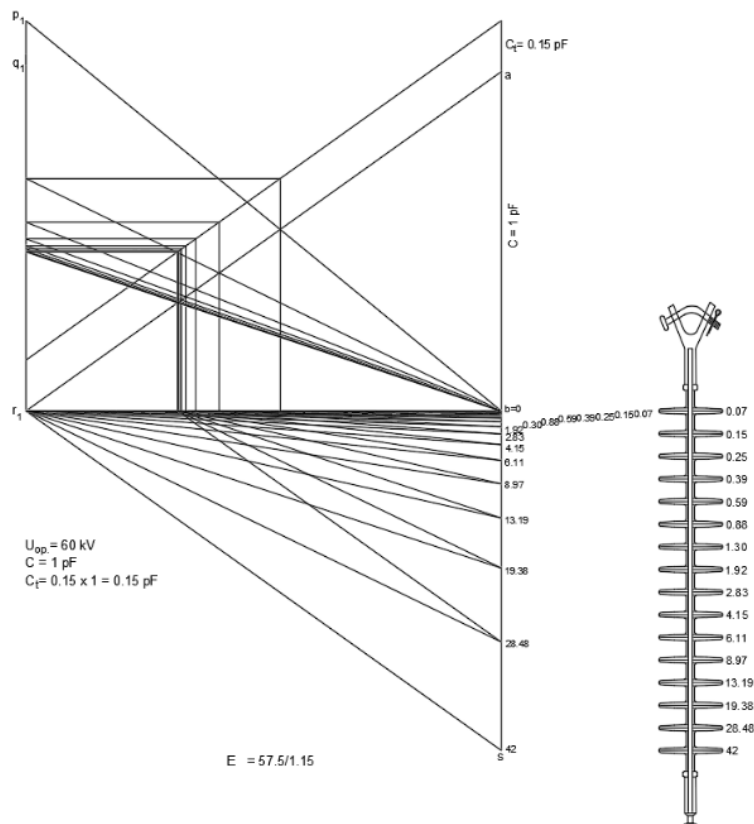


Figura III-11: Potencial que soporta cada Cobertizo en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 15 \% * C$ - Método Gráfico

✓ Repartición de Potencial para un $C_t = 22.27 \% * C$

Tabla III-9: Valores de la Capacitancia Parásita a Tierra C_t para un 22.27 % de la Capacitancia Propia C – Método Gráfico

C (pF)	1	$C_t = 22\% \times C = 0.22$	C_t	1.22 pF		
Nº de Cobertizos del Aislador		$C/(C_n+C)$	Medida del Plano (pF)	Tensión en Cada Cobertizo (kV)	$e_n = E_n - E_{n-1}$ (kV)	Eficiencia del Aislador $E_n/(ne_n)$ (%)
Línea	1	1.00	1.2227	42	15.63	
	2	0.63	0.7727	26.22	9.79	
	3	0.63	0.6585	16.43	6.14	
	4	0.63	0.6197	10.29	3.84	
	5	0.63	0.6054	6.45	2.41	
	6	0.63	0.5998	4.04	1.51	
	7	0.63	0.5976	2.53	0.95	
	8	0.63	0.5968	1.59	0.59	
	9	0.63	0.5964	0.99	0.37	
	10	0.63	0.5964	0.62	0.23	
	11	0.63	0.5962	0.39	0.15	
	12	0.62	0.5962	0.24	0.09	
	13	0.62	0.5962	0.15	0.06	
	14	0.60	0.5962	0.09	0.04	
	15	0.56	0.5962	0.05	0.03	
Tierra	16	0.45	0.5962	0.02	0.02	16.73

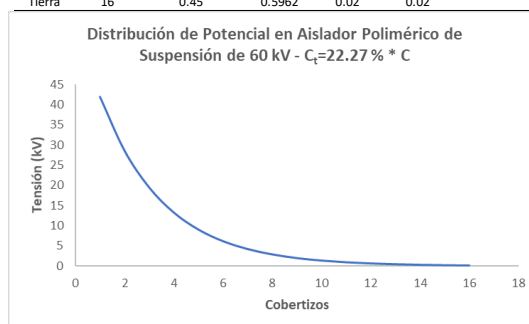


Figura III-12: Distribución de Potencial en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 22.27 \% * C$ - Método Gráfico

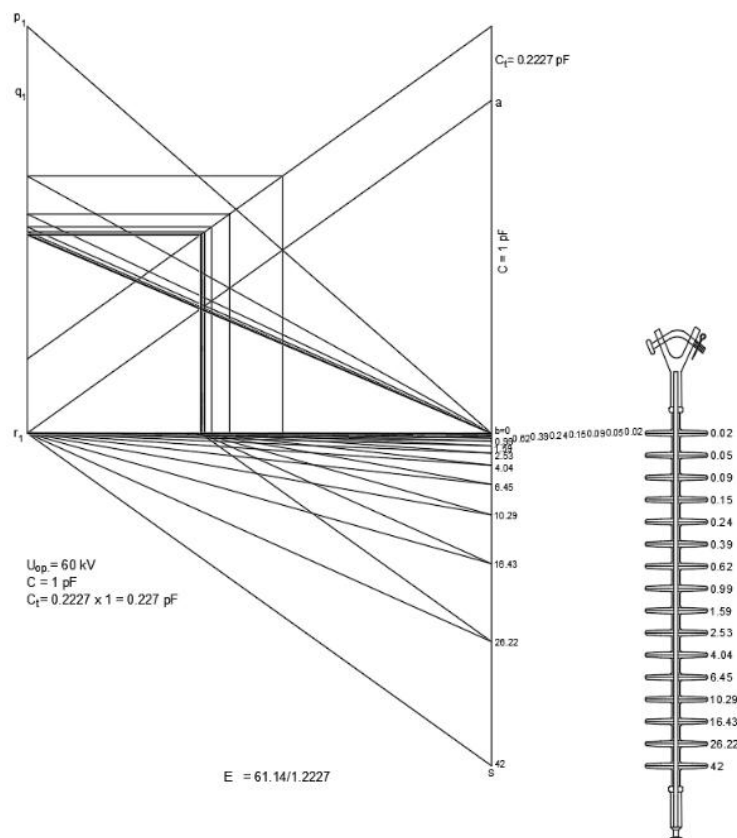


Figura III-13: Potencial que soporta cada Cobertizo en Aislador Polimérico Cuando $C_t = 22.27 \% * C$ - Método Gráfico

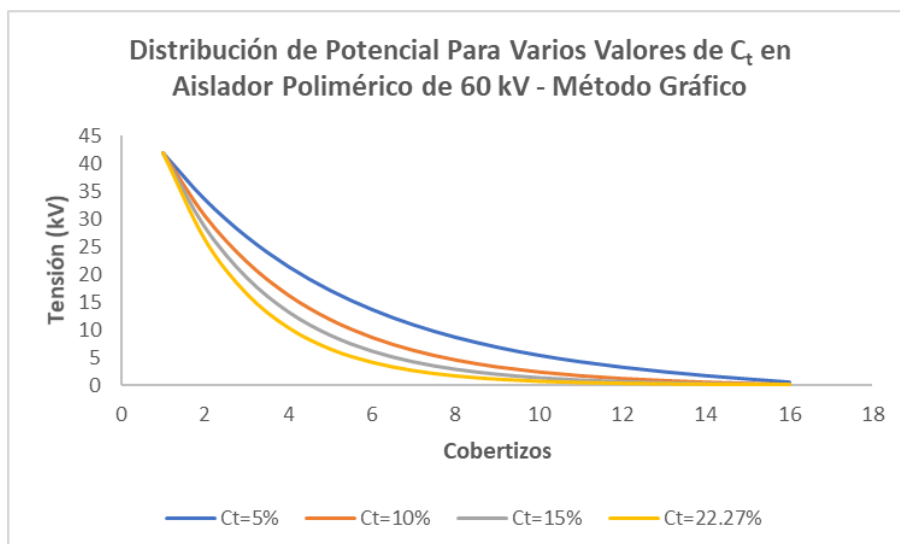


Figura III-14: Resumen de la Distribución de Potencial en Aislador Polimérico para Varios Valores de C_t - Método Gráfico

3.1.1.3 Distribución de Potencial - Método Analítico.

Para determinar la distribución de potencial del aislador polimérico de acuerdo al método analítico, se desarrollan las ecuaciones (I.16) hasta la ecuación (I.23).

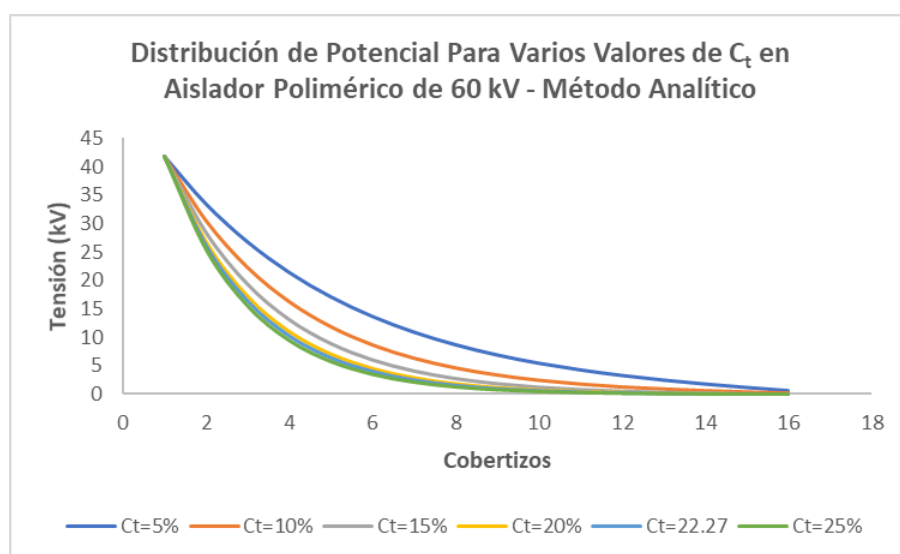


Figura III-15: Resumen de la Distribución de Potencial en Aislador Polimérico para Varios Valores de C_t - Método Analítico

Tabla III-10: Valores de la Distribución de Potencial en Cada Cobertizo del Aislador Polimérico para un $C_t = (5 - 25) \% * C$ – Método Analítico

Parámetros	C (pF)	Ct = 5%xC					Efic. $(f_{n-1}+1)$ ----- $n*f_{n-1}$	Ct = 10%xC					Efic. $(f_{n-1}+1)$ ----- $n*f_{n-1}$	Ct = 15%xC					Efic. $(f_{n-1}+1)$ ----- $n*f_{n-1}$	Ct = 20%xC					Efic. $(f_{n-1}+1)$ ----- $n*f_{n-1}$	Ct = 22.27%xC					Efic. $(f_{n-1}+1)$ ----- $n*f_{n-1}$	Ct = 25%xC					Efic. $(f_{n-1}+1)$ ----- $n*f_{n-1}$									
		C _t (pF)	E _n	$e_{(n)}=E_n-E_{n-1}$		C _t (pF)		E _n	$e_{(n)}=E_n-E_{n-1}$		C _t (pF)	E _n		$e_{(n)}=E_n-E_{n-1}$		C _t (pF)	E _n	$e_{(n)}=E_n-E_{n-1}$		C _t (pF)	E _n	$e_{(n)}=E_n-E_{n-1}$		C _t (pF)		E _n	$e_{(n)}=E_n-E_{n-1}$		C _t (pF)	E _n		$e_{(n)}=E_n-E_{n-1}$		C _t (pF)	E _n	$e_{(n)}=E_n-E_{n-1}$										
		1.00	0.05	60	p.u	kV		p.u	kV	%	0.10	60		p.u	kV	p.u	kV	%		0.15	60	p.u	kV	p.u		kV	%	0.20	60	p.u		kV	p.u	kV	%	0.22		60	p.u	kV	p.u	kV	%	0.25	60	p.u
C _{eq} (pF)	C ₁	1.05							1.10							1.15							1.20						1.22						1.25											
	C ₂	0.56							0.62							0.68							0.75						0.77						0.81											
	C ₃	0.41							0.48							0.56							0.63						0.66						0.70											
	C ₄	0.34							0.43							0.51							0.59						0.62						0.66											
	C ₅	0.30							0.40							0.49							0.57						0.61						0.65											
	C ₆	0.28							0.39							0.48							0.56						0.60						0.64											
	C ₇	0.27							0.38							0.47							0.56						0.60						0.64											
	C ₈	0.26							0.37							0.47							0.56						0.60						0.64											
	C ₉	0.26							0.37							0.47							0.56						0.60						0.64											
	C ₁₀	0.26							0.37							0.47							0.56						0.60						0.64											
	C ₁₁	0.25							0.37							0.47							0.56						0.60						0.64											
	C ₁₂	0.25							0.37							0.47							0.56						0.60						0.64											
	C ₁₃	0.25							0.37							0.47							0.56						0.60						0.64											
	C ₁₄	0.25							0.37							0.47							0.56						0.60						0.64											
	C ₁₅	0.25							0.37							0.47							0.56						0.60						0.64											
	C ₁₆	0.25							0.37							0.47							0.56						0.60						0.64											
f _n	f ₁	1.05	1.00	42	0.20	8.39	1.10	1.00	42	0.27	11.31	1.15	1.00	42	0.32	13.37	1.20	1.00	42	0.36	15.00	1.22	1.00	42	0.37	15.63	1.25	1.00	42	0.37	15.63	1.25	1.00	42	0.39	16.34	1.25	1.00	42	0.39	16.34	1.25	1.00	42	0.39	16.34
	f ₂	0.56	0.80	33.47	0.16	6.71	0.62	0.73	30.55	0.20	8.25	0.68	0.68	28.48	0.22	9.10	0.75	0.64	26.86	0.23	9.62	0.77	0.63	26.22	0.23	9.79	0.81	0.61	25.52	0.24	9.96	0.81	0.61	25.52	0.24	9.96	0.81	0.61	25.52	0.24	9.96	0.81	0.61	25.52	0.24	9.96
	f ₃	0.41	0.80	26.76	0.13	5.38	0.48	0.73	22.29	0.14	6.03	0.56	0.68	19.38	0.15	6.19	0.63	0.64	17.24	0.15	6.18	0.66	0.63	16.43	0.15	6.14	0.70	0.61	15.56	0.15	6.07	0.70	0.61	15.56	0.15	6.07	0.70	0.61	15.56	0.15	6.07	0.70	0.61	15.56	0.15	6.07
	f ₄	0.34	0.80	21.38	0.10	4.31	0.43	0.73	16.27	0.11	4.40	0.51	0.68	13.19	0.10	4.21	0.59	0.64	11.06	0.09	3.96	0.62	0.63	10.29	0.09	3.84	0.66	0.61	9.48	0.09	3.70	0.66	0.61	9.48	0.09	3.70	0.66	0.61	9.48	0.09	3.70	0.66	0.61	9.48	0.09	3.70
	f ₅	0.30	0.80	17.08	0.08	3.45	0.40	0.73	11.87	0.08	3.21	0.49	0.68	8.98	0.07	2.87	0.57	0.64	7.10	0.06	2.54	0.61	0.63	6.45	0.06	2.41	0.65	0.61	5.78	0.05	2.26	0.65	0.61	5.78	0.05	2.26	0.65	0.61	5.78	0.05	2.26	0.65	0.61	5.78	0.05	2.26
	f ₆	0.28	0.80	13.63	0.07	2.77	0.39	0.73	8.66	0.06	2.34	0.48	0.68	6.11	0.05	1.95	0.56	0.64	4.56	0.04	1.63	0.60	0.63	4.04	0.04	1.51	0.64	0.61	3.52	0.03	1.38	0.64	0.61	3.52	0.03	1.38	0.64	0.61	3.52	0.03	1.38	0.64	0.61	3.52	0.03	1.38
	f ₇	0.27	0.80	10.85	0.05	2.23	0.38	0.73	6.32	0.04	1.71	0.47	0.68	4.16	0.03	1.33	0.56	0.64	2.92	0.03	1.05	0.60	0.63	2.53	0.02	0.95	0.64	0.61	2.15	0.02	0.84	0.64	0.61	2.15	0.02	0.84	0.64	0.61	2.15	0.02	0.84	0.64	0.61	2.15	0.02	0.84
	f ₈	0.26	0.79	8.63	0.04	1.80	0.37	0.73	4.60	0.03	1.25	0.47	0.68	2.83	0.02	0.91	0.56	0.64	1.88	0.02	0.67	0.60	0.63	1.59	0.01	0.59	0.64	0.61	1.31	0.01	0.51	0.64	0.61	1.31	0.01	0.51	0.64	0.61	1.31	0.01	0.51	0.64	0.61	1.31	0.01	0.51
	f ₉	0.26	0.79	6.83	0.03	1.46	0.37	0.73	3.35	0.02	0.92	0.47	0.68	1.92	0.01	0.62	0.56	0.64	1.20	0.01	0.43	0.60	0.63	0.99	0.01	0.37	0.64	0.61	0.80	0.01	0.31	0.64	0.61	0.80	0.01	0.31	0.64	0.61	0.80	0.01	0.31	0.64	0.61	0.80	0.01	0.31
	f ₁₀	0.26	0.79	5.38	0.03	1.19	0.37	0.73	2.43	0.02	0.68	0.47	0.68	1.30	0.01	0.42	0.56	0.64	0.77	0.01	0.28	0.60	0.63	0.62	0.01	0.23	0.64	0.61	0.49	0.00	0.19	0.64	0.61	0.49	0.00	0.19	0.64	0.61	0.49	0.00	0.19	0.64	0.61	0.49	0.00	0.19
	f ₁₁	0.25	0.78	4.19	0.02	0.78	0.37	0.72	1.75	0.01	0.37	0.47	0.68	0.88	0.00	0.20	0.56	0.64	0.49	0.00	0.11	0.60	0.63	0.39	0.00	0.09	0.64	0.61	0.30	0.00	0.07	0.64	0.61	0.30	0.00	0.07	0.64	0.61	0.30	0.00	0.07	0.64	0.61	0.30	0.00	0.07
	f ₁₂	0.25	0.77	3.21	0.02	0.65	0.37	0.71	1.25	0.01	0.27	0.47	0.67	0.59	0.00	0.14	0.56	0.64	0.31	0.00	0.07	0.60	0.62	0.24	0.00	0.06	0.64	0.61	0.18	0.00	0.04	0.64	0.61	0.18	0.00	0.04	0.64	0.61	0.18	0.00	0.04	0.64	0.61	0.18	0.00	0.04
	f ₁₃	0.25	0.75	2.40	0.01	0.56	0.37	0.70	0.88	0.01	0.21	0.47	0.66	0.39	0.00	0.10	0.56	0.63	0.20	0.00	0.05	0.60	0.62	0.15	0.00	0.04	0.64	0.60	0.11	0.00	0.03	0.64	0.60	0.11	0.00	0.03	0.64	0.60	0.11	0.00	0.03	0.64	0.60	0.11	0.00	0.03
	f ₁₄	0.25	0.71	1.70	0.01	0.49	0.37	0.67	0.59	0.00	0.17	0.47	0.64	0.25	0.00	0.07	0.56	0.61	0.12	0.00	0.03	0.60	0.60	0.09	0.00	0.02	0.64	0.59	0.06	0.00	0.02	0.64	0.59	0.06	0.00	0.02	0.64	0.59	0.06	0.00	0.02	0.64	0.59	0.06	0.00	0.02
	f ₁₅	0.25	0.64	1.09	0.01	0.44	0.37	0.62	0.36	0.00	0.14	0.47	0.59	0.15	0.00	0.05	0.56	0.57	0.07	0.00	0.02	0.60	0.56	0.05	0.00	0.02	0.64	0.55	0.04	0.00	0.01	0.64	0.55	0.04	0.00	0.01	0.64	0.55	0.04	0.00	0.01	0.64	0.55	0.04	0.00	0.01
	f ₁₆	0.25	0.49	0.53	0.15	0.53	0.37	0.48	0.17	0.14	0.17	0.47	0.47	0.07	0.13	0.07	0.56	0.45	0.03	0.12	0.03	0.60	0.45	0.02	0.11	0.02	0.64	0.44	0.02	0.11	0.02	0.64	0.44	0.02	0.11	0.02	0.64	0.44	0.02	0.11	0.02	0.64	0.44	0.02	0.11	0.02

La distribución de la magnitud de la intensidad del campo eléctrico se determina con la ecuación.

$$E = -\nabla U_x = \sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C}\right)} U_n \left\{ \frac{C_l \cosh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C}\right)} x \right] - C_t \cosh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C}\right)} (L - x) \right]}{(C_t + C_l) \sinh \left(\sqrt{\frac{C_t + C_l}{C}} * L \right)} \right\}$$

Tabla III-11: Resumen de Valores de la Distribución del Campo Eléctrico en Aislador de 60 kV

Número del Aislador	C _l (pF)	C ₀ = C _t (pF)	C (pF)	U _n (kV)	C _l /(C _t +C _l)	m	n	k	E _x (kV/cm)
Línea 0									0.00
1						0.044	237.399		10.94
2						0.060	142.415		6.57
3						0.093	85.434		3.94
4						0.151	51.252		2.37
5						0.249	30.746		1.43
6						0.413	18.445		0.87
7						0.688	11.066		0.54
8						1.146	6.640		0.36
9	0.0384	0.2227	1.000	42	0.147	1.911	3.985	464.067	0.27
10						3.185	2.394		0.26
11						5.309	1.442		0.31
12						8.850	0.874		0.45
13						14.753	0.540		0.70
14						24.592	0.349		1.15
15						40.993	0.252		1.90
Tierra 16						68.334	0.223		3.16

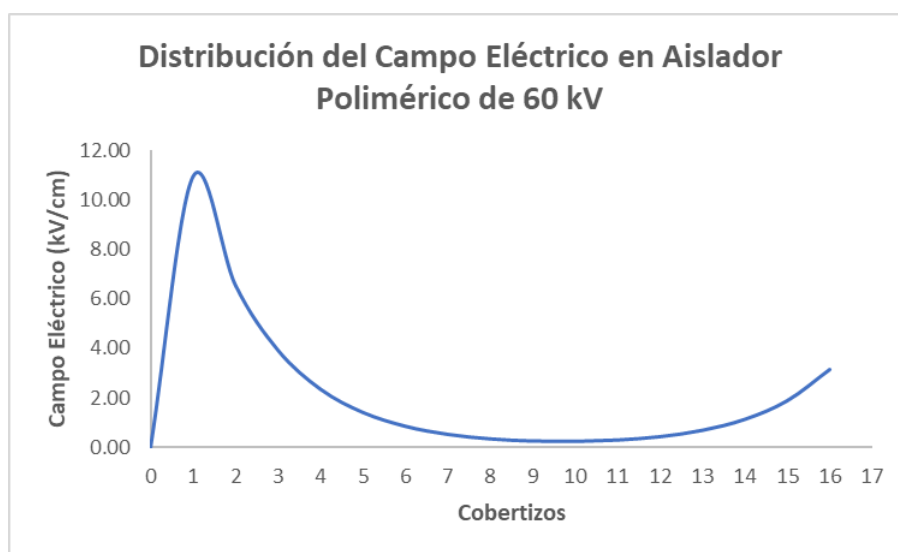
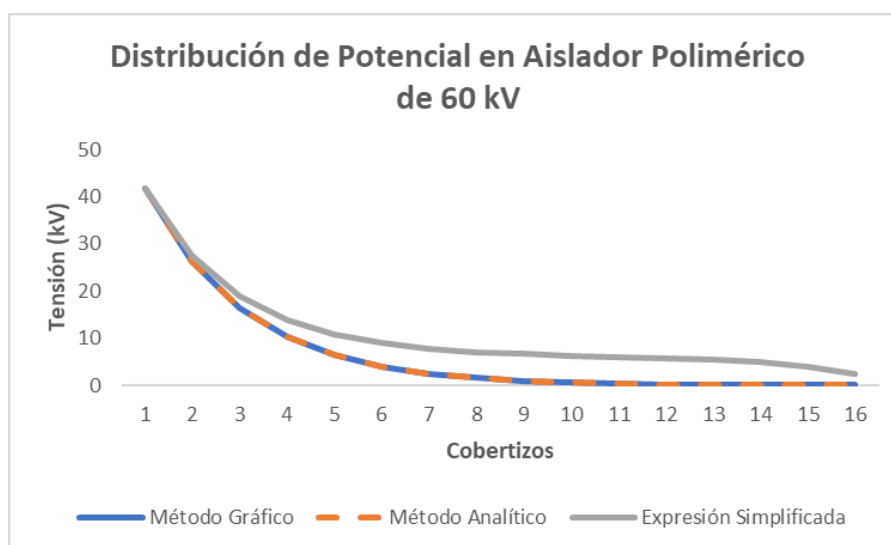


Figura III-16: Distribución del Campo Eléctrico en Aislador Polimérico de 60 kV

Ahora presentamos el resumen de los 3 métodos estudiados para determinar la distribución de potencial.

Tabla III-12: Resumen de Valores de la Distribución de Potencial de Acuerdo a los 3 Métodos Estudiados

		Distribución de Potencial (kV)					
Número de Aislador		Método Gráfico		Método Analítico		Método Expresión Simplificada	
		$C_i =$ $C_t =$	Despreciable 0.223	$C_i =$ $C_t =$	Despreciable 0.223	$C_i =$ $C_t =$	0.038 0.223
Línea	1	15.63	42	15.63	42	14.28	42
	2	9.79	26.22	9.79	26.22	8.57	27.57
	3	6.14	16.43	6.14	16.43	5.14	19.00
	4	3.84	10.29	3.84	10.29	3.09	13.86
	5	2.41	6.45	2.41	6.45	1.86	10.77
	6	1.51	4.04	1.51	4.04	1.12	8.91
	7	0.95	2.53	0.95	2.53	0.69	7.79
	8	0.59	1.59	0.59	1.59	0.44	7.10
	9	0.37	0.99	0.37	0.99	0.31	6.66
	10	0.23	0.62	0.23	0.62	0.26	6.35
	11	0.15	0.39	0.09	0.39	0.28	6.09
	12	0.09	0.24	0.06	0.24	0.37	5.81
	13	0.06	0.15	0.04	0.15	0.56	5.44
	14	0.04	0.09	0.02	0.09	0.91	4.88
	15	0.03	0.05	0.02	0.05	1.49	3.97
Tierra	16	0.02	0.02	0.02	0.02	2.48	2.48

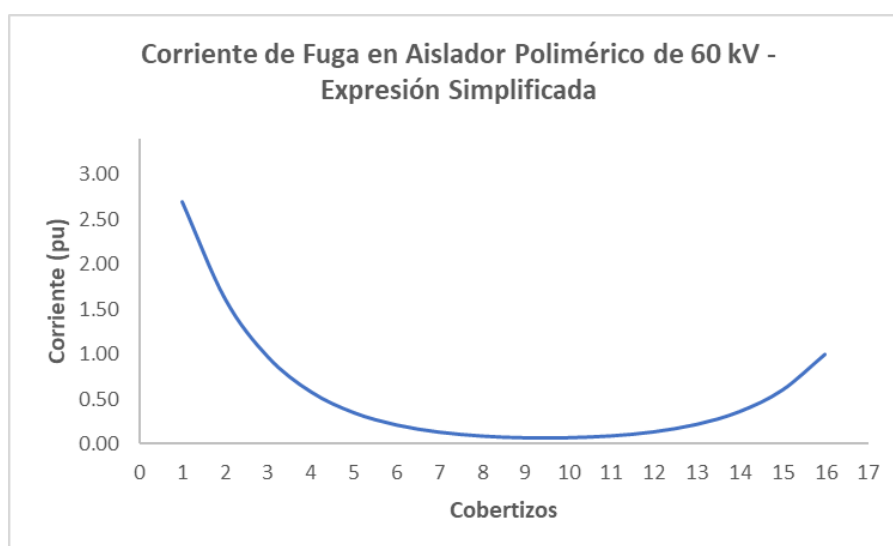
**Figura III-17:** Resumen Gráfico de la Distribución de Potencial en Aislador Polimérico de Acuerdo a los 3 Métodos Estudiados

Con los datos de las capacitancias parásitas a tierra y a línea, es posible determinar la corriente de fuga a través de la unidad aislante.

La corriente I_x en p.u. se determina con la ecuación (I.11); donde $m = I_t \sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C} \right)} x \right]$,
 $n = I_n \sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C} \right)} (L - x) \right]$ y $k = \sinh \left(\sqrt{\frac{C_t + C_l}{C}} * L \right)$.

Tabla III-13: Valores de la Corriente de Fuga en p.u. a Través de Cada Cobertizo de la Unidad Aislante

Número de Aislador x	C _i (pF)	C ₀ = C _t (pF)	C (pF)	I _t (uA)	I _n (uA)	m	n	k	I _x	
									(uA)	(pu)
Línea 1						1.87	16,823.98		9.467	2.69
2						4.25	10,092.65		5.681	1.62
3						7.76	6,054.54		3.411	0.97
4						13.34	3,632.09		2.051	0.58
5						22.48	2,178.86		1.239	0.35
6						37.61	1,307.06		0.757	0.22
7						62.79	784.05		0.476	0.14
8	0.0384	0.2227	1.000	3.51	15.78	104.71	470.27	1,777.23	0.324	0.09
9						174.58	281.97		0.257	0.07
10						291.04	168.92		0.259	0.07
11						485.16	100.94		0.330	0.09
12						808.75	59.90		0.489	0.14
13						1,348.16	34.84		0.778	0.22
14						2,247.32	19.08		1.275	0.36
15						3,746.17	8.42		2.113	0.60
Tierra 16						6,244.69	0.00		3.514	1.00

**Figura III-18:** Corriente de Fuga a Través de Cada Cobertizo de la Unidad Aislante

3.1.2 Las Descargas en la Superficie Contaminada de los Aisladores.

Como la investigación está enfocada al estudio del análisis del campo eléctrico y distribución de potencial causado por efecto de la contaminación ambiental en la superficie de los cobertizos de los aisladores poliméricos de la línea de transmisión L-6547, es muy importante delimitar el área donde se produce con mayor frecuencia el problema de la contaminación.

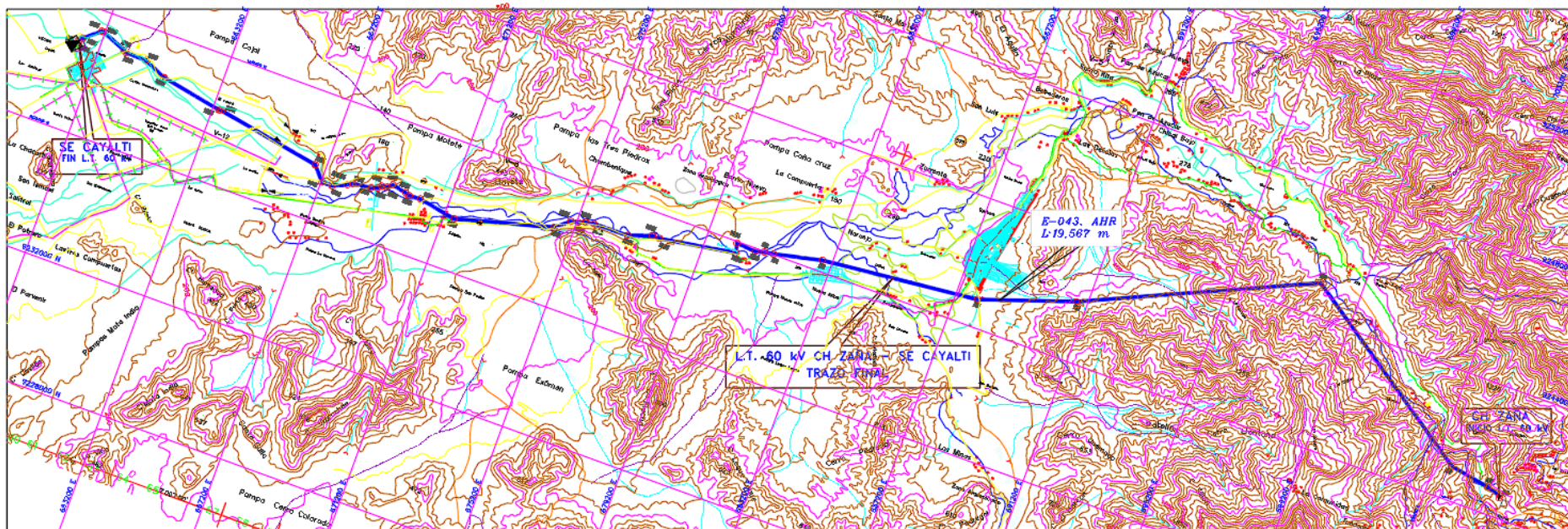


Figura III-19: Recorrido de la Línea Eléctrica L-6547 (Torres Metálicas: 45 unidades, con Alturas entre 18, 21, 33 y 35 m; Postes de Concreto: 154 unidades). Desde la Estructura E044 hasta la Estructura E199 se Presenta el Problema con Mayor Persistencia de la Contaminación

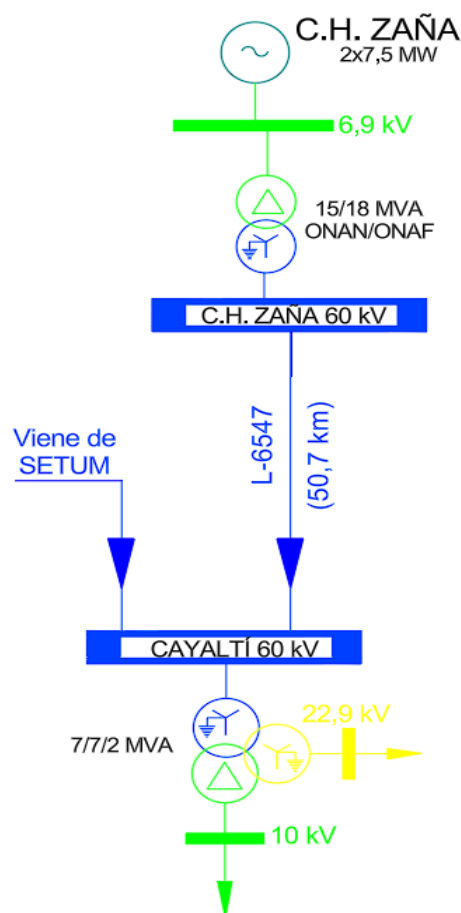


Figura III-20: Diagrama Unifilar del Sistema Eléctrico de la C.H. Zaña de Acuerdo al COES-SINAC

Es necesario definir los compuestos químicos contaminantes que se adhieren en la superficie del aislador polimérico y que producen la formación de descargas cuasiestables y por ende producen los contorneos en su superficie; así como también, genera la concentración anormal en la distribución del campo eléctrico tangencial. Ello producto de la quema indiscriminada de caña de azúcar y la velocidad de viento que arrastra sales y partículas contaminantes que se detallan.

Tabla III-14: Componentes Conformantes de las Sustancias Electrolíticas de la Capa Contaminante [26]

Aporte a la Contaminación	Sustancia Electrolítica	Fórmula Química	Tipo de Compuesto	Conductor de Electricidad
Productos de la Combustión de la Caña de Azúcar	Benceno	C_6H_6	Hidrocarburo Aromático	NO
	Tolueno	$C_6H_5CH_3$	Hidrocarburo Aromático	NO
	Xileno	C_8H_{10}	Hidrocarburo Aromático	NO
	Dióxido de Carbono	CO_2	Gas Incoloro	SI, Débilmente
	Monóxido de Carbono	CO	Gas Incoloro e Inflamable	NO
	Monóxido de Nitrógeno	NO	Gas Incoloro	NO
	Ácido Sulforoso	H_2SO_3	Ácido	SI, Baja o Moderado
	Óxido de Azufre	SO_3	Óxido Sólido e Incoloro	SI, Alta
Productos Arrastrados por el Viento	Potasio	K	Metal Alcalino	SI, Buen Conductor
	Cloruro de Sodio	$NaCl$	Metal Alcalino Sodio, Halógeno Cloro	SI, Buen Conductor

Tabla III-15: Incidencia de la Contribución por Componente para Estimar la Conductividad Total

Componentes	Tipo de Electrolito	Contribución a la Conductividad
NaCl	Fuerte	Alta
K ($\rightarrow$ KOH)	Fuerte	Alta
SO ₃ ($\rightarrow$ H ₂ SO ₄)	Fuerte	Alta
SO ₂ ($\rightarrow$ H ₂ SO ₄)	Débil	Moderada
CO ₂ ($\rightarrow$ H ₂ CO ₃)	Débil	Baja
CO, NO	Neutros	Nula / Despreciable
Hidrocarburos	Neutros	Nula

Tabla III-16: Valores de la Conductividad de la Capa Contaminante de la Superficie del Aislador

Ión	Conductividad Molar, Λ_i (10^{-4} S.m ² /mol)	$c_1 = 1 \text{ mol}/(10^{-3} \text{ m}^3)$	$c_2 = 1 \text{ mol}/(10^{-3} \text{ m}^3)$	$c_3 = 1 \text{ mol}/(10^{-3} \text{ m}^3)$	$c_4 = 0.1 \text{ mol}/(10^{-3} \text{ m}^3)$	$c_5 = 0.01 \text{ mol}/(10^{-3} \text{ m}^3)$	Conductividad Específica, σ_{total}	
		de H ₂ O $\sigma_{\text{Na}^+\text{Cl}^-}$ (S/m)	de H ₂ O $\sigma_{\text{K}^+\text{OH}^-}$ (S/m)	de H ₂ O $\sigma_{2\text{H}^+\text{SO}_4^{2-}}$ (S/m)	de H ₂ O $\sigma_{\text{H}^+\text{HSO}_3^-}$ (S/m)	de H ₂ O $\sigma_{\text{H}^+\text{HCO}_3^-}$ (S/m)	(S/m)	(S/cm)
Na ⁺	50.1							
K ⁺	73.5							
Cl ⁻	76.3							
OH ⁻	198.3							
H ⁺	349.8	12.64	27.18	85.96	3.95	0.39	130.12	1.3012
SO ₄ ²⁻	160							
HSO ₃ ⁻	45							
HCO ₃ ⁻	44.5							

**Figura III-21:** Representación del Espesor de la Capa Contaminante Uniforme en el Cobertizo Número 16 del Aislador Polimérico

Ahora, como se ha mencionado en los anexos C, D y E; para efectos de estudio la capa contaminante se considera uniforme con respecto a su espesor, es por ello que la resistencia de la misma también es constante, Por lo tanto, de los valores obtenidos en la tabla III-17, tanto para la resistencia constante del espesor del electrolito con valor de $r_p = 10,29 \text{ k}\Omega/\text{cm}$, como la resistencia variable de franja ancha y franja estrecha del aislante, cuyos valores promedio son: $R_{SFA} = 341,07 \text{ k}\Omega$; $R_{SFE} = 1\,779,00 \text{ k}\Omega$.

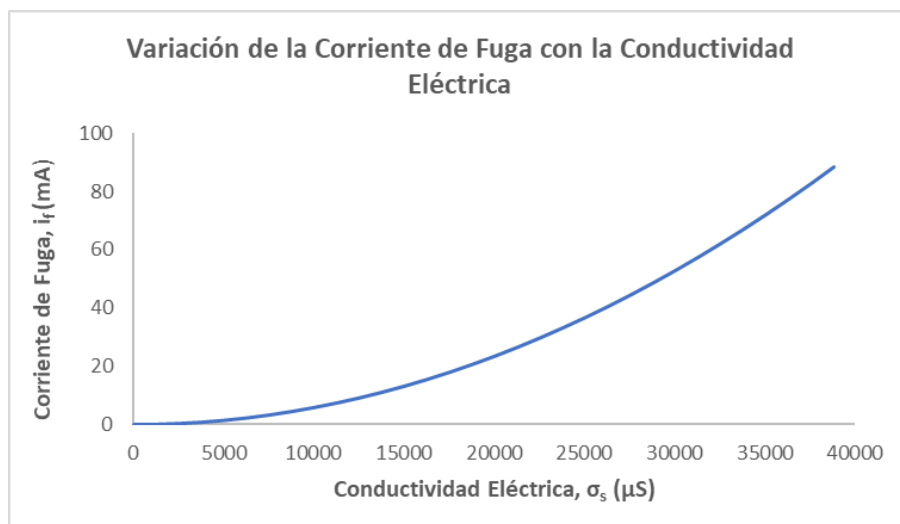


Figura III-22: Variación de la Corriente de Fuga con la Conductividad Eléctrica Superficial

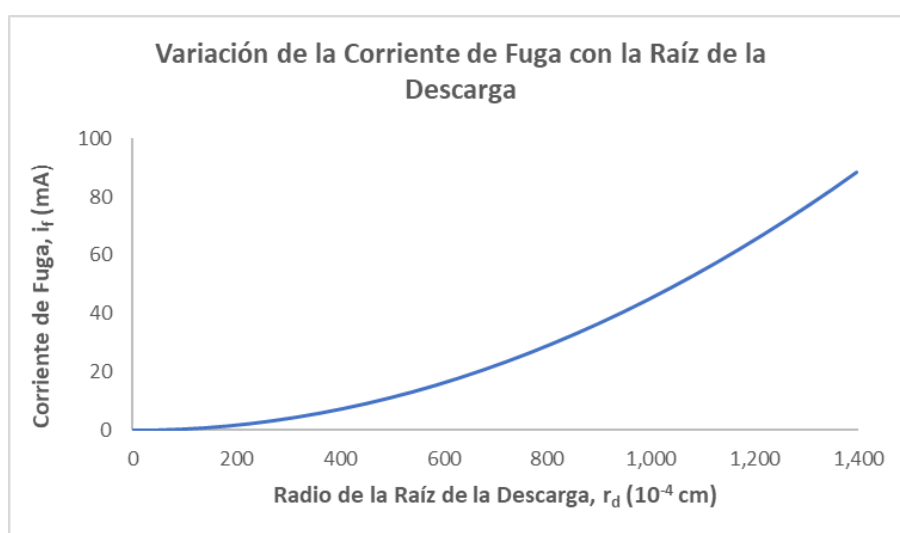


Figura III-23: Variación de la Corriente de Fuga con la Raíz de la Descarga

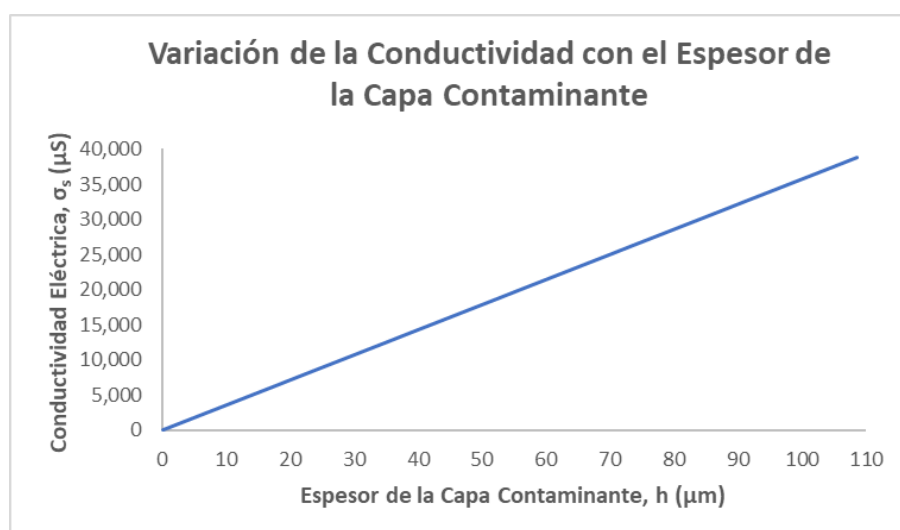


Figura III-24: Variación de la Conductividad con el Espesor del Electrolito Contaminante

Tabla III-17: Valores de la Conductividad Superficial, ESDD, Corriente de Fuga y Resistencia de la Superficie Contaminada del Aislador Polimérico

Espesor de la Capa Contaminante, h (μm)	Conductividad Superficial de la Capa Contaminante, σ _s (μS)	Factor Máximo de Conductividad Superficial, f _{max}	Conductividad Superficial de la Capa Contaminante Corregida, σ _s (μS)	Peso del Compuesto Contaminante, w (mgr./cm ²)	Concentración de la Sustancia Electrolytica, C (gr./cm ³)	Densidad de Depósito de Sal Equivalente, ESDD (mgr./cm ²)	Radio de la Raíz de la Descarga, r _d (10 ⁻⁴ cm)	Corriente de Fuga, i _f (mA)	Longitud de Fuga del Aislador, L (cm)	Longitud de Descarga, x (cm)	Diámetro del Cobertizo, a (cm)	Resistencia Variable de la Superficie Contaminada (kΩ)		Resistencia de la Superficie Contaminada, r _p (kΩ/cm)
												Franja Ancha (a>3h)	Franja Estrecha (a<L)	
0.10	13	2.751	36	0.00	0.41	0.00	0	0.00	203.60	0.05	8.90	697.41	3,419.79	10.29
3.60	468		1,289	0.15		0.01	45	0.09		6.60		473.86	3,313.94	
7.10	924		2,541	0.29		0.03	90	0.37		13.15		442.18	3,208.08	
10.60	1,379		3,794	0.44		0.04	135	0.83		19.70		423.48	3,102.22	
14.10	1,835		5,047	0.58		0.06	180	1.48		26.26		410.07	2,996.36	
17.60	2,290		6,300	0.73		0.07	225	2.31		32.81		399.51	2,890.50	
21.10	2,746		7,552	0.87		0.08	270	3.32		39.36		390.73	2,784.65	
24.60	3,201		8,805	1.01		0.10	315	4.52		45.91		383.15	2,678.79	
28.10	3,656		10,058	1.16		0.11	360	5.90		52.46		376.41	2,572.93	
31.60	4,112		11,311	1.30		0.13	405	7.47		59.01		370.30	2,467.07	
35.10	4,567		12,563	1.45		0.14	450	9.22		65.57		364.65	2,361.22	
38.60	5,023		13,816	1.59		0.15	495	11.16		72.12		359.35	2,255.36	
42.10	5,478		15,069	1.73		0.17	540	13.28		78.67		354.31	2,149.50	
45.60	5,934		16,322	1.88		0.18	585	15.59		85.22		349.45	2,043.64	
49.10	6,389		17,575	2.02		0.20	630	18.08		91.77		344.72	1,937.79	
52.60	6,844		18,827	2.17		0.21	675	20.76		98.32		340.07	1,831.93	
56.10	7,300		20,080	2.31		0.22	720	23.61		104.87		335.44	1,726.07	
59.60	7,755		21,333	2.46		0.24	765	26.66		111.43		330.79	1,620.21	
63.10	8,211		22,586	2.60		0.25	810	29.89		117.98		326.07	1,514.35	
66.60	8,666		23,838	2.74		0.27	855	33.30		124.53		321.22	1,408.50	
70.10	9,122		25,091	2.89		0.28	900	36.90		131.08		316.19	1,302.64	
73.60	9,577		26,344	3.03		0.29	945	40.68		137.63		310.91	1,196.78	
77.10	10,032		27,597	3.18		0.31	990	44.65		144.18		305.28	1,090.92	
80.60	10,488		28,849	3.32		0.32	1,035	48.80		150.73		299.20	985.07	
84.10	10,943		30,102	3.47		0.34	1,080	53.13		157.29		292.51	879.21	
87.60	11,399		31,355	3.61		0.35	1,125	57.65		163.84		284.99	773.35	
91.10	11,854		32,608	3.75		0.36	1,170	62.36		170.39		276.30	667.49	
94.60	12,310		33,861	3.90		0.38	1,215	67.25		176.94		265.87	561.64	
98.10	12,765		35,113	4.04		0.39	1,260	72.32		183.49		252.68	455.78	
101.60	13,220		36,366	4.19		0.41	1,305	77.58		190.04		234.43	349.92	
105.10	13,676		37,619	4.33		0.42	1,350	83.02		196.60		204.09	244.06	
108.60	14,131		38,872	4.47		0.43	1,395	88.65		203.15		78.74	138.20	

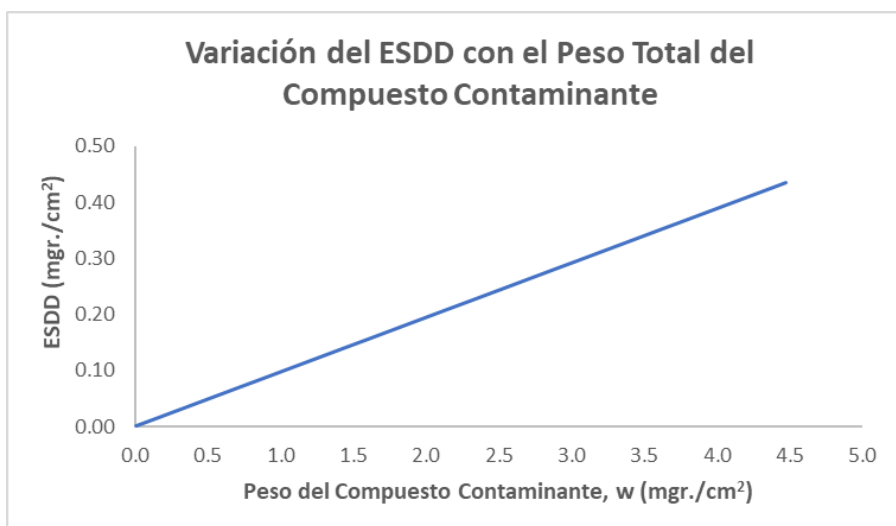


Figura III-25: Variación del ESDD con el Peso Total del Compuesto Contaminante

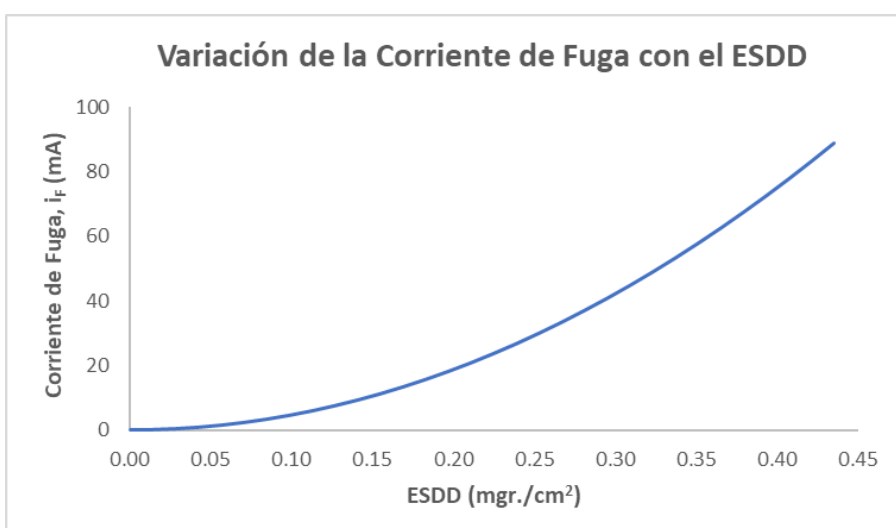


Figura III-26: Variación de la Corriente de Fuga con el ESDD de la Superficie Contaminada

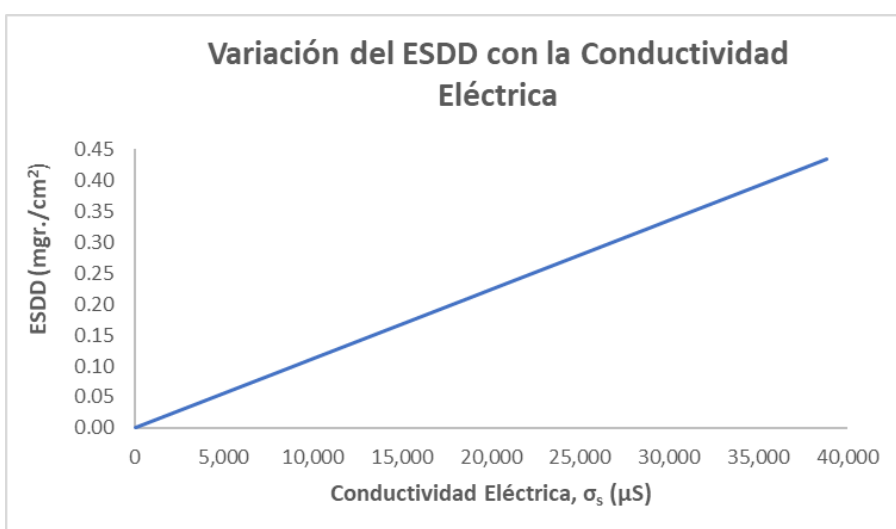


Figura III-27: Variación del ESDD con la Conductividad Eléctrica

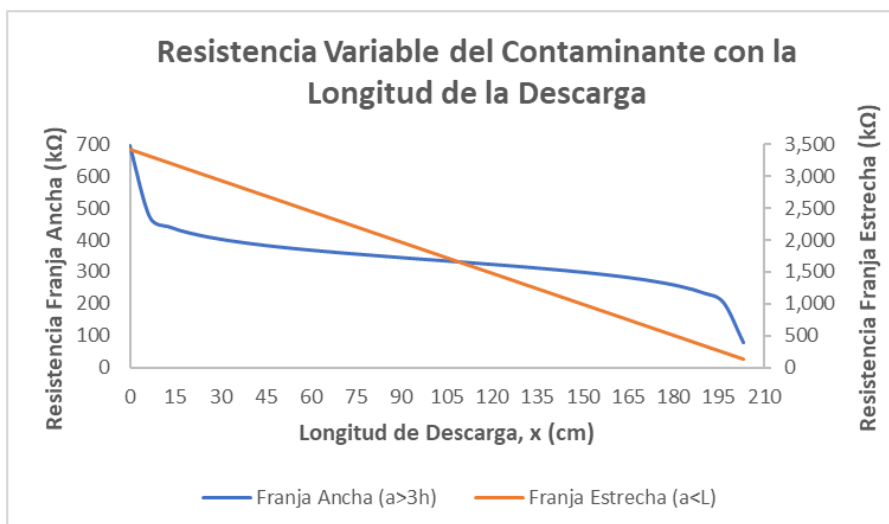


Figura III-28: Variación de la Resistencia del Contaminante con la Longitud de la Descarga

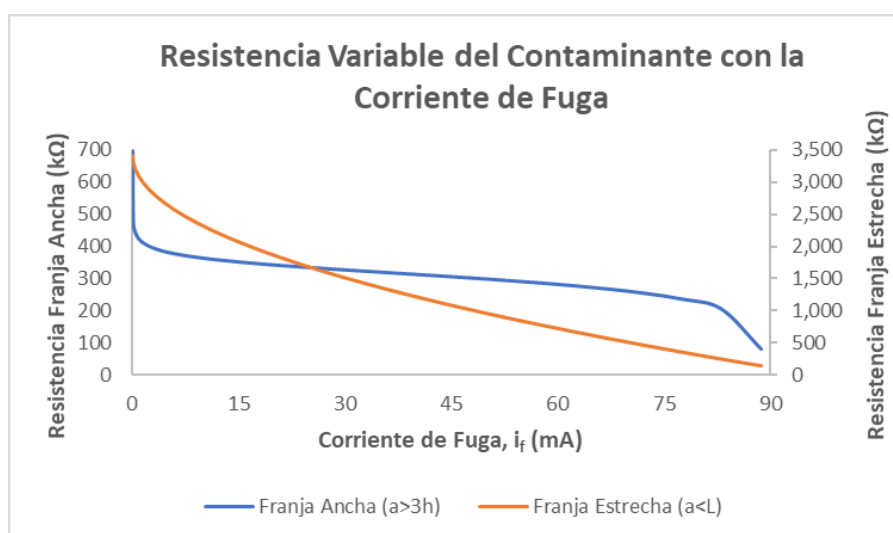


Figura III-29: Variación de la Resistencia del Contaminante con la Corriente de Fuga

con los valores de las constantes de descarga $n = 0,76$, $A = 63 \text{ cm}$, corriente de fuga i_f , longitud de descarga x y la resistencia por unidad de longitud r_p de la región contaminada, se procede a determinar la magnitud del gradiente de tensión necesaria para sostener la descarga; así como también determinar el gradiente de tensión mínima y la corriente de inflexión para mantener la conducción de la descarga.

De la figura III-30 a la figura III-33 muestran lo declarado líneas arriba y el cuadro III-18 muestra el detalle de todos los valores encontrados.

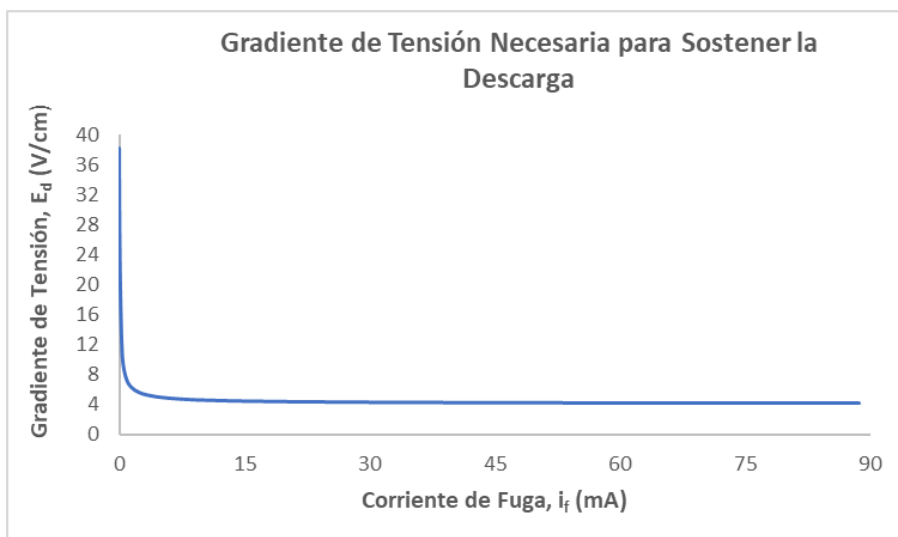


Figura III-30: Gradiente de Tensión Necesaria para Sostener la Descarga

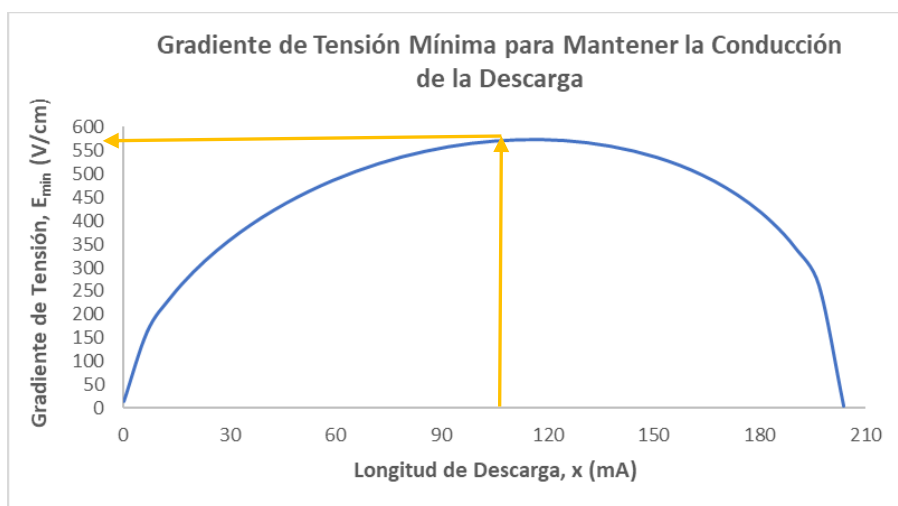


Figura III-31: Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción de la Descarga

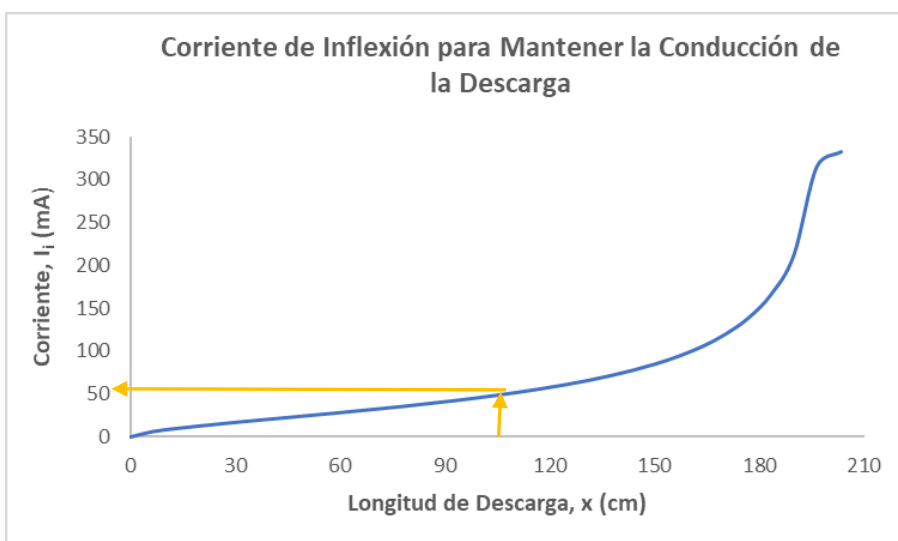


Figura III-32: Corriente de Inflexión para Mantener la Conducción de la Descarga

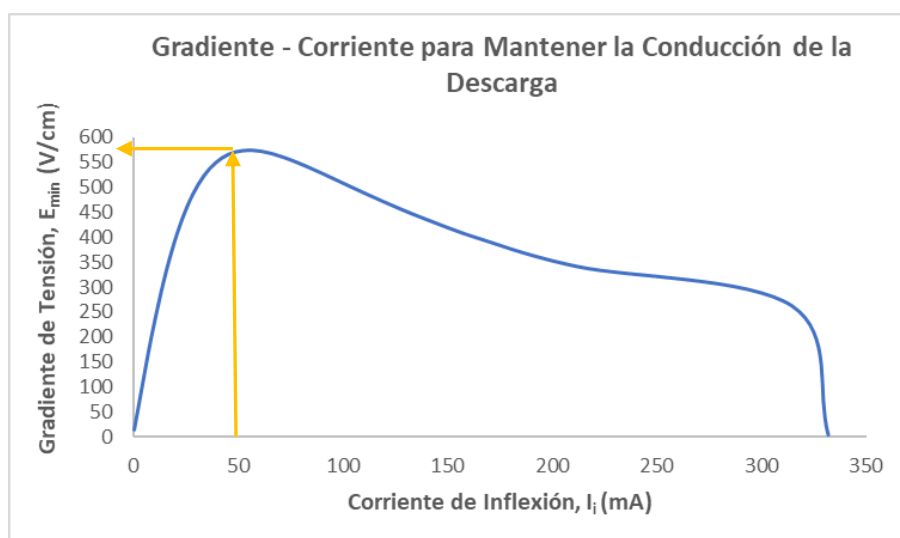


Figura III-33: Gradiente Mínimo - Corriente de Inflexión para Mantener la Conducción de la Descarga

Tabla III-18: Valores de las Constantes n y A ; Así como También, de la Corriente de Fuga, Corriente de Inflexión, Gradiente de Tensión Necesaria para Sostener la Descarga y Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción de la Descarga en la Superficie Contaminada del Aislador Polimérico

Constante de Descarga, n	Constante de Descarga, A (cm)	Longitud de Descarga, x (cm)	Longitud de Fuga, L (cm)	Corriente de Fuga, i_f (mA)	Corriente de Inflexión, i_i (mA)	Tensión Mínima para Mantener la Conducción, V_{min} (kV)	Tensión Necesaria para Sostener la Descarga, V_d (kV)	Gradiente de Tensión Necesaria para Sostener la Descarga, E_d (V/cm)	Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción, E_{min} (V/cm)
0.76	63	0.05	203.60	0.00	0.42	2.88	7.77	38.16	14.14
		6.60		0.09	6.87	33.08	4.51	22.16	162.48
		13.15		0.37	10.36	47.85	2.12	10.42	235.00
		19.70		0.83	13.30	59.09	1.53	7.52	290.25
		26.26		1.48	15.98	68.35	1.29	6.32	335.70
		32.81		2.31	18.53	76.22	1.16	5.69	374.37
		39.36		3.32	21.01	83.04	1.08	5.31	407.85
		45.91		4.52	23.47	88.99	1.03	5.06	437.08
		52.46		5.90	25.93	94.20	1.00	4.89	462.69
		59.01		7.47	28.43	98.77	0.97	4.77	485.11
		65.57		9.22	30.99	102.74	0.95	4.67	504.63
		72.12		11.16	33.63	106.17	0.94	4.60	521.48
		78.67		13.28	36.38	109.09	0.92	4.54	535.82
		85.22		15.59	39.25	111.52	0.91	4.49	547.75
		91.77		18.08	42.28	113.48	0.91	4.45	557.35
		98.32		20.76	45.51	114.96	0.90	4.42	564.65
		104.87		23.61	48.96	115.98	0.89	4.39	569.66
		111.43		26.66	52.69	116.53	0.89	4.37	572.37
		117.98		29.89	56.76	116.61	0.89	4.35	572.73
		124.53		33.30	61.24	116.18	0.88	4.33	570.65
		131.08		36.90	66.22	115.24	0.88	4.32	566.01
		137.63		40.68	71.85	113.74	0.88	4.30	558.66
		144.18		44.65	78.29	111.65	0.87	4.29	548.36
		150.73		48.80	85.80	108.89	0.87	4.28	534.81
		157.29		53.13	94.76	105.39	0.87	4.27	517.61
		163.84		57.65	105.76	101.02	0.87	4.26	496.16
		170.39		62.36	119.79	95.61	0.87	4.25	469.61
		176.94		67.25	138.67	88.90	0.86	4.25	436.64
		183.49		72.32	166.16	80.43	0.86	4.24	395.04
		190.04		77.58	212.07	69.32	0.86	4.23	340.49
		196.60		83.02	314.60	53.34	0.86	4.23	261.97
		203.60		88.65	331.97	0.84	0.86	4.22	4.13

Nota: Los valores achurados de color naranja son los valores mostrados con flechas del mismo color en las figuras III-31, III-32 y III-33.

Ahora es necesario conocer el valor crítico de la tensión mínima requerida para mantener la conducción de la descarga, para ello utilizamos la siguiente ecuación:

$$V_c = A^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} L r_p^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + V_E$$

Reemplazando datos, se obtiene:

$$V_c = \frac{\left[63^{\left(\frac{1}{0,76+1}\right)} * 203,60 * (10,29 * 1000)^{\left(\frac{0,76}{0,76+1}\right)} \right]}{1\ 000} + 0,84 = \frac{10,53 * 203,60 * 54,03}{1\ 000} + 0,84$$

$$V_c = 115,77 + 0,84 = 116,61\ kV$$

Así como también conocer el gradiente crítico de tensión mínima requerida para mantener la conducción de la descarga, para ello utilizamos la siguiente ecuación:

$$E_c = A^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} r_p^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + \frac{V_E}{L}$$

Reemplazando datos, se obtiene:

$$E_c = 63^{\left(\frac{1}{0,76+1}\right)} * (10,29 * 1000)^{\left(\frac{0,76}{0,76+1}\right)} + \frac{0,84 * 1000}{203,60} = 10,53 * 54,03 + 3,79$$

$$E_c = 572,73\ V/cm$$

También debemos conocer la longitud de descarga crítica que hace que tomen estos valores encontrados tanto la tensión como el gradiente de tensión crítico. Entonces, utilizamos la ecuación siguiente:

$$x_c = \frac{L}{1+n}$$

Reemplazando datos, se obtiene:

$$x_c = \frac{203,60}{1+0,76} = 115,68\ cm$$

La longitud de descarga crítica nos indica que al ser superado este valor el cual representa un 57 % de la longitud de fuga del aislador, se producir una reducción de la tensión mínima por debajo de la tensión crítica con una alta probabilidad de que se produzca una inflamación (flashover) o dicho de una manera más sencilla se quemaría el aire circundante produciendo un canal incandescente en la masa de aire.

Es preciso resaltar que la tensión aplicada entre los electrodos del aislador es de 42 kV, sin embargo, se tiene una tensión crítica que alcanza el valor de 116,61 kV, que representa un 2,78 veces la tensión aplicada. Valor crítico que indica el valor máximo que puede llegar a incrementarse la tensión mínima de conducción sin producirse flashover, si la tensión de conducción se reduce por debajo de la tensión critica superando la longitud de descarga

crítica, entonces se producirá la quema del aire circundante generando un flashover o un canal incandescente en la masa de aire.

Por otra parte, con respecto al gradiente de tensión crítica, este valor se define como la relación crítica entre la tensión aplicada y la resistencia de la banda contaminada r_p ; de ello se deduce que para un determinado r_p el flashover es imposible para cualquier gradiente de tensión crítica E_c , similarmente, para un gradiente de tensión crítico dado E_c el flashover es imposible para cualquier resistencia $r > r_p$. en general, el flashover no se producirá sí se cumple que:

$$E < E_c$$

Ahora, la corriente crítica i_c se alcanza cuando toma el valor de la longitud de descarga crítica x_c , en otras palabras, la corriente crítica es la corriente de inflexión i_i que se alcanza una tensión crítica al aplicarse una tensión en los electrodos del aislador. La ecuación ya deducida en el anexo E, es:

$$i_c = \left[\frac{A}{E_c} \right]^{(1/n)}$$

Reemplazando datos, se obtiene:

$$i_c = \left[\frac{63}{572,73} \right]^{(1/0,76)} = 54,79 \text{ mA}$$

La tabla III-19 muestra el resultado de las variables críticas.

Tabla III-19: Valores Críticos Alcanzados Después de Aplicar una Tensión de 42 kV entre los Electrodos del Aislador Polimérico

Tensión Crítica Mínima para Mantener la Conducción, V_c (kV)	Gradiente de Tensión Crítica Mínima para Mantener la Conducción, E_c (V/cm)	Longitud de Descarga Crítica, x_c (cm)	Corriente Crítica, i_c (mA)
116.61	572.73	115.68	54.79

Los resultados obtenidos hasta el momento han sido determinados considerando el escenario de mantener la resistencia por unidad de longitud de la capa contaminante de valor $r_p = 10,29 \text{ kV/cm}$ invariable en el tiempo durante todo el fenómeno de las pre-descargas, manteniendo la uniformidad del espesor de la capa contaminante. El escenario que nos proponemos analizar a partir de ahora es el de la variación del valor de r_p del contaminante, para poder obtener la tensión y gradiente mínimo, corriente crítica, tensión y

gradiente de tensión crítica y longitud máxima de la descarga. Como el valor de $a = 8,90 \text{ cm}$ y el valor de la longitud de fuga $L = 203,60 \text{ cm}$; se cumple que $a < L$; por lo tanto, procedemos a determinar el comportamiento todas las variables de interés para el caso de la franja estrecha:

Franja Estrecha ($a < L$). – La corriente crítica la determinamos con la ecuación:

$$i_c = \left(\frac{2A}{r_p} \right)^{\left(\frac{1}{n+1} \right)}$$

Reemplazando datos se obtiene:

$$i_c = \left(\frac{2 * 63}{8,74 * 10^3} \right)^{\left(\frac{1}{0,76+1} \right)}$$

$$i_c = 89,94 \text{ mA}$$

Con este valor de la corriente crítica, procedemos a determinar el gradiente de potencial crítico, con la ecuación:

$$E_c = A^{\left(\frac{1}{n+1} \right)} \left(\frac{r_p}{2} \right)^{\left(\frac{n}{n+1} \right)} \left\{ 1 + \frac{a}{2L\pi} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i_c} \right) \right\} + \frac{V_E}{L}$$

Reemplazando datos se obtiene:

$$E_c = 63^{\left(\frac{1}{0,76+1} \right)} \left(\frac{8,74 * 10^3}{2} \right)^{\left(\frac{0,76}{0,76+1} \right)} \left\{ 1 + \frac{8,90}{2 * 203,60 * \pi} \ln \left(\frac{1,45 * 8,90^2}{4 * \pi * \frac{89,94}{10^{-3}}} \right) \right\} + \frac{0,84 * 10^3}{203,60}$$

$$E_c = 10,53 * 37,32 * \{1 + 0,03\} + 4,13$$

$$E_c = 409,70 \text{ V/cm}$$

Como podemos ver de los cálculos obtenidos, la corriente crítica se produce cuando la corriente de fuga alcanza el valor de 89,94 mA, con esta corriente de fuga crítica se obtiene un gradiente de tensión (campo eléctrico radial) de 409,70 V/cm. Es de suma importancia precisar que estos valores críticos son los que determinan a partir de que puntos se producirá o no un flashover; es decir, que si superamos estos valores críticos se producirá la combustión en el medio circundante longitudinalmente al aislador polimérico.

Las figuras III-34, III-35 y III-36, muestran lo explicado líneas arriba.

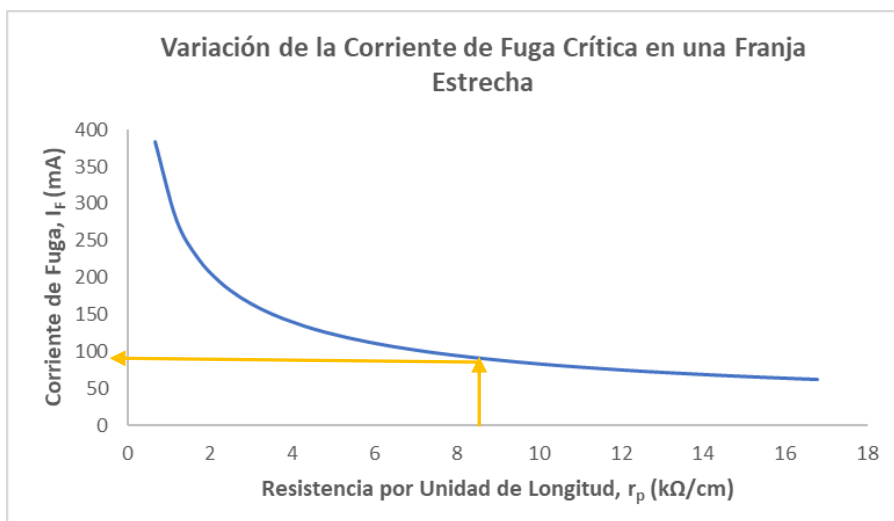


Figura III-34: Variación de la Corriente de Fuga Crítica en una Franja Estrecha

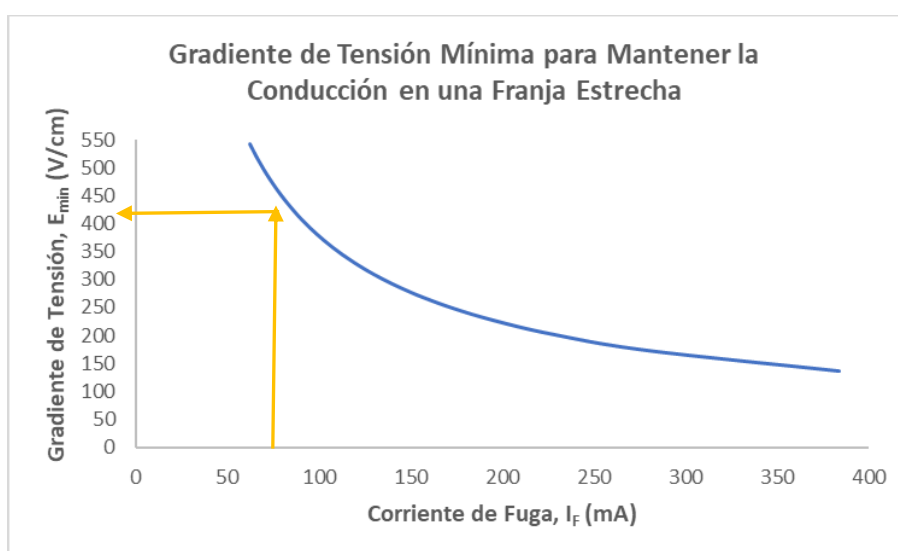


Figura III-35: Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción

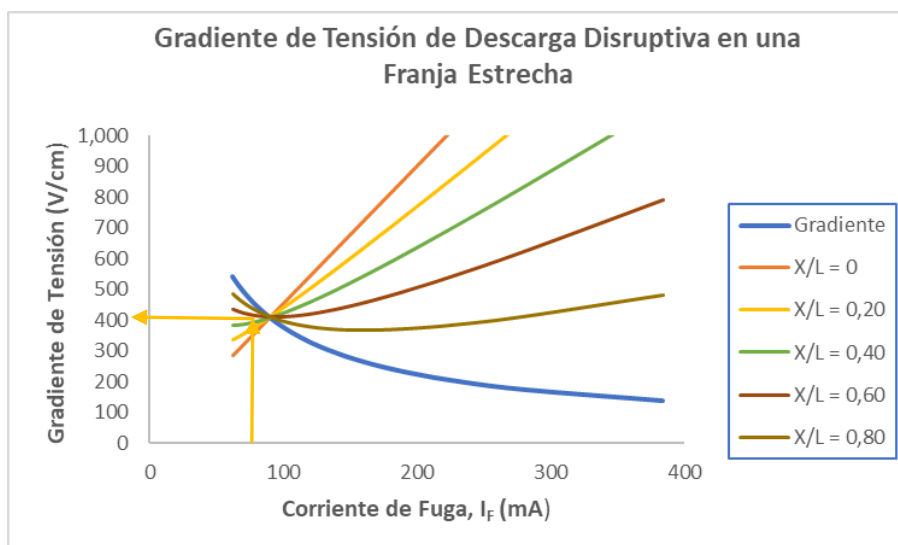


Figura III-36: Gradiente de Tensión de Descarga Disruptiva en una Franja Estrecha

Tabla III-20: Tensión, Gradiente de Tensión, Corriente de Fuga y Valores Críticos de una Franja Estrecha

Franja Estrecha, a < L											
Resistencia Variable de la Superficie Contaminada, R _{SFE} (kΩ)	Resistencia por Unidad de Longitud, r _p (kΩ/cm)	Corriente de Fuga Crítica, I _{FC} (mA)	Tensión Mínima para Mantener la Conducción, V _{min} (kV)	Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción, E _{min} (V/cm)	Gradiente de Tensión de Descarga Disruptiva, E _s (V/cm)					Corriente Crítica, i _c (mA)	Gradiente de Tensión Crítica, E _c (V/cm)
					0	0.20	0.40	0.60	0.80		
3,419.79	16.80	62	110.61	543.29	284.60	334.60	384.60	434.60	484.60	89.94	409.70
3,313.94	16.28	63	109.12	535.95	289.62	337.24	384.86	432.48	480.09		
3,208.08	15.76	64	107.60	528.48	294.90	340.06	385.22	430.38	475.54		
3,102.22	15.24	66	106.05	520.87	300.46	343.08	385.70	428.32	470.94		
2,996.36	14.72	67	104.47	513.12	306.32	346.31	386.31	426.30	466.29		
2,890.50	14.20	68	102.86	505.20	312.52	349.79	387.05	424.32	461.59		
2,784.65	13.68	70	101.21	497.13	319.08	353.52	387.96	422.40	456.84		
2,678.79	13.16	71	99.53	488.87	326.05	357.55	389.05	420.55	452.05		
2,572.93	12.64	73	97.82	480.43	333.46	361.90	390.34	418.77	447.21		
2,467.07	12.12	75	96.06	471.79	341.36	366.60	391.84	417.09	442.33		
2,361.22	11.60	77	94.26	462.94	349.81	371.71	393.61	415.50	437.40		
2,255.36	11.08	79	92.41	453.87	358.88	377.26	395.65	414.04	432.43		
2,149.50	10.56	81	90.51	444.55	368.63	383.33	398.03	412.73	427.43		
2,043.64	10.04	83	88.56	434.96	379.17	389.97	400.78	411.58	422.39		
1,937.79	9.52	86	86.55	425.09	390.60	397.28	403.96	410.64	417.33		
1,831.93	9.00	88	84.48	414.92	403.05	405.35	407.65	409.95	412.25		
1,726.07	8.48	91	82.34	404.40	416.67	414.30	411.92	409.54	407.16		
1,620.21	7.96	95	80.12	393.51	431.68	424.28	416.88	409.48	402.09		
1,514.35	7.44	99	77.82	382.22	448.29	435.48	422.67	409.86	397.05		
1,408.50	6.92	103	75.43	370.47	466.84	448.15	429.46	410.77	392.08		
1,302.64	6.40	107	72.93	358.21	487.69	462.57	437.45	412.33	387.21		
1,196.78	5.88	113	70.32	345.37	511.39	479.17	446.95	414.74	382.52		
1,090.92	5.36	119	67.57	331.88	538.60	498.47	458.34	418.21	378.08		
985.07	4.84	126	64.67	317.62	570.30	521.22	472.15	423.08	374.01		
879.21	4.32	134	61.58	302.48	607.81	548.49	489.16	429.84	370.51		
773.35	3.80	144	58.28	286.26	653.14	581.82	510.50	439.18	367.87		
667.49	3.28	157	54.71	268.73	709.36	623.65	537.95	452.25	366.55		
561.64	2.76	173	50.81	249.56	781.54	678.00	574.46	470.92	367.38		
455.78	2.24	195	46.46	228.21	878.78	752.06	625.34	498.62	371.89		
349.92	1.72	227	41.50	203.84	1,019.47	860.44	701.40	542.36	383.33		
244.06	1.20	278	35.59	174.83	1,248.39	1,038.77	829.15	619.53	409.91		
138.20	0.68	384	27.97	137.37	1,719.22	1,409.67	1,100.13	790.58	481.04		

Franja Ancha ($a > 3 \cdot h$). – El valor del diámetro del cobertizo $a = 8,90 \text{ cm}$ y el valor máximo del espesor de la capa contaminada o espesor del electrolito en la superficie del aislador $h = 108,60 \mu\text{m} \rightarrow 3 \cdot h = 325,80 \mu\text{m}$; entonces, se cumple que $a > 3 \cdot h$.

La ecuación para determinar la corriente crítica es:

$$i_c = (2LA\sigma_s)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

Reemplazando datos se obtiene:

$$i_c = (2 \cdot 203,60 \cdot 63 \cdot 3,48 \cdot 10^{-6})^{\left(\frac{1}{0,76+1}\right)} = 253,28 \text{ mA}$$

$$\text{Cuando } x = \frac{L}{2} = \frac{203,60}{2} = 101,80 \text{ cm}$$

Para este escenario, el electrolito contaminante se distribuye radialmente sobre la superficie del aislador, careciendo de un punto de singularidad, originando el punto de inflexión de la corriente de fuga crítica cuando la longitud de la descarga $x = L/2$, en este momento se alcanza el gradiente de tensión crítica, tal como lo muestran las figuras III-37, III-38, III-39 y el resumen de valores de la tabla III-21.

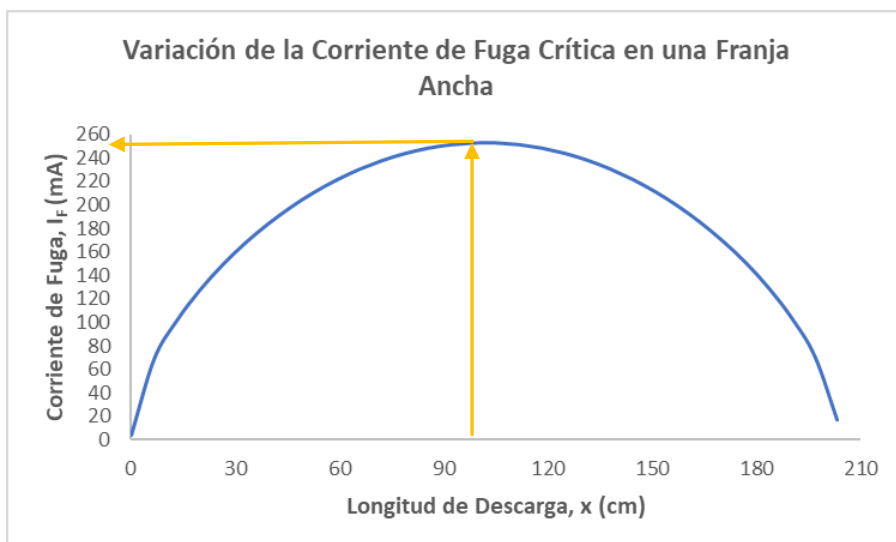


Figura III-37: Variación de la Corriente de Fuga Crítica en una Franja Ancha

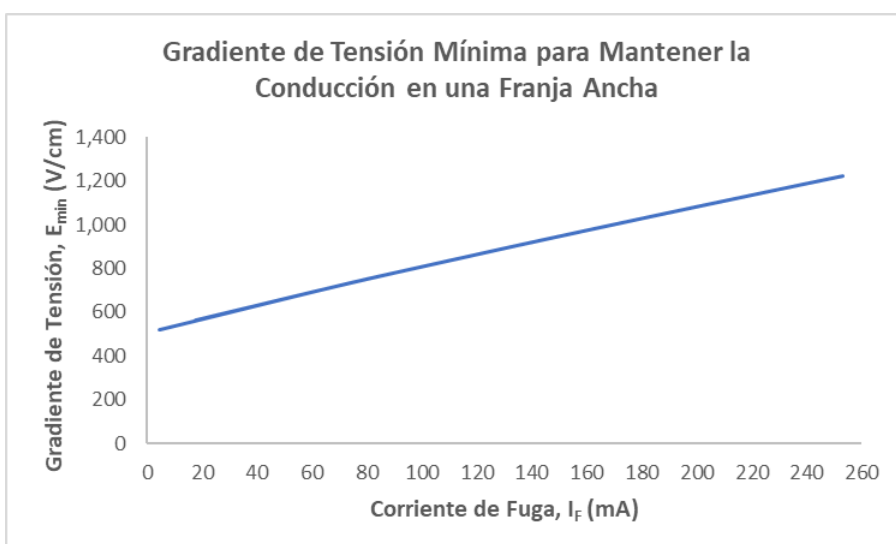


Figura III-38: Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción

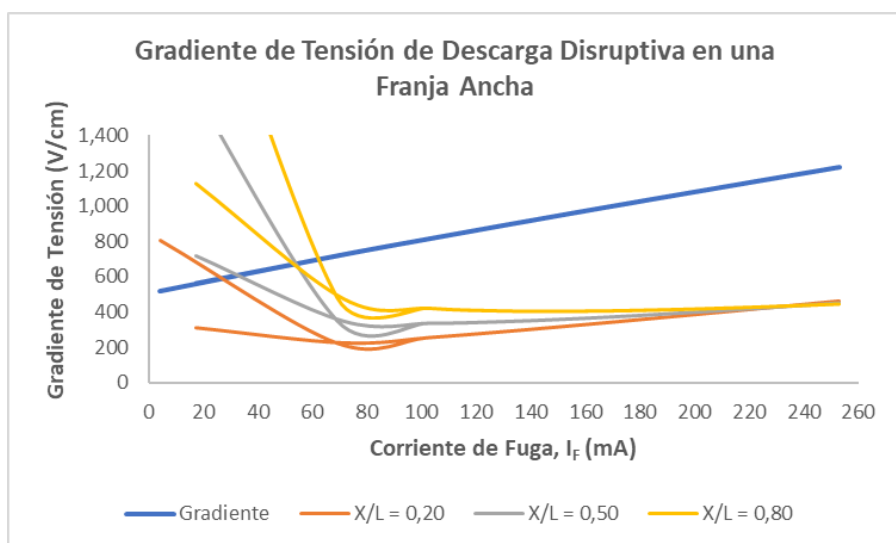


Figura III-39: Gradiente de Tensión de Descarga Disruptiva en una Franja Ancha

Tabla III-21: Tensión, Gradiente de Tensión, Corriente de Fuga y Valores Críticos de una Franja Ancha

Fraja Ancha a > 3h												
Resistencia Variable de la Superficie Contaminada, R_{SFA} (k Ω)	Resistencia por Unidad de Longitud, r_p (k Ω /cm)	Longitud de Descarga, x (cm)	Corriente de Fuga Crítica, I_{fc} (mA)			Tensión Mínima para Mantener la Conducción, V_{min} (kV)	Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción, E_{min} (V/cm)	Gradiente de Tensión de Descarga Disruptiva, E_s (V/cm)			Corriente Crítica, I_c (mA)	Gradiente de Tensión Crítica, E_c (V/cm)
			0.20	0.50	0.80			0.20	0.50	0.80		
697.41	3.43	0.05	4.32			105.94	520.32	803.51	1,987.70	3,171.90	253.28	723.19
473.86	2.33	6.60	69.11			146.67	720.38	225.73	352.27	478.82		
442.18	2.17	13.15	101.95			165.77	814.21	256.39	337.79	419.20		
423.48	2.08	19.70	127.65			180.37	885.92	287.51	345.60	403.68		
410.07	2.01	26.26	149.23			192.45	945.25	315.89	358.40	400.91		
399.51	1.96	32.81	167.88			202.77	995.91	341.36	372.29	403.22		
390.73	1.92	39.36	184.16			211.70	1,039.77	364.08	385.91	407.75		
383.15	1.88	45.91	198.40			219.46	1,077.88	384.22	398.69	413.16		
376.41	1.85	52.46	210.81			226.18	1,110.89	401.93	410.35	418.77		
370.30	1.82	59.01	221.51			231.95	1,139.23	417.28	420.72	424.16		
364.65	1.79	65.57	230.59			236.82	1,163.18	430.36	429.71	429.07		
359.35	1.76	72.12	238.10			240.84	1,182.93	441.21	437.28	433.35		
354.31	1.74	78.67	244.09			244.04	1,198.62	449.87	443.37	436.88		
349.45	1.72	85.22	248.57			246.43	1,210.35	456.36	447.98	439.59		
344.72	1.69	91.77	251.56			248.02	1,218.18	460.70	451.07	441.44		
340.07	1.67	98.32	253.08	187.28	253.28	248.83	1,222.15	462.90	452.64	442.38		
335.44	1.65	104.87	253.12			248.85	1,222.27	462.97	452.69	442.41		
330.79	1.62	111.43	251.69			248.09	1,218.54	460.90	451.21	441.52		
326.07	1.60	117.98	248.79			246.55	1,210.95	456.69	448.21	439.73		
321.22	1.58	124.53	244.40			244.21	1,199.46	450.33	443.70	437.07		
316.19	1.55	131.08	238.51			241.06	1,184.01	441.80	437.70	433.59		
310.91	1.53	137.63	231.10			237.09	1,164.51	431.09	430.22	429.35		
305.28	1.50	144.18	222.12			232.27	1,140.83	418.15	421.31	424.47		
299.20	1.47	150.73	211.52			226.56	1,112.77	402.94	411.02	419.11		
292.51	1.44	157.29	199.22			219.90	1,080.06	385.38	399.45	413.51		
284.99	1.40	163.84	185.09			212.21	1,042.28	365.39	386.73	408.06		
276.30	1.36	170.39	168.94			203.36	998.80	342.83	373.14	403.45		
265.87	1.31	176.94	150.46			193.13	948.59	317.54	359.24	400.95		
252.68	1.24	183.49	129.08			181.18	889.88	289.35	346.30	403.26		
234.43	1.15	190.04	103.69			166.77	819.11	258.36	337.96	417.56		
204.09	1.00	196.60	71.47			148.06	727.22	227.33	349.65	471.97		
78.74	0.39	203.02	17.37			114.81	563.88	312.60	719.52	1,126.45		

3.1.3 Aplicación del Método de Elementos Finitos.

Para la aplicación de este método al presente estudio, se utilizó el programa COMSOL MULTIPHYSICS 5.5; el cual ha sido utilizado con la única finalidad de poder visualizar la realidad virtual de la distribución de las líneas de campo eléctrico o gradiente de tensión y el potencial eléctrico, respectivamente.

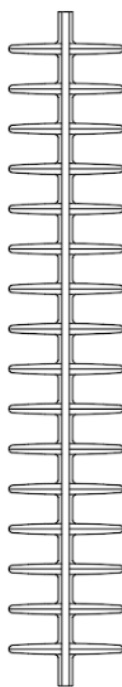


Figura III-40: Representación Gráfica en Autocad a Escala Real del Aislador Polimérico como Dato de Entrada al Programa COMSOL MULTIPHYSICS 5.5

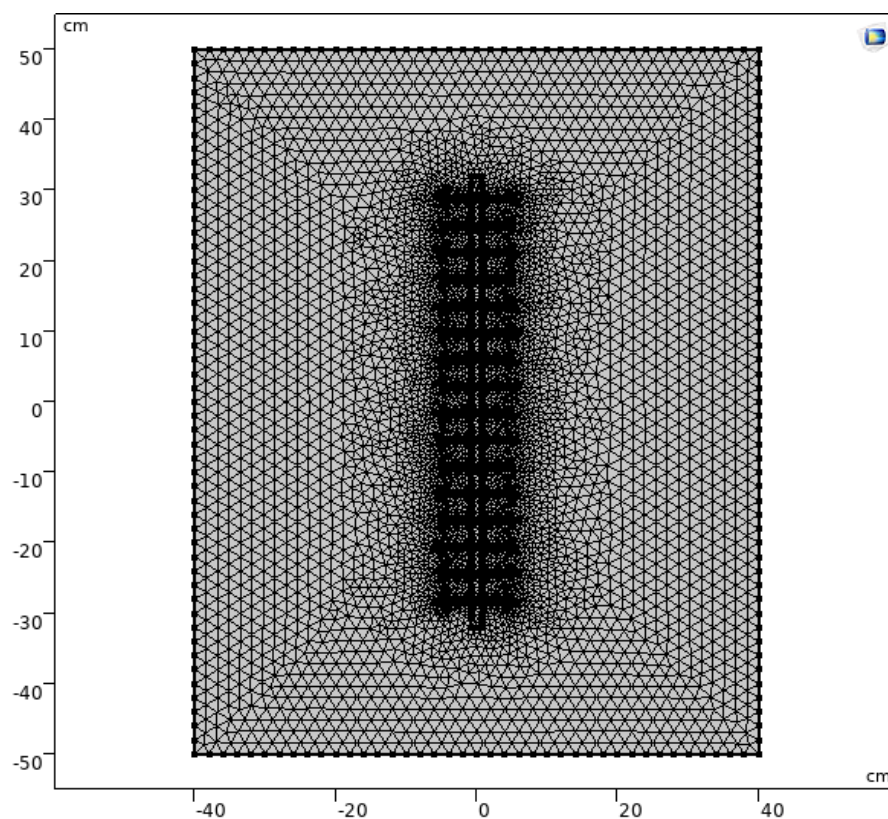


Figura III-41: Discretización en Elementos Triangulares del Aislador Polimérico

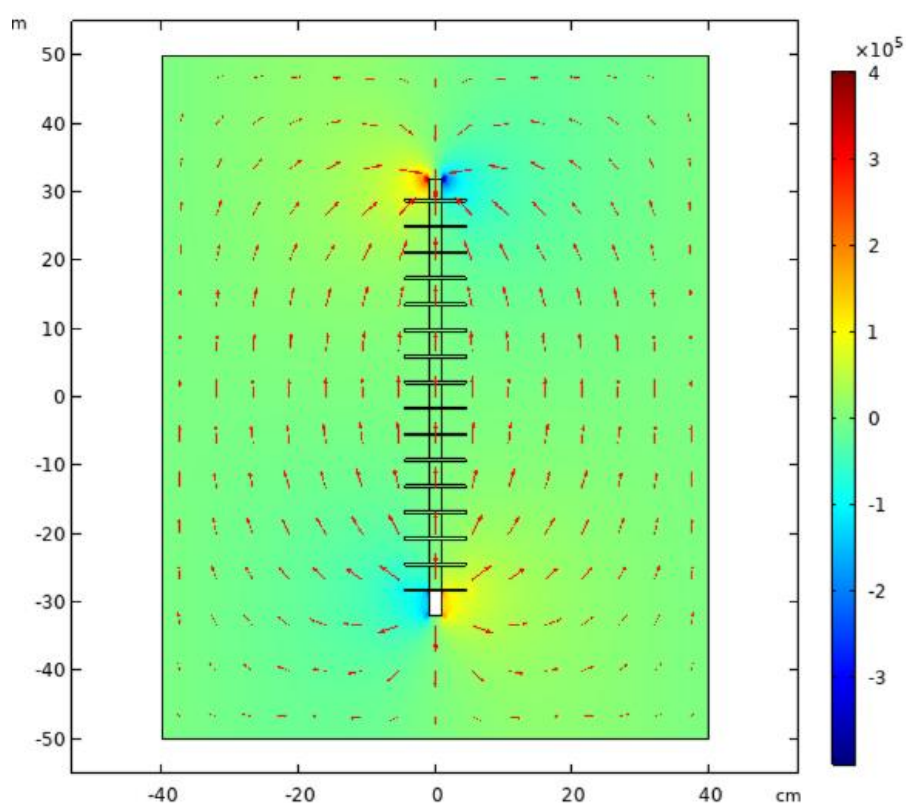


Figura III-42: Líneas de Campo Eléctrico en Dirección Línea - Tierra en el Aislador Polimérico Después de Ser Sometido a Tensión Eléctrica

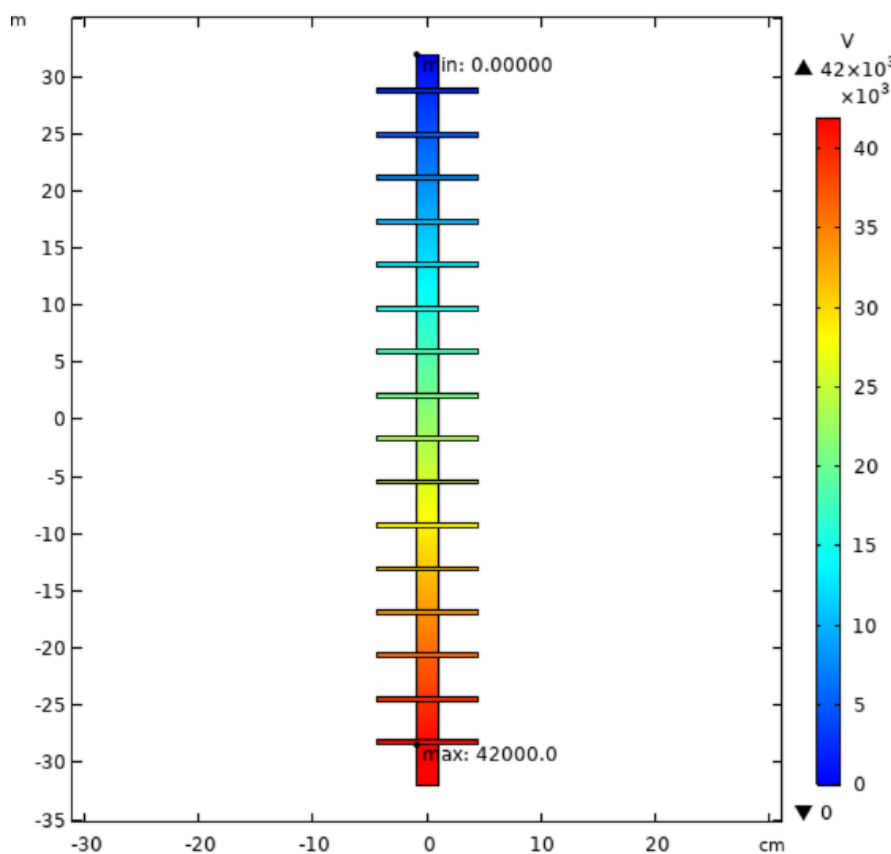


Figura III-43: Distribución de Potencial Eléctrico en la Superficie Longitudinal del Aislador Polimérico

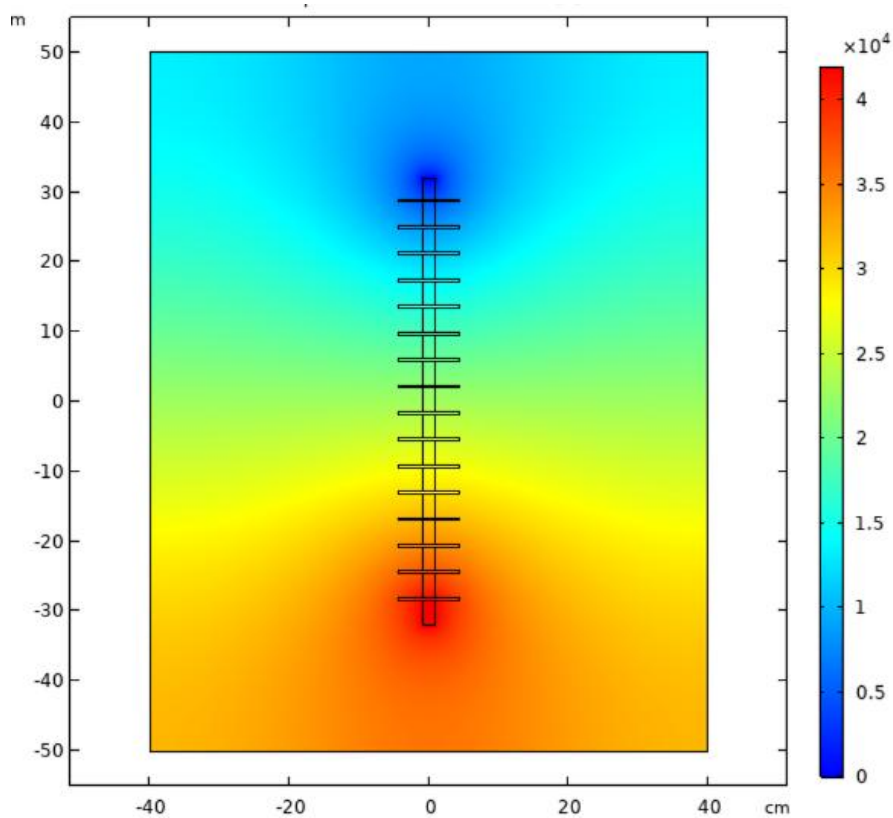


Figura III-44: Superficie Equipotencial por Colores del Aislador Polimérico Sometido a una Tensión Eléctrica de 42 kV

CAPÍTULO IV. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1) Análisis de Resultados de los Métodos Utilizados para Determinar la Distribución de Potencial, Campo Eléctrico y Corriente de Fuga en el Aislador Polimérico en Condiciones de Superficie No Contaminada

Como ya se ha mencionado líneas arriba, con respecto a la estructura de la tesis, la cual está constituida por:

4.1.1) Estudio del Potencial, Campo Eléctrico y Corriente de Fuga en el Aislador en Condiciones de *Superficie No Contaminada*. Para este caso se han estudiado 3 métodos muy diferenciados entre sí, los cuales son:

4.1.1.1) Método Expresión Simplificada.

La unidad aislante se modeló como una línea de doble dispersión capacitiva de acuerdo a la figura A-1, A-2 y A-3, con ello se obtuvo la distribución de potencial (ecuación A.15) y corriente de fuga (ecuación A.22), cuyos resultados se muestran en las figuras III-5 y III-18. Para el caso de la distribución del campo eléctrico, se derivó la ecuación A.15 y el resultado se muestra en la figura A-16.

Estos resultados fueron contrastados con los resultados obtenidos por las investigaciones del autor de la referencia [29] y [30]; en las que se concluye que los resultados obtenidos son muy similares, con la diferencia que el autor mencionado utilizó para su estudio aisladores de porcelana y vidrio los cuales tienen diferentes características mecánicas y eléctricas, pero el perfil obtenido por el autor de la referencia y el resultado obtenido en mi investigación es muy similar.

Es muy importante informar que a la fecha no se han encontrado estudios publicados referente a este método aplicado a aisladores poliméricos; puesto que para poder realizar el modelo en este tipo de aislantes se ha tenido que adicionar un haz de conductores de cobre envueltos en el núcleo de FRP entre dos cobertizos para semejarlo como muñón y que sea posible realizar la medición de la capacitancia propia del cobertizo (ver figura A-1).

4.1.1.2) Método Gráfico.

La unidad aislante se modeló de acuerdo a la figura A-5, con ello se obtuvo la distribución de potencial siguiendo el proceso indicado en el punto 1.2.8.2 y utilizando el programa autocad 2025, cuyos resultados se muestran en las figuras III-7, III-9, III-11 y III-13. Para

obtener las figuras antes mencionadas se hizo variar la resistencia a tierra desde el 5% hasta el 22.27 % de la capacitancia propia.

Estos resultados fueron contrastados con los resultados obtenidos por la investigación del autor de la referencia [25]; en las que se concluye que el resultado obtenido es muy similar. Cabe aclarar que la investigación de la referencia [25] se realizó para aisladores de porcelana y vidrio; dado que en la fecha de publicación de la investigación aún no existían los aisladores poliméricos; sin embargo, habiendo realizado la adecuación para el modelo del aislador polimérico, este método también es aplicable a este tipo de aisladores sin ningún tipo de restricción técnica.

Es muy importante informar que a la fecha no se han encontrado estudios publicados referente a este método aplicado a aisladores poliméricos; puesto que para poder realizar el modelo en este tipo de aislantes se ha tenido que adicionar un haz de conductores de cobre envueltos en el núcleo de FRP entre dos cobertizos para semejarlo como muñón y que sea posible realizar la medición de la capacitancia propia del cobertizo (ver figura A-5), y poder variar la capacitancia a tierra, que es considerada en este método (ver figura III-14).

4.1.1.3) Método Analítico.

La unidad aislante se modeló de acuerdo a la figura A-4, con ello se obtuvo la distribución de potencial (ecuación I.16 hasta la ecuación I.23), cuyos resultados se muestran en la figura III-15. Para obtener la figura antes mencionada se hizo variar la resistencia a tierra desde el 5% hasta el 25 % de la capacitancia propia y utilizó el programa excel.

Estos resultados fueron contrastados con los resultados obtenidos por la investigación del autor de la referencia [25]; en las que se concluye que el resultado obtenido es muy similar. Cabe aclarar que la investigación de la referencia [25] se realizó para aisladores de porcelana y vidrio; dado que en la fecha de publicación de la investigación aún no existían los aisladores poliméricos; sin embargo, habiendo realizado la adecuación para el modelo del aislador polimérico, este método también es aplicable a este tipo de aisladores sin ningún tipo de restricción técnica.

Es muy importante informar que a la fecha no se han encontrado estudios publicados referente a este método aplicado a aisladores poliméricos; puesto que para poder realizar el modelo en este tipo de aislantes se ha tenido que adicionar un haz de conductores de cobre envueltos en el núcleo de FRP entre dos cobertizos para semejarlo como muñón y que sea

posible realizar la medición de la capacitancia propia del cobertizo (ver figura A-4), y poder variar la capacitancia a tierra, que es considerada en este método (ver figura III-15).

La figura III-17 muestra el resultado comparativo de los 3 métodos estudiados.

4.2) Análisis de Resultados de la Tensión y Gradiente de Tensión Necesaria para Sostener la Descarga, Tensión y Gradiente de Tensión Mínima para Mantener la Conducción, Tensión y Gradiente de Tensión Crítica en el Aislador Polimérico en Condiciones de superficie Contaminada.

Para este caso se ha estudiado la superficie considerando la resistencia serie por unidad de longitud de banda húmeda constante y variable; en esta última ha sido estudiada bajo 2 casos: franja estrecha y franja ancha. Así como también, se ha considerado el espesor de la capa contaminante como constante.

4.2.1) Tensión y Gradiente de Tensión Necesaria para Sostener la Conducción, Tensión y Gradiente de Tensión Mínima la Conducción, Tensión y Gradiente de Tensión Crítica, Corriente de Inflexión y Corriente Crítica.

Para determinar estas variables descritas, como ya mencionamos líneas arriba se ha considerado la resistencia serie por unidad de longitud y el espesor de la capa contaminante como constantes (ver figura D-2 y figura E-1). La figura III-22 hasta la figura III-33 muestran los resultados obtenidos habiendo desarrollado las ecuaciones D.8, D.15, D.16, D.19, D.21, E.5, E.6, E.7, E.8, E.9, E.10 y E.14. Teniendo una conductividad del electrolito contaminante de $3,48 \mu\text{S}$, un ESDD de $0,43 \text{ mg/cm}^2$, una concentración de $0,41 \text{ gr/cm}^3$ y una resistencia serie por unidad de longitud de $10,29 \text{ k}\Omega/\text{cm}$. El valor de la corriente crítica es de $54,79 \text{ mA}$ ocurrido a una longitud de descarga de $115,68 \text{ cm}$ con un valor del gradiente de tensión crítica de $572,73 \text{ V/cm}$.

Estos resultados fueron contrastados con los resultados obtenidos por las investigaciones de los autores de la referencia [1], [2], [3], [13], [14], [18], [20], [23], [24], [28], [29] y [32]; en las que se concluye que los resultados obtenidos son muy similares. Cabe aclarar que el autor de la investigación de la referencia [28] y autor de la referencia [29] realizaron sus estudios para aisladores de porcelana y vidrio, y el resto de autores realizaron sus investigaciones para aisladores poliméricos, en algunos casos lo realizaron analíticamente como es el caso del autor de la referencia [1] y los demás autores utilizaron una combinación de estudio analítico y aplicación de software COULOMB 2D y 3D basado en

elementos finitos. Para nuestro caso el estudio se ha realizado puramente de forma analítica.

4.2.2) Tensión y Gradiente de Tensión Mínima, Tensión y Gradiente de Tensión Crítica y Corriente Crítica.

Para determinar estas variables descritas, como ya mencionamos líneas arriba se ha considerado la resistencia serie por unidad de longitud variable y el espesor de la capa contaminante constante. Bajo este enfoque, se han estudiado dos casos:

4.2.2.1) Franja Estrecha ($a < L$).

La figura III-34 a la figura III-36 muestran los resultados obtenidos para este caso, habiendo desarrollado las ecuaciones D.39, E.18, E.19 y E.20. Teniendo una conductividad del electrolito contaminante de $3,48 \mu\text{S}$, un ESDD de $0,43 \text{ mg/cm}^2$ y una concentración de $0,41 \text{ gr/cm}^3$. Para este caso en específico, el gradiente de tensión se determinó haciendo variar la relación x/L (x : longitud de descarga, L : longitud de fuga) desde 0 hasta 0,80; obteniendo un valor de la corriente crítica de 89,94 mA y una resistencia serie por unidad de longitud promedio de $8,74 \text{ k}\Omega/\text{cm}$ a una resistencia serie por unidad de longitud de $8,74 \text{ k}\Omega/\text{cm}$ alcanzando un valor de gradiente de tensión crítica de $409,70 \text{ v/cm}$.

Estos resultados fueron contrastados con los resultados obtenidos por las investigaciones de los autores de la referencia [28], y [29]; en las que se concluye que los resultados obtenidos son muy similares. Cabe aclarar que los autores de la referencia [28] y [29] realizaron sus estudios para aisladores de porcelana y vidrio.

4.2.2.2) Franja Ancha ($a > 3h$).

La figura III-37 a la figura III-39 muestran los resultados obtenidos para este caso, habiendo desarrollado las ecuaciones D.36, E.21, E.22 y E.23. Teniendo una conductividad del electrolito contaminante de $3,48 \mu\text{S}$, un ESDD de $0,43 \text{ mg/cm}^2$ y una concentración de $0,41 \text{ gr/cm}^3$ y una resistencia serie por unidad de longitud promedio de $8,74 \text{ k}\Omega/\text{cm}$. Para este caso en específico, el gradiente de tensión se determinó haciendo variar la relación x/L (x : longitud de descarga, L : longitud de fuga) desde 0,20 hasta 0,80; obteniendo un valor de la corriente crítica de 253,28 mA a una longitud de descarga media de 101,80 cm alcanzando un valor de gradiente de tensión crítica de $723,19 \text{ v/cm}$.

Estos resultados fueron contrastados con los resultados obtenidos por las investigaciones de los autores de la referencia [28], y [29]; en las que se concluye que los resultados

obtenidos son muy similares. Cabe aclarar que los autores de la referencia [28] y [29] realizaron sus estudios para aisladores de porcelana y vidrio.

La tabla IV-1 muestra el resumen de los valores críticos comparados con los valores críticos del diseño del aislador en estudio (ver tabla III-1)

Tabla IV-1: Comparación de los Datos Técnicos y de los Datos Obtenidos del Cálculo del Aislador Polimérico en Estudio

Datos Calculados / Datos Técnicos			Datos Técnicos del Aislador Polimérico en Estudio							
			Tensión Crítica de Flameo al Impulso (kV)		Gradiente de Tensión Crítica de Flameo al Impulso (V/cm)		Tensión de Flameo a Baja Frecuencia (kV)		Gradiente de Tensión de Flameo a Baja Frecuencia (V/cm)	
			Positiva	Negativa	Positiva	Negativa	Seca	Lluvia	Seca	Lluvia
Datos Obtenidos del Cálculo	Valores Críticos para r_p Constante	Tensión Crítica (kV)	495	567	2,431	2,785	278	233	1,365	1,144
		Gradiente de Tensión Crítica (kV)						117		
		Tensión Crítica (kV)						111		
		Gradiente de Tensión Crítica (kV)								573
	Valores Críticos para r_p Variable	Tensión Crítica (kV)								410
		Gradiente de Tensión Crítica (kV)								
		Tensión Crítica (kV)						249		
		Gradiente de Tensión Crítica (kV)								723

4.3) Análisis de Resultados de la Aplicación del Método de Elementos Finitos del Aislador Polimérico en Condiciones de *Superficie No Contaminada*.

Para hacer que el estudio sea entendible se utiliza el programa COMSOL MULTIPHYSICS 5.5 basado en el método de elementos finitos; el cual ha sido incluido con la única finalidad de poder visualizar la realidad virtual de la distribución de las líneas de campo eléctrico o gradiente de tensión y el potencial eléctrico en una realidad virtual. Es preciso indicar que se desarrolla la teoría en el anexo F de una forma clara y contundente.

La figura III-40 a la figura III-44 muestran los resultados obtenidos de la simulación; los cuales fueron contrastados con las investigaciones de los autores de la referencia [2], [13], [14] y [15] obteniendo resultados con similares imágenes.

CAPÍTULO V. PROPUESTA DE INTERVENCION

Si analizamos los resultados obtenidos de la tabla IV-1 referente a la tensión crítica en una franja ancha en condiciones de superficie contaminada, notaremos que el valor obtenido de los cálculos cuyo valor es de 249 kV supera en 1,068 veces al valor de la tensión de flameo a baja frecuencia de magnitud 233 kV; causado por el incremento de la corriente de fuga crítica que alcanza un valor de 253,28 mA, producto de la concentración del electrolito contaminante en el espesor de la capa contaminada; es decir, el valor de ESDD de 0,43 mg/cm² es relativamente alto. Este inconveniente encontrado se soluciona proponiendo intervenir cualquier línea de transmisión de alta tensión y de similares características ambientales a la estudiada, realizando como mínimo 2 mantenimientos preventivos al año a los aisladores conformantes de la infraestructura eléctrica. Con ello lograremos también reducir el impacto de la concentración anormal del gradiente de tensión y mejoraremos sustancialmente el perfil de la distribución de potencial a lo largo del aislador polimérico.

CONCLUSIONES

1) Con respecto al modelado del aislador en condiciones de superficie no contaminada.

- ✓ El método de expresión simplificada nos proporcionó contundentemente los modelos matemáticos para poder controlar la distribución de tensión, gradiente de tensión y corriente de fuga; variables que dependen de la capacitancia de dispersión a tierra, capacitancia de dispersión a línea, capacitancia propia y longitud de ubicación de cada cobertizo. Puesto que, el aislador en estudio se modeló considerándolo como una línea de doble dispersión capacitiva, ello fundamentado en la consideración de la capacitancia de dispersión a línea y capacitancia de dispersión a tierra, asimismo, sus cobertizos del aislador se representaron por capacitancias propias. Para haber logrado representar gráficamente el aislador como una línea de doble dispersión capacitiva se acondicionó un haz de cables de cobre enlazados en el núcleo de FVRP en los extremos de cada cobertizo, este artificio nos permitió considerarlo como un muñón de una cadena de aisladores de porcelana o vidrio. Tal y como ocurre en un aislador real
- ✓ El método gráfico nos proporcionó la distribución de tensión o perfil de tensiones a lo largo del aislador de una forma práctica, solamente considerando la capacitancia propia y la capacitancia de dispersión a tierra. Para lograr la distribución de tensión, se hizo variar la capacitancia de dispersión a tierra en función de la capacitancia propia; los resultados obtenidos son de muy alta precisión como para la toma de decisiones, Es muy importante dominar este método, sobre todo a los profesionales operadores de líneas de transmisión, puesto que se realizó de una forma no tan compleja como el método de expresión simplificada.
- ✓ El método analítico también nos proporcionó la distribución de tensión o perfil de tensiones a lo largo del aislador operando ecuaciones matemáticas que han sido derivadas de un modelo del aislador, este método solamente consideró la capacitancia de dispersión a tierra y se hizo variar dicho condensador en función de la capacitancia a tierra. Los resultados obtenidos con este método son muy precisos.
- ✓ Para los 3 métodos estudiados el aislador ha sido sometido a una tensión aplicada de 42 kV, que es el resultado del valor de la tensión de fase de la cresta de tensión que soporta el aislador.
- ✓ Se realizó un comparativo entre los 3 métodos estudiados y concluimos que el método de expresión simplificada nos arroja resultados mucho más precisos, adicionalmente a ello,

nos permitió conocer la distribución del gradiente de tensión y la corriente de fuga. Los otros 2 métodos se pueden utilizar en una oficina de obra, dado que los resultados obtenidos son muy confiables y nos permite tomar decisiones en campo. Estos 3 métodos son aplicables a cualquier tipo de aislador polimérico de diferente nivel de tensión.

2) Con respecto al modelado del aislador en condiciones de superficie contaminada

- ✓ Se consideró como capa contaminante las cenizas de la combustión de la caña de azúcar y los compuestos que arrastra el viento. Con una magnitud media del espesor de la capa contaminante de 54,35 μm ; una conductividad media de 19 453,71 μS , un peso medio del compuesto contaminante de 2,24 mgr/cm^2 ; una concentración de la sustancia electrolítica de 0,41 gr/cm^3 ; un ESDD medio de 0,22 mgr/cm^2 ; una conductividad del NaCl de 3,48 μS y una resistencia serie media por unidad de longitud constante de 10,29 $\text{k}\Omega/\text{cm}$.
- ✓ El aislador tiene una longitud de fuga de 203,60 cm y un diámetro de cobertizo o disco de 8,90 cm. Los valores considerados para las constantes n y A son de 0,76 y 63 respectivamente.
- ✓ Con todos estos datos se obtuvieron los valores de las siguientes variables: la tensión crítica mínima para mantener la conducción alcanzó un valor de 116,61 kV; el gradiente de tensión crítica mínima alcanzó un valor de 572,73 V/cm; la longitud de descarga crítica alcanzó un valor de 115, 68 cm que representa el 57% de la longitud de fuga y una corriente crítica que alcanzó un valor de 54,79 mA.
- ✓ Para el caso de la resistencia variable serie por unidad de longitud para una franja estrecha alcanzó un valor medio de 8,74 $\text{k}\Omega/\text{cm}$; la tensión mínima para mantener la conducción alcanzó un valor medio de 79,38 kV; el gradiente de tensión mínima para mantener la conducción alcanzó un valor de 389,89 V/cm, el gradiente de tensión crítica alcanzó un valor de 409,70 V/cm y el valor de la corriente crítica fue de 89,94 mA.
- ✓ Para el caso de la resistencia variable serie por unidad de longitud para una franja ancha alcanzó un valor medio de 1,68 $\text{k}\Omega/\text{cm}$; la tensión mínima para mantener la conducción alcanzó un valor máximo de 248,85 kV; el gradiente de tensión mínima para mantener la conducción alcanzó un valor de 1 222,27 V/cm, el gradiente de tensión crítica alcanzó un valor de 723,19 V/cm y el valor de la corriente crítica fue de 253,28 mA. A una longitud de descarga de 101,80 cm que representa el 50% de la longitud de fuga del aislador.
- ✓ Estos resultados fueron contrastados con los estudios de las referencias. Cabe indicar que el estudio analítico realizado aplicado a aisladores tipo vara, la academia aún no cuenta

con estudios similares publicados. En nuestro país, la empresa ISA-REP operadora de casi el 75 % de las líneas eléctricas del SEIN cuenta con la experiencia práctica realizada mediante el método prueba y error.

Por lo tanto, se concluye de forma general que:

✓ Con los resultados obtenidos y modelado realizado al aislador bajo las condiciones de *superficie no contaminada* y *superficie contaminada* logramos demostrar la hipótesis planteada, donde se asegura el control de la distribución de tensión y del gradiente de tensión a lo largo del aislador, tal como lo muestran las gráficas de las figuras III-40 a la III-44, mediante la simulación de la simulación con el software COMSOL MULTIPHYSICS 5.5 basado en el método de elementos finitos.

RECOMENDACIONES

- ✓ Este mismo estudio se puede llevar al laboratorio, para ello se debe de contar con un ambiente con infraestructura adecuada, que cuente con equipos transformadores de alta tensión e instrumentación de medición de alta resolución para poder medir las descargas y tiempos de flameos bajo diferentes condiciones ambientales como lluvia y niebla.
- ✓ Este tipo de aisladores son relativamente nuevos en su aplicación para aislamientos al exterior en líneas de alta tensión, los cuales están sometidos a diferentes condiciones ambientales, en la actualidad en nuestro país la mayor experiencia en su uso la tiene la empresa ISA-REP la que opera aproximadamente el 75% de todas las líneas eléctricas del SEIN y ellos para paliar el problema de la degradación prematura del aislador o el corte intempestivo de la operación de la línea eléctrica cambian de unidad aislante o le indican al fabricante que les provee los aisladores aumentando la línea de fuga de 35 mm/kV a 45 mm/kv sin tener en consideración lo que nos indica el EPRI, solamente es lo que ellos determinan, conociendo que las directrices del IEC y el ANSI nos proporcionan un valor máximo de 55 mm/kV para una clase de contaminación Muy Pesada. Por lo tanto, se recomienda que este estudio sea revisado por los profesionales de esta empresa.
- ✓ Se debe de seguir investigando sobre este tema, sabiendo que la mayoría de las líneas eléctricas se encuentran instaladas en el corredor natural de la costa peruana que tiene un ancho de franja marina de aproximadamente 20 km desde el borde marino; asimismo, las líneas eléctricas en tensiones de 60 kV se encuentra ubicadas en zonas donde existe plantaciones que para su cosecha las plantas se deben quemar, a ello le añadimos la velocidad de viento en la traza de la línea, ello conllevará a aumentar el problema. Sin embargo, nuestro sistema eléctrico seguirá creciendo, ello basado en los planes de transmisión que el COES convoca generado por el aumento planificado de la demanda eléctrica. Por lo tanto, este estudio será el inicio a la propuesta de solución. Por eso, se plantea como una investigación futura: “Estudio de la Distorsión de las Líneas de Campo Eléctrico en Ambientes Altamente Contaminados Considerando la Influencia de los Soportes Metálicos Mediante el Análisis Comparativo del Método de Diferencias Finitas - MDF, Método de Elementos Finitos MEF y el Método del Elemento de Contorno MEC”.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] **Alston, L.; Zoledziowski, S.** (1963). Growth of Discharges on Polluted Insulation – Incremento de las Descargas Sobre Aislamientos Contaminados, *IEEE, Vol. 110, N° 7, pp. 1260-1265.*
- [2] **Bin, M.; Anderson, J.; Gubanski, S.** (2010). Evaluating Resistance of Polymeric Materials for Outdoor Applications to Corona and Ozone – Evaluación de la Resistencia de Materiales Poliméricos para Aplicaciones Exteriores al Efecto Corona y al Ozono, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, Vol. 17, N° 2, pp. 555-565.*
- [3] **Cobine, J.** (1958). *Gaseous Conductors, Theory and Engineering Applications – Conductores Gaseosos, Teoría y Aplicaciones a la Ingeniería*, Libro Texto, Dover Publications Inc New York, EE.UU.
- [4] **COES - SINAC.** (2017). *Informe de Diagnóstico de las Condiciones Operativas del SEIN, Período 2019-2028*, Lima, Perú.
- [5] **COES - SINAC.** (2024). *Actualización del Plan de Transmisión, Período 2025-2034*, Lima, Perú
- [6] **Comber, M.; Zhao, T.** (2000). Calculation of Electric Field and Potential Distribution Along Nonceramic Insulators Considering the Effects of Conductors and Transmission Towers – Cálculo del Campo Eléctrico y Distribución de Potencial en Aisladores No Cerámicos Largos Considerando los Efectos de los Conductores y las Torres de Transmisión, *IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 15, N° 1, pp. 313-318.*
- [7] **Chang, J.; Kelly, A.; and Crowley, J.** (1995). *Handbook of Electrostatic Processes – Manual de Procesos Electrostáticos*, Libro Texto, Tomo II, Editora Paris, Marcel Dekker, Inc., 270 Madison Avenue, New York 10016, USA.
- [8] **Chakravorti, S.** (2015). *Electric Field Analysis – Análisis del Campo Eléctrico*, Libro Texto, Universidad de Jadavpur, Kolkata, Bengala Occidental, India.
- [9] **Deorsola, M., Del Pozo, M., y Morcelle Del Valle, P.** (2009). Evaluación del Efecto de la Contaminación Sobre Aisladores Poliméricos Retirados, *Comité de Estudio D1 – Materiales y Técnicas de Ensayos Emergentes para Sistemas de Potencia, XIII ERIAC, Décimo Tercer Encuentro Regional Iberoamericano de CIGRÉ, Trabajo Técnico, Puerto Iguazú, Argentina.*

- [10] **Durand, E.** (1964). *Electrostatique, Les Distributions – Electrostática, Las Distribuciones*, Libro Texto, Tomo I, Masson et C^{ie}, Editores, 120, Boul, Saint-Germain, Paris-VI^e, Francia.
- [11] **Durand, E.** (1966). *Electrostatique - Electrostática*, Libro Texto, Tomo II, Masson et C^{ie}, Editores, 120, Boul, Saint-Germain, Paris- VI^e, Francia.
- [12] **EPRI.** (2005). *EPRI AC Transmission Line. Reference Book–200 kV and Above, Third Edition – Linea de Transmisión en AC del EPRI. Libro de Referencia por Encima de los 200 kV, Tercera Edición*, Libro Texto, Tercera Edición, Hillview Avenue 3420-1395, Palo Alto, California 94304, USA.
- [13] **Gorur, R.; Venkataraman, S.** (2006). Prediction of Flashover Voltage of Non-Ceramic Insulators Under Contaminated Conditions – Predicción de la Tensión de Flameo de Aisladores No Cerámicos Bajo Condiciones de Contaminación, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, Vol. 13, N° 4, pp. 862-869.
- [14] **Gorur, R.; Moreno, M.** (2001). Effect of Long-Term Corona on Non-Ceramic Outdoor Insulator Housing Materials – Efecto Corona Longitudinal en Materiales No Cerámicos de la Superficie del Aislador Exterior, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, Vol. 8, N° 1, pp. 117-128.
- [15] **Gorur, R.; Moreno, M.** (2002). Impact of Corona on the Long-Term Performance of Nonceramic Insulators – Impacto de la Corona en el Rendimiento a Largo Plazo de los Aisladores No Cerámicos, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, Vol. 10, N° 1, pp. 80-95.
- [16] **Gorur, R.** (1991). High Voltage Outdoor Insulation Technology – Tecnología de Aisladores de Alta Tensión para Exteriores, *Control y and Dynamic Systems*, Vol. 44, pp. 131-191.
- [17] **Hall, J.** (1993). History and Bibliography of Polymeric Insulators for Outdoor Applications – Historia y Bibliografía de los Aisladores Poliméricos para Aplicaciones Exteriores, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 8, N° 1, pp. 376-385.
- [18] **Hampton, B** (1964). Flashover Mechanism on Polluted Insulation – Mecanismo de Descarga Eléctrica en Aislamientos Contaminados, *IEEE*, Vol. 111, N° 5, pp. 985-990.

- [19] **Larson, R.; Bruce, E.** (2010). *Cálculo 2*, Libro Texto, Novena Edición, McGrawHill, Prolongación Paseo de La Reforma N°1015, Edificio Santa Fe, Torre A, Piso 17, México, D.F.
- [20] **Loardo, I.** (2009). Experiencia en el Uso de Aisladores Poliméricos en Zonas de Alta Contaminación – Red de Energía del Perú, Nuevas Técnicas y Herramientas en la Ejecución del Mantenimiento, *III Seminario Internacional SIMSE – Mantenimiento en Sistemas Eléctricos*, Revista CIER, N° 57, Bogotá, Colombia.
- [21] **Lorrain, P.; Corso, D.** (1988). *Electromagnetic Fields and Waves – Ondas y Campos Electromagnéticos*, Libro Texto, Tercera Edición, Freeman and Company, New York, USA.
- [22] **Red de Energía del Perú S.A.** (2009). Experiencia en el Uso de Aisladores Poliméricos en Zonas de alta Contaminación, *III Seminario Internacional, Mantenimiento en Sistemas Eléctricos - SIMSE*, Revista CIER N°57, Bogotá, Colombia.
- [23] **Salam, A.; Stanek, E.** (1987). Optimizing Field Stress on High Voltage Insulators – Optimización del Estres del Campo en Aisladores de Alta Tensión, *IEEE Transactions on Electrical Insulations*, Vol. 22, N° 6, pp. 47-56.
- [24] **Skopec, A.; Wankowics, J.; Sokorski, B.** (1994). Electric Field Calculation for an Axially-Symmetric Insulator with Surface Contamination – Cálculo del Campo Eléctrico para un Aislante Axialmente Simétrico con Contaminación Artificial, *IEEE Transactions on Electrical Insulations*, Vol. 1, N° 2, pp. 332-339.
- [25] **Taha, H.** (1970). Potential Distribution Over a String of Suspension Insulators – Distribución de Potencial en una Cadena de Aisladores de Suspensión, *Inst. J. Elect. Engng. Educ.*, Volumen 8, pp. 45-51.
- [26] **Vilaboa, I** (2013). *Contaminación Ambiental por Quema de Caña de Azúcar: Un Estudio Exploratorio en la Región Central del Estado de Veracruz*, Memoria de Ponencias “Think Green 2013”: Crecimiento Verde, Retos y Oportunidades para México, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Central de Veracruz, México.
- [27] **Weber, E.** (1950). *Electromagnetic Fields, Theory and Applications – Campos Electromagnéticos, Teoría y Aplicaciones*, Libro Texto, Volumen I – Mapa de Campos, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.

[28] **Wilking, R.** (1969). Flashover Voltage of High-Voltage Insulators with Uniform Surface – Pollution Films – Tensión de Descarga Disruptiva de Aisladores de Alta Tensión con Películas de Contaminación Superficial Uniformes, *IEEE*, Vol. 117, N° 12, pp. 257-260.

[29] **Yanque, J.** (1971). *Etude Du Contournement Des Chaines D'isolateurs Sous l'influence des Couches Conductrices Humides – Estudio del Contorneo en Cadena de Aisladores Bajo la Influencia de Capas Conductoras Húmedas*, Tesis de Maestría, Facultad Politécnica de Mons, Universidad de Mons, Bélgica.

[30] **Yanque, J.** (1972). La Distribución de Potencial y la Corriente de Fuga en Cadena de Aisladores en Servicio, *Problemas de Centrales Eléctricas y Redes, Sección 1*, 1/7/2/I/R3/JY/JMCA, LABORELEC, pp. 24-32.

[31] **Yanque, J.** (2012). *Técnicas de Alta Tensión*, Libro Texto, Curso de Alta Tensión y Técnicas de Prueba de Laboratorio: Capítulo 1, Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú.

[32] **Zoledziowski, S.** (1968). Time-to-Flashover Characteristics of Polluted Insulation – Características del Tiempo de Propagación del Flameo de un Aislante Contaminado, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. Pas 87, N° 6, pp. 1937-1404.

[33] [Windfinder - Mapa del viento, informes de predicción de viento y tiempo](#)

ANEXOS

Anexo A

1. Potencial Soportada por Cada Cobertizo del Aislador.

Dado que el presente trabajo de investigación está abocado a estudiar las anomalías en la distribución del campo eléctrico y distribución de potencial en aislantes de polímero tipo vara con tensión de operación de 60 kV, producto de la contaminación ambiental. Es de suma importancia deducir una expresión que, considerando algunas simplificaciones en la representación del circuito equivalente en un aislador de suspensión (ver figura A-1), con ello podemos obtener resultados muy aproximados del potencial soportado por cada cobertizo del aislador, ya que en realidad los parámetros que intervienen son difíciles de controlar y medir, por otro lado, puedo afirmar que aún no se cuenta con procedimientos matemáticos determinísticos que permitan su cálculo. En la actualidad, los fabricantes de este tipo de aisladores solamente desarrollan procedimientos de prueba y error mediante software de simulación y pruebas en laboratorios.

1.1. Hipótesis Simplificada.

Para poder modelar el aislador tipo vara, es conveniente realizar las siguientes consideraciones preliminares, con la finalidad de relajar el problema:

- ✓ La superficie del cuerpo de cada cobertizo del aislador por ser un material orgánico se considera una superficie uniforme e hidrófoba (característica del material de repeler la gota de agua); dado que, están cubiertas por goma de silicona (SiR) o goma de etileno propileno (EPR).
- ✓ Tanto los cobertizos como el núcleo recubierto de goma de silicona (SiR) son de geometría circular y cilíndrica respectivamente y con dimensión uniforme.
- ✓ Es un aislador sometido a una alta tensión, por lo que las capacitancias en comparación con la línea (lado energizado) y la tierra (potencial tiende a cero) son de magnitud considerable.
- ✓ El aislador, está compuesto de varios cobertizos (depende de la línea de fuga requerida de acuerdo al nivel de contaminación de la zona de instalación) y entre ellos no existe ninguna parte metálica. Por lo tanto, para poder modelarlo se ha considerado la instalación provisional de un cable de cobre envuelto en el núcleo y entre los cobertizos, con la finalidad de ser considerado como un conjunto en serie de capacitancias perfectas de igual magnitud C .

- ✓ Se considera la existencia independiente de los efectos capacitivos entre el aislador y tierra representado por C_t , así como el aislador y línea representado por C_l .
- ✓ Las capacitancias C_t en derivación a tierra y C_l de derivación a línea, ambas tendrán una magnitud constante.
- ✓ El valor de R representa la resistencia propia del material orgánico, o dicho de otra manera, resistencia interna de cada cobertizo.

1.2. Análisis del Circuito Simplificado.

Se analiza detalladamente la figura A-1, para determinar todos los parámetros de interés que nos permita encontrar el modelo matemático aproximado del potencial soportado por cada cobertizo del aislador.

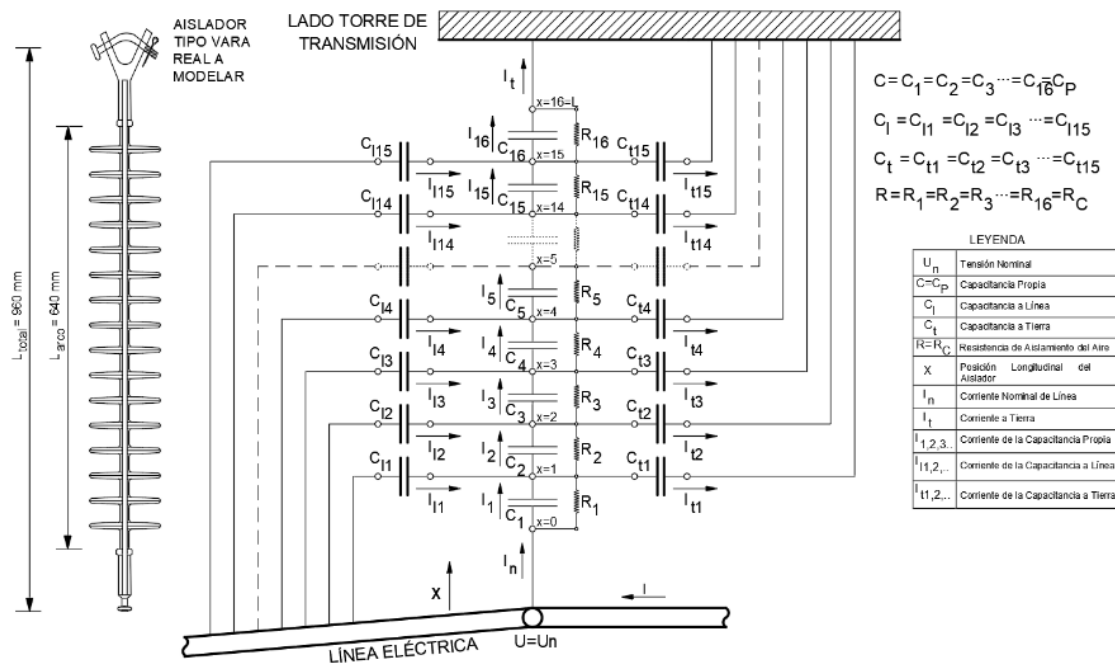


Figura A-1. Representación Gráfica del Circuito Equivalente del Aislador Polimérico en Estudio

1.2.1. Corriente de Fuga a lo Largo del Aislador

Para poder determinar la corriente que soporta el aislador polimérico de suspensión que para este caso en específico está conformado por las 16 unidades de cobertizo, aplicamos la primera ley de Kirchhoff en la figura A-1, se tiene:

- Para $x = 0$

Se abre el ramal que contiene a la resistencia $R = R_1$, se obtiene:

$$\sum I|_0 = 0$$

$$I_n = I_{x=0} = I_1$$

- Para $x = 1$

Se abre el ramal que contiene a la resistencia $R = R_2$, se obtiene:

$$\sum I|_1 = 0$$

$$I_1 + I_{l1} = (I_{x=1} = I_2) + I_{t1} \Rightarrow (I_{x=1} = I_2) = I_1 + I_{l1} - I_{t1} \Rightarrow (I_{x=1} = I_2) = I_1 - (I_{t1} - I_{l1})$$

- Para $x = 2$

Se abre el ramal que contiene a la resistencia $R = R_3$, se obtiene:

$$\sum I|_2 = 0$$

$$(I_{x=1} = I_2) + I_{l2} = (I_{x=2} = I_3) + I_{t2} \Rightarrow (I_{x=2} = I_3) = (I_{x=1} = I_2) + I_{l2} - I_{t2}$$

$$\Rightarrow (I_{x=2} = I_3) = I_1 - (I_{t1} - I_{l1}) - (I_{t2} - I_{l2}) \Rightarrow (I_{x=2} = I_3) = I_1 - [(I_{t1} + I_{t2}) - (I_{l1} + I_{l2})]$$

- Para $x = 3$

Se abre el ramal que contiene a la resistencia $R = R_4$, se obtiene:

$$\sum I|_3 = 0$$

$$(I_{x=2} = I_3) + I_{l3} = (I_{x=3} = I_4) + I_{t3} \Rightarrow (I_{x=3} = I_4) = (I_{x=2} = I_3) + I_{l3} - I_{t3}$$

$$\Rightarrow (I_{x=3} = I_4) = I_1 - [(I_{t1} + I_{t2}) - (I_{l1} + I_{l2})] + I_{l3} - I_{t3}$$

$$\Rightarrow (I_{x=3} = I_4) = I_1 - [(I_{t1} + I_{t2} + I_{t3}) - (I_{l1} + I_{l2} + I_{l3})]$$

⋮

- Para $x = 15 = (L - 1)$

$$\sum I|_{15} = 0$$

$$(I_{x=15} = I_{16}) = I_1 - [(I_{t1} + I_{t2} + I_{t3} + \dots + I_{t15}) - (I_{l1} + I_{l2} + I_{l3} + \dots + I_{l15})]$$

$$\Rightarrow (I_{x=15} = I_{16}) = I_1 - \left[\sum_{p=1}^{p=15} I_{tp} - \sum_{p=1}^{p=15} I_{lp} \right]$$

Por lo tanto, la ecuación general para determinar la corriente que soporta cada cobertizo de un aislador polimérico tipo vara de n cobertizos, es:

$$(I_{x=(L-1)} = I_L) = I_1 - \left[\sum_{p=1}^{p=(L-1)} I_{tp} - \sum_{p=1}^{p=(L-1)} I_{lp} \right] \quad \text{A.1}$$

- Para $x = 16 = L$

$$\sum I|_{16} = 0$$

$$I_{16} = I_{x=16} = I_t$$

Por lo que podemos afirmar que:

$I_1 > I_2 > I_3 > \dots > I_{15} > I_{16}$, dado que en cada condensador $C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_{16} = C$, una parte de la corriente se desvía hacia tierra.

En cuanto a las tensiones en los terminales de cada cobertizo, estas serán proporcionales a las corrientes que lo atraviesan; por lo tanto, se afirma que:

$(U = U_n = U_{01}) > U_{12} > U_{23} > \dots > U_{(L-1)L}$, lo que demuestra porque la distribución de potencial no es uniforme.

1.2.2 Cálculo de Potencial a lo Largo del Aislador

Para poder deducir la ecuación de la distribución de potencial en cada cobertizo conforme del aislador, es necesario referenciarlos en la figura A-2.

- ✦ La impedancia del elemento diferencial será:

$$dZ = \frac{1}{Y} dx, \text{ donde } Z \text{ e } Y \text{ son la Impedancia y Admitancia respectivamente} \quad \text{A.2}$$

- ✦ De la ley de ohm se tiene que $V = I * Z \Rightarrow V = \frac{I}{Y}$, la caída de tensión en el elemento diferencial será:

$$dU = I * dZ \Rightarrow dU = I * \frac{1}{Y} dx \Rightarrow dU = \frac{I}{Y} dx \quad \text{A.3}$$

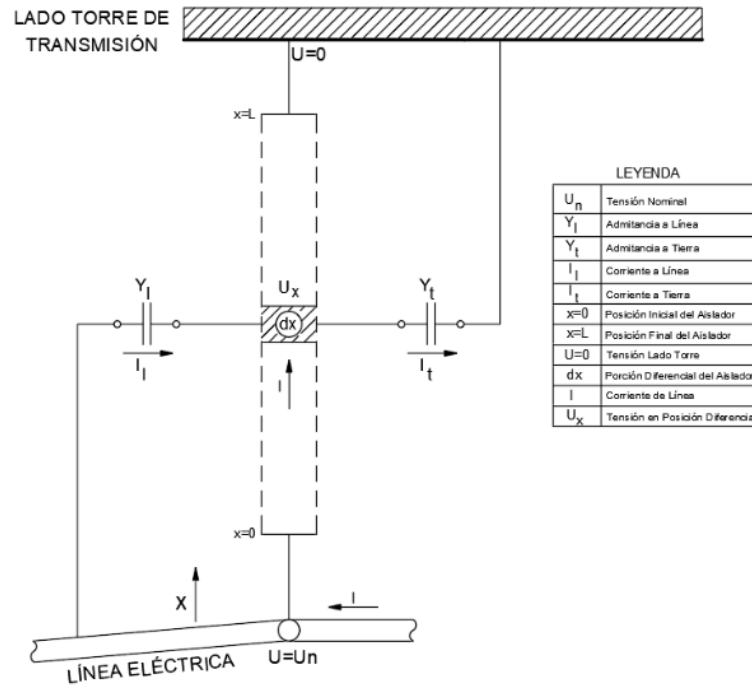


Figura A-2. Representación Gráfica del Aislador Polimérico Tipo Vara Considerado como una Línea de Doble Dispersión Capacitiva

✦ Aplicando la primera ley de Kirchhoff en el elemento diferencial, para determinar la corriente de línea dI .

$$\sum I = 0$$

$$dI + dI_l = dI_t \Rightarrow dI = dI_t - dI_l \Rightarrow dI = Y_t * (U_x - 0)dx - Y_l * (U_n - U_x)dx \quad \text{A.4}$$

✦ Ahora aplicamos la ley de ohm $V = I * Z \Rightarrow V = \frac{I}{Y} \Rightarrow I = V * Y$, para determinar las corrientes hacia línea y hacia tierra respectivamente en el elemento diferencial.

$$dI_l = Y_l * (U_n - U_x)dx, \text{ corriente diferencial hacia línea} \quad \text{A.5}$$

$$dI_t = Y_t * (U_x - 0)dx \Rightarrow dI_t = Y_t * U_x dx, \text{ corriente diferencial hacia tierra} \quad \text{A.6}$$

✦ La ecuación (A.3) se puede escribir como:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{I}{Y} \quad \text{A.7}$$

✦ La ecuación (A-4) también se puede escribir como:

$$\frac{dI}{dx} = Y_t * U_x - Y_l * (U_n - U_x) \Rightarrow \frac{dI}{dx} = U_x * (Y_t + Y_l) - U_n * Y_l \quad \text{A.8}$$

✦ Derivamos la ecuación (A.7), se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dU}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{I}{Y} \right) \Rightarrow \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{dI}{dx} \Rightarrow \frac{dI}{dx} = Y * \frac{d^2 U}{dx^2} \quad \text{A.9}$$

✦ Reemplazamos la ecuación (A.8) en la ecuación (A.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} Y * \frac{d^2 U}{dx^2} &= U_x * (Y_t + Y_l) - U_n * Y_l \Rightarrow \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{(Y_t + Y_l)}{Y} \left[U_x - U_n * \frac{Y_l}{(Y_t + Y_l)} \right] \\ \Rightarrow \frac{d^2 U}{dx^2} &= \frac{(Y_t + Y_l)}{Y} * U ; \left[U = U_x - U_n * \frac{Y_l}{(Y_t + Y_l)} \right]_{\text{condición de frontera}} \quad \text{A.10} \end{aligned}$$

✦ Resolvemos la ecuación diferencial (A.10) de segundo orden, se obtiene:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{(Y_t + Y_l)}{Y} * U = U'' - \frac{(Y_t + Y_l)}{Y} * U = 0; \text{ hacemos } U = e^{mx}; U' = me^{mx}; U'' = m^2 e^{mx}$$

$$m^2 e^{mx} - \frac{(Y_t + Y_l)}{Y} e^{mx} = 0 \Rightarrow e^{mx} \left(m^2 - \left(\frac{Y_t + Y_l}{Y} \right) \right) = 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y} \right)}$$

La solución general de la ecuación diferencial de segundo orden y de coeficientes constantes es de la forma:

$$U = k_1 e^{\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y} \right)} x} + k_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y} \right)} x} \quad \text{A.11}$$

donde

k_1 y k_2 , constantes de integración que se determinan con las condiciones de frontera

x , posición del cobertizo en el aislador tomando como referencia la línea eléctrica

L , longitud del aislador conformado por el número total de cobertizos del aislante y el espaciamiento entre ellos

Ahora determinamos las constantes de integración.

$$\text{Cuando } x = 0; U|_0 = (U_{x=0} = U_n) - U_n * \frac{Y_l}{(Y_t + Y_l)} = U_n \left(1 - \frac{Y_l}{Y_t + Y_l} \right) = U_n \left(\frac{Y_t}{Y_t + Y_l} \right)$$

$$\Rightarrow U_n \left(\frac{Y_t}{Y_t + Y_l} \right) = k_1 e^{\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y} \right)} 0} + k_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y} \right)} 0} \Rightarrow U_n \left(\frac{Y_t}{Y_t + Y_l} \right) = k_1 + k_2 \quad \text{A.12}$$

$$\text{Cuando } x = L; U|_L = (U_{x=L} = 0) - U_n * \frac{Y_l}{(Y_t + Y_l)} = -U_n \left(\frac{Y_l}{Y_t + Y_l} \right)$$

$$\Rightarrow -U_n \left(\frac{Y_l}{Y_t + Y_l} \right) = k_1 e^{\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y} \right)} L} + k_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y} \right)} L} \quad \text{A.13}$$

Luego de realizar las operaciones correspondientes a las ecuaciones (A.12) y (A.13), se obtiene:

$$k_1 = -\frac{U_n}{Y_t + Y_l} \left[\frac{Y_l + Y_t e^{-\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L}}{2 \sinh\left(\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L\right)} \right] \text{ y } k_2 = \frac{U_n}{Y_t + Y_l} \left[\frac{Y_l + Y_t e^{\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L}}{2 \sinh\left(\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L\right)} \right]$$

Conocidos los valores de las constantes de integración k_1 y k_2 , se reemplazan en la solución general de la ecuación (A.11).

$$U = \left\{ -\frac{U_n}{Y_t + Y_l} \left[\frac{Y_l + Y_t e^{-\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L}}{2 \sinh\left(\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L\right)} \right] \right\} e^{\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} x} + \frac{U_n}{Y_t + Y_l} \left[\frac{Y_l + Y_t e^{\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L}}{2 \sinh\left(\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L\right)} \right] e^{-\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} x}$$

$$U = -\frac{U_n}{Y_t + Y_l} \left[\frac{2Y_l \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} x\right] - 2Y_t \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} (L - x)\right]}{2 \sinh\left(\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L\right)} \right] \quad \text{A.14}$$

Modelo matemático de la distribución de potencial en el aislador en función de la tensión aplicada U_n , de las admitancias de línea Y_l , de tierra Y_t y del cobertizo Y .

Ahora, sabiendo que $Y = \frac{1}{Z} \Rightarrow Y = \frac{1}{\frac{1}{\omega C}} \Rightarrow Y = \omega C$

Por lo tanto:

$Y_t = \omega C_t$, admitancia a tierra

$Y_l = \omega C_l$, admitancia a línea

$Y = \omega C$, admitancia del cobertizo

Igualemos la ecuación (A.10) con la ecuación (A.14), operamos y obtenemos:

$$U_x - U_n * \frac{Y_l}{(Y_t + Y_l)} = -\frac{U_n}{Y_t + Y_l} \left[\frac{2Y_l \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} x\right] - 2Y_t \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} (L - x)\right]}{2 \sinh\left(\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L\right)} \right]$$

$$U_x = \frac{U_n}{(Y_t + Y_l)} \left\{ Y_l - \left[\frac{2Y_l \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} x\right] - 2Y_t \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} (L - x)\right]}{2 \sinh\left(\sqrt{\frac{Y_t + Y_l}{Y}} * L\right)} \right] \right\}$$

$$U_x = \frac{U_n}{\omega(C_t + C_l)} \left\{ \omega C_l - \left[\frac{2\omega C_l \sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C}\right)} x \right] - 2\omega C_t \sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C}\right)} (L - x) \right]}{2 \sinh \left(\sqrt{\frac{C_t + C_l}{C}} * L \right)} \right] \right\}$$

$$U_x = U_n \left\{ \frac{C_l}{C_0 + C_l} - \frac{C_l \sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C}\right)} x \right] - C_t \sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C}\right)} (L - x) \right]}{(C_t + C_l) \sinh \left(\sqrt{\frac{C_t + C_l}{C}} * L \right)} \right\} \quad \text{A.15}$$

Ecuación deducida analíticamente que nos permite encontrar la tensión desde el punto $x = 0$ hasta $x = L$; o, dicho de otra forma, ecuación que nos permite encontrar el potencial aproximado en cada cobertizo del aislador polimérico tipo vara (ver figura A-3) al mostrar que la distribución es desigual y no lineal, lo que anticipa a predecir de que algunos elementos más que otros están sometidos a la conmoción o perturbación violenta. Además, sabemos que en la práctica se trata de reducir este problema aumentando el valor de la capacitancia hacia línea mediante los anillos de corrección, esto equivale a homogeneizar las líneas de campo eléctrico en la dirección axial.

2. Corriente de Fuga que Fluye a Través de Cada Cobertizo del Aislador.

Es posible analíticamente tratar de encontrar una expresión que nos proporcione el valor de la corriente de fuga que pasa a través de cada cobertizo, para ello, es de vital importancia establecer una hipótesis sobre la existencialidad de líneas de campo eléctrico concentradas que represente dos valores reales actuales en los extremos del aislador.

✓ Una corriente I_t , que fluye a tierra por todos los soportes metálicos, en la práctica esta corriente puede ser medida.

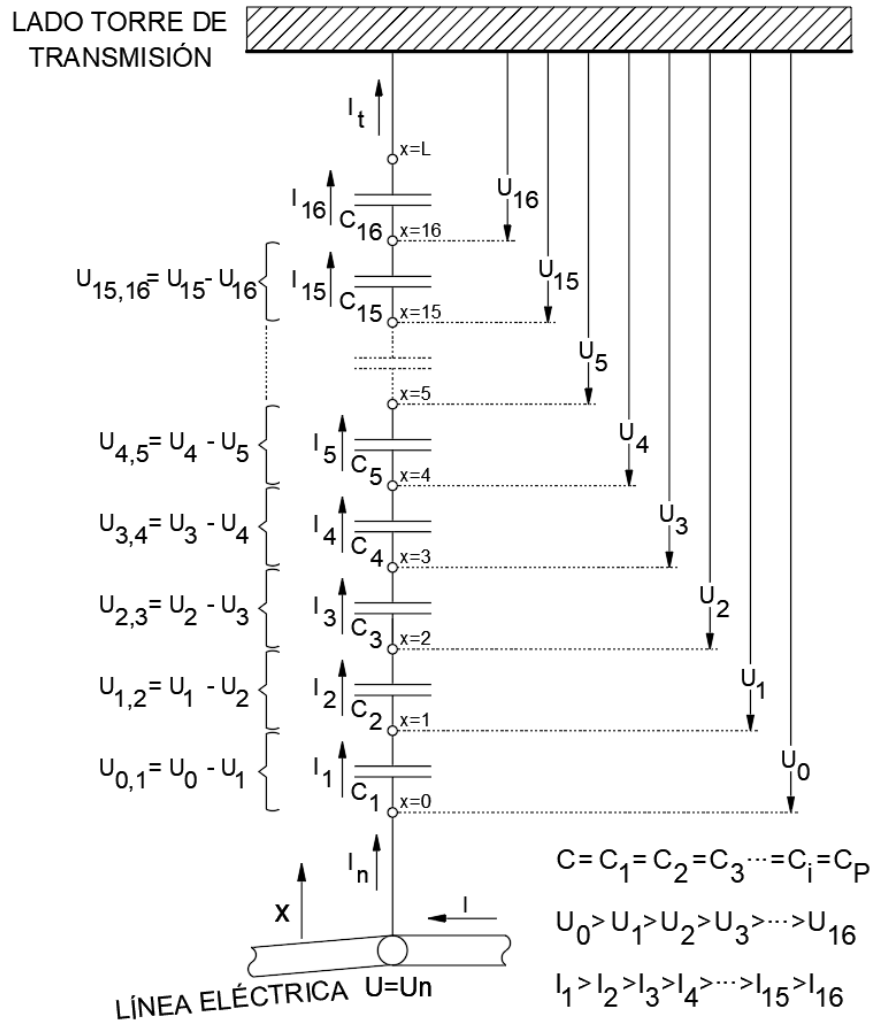


Figura A-3. Representación Gráfica de las Tensiones y Corrientes en un Aislador Polimérico Tipo Vara

✓ Una corriente I_n , que puede considerarse como la suma de las corrientes de las pérdidas y la corriente actual I_t .

Tomamos como punto de partida la ecuación (A.3), la que se puede escribir como:

$$dU = \frac{I}{Y} dx \Rightarrow I = Y \frac{dU}{dx} \Rightarrow \frac{dU}{dx} = \frac{I}{Y}$$

Derivamos la ecuación (A.11) y reemplazamos la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{dU}{dx} = \sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} k_1 e^{\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} x} - \sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} k_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} x} = \frac{I}{Y}$$

$$\Rightarrow \frac{I}{Y\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}} = k_1 e^{\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}x} - k_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}x} \quad \text{A.16}$$

Las constantes de integración k_1 y k_2 se obtienen de las condiciones de frontera.

★ Cuando $x = 0, I = I_n$, de la ecuación (A.16), se obtiene:

$$\frac{I_n}{Y\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}} = k_1 - k_2 \quad \text{A.17}$$

★ Cuando $x = L, I = I_t$, de la ecuación (A.16), se obtiene:

$$\frac{I_t}{Y\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}} = k_1 e^{\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L} - k_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L} \quad \text{A.18}$$

Operando las ecuaciones (A.17) y (A.18), se obtiene:

$$k_1 = \frac{I_t - I_n e^{-\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L}}{2Y\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L\right]} \quad \text{A.19}$$

$$k_2 = \frac{I_t - I_n e^{\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L}}{2Y\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L\right]} \quad \text{A.20}$$

Finalmente reemplazamos la ecuación (A.19) y (A.20) en la ecuación (A.16) operamos y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{I}{Y\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}} &= \left[\frac{I_t - I_n e^{-\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L}}{2Y\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L\right]} \right] e^{\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}x} - \left[\frac{I_t - I_n e^{\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L}}{2Y\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)} \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L\right]} \right] e^{-\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}x} \\ I_x &= I_t \frac{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}x\right]}{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L\right]} + I_n \frac{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}(L - x)\right]}{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{Y_t + Y_l}{Y}\right)}L\right]} \end{aligned} \quad \text{A.21}$$

reemplazando las equivalencias $Y_t = \omega C_t$, $Y_l = \omega C_l$, $Y = \omega C$ en la ecuación (A.21), y realizando algunos arreglos algebraicos, se obtiene

$$I_x = I_t \frac{\sinh \left[\sqrt{\left(\frac{\omega C_t + \omega C_l}{\omega C} \right) x} \right]}{\sinh \left[\sqrt{\left(\frac{\omega C_t + \omega C_l}{\omega C} \right) L} \right]} + I_n \frac{\sinh \left[\sqrt{\left(\frac{\omega C_t + \omega C_l}{\omega C} \right) (L - x)} \right]}{\sinh \left[\sqrt{\left(\frac{\omega C_t + \omega C_l}{\omega C} \right) L} \right]}$$

$$I_x = I_t \frac{\sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C} \right) x} \right]}{\sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C} \right) L} \right]} + I_n \frac{\sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C} \right) (L - x)} \right]}{\sinh \left[\sqrt{\left(\frac{C_t + C_l}{C} \right) L} \right]} \quad \text{A.22}$$

Esta ecuación nos permite encontrar los valores de las corrientes de fuga que fluye a través de cada cobertizo a lo largo del aislador, dichas corrientes han sido representadas en la figura A-3. Es necesario aclarar que todas las ecuaciones deducidas en este anexo se han realizado considerando (hipótesis simplificada) que la unidad en estudio es un aislador polimérico limpio; es decir, sin ningún tipo de contaminación y los cobertizos han sido representados por capacitancias puras en un sistema inactivo.

3. Método Gráfico Clásico para Determinar la Distribución de Potencial en Aisladores Poliméricos.

Esta metodología, que en mi opinión no es la aproximación más cercana a la realidad, pero con la deducción de la ecuación (A.15) se ha mejorado sustancialmente esta deficiencia. El método se basa en determinar las capacitancias constantes C y variables de los enlaces a tierra (nodos de conexión entre cobertizos desde donde se derivan las capacitancias a tierra C_t , es importante precisar que para la aplicación de este método no se considera el efecto de la línea; es decir se desprecian las capacitancias a línea C_l [26] [29]. Para la aplicación de este método, se debe conocer en primer lugar el valor de la capacitancia propia C , ello se consigue con la medición de la capacitancia mediante el puente SCHERING u otro instrumento digital utilizado para este caso, luego debemos conocer el valor de la capacitancia parásita hacia tierra C_t en derivación de cada cobertizo, su valor se encuentra considerando la variación de esta desde el 5% hasta el 25% del valor de la capacitancia propia C , $\therefore C_t \cong (5\% - 25\%) * C$, procedemos a resolver el sistema de ecuaciones que se deducen de la figura A-5, para luego realizar el gráfico respectivo de la figura A-5

Analizamos la figura A-5 y deducimos las ecuaciones para un aislador de n unidades, especificando la lista de símbolos considerados:

C : capacitancia serie de cada cobertizo o elemento del aislador

C_t : capacitancia desde el enlace m a tierra

C_m : capacitancia equivalente a tierra de un aislador con m unidades de cobertizos

$I_{(m)}$: corriente a través del cobertizo (m)

i_m : corriente del enlace m a tierra a través de C_t

E_m : potencial del enlace m a tierra

$e_{(m)} = E_m - E_{m-1}$: potencial soportado por el cobertizo en el enlace (m)

$f_m = \frac{C_m}{C}$: factor adimensional representado por la relación entre la capacitancia equivalente y la capacitancia propia

n : número de cobertizos o elementos del aislador

m : representa los nodos u orden de los enlaces donde se producen las derivaciones de fuga

(m) : representa el orden o ubicación de los cobertizos

$C_t = C'_m$: cuando las capacitancias de fuga a tierra son variables

Sufijos 1, 2, 3, $\dots$, m , $\dots$, n : referente al orden de los enlaces,

y (1), (2), (3) $\dots$, (m), $\dots$, (n): referido al orden de los cobertizos

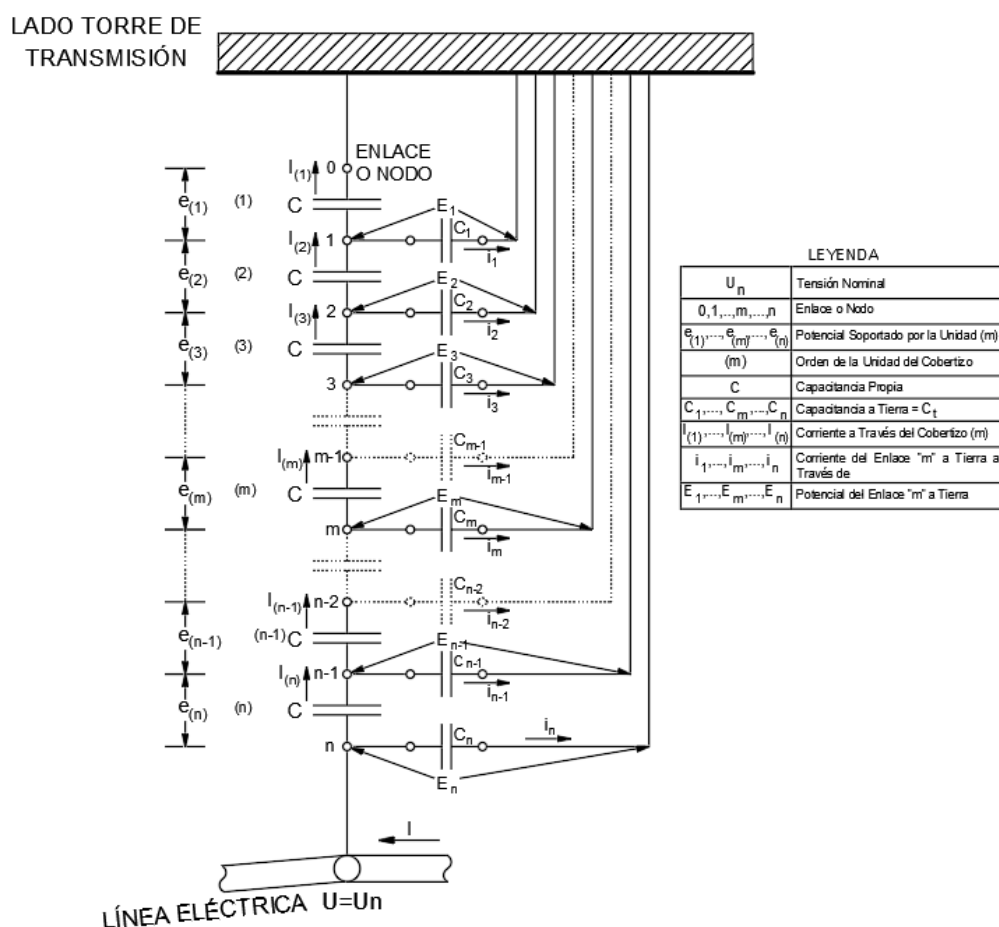


Figura A-4. Representación Gráfica de un Aislador Polimérico Tipo Vara de " n " Unidades de Cobertizos
Las ecuaciones que se obtienen de la figura A-4, son:

$$\begin{aligned}
C_1 &= C + C_t & \text{Obtenemos: } f_1 &= \frac{C_1}{C} \\
C_2 &= \frac{C_1 C}{C_1 + C} + C_t & \text{Obtenemos: } f_2 &= \frac{C_2}{C} \\
&\vdots & & \vdots \\
C_m &= \frac{C_{m-1} * C}{C_{m-1} + C} + C_t & \text{Obtenemos: } f_m &= \frac{C_m}{C}
\end{aligned}
\tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots & & \vdots \\
C_{n-1} &= \frac{C_{n-2} * C}{C_{n-2} + C} + C_t & \text{Obtenemos: } f_{n-1} &= \frac{C_{n-1}}{C}
\end{aligned}
\tag{A.24}$$

Con la ecuación (A.24) se determina la capacitancia equivalente y el factor adimensional en el cobertizo $(n - 1)$

$$E_{n-1} = E_n \left(\frac{1}{f_{n-1} + 1} \right) \quad \text{Obtenemos: } E_{n-1} \tag{A.25}$$

$$E_{n-2} = E_{n-1} \left(\frac{1}{f_{n-2} + 1} \right) = E_n \left(\frac{1}{f_{n-1} + 1} \right) \left(\frac{1}{f_{n-2} + 1} \right) \tag{A.26}$$

Con la ecuación (A.25) y (A.26) se determina el potencial de derivación a tierra en el enlace m del cobertizo $(n - 1)$ y $(n - 2)$

$$e_{(n)} = E_n - E_{n-1} = E_n - E_n \left(\frac{1}{f_{n-1} + 1} \right) = E_n \left(\frac{f_{n-1}}{f_{n-1} + 1} \right) \tag{A.27}$$

Con la ecuación (A.27) se determina el potencial soportado por el cobertizo en el enlace n .

La eficiencia o el desempeño del aislador lo determinamos con la relación entre el potencial derivado de cada enlace y tierra y el potencial que soporta cada cobertizo multiplicado por el número de cobertizos.

$$\text{eficiencia del aislador} = \frac{E_n}{ne_{(n)}} = \frac{E_n}{nE_n \left(\frac{f_{n-1}}{f_{n-1} + 1} \right)} = \frac{(f_{n-1} + 1)}{nf_{n-1}} \tag{A.28}$$

Ahora, también es posible determinar el potencial del enlace m y el que atraviesa la unidad de cobertizo (m) :

$$E_m = E_{m+1} \left(\frac{1}{f_m + 1} \right) = E_n \left[\left(\frac{1}{f_{n-1} + 1} \right) \left(\frac{1}{f_{n-2} + 1} \right) \cdots \left(\frac{1}{f_m + 1} \right) \right] \tag{A.29}$$

Lo mismo se puede realizar con el potencial soportado por el cobertizo m .

$$e_{(m)} = E_m - E_{m-1} = E_m - E_m \left(\frac{1}{f_{m-1} + 1} \right) = E_m \left(\frac{f_{m-1}}{f_{m-1} + 1} \right)$$

A.30

$$e_{(m)} = E_n \left[\left(\frac{1}{f_{n-1} + 1} \right) \left(\frac{1}{f_{n-2} + 1} \right) \cdots \left(\frac{1}{f_m + 1} \right) \right] \left(\frac{f_{m-1}}{f_{m-1} + 1} \right)$$

Solución Gráfica de Aisladores con Capacitancias Constantes a Tierra

Para determinar la repartición de potencial mediante el método gráfico representado en la figura (A-4), se procede de la siguiente manera:

✓ Tomamos una distancia horizontal $r_1 b$, tal que, $ba = r_1 q_1 = C$, y $q_1 p_1 = C_t$; por lo tanto, $p_1 r_1 = p_1 q_1 + q_1 r_1 = C_t + C = C_1$.

✓ Trazamos las diagonales del cuadrilátero formado por los vértices a, b, r_1, p_1 , el punto de intersección de las diagonales es el punto q_2 . Desde el punto q_2 se traza una perpendicular al segmento $r_1 b$, obteniendo el punto r_2 . Trasladamos la recta del segmento $p_1 q_1 = C_t$ hasta el punto r_2 y luego trazamos la perpendicular al segmento $r_1 p_1$ obteniendo el punto p_2 .

✓ Entonces, $q_2 r_2 = \frac{C * C_1}{C_1 + C}$ y $p_2 q_2 = C_t$; por lo tanto:

$$p_2 r_2 = p_2' r_1 = p_2 q_2 + q_2 r_2 = C_t + \frac{C * C_1}{C_1 + C} = C_2$$

✓ Similarmente:

$$p_3 r_3 = p_3' r_1 = p_3 q_3 + q_3 r_3 = C_t + \frac{C * C_2}{C_2 + C} = C_3$$

En general

$$p_n r_n = p_n' r_1 = p_n q_n + q_n r_n = C_t + \frac{C * C_{n-1}}{C_{n-1} + C} = C_n$$

✓ Ahora, tomamos el triángulo de vértices r_1, a, b y con la imagen de este triángulo formamos el triángulo de vértices r_1, b, S_n ; donde $b S_n = E_n$. Desde el vértice r_1 del segmento $r_1 S_n$ se traza la paralela al punto r_n formando el segmento $r_n S_{n-1}$. Se traza desde el vértice r_1 el segmento $r_1 S_{n-1}$, para trazar la paralela al punto r_{n-1} formando el segmento $r_{n-1} S_{n-2}$. Este proceso continúa hasta llegar a formar el segmento $r_2 S_1$. La figura A - 4 representa gráficamente esta explicación detallada (los segmentos paralelos se identifican con flechas), entonces, se cumple que:

$$\frac{bS_{n-1}}{bS_n} = \frac{br_n}{br_1} = \frac{q_n r_n}{q_{n-1} r_{n-1}} = \frac{\frac{C_{n-1}C}{C_{n-1}+C}}{C_{n-1}} = \frac{C}{C_{n-1}+C} \Rightarrow bS_{n-1} = \frac{bS_n C}{C_{n-1}+C} = \frac{E_n}{f_{n-1}+1} = E_{n-1}$$

y

$$S_n S_{n-1} = bS_n - bS_{n-1} = E_n - E_{n-1} = e_{(n)}$$

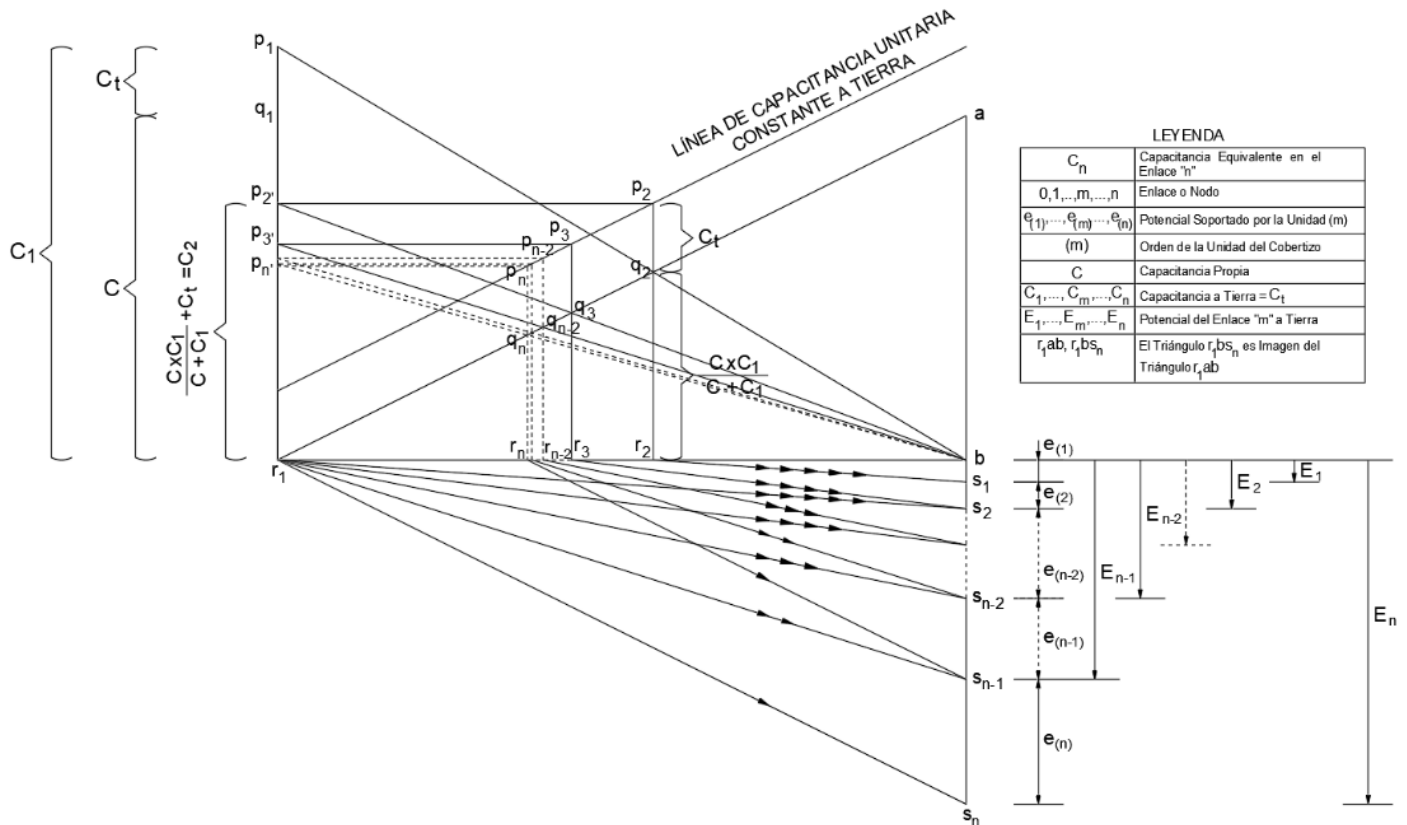


Figura A-5. Representación Gráfica de la Distribución de Potencial de un Aislador Polimérico Tipo Vara de "n" Unidades de Cobertizos Mediante el Método Gráfico

Lo manifestado líneas arriba se cumple para cualquier aislador de n elementos o cobertizos.

Anexo B

1. Cálculo de las Capacitancias Parásitas de Dispersión C_t y C_l .

Se propone calcular las capacitancias parásitas de dispersión de la manera más aproximada posible, ello conlleva a determinar el perfil de tensiones a lo largo del aislador polimérico, para lo cual se deducirán las ecuaciones de las capacitancias de dispersión hacia tierra (C_t) y hacia línea (C_l) de los cobertizos; considerando dos condiciones de análisis:

- ❖ En Condiciones Normales. – Tienen una gran influencia en la distribución de potencial, sobre todo porque la tensión con respecto a tierra es elevada.
- ❖ En Condiciones de Perturbación. – Cuando comienza la aparición de pre-descargas y descargas parciales, estas capacitancias actúan produciendo oscilaciones de alta frecuencia y corta duración.

1.1 Principios Generales.

➤ Para que un conductor homogéneo se encuentra en equilibrio electrostático admitimos que sus electrones se mueven libremente en su interior en una dirección como en la dirección opuesta donde no actúa ninguna fuerza sobre ellos; por lo tanto, podemos afirmar que no hay corriente total. La existencia de un campo eléctrico medio $\vec{E}$ en el conductor somete a cada electrón a una fuerza [10], [29], dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{B.1}$$

y se produce un movimiento global coordinado en forma de una corriente eléctrica gobernada por la ley de ohm [10], [29], entonces se puede escribir la condición de equilibrio como:

$$\vec{E} = 0 \quad \text{B.2}$$

qué en términos de densidad de corriente está dada por la expresión $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, donde $\vec{J}$ es la densidad de corriente y σ es la conductividad del conductor. La ecuación B.2 corresponde a.

$$\vec{J} = 0 \quad \text{B.3}$$

es decir, el material homogéneo se encuentra en equilibrio electrostático y que el campo eléctrico obedece a.

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad \text{B.4}$$

y se concluye que, en el interior del conductor en equilibrio, se tiene.

$$\rho = 0$$

B.5

➤ Las cargas en los conductores son puramente superficiales [10], [29], para hacer que aparezcan cargas sobre un conductor, conectamos a un electrodo a la fuente y el otro electrodo lo conectamos a tierra, el campo al interior del material homogéneo será cero. Tal cual se comporta el aislador energizado.

➤ También podemos hacer que aparezcan cargas en un conductor no aislado colocándola en el campo $\vec{E}_0$ de una determinada distribución, afirmando que en condiciones normales las cargas que aparecen en la superficie son siempre una pequeña parte de las cargas libres que se mueven en su interior [10], [29].

➤ En una superficie equipotencial de un conductor, la magnitud de la intensidad de campo eléctrico normal a la superficie, está relacionada con la densidad superficial de las cargas en el conductor mediante la expresión [10], [29]:

$$E = \frac{\sigma_{superf.}}{\epsilon_0}$$

B.6

También sabemos que la magnitud del campo varía desde el lado de tierra de un aislador compuesto y que el primer cobertizo del lado de la línea está sometido a una mayor tensión

➤ Si duplicamos la densidad superficial en cada punto de un sistema de conductores cargados, la configuración del campo no cambiaría, pero su intensidad se duplicará y, en consecuencia, el trabajo necesario para desplazar una carga de un conductor a otro se duplicaría [10], [27], [29].

$$W = \frac{1}{2} CV_{12}^2$$

B.7

➤ Si tuviéramos dos conductores en los extremos del aislante de polímero, al someterlo a un determinado potencial, se encontrará que cada intersticio o interfaz de los cobertizos con respecto a tierra se tendría un valor diferente de potencial, luego tendremos un conjunto de capacitancias cuya diferencia de potencial solo se conoce, si agregamos la condición de cargas opuestas iguales $Q_1 = -Q_2$, para poder determinar todas las cantidades de energía [10], [29].

$$V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \quad V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2$$

B.8

y de acuerdo que $Q_1 = -Q_2$, se puede escribir también como $p_{12} = p_{21}$, entonces la ecuación B.8 se puede escribir como:

$$V_1 - V_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q_1 \rightarrow V_{12} = pQ_1$$

B.9

si $C = \frac{1}{(p_{11}+p_{22}-2p_{12})}$, donde p_{ij} : Elastancia del conductor i en el conductor j , y C : es la capacitancia del conductor 1 en presencia del conductor 2, y $Q_1 = -Q_2$: es la carga del conductor 1 y 2

y escribiendo la ecuación B.9 de otra manera, como:

$$CV_{12} = Q \quad \text{B.10}$$

Esta relación lineal nos muestra que, el coeficiente C no depende del estado eléctrico, sino únicamente de la forme geométrica del campo electrostático del sistema y lo denominamos capacidad del condensador (valor positivo por convención). Sin embargo, nos debemos preocupar por mantener las similitudes geométricas del modelo impuesto tanto como sea posible y teniendo en cuenta la distribución no uniforme del campo eléctrico.

1.2 Consideraciones Generales.

- Consideraremos conjuntos de cargas eléctricas cuya suma algebraica sea cero “Sistemas Completos” [7], [27], [29].
- Todas las líneas de campo que terminan en las cargas del sistema, ninguna línea se proyectará al infinito.
- El flujo dieléctrico total a través de una superficie cerrada que encierra al sistema será cero.
- La capacitancia será, de hecho, solo una carga constante a potencial proporcional de un conductor aislado.
- El medio dieléctrico considerado para nuestro estudio es el aire, el cual se considera isotrópico y homogéneo. Por lo tanto, $\varepsilon = cte$. Todas las superficies de los conductores en un campo electrostático pueden ser sus superficies equipotenciales.

2. Capacitancia a Tierra C_t .

De acuerdo a los diferentes artículos revisados, en la mayoría de ellos se representa el aislante de polímero como aquellos tipos de capacitancias que solamente intervienen en el sistema, puesto que son la causa principal de la desigualdad en la distribución de potencial o perfil de tensiones. Al realizar el modelo y analizar el aislante matemáticamente podemos decir que es improbable que se considere de manera determinística ya que es geoméricamente fácil de definir, sin embargo, nos encontramos en un caso particular en el que la “Tierra” se puede representar de una forma muy aproximada.

Después de definir la premisa 1. del anexo A, el aislante se ha modelado mediante una configuración cilíndrica para poder obtener la corriente I_x y el potencial V_x en una

determinada ubicación a lo largo del mismo, y para determinar la capacitancia de dispersión esta se representará mediante dos conductores concéntricos de geometría esférica, y cuyos cálculos analíticos nos arrojan resultados satisfactorios.

2.1. Deducción de la Expresión.

Para este caso en específico, consideramos un conductor 1 de radio a y potencial V_1 concéntrico a un conductor 2 de radio b y potencial V_2 , tal como lo muestra la figura B-1.

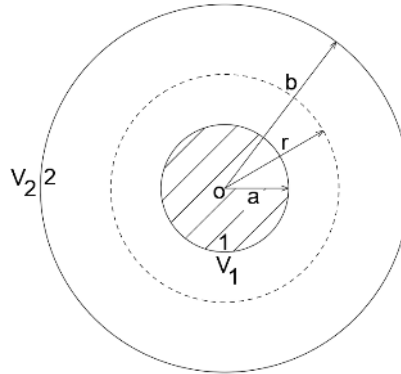


Figura B-1. Dos Conductores Esféricos Concéntricos de Radios a y b

El potencial entre los dos conductores de la esfera de radio r es una solución de la ecuación de Laplace que se reduce a una constante en el conductor 1, y cuyo valor es.

$$V = \frac{A}{r} + B \quad \text{B.11}$$

donde A y B son constantes. Para relacionar la constante A con la carga total Q del conductor 1, se calcula la densidad superficial $\sigma_{superf.}$ para $r = a$; es decir.

$$\sigma_{superf.} = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A}{r} + B \right) = -\epsilon_0 \left(-\frac{A}{r^2} \right)_{r=a} = \frac{\epsilon_0 A}{a^2} \quad \text{B.12}$$

y la carga total del conductor 1 es $Q = 4\pi a^2 \sigma_{superf.} = 4\pi a^2 * \frac{\epsilon_0 A}{a^2} = 4\pi \epsilon_0 A \rightarrow A = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0}$. Por lo tanto, la ecuación (B.11) podemos escribirla como.

$$V_1 - V_2 = A \left(\frac{1}{r} \right) = A \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{b-a}{ab} \rightarrow Q = 4\pi \epsilon_0 \frac{ab}{b-a} (V_1 - V_2) \quad \text{B.13}$$

Comparando la ecuación (B.13) con la ecuación (B.10), se tiene que la capacitancia a tierra es.

$$C_t = 4\pi \epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right) \quad \text{B.14}$$

donde:

ϵ_0 : Permitividad del espacio libre cuyo valor es 8.854×10^{-12} .

b : Distancia a tierra, en metros.

a : Radio esférico promedio, en metros.

3. Capacitancia a Línea C_l .

De acuerdo al modelo del aislador polimérico de la figura (A-1), materia del estudio, se ha considerado la existencia de esta capacitancia e incluso se ha designado con un cierto orden de magnitud en relación con la capacitancia propia. Sería muy complicado encontrar una manera adecuada de establecer al menos valores aproximados que pueda alcanzar cuando el aislante de polímero se encuentre sometido a tensión.

Afirmo que, dada la existencia de la influencia del campo eléctrico en toda su longitud del aislante, se puede realizar un análisis basado en algunas hipótesis fácilmente aceptables.

3.1. Deducción de la Expresión.

Partimos considerando cuatro líneas conductoras denotadas por A_1, A_2, A_3 y A_4 con densidades de carga lineal $-\lambda, +\lambda, -\lambda, +\lambda$ respectivamente, líneas sobre el eje x distribuidas simétricamente con respecto al origen O , tal como lo muestra la figura B-2

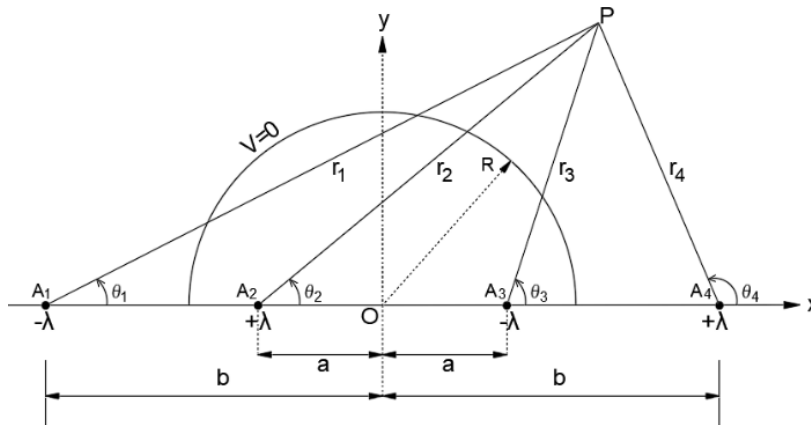


Figura B-2. Cuatro Líneas Conductoras Sobre el Eje x Simétricas con Respecto al Origen
el potencial en el punto P , está dado por.

$$V(P) = \sum_{k=1}^4 V_k = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_3) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_4)$$

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln(r_1) - \ln(r_2) + \ln(r_3) - \ln(r_4)] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)$$

B.15

como sabemos que en la circunferencia de centro O y radio R , el potencial escalar V es cero, sí y solo si, se cumple que $r_1 = r_4$ y $r_2 = r_3$. Entonces la ecuación (B.15), toma la forma.

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 r_1}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(1) = 0 \quad \text{B.16}$$

ahora la función flujo en el punto P , es.

$$F(P) = \sum_{k=1}^4 F_k = -F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \theta_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \theta_2 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \theta_3 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \theta_4$$

$$F(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \{\theta_2 + \theta_4 - \theta_1 - \theta_3\} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln(z - a) + \ln(z + b) - \ln(z - b) - \ln(z + a)]$$

$$F(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \{[\ln(z - a) + \ln(z + b)] - [\ln(z - b) + \ln(z + a)]\} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left[\left(\frac{z + b}{z - b}\right)\left(\frac{z - a}{z + a}\right)\right] \quad \text{B.17}$$

la forma compleja del potencial en el punto P , es una combinación compleja del potencial escalar y la función de flujo, de la forma.

$$\zeta(P) = V_P - jF_P = 0 - j \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left[\left(\frac{z + b}{z - b}\right)\left(\frac{z - a}{z + a}\right)\right] = -j \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left[\left(\frac{z + b}{z - b}\right)\left(\frac{z - a}{z + a}\right)\right]$$

$$\zeta(P) = j \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left[\left(\frac{z + b}{z - b}\right)\left(\frac{z - a}{z + a}\right)\right] \quad \text{B.18}$$

en esta forma compleja de la ecuación (B.18) vemos que para $z = \sqrt{ab} * e^{j\theta}$, el potencial $\zeta(P)$ complejo es imaginario puro y cambia de signo cuando sustituimos j por $-j$.

Ahora consideramos dos cilindros conductores como el aislador y la línea eléctrica, simétricamente distribuidos sobre el eje x con respecto al origen y de igual densidad lineal λ , signos opuestos y de radios iguales c , cada conductor con su respectiva imagen, tal como lo muestra la figura (B-3)

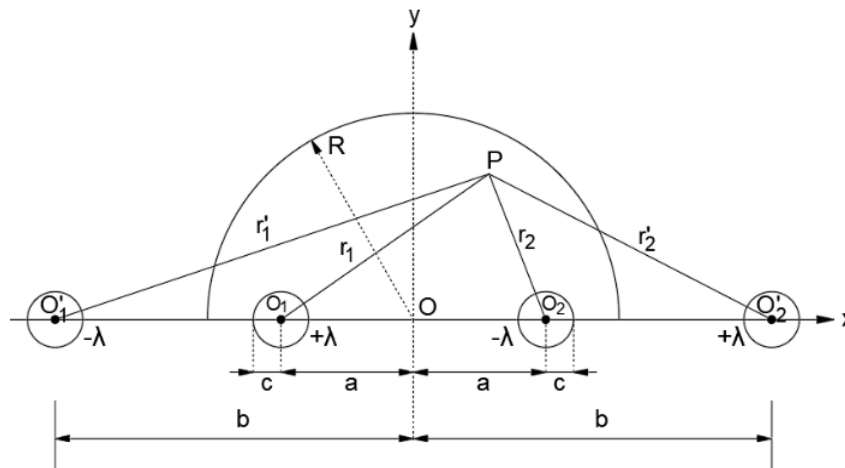


Figura B-3. Dos Conductores con Centros O_1 y O_2 y sus Imágenes con Centros O'_1 y O'_2 Distribuidos Simétricamente Sobre el Eje x con Respecto al Origen

podemos asegurar que los centros O'_1 y O'_2 son las imágenes de los centros O_1 y O_2 respectivamente, puesto que esta afirmación está justificada en la aplicación del *método de la imagen*, la cual manifiesta lo siguiente:

Si tomamos la superficie de radio R como una superficie cerrada equivalente que rodea completamente al conductor cilíndrico de centro O_1 y O_2 y densidad de carga lineal $+\lambda$ y $-\lambda$ respectivamente; entonces, el potencial fuera de esta superficie cerrada determina la solución al problema de la influencia de la distribución de carga del conductor de centro O_1 y O_2 sobre su imagen de centro O'_1 y O'_2 . Es decir, los conductores de centro O_1 y O_2 tienen por imagen a los conductores de centro O'_1 y O'_2 con respecto a la superficie cerrada de radio R según el teorema de Gauss. Esta afirmación se cumple, si y solo sí, la superficie cerrada de radio R no tiene un punto en el infinito, como un plano o un cono, Es por ello que la carga que aparece fuera de la superficie cerrada en el conductor de centro O'_1 y O'_2 , es por tanto, igual a la carga del conductor con centros O_1 y O_2 con signo cambiado.

Dicho esto, y considerando al nuevo sistema planteado como una similitud del sistema de 4 hilos portadores de carga $\pm\lambda$ deducido anteriormente, el potencial en el punto P es $V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{r'_1 r_2}{r_1 r'_2} \right]$, y que este potencial es cero en la circunferencia de centro O y radio $R = \sqrt{ab}$. Utilizamos este resultado para determinar la capacitancia (por unidad de longitud) del sistema de 2 hilos de radio c y cuyos centros están ubicados a una distancia $2a$, encontrándose estos 2 hilos conductores en un cilindro cerrado de radio R . Para ello, primero calculamos los potenciales V_1 y V_2 en los cilindros conductores con centros O_1 y O_2 y radio c . Por esta razón, utilizamos las distancias desde los centros a los puntos O_1 , O_2 , O'_1 y O'_2 con la única excepción de considerar que $r_1 = a$ para V_1 y $r_2 = a$ para V_2 , después de realizar algunos arreglos algebraicos, tenemos.

$$V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{r'_1 r_2}{r_1 r'_2} \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\left(\frac{b-a}{b+a} \right) \frac{2a}{c} \right] = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left[\left(\frac{\frac{R^2}{a} - a}{\frac{R^2}{a} + a} \right) \frac{2a}{c} \right]$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left[\left(\frac{\frac{R^2}{a} - a}{\frac{R^2}{a} + a} \right) \frac{2a}{c} \right] = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left[\left(\frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2} \right) \frac{2a}{c} \right] \quad \text{B.19}$$

de la ecuación (B.10) se sabe que, $CV_{12} = C(V_1 - V_2) = Q$ y como en un cilindro cargado con densidad lineal λ se cumple que $\lambda = \frac{q}{l}$, deducimos la capacitancia C_l .

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{C} = \frac{\frac{Q}{l}}{\pi\epsilon_0} \ln \left[\left(\frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2} \right) \frac{2a}{c} \right] = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 l} \ln \left[\left(\frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2} \right) \frac{2a}{c} \right]$$

$\therefore$

$$C = C_l = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \left[\left(\frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2} \right) \frac{2a}{c} \right]}$$

B.20

donde:

ε_0 : Permitividad del espacio libre cuyo valor es 8.854×10^{-12} .

R : Radio del cilindro que encierra a ambos conductores; o dicho de otra forma, distancia del conductor a tierra, en metros.

$2a$: Distancia entre la línea conductora y el extremo de la posición que ocupa el cobertizo n , en metros

c : Radio cilíndrico promedio del muñón (para nuestro caso cable de cobre trenzado) del cobertizo tomado, en metros

Anexo C

1. Las Descargas

Una descarga es un fenómeno que se produce por la aplicación de una tensión entre dos electrodos, uno de los cuales (el cátodo – carga negativa) está sometido a radiación fotoeléctrica (emisión de electrones por un material cuando incide sobre él una radiación electromagnética). La corriente anódica (carga positiva) se incrementa lentamente a medida que los electrones se desplazan por el gas a una velocidad determinada por la movilidad impuesta por el campo eléctrico E . Este proceso se desarrolla rápidamente en una zona dando lugar a las descargas de Townsend (descarga oscura) y, finalmente, cuando la tensión alcanza su valor crítico, alcanza un valor tal que se produce el fenómeno Spark (transición de descarga dependiente a independiente), dando lugar a una descarga luminosa o a un arco.

El tipo de descarga que resulta de la ruptura de la chispa de un espacio depende de:

- La presión del gas,
- La longitud y forma del espacio,
- La naturaleza de la tensión aplicada y
- Las constantes del circuito externo.

La características dinámicas o transitorias de estas descargas son bastante diferentes a las características estáticas; es por ello que las descargas se dividen en dos tipos.

- a) Descargas dependientes o no autónomas, y
- b) Descargas independientes o autónomas

Para estudiar las descargas, utilizaremos su característica típica como es el voltio-amperio, estática idealizada obtenida a partir de un circuito simple que contiene una bombilla con sus electrodos en serie con una resistencia pura R y una fuente de tensión continua V ; se supone que la variación de la corriente es muy lenta para poder mantener las condiciones de equilibrio en cada punto de funcionamiento. En cambio, la característica dinámica o transitoria supone una variación rápida de la corriente, por lo tanto, existe una tensión más elevada debido al retraso en la producción de la ionización adicional necesaria.

La característica estática (figura C-1) puede obtenerse bien por una reducción en su valor de R_1 a R_2 a tensión constante de la batería, o por un incremento de la tensión de la batería

de V_1 a V_2 con resistencia constante. Cuando el valor de la corriente alcanza alrededor del pico, se aproxima a la característica dinámica o transitoria [3].

En esta figura las corrientes correspondientes a varias combinaciones de tensión y resistencia de la batería se indican en la abscisa.

1.1. Descripción de la Característica Estática General.

De los puntos marcados en (figura C-1) podemos describir lo siguiente:

- ✓ $O \rightarrow A$: Descarga Oscura, de Townsend o Dependiente, que Puede Obtenerse Variando V .- Primera característica que se extiende a 10^{-6} amperios, desde el punto O hasta más allá del punto A . Esta descarga es un estado en el que la corriente se puede aumentar sólo aumentando la tensión de descarga.
- ✓ $A \rightarrow S$: Continuación del Punto A con una Corriente Mayor hasta el Punto S Donde se Produce el Fenómeno de Spark a $V = cte$.- Región en el que la resistencia del circuito es reducida y se incrementa la tensión aplicada hasta alcanzar el punto S a una corriente del orden de 10^{-5} amperios en el que la $\frac{di}{dv}$ es muy grande y una chispa resulta con una tensión de chispa V_S .
- ✓ $S \rightarrow B$: Descarga Luminosa Normal Caracterizada por una Caída de Tensión casi Independiente de I .- Región en la que existe una descarga luminosa “normal” que se caracteriza por una caída de tensión que es casi independiente de la corriente de descarga, que normalmente se extiende a unos 10^{-3} amperios, pero puede alcanzar varios amperios.
- ✓ $B \rightarrow E$: El Aumento de I va Acompañado de un Aumento de V , es la Descarga Incandescente Anormal. – Región en la que la corriente aumenta más allá de un valor crítico, la intensidad de descarga aumenta con el aumento de la corriente a lo largo del campo eléctrico E , generando una descarga llamada brillo “anormal”. Esto no significa que sea fundamentalmente más anormal que la otra descarga luminosa.
- ✓ $E' \rightarrow C$: Transición Hacia un Nuevo Tipo de descarga, el Arco se Produce con el Último Incremento de I y a Baja Tensión. – Región en la que un aumento adicional en la corriente da como resultado una transición repentina a una descarga de baja tensión llamada “arco”. El punto en el que se produce esta transición, a unos 10^{-1} amperios, a veces es bastante incierto y ha sido indicado por una región sombreada, bajo algunas condiciones la transición brillo-arco es gradual.

La zona sombreada muestra el intervalo de corriente en la que se produce la transición de la descarga anómala al arco. Es importante aclarar que las características mostradas en la

figura C.1 se idealizan y que las características reales pueden ser un tanto diferentes, especialmente en cuanto a tensiones y corrientes iniciales, debido a los cambios en la presión del gas, el gas, los electrodos y la velocidad de descarga de la bombilla.

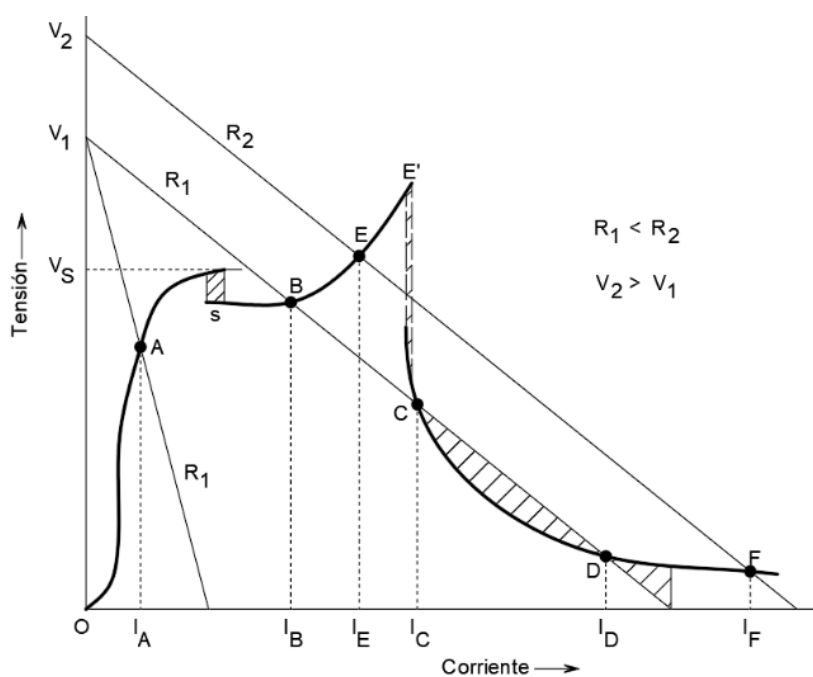
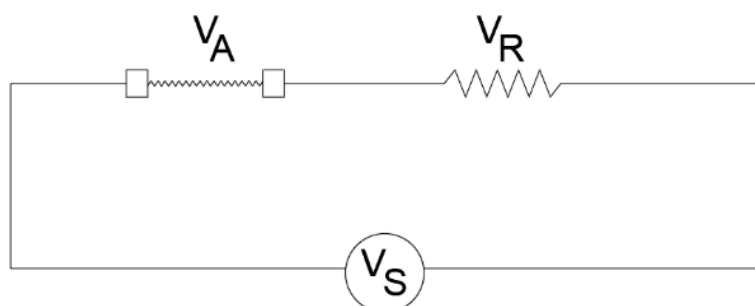


Figura C-1. Característica Estática de la Descarga

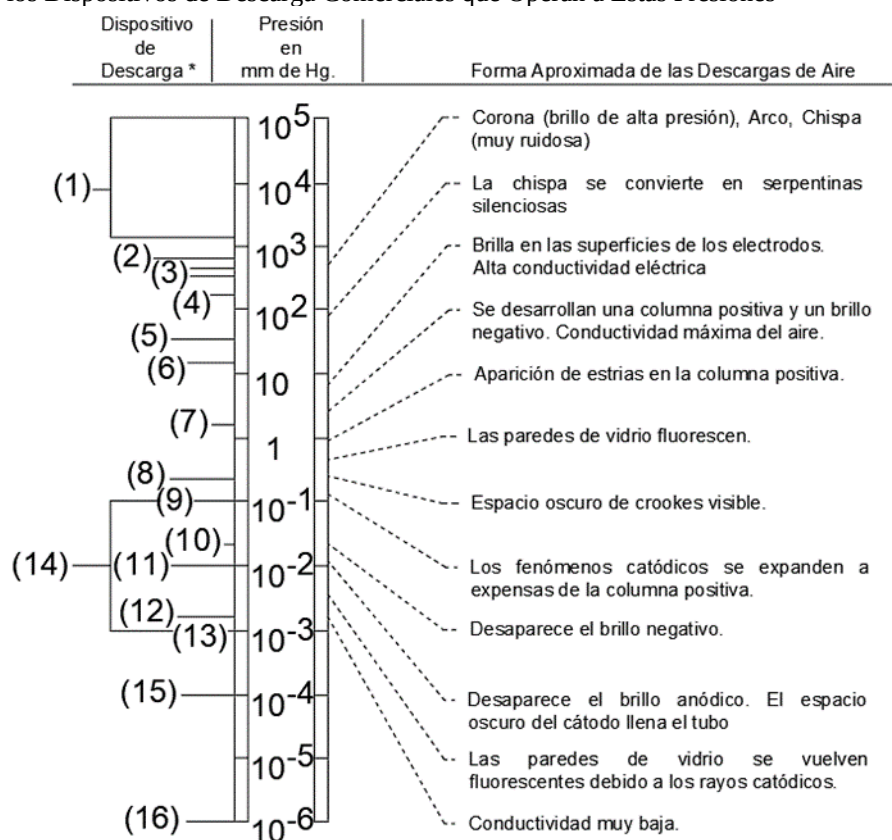


V_S : Tensión de Alimentación

V_A : Caída de Tensión en la Capa Contaminante

V_R : Caída de Tensión en el Arco

Tabla C-1. Forma Aproximada de las Descargas que Tienen Lugar en el Aire a Diversas Presiones e Indicador de los Dispositivos de Descarga Comerciales que Operan a Estas Presiones



- * (1) Lámparas capilares de mercurio de alta presión
 (2) Lámparas de arco de mercurio de alta intensidad (tipo 400 w) y de arco de carbono
 (3) Lámparas incandescentes de gas (630 mm de Hg)
 (4) Lámparas de arco de mercurio de media presión (tipo 250 w), (380 mm de Hg)
 (5) Presión inicial de Dungal (presión de argón - 50 mm de Hg)
 (6) Lámparas de neón (20 mm de Hg)
 (7) Presión de arranque de la lámpara de sodio (presión de neón - 1 a 3 mm de Hg)
 (8) Tubos llenos de gas (presión de argón - 0.15 a 0.5 mm de Hg)
 (9) Fototubos rellenos de gas (0.1 mm de Hg)
 (10) Primeras lámparas de filamento de carbono (0.023 mm de Hg)
 (11) Tubo de descarga de oscilógrafo de cátodo frío (0.01 mm de Hg)
 (12) Tubos de gas de rayos X (0.0015 mm de Hg)
 (13) Presión de funcionamiento del vapor de sodio en lámparas de sodio (0.001 mm de Hg)
 (14) Tubos de arco de mercurio (0.1 a 0.001 mm de Hg)
 (15) Cámara de deflexión del oscilógrafo de cátodo frío (0.0001 mm de Hg)
 (16) Tubo de alto vacío, tubos de rayos catódicos a escala, tubo frío de rayos X (0.000001 mm de Hg)

2. Condiciones para la Existencia y Estabilidad de las Descargas

La naturaleza de la tensión aplicada tiene un marcado efecto en el tipo de descarga para una determinada configuración del tubo de descarga, gas, presión de gas y configuración del electrodo, Es bastante difícil evaluar el resultado de los primeros experimentos en descargas de gas, para todo tipo de fuentes de tensión. Se utilizaron, y no se tuvo cuidado de registrar su naturaleza.

El diagrama esquemático presenta el principio de producción de un arco eléctrico en aire (figura C-2), y tomando las características cualitativas pertenecientes a tres longitudes de arco diferentes que se muestra en la figura C-3, en la que se utiliza la característica estática de un arco [3] a una tensión V_b y una resistencia R conectada en serie con el tubo de descarga, para verificar la existencia de soluciones eléctricamente estables según el método de Rudenberg, se realizan las siguientes consideraciones.

- ✦ Resistividad superficial constante,
- ✦ Longitudes de arco $l_1 < l_2 < l_3$ constantes,
- ✦ Variación de la corriente continua I a saltos.

Primer Caso. – En los puntos A y D (figura C-2) donde la línea de resistencia de la tensión aplicada V_b intersecta la característica del arco, entonces corresponde la ecuación dada por.

$$V_b = iR + e \rightarrow e = V_b - iR \quad \text{C.1}$$

donde e es la tensión de descarga. A y D son puntos de estabilidad.

Para $l = l_1$ de la figura C-3 también se cumple esta condición, queda por ver si estos dos puntos que representan soluciones de equilibrio también contienen la estabilidad del arco. En régimen transitorio, la característica de una descarga de longitud fija (figura C-2) muestra la existencia de fenómenos de naturaleza inductiva, que se deduce de: Supongamos que por alguna condición transitoria la corriente se reduce de modo que el punto de funcionamiento ahora se encuentra en B , se cumple que.

$$e + \Delta e + iR = V_b \rightarrow e = V_b - iR - \Delta e \quad \text{C.2}$$

donde Δe es la diferencia de tensión entre la línea de resistencia y la característica de descarga. Por lo tanto, la tensión aplicada es mayor que la suma de la caída de tensión en la descarga y la resistencia en una cantidad Δe , $[(iR + e) = \Delta e] < V_b$. Si no hay inductancia en el circuito, Δe provocará un aumento en la corriente hasta que se cumpla la ecuación (C.1). Si la corriente aumenta hasta el punto C , Δe es negativo, la suma de la caída de tensión de la resistencia y la tensión de descarga es mayor que la tensión aplicada $(iR + e) > V_b$ y la corriente debe disminuir hasta el punto A , que es claramente un punto de estabilidad.

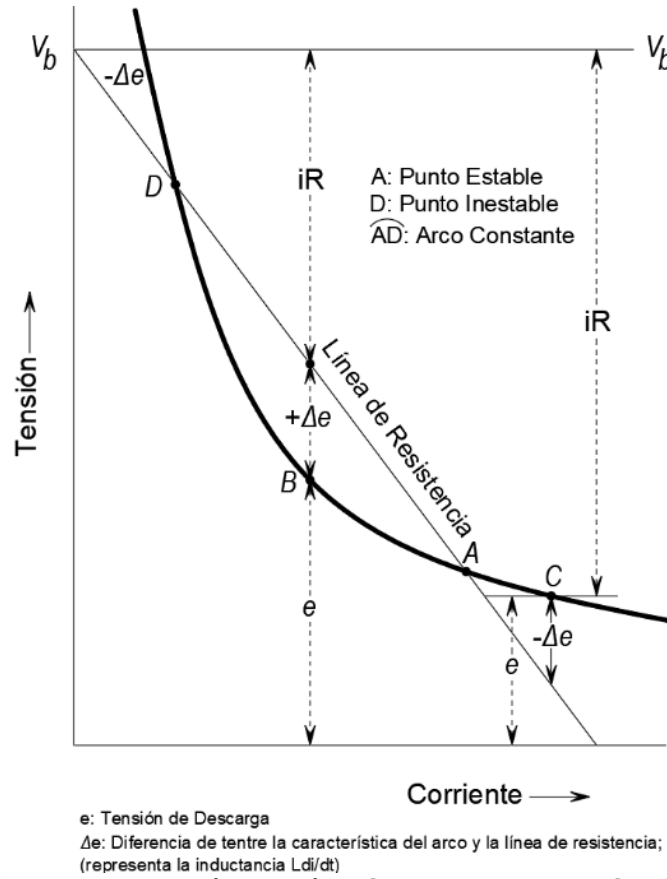


Figura C-2. Característica Estática de una Descarga para Identificar Puntos Estables y No Estables

Con la aplicación de la ecuación (C.1) indicada en la figura C-3, se obtiene.

$$V_S = V_A + V_R \quad \text{C.3}$$

Cuando existe inductancia en el circuito, el arco puede funcionar momentáneamente en los puntos A y C de la figura C-3, donde

$$\Delta e = L \frac{di}{dt}$$

y aplicando la ecuación (C.2), se obtiene.

$$V_S = V_A + V_R + L \frac{di}{dt} \quad \text{C.4}$$

y considerando la existencia de una corriente i_e en el momento de equilibrio, así como un Δi , podemos escribir la ecuación (C.4) como.

$$V_S = V_A * i_e + \left\{ \frac{\partial}{\partial i} [V_A * i_e] \right\} \Delta i + V_R * i_e + \left\{ \frac{\partial}{\partial i} [V_R * i_e] \right\} \Delta i + L \frac{di}{dt} \quad \text{C.5}$$

reordenando y separando los términos diferenciales, se tiene

$$V_S = [V_A * i_e + V_R * i_e] + \left\{ \frac{\partial}{\partial i} [V_A * i_e] + \frac{\partial}{\partial i} [V_R * i_e] \right\} \Delta i + L \frac{di}{dt} \quad \text{C.6}$$

Restando la ecuación (C.1) de la ecuación (C.6), obtenemos una expresión que contiene un término compuesto de tensiones que debe de ser cero.

$$0 = (1 - i_e)(V_A + V_R) - \left\{ \frac{\partial}{\partial i} [V_A * i_e] + \frac{\partial}{\partial i} [V_R * i_e] \right\} \Delta i - L \frac{di}{dt}$$

donde

$$(1 - i_e)(V_A + V_R) = 0 \quad \text{y} \quad - \left\{ \frac{\partial}{\partial i} [V_A * i_e] + \frac{\partial}{\partial i} [V_R * i_e] \right\} \Delta i - L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{C.7}$$

∴

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial i} [V_A * i_e] + \frac{\partial}{\partial i} [V_R * i_e] \right\} \Delta i + L \frac{di}{dt} = 0$$

donde $\frac{\partial}{\partial i} [V_A * i_e], \frac{\partial}{\partial i} [V_R * i_e]$ es la pendiente de las características de descarga en el punto de su intersección con la línea de resistencia. Es decir, si la pendiente de la característica V-I de descarga se considera una “resistencia”, entonces la resistencia neta del circuito debe de ser positiva para un funcionamiento estable. Esto se conoce a veces como el criterio de Kauffman para la estabilidad de una descarga.

Ahora bien, si la corriente en la ecuación (C.7) aumenta hasta i_c en el punto C , Δe se vuelve negativa; entonces, la resistencia equivalente es positiva, lo que significa que.

$$\left| \frac{\partial}{\partial i} V_A \right| < \left| \frac{\partial}{\partial i} V_R \right| \quad \text{siendo} \quad \left| \frac{\partial}{\partial i} V_R \right| > 0 \quad \text{C.8}$$

y cuyo significado nos indica que, a cualquier distancia del punto A , existe una tendencia del arco a volver a él, el punto A es estable. En el punto D , la ecuación (C.1) es verdad, pero la corriente todavía tiende a aumentar, haciendo que aparezca un Δe positivo; es decir, la resistencia equivalente de la ecuación (C-7) se vuelve negativa, y.

$$\left| \frac{\partial}{\partial i} V_A \right| > \left| \frac{\partial}{\partial i} V_R \right| \quad \text{siendo} \quad \left| \frac{\partial}{\partial i} V_R \right| < 0 \quad \text{C.9}$$

Lo que significa que existe inestabilidad evolutiva hacia el punto A y en consecuencia el punto D no es estable. El criterio para evaluar un punto de estabilidad matemáticamente es.

$$\frac{de}{di} + R > 0 \quad \text{C.10}$$

Segundo Caso. – Para una longitud de arco l_2 , la corriente más baja que puede obtenerse a partir de una tensión aplicada dada es la corriente para la cual la línea de resistencia es tangente a la característica en el punto C de la figura C-3, este punto representa una solución única y neutralmente estable de la ecuación (C.1), también se puede decir que l_2

representa la longitud máxima que puede tomar una zona bajo tensión V_S , si $L < l_2$, entonces, la descarga alcanza el otro electrodo.

Tercer Caso. – Cuando la distancia entre electrodos se hace demasiado grande, en la longitud de arco l_3 , ya no hay posibilidad de que aparezca un arco, en cuyo caso afirmamos que no existe solución a la ecuación (C.1).

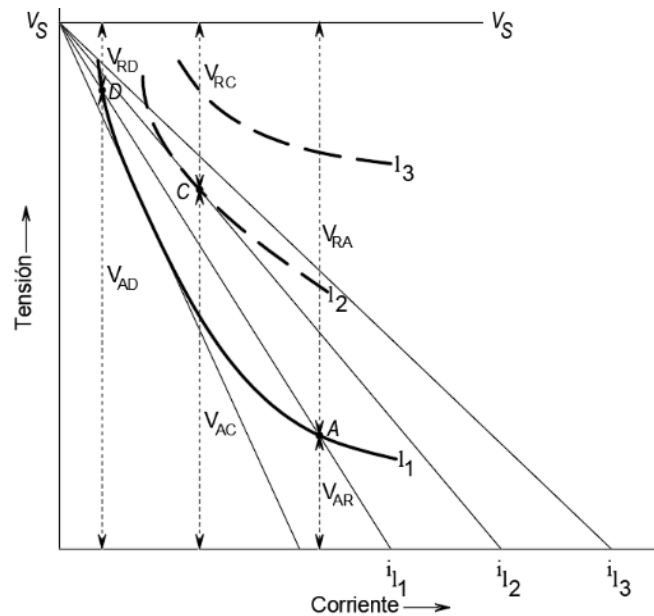


Figura C-3. Características Cualitativas de las Longitudes de Arco l_1, l_2, l_3

Anexo D

1. Determinación de los Parámetros que Intervienen en el Mecanismo de Descarga en la Superficie del Aislador Polimérico.

La aparición, el desarrollo y la extinción de una descarga sobre un aislador depende de una serie de factores cuya interdependencia es bastante complicada de explicar. En esta tesis, solamente tratamos los parámetros principales; es decir, aquellos parámetros cuya intervención han sido generalmente bien definidos y que se incluyen en los análisis.

1.1 Densidad de Corriente Superficial

En la capa conductora, la presencia del gradiente de potencial constante provoca una migración continua de cargas, generalmente son electrones en metales e iones en los electrolitos (sustancia que se descompone en iones al disolverse en agua o líquidos); este flujo de estas cargas o de corriente goza de las características del flujo de un fluido incompresible; es decir, que no existen ni fuente ni sumidero dentro del propio fluido, y se determina por.

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad \text{D.1}$$

en términos de densidad de flujo a través de la unidad de superficie, la incompresibilidad significa que.

$$\iint_S \vec{J} * d\vec{s} \quad \text{D.2}$$

donde:

$\vec{J}$: Densidad de flujo de corriente en la unidad de superficie, en A/cm².

$d\vec{s} = n * ds$: Vector que representa la superficie de un elemento de cobertizo.

entonces

$$\iint_S \vec{J} * n * ds = 0 \quad \text{D.3}$$

La ley de ohm establece que la diferencia de potencial aplicada a los extremos de un conductor largo es proporcional a la corriente resultante dentro del conductor.

$$V_1 - V_2 = V_{12} = Ri \quad \text{D.4}$$

El valor de la resistencia R para un conductor de sección transversal uniforme S y resistividad específica uniforme ρ (ohm.cm), está relacionada con la geometría de la capa contaminante, y se determina como.

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S}$$

D.5

donde:

$\sigma = \frac{1}{\rho}$; conductividad uniforme del material (siemens/m), y

l : longitud del conductor

Ahora consideremos la capa contaminante como un conductor de geometría arbitraria del que se dispone de un elemento, como se muestra en la figura D-1 [27].

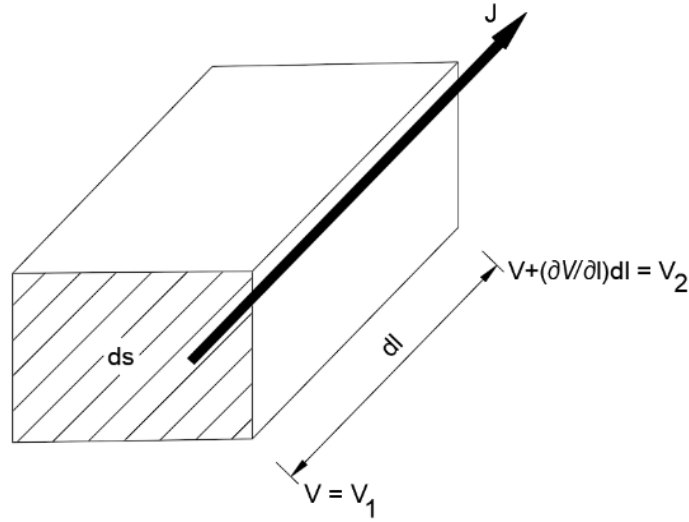


Figura D-1. Elemento Conductor de la Capa Contaminante

la diferencia de potencial elemental en la dirección de la densidad de flujo de corriente J puede expresarse de acuerdo a la ecuación (D.4), como.

$$V_1 - V_2 = V - \left[V + \left(\frac{\partial V}{\partial l} \right) dl \right] = - \left(\frac{\partial V}{\partial l} \right) dl = V_{12} = Ri \quad \text{D.6}$$

la corriente en el elemento será.

$$JdS = i \quad \text{D.7}$$

y de acuerdo a la ecuación (D.5) la resistencia en el elemento será.

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad \text{D.8}$$

y reemplazando la ecuación (D.7) y (D.8) en la ecuación (D.6), obtenemos.

$$V_1 - V_2 = V_{12} = - \left(\frac{\partial V}{\partial l} \right) dl = \left(\frac{l}{\sigma S} \right) (JdS) = - \frac{\partial V}{\partial l} = \frac{1}{\sigma} J$$

$$-\text{grad } V = -\nabla V = \frac{J}{\sigma} \quad \text{D.9}$$

El gradiente del potencial negativo ($-grad V$) se define como el valor del campo eléctrico que rodea a los conductores y de acuerdo a la ecuación (D.9), se tiene.

$$E = -grad V = -\nabla V = \frac{J}{\sigma} \rightarrow E = \frac{J}{\sigma} \rightarrow J = \sigma E$$

o también

$$J_s = \sigma_s E$$

D.10

donde:

E : gradiente de tensión superficial o campo eléctrico que rodea la capa contaminada, o campo eléctrico responsable de la densidad de flujo eléctrico

J_s : densidad de flujo de corriente eléctrica en la capa, en A/cm²

1.2 Resistencia Lineal Superficial.

El complejo proceso de aproximación al estudio del mecanismo de derivación requiere de ciertas abstracciones juiciosas, como la asignación de una resistencia lineal constante en serie a la capa contaminante, que se supone, permanecerá siempre invariable en el tiempo durante el transcurso del fenómeno.

El modelo utilizado para el estudio será un aislador de geometría cilíndrica alargado *recubierto por una delgada capa de contaminante uniforme* distribuido por toda la superficie tal como lo muestra la figura D-2, y que se comporta como una resistencia proporcional a la longitud de fuga [28], [32].

Definida la expresión de la resistencia por la ecuación (D.5) sobre la capa contaminada y teniendo en cuenta el elemento diferencial dL del modelo rectangular, tendremos que la sección de la capa contaminante en la unidad del aislante de geometría cilíndrica es.

$$S = \pi * D(L) * h$$

D.11

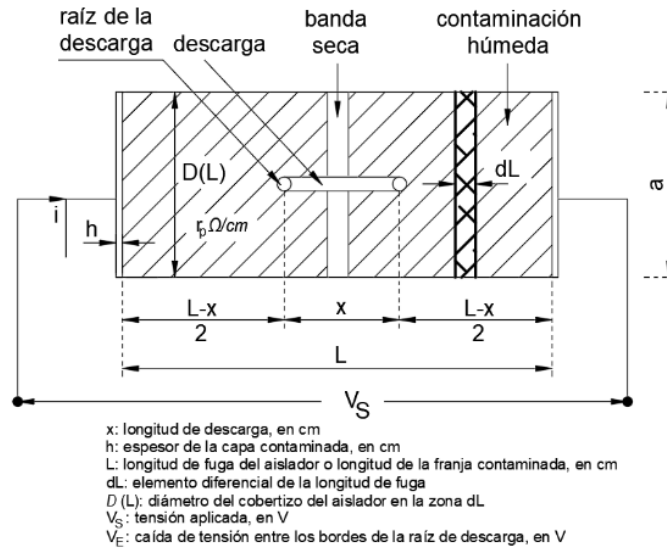


Figura D-2. Modelo del Proceso de Flameo de la Capa Contaminada del Cilíndrico Adoptado para Representar la Superficie del Aislador

la resistividad superficial viene dada por $\rho_s = \frac{\rho_e}{h}$ cuya unidad de medida es el ohm (Ω). Tomando la ecuación (D.8), integramos y obtenemos la resistencia de fuga total.

$$R = \rho_s \int_0^L \frac{dL}{\pi D(L)} \quad \text{o} \quad R = \rho_s F[L] \quad \text{D.12}$$

Pero se sabe que un aislador, aunque conserve su axisimetría, tiene una forma no regular entre electrodos, por lo que se establece la expresión que implica un diámetro efectivo [28].

$$R = \rho_s \frac{L}{\pi d_{\text{efectivo}}} \quad \text{D.13}$$

por lo que al reemplazar la ecuación (D.12) en la ecuación (D.13), se obtiene.

$$d_{\text{efectivo}} = \frac{L}{\int_0^L \frac{dL}{D(L)}} \quad \text{D.14}$$

y de acuerdo a la ecuación (D.12), el factor de forma $F[L]$ de uso generalizado, se escribe como.

$$F[L] = \int_0^L \frac{dL}{\pi D(L)} \quad \text{D.15}$$

del mismo modo, la conductancia total G en función de la conductividad específica $\sigma_e = \frac{\sigma_s}{h}$ (S/cm) es.

$$G = \frac{\sigma_s}{\int_0^L \frac{dL}{\pi D(L)}} \quad \text{o} \quad G = \frac{\sigma_s}{F[L]} \quad \text{D.16}$$

Si definimos a la resistencia por unidad de longitud, como.

$$r_p = \frac{R}{L} \quad \text{D.17}$$

y reemplazamos la ecuación (D.12) en la ecuación (D.17), se tiene.

$$r_p = \frac{\rho_s F[L]}{L} = \frac{F[L]}{\sigma_s L} \quad \text{D.18}$$

de este modo, si deseamos conocer la expresión general de la resistencia de la capa contaminada en una zona cualquiera de longitud $L - x$, podemos escribir, bien en función de la resistencia por unidad de longitud r_p con la ecuación (D.17), o bien en función del factor de forma $F[L]$ con la ecuación (D.12).

$$R_p = r_p(L - x) \quad \text{D.19}$$

$$R_p = \rho_s F[L - x] \quad \text{D.20}$$

En la práctica, es posible establecer una correlación entre la conductividad superficial inicial del aislante y el peso del electrolito (que en este caso es el NaCl) en la solución contaminante, esta correlación está determinada por la resistencia total.

- Cálculo de la Conductividad del Aislador. – Relación entre la conductividad superficial σ_s y el factor de forma $F[L]$.

$$\sigma = \frac{\sigma_s}{F[L]}$$

- Resistencia de la Capa Aislante. – Inversa de la conductancia del aislador.

$$R = \frac{1}{G}$$

1.3 Conductividad Superficial.

La cantidad de gramos por cm^2 de sólidos ionizables, con la absorción de humedad, en la superficie plana contaminada uniformemente, está dada por la concentración del electrolito cuya expresión es.

$$C = \frac{w}{h} \quad \text{D.21}$$

donde

C : Concentración del contaminante o del electrolito, en gr./cm^3

w : Cantidad de sólidos ionizables o peso del electrolito, en gr./cm^2

h : Espesor de la capa contaminada, en cm

El aumento del espesor de la capa contaminada h , produce un aumento lineal de la conductividad superficial σ_S en función de la conductividad específica σ_e .

$$\sigma_S = \sigma_e h \quad \text{D.22}$$

donde

σ_S : Conductividad superficial, en Siemens

σ_e : Conductividad específica, en Siemens/cm

Cuando todos los solubles ionizables se han disuelto en su totalidad, el valor σ_S alcanzará su límite máximo [28]; es decir, la conductividad específica σ_e será proporcional a la concentración y está dada por.

$$\sigma_e = \frac{\Lambda_0}{N} C \quad \text{D.23}$$

donde

Λ_0 : Valor de la conductividad equivalente para la dilución infinita, en Siemens/cm²/gr.

N : Gramos equivalentes del peso de los sólidos iónicos

C : Concentración del contaminante o del electrolito, en gr./cm³

y la conductividad superficial σ_S está dada por.

$$\sigma_S = \frac{\Lambda_0}{N} w \quad \text{D.24}$$

Como el sólido ionizable que utilizó [32] en sus ensayos de laboratorio fue el NaCl a 20°C, para el cual consideró los siguientes valores $\Lambda_0 = 113.4 \text{ S/cm}^2/\text{gr.}$ y $N = 58.5$; entonces, para determinar la conductividad superficial máxima $\sigma_{S_{\text{máx.}}}$, reemplazamos estos datos en la ecuación (D.25), se obtiene.

$$\sigma_{S_{\text{máx.}}} = \frac{113.4}{58.5} w = 1.94 w \text{ (Siemens)} \quad \text{D.25}$$

Este valor máximo de la conductividad superficial $\sigma_{S_{\text{máx.}}}$, también se conoce como “conductividad superficial en frío”, a menudo se utiliza un factor de conductividad a veces ligeramente superior a 2; esto se justifica dado que el proceso termodinámico del calentamiento producido en la capa conductora (por la aplicación de una tensión alterna en los extremos del electrodo) alcanza el punto de ebullición del agua de la mezcla en las zonas donde se forman las bandas secas (ver figura D.2), la que produce la variación de la conductividad superficial [28], [29].

Este factor máximo de conductividad $f_{m\acute{a}x.}$, se determina por.

$$f_{m\acute{a}x.} = 1 + \beta(T_B - T_{amb.})$$

donde

β : Coeficiente de temperatura de conductividad, en $1/^{\circ}\text{C}$

T_B : Temperatura de ebullición, en $^{\circ}\text{C}$

$T_{amb.}$: Temperatura ambiente, en $^{\circ}\text{C}$

Si consideramos los valores de $T_B = 100^{\circ}\text{C}$ y $T_{amb.} = 20^{\circ}$, obtenemos.

- Para ácidos: $\beta \approx 0.016$ a 0.019 , entonces $f_{m\acute{a}x.} = 2.28$ a 2.52
- Para sales: $\beta \approx 0.022$ a 0.025 , entonces $f_{m\acute{a}x.} = 2.76$ a 3.00

En el caso de aisladores prácticos (aislador que consta de varias unidades repetitivas idénticas en las que pueden producirse varias descargas en serie) la película contaminante se seca de forma no uniforme debido a uno o ambos de los siguientes factores.

- Distribución no Uniforme de la Contaminación de Ancho Constante. – Si la distribución es uniforme, salvo en una región muy pequeña donde la conductividad superficial es la mitad del valor que el resto de la franja, entonces f puede reducirse hasta en un 25% [28].
- Variación del Ancho del Aislante, como Ocurre en la Práctica.

Para ambos casos el factor de conductividad está definido por.

$$f = \frac{I_L}{I'_L}$$

donde

I_L : Corriente de fuga durante la aplicación inicial de la tensión de prueba

I'_L : Corriente de fuga justo antes de la formación de la banda seca

Por otra parte, en la práctica es posible determinar la conductividad superficial media de un aislante, mediante la medición de la corriente que fluye a través de toda la longitud del aislador polimérico cuando se le somete a una tensión de algunos kV justo antes de la prueba (método que utiliza contaminantes no solubles comunes como CO-monóxido de carbono; SO_x -óxido de azufre; NO_x -óxido de nitrógeno; CFC-clorofluorocarbonos; H_2SO_4 -ácido sulfúrico; O_3 -Ozono, CH_4 -metano, desechos radioactivos y NaCl). Entonces se determinan los parámetros siguientes.

- Cálculo de la conductancia G , en Siemens
- Producto de la conductancia por el factor de forma $G * F(L)$, de la ecuación (D.16)

- Conductividad superficial σ_s , en Siemens

O expresada implícitamente como la densidad superficial del NaCl después de la prueba.

- Disolución del contaminante impregnado en x lechos de agua destilada
- Conversión en peso del NaCl por unidad de volumen de disolvente
- Conversión en peso del NaCl en densidad superficial en gr/cm^2

1.4 Resistencia en Serie de la Capa Contaminante.

Todos los investigadores con respecto a este tema coinciden en la importancia de conocer los impactos que ocasiona la influencia de la resistencia en serie con la descarga de la capa contaminante sobre la superficie del aislador, tal es así, que investigaciones recientes están enfocadas a determinar la función objetivo para minimizar los daños del aislante considerando restricciones propias del modelo.

De acuerdo al estudio realizado por [28] y [29], se comprobó que cuando la corriente de fuga llega a ser elevada en esta zona de la banda seca donde se produce la descarga se genera una caída de tensión que aumenta, y que por sí sola, representa casi el 95 % del gradiente de potencial por unidad de longitud de fuga soportado por el aislador cuando evoluciona la descarga.

Po tal motivo, es que se estudia con mucho detalle los desarrollos propuestos por [28], dado que su aplicación proporciona un nivel de precisión muy elevado.

Para poder estudiar las descargas, procedemos a considerar la siguiente suposición: que las raíces de la descarga son de geometría circular, tal como se muestra en la figura D.2; entonces, el cálculo de R (resistencia en serie con la descarga de la capa contaminante) se convierte en un problema de campo laplaciano bidimensional que se puede resolver mediante la aplicación de la *teoría de funciones conjugadas*, que se basa en la teoría de las imágenes y de una matriz infinita de líneas cargadas con potenciales complejos y que su desarrollo está basado en la integral de Fourier.

En efecto, el gradiente de potencial creado por una línea cilíndrica cargada se conoce por [11], [21] y [27], cuya expresión es.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{D.26}$$

Por la ecuación (D.10), sabemos que $E = -\text{grad } V = -\partial_u V$, entonces al integrar esta ecuación entre los límites r_0 a r , se obtiene.

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln r - \ln r_0] \quad \text{D.27}$$

Como tenemos líneas cargadas, es necesario adoptar la función característica general (ecuación D.27) [11], [21], [29].

En un campo laplaciano bidimensional, la función potencial compleja representa una fuente en el origen y dicha fuente entrega una corriente i , esta función está dado por [28].

$$\zeta = -\frac{i}{2\pi\sigma_S} \ln z \quad \text{D.28}$$

y tomando la notación de [27], $z = x + jy$, y $\zeta = V + jF$, donde V es la función potencial escalar y F es la función flujo; entonces, ζ representa al potencial complejo.

Ahora consideramos la fila discontinua (figura D-3) cuyas fuentes están indicadas por la línea $n = 0$ en los puntos $x = \pm b$ y sumideros en los puntos $x = \pm(2h - b)$; este fenómeno se repite con un intervalo de $4h$ por lo que, el potencial en la fila $n = 0$ puede representarse mediante la expresión.

$$\zeta = -\frac{i}{2\pi\sigma_S} \left\{ \ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z + b) \right] \right] + \ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z - b) \right] \right] \dots \dots \right. \\ \left. \dots \dots - \ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z + (2h - b)) \right] \right] - \ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z - (2h - b)) \right] \right] \right\} \quad \text{D.29}$$

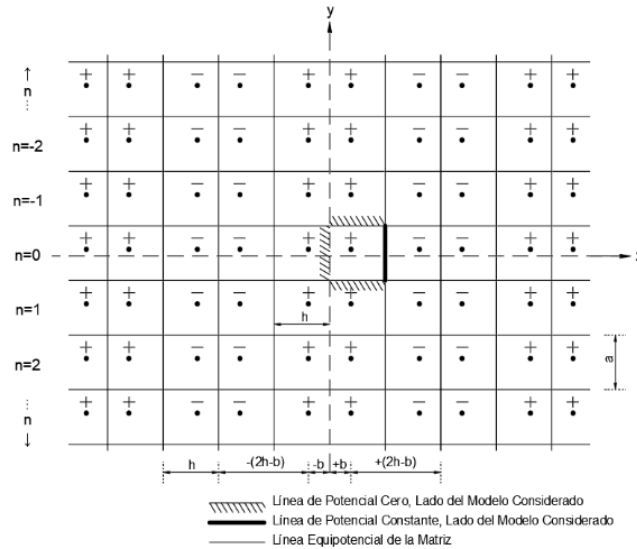


Figura D-3. Representación de las Imágenes de la Franja Ancha Correspondientes a la Raíz de Descarga de Acuerdo a la Superficie Rectangular (Figura D-2)

de la ecuación (D-29) los primeros términos $\ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z + b) \right] \right] + \ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z - b) \right] \right]$ representa las fuentes y los siguientes dos términos $-\ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z + (2h - b)) \right] \right] - \ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z - (2h - b)) \right] \right]$ representa a los sumideros o puntos que no tienen influencia sobre la fuente.

Puesto que esta función es válida analíticamente en todas partes excepto en los puntos $x=\pm b$ o $x = \pm(2h - b)$, y en la vecindad de $\pm b$ y $\pm(2h - b)$ que representa el campo de una fuente o sumidero ya que $\sin z \rightarrow z$ cuando z es pequeño. Aplicando las propiedades de suma y resta de logaritmos, suma de ángulo doble y reordenando la ecuación (D-29), obtenemos.

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \left\{ \ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z + b) \right] \right] \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z - b) \right] \right] \right\} \dots \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \dots - \left\{ \ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z + (2h - b)) \right] \right] \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z - (2h - b)) \right] \right] \right\} \right\} \\ \zeta &= -\frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \ln \left[\frac{\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z + b) \right] \sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z - b) \right]}{\sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z + (2h - b)) \right] \sin \left[\left(\frac{\pi}{4h} \right) (z - (2h - b)) \right]} \right] \right\} \end{aligned} \quad \text{D.30}$$

$$\zeta = -\frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \ln \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi b}{2h} \right) - \cos \left(\frac{\pi z}{2h} \right)}{-\cos \left(\frac{\pi b}{2h} \right) - \cos \left(\frac{\pi z}{2h} \right)} \right] \right\}$$

Por [27] hacemos que $z = x + jy$, reemplazamos en la ecuación (D-30), se tiene.

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \ln \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi b}{2h} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2h} (x + jy) \right)}{-\cos \left(\frac{\pi b}{2h} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2h} (x + jy) \right)} \right] \right\} \\ \zeta &= -\frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \ln \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi b}{2h} \right) - \cos \left(\frac{\pi x}{2h} \right) \cosh \left(\frac{\pi y}{2h} \right) + j \sin \left(\frac{\pi x}{2h} \right) \sinh \left(\frac{\pi y}{2h} \right)}{-\cos \left(\frac{\pi b}{2h} \right) - \cos \left(\frac{\pi x}{2h} \right) \cosh \left(\frac{\pi y}{2h} \right) + j \sin \left(\frac{\pi x}{2h} \right) \sinh \left(\frac{\pi y}{2h} \right)} \right] \right\} \end{aligned} \quad \text{D.31}$$

Por [27] hacemos que $\zeta = V + jF$, reemplazamos en la ecuación (D-31) y tomamos la parte real V , obtenemos la expresión para la fila donde $n = 0$.

$$V = -\frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left(\cos \left(\frac{\pi b}{2h} \right) - \cos \left(\frac{\pi x}{2h} \right) \cosh \left(\frac{\pi y}{2h} \right) \right)^2 + \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2h} \right) \sinh^2 \left(\frac{\pi y}{2h} \right)}{\left(\cos \left(\frac{\pi b}{2h} \right) + \cos \left(\frac{\pi x}{2h} \right) \cosh \left(\frac{\pi y}{2h} \right) \right)^2 + \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2h} \right) \sinh^2 \left(\frac{\pi y}{2h} \right)} \right] \right\} \quad \text{D.32}$$

La función potencial escalar debido a la serie infinita de filas que se muestra en la figura D-3, ahora se puede obtener mediante la suma algebraica de los potenciales aportados por cada fila a su vez, así tenemos.

$$V = -\frac{i}{2\pi\sigma_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi b}{2h}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2h}(na+y)\right) \right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \sinh^2\left(\frac{\pi}{2h}(na+y)\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi b}{2h}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2h}(na+y)\right) \right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \sinh^2\left(\frac{\pi}{2h}(na+y)\right)} \right] \quad \text{D.33}$$

en la proximidad de una fuente de corriente, los equipotenciales son pequeños círculos que rodean la fuente. Por lo tanto, podemos elegir dicho equipotencial para que coincida con el perímetro de la raíz de la descarga. Si hacemos $x = b$ y $y = r$ en la ecuación (D.33), se obtiene el potencial del perímetro de la raíz de la descarga. Entonces, la resistencia entre este pequeño círculo y la línea de potencial cero en $x = h$, es.

$$R = \frac{V}{i}$$

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi b}{2h}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2h}(na+y)\right) \right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \sinh^2\left(\frac{\pi}{2h}(na+y)\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi b}{2h}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2h}(na+y)\right) \right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \sinh^2\left(\frac{\pi}{2h}(na+y)\right)} \right]$$

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left(1 + \cosh\left(\frac{\pi}{2h}(na+r)\right) \right)^2 + \tan^2\left(\frac{\pi b}{2h}\right) \sinh^2\left(\frac{\pi}{2h}(na+r)\right)}{\left(1 - \cosh\left(\frac{\pi}{2h}(na+r)\right) \right)^2 + \tan^2\left(\frac{\pi b}{2h}\right) \sinh^2\left(\frac{\pi}{2h}(na+r)\right)} \right] \quad \text{D.34}$$

Si evaluamos la resistencia de acuerdo a la ecuación (D.34), implica un cálculo extenso y tedioso, a pesar de que sólo son significativos los términos correspondientes a los primeros valores enteros de n . La expresión para R no pueden manipularse en una forma conveniente para su inclusión en las ecuaciones del circuito. Sin embargo, se pueden derivar expresiones más sencillas para R dependiendo de las dimensiones de la franja; es decir, si la franja es ancha o estrecha. Esta ecuación sólo debe utilizarse si hay que calcular valores muy precisos de R como para bandas cuyo ancho es del mismo orden que la longitud.

En una franja ancha, la ecuación (D.34) nos muestra que si $a > 3h$, todos los términos excepto que para $n = 0$ son despreciables, y dado que $r \ll h$, $\cosh\left(\frac{\pi r}{2h}\right) \approx 1$ y $\sinh\left(\frac{\pi r}{2h}\right) \approx \frac{\pi r}{2h} \approx 0$, entonces la expresión anterior se convierte en.

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left(1 + \cosh\left(\frac{\pi r}{2h}\right) \right)^2 + \tan^2\left(\frac{\pi b}{2h}\right) \sinh^2\left(\frac{\pi r}{2h}\right)}{\left(1 - \cosh\left(\frac{\pi r}{2h}\right) \right)^2 + \tan^2\left(\frac{\pi b}{2h}\right) \sinh^2\left(\frac{\pi r}{2h}\right)} \right] \right\}$$

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1+1)^2 + 0}{(1-1)^2 + \left(\frac{\pi r}{2h}\right)^2 \tan^2\left(\frac{\pi b}{2h}\right)} \right] \right\} = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{4}{\left(\frac{\pi r}{2h}\right)^2 \tan^2\left(\frac{\pi b}{2h}\right)} \right] \right\}$$

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \left\{ \ln \left(\frac{4h}{\pi r} \right) - \ln \left[\tan \left(\frac{\pi b}{4h} \right) \right] \right\}$$

D.35

Si $b = \frac{x}{2}$, $h = \frac{L}{2}$ y $r = r_d$, que junto con las relaciones $S = \frac{i}{\pi r_d^2}$ y $r_p = \frac{1}{a\sigma_s}$ da finalmente

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i} \right) - \ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \right\}$$

D.36

Para una franja estrecha donde $a < L$, y considerando la matriz de fuentes de corriente que se muestra en la figura D-4, esta matriz se describe por la función [27].

$$\zeta = -\frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{a} \right) (z - jb) \right] \right] + \ln \left[\sin \left[\left(\frac{\pi}{a} \right) (z + jb) \right] \right] \right\}$$

D.37

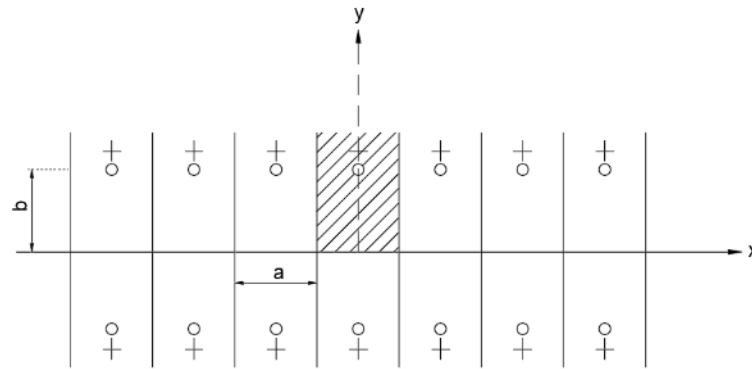


Figura D-4. Representación de las Imágenes de la Franja Estrecha Correspondientes a la Raíz de la Descarga de acuerdo a la Superficie Rectangular (Figura D-2)

Tras la expansión de los términos del seno y tomando la función de potencial escalar V , obtenemos.

$$V = -\frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} \left[\cosh \left(\left(\frac{2\pi}{a} \right) (y - b) \right) - \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \right] \left[\cosh \left(\left(\frac{2\pi}{a} \right) (y + b) \right) - \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \right] \right\} \quad \text{D.38}$$

Para obtener finalmente.

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{2\pi(h - b)}{a} + \ln \left(\frac{a}{2\pi r} \right) \right\}$$

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{\pi(L - x)}{a} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a^2}{4\pi^2 \left(\frac{i}{S\pi} \right)} \right) \right\}$$

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{\pi(L - x)}{a} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i} \right) \right\}$$

D.39

Anexo E

1. Estudio de la Derivación en Corriente Alterna.

Para poder estudiar la derivación de la corriente en señal alterna, el enfoque es establecer primero el criterio de derivación mediante el conocimiento de.

- la magnitud del valor mínimo de la tensión de sostenimiento de la descarga, y
- la magnitud del valor mínimo de la tensión de evolución de la descarga

1.1 Estudio del Modelo de Corriente Continua Aplicada a Corriente Alterna.

Aquí estudiamos la combustión de la descarga en un circuito resistivo en corriente continua, para luego aplicar esta teoría a corriente alterna. Aunque la toma de valores eficaces para medir las magnitudes eléctricas ha sido bien acogida por la gran mayoría de investigadores, es importante señalar que de acuerdo con la característica de las descargas en el diagrama voltio-amperio, la aplicación de una tensión alterna sinusoidal no dará lugar a la existencia de una corriente sinusoidal y por ende al uso de valores eficaces, puesto que puede no ser aconsejable; sin embargo, evaluamos el valor máximo de 60 c/seg. durante el 40 % de cada semiciclo, el cual oscila entre el 5 % de su valor pico [29], y si tenemos en cuenta el tiempo que tarda cada uno de los picos el cual toma un valor de 3.33 ms., tiempo suficiente para que la velocidad de descarga evolucione de forma finita en el orden de 10 cm/ms y la tensión aplicada puede caer a cero antes de que se complete la descarga disruptiva, entonces podemos concluir que [28].

- La tensión alterna puede considerarse como una constante; es decir, como una serie de aplicaciones de una tensión fija igual a la tensión alterna pico.
- La descarga se incrementará de forma intermitente, retardándose en su ritmo de asignación con respecto a las descargas en cc.

1.2 Análisis del Incremento de las Descargas.

Según [1] las descargas pueden arder en serie y en paralelo en un aislador contaminado, por lo que un análisis riguroso para determinar la tensión de combustión V_d , sería extremadamente complejo, además, sería variable con el tiempo para un determinado aislador, y también dependería de la distribución aleatoria de la contaminación. Es por ello que, para un correcto análisis, es necesario considerar un modelo simplificado el cual fue tomado de [1] y se recurrió a su validación de acuerdo a los experimentos realizados por [18], [28], [29] y [32] y los trabajos que publicaron [13] y [23]. El modelo considerado se

muestra en la figura E-1, el cual consiste en un aislador cilíndrico de longitud L con electrodos en los extremos fijos.

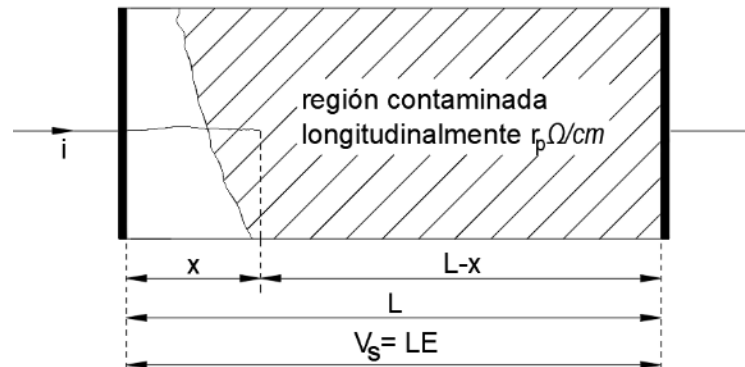


Figura E-1. Modelo Utilizado para el Análisis del Incremento de las Descargas

Una descarga de longitud x arde desde un electrodo y tiende a alargarse (figura E-1). La resistencia en serie con la descarga es R , y la corriente en R es i . Si V_d es la tensión a través de la descarga, entonces se tiene que.

$$V_s = V_d + iR \quad \text{E.1}$$

Para derivar criterios cuantitativos de la ecuación (E.1) es necesario expresar V_d y R en términos de x . Para efectos de relajar el problema, supondremos lo siguiente:

- ✓ La corriente de descarga es constante a lo largo de la descarga; dicho de una forma más sencilla, no hay contacto eléctrico entre la descarga y la capa contaminante, excepto en el punto donde inicia la superficie contaminada (línea continua entre la región achurada y no achurada de la figura E-1). Esta suposición se justifica en que el calor generado por la descarga, seca la superficie contaminada con la que la descarga está en contacto prolongado, y como sabemos que la contaminación seca no es conductora, podemos justificar nuestra suposición.
- ✓ La región a través de la cual se inicia la descarga está libre de contaminación (figura E-1), tales regiones libres de contaminación tienen una alta resistencia, actividad que se produce en los aisladores en servicio.

Por lo tanto, la corriente solamente puede fluir a la región contaminada a través de la descarga y, en consecuencia, la corriente de descarga es igual a i . De ello se deduce que V_d es la tensión necesaria para mantener una descarga de corriente i y longitud x en el aire. Entonces, la relación entre V_d , x e i es igual a.

$$V_d = xAi^{-n} + V_E \quad \text{E.2}$$

donde A y n son constantes que dependen del tipo de contaminante (para este caso $n = 0,76$; $A = 63$) y V_E representa el potencial entre el ánodo y cátodo de la descarga el cual tiene un valor aproximado inferior a 840 V, asimismo, este valor se puede despreciar si la tensión aplicada al aislante supera unos pocos kV. Entonces, reemplazando la ecuación (E.2) en la ecuación (E.1), se tiene

$$V_s = xAi^{-n} + V_E + iR \quad \text{E.3}$$

La resistencia R , depende de la resistividad de la contaminación (compuesto soluble o no soluble) (ecuación (D.36) y ecuación (D.39)), del tamaño y geometría del aislante. Para hacer manejable el análisis, la resistividad se considera como constante, con la finalidad de que la resistencia por unidad de longitud de la superficie contaminada r_p (figura E-1) también tenga un valor constante a lo largo del cilindro. Si la longitud de la superficie contaminada libre de descarga fuera grande comparada con el diámetro del cilindro, la magnitud del campo eléctrico E sería uniforme en la mayor parte de su longitud, por lo tanto, podríamos aproximar R como.

$$R = r_p(L - x) \quad \text{E.4}$$

si reemplazamos la ecuación (E.4) en la ecuación (E.3), se tiene.

$$V_s = xAi^{-n} + V_E + ir_p(L - x) \quad \text{E.5}$$

1.2.1 Condiciones de la Evolución de las Descargas.

Para determinar las condiciones en que se extinguirá la descarga, se debe conocer en primer lugar la tensión mínima para mantener la conducción para cualquier valor de x . Esta tensión mínima necesaria depende de la corriente i ; es decir, tenemos que analizar la tasa de cambio de la tensión aplicada V_s por unidad de cambio de corriente i y si evaluamos la curva $V - i$, nos daremos cuenta que sólo se tiene un punto de inflexión en la que se produce cuando.

$$\frac{dV_s}{di} = \frac{d}{di} [xAi^{-n} + V_E + ir_p(L - x)] = -nxAi^{-n-1} + r_p(L - x) = 0 \rightarrow nxAi^{-n-1} = r_p(L - x)$$

$$i = \left[\frac{nxA}{r_p(L - x)} \right]^{\left(\frac{1}{n+1} \right)} \quad \text{E.6}$$

Ahora reemplazamos la ecuación (E.6) en la ecuación (E.5), se obtiene

$$V_s = V_{\min} = xAi^{-n} + V_E + ir_p(L - x) = xA \left[\frac{nxA}{r_p(L - x)} \right]^{\left(\frac{-n}{n+1} \right)} + V_E + \left[\frac{nxA}{r_p(L - x)} \right]^{\left(\frac{1}{n+1} \right)} r_p(L - x)$$

$$V_{min} = n^{\left(\frac{-n}{n+1}\right)} [xA]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} [r_p(L-x)]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + V_E + n^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} [xA]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left[\frac{n}{n} r_p(L-x)\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$V_{min} = [xA]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left\{ \left[\frac{r_p(L-x)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + n \left[\frac{r_p(L-x)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} \right\} + V_E = [xA]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left[\frac{r_p(L-x)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} (1+n) + V_E$$

$$V_{min} = (n+1) [xA]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left[\frac{r_p(L-x)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + V_E$$

E.7

Con la ecuación (E.7) se elabora la gráfica de la figura E-2 en base a la longitud x (longitud de la banda seca donde se produce la descarga), aquí V_{min} alcanza un valor máximo cuando.

$$\frac{dV_{min}}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ (n+1) [xA]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left[\frac{r_p(L-x)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + V_E \right\}$$

$$\frac{dV_{min}}{dx} = (n+1) \left\{ \left[\frac{r_p(L-x)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} \frac{d}{dx} [xA]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} + [xA]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \frac{d}{dx} \left[\frac{r_p(L-x)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} \right\}$$

$$0 = (n+1) \left\{ \frac{1}{n+1} A^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left[\frac{r_p(L-x)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} x^{\left(\frac{-n}{n+1}\right)} - \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[\frac{r_p}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} [xA]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} (L-x)^{\left(\frac{-1}{n+1}\right)} \right\}$$

$$nx^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} = (L-x)x^{\left(\frac{-n}{n+1}\right)} \rightarrow nx = L-x \rightarrow x = \frac{L}{n+1}$$

$$x_c = \frac{L}{1+n}$$

E.8

El resultado de la ecuación (E.8) lo reemplazamos en la ecuación (E.7) para obtener el valor máximo de la tensión V_{min} .

$$V_{min} = (n+1) [xA]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left[\frac{r_p(L-x)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + V_E = (n+1) \left[\frac{L}{1+n} A\right]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left[\frac{r_p\left(L-\frac{L}{1+n}\right)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + V_E$$

$$V_{min} = (n+1)^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} L^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} A^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left[\frac{L r_p \left(\frac{n}{1+n}\right)}{n}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + V_E = A^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} L r_p^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + V_E$$

E.9

$$V_c = A^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} L r_p^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + V_E$$

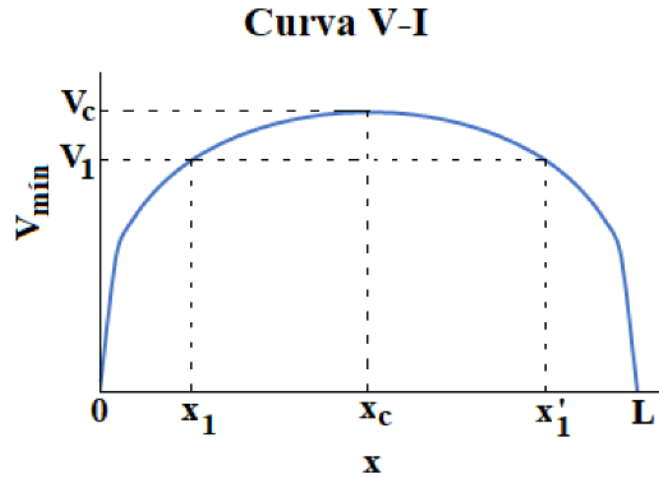


Figura E-2. Dependencia de V_{min} con la Longitud x

Apliquemos ahora una tensión V_1 al aislante, siendo la descarga inicialmente bastante pequeña. En este estado la descarga podría incrementarse hasta $x = x_1$; no puede crecer más, dado que la tensión requerida para mantener la condición excede a V_1 si $x > x_1$. Sin embargo, si $x > x'_1$ inicialmente, un aumento adicional en la longitud de la descarga reduciría la tensión de combustión V_1 , de modo que la descarga podría aumentar hasta alcanzar el punto de inflamación.

De forma similar, el mismo análisis se realiza para cualquier valor de V_1 inferior a V_c . Por lo tanto, es imposible que se produzca la combustión si la tensión aplicada y la longitud inicial de la descarga son inferiores a los valores dados por las ecuaciones (E.8) y (E.9). Cuando se cumplen estas ecuaciones, se dicen que las condiciones son críticas y los valores de las variables individuales en condiciones críticas se denominan “valores críticos”.

La ecuación (E.9) puede expresarse en términos de la tensión media aplicada o gradiente de potencial E_c , dividiéndola por la longitud de fuga L , y se obtiene.

$$V_c = A\left(\frac{1}{n+1}\right)Lr_p\left(\frac{n}{n+1}\right) + V_E = \frac{A\left(\frac{1}{n+1}\right)Lr_p\left(\frac{n}{n+1}\right) + V_E}{L} = A\left(\frac{1}{n+1}\right)r_p\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{V_E}{L}$$

$$E_c = A\left(\frac{1}{n+1}\right)r_p\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{V_E}{L} \quad \text{E.10}$$

Esta ecuación define la relación crítica entre la tensión aplicada y la resistencia de la banda contaminada. De ello se desprende que para un r_p dado el flameo es imposible para cualquier tensión E_c , similarmente, para una tensión dada E_c el flameo es imposible para cualquier resistencia $r > r_p$ dada por la ecuación (E.10). en general, el flameo no se produce sí.

$$E < A^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} r_p^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} + \frac{V_E}{L} \quad \text{E.11}$$

de [1] y [28], tomamos los valores para $A = 63$ y para $n = 0.76$, reemplazando en la ecuación (E.11), esta se puede escribir como.

$$E < 63^{\left(\frac{1}{0.76+1}\right)} r_p^{\left(\frac{0.76}{0.76+1}\right)} + \frac{V_E}{L} \rightarrow E < \left(10.53 * r_p^{0.43} + \frac{V_E}{L}\right) \text{ volts/cm} \quad \text{E.12}$$

dado que E_c es el valor máximo al que es imposible que se produzca un flameo, se deduce que en la frecuencia de potencia debe utilizarse el valor máximo de la tensión para E_c y E .

de la ecuación (E.8) reemplazamos el valor de $n = 0.76$, la condición para que la longitud inicial (que será designada por x_i) no supere el valor de x_c es.

$$x_i < \frac{L}{1+n} \rightarrow x_i < \frac{L}{1+0.76} \rightarrow x_i < 0.57 * L \quad \text{E.13}$$

1.2.2 Deducción de la Corriente de Fuga Crítica y Corriente de Fuga Máxima.

El valor crítico de la corriente i_c , se obtiene sustituyendo el valor crítico de la longitud x_c de la ecuación (E.8) en la ecuación (E.6), y se obtiene.

$$i = \left[\frac{nxA}{r_p(L-x)} \right]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \left[\frac{n \frac{L}{n+1} A}{r_p \left(L - \frac{L}{n+1} \right)} \right]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \left[\frac{A}{r_p} \right]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \quad \text{E.14}$$

$$i_c = \left[\frac{A}{r_p} \right]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

A o r_p se pueden eliminar reemplazando la ecuación (E.14) en la ecuación (E.10) y despreciando $\frac{V_E}{L}$, se obtiene.

$$E_c = A^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} r_p^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} = i_c r_p^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} r_p^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} \rightarrow i_c = \frac{E_c}{r_p}$$

o

$$i_c = \left[\frac{A}{\frac{E_c}{i_c}} \right]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \rightarrow i_c^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} = \left[\frac{A}{E_c} \right]^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \rightarrow i_c = \left[\frac{A}{E_c} \right]^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad \text{E.15}$$

Como sabemos que i_c es la corriente máxima que puede fluir en un aislante energizado a una tensión E_c en condiciones en las que es imposible que se produzca un flameo, de

acuerdo a lo descrito líneas arriba. Ahora si sustituimos los valores numéricos dados por [1] y [28], se puede determinar la corriente máxima de la ecuación (E.15).

$$i_{m\acute{a}x} = \left[\frac{A}{E_c} \right]^{\left(\frac{1}{n} \right)} = \left[\frac{63}{E_c} \right]^{\left(\frac{1}{0.76} \right)} = 233 * E_c^{-1.31} \text{ Amp.} \quad \text{E.16}$$

donde E_c está en voltio/cm.

Ahora calculamos el potencial mínimo, corriente crítica, tensión crítica y longitud máxima de la descarga cuando la resistencia del electrolito contaminante (r_p) es variable; para ello, se consideran dos casos:

Franja Estrecha ($a < L$). - si reemplazamos la ecuación (D.39) en la ecuación (E.3), se obtiene la tensión que varía con la longitud de descarga x en una franja estrecha.

$$V_s = xAi^{-n} + V_E + \frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{\pi(L-x)}{a} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i} \right) \right\} \rightarrow V_s = xAi^{-n} + V_E + \frac{ir_p}{2} \left\{ (L-x) + \frac{a}{2\pi} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i} \right) \right\} \quad \text{E.17}$$

y como la tensión aplicada es constante, se cumple qué.

$$\frac{di}{dx} = - \frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{di}} = \frac{\frac{d}{dx} \left\{ xAi^{-n} + V_E + \frac{ir_p}{2} \left\{ (L-x) + \frac{a}{2\pi} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i} \right) \right\} \right\}}{\frac{dV}{di}} = - \frac{Ai^{-n} - \frac{ir_p}{2}}{\frac{dV}{di}}$$

para que $\frac{di}{dx}$ sea positivo, se tiene que cumplir que $\frac{dV}{di} > 0$ y $\frac{dV}{dx} < 0$; por lo tanto.

$$Ai^{-n} - \frac{ir_p}{2} < 0, \text{ entonces.}$$

$$Ai^{-n} - \frac{ir_p}{2} < 0 \rightarrow \frac{2A}{r_p} < i^{n+1} \rightarrow i_c > \left(\frac{2A}{r_p} \right)^{\left(\frac{1}{n+1} \right)} \quad \text{E.18}$$

en este caso la corriente crítica no depende de x la cual está representada por la ecuación (E.18).

Reemplazamos la ecuación (E.18) en la ecuación (E.17), se obtiene.

$$V_s = xAi^{-n} + V_E + \frac{ir_p}{2} \left\{ (L-x) + \frac{a}{2\pi} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i} \right) \right\} \rightarrow V_c = x \frac{i_c r_p}{2} + V_E + \frac{i_c r_p}{2} \left\{ L - x + \frac{a}{2\pi} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i_c} \right) \right\}$$

$$V_c = \frac{i_c r_p}{2} \left\{ L + \frac{a}{2\pi} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i_c} \right) \right\} + V_E \rightarrow V_c = \left(\frac{2A}{r_p} \right)^{\left(\frac{1}{n+1} \right)} \frac{r_p}{2} \left\{ L + \frac{a}{2\pi} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i_c} \right) \right\} + V_E$$

$$V_c = A^{\left(\frac{1}{n+1} \right)} \left(\frac{r_p}{2} \right)^{\left(\frac{n}{n+1} \right)} \left\{ L + \frac{a}{2\pi} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i_c} \right) \right\} + V_E \quad \text{E.19}$$

La ecuación (E.19) representa la tensión crítica en voltios para una franja estrecha.

Ahora determinamos el gradiente de tensión crítica, para ello dividimos entre la longitud de fuga de la ecuación (E.19).

$$\frac{V_c}{L} = E_c = A^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{r_p}{2}\right)^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} \left\{ 1 + \frac{a}{2L\pi} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i_c} \right) \right\} + \frac{V_E}{L}$$

$$E_c = A^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{r_p}{2}\right)^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} \left\{ 1 + \frac{a}{2L\pi} \ln \left(\frac{Sa^2}{4\pi i_c} \right) \right\} + \frac{V_E}{L} \quad \text{E.20}$$

La ecuación (E.20) representa la tensión crítica en v/cm para una franja estrecha.

Franja Ancha ($a > 3h$). - sí reemplazamos la ecuación (D.36) en la ecuación (E.3), se obtiene la tensión que varía con la longitud de descarga x en una franja ancha.

$$V_s = xAi^{-n} + V_E + \frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i} \right) - \ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \right\} \rightarrow V_s = xAi^{-n} + V_E + \frac{i}{2\pi\sigma_s} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i} \right) - \ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \right\} \quad \text{E.21}$$

y como la tensión aplicada es constante, se tiene qué.

$$\frac{di}{dx} = - \frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{di}} = - \frac{\frac{d}{dx} \left\{ xAi^{-n} + V_E + \frac{i}{2\pi\sigma_s} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i} \right) - \ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \right] \right\}}{\frac{dV}{di}} = \frac{Ai^{-n} - \frac{i}{2\pi\sigma_s} \frac{\frac{d}{dx} \tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right)}{\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right)}}{\frac{dV}{di}} = - \frac{Ai^{-n} - \frac{i}{2\pi\sigma_s} \left[\frac{\pi}{2L} 2 \csc \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right]}{\frac{dV}{di}}$$

para que $\frac{di}{dx}$ sea positivo, se tiene que cumplir que $\frac{dV}{di} > 0$ y $\frac{dV}{dx} < 0$; por lo tanto.

$$Ai^{-n} - \frac{i}{2\pi\sigma_s} \left[\frac{\pi}{2L} 2 \csc \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right] < 0, \left(\frac{2LA\sigma_s}{\csc \left(\frac{\pi x}{L} \right)} \right)^{\frac{1}{n+1}} = i \rightarrow i = \left(2LA\sigma_s * \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

para este caso en específico la corriente va a depender de x , entonces, para determinar el valor de la constante, se toma de la ecuación (E.21) los componentes que dependan de x , para que la corriente crítica no dependa de x . Se cumple.

$$xAi^{-n} - \frac{i}{2\pi\sigma_s} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] = cte \rightarrow x - \frac{i^{n+1}}{2A\pi\sigma_s} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] = cte$$

ahora tomamos valores cercanos a $L/2$, donde se cumple que.

$$x - \frac{i^{n+1}}{2A\pi\sigma_s} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi \frac{L}{2}}{2L} \right) \right] = x - \frac{i^{n+1}}{2A\pi\sigma_s} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] = x - \frac{i^{n+1}}{2A\pi\sigma_s} \ln[1] = x - 0 = \frac{L}{2}$$

$$x = \frac{L}{2}$$

en este punto se alcanza la corriente crítica, sí.

$$Ai^{-n} - \frac{i}{2\pi\sigma_s} \left[\frac{\pi}{2L} 2 \csc \left(\frac{\pi \frac{L}{2}}{L} \right) \right] < 0 \rightarrow Ai^{-n} - \frac{i}{2\pi\sigma_s} \left[\frac{\pi}{2L} 2 \csc \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] < 0 \rightarrow Ai^{-n} < \frac{i}{2L\sigma_s}$$

$$i_c > (2LA\sigma_S)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \quad \text{E.22}$$

en este caso la corriente crítica no depende de x la cual está representada por la ecuación (E.22).

Reemplazamos la ecuación (E.22) en la ecuación (E.21), se obtiene.

$$\begin{aligned} V_s &= xAi^{-n} + V_E + \frac{i}{2\pi\sigma_S} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i} \right) - \ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \right\} \rightarrow \frac{V_s}{L} = E_s = \frac{x}{L} Ai^{-n} + \frac{V_E}{L} + \frac{i}{2L\pi\sigma_S} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i} \right) - \ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \right\} \\ E_c &= \frac{x}{L} Ai_c^{-n} + \frac{V_E}{L} + \frac{i_c}{2L\pi\sigma_S} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i_c} \right) - \ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \right\} \rightarrow E_c = \frac{x}{L} Ai_c^{-n} + \frac{V_E}{L} + \frac{i_c}{2L\pi\sigma_S} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i_c} \right) \right) - \frac{i_c}{2L\pi\sigma_S} \left(\ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \right) \\ E_c &= \frac{x}{L} Ai_c^{-n} + \frac{i_c}{2L\pi\sigma_S} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i_c} \right) \right) - \frac{i_c}{2L\pi\sigma_S} \left(\ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \right) + \frac{V_E}{L} \rightarrow E_c = \frac{1}{L} \left[xAi_c^{-n} - \frac{i_c}{\pi\sigma_S} \left(\frac{1}{2} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \right) \right] + \frac{i_c}{2L\pi\sigma_S} \left(\ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i_c} \right) \right) + \frac{V_E}{L} \\ E_c &= \frac{i_c}{L\pi\sigma_S} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i_c} \right) \right] + \frac{V_E}{L} + \frac{1}{L} \frac{L}{2} \rightarrow E_c = \frac{i_c}{L\pi\sigma_S} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4SL^2}{\pi i_c} \right) \right] + \frac{V_E}{L} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{E.23}$$

La ecuación (E.23) representa la tensión crítica en v/cm para una franja ancha.

Anexo F

Método de Elementos Finitos (FEM)

1. Fundamentos del Método de Elementos Finitos (FEM).

Utilizando el FEM, la región de interés se discretiza en subregiones más pequeñas denominadas *elementos* como se muestra en la figura F-1.

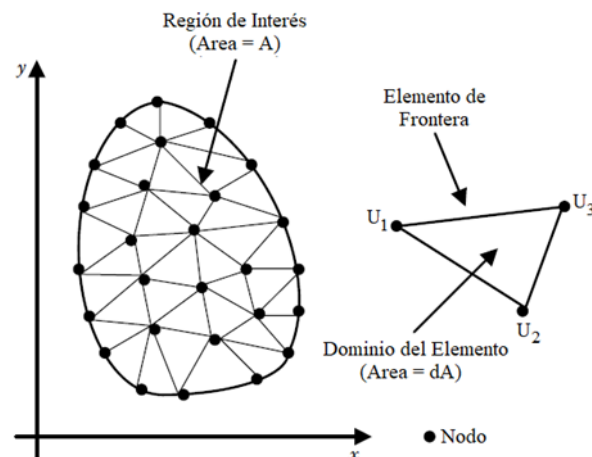


Figura F-1: Representación de la Región de Interés, el Elemento y los Nodos para la Formulación del FEM

y la solución se determina en función de los valores discretos de algunas variables de campo primarias, por ejemplo, el potencial eléctrico en los nodos. La ecuación gobernante como, las ecuaciones de Laplace o de Poisson se aplican ahora al dominio de un solo elemento. A nivel de elemento, la solución de la ecuación gobernante se sustituye por una función continua que aproxima la distribución de la variable de campo U en el dominio del elemento, expresada en función de los valores nodales desconocidos U_1, U_2 y U_3 de la solución U . Entonces se puede formular un sistema en función de U_1, U_2 y U_3 para el elemento. Una vez determinadas las ecuaciones de los elementos, estos se ensamblan para formar la región de interés compuesta. El ensamblaje se realiza mediante la regla básica de que *el valor de la variable de campo en un nodo debe ser el mismo para todos los elementos que compartan dicho nodo*. La solución U del problema se convierte en una aproximación por partes, expresada en términos de los valores nodales de U . Por lo tanto, el procedimiento del ensamblaje resulta en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales [8].

2. Pasos para el Procedimiento del Método de Elementos Finitos (FEM).

De acuerdo a lo extraído de [8], se puede decir en términos generales, que los principales pasos para proceder a solucionar elementos finitos son los siguientes.

- Se inicia con la discretización nodal de la región de interés en elementos finitos.
- Se consideran funciones adecuadas para interpolar las variables de campo sobre el elemento en cada nodo.
- La ecuación matricial del elemento finito se forma relacionando los valores nodales de las variables de campo desconocidos con otros parámetros físicos.
- El sistema de ecuaciones globales se forma para toda la región de interés mediante el ensamblaje de todas las ecuaciones elementales. Las conectividades de los elementos se utilizan para el proceso de ensamblaje. Las condiciones de frontera que no se consideran en las ecuaciones elementales, se imponen antes de la solución de dichas ecuaciones.
- Se resuelve el sistema de ecuaciones globales de elementos finitos para obtener los valores nodales de las variables de campo buscadas.
- En muchos casos, es necesario calcular parámetros adicionales tras la solución del sistema de ecuaciones globales; como es el caso de problemas de campo en alta tensión, la intensidad del campo eléctrico, la densidad de flujo eléctrico, el potencial eléctrico y la distribución de cargas son de interés, que se obtienen tras la solución del sistema de ecuaciones globales.

3. Enfoque Variacional hacia la Formulación del Método de Elementos Finitos (FEM).

Para problemas de campo de alta tensión, este enfoque utiliza el principio de energía potencial mínima, este principio se puede enunciar así: De todas las posibles funciones de potencial $U(x, y, z)$, la que minimiza la energía potencial total, es la solución potencial que satisface el equilibrio, y será el potencial real debido a las fuerzas de campo aplicadas.

Por lo tanto, se busca una función potencial que minimice el funcional; es decir, la energía potencial. La minimización de funcionales se enmarca en el campo del cálculo variacional. En muchos casos, es imposible determinar una función exacta, lo que requiere el uso de métodos numéricos aproximados. La minimización de la energía potencial en una formulación de elementos finitos se lleva a cabo mediante el método de la energía [8]. Para ello, el FEM desarrolla las ecuaciones a partir de formas elementales simples donde las incógnitas son la solución de los potenciales en los nodos. Es por este motivo, que el cálculo de variaciones permite reducir la ecuación de la energía a un conjunto de ecuaciones simultáneas con los potenciales nodales como incógnitas.

4. Formulaci3n del M3todo de Elementos Finitos (FEM) en un Sistema 2D en un Solo Medio Diel3ctrico.

Haciendo uso del enfoque variacional, podemos afirmar, que la energ3a potencial en un campo el3ctrico bidimensional (2D), est3 dado por [8].

$$W_{total} = \frac{1}{2} \iint_A \epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}|^2 \cdot l \cdot dA \quad \text{F.1}$$

o en funci3n del gradiente de potencial

$$W_{total} = \frac{1}{2} \iint_A \epsilon_0 \epsilon_r |-\vec{\nabla} U|^2 \cdot l \cdot dA \quad \text{F.2}$$

donde:

W_{total} : Energ3a potencial total, en Joule

$|\vec{E}|$: Magnitud de la intensidad de campo el3ctrico, en V/m

U : Potencial el3ctrico, en V

l : Longitud normal al 3rea A (usualmente se considera como unidad para el campo 2D)

ϵ_0 : Permitividad del espacio libre

ϵ_r : Permitividad relativa del diel3ctrico

La integraci3n de la ecuaci3n (F.1) debe realizarse sobre el 3rea A , que es id3ntica a la regi3n del campo en consideraci3n (ver figura F-1). Puesto que esta 3rea debe ser finita similar a una superficie gaussiana, el m3todo de elementos finitos (FEM), con esta afirmaci3n, este m3todo no puede aplicarse a problemas con campos abiertos sin modificaciones.

Para que sea factible aplicar el FEM, la regi3n de inter3s debe discretizarse mediante los llamados elementos finitos. Si a una regi3n de inter3s la dividimos en elementos de manera que se garantice la continuidad del potencial el3ctrico entre ellos, la energ3a potencial total es igual a la suma de las energ3as individuales de cada elemento [8], Para N elementos, la energ3a potencial total se puede expresar como.

$$W_{total} = \sum_{e=1}^N W_{(e)} \quad \text{F.3}$$

Para que se pueda minimizar la energ3a potencial total W_{total} de toda la regi3n de inter3s $W_{(e)}$, debe minimizarse para cada elemento subdividido. Al buscar un conjunto de potenciales nodales para cada elemento subdividido se minimizar3 $W_{(e)}$. Obs3rvese que

$W_{(e)}$ funcional es función únicamente de los potenciales nodales. Mediante el cálculo de variaciones, se produce una extremización de $W_{(e)}$ cuando el vector de las primeras derivadas parciales con respecto al potencial U es cero.

El elemento subdividido en 2D más simple es el elemento triangular lineal (ver figura F-1). Para este elemento, hay tres nodos en los vértices del triángulo numerados alrededor del elemento, de modo que.

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad \text{F.4}$$

derivando la ecuación (F.4) con respecto a x y y , se obtiene.

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha_2 \quad y \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\alpha_3 \quad \text{F.5}$$

donde E_x es el campo tangencial o radial y E_y es el campo normal o axial a la superficie del dieléctrico; es decir, para determinar las componentes de la intensidad del campo eléctrico mediante el FEM, solamente es necesario encontrar α_2 y α_3 .

Por lo tanto, para este elemento, las componentes de la intensidad de campo eléctrico son constantes en todo su recorrido; es por ello, que ha este tipo de elemento también se conoce como *elemento de tensión constante (CST)* [8].

Ahora consideremos un elemento triangular (ver figura F-2), se cumple que.

$$U_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1$$

$$U_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2$$

$$U_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \quad \text{F.6}$$

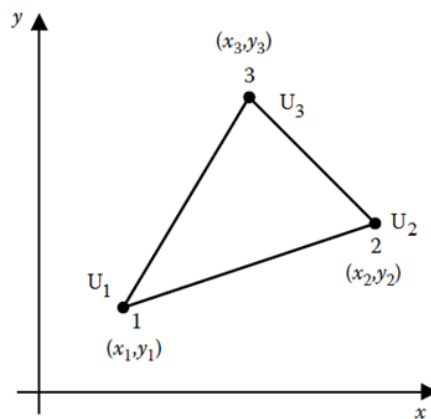


Figura F-2: Elemento Triangular Lineal

de la ecuación (F.6) se deduce α_2 .

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & U_1 & y_1 \\ 1 & U_2 & y_2 \\ 1 & U_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{U_1(y_2 - y_3) + U_2(y_3 - y_1) + U_3(y_1 - y_2)}{(x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)} \quad \text{F.7}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{D} [U_1(y_2 - y_3) + U_2(y_3 - y_1) + U_3(y_1 - y_2)]$$

donde

$$D = (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1) \quad \text{F.8}$$

D : es dos veces el área del triángulo

de la ecuación (F.6) se deduce α_3

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & U_1 & x_1 \\ 1 & U_2 & x_2 \\ 1 & U_3 & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{U_1(x_3 - x_2) + U_2(x_1 - x_3) + U_3(x_2 - x_1)}{(x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)} \quad \text{F.9}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{D} [U_1(x_3 - x_2) + U_2(x_1 - x_3) + U_3(x_2 - x_1)]$$

La magnitud de la intensidad del campo eléctrico dentro de un elemento T .

$$|\vec{E}| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2} = \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \quad \text{F.10}$$

Al integrar la ecuación (F.1) y al reemplazar la ecuación (F.10), se obtiene la energía potencial eléctrica en un punto T .

$$W_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r |\vec{E}_T|^2 \cdot A \cdot l = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r A \cdot l \cdot (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) \quad \text{F.11}$$

Para que la energía potencial eléctrica en un elemento sea mínima, se debe derivar con respecto al potencial eléctrico en el nodo 1 la ecuación (F.11) e igualar a cero.

$$\frac{\partial W_T}{\partial U_1} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r A \cdot l \cdot 2 \left(\alpha_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial U_1} + \alpha_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial U_1} \right) = 0 \quad \text{F.12}$$

La ecuación (F.12) debe aplicarse a cada nodo donde se determine el potencial desconocido. Cabe señalar que el nodo evaluado puede pertenecer a más de un elemento, es por ello, que la ecuación (F.12) debe aplicarse a todos estos elementos, considerando como el nodo evaluado al nodo 1 y los otros dos nodos del elemento como el nodo 2 y el

nodo 3 tomados en sentido antihorario. Con esta antítesis, tomamos la derivada parcial con respecto al potencial del nodo 1 de las ecuaciones (F.7) y (F.9), obtenemos.

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial U_1} = \frac{y_2 - y_3}{D} \quad y \quad \frac{\partial \alpha_3}{\partial U_1} = \frac{x_3 - x_2}{D} \quad y \quad A = \frac{D}{2}$$

Ahora reemplazamos la expresión anterior en la ecuación (F.12), se obtiene.

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{D}{2} \cdot l \cdot 2 \left[\alpha_2 \left(\frac{y_2 - y_3}{D} \right) + \alpha_3 \left(\frac{x_3 - x_2}{D} \right) \right] = 0 \quad \text{F.13}$$

$$\frac{l \varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} [\alpha_2 (y_2 - y_3) + \alpha_3 (x_3 - x_2)] = 0$$

Reemplazamos las ecuaciones (F.7) y (F.9) en la ecuación (F.13), se obtiene.

$$\frac{l \varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \left\{ \left[\frac{1}{D} [U_1 (y_2 - y_3) + U_2 (y_3 - y_1) + U_3 (y_1 - y_2)] \right] [(y_2 - y_3)] \cdots \right. \quad \text{F.14a}$$

$$\left. \cdots + \left[\frac{1}{D} [U_1 (x_3 - x_2) + U_2 (x_1 - x_3) + U_3 (x_2 - x_1)] \right] [(x_3 - x_2)] \right\} = 0$$

o

$$\frac{\varepsilon_r}{2D} \{ U_1 [(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2] + U_2 [(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)] \cdots \quad \text{F.14b}$$

$$\cdots + U_3 [(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_2)] \} = 0$$

$$k_{1T} U_1 + k_{2T} U_2 + k_{3T} U_3 = 0 \quad \text{F.15}$$

donde

$$K_{1T} = \frac{\varepsilon_{rT}}{D_T} [(x_{3T} - x_{2T})^2 + (y_{2T} - y_{3T})^2]$$

$$K_{2T} = \frac{\varepsilon_{rT}}{D_T} [(x_{3T} - x_{2T})(x_{1T} - x_{3T}) + (y_{2T} - y_{3T})(y_{3T} - y_{1T})]$$

$$K_{3T} = \frac{\varepsilon_{rT}}{D_T} [(x_{3T} - x_{2T})(x_{2T} - x_{1T}) + (y_{2T} - y_{3T})(y_{1T} - y_{2T})] \quad \text{F.16}$$

donde

el subíndice T denota el número del elemento

D_T : es el doble del área del elemento, como se indica en la ecuación (F.8)

ε_{rT} : es la permitividad del dieléctrico dentro del elemento

Es muy importante hacer de conocimiento que la discretización mediante elementos triangulares se realiza generalmente de tal manera que un nodo en particular se conecte a

otros seis nodos en conectividad hexagonal o a otros ocho nodos en conectividad octogonal (ver figura F-3). Para la conectividad hexagonal, se puede formar una ecuación que incluya los potenciales de los seis nodos que rodean al nodo “0” aplicando la ecuación (F.15),

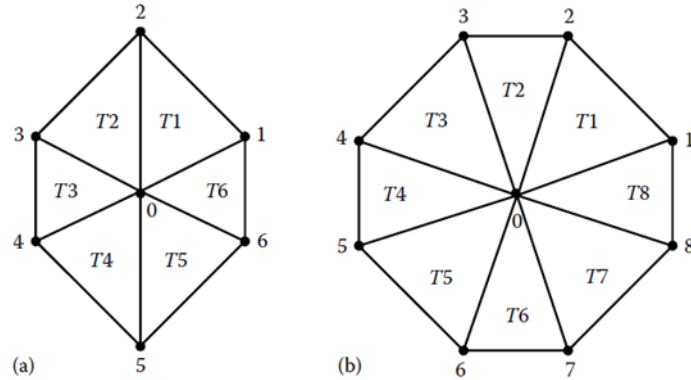


Figura F-3: Conectividad Nodal: (a) Elemento Hexagonal; (b) Elemento Octogonal

En tal caso, para cada elemento, el nodo “0” de la figura (F-3) se considera como el nodo 1 de la ecuación (F.15) y los otros nodos se consideran los nodos 2 y 3 en *sentido antihorario*. La aplicación de la ecuación (F.15) da como resultado seis ecuaciones lineales simultáneas, cuya suma se puede representar de la siguiente manera.

$$F_1 U_1 + F_2 U_2 + F_3 U_3 + F_4 U_4 + F_5 U_5 + F_6 U_6 + F_0 U_0 = 0 \quad \text{F.17}$$

donde

$$F_1 = K_{2(T1)} + K_{3(T6)}$$

$$F_2 = K_{2(T2)} + K_{3(T1)}$$

$$F_3 = K_{2(T3)} + K_{3(T2)}$$

$$F_4 = K_{2(T4)} + K_{3(T3)}$$

$$F_5 = K_{2(T5)} + K_{3(T4)}$$

$$F_6 = K_{2(T6)} + K_{3(T5)}$$

F.18

$$\text{y } F_0 = \sum_{T=1}^6 K_{1T}$$

La aplicación de la ecuación (F.17) a todos los nodos con potencial desconocido generará el sistema FEM de ecuaciones lineales simultáneas [8], que debe resolverse para determinar los potenciales de los nodos. Las ecuaciones (F.17) y (F.18) podrían modificarse adecuadamente para la conectividad nodal octogonal. Cabe destacar que la formulación FEM descrita líneas arriba considera automáticamente los tamaños elementales desiguales, ya que los coeficientes de la ecuación (F.18) se calculan en términos de *coordenadas nodales* que pueden tener cualquier valor numérico.

5. Formulación del Método de Elementos Finitos (FEM) en un Sistema 2D en un Medio Multidieléctrico.

Para calcular el campo eléctrico en un medio multidieléctrico, los elementos triangulares se posicionan de forma que cada uno de ellos comprenda sólo un medio dieléctrico [8]. En otras palabras, se debe colocar un conjunto de puntos nodales en la interfaz entre dos dieléctricos (ver figura F-4). Por lo tanto, los coeficientes K_{1T} , K_{2T} y K_{3T} para cualquier nodo se calculan en función de su posición nodal (es decir 1, 2 o 3) en un elemento, considerando el valor adecuado de ϵ_r .

Si aplicamos la ecuación (F.17) para conectividad nodal (ver figura F-4) se deben realizar las siguientes modificaciones para F_2 , F_5 y F_0 manteniendo los demás nodos sin cambios.

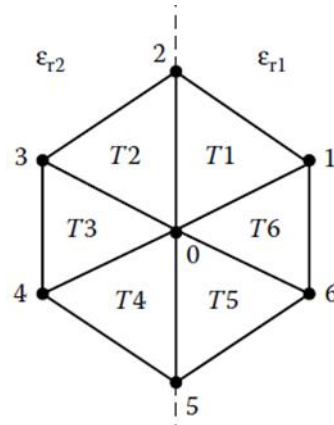


Figura F-4: Discretización Elemental para un Medio Multidieléctrico

entonces,

$$F_2 = K_{2(T2)} + K_{3(T1)}, F_5 = K_{2(T5)} + K_{3(T4)} \quad \text{y} \quad F_0 = \sum_{T=1}^6 K_{1T}$$

donde

$$K_{2(T2)} = \frac{\epsilon_{r2}}{D_{T2}} [(x_3 - x_2)(x_0 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)]$$

$$K_{3(T1)} = \frac{\epsilon_{r1}}{D_{T1}} [(x_2 - x_1)(x_1 - x_0) + (y_1 - y_2)(y_0 - y_1)]$$

$$K_{2(T5)} = \frac{\epsilon_{r1}}{D_{T5}} [(x_6 - x_5)(x_0 - x_6) + (y_5 - y_6)(y_6 - y_0)]$$

$$K_{3(T4)} = \frac{\epsilon_{r2}}{D_{T4}} [(x_5 - x_4)(x_4 - x_0) + (y_4 - y_5)(y_0 - y_4)]$$

Para el cálculo de F_0 , F_{1T} se calcula considerando ϵ_{r1} para los elementos 1, 5 y 6 y ϵ_{r2} para los elementos 2, 3 y 4, mediante la ecuación (F.16)

$$K_{1(T3)} = \frac{\epsilon_{r2}}{D_{T3}} [(x_4 - x_3)^2 + (y_3 - y_4)^2]$$

$$y \quad K_{1(T6)} = \frac{\varepsilon_{r1}}{D_{T6}} [(x_1 - x_6)^2 + (y_6 - y_1)^2]$$

Cabe señalar que, a diferencia del método de diferencias finitas (FDM), el FEM no requiere de una formulación independiente para un medio multidieléctrico.

6. Formulación del Método de Elementos Finitos (FEM) en un Sistema Axisimétrico

Como ya se por la ecuación (F.11), la energía eléctrica en un elemento triangular es.

$$W_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r |\vec{E}_T|^2 \cdot A \cdot l \quad \text{F.19}$$

donde el producto de $A \cdot l$ es el volumen del elemento.

En un sistema axisimétrico (simetría axial), este volumen se crea debido a la rotación de un elemento triangular alrededor del eje de simetría (ver figura F-5). Siendo el área del triángulo A , y l debería ser entonces la longitud media de rotación; es decir 2π veces la distancia radial del baricentro (punto notable de la intersección de las medianas) del triángulo.

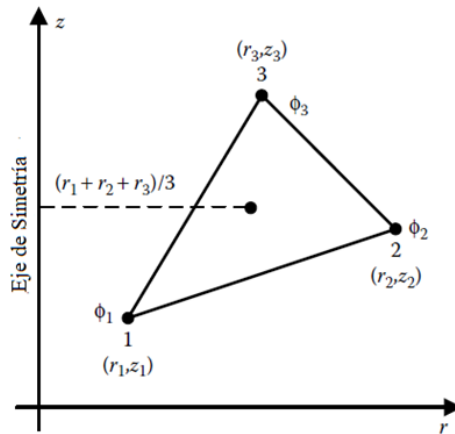


Figura F-5: Elemento Triangular para una Formación Axisimétrica

por lo tanto,

$$l = 2\pi \frac{(r_1 + r_2 + r_3)}{3} \quad \text{F.20}$$

reemplazando la ecuación (F.20) para l en la ecuación (F.14a), se tiene.

$$0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2D} \frac{2\pi(r_1 + r_2 + r_3)}{3} \{U_1[(r_3 - r_2)^2 + (z_2 - z_3)^2] \dots \quad \text{F.21}$$

$$+ U_2[(r_3 - r_2)(r_1 - r_3) + (z_2 - z_3)(z_3 - z_1)] + U_3[(r_3 - r_2)(r_2 - r_1) + (z_2 - z_3)(z_1 - z_2)]\}$$

entonces, la ecuación (F.21) en un sistema axisimétrico es.

$$k_{1T}U_1 + k_{2T}U_2 + k_{3T}U_3 = 0$$

donde

$$K_{1T} = \frac{R\varepsilon_{rT}}{D_T} [(r_{3T} - r_{2T})^2 + (z_{2T} - z_{3T})^2]$$

$$K_{2T} = \frac{R\varepsilon_{rT}}{D_T} [(r_{3T} - r_{2T})(r_{1T} - r_{3T}) + (z_{2T} - z_{3T})(z_{3T} - z_{1T})]$$

$$K_{3T} = \frac{R\varepsilon_{rT}}{D_T} [(r_{3T} - r_{2T})(r_{2T} - r_{1T}) + (z_{2T} - z_{3T})(z_{1T} - z_{2T})]$$

F.22

$$y \quad R = (r_1 + r_2 + r_3)$$

Para un sistema axisimétrico en un medio multidieléctrico, las modificaciones que se deben introducir son las mismas que las descritas para una formulación 2D analizadas en la sección 5 [8].

7. Función de Forma, Coordenadas Globales y Naturales

Al solucionar las ecuaciones FEM, estas proporcionan las variables de campo en los nodos, pero también se necesita conocer las variables de campo en diferentes puntos dentro del elemento. Para ello, nos valemos del *uso de las funciones de forma*, las que nos permiten interpolar los valores nodales de las variables de campo y calcular los valores correspondientes en puntos arbitrarios.

Considere que un vértice del triángulo se mueve, manteniendo los otros dos vértices fijos; entonces, tanto el triángulo no deformado como el triángulo deformado pueden dibujarse uno sobre el otro (ver figura F-6a). Suponiendo que la deformación es lineal, las áreas de los triángulos deformados se pueden calcular a partir de la base y la altura del triángulo. Como la base permanece constante, el área es una función lineal de la altura; es decir, del desplazamiento del nodo dentro del triángulo. Como los tres nodos podrían desplazarse, se deben escribir tres funciones lineales para describir el desplazamiento de un punto interior debido al desplazamiento de cada uno de ellos. El desplazamiento del punto interior se calculará sumando el desplazamiento debido a cada uno de los tres nodos del triángulo [8].

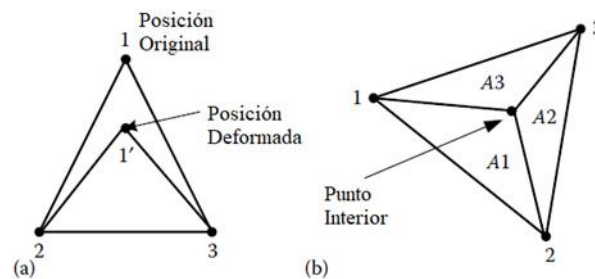


Figura F-6: (a) Triángulo en Estado Deformado y No Deformado; (b) Interpolación de un Punto Interior

El punto interior divide al triángulo en tres subtriángulos (ver figura F-6b). Los tres nodos pueden moverse; por lo tanto, el movimiento del punto interior resulta en una combinación lineal de sus desplazamientos [8]. Sean A_1 , A_2 y A_3 el área de cada triángulo y A el área total del elemento triangular, entonces $A = A_1 + A_2 + A_3$, de tal manera que.

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad y \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad \text{F.23}$$

En términos de coordenadas nodales, las funciones de forma están dadas por.

$$L_1 = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

$$L_2 = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$L_3 = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

F.24

$$A = \frac{1}{2} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Estas mismas funciones de forma se pueden utilizar para calcular las coordenadas de un punto interior del triángulo.

$$x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3$$

$$y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3$$

F.25

De la ecuación (F.25), es obvio que los valores de las funciones de forma para el nodo 1 son (1,0,0) para el nodo 2 son (0,1,0) y para el nodo 3 son (0,0,1). Las funciones de forma no son independientes entre sí, puesto que $L_1 + L_2 + L_3 = 1$. Por lo tanto, si se conocen dos funciones de forma, es posible calcular la tercera, introduciendo las coordenadas naturales dentro del triángulo (ξ, η) tales que.

$$L_1 = \xi, \quad L_2 = \eta \quad \text{F.26}$$

entonces la tercera función de forma L_3 es.

$$L_3 = 1 - \xi - \eta \quad \text{F.27}$$

Dichas coordenadas naturales se muestran en la figura F-7

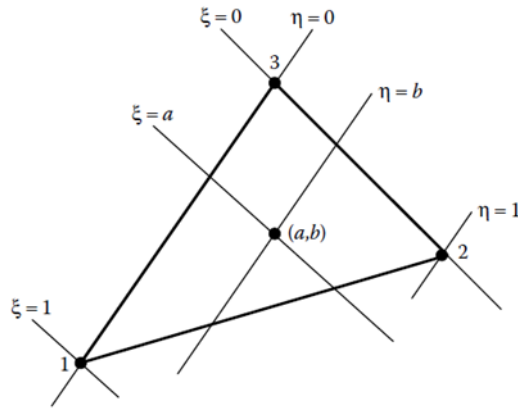


Figura F-7: Representación de Coordenadas Naturales

Podemos definir a las *coordenadas naturales* como un sistema de coordenadas locales que se basa en la geometría del elemento para su definición y que su magnitud oscila entre cero y la unidad dentro del elemento. Los sistemas de coordenadas naturales tienen la propiedad de que una coordenada particular tiene valor unitario en un nodo del elemento y cero en los demás nodos. El uso de coordenadas naturales resulta ventajoso para derivar funciones de interpolación y también para el desarrollo de elementos con lados curvos [8].

Sustituyendo la ecuación (F.26) y (F.27) en la ecuación (F.25) obtenemos la relación entre las coordenadas globales (x,y) y las coordenadas naturales (ξ,η) , con la siguiente expresión.

$$x = \xi x_1 + \eta x_2 + (1 - \xi - \eta)x_3 \rightarrow x = (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta + x_3$$

$$y = \xi y_1 + \eta y_2 + (1 - \xi - \eta)y_3 \rightarrow y = (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta + y_3 \quad \text{F.27a}$$

La ecuación (F.27a) se utiliza para calcular las coordenadas naturales. Si se conoce cualquier punto dentro del triángulo, se conocen las coordenadas de los vértices (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , y (x_3, y_3) junto con las coordenadas del punto (x, y) . Por lo tanto, la ecuación (15.27) se puede resolver para ξ y η . Posteriormente, si se conoce la variable de campo, por ejemplo, el potencial eléctrico en los nodos, se pueden utilizar las coordenadas naturales para calcular la variable de campo para el punto (x, y) , como muestra en la siguiente expresión.

$$U(x, y) = (U_1 - U_3)\xi + (U_2 - U_3)\eta + U_3 \quad \text{F.27b}$$

Anexo G

1. Transformación de la Ecuación de Laplace de Coordenadas Rectangulares a Coordenadas Cilíndricas.

Sea la función f de variables reales x, y, z ; dicha ecuación satisface la ecuación de Laplace (ecuación particular de Poisson), si:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad \text{G.1}$$

El primer miembro de la ecuación anterior, se denomina “Laplaciano” [10], [11].

1.1. Nociones Básicas Respecto a las Coordenadas Cilíndricas.

En el sistema de coordenadas cilíndricas, un punto “P” en el espacio se representa mediante una terna ordenada (r, θ, z) , teniendo en consideración lo siguiente [19]:

- ✓ (r, θ) es una representación polar de la proyección del punto “P” en el plano xy .
- ✓ z es la distancia dirigida de (r, θ) al punto “P”.

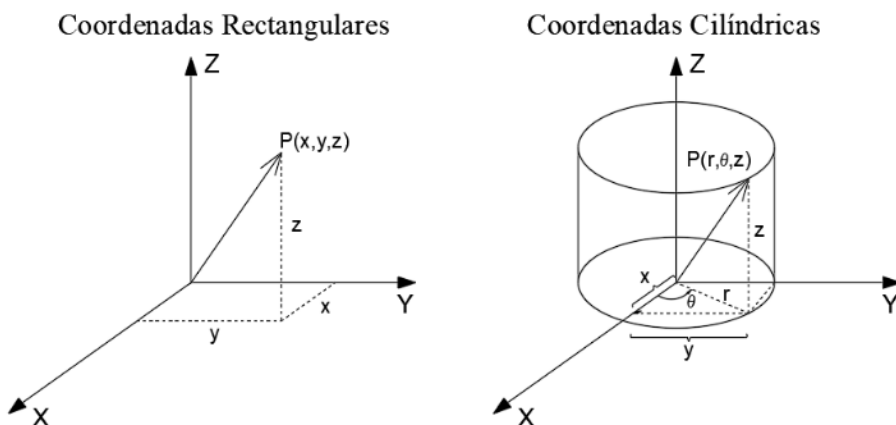


Figura G-1. Gráfica del punto "P" en Coordenadas Rectangulares y Coordenadas Cilíndricas

De la figura, el punto "P" en coordenadas rectangulares, es igual a:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

El rango de variación de la terna ordenada (x, y, z) , es.

$$-\infty < x < \infty; \quad -\infty < y < \infty; \quad -\infty < z < \infty$$

De la figura, el punto "P" en coordenadas cilíndricas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$z = z$$

El rango de variación de la terna ordenada (r, θ, z) , es.

$$0 \leq r < \infty; \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \quad -\infty < z < \infty$$

Observación: Para la variación de θ .

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right); \forall x > 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2}; \Leftrightarrow x = 0, y > 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + \pi; \forall x < 0 \\ \frac{3\pi}{2}; \Leftrightarrow x = 0, y < 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + 2\pi; \forall x > 0, y < 0 \end{cases}$$

1.2. Regla de la Cadena.

Aplicando la regla de la cadena para una función real de variable vectorial y utilizando el diagrama del árbol, se tiene:

Sea la función f diferenciable de la terna r, θ, z , tal que $f = g(r, \theta, z)$; donde $r = h(x, y, z)$, $\theta = j(x, y, z)$ y $z = k(x, y, z)$, entonces.

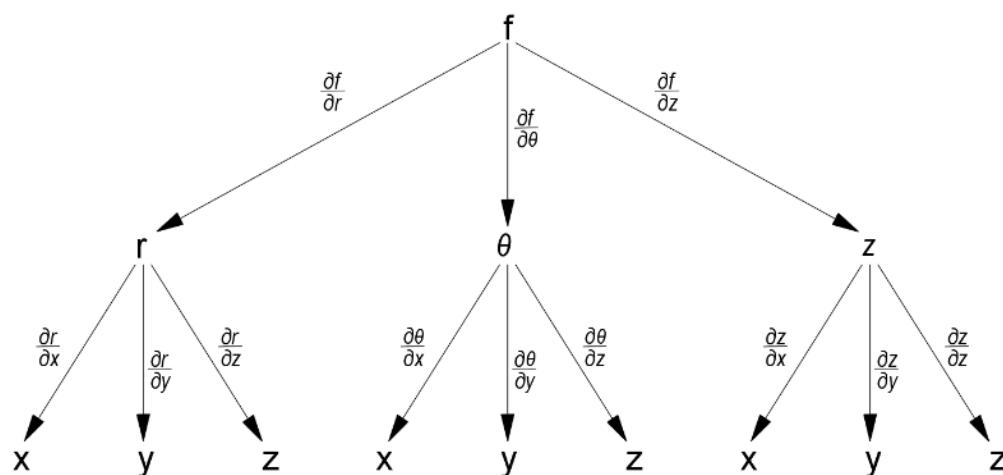


Figura G-2. Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Coordenadas Cilíndricas

1.2.1 Cálculo de las Derivadas Parciales de Primer y Segundo Orden de f Respecto a x .

1.2.1.1 Cálculo de: $\frac{\partial f}{\partial x}$

Aplicando la regla de la cadena, de la figura G-3, se tiene.

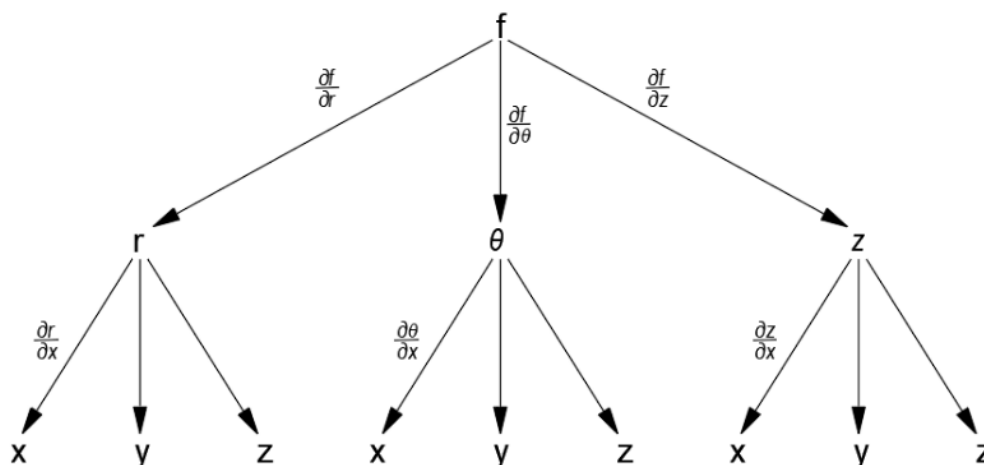


Figura G-3. Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Determinar la $\frac{\partial f}{\partial x}$

La expresión matemática, es.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

G.2

$$\checkmark \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos \theta \dots (1)$$

$$\checkmark \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial(\tan^{-1}(\frac{y}{x}))}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(\frac{y}{x})}{\partial x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{\frac{-y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \dots (2)$$

$$\checkmark \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(z)}{\partial x} = 0 \dots (3)$$

Reemplazamos la ecuación (1), (2) y (3) en la ecuación G.2, obtenemos.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot -\frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

G.3

1.2.1.2 Cálculo de: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Aplicando la regla de la cadena de la figura G-4, se tiene.

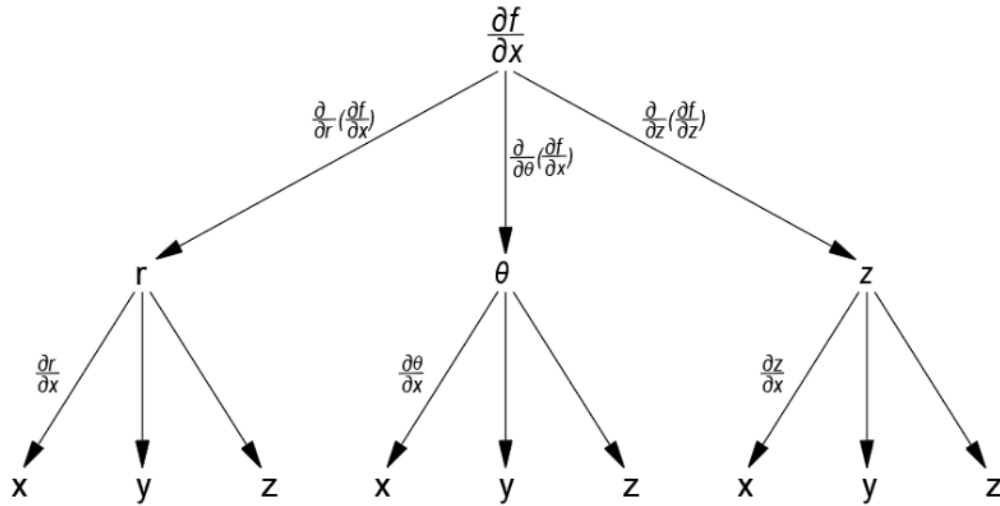


Figura G-4. Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Determinar la $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

La expresión matemática, es.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\end{aligned}\quad \text{G.4}$$

Reemplazamos la ecuación (1), (2) y (3) en la ecuación G.4, obtenemos.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\end{aligned}\quad \text{G.5}$$

Ahora determinamos la derivada parcial de $\frac{\partial f}{\partial x}$ con respecto a r y a θ de la ecuación G.5.

$$\begin{aligned}\checkmark \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \left[\frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \left(-\frac{\sin \theta}{r^2}\right) + \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}\right] = \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \dots (4) \\ \checkmark \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= -\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} - \left[\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right] = -\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \dots (5)\end{aligned}$$

Reemplazamos la ecuación (4) y (5) en la ecuación G.5, obtenemos.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \theta \left[\cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \right] - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \left[-\sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right] \\
&= \cos^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad \text{G.6}
\end{aligned}$$

1.2.2 Cálculo de las Derivadas Parciales de Primer y Segundo Orden de f Respecto a y .

1.2.2.1 Cálculo de: $\frac{\partial f}{\partial y}$

Aplicando la regla de la cadena, de la figura G-5, se tiene.

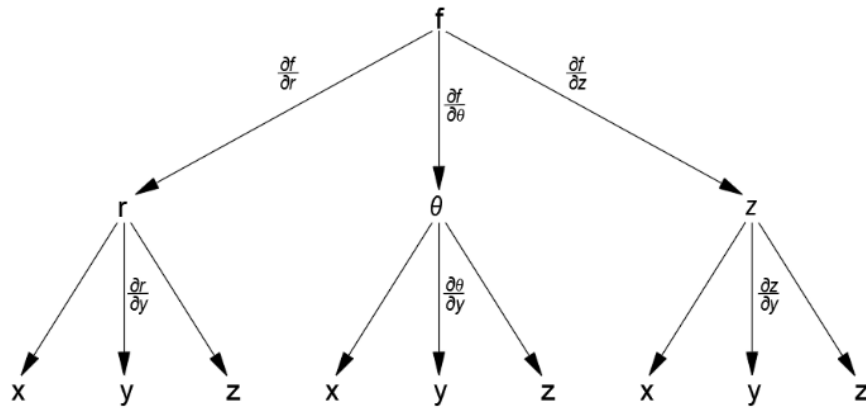


Figura G-5. Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Determinar la $\frac{\partial f}{\partial y}$

La expresión matemática, es.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{G.7}$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin \theta \dots (6)$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial(\tan^{-1}(\frac{y}{x}))}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(\frac{y}{x})}{\partial y}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos \theta}{r} \dots (7)$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(z)}{\partial y} = 0 \dots (8)$$

Reemplazamos la ecuación (6), (7) y (8) en la ecuación G.7, obtenemos.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

G.8

1.2.2.2 Cálculo de: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Aplicando la regla de la cadena de la figura G-6, se tiene.

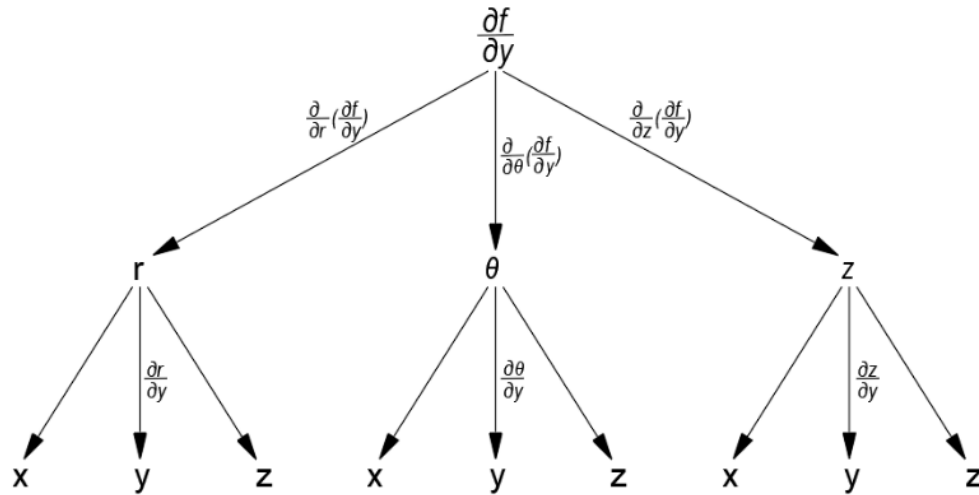


Figura G-6. Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Determinar la $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

La expresión matemática, es.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

G.9

Reemplazamos la ecuación (6), (7) y (8) en la ecuación G.9, obtenemos.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

G.10

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Ahora determinamos la derivada parcial de $\frac{\partial f}{\partial y}$ con respecto a r y a θ de la ecuación G.10.

$$\checkmark \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \sin \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \left(-\frac{\cos \theta}{r^2} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \right] = \sin \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\cos \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \dots (9)$$

$$\checkmark \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} + \left[-\frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right] = \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \dots (10)$$

Reemplazamos la ecuación (9) y (10) en la ecuación G.10, obtenemos.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \sin \theta \left[\sin \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\cos \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \right] + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \left[\cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \sin \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right]$$

$$= \sin^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad \text{G.11}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

1.2.3 Cálculo de las Derivadas Parciales de Primer y Segundo Orden de f Respecto a z .

1.2.3.1 Cálculo de: $\frac{\partial f}{\partial y}$

Aplicando la regla de la cadena, de la figura G-7, se tiene.

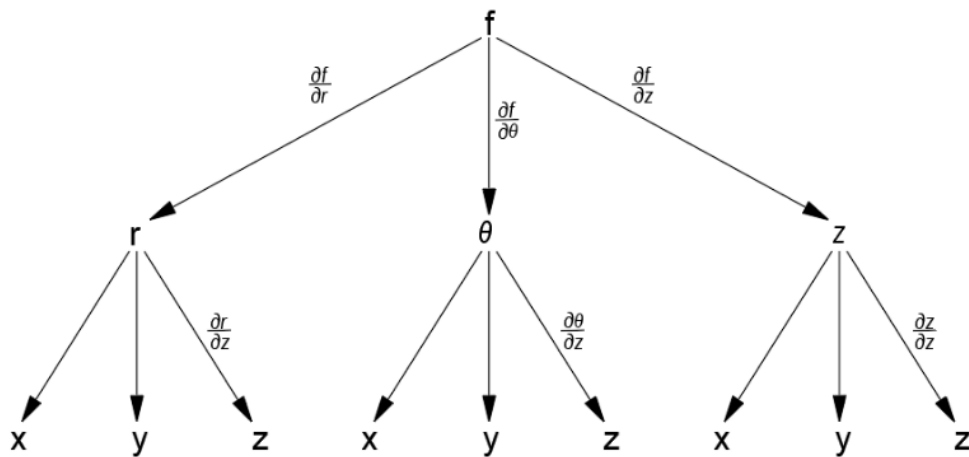


Figura G-7. Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Determinar la $\frac{\partial f}{\partial z}$

La expresión matemática, es.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z}$$

G.12

$$\checkmark \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial z} = 0 \dots (11)$$

$$\checkmark \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial(\tan^{-1}(\frac{y}{x}))}{\partial z} = 0 \dots (12)$$

$$\checkmark \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \dots (13)$$

Reemplazamos la ecuación (11), (12) y (13) en la ecuación G.12, obtenemos.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

G.13

1.2.3.2 Cálculo de: $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Aplicando la regla de la cadena de la figura G-8, se tiene.

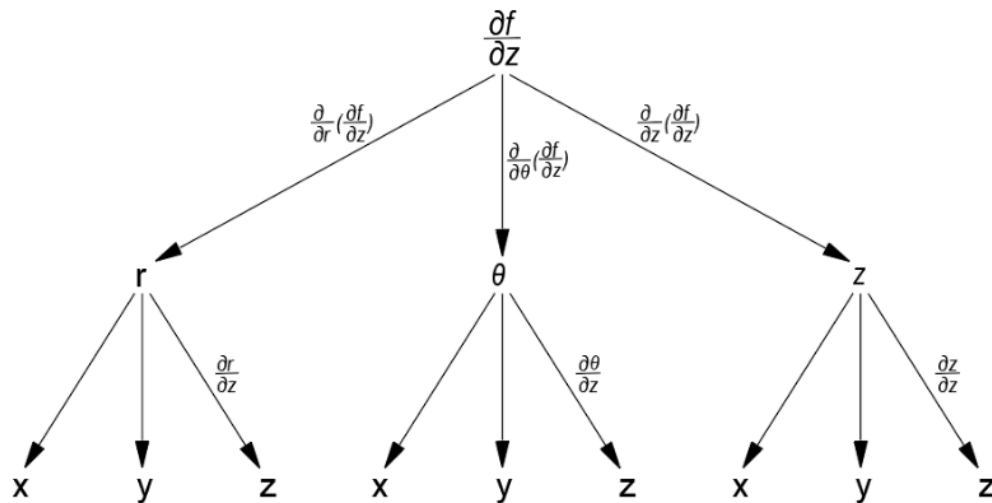


Figura G-8. Diagrama del Árbol Aplicando la Regla de la Cadena para Determinar la $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

La expresión matemática, es.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial r}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + \frac{\partial z}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

G.14

Reemplazamos la ecuación (11), (12) y (13) en la ecuación G.14, obtenemos.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

G.15

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Ahora reemplazamos la ecuación (G.6), (G.11) y (G.15) en la ecuación G.1, obtenemos.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$$\cos^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \dots$$

$$+ \sin^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \rightarrow \left[\frac{r}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$\therefore$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

G.16

Anexo H

1. Solución de la Integral y Derivada Parcial del Capítulo I, Subtítulo 1.2.10.8. (Campo Debido a una Línea con Carga Uniforme)

✓ Solución a la Integral Definida para Obtener la Ecuación I-50

La integral a solucionar es.

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{H.1}$$

Realizamos un cambio de variable de la siguiente manera.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = u - x$$

elevamos al cuadrado ambos miembros y operamos algebraicamente.

$$(\sqrt{x^2 + y^2})^2 = (u - x)^2 \rightarrow x^2 + y^2 = u^2 - 2ux + x^2 \rightarrow x = \frac{u^2 - y^2}{2u}$$

ahora derivamos esta expresión, con la finalidad de encontrar el dx en función del du .

$$dx = \frac{(2udu)(2u) - (2du)(u^2 - y^2)}{4u^2} = \left[\frac{u^2 + y^2}{2u^2} \right] du$$

Esta expresión la reemplazamos en la ecuación (H.1), y se obtiene.

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\left[\frac{u^2 + y^2}{2u^2} \right] du}{u - x} = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\left[\frac{u^2 + y^2}{2u^2} \right] du}{u - \frac{u^2 - y^2}{2u}} = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\left[\frac{u^2 + y^2}{2u^2} \right] du}{\frac{u^2 + y^2}{2u}} = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{du}{u} = \ln u = \ln \left[x + \sqrt{x^2 + y^2} \right]_{-L/2}^{+L/2}$$

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\left[\frac{u^2 + y^2}{2u^2} \right] du}{u - x} = \ln \left[\left(+L/2 \right) + \sqrt{\left(+L/2 \right)^2 + y^2} \right] - \ln \left[\left(-L/2 \right) + \sqrt{\left(-L/2 \right)^2 + y^2} \right]$$

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\left[\frac{u^2 + y^2}{2u^2} \right] du}{u - x} = \ln \left[\frac{\sqrt{(L/2)^2 + y^2} + L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2} - L/2} \right] \quad \text{H.2}$$

✓ Solución a la Derivada Parcial para Obtener la Ecuación I-51

La derivada parcial a solucionar es.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\ln \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{2} \right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} \right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}}} \right] \right\} \quad \text{H.3}$$

al aplicar las propiedades de logaritmos, se tiene.

$$-\ln \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}}} \right] = - \left[\ln \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}} - \ln \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}} \right]$$

ahora derivamos con respecto a y

$$\begin{aligned} - \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\ln \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\ln \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}} \right] \right\} &= - \left\{ \frac{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2} \right)^{-1} (2y)}{\left[\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}} \right]} - \frac{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2} \right)^{-1} (2y)}{\left[\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}} \right]} \right\} \\ &= - \left\{ \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}}} \right] \right\} = \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}}} \right] \end{aligned}$$

esta expresión la reemplazamos en la ecuación (H.3), se obtiene.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ - \ln \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}}} \right] \right\} = \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}}} \right]$$

O

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ - \ln \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}}} \right] \right\} = \frac{y}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}} \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}} - \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}}}{\left[\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}} \right] \left[\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}} \right]} \right] = \frac{yL}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}} \left[\frac{1}{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ - \ln \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{L}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{L}{2}}} \right] \right\} = \frac{L}{y \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}$$

H.4

Anexo I

VOCABULARIO TÉCNICO

Ánodo. – Es un electrodo en el que se produce una reacción de *oxidación*, mediante el cual un material, al perder electrones, incrementa su estado de oxidación. Es de polaridad positiva.

Conductancia. – Referido a la facilidad con la que un material dieléctrico permite el flujo de corriente eléctrica a través de él, aunque no es el mismo que la conductividad eléctrica de un material, que es una propiedad intrínseca de la sustancia con la que se fabrica el dieléctrico, se mide en Siemens (S).

Capacitancia. – Se define como la capacidad que tiene un condensador de almacenar carga en forma de campo eléctrico. Se puede decir también que, es la relación entre la carga eléctrica (Q) almacenada en un condensador y la tensión (V) que lo origina. Su símbolo es “C” y se mide en faradios “F”.

Cátodo. - Es un electrodo en el que se produce una reacción de *reducción*, mediante el cual un material, al recibir electrones, reduce su estado de oxidación. Es de polaridad negativa.

Descarga. – Referido a la pérdida de carga eléctrica la cual ocurre cuando una corriente circula de manera repentina entre dos elementos que tienen diferentes potenciales, resultando en una corriente no deseada que tiene el potencial de producir daño. Esta puede ser causada por fricción, choque o contacto con un conductor eléctrico cargado.

Dieléctrico. – Material, o medio que actúa como aislante puesto que tienen una baja conductividad eléctrica y son considerados como malos conductores, lo que significa que no permite el paso fácil de la corriente eléctrica. En su función, los dieléctricos son esenciales para la inducción eléctrica, ya que facilitan la separación de cargas sin permitir que la corriente fluya a través de ellos.

Elastancia. – Se define como la capacidad que tiene un condensador para almacenar energía y liberarlo cuando sea necesario, se comporta como el recíproco de la capacitancia, lo que significa que una mayor Elastancia indica un condensador más eficiente, su símbolo es “S” y se mide en F^{-1} .

Electrodo. – Extremo de un conductor eléctrico que recoge o transfiere una corriente cuando se encuentra en contacto con un medio.

Flameo o Flashover. – Se define como una descarga disruptiva que puede darse longitudinalmente por todo el perímetro del aislador o por el aire circundante a él.

Gerente. – Persona a cargo de la dirección o coordinación de una organización, institución o empresa en su totalidad o una parte de ella como un departamento o un grupo de trabajo. Dentro de sus funciones debe dominar herramientas de planificación, costos, contratos y gestión de calidad (tener absoluto conocimiento técnico de los procesos de producción que realiza la industria).

Homogéneo. – Adjetivo que indica que algo es uniforme o consistente en sus componentes, esto quiere decir, que todas sus partes conformantes son iguales o similares entre sí.

Interacción. – Acción que se ejerce entre dos o más cuerpos cargados eléctricamente

Isotrópico. – Referido a cuerpos o medios materiales que presentan propiedades idénticas en todas las direcciones; esto significa que las magnitudes como la conductividad eléctrica, térmica o dilatación no varían según la dirección en la que se midan. Dicho de otra manera, los materiales isotrópicos exhiben las mismas propiedades en todas las direcciones, lo que los hace uniformes en su comportamiento físico, mecánico y químico.

Perditancia. – Referido a la disipación de energía en forma de calor en un material aislante cuando está sometido a un campo eléctrico alterno, esta disipación se debe principalmente a las corrientes de polarización y conducción, y su magnitud depende de la frecuencia del campo aplicado y de las propiedades del material dieléctrico.

Polarización Eléctrica. – Campo vectorial que representa la densidad de los momentos eléctricos dipolares inducidos o permanentes en un material dieléctrico; el cual trata de uno de los tres campos eléctricos macroscópicos que proporcionan una descripción del comportamiento de los materiales, complementando al desplazamiento eléctrico D y el campo eléctrico E .

Permitividad. – Capacidad de un dieléctrico para almacenar energía electrostática en presencia de un campo eléctrico, se determina como el cociente entre el desplazamiento o densidad de flujo D y el campo eléctrico E en un punto del vacío o de un dieléctrico isotrópico. Esto significa que cuanto mayor es la permitividad de un medio más energía se almacena en el medio; por lo tanto, los materiales de alta permitividad se utilizan como materiales dieléctricos en los condensadores.

Permeabilidad. – Capacidad de un material para permitir el paso de un flujo eléctrico o magnético a través de él, la permeabilidad magnética se determina como el cociente entre la densidad de flujo B y la intensidad del campo magnético E que rodea al material. Esto significa que para que un material sea permeable a un flujo, debe sufrir un cambio momentáneo inducido por el flujo en cuestión o ser capaz de modificar el flujo en sí mismo.

Termoiónico. – Referido a la emisión de electrones provocada por el calor y se produce cuando la temperatura de un metal aumenta de forma que sus electrones ganan suficiente energía cinética para escapar de su átomo.

Tracking. – Se define como la carbonización que se presenta sobre la superficie del aislador ocasionado por una corriente de fuga. Asimismo, es una falla que indica el camino que siguió la corriente de fuga sobre la superficie del aislador.

Anexo J

PLANO

Sistema Eléctrico de Chiclayo Adaptado del Diagrama Unifilar del COES – SINAC

Esquema Unifilar por Nivel de Tensión de 220 – 60 kV

