UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Análisis de sensibilidad con WinQsb en la optimización de problemas de programación lineal"

TESIS

Para optar el título profesional de Licenciado en Matemáticas

Presentado por:

Bach. Mat. **Herrera Cayotopa Wilder**

Bach. Mat. **Zuloeta Atalaya Jorge Alonso**

Asesor:

Dr. Cárpena Velásquez Enrique Wilfredo

LAMBAYEQUE – PERÚ

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL" PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"Análisis de sensibilidad con WinQsb en la optimización de problemas de programación lineal"**, presentada por los bachilleres en matemáticas, Herrera Cayotopa Wilder, Zuloeta Atalaya Jorge Alonso, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de licenciado en matemáticas .

M.Sc. Cuti Gutiérrez Alcides Raúl

Presidente Jurado de Tesis

M.Sc. Sánchez García Dolores

Secretario Jurado de Tesis

Lic. Mat. Baca Ferreyros Miguel Angel

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: 09 de Marzo 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL“ PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“Análisis de sensibilidad con WinQsb en la optimización de problemas de programación lineal”

Bach. Mat. Herrera Cayotopa Wilder
Autor

Bach. Mat. Zuloeta Atalaya Jorge Alonso
Autor

Dr. Cárpena Velásquez Enrique Wilfredo
Asesor

Lambayeque – Perú
Marzo - 2018

Agradecimiento

Agradezco principalmente a Dios por permitirme llegar a esta instancia del camino, en donde me vuelvo un profesional.

A mis padres Rogerio, Emelina y hermanos Nelly, Roger, Luzbina, Walter y Deysi, quienes a lo largo de mi vida han velado por mi bienestar y educación siendo mi apoyo en todo momento.

De manera muy especial agradezco a mi asesor Dr. Cárpena Velásquez Enrique Wilfredo por su colaboración, motivación y por dedicarnos su tiempo para la realización de la presente tesis.

WILDER

Agradezco a Dios, que me dió fuerza y fe para creer en lo que me parecía imposible terminar.

Al Dr. Enrique Wilfredo Cárpena Velásquez por su esfuerzo y apoyo constante como asesor de esta tesis; y por haber compartido conmigo sus conocimientos, ya que sus orientaciones y motivaciones han sido fundamentales para la investigación.

A mi amigo Luis Villegas que gracias a su apoyo hicieron de esta experiencia una de las más especiales.

Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional a las que me gustaría agradecer por su amistad, consejos y apoyo en momentos difíciles, algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y corazón; gracias y bendiciones a todos.

ALONSO

Dedicatoria

A Dios nuestro señor y a su santísima madre la Virgen María.

A mis padres Rogerio y Emelina por gran apoyo incondicional.

A mi esposa Nelva e hijas Luana y Briana quienes son mi motivo para salir adelante.

WILDER

A la memoria de mis abuelos Zoila, Isidro y Francisco que son mis ángeles que siempre me acompañan y a mi abuela Tomasa por todo el cariño brindado.

A mis padres por los valores que me inculcaron y en especial a mi madre quien estuvo allí siempre dándome todo su apoyo, aliento y las fuerzas necesarias para seguir adelante.

A mi hermana Sayuri y a mi esposa Ursula por sus motivaciones y apoyo incondicional.

Cada uno aportando a su manera han hecho de mí la persona que soy ahora.

"Se feliz con lo que tienes . . . mientras persigas lo que deseas".

ALONSO

Presentación

En el presente trabajo de investigación tiene como objetivo usar el análisis de sensibilidad con WinQsb para optimizar en forma rápida y precisa los problemas de programación lineal; en forma general se determina la solución de un problema de programación lineal utilizando el método del simplex cuyo resultado óptimo se refleja en una tabla final.
Para el análisis de sensibilidad se requiere de la tabla óptima para hacer los diferentes cambios que pueden ser, ya sea en los coeficientes de la función objetivo, en el vector lado derecho, en la matriz de restricciones, adición de una nueva restricción y adición de una nueva actividad, el cual va a permitir la tabla óptima hallar su solución, sin que esto pase por resolverlo desde el inicio, sino utilizando la tabla final del método del simplex obtenida inicialmente.

Espero que sea de gran ayuda a futuro, para Estudiantes y Docentes. Les presento esta tesis llamado **"Análisis de sensibilidad con WinQsb en la optimización de problemas de programación lineal"**.

Resumen

El presente trabajo de investigación muestra el desarrollo del Análisis de Sensibilidad, cuyo objetivo es identificar la trascendencia que se da a los resultados obtenidos en el desarrollo original de un problema de Programación Lineal luego de realizar determinadas variaciones en los parámetros, variables o restricciones del modelo. En forma general se determina la solución de un problema de programación lineal utilizando el método del simplex cuyo resultado óptimo se refleja en una tabla final; después se realiza cambios que pueden ser en los coeficientes de la función objetivo, en las variables o restricciones del problema original y se procede según el caso a hallar su solución, sin que esto pase por resolverlo desde el inicio, sino utilizando la tabla final del método del simplex obtenida inicialmente.

La línea de investigación que se sustenta este trabajo es la reoptimización, y la innovación que es la simplificación y comprobación de los procesos utilizando el software WinQsb, el cual contiene herramientas tecnológicas muy útiles para resolver distintos tipos de problemas en el campo de la Investigación de Operaciones y especialmente en la Programación Lineal.

Abstract

The present research work presents the development of the Sensitivity Analysis, whose objective is to identify the transcendence that is given to the results obtained in the original development of a Linear Programming problem after making certain variations in the parameters, variables or restrictions of the model. In general, the solution of a linear programming problem is determined using the simplex method whose optimal result is reflected in a final table; then changes are made that can be in the coefficients of the objective function, in the variables or restrictions of the original problem and proceeds as the case to find its solution, without this going to solve it from the beginning, but using the final table of the simplex method obtained initially.

The line of research that sustains this work is the reoptimization, and the innovation that is the simplification and verification of the processes using the WinQsb software, which contains very useful technological tools to solve different types of problems in the field of Operations Research and especially in Linear Programming.

Introducción

El Análisis de Sensibilidad para los problemas de optimización combinatoria apareció poco tiempo después que se propusieran los métodos de resolución exacta. Para los problemas lineales, el primer algoritmo fue propuesto a principios de los años 70 y se fundamentó en las técnicas de enumeración implícita, posteriormente se realizaron contribuciones más originales sobre el análisis de sensibilidad, proponiendo trabajos para obtener un intervalo de estabilidad para las soluciones derivadas de un modelo binario, los cuales se han utilizado exitosamente en la solución de problemas lineales con variables continuas; pero esto se vuelve más difícil cuando en los problemas existentes se presentan en el análisis de las variaciones de los coeficientes de la función objetivo, en las restricciones o en lado derecho de las restricciones. La solución de este tipo de problemas se ha dado progresivamente en el tiempo y de acuerdo al avance tecnológico se van utilizando herramientas informáticas para la simplificación y comprobación de resultados.

El presente trabajo de investigación está dirigido a estudiantes y profesionales que están familiarizados con la programación lineal, es decir, que tengan conocimientos de lo que es un programa lineal, sus diversas variantes y que conozca la aplicación del método simplex y sus fundamentos. Se analiza las diferentes formas el cual es una herramienta tecnológica que se cómo se presentan los problemas de análisis de sensibilidad en programación lineal y su solución en forma analítica la cual se realiza mediante un proceso de reoptimización, para después simplificarla y comprobarla con el software WinQsb, el cual es un sistema iterativo que contiene herramientas tecnológicas muy útiles para resolver distintos tipos de problemas en la programación lineal.

De acuerdo a los estudios realizados, el problema científico quedo formulado de la siguiente manera: ¿En qué medida el análisis de sensibilidad asistido con el software WinQsb permite hallar la solución óptima en forma rápida y precisa los problemas de programación lineal? Y el objetivo principal es: Utilizar el análisis de sensibilidad asistida con el software WinQsb para optimizar en forma rápida y precisa los problemas de programación lineal; y la hipótesis planteada: Si se utiliza el análisis de sensibilidad asistida con el software WinQsb en problemas de programación lineal, entonces se obtiene su solución óptima en forma rápida y precisa.

La estructura del presente trabajo se presenta de la siguiente manera: En el primer capítulo se presentan los preliminares, los cuales son los conocimientos básicos en programación lineal, el método del simplex y solución de problemas mediante tablas, para después dar a conocer detalles del software WinQsb.

En el segundo capítulo se da a conocer aspectos y de La Dualidad en un problema de programación lineal, estableciendo en forma clara la relación Primal-Dual y su solución por el método del simplex.

En el tercer capítulo se da a conocer los cinco casos que se presentan en el análisis de sensibilidad con sus respectivos ejemplos de aplicación, cuya solución se realiza en forma analítica y después asistida con el software WinQsb.

Después se presentan las: Conclusiones, Recomendaciones y Referencias Bibliográficas.

Índice general

Capítulo 1:

Preliminares

1.1 El método simplex en forma de tabla

Dado un problema de Programación Lineal

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = cx \\ s.a \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde A es una matriz $m \times n$, con $n > m$ y $rang(A) = m$. Después de un posible arreglo de las columnas de A, sea $A = [B, N]$, en donde Se define:

- **Base B** como un conjunto de m columnas de A linealmente independientes y además invertible de $m \times m$.
- **N** se llama la matriz no básica de $m \times (n - m)$.
- El punto $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ en donde x_B se llaman variables básicas y x_N se llama variables no básicas.
- **Solución básica** correspondiente a la base B, valores de x resultantes de resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$ anulando todas las variables correspondientes a columnas diferentes de las de B. Una solución básica:

- es linealmente independiente y
- como máximo, tiene m componentes no nulas, tantas como restricciones.

En lo que sigue identificaremos:

- Solución básica con solución linealmente independiente.
- Solución no básica con solución linealmente dependiente.
  Además:
- Una solución básica tiene como máximo m componentes no nulas y
- Una solución no básica tiene, típicamente, al menos $m+1$ componentes no nulas.

Dada una solución básica, con base B, hay dos tipos de variables:

- **Variable básica:** cada una de las variables correspondientes a las columnas de B, que son potencialmente no nulas.
- **Variable no básica:** cada una de las variables correspondientes a las columnas de A no incluidas en B, que son siempre nulas.

Podemos expresar las restricciones $Ax = b$ como:

$$Bx_B + Nx_N = b \tag{1.1}$$

Donde:

- x_B es el nivel de realización de las actividades básicas (valor de las variables básicas).
- x_N representa las variables no básicas, que son nulas por definición.
- N es el conjunto de columnas de las actividades no básicas.

de la ecuación (1.2) se tiene

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \tag{1.2}$$

Sea C_B es un vector fila con los elementos de c correspondientes a las variables básicas

$$z = cx = c_B x_B + c_N x_N \tag{1.3}$$

Donde c_N es el vector fila de las contribuciones unitarias al beneficio de las variables no básicas.

Algoritmo

1. Transformar las desigualdades del problema en un problema estándar introduciendo las variables de holgura.

2. C onstruir la tabla inicial.

3. D eterminar la solución inicial, llamada solución básica inicial.

4. D eterminar si se puede mejorar la solución dependiendo de los coeficientes de la función objetivo según el criterio de mejorabilidad:
   Si sí, entonces hay que calcular la nueva solución:

   a) determinar cuál es la variable entrante.

   b) determinar cuál es la variable saliente.

   c) modificar las restricciones por pivoteo.

   d) calcular el valor de la FO.

   e) explicitar la nueva solución.

   f) volver al inciso 4.

   Si no, entonces se termina y la última solución es la solución óptima.

Pivoteo

Todas las operaciones anteriores se pueden efectuar simultáneamente mediante una simple operación de pivoteo. Si x_k entra a la base y x_{B_r} sale de la base, entonces el pivoteo sobre y_{rk} se puede efectuar como sigue:

1. Se divide el renglón r por y_{rk}.
2. Para i=1,2,..., m, con $i \neq r$, se actualiza el i-ésimo renglón sumándole el nuevo r-ésimo renglón por $-r_{ik}$.
3. Se actualiza el renglón cero sumándole el nuevo r-ésimo renglón multiplicado por $c_k - z_k$. Las dos tablas (1.1) y (1.2) representan la situación inmediatamente antes y despues del pivoteo.

Tabla 1.1: Antes de pivotear

	z	x_{B_1}		x_{B_r}		x_{B_m}		x_j		x_k		LD
z	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$z_j - c_j$	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$c_B\overline{b}$
x_{B_1}	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	$\overline{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_{B_r}	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{rj}	$\cdots$	y_{rk}	$\cdots$	$\overline{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	y_{mj}	$\cdots$	y_{mk}	$\cdots$	$\overline{b}_m$

Tabla 1.2: Después de pivotear

	z	x_{B_1}		x_{B_r}		x_{B_m}		x_j		x_k		LD
z	1	0	$\cdots$	$\dfrac{c_k - z_k}{y_{rj}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(z_j - c_j)$ $-\dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$c_B\overline{b} - (z_k - c_k)\dfrac{\overline{b}_r}{y_{rk}}$
x_{B_1}	0	1	$\cdots$	$-\dfrac{y_{1k}}{y_{rk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$y_{1j} - \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}\, y_{1k}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\overline{b}_1 - \dfrac{y_{1k}}{y_{rk}}\, \overline{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_k	0	0	$\cdots$	$-\dfrac{1}{y_{rk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{\overline{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	0	$\cdots$	$-\dfrac{y_{mk}}{y_{mk}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$y_{mj} - \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}\, y_{mk}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\overline{b}_m - \dfrac{y_{mk}}{y_{mk}}\, \overline{b}_r$

Ejemplo 1.1.

$$\text{Minimizar} \qquad x_1 + x_2 - 4x_3$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeta a} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución.

<u>Paso 1:</u>

Ingresar las variables de holgura no negativas $h_1,\ h_2,\ h_3$. El problema se convierte en lo siguiente:

$$\text{Minimizar} \qquad x_1 + x_2 - 4x_3 + 0h_1 + 0h_2 + 0h_3$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeta a} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + h_1 \qquad\qquad &= 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad + h_2 \qquad &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + h_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ h_1,\ h_2,\ h_3 \quad \geq 0$$

Se tiene lo siguiente:

$$c = \left[\begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ \hline 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad b = \left[\begin{array}{c|c} b_1 & 9 \\ b_2 & 2 \\ b_3 & 4 \end{array}\right] \quad y \quad A = \left[\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Escogiendo como base inicial **B=**$[a_4\ a_5\ a_6]$=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

y de hecho $B^{-1}b = b \geq 0$. Esto da inicio a la tabla inicial:

<u>Paso 2:</u>

Ingresando los datos en la tabla inicial:

	z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	LD
z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
h_1	0	1	1	2	1	0	0	9
h_2	0	1	1	-1	0	1	0	2
h_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

<u>Paso 3:</u>

La siguiente tabla es un replanteamiento de la tabla inicial con sus filas y columnas pivote resaltadas.

La intersección de la columna pivote y la fila pivote se conoce como elemento pivote.

Los cálculos necesarios para obtener la nueva solución básica son de dos tipos:

1. **Pivote**

   a) **Identificar la columna pivote:**

   - identificar el mayor coeficiente positivo de la fila z, para este caso es 4. Luego la columna pivote es x_3.

Entra

	z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	LD	
z	1	-1	-1	4	0	0	0	0	
h_1	0	1	1	2	1	0	0	9	
h_2	0	1	1	-1	0	1	0	2	
h_3	0	-1	1	1	0	0	1	4	Fila pivote

Sale

Columna pivote

b) **Identificar la fila pivote**

- Dividir los elementos de $\overline{b}_i \div y_{rk}$, y elegir el menor valor obtenido

$$\frac{9}{2} = 4.5$$
$$\frac{2}{-1} \nexists$$
$$\frac{4}{1} = 4$$

La cual la fila pivote es h_3

c) **Reemplace h_3 en la columna Básica con x_3.**

d) **Nueva fila pivote = Fila pivote actual ÷ Elemento pivote.**

Nueva fila x_3 = Fila h_3 actual ÷ 1

$$x_3 = (\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 4)$$

2. **Todas las demás filas, incluyendo z**

Nueva fila = (Fila actual) - (Coeficiente de la columna pivote) × (Nueva fila pivote)

Estos cálculos se aplican a la tabla anterior como sigue:

1. Nueva fila h_2 = fila h_2 actual - (-1) nueva fila h_3

$$= (\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 6)$$

2. Nueva fila h_1 = fila h_1 actual - (2) nueva fila h_3

$$= (\ 0 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \quad 1)$$

3. Nueva fila z = fila z actual - (4) nueva fila h_3

$$= (\ 1 \quad 3 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \quad -16)$$

La nueva tabla es:

Entra

	z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	LD	
z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16	
Sale h_1	0	3	-1	0	1	0	-2	1	Fila pivote
h_2	0	0	2	0	0	1	1	6	
x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4	

Columna pivote

1. **Pivote**

   a) **Identificar la columna pivote:**

   - identificar el mayor coeficiente positivo de la fila z, para este caso es 3. Luego la columna pivote es x_1.

   b) **Identificar la fila pivote**

   - Dividir los elementos de $\overline{b}_i \div y_{rk}$, y elegir el menor valor obtenido

$$\frac{1}{3} = 0.33$$
$$\frac{6}{0} \quad \nexists$$
$$\frac{4}{-1} \quad \nexists$$

   La cual la fila pivote es h_1

   c) **Reemplace h_1 en la columna Básica con x_1.**

   d) **Nueva fila pivote = Fila pivote actual ÷ Elemento pivote.**

   Nueva fila x_1 = Fila h_1 actual ÷ 1

$$x_1 = \frac{1}{3}\ (\ 0 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \quad \frac{1}{3})$$
$$x_1 = (\ 0 \quad 1 \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})$$

2. **Todas las demás filas, incluyendo z**

Nueva fila = (Fila actual) - (Coeficiente de la columna pivote) $\times$ (Nueva fila pivote)

Estos cálculos se aplican a la tabla anterior como sigue:

1. Nueva fila z = fila z actual - (3) nueva fila x_1

$$= (\ 1 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -2 \quad -17)$$

2. Nueva fila h_2 = fila h_2 actual - (0) nueva fila x_1

$$= (\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 6)$$

3. Nueva fila x_3 = fila x_3 actual - (-1) nueva fila x_1

$$= (\ 0 \quad 0 \quad \tfrac{2}{3} \quad 1 \quad \tfrac{1}{3} \quad 0 \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{13}{3})$$

La nueva tabla es:

	z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	LD
z	1	0	-4	0	-1	0	-2	-17
x_1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
h_2	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$

Tabla 1.3: Tabla óptima

La solución optima esta dada por:

$$z = -17, \quad x_1 = \tfrac{1}{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \tfrac{13}{3}, \quad h_2 = 6, \quad h_1 = 0, \quad h_3 = 0$$

Observe que la base óptima actual consiste en identificar las variables básicas de la parte izquierda de la tabla óptima (1.3) el cual van hacer las columnas a_1, a_5 y a_3 es decir:

$$B = [a_1 \quad a_5 \quad a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad c_B = [1 \quad 0 \quad -4]$$

De la tabla óptima (1.3) se observa las columnas h_1, h_2 y h_3

$$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Nota 1.1. Al ingresar los datos al software WinQsb se coloca tal como está el problema, ya sea como minimizar o maximizar, tal como se muestra en el paso 6 el software WinQsb se encarga de distribuir la tabla.

1.2 Solución básica factible

Recuérdese que el método simplex empieza con una solución básica factible y llega a una solución básica mejorada, cuando se alcanza el punto óptimo, o bien, hasta que se verifica el no acotamiento de la función objetivo. Sin embargo, para iniciar el método simplex, debe disponerse de una base **B** con $\overline{b} = B^{-1}b \geq 0$.

1. **Caso fácil:**

   Supóngase que las restricciones son de la forma $Ax \leq b, \quad x \geq 0$, en donde A es una matriz $m \times n$ y b es un $m - vector$ no negativo. Añadiendo el vector de holgura h_s, las restricciones se escriben en la siguiente forma estándar: $Ax + h_s = b, \quad x \geq 0, \quad h_s \geq 0$.

   Nótese que la nueva matriz $m \times (m+n)$ de restricciones es $(A,\ I)$ y tiene rango m, y que se dispone de una solución básica factible de este sistema, tomando $h_s = b$ como el vector básico y $x = 0$ como el vector no básico. El método simplex puede aplicarse con esta solución básica factible inicial.

2. **Algunos casos difíciles:**

   En muchas ocasiones, encontrar una solución básica factible inicial no es tan fácil. Por ejemplo, supóngase que las restriciones son de la forma $Ax \leq b, \quad x \geq 0$, pero que el vector b no es no negativo. En este caso después de introducir el vector de

holgura, h_s, no podemos tomar $x = 0$, pues $h_s = b$ viola el requerimiento de no negatividad.

Otra situación semejante ocurre cuando las restricciones son de la forma $Ax \geq b$, $x \geq 0$, donde $b \geq 0$. Después de restar el vector de holgura h_s, se obtiene $Ax - h_s = b$, $x \geq 0$ y $h_s \geq 0$. De nuevo, no hay una forma obvia de seleccionar una base B de la matriz $(A, -I)$, con $\overline{b} = B^{-1}b \geq 0$.

En general, cualquier problema de programación lineal se puede transformar en un problema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad Z &= cx \\ \text{s.a:} \quad Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

en donde $b \geq 0$ (si $b_i < 0$, el i-ésimo renglón se puede multiplicar por -1). Esto puede obtenerse introduciendo variables de holgura y mediante una simple manipulación de las restricciones y variables. Si A contiene una matriz identidad, entonces se obtiene de inmediato una solución básica factible, tomando simplemente $B = I$, y puesto de $b \geq 0$, se tiene que $B^{-1}b = \overline{b} \geq 0$. En caso contrario, debe hacerse algo más.

Ejemplo 1.2.

a) Considérense las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Después de añadir las variables de holgura h_1 y h_2

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + h_1 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + h_2 &= 1 \\ x_1,\ x_2,\ h_1,\ h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Una solución básica factible inicial obvia está dada por $x_B = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ y

$x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) Considérense las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nótese que x_1 no está restringida. Por lo tanto, hace el cambio $x_1 = x_1^+ + x_1^-$. También se introducen las variables de holgura h_1 y h_2. Esto lleva a las restricciones siguientes en forma estándar:

$$\begin{aligned} x_1^+ + x_1^- + x_2 + x_3 + h_1 &= 6 \\ -2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 + 2x_3 - h_2 &= 3 \\ x_1^+,\ x_1^-,\ x_2,\ x_3,\ h_1,\ h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que la matriz de restricciones no contiene una identidad, de manera que no se puede extraer en forma obvia factible B.

c) Considérense las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq \text{-3} \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 7 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Puesto que el lado derecho de la primera restricción es negativo, la primera desigualdad se multiplica por -1. Introduciendo las variables de holgura h_1 y h_2, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 2x_3 - h_1 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + h_2 &= 7 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ h_1,\ h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

De nuevo, obsérvese que esta matriz de restricciones no contiene una identidad.

<u>Variables artificiales</u>:

Después de manipular las restricciones e introducir variables de holgura, supóngase que las restricciones se han puesto en la forma $Ax = b, \quad x \geq 0$, en donde A es una matriz $m \times n$, y $b \geq 0$ es un m-vector. Supóngase, además, que A no contiene una submatriz identidad (si A tien una submatriz identidad, entonces se tiene una solución básica factible inicial obvia). En este caso, se recurrirá a variables artificiales para obtener una solución factible básica inicial, y después, se usará el método simplex para eliminar estas variables artificiales.

Por ejemplo, supóngase que se cambian las restricciones añadiendo un vector artificial s_a, lo cual nos da el sistema $Ax + s_a = b, \quad s_a \geq 0$. Nótese que, por construcción, ahora se tiene una matriz identidad correspondiente al vector artificial. Esto da de inmediato una solución básica factible del nuevo sistema, a saber, $s_a = b$ y $x = 0$. Aunque ahora se tiene una solución básica factible inicial y se puede aplicar el método simplex, nótese que, de hecho, se ha cambiado el problema. Para regresar al problema original, debe obligarse a que estas variables artificiales se hagan cero, pues $Ax = b$ si, y sólo si, $Ax + s_a = b$ con $s_a = 0$. En otras palabras, las variables artificiales son sólo una herramienta que se usa para empezar el método simplex, pero debe garantizarse que estas variables eventualmente se harán cero.

En este momento, conviene notar la diferencia entre variables de holgura y variables artificiales. Una variable de holgura se introduce para poner el problema en forma de igualdad y tal variable bien puede ser positiva, lo que significa que la desigualdad en este caso es una desigualdad estricta. las variables artificiales no son variables legítimas, pero se introducen para facilitar el inicio del método simplex. Estas variables artificiales, no obstante, posteriormente deben hacerse cero para lograr factibilidad en el problema original.

Ejemplo 1.3. Considérense las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ -3x_1 + 4x_2 &\geq 5 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Introduciendo las variables de holgura $h_1,\ h_2,\ h_3$, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - h_1 &= 4 \\ -3x_1 + 4x_2 - h_2 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + h_3 &= 6 \\ x_1,\ x_2,\ h_1,\ h_2,\ h_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Esta matriz de restricciones no tiene una submatriz identidad. Se puede introducir tres variables artificiales para obtener una solución básica factible inicial. Sin embargo, nótese que h_3 aparece sólo en el último renglón y su coeficiente es 1. Por lo tanto solo es necesario introducir dos variables artificiales s_1 y s_2, lo cual lleva al siguiente sistema:

$$\begin{array}{cccccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\text{Variables legítimas}}} & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\text{Variables artificiales}}} & \\ x_1 & +2x_2 & \text{-}h_3 & & +s_1 & & = 4 \\ -3x_1 & +4x_2 & & -h_4 & & +s_2 & = 5 \\ 2x_1 & +x_2 & & & +h_5 & & =6 \\ x_1, & x_2, & h_1, & h_2, & s_1, & s_2 & \geq 0 \end{array}$$

Ahora, se tiene una solución básica factible inicial obvia del nuevo sistema, a saber, $h_3 = 6, \quad s_1 = 4, \quad s_2 = 5$. Las variables restantes no son básicas, y tienen valor cero. Puntualizando, es claro que se desea que, a la larga, las variables artificiales s_1 y s_2 se hagan cero.

1.3 Software WinQsb

WinQsb es una aplicación versátil que permite la solución de una gran cantidad de problemas: administrativos, de producción, de recurso humano dirección de proyectos, etc.

Debido a su facilidad y potencia de manejo, se convierte en una herramienta indispensable para el estudiante de pregrado o postgrado que participa en materias relacionadas como la investigación de operaciones, los métodos de trabajo, planeación de la producción, evaluación de proyectos, control de calidad, simulación, estadística, entre otras.

El acceso al **WinQsb** se puede hacer a través del botón INICIO del sistema operativo WINDOWS, en el menú PROGRAMAS en la carpeta **WinQsb**.

WinQsb es una herramienta poderosa para el manejo de métodos cuantitativos, el cual está conformado por 19 módulos:

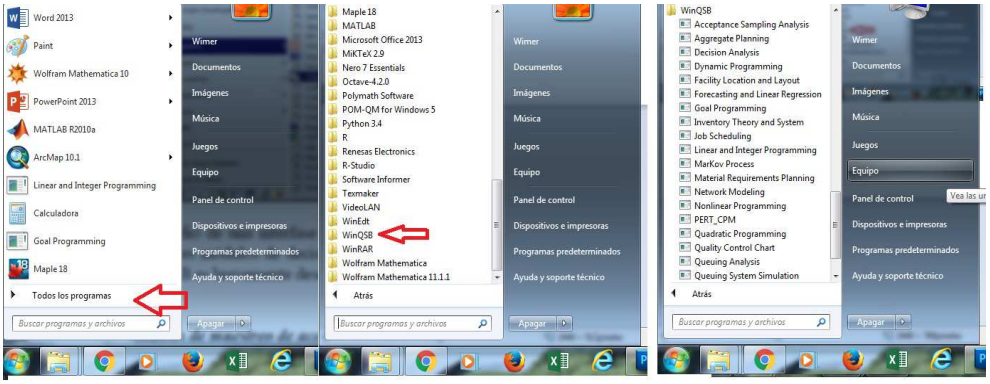


Figura 1.1: *Acceso a WinQsb en menú inicio de Windows*

1. Análisis de muestreo de aceptación (Acceptance Sampling Analysis)
2. Planeación agregada (Aggregate Planning)
3. Análisis de decisiones (Decision Analysis)

4. Programación dinámica (Dynamic Programming)
5. Diseño y localización de plantas (Facility Location and Layout)
6. Pronósticos (Forecasting)
7. Programación por objetivos (Goal Programming)
8. Teoría y sistemas de inventarios (Inventory Theory and System)
9. Programación de jornadas de trabajo (Job Scheduling)
10. Programación lineal y entera (Linear and integer programming)
11. Procesos de Markov (Markov Procces)
12. Planeación de Requerimientos de Materiales (Material Requirements Planning)
13. Programación de redes (Network Modeling)
14. Programación no lineal (Nonlinear Programming)
15. PERT y CPM (PERT_CPM)
16. Programación cuadrática (Quadratic Programming)
17. Cartas de control de calidad (Quality Control Chart)
18. Sistemas de cola (Queuing Analysis)
19. Simulación de sistemas de cola (Queuing Analysis Simulation)

WinQSB utiliza los mecanismos típicos de la interface de Windows, es decir, ventanas, menús desplegables, barras de herramientas, etc. Por lo tanto el manejo del programa es similar a cualquier otro que utilice el entorno Windows.

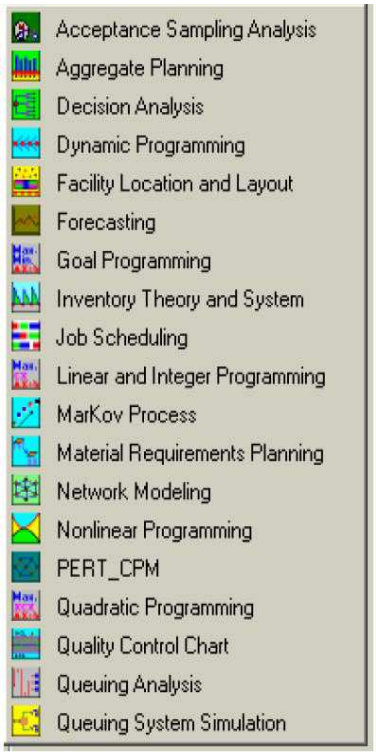


Figura 1.2: *19 módulos de WinQsb*

Una vez seleccionado el módulo con el cual se desee trabajar, aparecerá una ventana cuyas características iníciales serán similares para todos los módulos del WinQSB. Al acceder a cualquiera de los módulos se abre una ventana en la que debemos elegir entre crear un nuevo problema (File > New Problem) o leer uno ya creado (File > Load Problem). Las extensiones de los ficheros con los modelos las pone el programa por defecto, por lo tanto solamente debemos preocuparnos del nombre, que no deberá tener más de 8 caracteres.

Todos los módulos del programa tienen en común los siguientes menús desplegables:

- **File:** incluye las opciones típicas de este tipo de menús en Windows, es decir, permite crear y salvar ficheros con nuevos problemas, leer otros ya existentes o imprimirlos.

- **Edit:** incluye las utilidades típicas para editar problemas, copiar, pegar, cortar o deshacer cambios. También permite cambiar los nombres de los problemas, las

variables, y las restricciones. Facilita la eliminación o adición de variables y/o restricciones, y permite cambiar el sentido de la optimización.

- **Format:** incluye las opciones necesarias para cambiar la apariencia de las ventanas, colores, fuentes, alineación, anchura de celdas, etc.
- **Solve and Analyze:** esta opción incluye al menos dos comandos, uno para resolver el problema y otro para resolverlo siguiendo los pasos del algoritmo.
- **Results:** incluye las opciones para ver las soluciones del problema y realizar si procede distintos análisis de la misma.
- **Utilities:** este menú permite acceder a una calculadora, a un reloj y a un editor de gráficas sencillas.
- **Window:** permite navegar por las distintas ventanas que van apareciendo al operar con el programa.
- **WinQSB:** incluye las opciones necesarias para acceder a otro módulo del programa.
- **Help:** permite acceder a la ayuda on-line sobre la utilización del programa o las técnicas utilizadas para resolver los distintos modelos. Proporciona información sobre cada una de las ventanas en la que nos encontremos.

Observación 1.1. Para nuestra investigación utilizaremos 2 módulos que son:

1. Programación lineal y entera (Linear and integer programming).
2. Programación por objetivos (Goal Programming).

1.3.1 Programación lineal y entera (Linear and integer programming)

Una vez seleccionado el módulo con el cual se desee trabajar, aparecerá una ventana cuyas características iniciales serán iguales para todos los módulos del **WinQsb**.

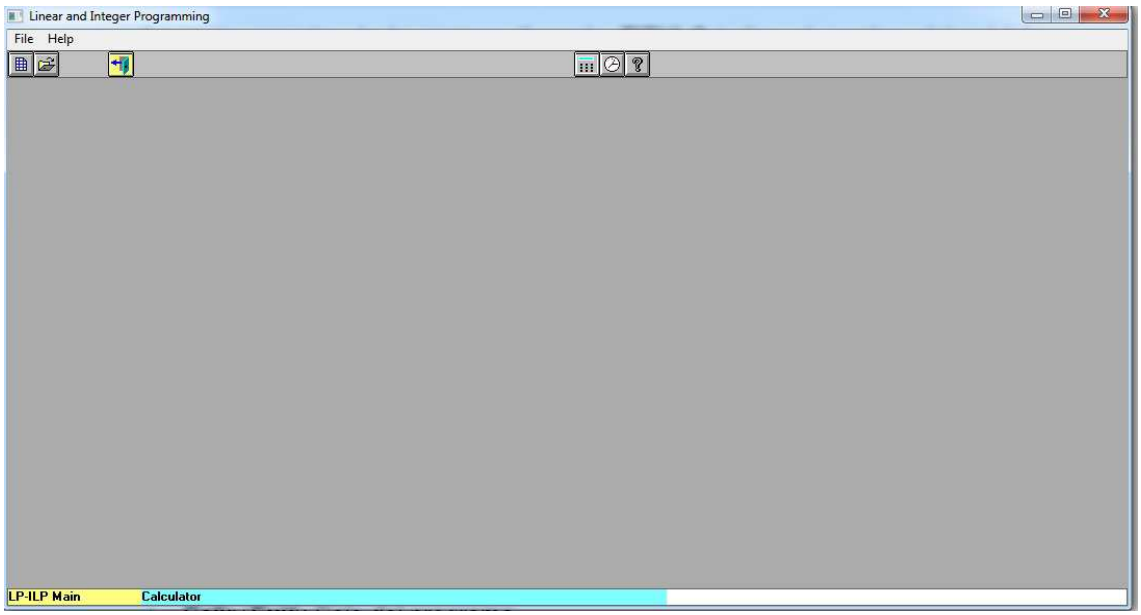
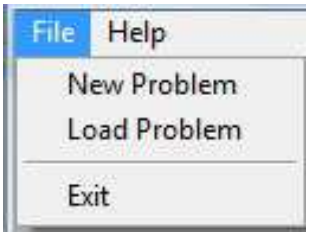


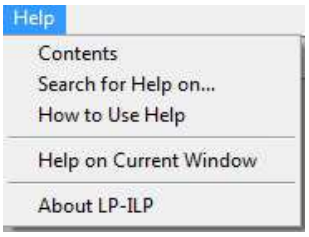
Figura 1.3: *Interfaz de Linear and integer programming*

Encontramos los menú Archivo (File) y Ayuda (Help). El menú archivo comprende las siguientes opciones:



- **Nuevo problema (New Problem):** Permite introducir un nuevo problema.
- **Abrir Problema (Load Problem):** Abre un problema que se ha guardado con anterioridad.
- **Salir (Exit):** Sale del programa.

El menú **Ayuda (Help)** lo conforman:



- **Contenido (Contents):** Contenido completo de la ayuda sobre el módulo seleccionado.
- **Buscar ayuda en... (Search for Help on...):** Búsqueda de ayuda mediante palabras claves.
- **Como usar la ayuda (How to Use Help):** Indicaciones (puede ser en español) de como se utiliza la ayuda para sacarle el máximo provecho.
- **Ayuda sobre la ventana actual (Help on Current Windows):** Interesante opción que muestra la ayuda solo sobre los elementos que aparecen actualmente en la ventana.
- **Acerca de... (About LP-ILP):** Muestra datos sobre la creación del programa e información sobre la licencia.

El programa también cuenta con una barra de herramientas que ayuda de forma significativa la selección de las opciones más usadas.

El primer botón permite la creación de un nuevo problema, el segundo abre un problema existente, mientras que el tercero, permite salir del programa.

En el centro de la venta se encuentra un espacio vacío el cual llamaremos ZONA DE TRABAJO, donde se procederá a alimentar con información al programa.

Creando un nuevo problema de programación lineal

La opción **Nuevo Problema (New Problem)** genera una plantilla en el cual se introducirán las características de nuestro problema:

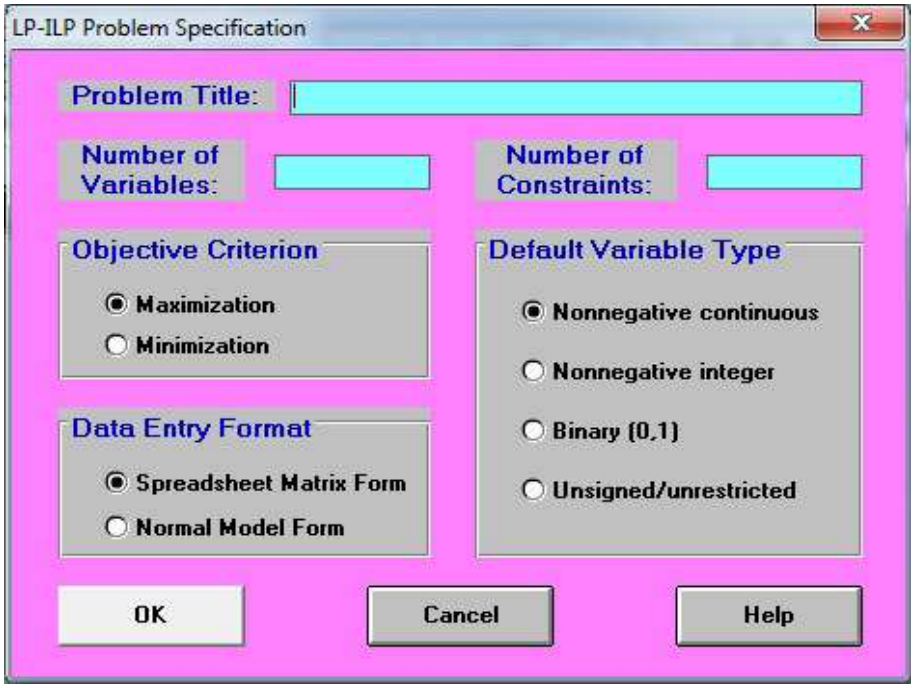


Figura 1.4: *Interfaz donde se ingresan los datos del problema*

A continuación se describirán cada una de las casillas de esta ventana:

- **Título del problema (Problem Title):** Se escribe el título con que identificamos el problema.

- **Número de variables (Number of Variables):** Se escribe la cantidad de variables con que cuenta el sistema en el modelo original.

- **Número de restricciones (Number of Constraints):** Se anotan la cantidad de restricciones con que cuenta el modelo (no se debe contar la restricción de no negatividad).

- **Objetivo (Objective Criterion):** Los problemas de programación lineal y entera se clasifican en dos: problemas de Maximización (Maximization) y Minimización (Minimization).

- **Formato de entrada de datos (Data Entry Format):** Permite elegir entre dos plantillas distintas para introducir los datos del modelo. La primera alternativa se asemeja a una hoja de calcula, mientras que la segunda, es una plantilla diseñada especialmente para este fin.

- **Tipo de variable (Default Variable Type):** En esta parte se indica las características del modelo:

  - **Continuas no negativas (Nonnegative continuous):** Indica que el modelo lo componen variables continuas no negativas (iguales o mayores a cero).
  - **Enteras no negativas (Nonnegative Integer):** Variables enteras no negativas.
  - **Binarias (Binary):** Variables cuyo valor solo serán 0 o 1.
  - **Sin asignar / Irrestrictas (Unsigned/unrestricted):** Variables irrestrictas.

Utilizando WinQsb

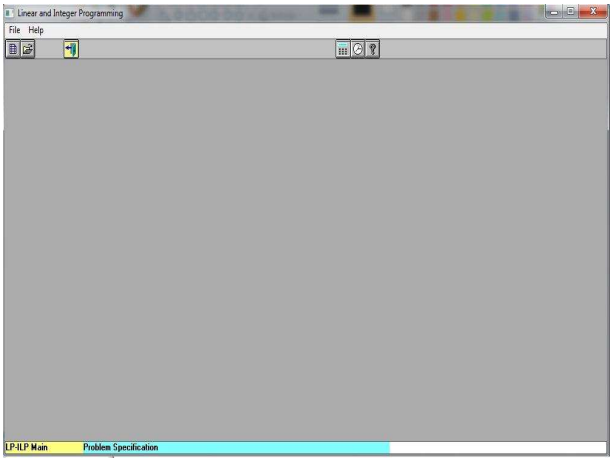
Ejemplo 1.4.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 \\ \text{Sujeta a} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución.

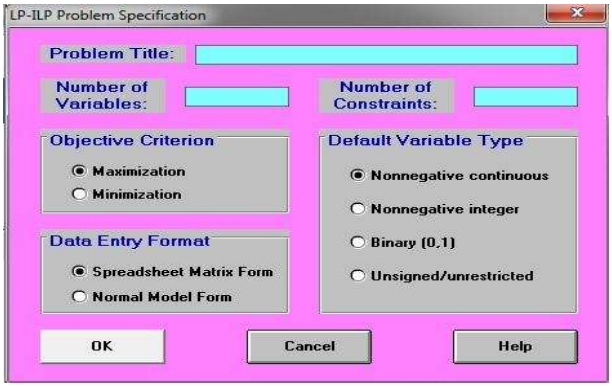
Paso 1:

Seleccionar el paquete **Linear and Integer Programming.**



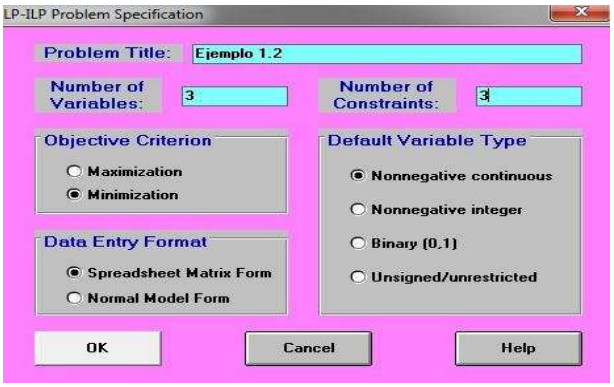
Paso 2:

Click en **File, New Problem**



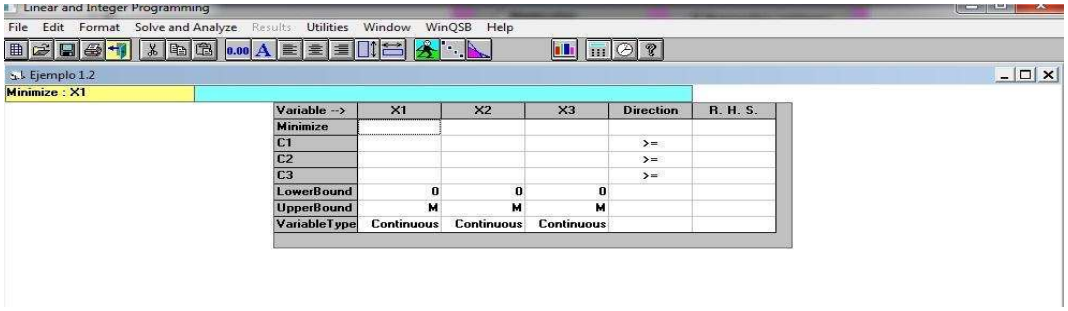
Paso 3:

Llenar el cuadro anterior como se sigue y dar **OK**



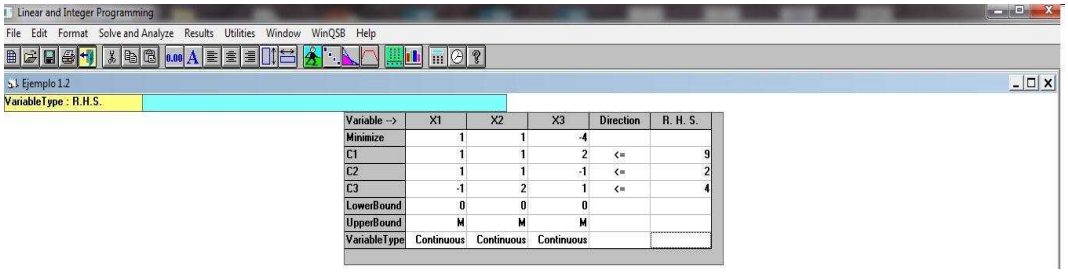
Paso 4:

Se abre la siguiente ventana



Paso 5:

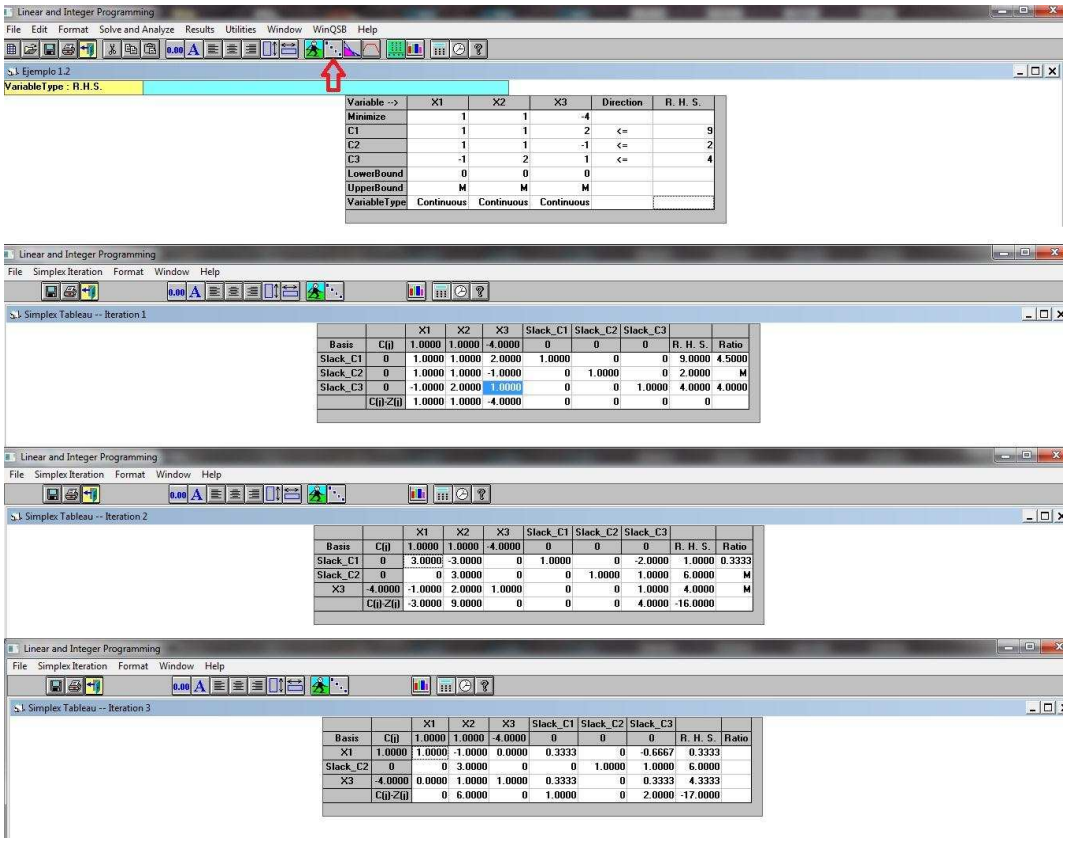
Ingresar los datos del problema



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Minimize	1	1	-4		
C1	1	1	2	<=	9
C2	1	1	-1	<=	2
C3	-1	2	1	<=	4
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

Paso 6:

Iterar hasta obtener el resultado final



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Minimize	1	1	-4		
C1	1	1	2	<=	9
C2	1	1	-1	<=	2
C3	-1	2	1	<=	4
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

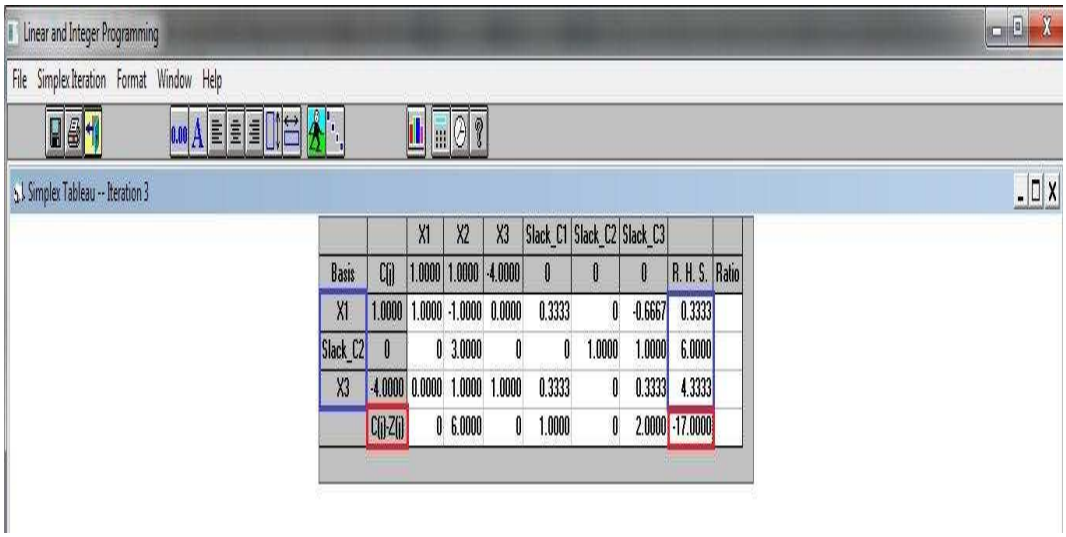
		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	1.0000	1.0000	-4.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	0	0	9.0000	4.5000
Slack_C2	0	1.0000	1.0000	-1.0000	0	1.0000	0	2.0000	M
Slack_C3	0	-1.0000	2.0000	1.0000	0	0	1.0000	4.0000	4.0000
	C(j)-Z(j)	1.0000	1.0000	-4.0000	0	0	0	0	

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	1.0000	1.0000	-4.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	3.0000	-3.0000	0	1.0000	0	-2.0000	1.0000	0.3333
Slack_C2	0	0	3.0000	0	0	1.0000	1.0000	6.0000	M
X3	-4.0000	-1.0000	2.0000	1.0000	0	0	1.0000	4.0000	M
	C(j)-Z(j)	-3.0000	9.0000	0	0	0	4.0000	-16.0000	

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	1.0000	1.0000	-4.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X1	1.0000	1.0000	-1.0000	0.0000	0.3333	0	-0.6667	0.3333	
Slack_C2	0	0	3.0000	0	0	1.0000	1.0000	6.0000	
X3	-4.0000	0.0000	1.0000	1.0000	0.3333	0	0.3333	4.3333	
	C(j)-Z(j)	0	6.0000	0	1.0000	0	2.0000	-17.0000	

Paso 7:

Analizando el resultado final



		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	1.0000	1.0000	-4.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X1	1.0000	1.0000	-1.0000	0.0000	0.3333	0	-0.6667	0.3333	
Slack_C2	0	0	3.0000	0	0	1.0000	1.0000	6.0000	
X3	-4.0000	0.0000	1.0000	1.0000	0.3333	0	0.3333	4.3333	
	C(j)-Z(j)	0	6.0000	0	1.0000	0	2.0000	-17.0000	

Luego la solución óptima esta dado por:

$$
\begin{aligned}
z &= \text{-}17.0000 \\
x_1 &= 0.3333 \\
x_2 &= 0.0000 \\
x_3 &= 4.3333 \\
Slack\_C1 &= 0.0000 \\
Slack\_C2 &= 6.0000 \\
Slack\_C3 &= 0.0000
\end{aligned}
$$

Donde la nueva base óptima es:

$$
B = [a_1 \quad a_5 \quad a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad c_B = [1 \quad 0 \quad -4]
$$

De la tabla óptima se observa las columnas $Slack\_C1$, $Slack\_C2$ y $Slack\_C3$

$$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0 & -0.6667 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.3333 & 0 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

Capítulo 2:

Dualidad

2.1 Formulación del problema dual

Definición 2.1. Un problema de programación lineal se dice que está en forma simétrica si toda las variables están restringidas a ser no negativas y todas las restricciones son de tipo "$\leq$.en el caso de máximo y de tipo "$\geq$.en el caso de mínimo, es decir, toman la forma:

$$\begin{array}{rr} \text{Minimizar} & Z = cx \\ \text{Sujeta a} & Ax \geq \text{b} \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \text{Maximizar} & Z = cx \\ \text{Sujeta a} & Ax \leq \text{b} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Definición 2.2. Minimizar (Forma canónica de dualidad):
Supóngase que el programa lineal primal está dado en forma:

$$\begin{array}{rr} \text{P: Minimizar} & Z = cx \\ \text{Sujeta a} & Ax \geq \text{b} \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \textbf{su dual es:} \quad \begin{array}{rr} \text{D: Maximizar} & W = b'y \\ \text{Sujeta a} & A'y \leq c' \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Donde:

c= Vector columna de "n" componentes.

b= Vector columna de "m" componentes.

A= Matriz de orden $m \times n$.

x= Vector de "n" componentes cuyos valores deben ser hallados para maximizar la función Z sujeto a las restricciones dadas.

c'= Transpuesta de c.

b'= Transpuesta de b.

A'= Transpuesta de A.

y= Es un vector de "m" componentes cuyos valores deben ser hallados para minimizar la función W sujeta a las restricciones dadas.

<u>Matricialmente</u>:

$$P : \text{mín } \ Z = [c_1 \ c_2 \cdots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$D : \text{máx } \ W = [b_1 \ b_2 \cdots b_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0$$

Nótese que existe exactamente una variable dual por cada restricción primal, y exactamente una restricción dual por cada variable primal.

Ejemplo 2.1. Considérese el siguiente programa lineal y su dual:

$$\begin{array}{lll} \text{P: Minimizar} & Z = 6x_1 + 8x_2 & \\ \text{Sujeta a} & 3x_1 + x_2 & \geq 4 \\ & 5x_1 + 2x_2 & \geq 7 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\begin{array}{lll} \text{D: Maximizar} & W = 4y_1 + 7y_2 & \\ \text{Sujeta a} & 3y_1 + 5y_2 & \leq 6 \\ & y_1 + 2y_2 & \leq 8 \\ & y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}$$

Definición 2.3. Maximizar (Forma canónica de dualidad):

Supóngase que el programa lineal primal está dado en forma:

$$\begin{array}{lll} \text{P: Maximizar} & Z = cx & \\ \text{Sujeta a} & Ax \leq \text{b} & \\ & x \geq 0 & \end{array} \quad \Rightarrow \textbf{su dual es:} \quad \begin{array}{lll} \text{D: Minimizar} & W = b'y & \\ \text{Sujeta a} & A'y \geq c' & \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

<u>Matricialmente</u>:

$$P: \text{máx } \ Z = [c_1 \ c_2 \cdots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$D: \text{mín } \ W = [b_1 \ b_2 \cdots b_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0$$

Definición 2.4. Forma estándar de dualidad

Supóngase que el programa lineal primal está dado en la forma:

$$\begin{array}{lll} \text{P:} & \text{Minimizar} & Z = cx \\ & \text{Sujeta a} & Ax = \text{b} \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\begin{array}{lll} \text{D:} & \text{Maximizar} & W = b'y \\ & \text{Sujeta a} & A'y \leq c' \\ & & y \quad \text{no restringida} \end{array}$$

Ejemplo 2.2. Considérese el siguiente programa lineal y su dual:

$$\begin{array}{lll} \text{P:} & \text{Minimizar} & Z = 6x_1 + 8x_2 \\ & \text{Sujeta a} & 3x_1 + x_2 - s_1 = 4 \\ & & 5x_1 + 2x_2 - s_2 = 7 \\ & & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

Entonces su dual es:

$$\begin{array}{lll} \text{D:} & \text{Maximizar} & W = 4y_1 + 7y_2 \\ & \text{Sujeta a} & 3y_1 + 5y_2 \leq 6 \\ & & y_1 + 2y_2 \leq 8 \\ & & -y_1 \leq 0 \\ & & -y_2 \leq 0 \\ & & y_1, y_2 \quad \text{no restringidas} \end{array}$$

Proposición 2.1. *Se cumplen las siguientes reglas para la construcción de problemas duales:*

i) El problema

$$\begin{array}{lll} P\text{: mín} & Z = cx & \\ s.a & Ax \geq b & \\ & x \geq 0 & \end{array} \quad \textbf{\textit{se dualiza en:}} \quad \begin{array}{ll} D\text{: máx} & W = b'y \\ \text{Sujeta a} & A'y \leq c' \\ & y \geq 0 \end{array}$$

En consecuencia el problema dual del problema dual es el problema primal.

ii) El problema

$$\begin{array}{rrcrr} P\text{: máx} & Z = cx & & D\text{: mín} & W = b'y \\ s.a & Ax \geq b & \textbf{se dualiza en:} & Sujeta\ a & A'y \geq c' \\ & x \geq 0 & & & y \leq 0 \end{array}$$

iii) El problema

$$\begin{array}{rrcrr} P\text{: máx} & Z = cx & & D\text{: mín} & W = b'y \\ s.a & Ax \leq b & \textbf{se dualiza en:} & Sujeta\ a & A'y \leq c' \\ & x \leq 0 & & & y \geq 0 \end{array}$$

Demostración.

i) Para que sea un problema de máximo con restricciones de tipo " $\leq$ " y con variables no negativas, para ello basta con cambiar de signo la función objetivo y con multiplicar por -1 cada una de las restricciones del problema, es decir,

$$\begin{array}{rrcrr} \text{mín} & Z = cx & & \text{máx} & (-Z) = -cx \\ \text{s.a} & Ax \geq \text{b} & \Leftrightarrow & \text{Sujeta a} & -A'y \leq -b \\ & x \geq 0 & & & x \geq 0 \end{array}$$

Este problema ya se ajusta a la definición sobre dualidad dada inicialmente, y su dual es

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & W = -b'y & \\ \text{s.a:} & -A'y & \geq -c' \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

que de una manera directa queda

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & W = b'y & \\ \text{s.a:} & A'y & \leq c' \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

ii) Para que sea un problema de mínimo con restricciones de tipo " $\geq$ " y con variables negativas, para ello basta con cambiar de signo la función objetivo y con multiplicar por -1 cada una de las restricciones del problema, es decir,

$$\begin{array}{rrcrr} \text{máx} & Z = cx & & \text{mín} & (-Z) = -cx \\ \text{s.a} & Ax \leq \text{b} & \Leftrightarrow & \text{Sujeta a} & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 & & & x \geq 0 \end{array}$$

Este problema ya se ajusta a la definición sobre dualidad dada inicialmente, y su dual es

$$\begin{array}{rrl} \text{máx} & W = -b'y & \\ \text{s.a:} & -A'y & \geq -c' \\ & y & \leq 0 \end{array}$$

que de una manera directa queda

$$\begin{array}{rrl} \text{mín} & W = b'y & \\ \text{s.a:} & A'y & \geq c' \\ & y & \leq 0 \end{array}$$

iii) Para que sea un problema de mínimo con restricciones de tipo " $\leq$ " y con variables no negativas, para ello basta con cambiar de signo la función objetivo y con multiplicar por -1 cada una de las restricciones del problema, es decir,

$$\begin{array}{rrcrr} \text{máx} & Z = cx & & \text{mín} & (-Z) = -cx \\ \text{s.a} & Ax \leq \text{b} & \Leftrightarrow & \text{Sujeta a} & -Ax \leq -b \\ & x \leq 0 & & & x \leq 0 \end{array}$$

Este problema de $i)$ se obtiene su dual de manera directa queda

$$\begin{array}{rrl} \text{mín} & W = b'y & \\ \text{s.a:} & A'y & \leq c' \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

$\square$

Formas mixtas de dualidad

Muchos programas lineales contienen algunas restricciones del tipo "menor o igual que", algunas del tipo "mayor o igual quez algunas del tipo "igual a". Asimismo, las variables pueden ser "≥ 0", "≤ 0", o "no restringida".

Considérese el siguiente programa lineal.

$$\begin{array}{llrcl} \text{P:} & \text{mín} & Z = cx & & \\ & \text{s.a:} & A_1x & \geq & b_1 \\ & & A_2x & = & b_2 \\ & & A_3x & \leq & b_3 \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Convirtiendo este problema al formato estándar, se obtiene

$$\begin{array}{llrcl} \text{P:} & \text{mín} & Z = cx & & \\ & \text{s.a:} & A_1x - s_1 & = & b_1 \\ & & A_2x & = & b_2 \\ & & A_3x + s_2 & = & b_3 \\ & & x, s_1, s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

El dual de este problema es:

$$\begin{array}{llrcl} \text{D:} & \text{máx} & W = y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 & & \\ & \text{s.a:} & A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 & \leq & c' \\ & & -y_1 & \leq & 0 \\ & & y_3 & \leq & 0 \\ & & y_1, y_2, y_3 \text{ no restringidas} & & \end{array}$$

Para escribir el dual de un problema general, podemos escribir este en forma canónica o estándar y aplicar una de las definiciones anteriores. Otra posibilidad es formular el dual utilizando la siguiente tabla.

Tabla 2.1: Relaciones entre los problemas primal y dual.

	Problema de minimización	Problema de maximización	
VARIABLES	≥ 0 ≤ 0 no restringidas	$\leq$ $\geq$ $=$	RESTRICCIONES
RESTRICCIONES	$\geq$ $\leq$ $=$	≥ 0 ≤ 0 no restringidas	VARIABLES

La ventaja de esta última tabla es que se puede leer de izquierda a derecha o viceversa, según el problema primal sea de maximización o minimización respectivamente. Además en el problema primal pueden darse diferentes combinaciones en cuanto al sentido de sus desigualdades o el signo de sus variables.

<u>Ejemplos de la tabla 2.1:</u>

Ejemplo 2.3.

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{P:} & \text{mín} & Z = -2x_1 + 13x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + 5x_6 & & \\
& \text{s.a:} & x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 + x_6 & = & 16 \\
& & x_1 + 7x_4 - 2x_5 + 3x_6 & \geq & \text{-1} \\
& & 5x_2 + 7x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 & \leq & 5 \\
& & x_1, x_2, x_3 \geq 0;\ x_4 \leq 0 & \text{y} & x_5, x_6 \text{ no restringidas}
\end{array}
$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{D:} & \text{máx} & W = 16y_1 - 20y_2 + 5y_3 & & \\
& \text{s.a:} & y_1 + y_2 & \leq & \text{-2} \\
& & -y_1 + 5y_3 & \leq & 13 \\
& & 7y_3 & \leq & 3 \\
& & 4y_1 + 7y_2 - y_3 & \geq & \text{-2} \\
& & -y_1 - 2y_2 + 2y_3 & = & 1 \\
& & y_1 + 3y_2 - y_3 & = & 5 \\
& & y_1 \textit{ no restringida},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0 & &
\end{array}
$$

Ejemplo 2.4.

$$\begin{array}{lll} \text{P:} & \text{máx} & Z = -5x_1 + 2x_2 \\ & \text{s.a:} & -x_1 + x_2 \leq \text{-3} \\ & & 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\begin{array}{lll} \text{D:} & \text{mín} & W = -3y_1 + 5y_2 \\ & \text{s.a:} & -y_1 + 2y_2 \geq \text{-5} \\ & & y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ & & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Ejemplo 2.5.

$$\begin{array}{lll} \text{P:} & \text{mín} & Z = 6x_1 + 3x_2 \\ & \text{s.a:} & 6x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2 \\ & & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\begin{array}{lll} \text{D:} & \text{mín} & W = 2y_1 + 5y_2 \\ & \text{s.a:} & 6y_1 + 5y_2 \leq 6 \\ & & -3y_1 + 4y_2 \leq 3 \\ & & y_1 + y_2 \leq 0 \\ & & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Ejemplo 2.6.

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & Z = 5x_1 + 6x_2 & \\ \text{s.a:} & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & -x_1 + 5x_2 \geq 3 \\ & x_1 \; irrestricto, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \text{máx} & Z = 5x_1 + 6x_2 & \\ \text{s.a:} & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1 - 5x_2 \leq \text{-3} \\ & x_1 \; irrestricto, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Hacemos esto para que sea simétrico, es decir cuando es máximo las restricciones deben ser “ $\leq$ ”.

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\begin{array}{llrcl} \text{D:} & \text{mín} & W = 5y_1 - 3y_2 & & \\ & \text{s.a:} & y_1 + y_2 & = & 5 \\ & & 2y_1 - 5y_2 & \geq & 6 \\ & & y_1 \; irrestricto, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ejemplo 2.7.

$$\begin{array}{llrcl} \text{P:} & \text{máx} & Z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & & \\ & \text{s.a:} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ & & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 10 \\ & & x_2 \geq 0, x_1, x_3 \text{irrestricto} & & \end{array}$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\begin{array}{llrcl} \text{D:} & \text{mín} & W = 2y_1 + 10y_2 & & \\ & \text{s.a:} & 3y_1 + y_2 & = & 3 \\ & & 4y_1 + 2y_2 & \geq & 6 \\ & & y_1 + 3y_2 & = & 2 \\ & & y_1 \geq 0, y_2 \text{ irrestricta} & & \end{array}$$

2.2 Relaciones Primal-Dual

Teorema 2.1. ***(Débil de dualidad)***.

Si $\overline{x}$ es una solución factible para el problema primal canónico y $\overline{y}$ es una solución factible para el problema dual, entonces $Z = c\overline{x} \leq \overline{y}b = W$

Demostración.

Por ser $\overline{x}$ solución factible del primal se tiene $A\overline{x} \leq b$, y para $\overline{y}$ solución factible se cumple $A'\overline{y} \geq c'$.

Multiplicando la primera restricción por $\overline{y}'$ y la segunda por $\overline{x}'$ se obtiene $\overline{y}'A\overline{x} \leq \overline{y}'b$ y $\overline{x}'A'\overline{y} \geq \overline{x}'c'$.

Además se tiene $(\overline{x}'A'\overline{y})' = \overline{y}'A\overline{x} \geq (\overline{x}'c')' = c\overline{x}$, así $W = \overline{y}'b \geq \overline{y}'A\overline{x} \geq c\overline{x} = Z$. □

Corolario 2.1. *Sean $\overline{x}$ y $\overline{y}$ soluciones factibles de los problemas Primal y Dual, respectivamente. Si $c\overline{x} = b'\overline{y}$, entonces $\overline{x}$ y $\overline{y}$ son soluciones óptimas de los problemas Primal y Dual, respectivamente.*

Demostración.
Supóngase que existe $\overline{x}'$ solución óptima del primal tal que $c\overline{x}' > c\overline{x} = b'\,\overline{y}$ esto contradice el teorema de dualidad. De la misma forma para $\overline{y}$, así $\overline{x}$ y $\overline{y}$ son soluciones óptimas de los problemas Primal y Dual, respectivamente. □

Antes de pasar al siguiente teorema recordemos que existe una solución factible asociada a una base, por lo que se puede escribir el programa lineal como sigue, donde x_I y x_J son las variables básicas y no básicas respectivamente:

$$\begin{array}{llrcl} \text{P:} & \text{máx} & Z = c^I x_I + c^J x_J & & \\ & \text{s.a:} & A_1 x_1 + A_J x_J & = & \text{b} \\ & & x_I, x_J & \geq & 0 \end{array} \tag{2.1}$$

Multiplicando A_I^{-1} por la izquierda en la restricción obtenemos

$$x_I + A_I^{-1} A_J x_j = A_I^{-1} b \tag{2.2}$$

Entonces la solución básica factible queda determinada como sigue

$$\overline{x}_I = A_I^{-1} b$$

Multiplicando (2.2) por c^I se obtiene

$$c^I x_I + c^I A_I^{-1} A_J x_j = c^I A_I^{-1} b$$

y restando de la función objetivo en (2.1) la ecuación anterior queda

$$[c^I + c^I A_I^{-1} A_J] x_j = Z - c^I A_I^{-1} b$$

Además ya que $Z_0 = C^I A_I^{-1} b$ es la solución asociada a la base.
Entonces el programa lineal en forma explicita respecto a la base es:

$$[c^I + c^I A_I^{-1} A_J] x_j = Z - c^I A_I^{-1} b$$
$$\text{s.a: } x_1 + A_I^{-1} A_J x_J = A_I^{-1} b$$
$$x_I, x_J \geq 0$$

Y como para cada posible base existe una correspondencia forma explicita del problema entonces si x^* es solución óptima, el problema con dicha solución puede ser escrito de forma explicita.

Teorema 2.2. ***(Fuerte de dualidad)***
Si el problema primal tiene una solución factible y el correspondiente dual también tiene una solución factible entonces existen x^* solución factile óptima del problema primal, y y^* una solución óptima del problema dual que cumplen:

$$\text{máx } Z = cx^* = \text{mín } W = y^* b$$

Demostración.
Dado el problema Primal en su forma estándar

$$\begin{array}{llrcl} \text{P:} & \text{máx} & Z = cx & & \\ & \text{s.a:} & Ax + Uh & = & \text{b} \\ & & x, h & \geq & 0 \end{array}$$

y haciendo

$$c' = (c\ 0), \quad x' = \begin{pmatrix} x \\ h \end{pmatrix}, \quad B = (A\ U),$$

Obtenemos el problema equivalente

$$\begin{array}{llrcl} \text{P':} & \text{máx} & Z = c'x' & & \\ & \text{s.a:} & Bx' & = & \text{b} \\ & & x' & \geq & 0 \end{array}$$

Como por hipótesis el problema primal tiene una solución óptima finita, existe una solución óptima básica x^* de P asociada en una base I. Entonces se puede escribir P en

forma explicita respecto a dicha base como sigue:

$$\begin{array}{rrcl} \text{máx} & Z, & & \\ \text{s.a:} & 0x'_1 + [(c')^J - Z^J]x'_J & = & Z - Z_0 \\ & x'_1 + (B^I)^{-1}B^J x'_J & = & (B^I)^{-1}b \\ & x'_I,\ x'_J & \geq & 0 \end{array}$$

Donde $Z_0 = (c')^I(B^I)^{-1}b$ y $Z^J = (c')^I(B^I)^{-1}B^J$.

La solución óptima básica es $x^* = ((B^I)^{-1}b \;\; 0)$, es decir, $x^*_I = (B^I)^{-1}b$ y $x^*_J = 0$.

Se puede reescribir la función objetivo como sigue:

$$Z = Z_0 + 0x'_I + [(c')^J - Z^J]x'_J$$

$$Z = (c')^I(B^I)^{-1}b + [(c')^I - (c')^I(B^I)^{-1}B^I]x'_I + [(c')^J - (c')^I(B^I)^{-1}B^J]x'_J$$

Donde

$$(c')^I - (c')^I(B^I)^{-1}B^I \leq 0$$

$$(c')^J - (c')^I(B^I)^{-1}B^J \leq 0$$

La última desigualdad se da por ser $\overline{x}^*$ solución óptima. Al reescribir las desigualdades, se obtiene:

$$(c')^I \leq (c')^I(B^I)^{-1}B^I$$

$$(c')^J \leq (c')^I(B^I)^{-1}B^J$$

Que es equivalente a:

$$(c')^I(B^I)^{-1}(B^I \;\; B^J) \geq ((c')^I \;\; (c')^J)$$

pero $B = (B^I \;\; B^J)$ y $c' = ((c')^I \;\; (c')^J)$, además $B = (A \;\; U)$ y $c' = (c \;\; 0)$, así que la desigualdad queda:

$$(c')^I(B^I)^{-1}(A \;\; U) \geq (c \;\; 0)$$

O bien

$$(c')^I(B^I)^{-1}A \geq c$$

$$(c')^I(B^I)^{-1}U \geq 0$$

Aplicando la transpuesta se tiene:

$$A'[(c')^I(B^I)^{-1}]' \geq c'$$

$$U'[(c')^I(B^I)^{-1}]' \geq 0$$

Sea $\overline{y} = [(c')^I(B^I)^{-1}]'$, entonces $\overline{y}$ es solución factible del problema dual ya que las desigualdades anteriores son las restriciones del problema dual D.
Al evaluar en a función objetivo dual se obtiene

$$b'\overline{y} = b'(c^I(B^I)^{-1})' = (c^I(B^I)^{-1}b)' = (c^I x^*)' = c^I x^*,$$

ya que es un escalar, entonces $\overline{y}$ es óptimo para el dual y

$$b'\overline{y} = c^I x^*.$$

□

2.3 Teorema Fundamental de Dualidad

Teorema 2.3. ***(Fundamental de dualidad).***
Para los problemas primal y dual, una de las siguientes proposiciones se cumple:

1. *Ambos problemas tienen soluciones óptimas x^* y y^*, con $cx^* = y^*b$.*
2. *Uno de los problemas tiene valor objetivo no acotado, por lo que el otro problema debe ser no factible.*
3. *Ambos problemas son no factibles.*

Demostración.

1. Sean $\overline{x}$ y $\overline{y}$ soluciones factibles de los problemas primal y dual respectivamente. El teorema débil de dualidad establece $\overline{Z} = c\overline{x} \leq b'\overline{y} = \overline{W}$, entonces el algoritmo simplex garantiza que existe el óptimo para el primal y por el teorema (2.2) existe la solución óptima del dual tal que $Z^* = W^*$.

2. Por contradicción. Supóngase sin perdida de generalidad que $Z \longrightarrow \infty$ y que existe $\overline{y}$ solución factible del dual. Entonces, existe $\overline{x}$ tal que $b'\overline{y} \leq c\overline{x}$ lo que contradice el teorema débil de dualidad.

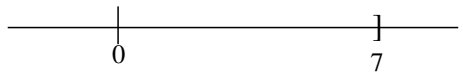
3. Esta posibilidad se muestra en el ejemplo (2.10) a continuación.

$\square$

A continuación se muestran ejemplos de los 3 casos.

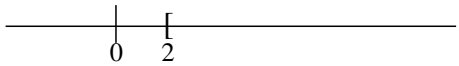
Ejemplo 2.8. Para el siguiente problema lineal ambos problemas tienen soluciones óptimas.

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & Z = 2x & & \\ \text{s.a:} & x & \leq & 7 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$



Se puede ver que la solución es $x = 7$, $Z_{\text{máx}} = 14$.
Su solución dual es:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & W = 7y & & \\ \text{s.a:} & y & \geq & 2 \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

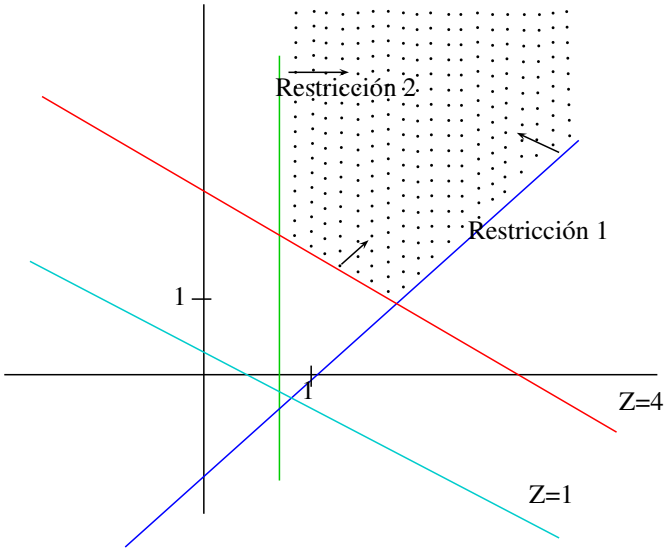


Cuya solución es $y = 2$, $W_{\text{mín}} = 14$

Ejemplo 2.9. EL siguiente problema lineal tiene valor objetivo no acotado, por lo que el dual es no factible.

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & Z = 2x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.a:} & 2x_1 - 3x_2 & \leq & 2 \\ & 3x_1 & \geq & 2 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

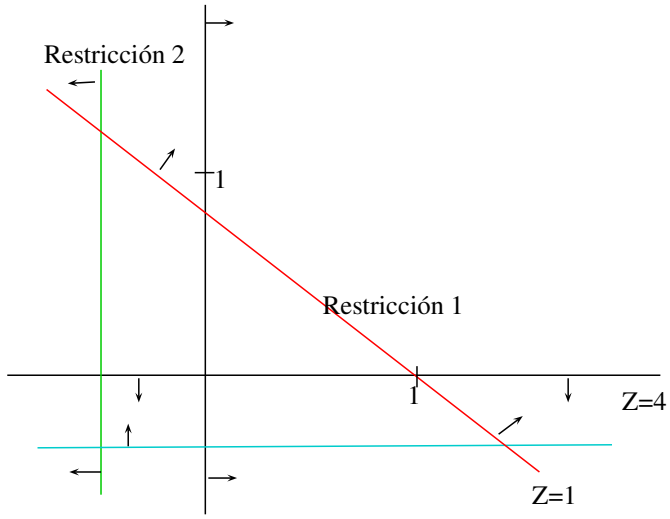
Gráficamente se ve que $Z \longrightarrow \infty$; la función objetivo no está acotada.



El dual de este programa lineal está dado por :

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & W = 2y_1 + 2y_2 & & \\ \text{s.a:} & 2y_1 + 3y_2 & \geq & 2 \\ & -3y_1 & \geq & 3 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0 & & \end{array}$$

Del gráfico se ve que no hay factibilidad para este problema.



Ejemplo 2.10. Dado el siguiente problema lineal

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 & & \\ \text{s.a:} & -x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq & 5 \\ & x_1 - x_2 - x_3 & \leq & \text{-3} \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Se observa que al cambiar la tercera restricción $x_1 - x_2 - x_3 \leq -3$ por su equivalente con el lado derecho no negativo $-x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$ la primera y tercera restricción implican la no factibilidad del problema.

La primera restricción indica:

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

y la tercera dice:

$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$$

entonces debería suceder:

$$3 \leq -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

Lo que es imposible por lo que no se tiene factibilidad en el primal.

Ahora, considérese el dual del problema anterior.

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{mín} & W = y_1 + 5y_2 - 3x_3 & & \\
\text{s.a:} & -y_1 + y_2 + y_3 & \geq & 2 \\
 & y_1 - y_2 - y_3 & \geq & \text{-1} \\
 & y_1 + 2y_2 - y_3 & \geq & 2 \\
 & y_1,\ y_2,\ y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Se ve que como en el primal, la primera restricción y la segunda implican:

$$2 \leq -y_2 + y_2 + y_3 \leq 1$$

Por lo que el dual tampoco es factible.

Los problemas primal y dual están tan estrechamente relacionados que al obtener la solución óptima de uno, se obtiene de inmediato mucha información de la solución óptima del otro.

2.4 Holguras complementarias

Para aplicar los siguientes teoremas, nuestro problema primal debe estar en forma estándar.

Teorema 2.4. ***(Débil de holguras complementarias).***
Una condición necesaria y suficiente para que un par de soluciones factibles de problemas lineales duales P y D sean óptimas es que:

$$y(Ax - b) = 0; \quad (c - yA)x = 0.$$

Que es equivalente a:

1. *Si una de las restricciones se satisface como desigualdad estricta, la variable correspondiente del dual es nula (i.e. si $Ax - b > 0$, entonces $y = 0$; si $c - yA > 0$, entonces $x = 0$).*

2. *Si una variable de uno de los problemas es positiva, la restricción correspondiente del dual se satisface como una ecuación (i.e. si $y > 0$, entonces $y = 0$; si $x > 0$, entonces $c - yA = 0$).*

Demostración.

Sean P y D en su forma estándar

$$\begin{array}{llrcl} \text{P:} & \text{máx} & Z = cx & & \\ & \text{s.a:} & Ax + h & = & \text{b} \\ & & x, h & \geq & 0 \end{array} \tag{2.3}$$

$$\begin{array}{llrcl} \text{D:} & \text{mín} & W = by' & & \\ & \text{s.a:} & y'A - k' & = & \text{c} \\ & & y, k & \geq & 0 \end{array} \tag{2.4}$$

Sean $(\overline{x}, \overline{h})$ y $(\overline{y}, \overline{k})$ soluciones factibles de (2.3) y (2.4) respectivamente.

Entonces

$$\overline{h} = b - A\overline{x},$$

$$\overline{k}' = \overline{y}'A - c$$

multiplicando por $\overline{y}'$ en la primera ecuación por la izquierda y $\overline{x}$ en la segunda por la derecha, queda:

$$\overline{y}'\overline{h} = \overline{y}'b - \overline{y}'A\overline{x},$$

$$\overline{k}'\overline{x} = \overline{y}'A\overline{x} - c\overline{x}$$

Sumando ambas ecuaciones resulta:

$$\overline{y}'\overline{h} + \overline{k}'\overline{x} = \overline{y}'b - c\overline{x}$$

Necesidad.

Si las soluciones en óptimas, $\overline{y}'b = c\overline{x}$, por lo que $\overline{y}'\overline{h} + \overline{k}'\overline{x} = 0$, pero $\overline{y}',\ \overline{h},\ \overline{k},\ \overline{x} \geq 0$, lo que implica $\overline{y}'\overline{h} = 0$ y $\overline{k}'\overline{x} = 0$.

1. Si uno de los problemas lineales se satisface como desigualdad, i.e.
   $\overline{k} > 0$ entonces $\overline{x} = 0$
   $\overline{h} > 0$ entonces $\overline{y} = 0$

2. Si una de las variables de unos de los problemas es positiva, i.e.
   $\overline{x} > 0$ entonces $\overline{k} = 0$
   $\overline{y}' > 0$ entonces $\overline{h} = 0$

Suficiencia.

Si se satisfacen las condiciones del teorema (incisos 1 y 2), $\overline{y}'\overline{h} = 0$ y $\overline{k}\overline{x} = 0$ por lo que $\overline{y}'b = c\overline{x}$ entonces por el corolario (2.1) $\overline{x}$ y $\overline{y}'$ son soluciones óptimas de P y D respectivamente. □

El teorema débil de holguras complementarias indica las posibilidades para las variables y restricciones primales y duales cuando se sabe que alguna variable es positiva o que alguna restricción se cumple con desigualdad estricta (osea, con holgura positiva). Sin embargo, no dice si es posible que simultáneamente sean cero tanto las variables como las holguras, de modo que en los productos $\overline{y}'\overline{h} = 0$ y $\overline{k}'\overline{x} = 0$ ambos factores sean nulos. El siguiente teorema muestra que eso no ocurre.

Teorema 2.5. ***(Fuerte de holguras complementarias).***
Si los problemas lineales duales tienen una solución factible, entonces existe una pareja de soluciones óptimas de P y D tales que

$$y' + (Ax - b) > 0 \quad y \quad (c - yA) + x' > 0.$$

que es equivalente a:

1. *Si una de las restricciones de uno de los problemas lineales es igualdad, entonces la variable correspondiente del otro problema es positiva (i.e. si $Ax - b = 0$, entonces $y > 0$, si $c - yA = 0$, entonces $x > 0$).*

2. *Si una variable de uno de los problemas es nula, entonces la restricción correspondiente del otro es desigualdad estricta (i.e. si $y = 0$, entonces $Ax - b > 0$, si $x = 0$, entonces $c - yA > 0$).*

Capítulo 3:

Análisis de Sensibilidad

En los modelos de programación lineal los coeficientes de la función objetivo, de las variables y de las restricciones se dan como datos de entrada o como parámetros fijos del modelo.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, alguno de los datos del problema no se conocen con exactitud y por lo tanto, se tienen que estimar lo mejor posible. En consecuencia es importante poder determinar la nueva solución óptima del problema conforme se dispone de otras estimaciones de algunos de los datos, sin la costosa tarea de resolver el problema desde su principio.

3.1 Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo (c_j)

Se va a encontrar los rangos de variación de estos coeficientes de la función objetivo, cuando toman individualmente cualquier valor dentro de este rango, la solución sigue siendo óptima.

Utilizaremos la siguiente tabla simplex representativa de una solución óptima.

Tabla 3.1: Solución óptima

	Z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
Z	1	$Z_1 - c_1$	$Z_2 - c_2$	$Z_3 - c_3$	$Z_4 - c_4$	$Z_5 - c_5$	
x_2	0	0	1	a'_{13}	a'_{14}	0	b'_1
x_1	0	1	0	a'_{23}	a'_{24}	0	b'_2
h_3	0	0	0	a'_{33}	a'_{34}	1	b'_3

Calculemos los valores de la fila Z según:

$$Z_1 - c_1 = (c_2\ c_5\ c_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - c_1$$

$$Z_2 - c_2 = (c_2\ c_1\ c_5) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - c_2$$

$$Z_3 - c_3 = (c_2\ c_1\ c_5) \begin{bmatrix} a'_{13} \\ a'_{23} \\ a'_{33} \end{bmatrix} - c_3$$

$$Z_4 - c_4 = (c_2\ c_1\ c_5) \begin{bmatrix} a'_{14} \\ a'_{24} \\ a'_{34} \end{bmatrix} - c_4$$

$$Z_5 - c_5 = (c_2\ c_1\ c_5) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - c_5$$

En consecuencia resulta:

$$Z_1 - c_1 = Z_2 - c_2 = Z_5 - c_5 = 0$$

Como suponemos que nuestro problema tiene como objetivo maximizar la tabla (3.1) correspondiente a la solución óptima deberán ser:

$$Z_3 - c_3 \geq 0 \tag{3.1}$$

$$Z_4 - c_4 \geq 0 \tag{3.2}$$

Si no existen soluciones alternativas tendremos de (3.1) y (3.2)

$$\begin{aligned} (a'_{13}c_2 + a'_{23}c_1 + a'_{33}c_5) - c_3 &> 0 \\ (a'_{14}c_2 + a'_{24}c_1 + a'_{34}c_5) - c_4 &> 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si deseamos saber si una variación de algún c_j puede alterar la solución existente del problema es necesario preguntar si esa variación puede anular a algún $Z_j - c_j > 0$ lo cual indicará la existencia de una solución alternativa, y en caso de seguir la variación de c_j en el mismo sentido se tendrá un $Z_j - c_j < 0$. Esto justifica, por lo menos una nueva iteración y por consiguiente la solución existente dejará de ser óptima.

3.1.1 Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo correspondiente a variables no básicas

Previo a todo análisis es de importancia puntualizar que los coeficientes c_j de variables no básicas, pueden afectar en si variación únicamente el valor $Z_j - c_j$ correspondiente a su variable respectiva.

Analizaremos la variación que tendría que experimentar c_3 coeficiente de x_3, para justificar la inclusión de x_3 en la base óptima.

Denominando c'_3 el nuevo valor que deberá tomar ese coeficiente y considerando las expresiones (3.1) y (3.2) resulta

$$a'_{13}c_2 + a'_{23}c_1 + a'_{33}c_5 - c_3 = Z_3 - c_3 \tag{3.4}$$

Siendo $Z_3 - c_3 > 0$

Restando $(Z_3 - c_3)$ a ambos miembros de (3.4) se obtiene:

$$a'_{13}c_2 + a'_{23}c_1 + a'_{33}c_5 - c_3 - (Z_3 - c_3) = 0$$

De donde:

$$a'_{13}c_2 + a'_{23}c_1 + a'_{33}c_5 - [c_3 + (Z_3 - c_3)] = 0$$

Es decir:

Si el coeficiente (c_j) de la función objetivo correspondiente a una variable no básica en la solución óptima experimenta un incremento

$$\Delta c_j = (Z_j - c_j)$$

Obteniendo de la última tabla del simplex, se tendrá por lo menos una solución alternativa también óptima.

Si el incremento es superior a este valor se justificará al menos una nueva iteración.

En otros términos. el valor de $Z_j - c_j$, nos indica el aumento del coeficiente en la función objetivo de la variable x_j (no básica) que necesitaríamos para que ésta tome un valor distinto de cero. Por otra parte una disminución del coeficiente de la función de una variable no básica no hará más que mantenerla fuera de ella.

Observación 3.1.

- x_k **es no básica**.

  En este caso, c_B no es afectado, y en consecuencia, $Z_j = c_B B^{-1} a_j$ no cambia para ningún j. Por lo tanto $Z_k - c_k$ se reemplaza por $Z_k - c'_k \leq 0$, pues el punto presente era una solución óptima del problema original.

  Si $Z_k - c'_k = (Z_k - c'_k) + (c_k - c'_k)$ es positivo, entonces x_k debe entrar en la base y el método simplex primal se continúa como es usual. En caso contrario, la solución anterior sigue siendo óptima con respecto al nuevo problema.

3.1.2 Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo correspondiente a variables básicas

De la ecuación (3.3) se tiene:

$$a'_{13}c_2 + a'_{23}c_1 + a'_{33}c_5 > c_3$$

Si suponemos: $a'_{13} < 0$, $a'_{23} > 0$ y $a'_{33} > 0$; los sumandos del primer término serán:

$$\begin{aligned} a'_{13}c_2 &< 0 \\ a'_{23}c_1 &> 0 \\ a'_{33}c_5 &> 0 \end{aligned}$$

Se analizará el coeficiente de la variable básica x_2.

Admitiendo, que todos los $c_j > 0$. Luego si se aumenta c_2 este haría crecer negativamente el término $a'_{13}c_2$. Si se busca el valor c'_2 que transforme la desigualdad en una igualdad se tiene:

$$a'_{13}c'_2 + a'_{23}c_1 + a'_{33}c_5 = c_3 \tag{3.5}$$

Siendo:

$$c'_2 = c_2 + \Delta c_2 \quad con \quad \Delta c_2 > 0$$

Reemplazando en (3.5) se tiene:

$$\begin{aligned} a'_{13}(c_2 + \Delta c_2) + a'_{23}c_1 + a'_{33}c_5 &= c_3 \\ a'_{13}c_2 + a'_{13}\Delta c_2 + a'_{23}c_1 + a'_{33}c_5 &= c_3 \end{aligned}$$

Luego:

$$a'_{13}\Delta c_2 = c_3 - \underbrace{(a'_{13}c_2 + a'_{23}c_1 + a'_{33}c_5)}_{Z_3} \tag{3.6}$$

Podemos escribir (3.6) como:

$$a'_{13}\Delta c_2 = c_3 - Z_3$$

Recordemos que:

$$\begin{aligned} c_3 - Z_3 &> 0 \\ a'_{13} &< 0 \\ \Delta c_2 &> 0 \end{aligned}$$

$$\Delta c_2 = \frac{c_3 - Z_3}{|a'_{13}|}$$

Entonces:

$$\Delta c_2 = -\frac{Z_3 - c_3}{|a'_{13}|}$$

En un problema de programación lineal que esté maximizando (minimizando) al llegar a la solución óptima en la tabla final del simplex, sin soluciones alternativas todos los $(Z_j - c_j)$ correspondientes a variables no básicas positivas (negativas) si hay un c_k positivo y deseamos saber si su aumento puede alterar la solución hallada debemos considerar todos los productos $c_k a'_{ij}$ que intervengan en el cálculo de los $Z_j - c_j$ positivos (negativos).

En aquellos productos que contengan $a'_{ij} < 0 \quad (a'_{ij} > 0)$ vemos que un aumento de c_k tiende a hacer nulo el $(Z_j - c_j)$. Esto se producirá para un valor:

$$c'_k = c_k + \Delta c_k = c_k + \left[\frac{Z_j - c_j}{|a'_{ij}|}\right]_{min} \tag{3.7}$$

Si tenemos varios $a'_{ij} < 0$, habrá varios Δc_k que nos anulará otros tantos $(Z_j - c_j)$. Entre estos debemos considerar el menor Δc_k pues al llegar el coeficiente c_k al valor $c_k + \Delta c_k \; min$, ya se anulará $(Z_k - c_k)$, un mayor aumento de c_k justificará por lo menos una nueva iteración.

Esquematizando la tabla (3.2) la relación que deben cumplir los coeficientes de la función objetivo, su signo, su variación y el signo de ésta, el signo de los a'_{ij} y el objetivo del problema para provocar variaciones de la solución óptima.

Así por ejemplo si hemos llegado a la solución óptima en un problema cuyo objetivo es minimizar la función objetivo, esta podrá ser alterada por el aumento de un $c_k > 0$ por hacer positivos los $Z_j - c_j$ que se encuentren en columna con $a'_{ij} > 0$ en la fila del c_k.

Tabla 3.2

Coeficiente c_k	**Objetivo del Problema**	
	Maximizar	**Minimizar**
Positivo $+\Delta$	$a'_{ij} < 0$	$a'_{ij} > 0$
$-\Delta$	$a'_{ij} > 0$	$a'_{ij} < 0$
Negativo $+\Delta$	$a'_{ij} > 0$	$a'_{ij} < 0$
$-\Delta$	$a'_{ij} < 0$	$a'_{ij} > 0$

Observación 3.2.

- x_k **es básica, por ejemplo** $x_k \equiv x_{B_t}$.

  En este caso, c_{B_t} se reemplaza por c'_{B_t}. Sea Z'_j el nuevo valor de Z_j. Entonces $Z'_j - c_j$ se calcula como sigue:

$$Z'_j - c_j = c'_B B^{-1} a_j - c_j = (c_B B^{-1} a_j - c_j) + (0, 0, \ldots, c'_{B_t - c_{B_t}}, 0, \ldots, 0) y_j$$

$$= (Z_j - c_j) + (c'_{B_t - c_{B_t}}) y_{tj} \quad para \quad todo \quad j$$

  En particular, para $j = k$, se tiene que $Z_k - c_k = 0$, y $y_{tk} = 1$, y por lo tanto, $Z'_k - c'_k = c'_k - c_k$. Como sería de esperarse, $Z'_k - c'_k$ sigue siendo igual a cero. Por lo tanto, el renglón de costo se puede actualizar sumando al renglón original, de costo, el producto del cambio neto en el costo de $x_{B_t} \equiv x_k$ por el renglón t actual de la tabla final. Entonces $Z'_k - c_k$ se actualiza a $Z'_k - c'_k = 0$. Por supuesto, durante el proceso se obtiene el nuevo valor objetivo $c'_B B^{-1} b = c_B B^{-1} b + (c'_{B_t} - c_B)\overline{b}_t$.

Ejemplo 3.1.

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & Z = -2x_1 + x_2 - x_3 & & \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 6 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución.

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{mín} & Z = -2x_1 + x_2 - x_3 & & \\
\text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 + h_1 & = & 6 \\
 & -x_1 + 2x_2 + h_2 & = & 4 \\
 & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Entra

Sale

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD	
Z	1	2	-1	1	0	0	0	
h_1	0	1	1	1	1	0	6	Fila pivote
h_2	0	-1	2	0	0	1	4	

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	10

Tabla 3.3: Tabla óptima

Hallaremos el rango de sensibilidad de los coeficientes de las variables no básicas; esto es: $c_2,\ c_3,\ c_4$.

- Sensibilidad de c_2

$$
\begin{aligned}
\triangle c_2 &= Z_2 - c_2 = \text{-3} \\
c_2' &= c_2 + \triangle c_2 = \text{1-3} = \text{-2}
\end{aligned}
$$

Para el rango superior se observa que un aumento del coeficiente no hará más que alejarla cada vez más de la base.

Luego el rango de sensibilidad resulta:

$$-2 \leq c_2 \leq \infty$$

Supongamos que $c_2 = 1$ se reemplaza por -3, puesto que x_2 es no básica, entonces $Z_2 - c_2' = (Z_2 - c_2) + (c_2 - c_2') = -3 + (1 - (-3)) = -3 + 4 = 1$.

Por lo tanto, x_2 entra a la base.

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	0	1	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	10

Entra

Sale

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD	
Z	1	0	1	-1	-2	0	-12	
x_1	0	1	1	1	1	0	6	
h_2	0	0	3	1	1	1	10	Fila pivote

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{46}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

- Sensibilidad de c_3

$$\begin{aligned} \triangle c_3 &= Z_3 - c_3 = \text{-1} \\ c_3' &= c_3 + \triangle c_3 = \text{-1-1} = \text{-2} \end{aligned}$$

$$-2 \leq c_3 \leq \infty$$

- Sensibilidad de c_4

$$\begin{aligned} \triangle c_4 &= Z_4 - c_4 = \text{-2} \\ c_4' &= c_4 + \triangle c_4 = \text{0-2} = \text{-2} \end{aligned}$$

$$-2 \leq c_4 \leq \infty$$

Seguidamente hallaremos el rango de sensibilidad de los coeficientes de las variables básicas; esto es de c_1 y c_5.

- Sensibilidad de c_1.

  Para el rango superior; en la tabla (3.3) se busca en la fila 1 de los $a'_{ij} > 0$ y así ubicamos 1,1,1 y también $Z_2 - c_2 = -3$, $Z_3 - c_3 = -1$ y $Z_4 - c_4 = -2$

  luego aplicamos (3.7)

$$c_1 = c_1 + \left[\frac{Z_j - c_j}{a_{ij}}\right]$$

  Se tiene que hallar para este caso 3 cocientes y de ellos se escoge el mínimo esto es:

$$c_1' = c_1 - \frac{Z_2 - c_2}{a'_{12}} = -2 - \frac{-3}{1} = 1$$

$$c_1'' = c_1 - \frac{Z_3 - c_3}{a'_{13}} = -2 - \frac{-1}{1} = -1$$

$$c_1''' = c_1 - \frac{Z_4 - c_4}{a'_{14}} = -2 - \frac{-2}{1} = 0$$

  Para el rango inferior observemos que al buscar $a'_{ij} < 0$ en la fila 1 de la tabla (3.3) no existe ningún; esto quiere decir que no se altera la solución óptima por cualquier disminución del coeficiente c_1.

  Luego el rango de sensibilidad de c_1 es:

$$-\infty \leq c_1 \leq -1$$

  Supóngase ahora que $c_1 = -2$ se reemplaza por $c_1' = 0$. Puesto que x_1 es básica, entonces el nuevo renglón de costos, excepto $Z_1 - c_1$, se obtiene multiplicando el renglón de x_1 por el cambio en c_1, es decir

$$Z_1' - c_1 = (Z_1 - c_1) + (c_1' - c_1)y_{ij} = 0 + (0 - (-2))(1) = 2$$

y sumando el resultado al renglón de costos anterior. El nuevo $Z_1 - c_1$ permanece igual a cero. Nótese que el nuevo $Z_3 - c_3$ es ahora positivo y por lo tanto, x_3 entra a la base.

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	10

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	0	-1	1	0	0	0
x_1	0	1	1	1	1	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	10

Tabla 3.4: Suma +2 al renglón de costos y LD=0

Entra

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD	
Z	1	0	-1	1	0	0	0	
Sale x_1	0	1	1	1	1	0	6	Fila pivote
h_2	0	0	3	1	1	1	10	

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	-1	-2	0	-1	0	-6
x_3	0	1	1	1	1	0	6
h_2	0	-1	2	0	0	1	4

Tabla 3.5: $Z^* = -6$, $x_3 = 6$ y $h_2 = 4$

- Sensibilidad c_5.

  Para el rango superior; en la tabla (3.3) se busca en la fila 2 de los $a'_{ij} > 0$ y así ubicamos 3,1,1 y también $Z_2 - c_2 = -3$, $Z_3 - c_3 = -1$ y $Z_4 - c_4 = -2$

  luego aplicamos (3.7)

$$c_5 = c_5 + \left[\frac{Z_j - c_j}{a_{ij}}\right]$$

  Se tiene que hallar para este caso 3 cocientes y de ellos se escoge el mínimo esto es:

$$c'_5 = c_5 - \frac{Z_2 - c_2}{a'_{12}} = 0 - \frac{-3}{3} = 1$$

$$c''_5 = c_5 - \frac{Z_3 - c_3}{a'_{13}} = 0 - \frac{-1}{1} = 1$$

$$c'''_5 = c_5 - \frac{Z_4 - c_4}{a'_{14}} = 0 - \frac{-2}{1} = 2$$

  Como hay 2 elementos que se repiten se elige cualquiera de ellos.

  Para el rango inferior observemos que al buscar $a'_{ij} < 0$ en la fila 2 de la tabla (3.3) no existe ningún; esto quiere decir que no se altera la solución óptima por cualquier disminución del coeficiente c_5.

  Luego el rango de sensibilidad de c_5 es:

$$-\infty \leq c_5 \leq 1$$

3.2 Cambios en el vector lado derecho

Si el vector b del lado derecho se reemplaza por b', entonces $B^{-1}b$ será reemplazado por $B^{-1}b'$. El nuevo lado derecho se puede calcular sin evaluar explícitamente $B^{-1}b'$. Esto es evidente si se observa que $B^{-1}b' = B^{-1}b + B^{-1}(b' - b)$. Si las primeras m columnas forman originalmente la identidad. Entonces $B^{-1}(b' - b) = \sum_{j=1}^{m} y_j(b'_j - b_j)$ y en consecuencia, $B^{-1}b' = b + \sum_{j=1}^{m} y_j(b'_j - b_j)$.

Se tendrán 2 casos:

1. Si $B^{-1}b' \geq 0$ y como el vector costos no presenta cambios, la base óptima que se tenía sigue siendo óptima.

2. Si $B^{-1}b' < 0$ para alguna $i \in I$ entonces se habrá perdido factibilidad en el dual. Por lo que aplicamos el dual simplex para obtener la nueva solución optima.

Ejemplo 3.2.

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & Z = -2x_1 + x_2 - x_3 & & \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 6 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Supóngase que $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ se cambia por $b' = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Solución.

De la tabla (3.3) se obtiene:

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	10

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y por lo tanto, $B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$. Entonces $B^{-1}b' \geq 0$ y en consecuencia, la nueva solución óptima es:

$x_1 = 3$, $h_2 = 7$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

3.3 Cambios en la matriz de restricciones A

Ahora vamos analizar el efecto de cambiar algunos de los elementos de la matriz A de restricciones. Hay dos casos posibles, o sea, cambios que incluyen columnas no básicas y cambios que incluyen columnas básicas.

3.3.1 Cambios en columnas no básicas

Supóngase que la columna no básica a_j es cambiada por a'_j, entonces habrá que actualizar la columna correspondiente por $B^{-1}a'_j$ y su coeficiente de costo reducido por $Z'_j - c_j = c_B B^{-1} a'_j - c_j$.

Como únicamente es importante el signo de los coeficientes de costo se tiene:

Minimizar

1. Si $Z'_j - c_j \leq 0$, la solución continúa siendo óptima.

2. Si por el contrario $Z'_j - c_j > 0$, se habrá perdido la optimalidad por lo que se

aplica el algoritmo simplex para obtener la solución óptima correspondiente al nuevo problema.

Maximizar

1. Si $Z'_j - c_j \geq 0$, la solución continúa siendo óptima.

2. Si por el contrario $Z'_j - c_j < 0$, se habrá perdido la optimalidad por lo que se aplica el algoritmo simplex para obtener la solución óptima correspondiente al nuevo problema.

Ejemplo 3.3.

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & Z = -2x_1 + x_2 - x_3 & & \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 6 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Supongamos del ejemplo (3.1) $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ se cambia por $a'_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Solución.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad c = [-2 \quad 1 \quad -1]$$

De la tabla (3.3) se tiene:

	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{h_1}$	$\boldsymbol{h_2}$	$\boldsymbol{LD}$
$\boldsymbol{Z}$	1	0	-3	-1	-2	0	-12
$\boldsymbol{x_1}$	0	1	1	1	1	0	6
$\boldsymbol{h_2}$	0	0	3	1	1	1	10

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad c_B = [-2 \quad 0]; \quad c_2 = 1$$

Hallando los nuevos valores de los elementos de la columna no básica

$$y_2' = B^{-1}a_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$Z_2' - c_2 = c_B B^{-1} a_j' - c_j = [-2 \;\; 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} - 1 = -4 - 1 = -5$$

$$\Longrightarrow Z_2' - c_2 \leq 0$$

Por lo tanto la tabla (3.3) sigue siendo óptima con la columna x_2 reemplazada por

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Cambios en columnas básicas

Supóngase que una columna básica a_j se modifica a a_j'. Este caso puede ocasionar problemas considerables.

Es posible que el conjunto actual de vectores básicos ya no formen una base después del cambio.

Para determinar si B es base o no, se debe calcular $y_j' = B^{-1}a_j'$.

Si algún elemento de y_j' es cero se dirá que B ya no forma una base. Si esto sucede deberá agregarse una variable artificial que tomará el lugar de la variable x_i', cuyo valor correspondiente de y_j' fue cero, en la base para luego proseguir con el método de las dos fases (o penalización), que se usa comúnmente en programación lineal.

Si B sigue siendo base, entonces se tienen las siguientes posibilidades:

Minimizar

1. Si hay factibilidad primal $x_i' \geq 0$ y factibilidad en el dual $Z_j - c_j \geq 0$, entonces x_i' es solución factible óptima y únicamente se debe pivotear para hacer la columna unitaria.

2. Si x_i' es solución factible pero no es óptima i.e. $Z_j - c_j < 0$. Se debe aplicar el algoritmo simplex pero a la transformación en la tabla óptima (se obtiene al calcular $y_j' = B^{-1}a_j'$ y $Z_j' - c_j = c_B B^{-1} a_j' - c_j$ y tomando a x_i' como solución factible inicial).

Si x_i' cumple las condiciones de optimalidad pero no es factible, se puede aplicar dual simplex para obtener la nueva solución óptima.

Maximizar

1. Si hay factibilidad primal $x_i' \geq 0$ y factibilidad en el dual $Z_j - c_j \leq 0$, entonces x_i' es solución factible óptima y únicamente se debe pivotear para hacer la columna unitaria.

2. Si x_i' es solución factible pero no es óptima i.e. $Z_j - c_j > 0$. Se debe aplicar el algoritmo simplex pero a la transformación en la tabla óptima (se obtiene al calcular $y_j' = B^{-1}a_j'$ y $Z_j' - c_j = c_B B^{-1} a_j' - c_j$ y tomando a x_i' como solución factible inicial).

Si x_i' cumple las condiciones de optimalidad pero no es factible, se puede aplicar dual simplex para obtener la nueva solución óptima.

Ejemplo 3.4.

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & Z = -2x_1 + x_2 - x_3 & & \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 6 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Supongamos del ejemplo (3.1), $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ se cambia por $a_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Solución.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad c = [-2 \quad 1 \quad -1]$$

De la tabla (3.3) se tiene:

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	10

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $c_B = [-2 \;\; 0]$; $c_1 = -2$

Hallando los nuevos valores de los elementos de la columna básica

$$y_1' = B^{-1}a_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Z_1' - c_1 = c_B B^{-1} a_1' - c_1 = [-2 \;\; 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - (-2) = 0 + 2 = 2$$

$$\Longrightarrow Z_1' - c_1 \geq 0$$

Aquí el elemento en la columna x_1 de y_1' es cero, y en consecuencia, las columnas básicas actuales ya no generan al espacio. Reemplazando la columna x_1 por $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, e introduciendo la variable artificial s_1 para reemplazar a x_1 en la base, se obtiene la siguiente tabla.

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	s_1	LD
Z	1	2	-3	-1	-2	0	-M	-12
s_1	0	0	1	1	1	0	1	6
h_2	0	-1	3	1	1	1	0	10

Hacer: $-M = 0$

entra

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	s_1	LD
Z	1	2	M-3	M-1	M-2	0	0	6M-12
sale s_1	0	0	1	1	1	0	1	6
h_2	0	-1	3	1	1	1	0	10

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	s_1	LD
Z	1	-M+3	-2	0	-1	0	-M+1	-6
x_3	0	0	1	1	1	0	1	6
h_2	0	-1	2	0	0	1	-1	4

Donde:

$$z = -6, \quad x_3 = 6, \quad h_2 = 4 \;\; y \;\; x_1 = x_2 = h_1 = s_1 = 0$$

Ejemplo 3.5.

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & Z = -2x_1 + x_2 - x_3 & & \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 6 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Supongamos del ejemplo (3.1), $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ se cambia por $a_1' = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

Solución.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad c = [-2 \quad 1 \quad -1]$$

De la tabla (3.3) se tiene:

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	10

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $c_B = [-2 \;\; 0]$; $c_1 = -2$

Hallando los nuevos valores de los elementos de la columna básica

$$y_1' = B^{-1}a_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$Z_1' - c_1 = c_B B^{-1} a_1' - c_1 = [-2 \;\; 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} - (-2) = -6 + 2 = -4$$

$$\Longrightarrow Z_1' - c_1 \leq 0$$

En este caso, el elemento en la fila x_1 de y_1' es distinto de cero, y por lo tanto, se reemplaza la columna x_1 por $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$, se pivotea en la columna x_1 y la fila x_1, y se procede como de costumbre.

La tabla queda:

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	-4	-3	-1	-2	0	-12
x_1	0	3	1	1	1	0	6
h_2	0	9	3	1	1	1	10

Pivoteando para volver la columna unitaria se obtiene:

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	-4
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
h_2	0	0	0	-2	-2	1	-8

Entra

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD	
Z	1	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	-4	
Sale x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2	Fila pivote
h_2	0	0	0	-2	-2	1	-8	

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	LD
Z	1	-1	-2	0	-1	0	-6
x_3	0	3	1	1	1	0	6
h_2	0	6	2	0	0	1	4

Tabla 3.6: Nueva tabla óptima

3.4 Adición de una nueva restricción

Supóngase que se añade una nueva restricción al problema. Podrían suceder dos cosas:

1. Si la solución óptima del problema original satisface la nueva restricción, entonces obviamente el punto es también una solución óptima del nuevo problema.

2. Si la nueva restricción no se satisface con la solución óptima que se tenía, entonces puede usarse el método dual simplex para encontrar la nueva solución óptima.

Ejemplo 3.6. Supóngase que se desea añadir la siguiente restricción al ejemplo (3.1):

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5$$

Entonces la solución óptima del problema original es $Z = -12$ cuando $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $h_1 = 0$ y $h_2 = 10$ debe satisfacer la nueva restricción para continuar siendo óptima.
Sustituyendo se tiene:

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 + 2(0) - 0 = -6 \leq 5$$

Satisface la desigualdad por lo que la solución continúa siendo óptima para el nuevo problema.

Ejemplo 3.7. Supóngase que se desea añadir la siguiente restricción al ejemplo (3.1):

$$-x_1 + 2x_3 \geq 2$$

Entonces la solución óptima del problema original es $Z = -12$ cuando $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $h_1 = 0$ y $h_2 = 10$ debe satisfacer la nueva restricción para continuar siendo óptima.
Sustituyendo se tiene:

$$-x_1 + 2x_3 = -6 + 2(0) = -6 \leq 2$$

Por lo que no satisface la nueva restricción, por lo tanto se debe se debe poner la nueva restricción en su forma estándar

$$-x_1 + 2x_3 - h_3 = 2$$

Para un mejor manejo se multiplica por -1 y se obtiene:

$$x_1 - 2x_3 + h_3 = -2$$

Esta nueva restricción se añade a la tabla óptima (3.3) del ejemplo (3.1) para obtener la siguiente tabla:
Ahora se tiene que restar las columnas $h_3 - x_1$ para convertir de nuevo la columna x_1 a un vector unitario.

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	LD
Z	1	0	-3	-1	-2	0	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	0	10
h_3	0	1	0	-2	0	0	1	-2

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	LD
Z	1	0	-3	-1	-2	0	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	0	10
h_3	0	0	-1	-3	-1	0	1	-8

Como en la fila h_3 del lado derecho es negativo (-8) se aplica dual simplex como se muestra acontinuación:

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	LD
Z	1	0	-3	-1	-2	0	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	0	10
h_3	0	0	-1	-3	-1	0	1	-8

Se elige el menor valor para pivotear

$$\frac{-3}{-1} = 3 \;\Big|\; \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \;\Big|\; \frac{-2}{-1} = 2 \;\Big|$$

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	LD
Z	1	0	-3	-1	-2	0	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	0	6
h_2	0	0	3	1	1	1	0	10
h_3	0	0	-1	-3	-1	0	1	-8

Tabla 3.7: Nueva tabla óptima

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	LD
Z	1	0	$-\frac{8}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{28}{3}$
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
h_2	0	0	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{22}{3}$
x_3	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$

3.5 Adición de una nueva actividad

Supóngase que una nueva actividad x_{n+1} con costo unitario c_{n+1} y columnas de consumo a_{n+1} es considerada para posible producción. Sin resolver de nuevo el problema , puede determinarse fácilmente si conviene producir x_{n+1}.

Primero se calcula $Z_{n+1} - c_{n+1}$, se presentan dos casos:

1. Si $Z_{n+1} - c_{n+1} \leq 0$, entonces $x^*_{n+1} = 0$ y la solución actual es óptima.

2. $Z_{n+1} - c_{n+1} > 0$, entonces x_{n+1} se introduce en la base y se continúa el método simplex para encontrar la nueva solución óptima.

Ejemplo 3.8. Considérese el ejemplo (3.1). Se desea encontrar la nueva solución óptima si se introduce una nueva actividad $x_4 \geq 0$ con $c_6 = 1$ y $a_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, primero se calcula

$Z_6 - c_6$:

$$Z_6 - c_6 = c_B a_6 - c_6 = [-2 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$y_6 = B^{-1} a_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, x_4 se introducen en la base pivoteando en la fila h_2 y la columna x_4.

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	x_4	LD
Z	1	0	-3	-1	-2	0	1	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	-1	6
h_2	0	0	3	1	1	1	1	10

Entra

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	x_4	LD	
Z	1	0	-3	-1	-2	0	1	-12	
x_1	0	1	1	1	1	0	-1	6	
Sale h_2	0	0	3	1	1	1	1	10	Fila Pivote

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	x_4	LD
Z	1	0	-6	-2	-3	-1	0	-22
x_1	0	1	4	2	2	1	0	16
x_4	0	0	3	1	1	1	1	10

Tabla 3.8: $Z^* = -22$, $x_1 = 16$ y $x_4 = 10$

3.6 Aplicación

Aplicación 3.1. Aplicar el análisis de sensibilidad al siguiente problema:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 & & \\ \text{s.a:} & x_2 + 2x_3 & \leq & 8 \\ & x_1 + x_3 & \geq & 5 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 12 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución.

En su forma estándar

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 & & \\ \text{s.a:} & 0x_1 + x_2 + 2x_3 + h_1 & = & 8 \\ & x_1 + 0x_2 + x_3 - h_2 + s_1 & = & 5 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + h_3 & = & 12 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3, h_1, h_2, h_3, s_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Se tiene lo siguiente:

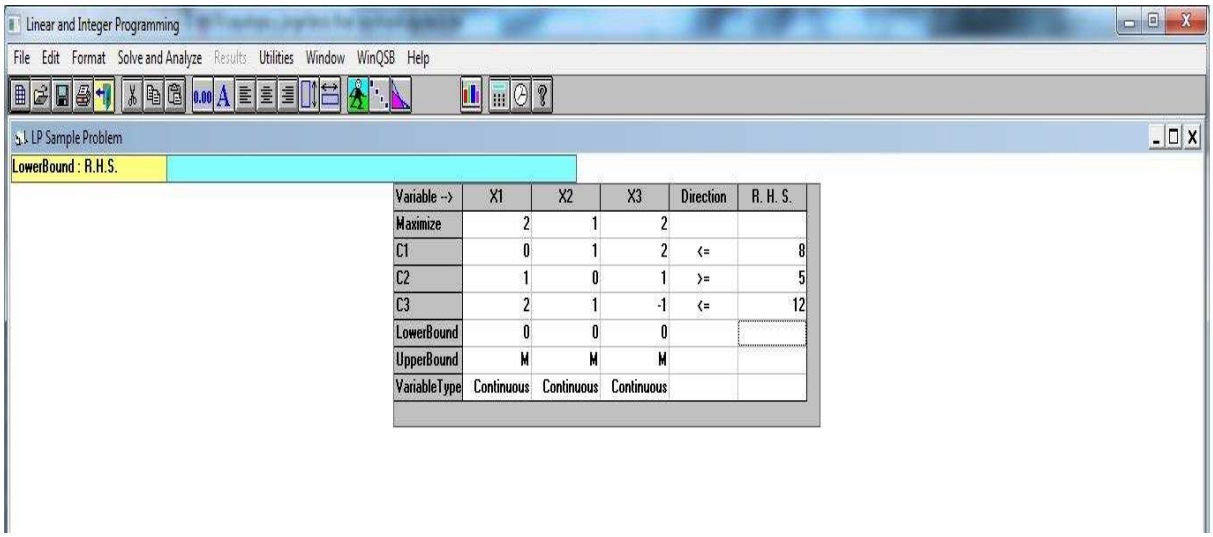
$$c = \left[\begin{array}{ccccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\ b = \left[\begin{array}{c|c} b_1 & 8 \\ b_2 & 5 \\ b_3 & 12 \end{array}\right]\ y\ A = \left[\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Escogiendo como base inicial $\mathbf{B}$=$[a_4\ a_7\ a_6]$=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

y de hecho $B^{-1}b = b \geq 0$. Esto da inicio a la tabla inicial:

Utilizando el Software WinQsb para hallar la tabla óptima:

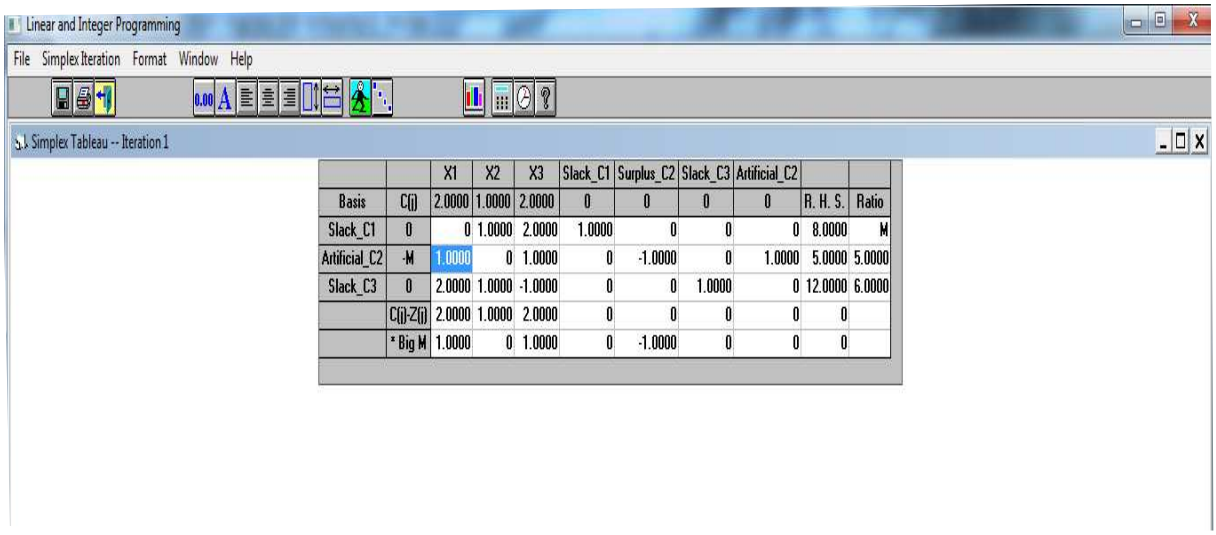
Paso 1: Ingresando los datos al Software de la siguiente manera:



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	2	1	2		
C1	0	1	2	<=	8
C2	1	0	1	>=	5
C3	2	1	-1	<=	12
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

Figura 3.1: Tabla de ingreso de datos

Paso 2: La tabla del simplex inicial queda de la siguiente manera:



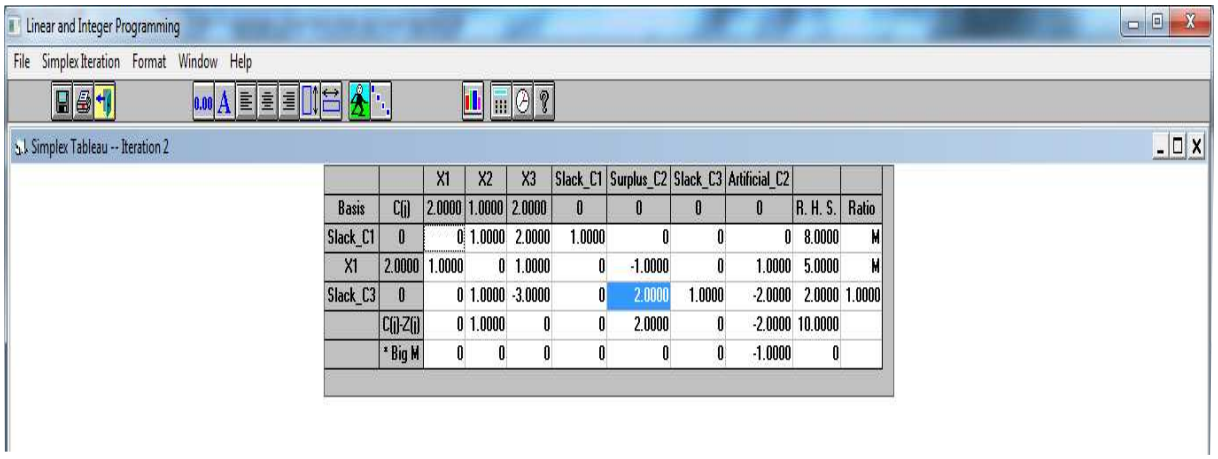
		X1	X2	X3	Slack_C1	Surplus_C2	Slack_C3	Artificial_C2		
Basis	C(j)	2.0000	1.0000	2.0000	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	0	1.0000	2.0000	1.0000	0	0	0	8.0000	M
Artificial_C2	-M	1.0000	0	1.0000	0	-1.0000	0	1.0000	5.0000	5.0000
Slack_C3	0	2.0000	1.0000	-1.0000	0	0	1.0000	0	12.0000	6.0000
	C(j)-Z(j)	2.0000	1.0000	2.0000	0	0	0	0	0	
	* Big M	1.0000	0	1.0000	0	-1.0000	0	0	0	

Figura 3.2: Tabla inicial del simplex

En la tabla se debe identificar la matriz identidad como se observa en la figura (3.2), teniendo en cuenta la base inicial:

$$\mathbf{B}=[Slack\_C1 \quad Artificial\_C2 \quad Slack\_C3\ ]$$

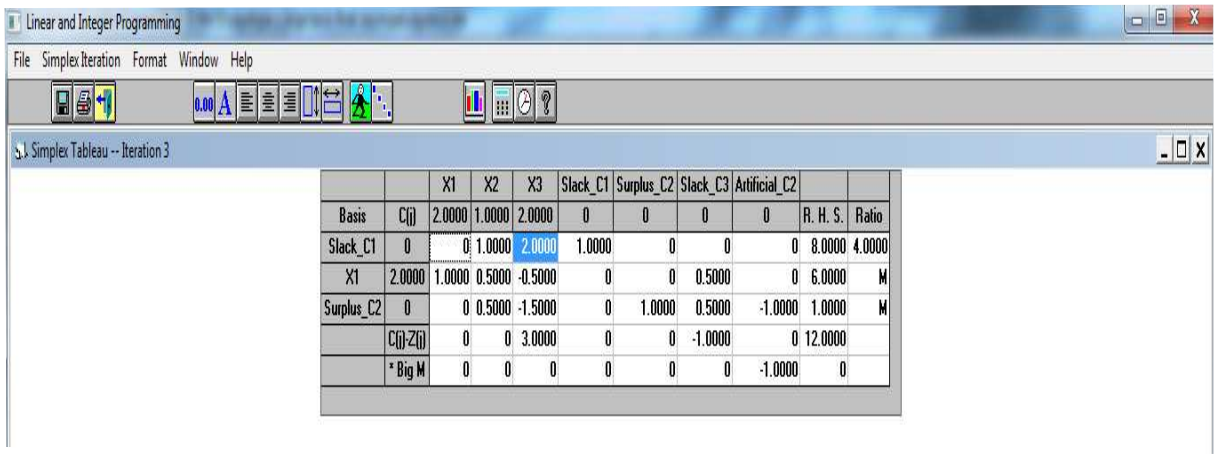
Paso 3: Entra x_1 y sale $Artificial\_C2$



		X1	X2	X3	Slack_C1	Surplus_C2	Slack_C3	Artificial_C2		
Basis	C(j)	2.0000	1.0000	2.0000	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	0	1.0000	2.0000	1.0000	0	0	0	8.0000	M
X1	2.0000	1.0000	0	1.0000	0	-1.0000	0	1.0000	5.0000	M
Slack_C3	0	0	1.0000	-3.0000	0	2.0000	1.0000	-2.0000	2.0000	1.0000
	C(j)-Z(j)	0	1.0000	0	0	2.0000	0	-2.0000	10.0000	
	* Big M	0	0	0	0	0	0	-1.0000	0	

Figura 3.3: Resultado de la primera iteración

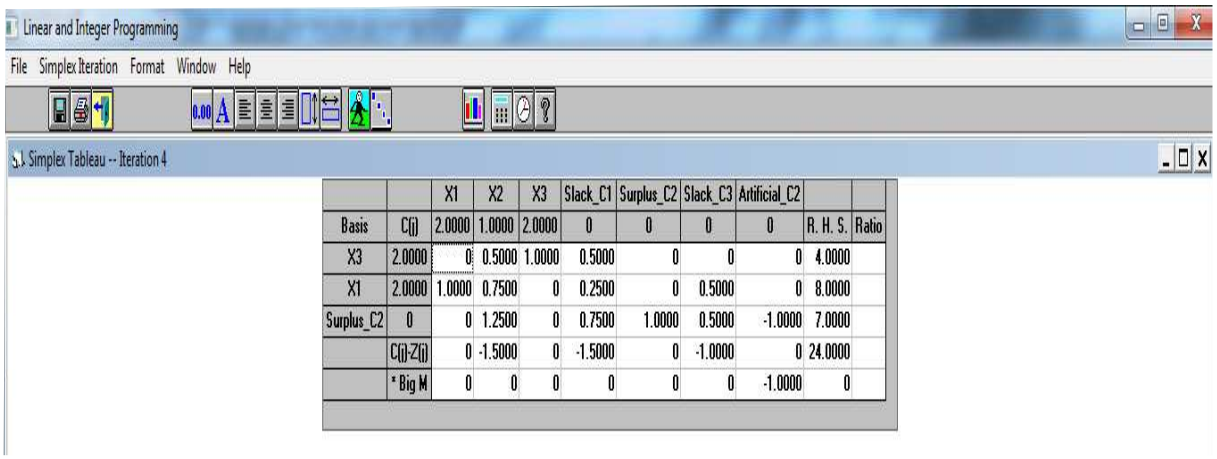
Paso 4: Entra $Suplus\_C2$ y sale $Slack\_C3$



		X1	X2	X3	Slack_C1	Surplus_C2	Slack_C3	Artificial_C2		
Basis	C(j)	2.0000	1.0000	2.0000	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	0	1.0000	2.0000	1.0000	0	0	0	8.0000	4.0000
X1	2.0000	1.0000	0.5000	-0.5000	0	0	0.5000	0	6.0000	M
Surplus_C2	0	0	0.5000	-1.5000	0	1.0000	0.5000	-1.0000	1.0000	M
	C(j)-Z(j)	0	0	3.0000	0	0	-1.0000	0	12.0000	
	* Big M	0	0	0	0	0	0	-1.0000	0	

Figura 3.4: Resultado de la segunda iteración

Paso 5: Entra x_3 y sale $Slack\_C1$



		X1	X2	X3	Slack_C1	Surplus_C2	Slack_C3	Artificial_C2		
Basis	C(j)	2.0000	1.0000	2.0000	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X3	2.0000	0	0.5000	1.0000	0.5000	0	0	0	4.0000	
X1	2.0000	1.0000	0.7500	0	0.2500	0	0.5000	0	8.0000	
Surplus_C2	0	0	1.2500	0	0.7500	1.0000	0.5000	-1.0000	7.0000	
	C(j)-Z(j)	0	-1.5000	0	-1.5000	0	-1.0000	0	24.0000	
	* Big M	0	0	0	0	0	0	-1.0000	0	

Figura 3.5: Tabla óptima

La solución óptima está dada por $x_1 = 8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $Surplus\_C2 = h_2 = 7$, $Slack\_C1 = h_1 = 0$, $Slack\_C3 = h_3 = 0$ y $Artificial\_C2 = s_1 = 0$
$Z^* = 24$.

Observe que la base óptima actual consiste en identificar las variables básicas de la parte izquierda de la tabla óptima de la figura (3.5) el cual van hacer las columnas a_3, a_1 y a_5 es decir:

$$B = [a_3 \quad a_1 \quad a_5] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

De la tabla óptima se observa las columnas $Slack\_C1$, $Artificial\_C2$ y $Slack\_C3$

$$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

1. **Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo (c_j).**

   a) **Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo correspondiente a variables no básicas.**

   Hallaremos el rango de sensibilidad de los coeficientes de las variables no básicas; esto es: $c_2,\ c_4,\ c_6,\ c_7$.

   - Sensibilidad de c_2 para el rango superior.

$$\begin{aligned} \triangle c_2 &= Z_2 - c_2 = 1.5 \\ c_2' &= c_2 + \triangle c_2 = 1+1.5 = 2.5 \end{aligned}$$

   Para el rango inferior se observa que una disminución del coeficiente no hará más que alejarla cada vez más de la base.

   Luego el rango de sensibilidad resulta:

$$-\infty \leq c_2 \leq 2.5$$

   Supongamos que $c_2 = 1$ se reemplaza por c_2' =4, puesto que x_2 es no básica, entonces $Z_2 - c_2' = (Z_2 - c_2) + (c_2 - c_2')$=1.5+(1-4)=1.5-3=-1.5=$-\frac{3}{2}$

   Por lo tanto, x_2 entra a la base.

   De la figura (3.5) se obtiene la tabla óptima:

Entra

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	LD	
Z	1	0	-$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	24	
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	4	
x_1	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	8	
h_2	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	7	Fila pivote

Sale

Tabla 3.9: $\frac{3}{2}$ se reemplaza por -$\frac{3}{2}$

   - Sensibilidad de c_4 para el rango superior.

$$\begin{aligned} \triangle c_4 &= Z_4 - c_4 = 1.5 \\ c_4' &= c_4 + \triangle c_4 = 0+1.5 = 1.5 \end{aligned}$$

Entra

Sale

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	LD	
Z	1	0	0	0	$\frac{12}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{162}{5}$	
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	Fila pivote
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{19}{5}$	
x_2	0	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{28}{5}$	

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	LD
Z	1	0	0	3	3	0	1	0	36
s_1	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	3
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	0	1	2	1	0	0	0	8

Tabla 3.10: Nueva tabla óptima

Luego el rango de sensibilidad resulta:

$$-\infty \leq c_4 \leq 1.5$$

- Sensibilidad de c_6 para el rango superior.

$$\begin{aligned} \triangle c_6 &= Z_6 - c_6 = 1 \\ c_6' &= c_6 + \triangle c_6 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Luego el rango de sensibilidad resulta:

$$-\infty \leq c_6 \leq 1$$

- Sensibilidad de c_7 para el rango superior.

$$\begin{aligned} \triangle c_7 &= Z_7 - c_7 = 0 \\ c_7' &= c_7 + \triangle c_7 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Luego el rango de sensibilidad resulta:

$$-\infty \leq c_7 \leq 0$$

b) **Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo correspondiente a variables básicas.**

Seguidamente hallaremos el rango de sensibilidad de los coeficientes de las variables básicas; esto es: c_1, c_3 y c_5.

- Sensibilidad de c_1.

  Para el rango inferior; en la figura (3.5) se busca en la fila 2 de los $a'_{ij} > 0$ y así ubicamos $\frac{3}{4}$,$\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$, también $Z_2 - c_2$ =1.5, $Z_4 - c_4$ =1.5, $Z_6 - c_6 = 1$ y $Z_7 - c_7$ =0.

  Luego aplicamos (3.7)

$$c_1 = c_1 + \left[\frac{Z_j - c_j}{a_{ij}}\right]$$

  Se tiene que hallar para este caso 3 cocientes y de ellos se escoge el máximo esto es:

$$c'_1 = c_1 - \frac{Z_2 - c_2}{a'_{22}} = 2 - \frac{1.5}{\frac{3}{4}} = 2 - \frac{6}{3} = 2 - 2 = 0$$

$$c''_1 = c_1 - \frac{Z_4 - c_4}{a'_{24}} = 2 - \frac{1.5}{\frac{1}{4}} = 2 - 6 = -4$$

$$c'''_1 = c_1 - \frac{Z_6 - c_6}{a'_{26}} = 2 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 - 2 = 0$$

  Para el rango superior observemos que al buscar $a'_{ij} < 0$ en la fila 2 de la figura (3.5) no existe ningún elemento; esto quiere decir que no se altera la solución óptima por cualquier aumento del coeficiente c_1.

  Luego el rango de sensibilidad de c_1 es:

$$0 \leq c_1 \leq \infty$$

  Supóngase ahora que $c_1 = 2$ se reemplaza por $c'_1 = -1$. Puesto que x_1 es básica, entonces el nuevo renglón de costos, excepto $Z_1 - c_1$, se obtiene multiplicando el renglón de x_1 por el cambio neto en c_1, es decir:

$$Z'_1 - c_1 = (Z_1 - c_1) + (c'_1 - c_1)y_{ij} = 0 + (-1 - 2)(1) = -3$$

y sumando el resultado al renglón de costos anterior. El nuevo $Z_1 - c_1$ permanece igual a cero.

- Sensibilidad de c_3.

  Para el rango inferior; en la figura (3.5) se busca en la fila 1 de los $a'_{ij} > 0$ y así ubicamos $\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$, también $Z_2 - c_2$ =1.5, $Z_4 - c_4$ =1.5, $Z_6 - c_6 = 1$ y $Z_7 - c_7$ =0.

  Luego aplicamos (3.7)

$$c_1 = c_1 + \left[\frac{Z_j - c_j}{a_{ij}}\right]$$

  Se tiene que hallar para este caso 2 cocientes y de ellos se escoge el máximo esto es:

$$c'_3 = c_3 - \frac{Z_2 - c_2}{a'_{12}} = 2 - \frac{1.5}{\frac{1}{2}} = 2 - 3 = -1$$

$$c''_3 = c_3 - \frac{Z_4 - c_4}{a'_{14}} = 2 - \frac{1.5}{\frac{1}{2}} = 2 - 3 = -1$$

  Como ambos son iguales escogemos cualquiera de ellos.

  Para el rango superior observemos que al buscar $a'_{ij} < 0$ en la fila 1 de la figura (3.5) no existe ningún elemento; esto quiere decir que no se altera la solución óptima por cualquier aumento del coeficiente c_3.

  Luego el rango de sensibilidad de c_3 es:

$$-1 \leq c_3 \leq \infty$$

- Sensibilidad de c_5.

  - Para el rango superior; en la figura (3.5) se busca en la fila 3 de los $a'_{ij} < 0$ y así ubicamos -1, también $Z_2 - c_2$ =1.5, $Z_4 - c_4$ =1.5, $Z_6 - c_6 = 1$ y $Z_7 - c_7$ =0.

$$c_7 = c_7 + \frac{Z_7 - c_7}{a'_{37}} = 0 + \frac{0}{1} = 0$$

- Para el rango inferior; en la figura (3.5) se busca en la fila 3 de los $a'_{ij} > 0$ y así ubicamos $\frac{4}{5}$,$\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$, también $Z_2 - c_2$ =1.5, $Z_4 - c_4$ =1.5, $Z_6 - c_6 = 1$ y $Z_7 - c_7$ =0.

  Luego aplicamos (3.7)

$$c_7 = c_7 + \left[\frac{Z_j - c_j}{a_{ij}}\right]$$

  Se tiene que hallar para este caso 3 cocientes y de ellos se escoge el máximo esto es:

$$c'_7 = c_7 - \frac{Z_2 - c_2}{a'_{32}} = 0 - \frac{1.5}{\frac{5}{4}} = -\frac{6}{5}$$

$$c''_7 = c_7 - \frac{Z_4 - c_4}{a'_{34}} = 0 - \frac{1.5}{\frac{3}{4}} = -2$$

$$c'''_7 = c_7 - \frac{Z_6 - c_6}{a'_{36}} = 0 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

  Luego el rango de sensibilidad de c_7 es:

$$-\frac{6}{5} \leq c_7 \leq 0$$

2. **Cambios en el vector lado derecho.**

- Si en el ejemplo (3.1) hubiera la necesidad de cambiar $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ por

$$b' = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Solución.

Se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \; y \;\; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Analizando $B^{-1}b'$

$$B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \geq 0$$

La base óptima original sigue siendo óptima y los valores óptimos se mantienen

- Si en el ejemplo (3.1) hubiera la necesidad de cambiar $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ por

$$b' = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Solución.

Se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \; y \;\; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Analizando $B^{-1}b'$

$$B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8.5 \\ 8.5 \end{bmatrix} \geq 0$$

Al igual que en el ejercicio anterior la base óptima es la misma pero ahora los valores óptimos cambian a $Z^* = 27$ cuando $x_1 = 8.5$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 5$.

- Si en el ejemplo (3.1) hubiera la necesidad de cambiar $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ por

$b' = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

Solución.

Se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \; y \;\; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Analizando $B^{-1}b'$

$$B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \leq 0$$

Como hay valores negativos del lado derecho, es decir no hay factibilidad en el primal, se debe usar el dual simplex para encontrar la nueva solución óptima.

	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{h_1}$	$\boldsymbol{h_2}$	$\boldsymbol{h_3}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{LD}$
$\boldsymbol{Z}$	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	24
$\boldsymbol{x_3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1
$\boldsymbol{x_1}$	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	5.5
$\boldsymbol{h_2}$	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	-0.5

En este caso todos los elementos de los renglones correspondientes a x_3 y h_2 son no negativos por lo que el problema no tiene solución.

3. **Cambios en la matriz de restricciones A.**

   a) **Cambios en columnas no básicas.**

   Si en el ejemplo (3.1) hubiera la necesidad de cambiar $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ por

   $a_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Solución.

   Se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad c_B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \ y \ c_2 = 1$$

   Analizando $B^{-1}a_2'$

$$y_2' = B^{-1}a_2' = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$Z_2' - c_2 = [2\ 2\ 0] \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix} - 1 = 2.5 - 1 = 1.5$$

$$\Longrightarrow Z_2' - c_2 \geq 0$$

   Por lo tanto la tabla de la figura (3.5) sigue siendo óptima con la columna x_2 reemplazada por

$$\begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	LD
Z	1	0	1.5	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	24
x_3	0	0	0.5	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	4
x_1	0	1	0.75	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	8
h_2	0	0	0.25	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	7

b) **Cambios en columnas básicas.**

- Si en el ejemplo (3.1) hubiera la necesidad de cambiar $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ por

$$a_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución.

Primero se verificará que B siga siendo base, se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad c_B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \; y \; c_1 = 2$$

Analizando $B^{-1}a_1'$

$$y_1' = B^{-1}a_1' = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Para $x_3 = 0$ se tiene que $y_1' = 0$, por lo que B ya no es una base. Entonces se agregará una variable artificial s_2 que tome el lugar de x_1 en la base y se calcula $Z_1' - c_1$

$$Z_1' - c_1 = [2\ 2\ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$\Longrightarrow Z_1' - c_1 \geq 0$$

Por lo tanto la tabla de la figura (3.5) sigue siendo óptima con la columna x_1 reemplazada por

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

La nueva tabla queda:

	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{h_1}$	$\boldsymbol{h_2}$	$\boldsymbol{h_3}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{LD}$
$\boldsymbol{Z}$	1	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	M	24
$\boldsymbol{x_3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	4
$\boldsymbol{s_2}$	0	1.5	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	8
$\boldsymbol{h_2}$	0	0.5	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	0	7

Hacer $M = 0$

	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{h_1}$	$\boldsymbol{h_2}$	$\boldsymbol{h_3}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{LD}$
$\boldsymbol{Z}$	1	$1 - \frac{3}{2}M$	$\frac{3}{2} - \frac{3}{4}M$	0	$\frac{3}{2} - \frac{1}{4}M$	0	$1 - \frac{1}{2}M$	0	0	$24 - 8M$
$\boldsymbol{x_3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	4
$\boldsymbol{s_2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	8
$\boldsymbol{h_2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	0	7

se tiene:

	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{h_1}$	$\boldsymbol{h_2}$	$\boldsymbol{h_3}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{LD}$
$\boldsymbol{Z}$	1	0	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}+M$	$\frac{56}{3}$
$\boldsymbol{x_3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	4
$\boldsymbol{x_1}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$
$\boldsymbol{h_2}$	0	0	-2	0	$-\frac{4}{3}$	-2	$-\frac{2}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{26}{3}$

El nuevo $Z = \frac{56}{3}$, $x_1 = \frac{16}{3}$, $x_3 = 4$, $h_2 = \frac{26}{3}$ y $x_2 = h_1 = h_3 = s_1 = s_2 = 0$

- Si en el ejemplo (3.1) hubiera la necesidad de cambiar $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ por

$a_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución.

Primero se verificará que B siga siendo base, se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad c_B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \ y \ c_1 = 2$$

Analizando $B^{-1}a_1'$

$$y_1' = B^{-1}a_1' = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

Por lo que B aún es base.

Se calcula $Z_1' - c_1$.

$$Z_1' - c_1 = [2\ 2\ 0] \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.25 \\ 0.75 \end{bmatrix} - 2 = 3.5 - 2 = 1.5$$

$$\Longrightarrow Z_1' - c_1 \geq 0$$

En este caso, el elemento en la fila x_1 de y_1' es distinto de cero, y por lo tanto, se reemplaza la columna x_1 por $\begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$, se pivotea en la columna x_1 y la fila x_1 y se procede como de costumbre.

La nueva tabla queda:

	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{h_1}$	$\boldsymbol{h_2}$	$\boldsymbol{h_3}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{LD}$
$\boldsymbol{Z}$	1	1.5	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	24
$\boldsymbol{x_3}$	0	0.5	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	4
$\boldsymbol{x_1}$	0	1.25	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	8
$\boldsymbol{h_2}$	0	0.75	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	7

Pivoteando para volver la columna x_1 en unitaria se obtiene:

	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{h_1}$	$\boldsymbol{h_2}$	$\boldsymbol{h_3}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{LD}$
$\boldsymbol{Z}$	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{72}{5}$
$\boldsymbol{x_3}$	0	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{5}$
$\boldsymbol{x_1}$	0	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{32}{5}$
$\boldsymbol{h_2}$	0	0	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	-1	$\frac{11}{5}$

Entonces la nueva solución óptima es $Z^* = \frac{72}{5}$ cuando $x_1 = \frac{32}{5}$, $x_2 = 0$ y $x_3 = \frac{4}{5}$

4. **Adición de una nueva restricción.**

- Supóngase que se desea añadir la siguiente restricción al ejemplo (3.1)

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 18$$

Solución.

La solución óptima del problema original es: $Z^* = 24$, $x_1 = 8$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 4$, debe satisfacer la nueva restricción para continuar siendo óptima. Sustituyendo se tiene:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 + 2(0) - 4 = 4 \leq 18$$

Satisface la desigualdad por lo que la solución continúa siendo óptima para el nuevo problema.

- Supóngase que se desea añadir la siguiente restricción al ejemplo (3.1)

$$-x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 \geq 1$$

Solución.

La solución óptima del problema original es: $Z^* = 24$, $x_1 = 8$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 4$, debe satisfacer la nueva restricción para continuar siendo óptima. Sustituyendo se tiene:

$$-x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 = -8 + \tfrac{1}{2}(0) + 4 = -4 \geq 1$$

Se contradice, por lo que no satisface la nueva restricción, por lo tanto se debe poner la nueva restricción en su forma estándar:

$$-x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 - h_4 = 1$$

Para un mejor manejo se multiplica por -1 y se obtiene:

$$x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 + h_4 = -1$$

A continuación se agregará la fila correspondiente a la tabla óptima del problema original.

Pivoteando para que las columnas básicas sean unitarias:

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	h_4	LD
Z	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	0	24
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	4
x_1	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	8
h_2	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	0	7
h_4	0	1	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0	0	0	1	-1

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	h_4	LD
Z	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	0	24
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	4
x_1	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	8
h_2	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	0	7
h_4	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	3

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	h_4	LD
Z	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	0	24
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	4
x_1	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	8
h_2	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	0	7
h_4	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	-5

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	h_4	LD
Z	1	0	0	0	2	0	0	0	2	14
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	4
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	3
h_2	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0	-1	1	2
h_3	0	0	$\frac{3}{2}$	0	-$\frac{1}{4}$	0	1	0	-2	10

5. **Adición de una nueva actividad.**

- Se desea encontrar la nueva solución óptima si se introduce una nueva actividad $x_4 \geq 0$ con $c_7 = 3$ y $a_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, primero se calcula $Z_7 - c_7$: Para este caso de maximización se calcula utilizando los valores del dual donde y_1 =1.5, $y_2 = 0$ y $y_3 = 1$

$$Z_7 - c_7 = 1y_1 + 0y_2 + 1y_3 - 3 = 1(1.5) + 0(0) + 1(1) - 3 = -0.5 < 0$$

$$y_7 = B^{-1}a_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, x_4 se introducen en la base pivoteando en la fila h_2 y la columna x_4.

Entra

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	x_4	LD	
Z	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	- $\frac{1}{2}$	24	
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	4	
x_1	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	8	
Sale h_2	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{4}$	7	Fila Pivote

Entra

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	x_4	LD	
Z	1	2	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{134}{5}$	
Sale x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	Fila Pivote
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{19}{5}$	
x_4	0	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{28}{5}$	

	Z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	x_4	LD
Z	1	0	2	1	2	0	1	0	0	28
s_1	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	2
x_4	0	0	1	2	1	0	0	0	1	8

$$\Rightarrow Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2(2) + 0(0) + 2(0) + 3(8) = 28$$

Aplicación 3.2. Una empresa distribuye coches y motos entre las fábricas y los concesionarios. La distribución la realiza en tren o en camión. Las fábricas tienen almacenadas 150 coches y 100 motos. En cada vagón de tren podemos colocar 5 coches y 2 motos y en cada camión 2 coches y 3 motos. Si la distribuidora obtiene 12 y 8 unidades de beneficio por cada vagón de tren o camión, respectivamente, ¿Cuántos vagones y camiones debe de utilizar para obtener el máximo beneficio?.

Solución.

Planteamiento del Problema:

x_1 = N° de vagones

x_2 = N° de camiones

Función objetivo: Se requiere maximizar el beneficio total. Si se ganan 12 unidades por cada vagón $12x_1$ y 8 por cada camión $8x_2$, entonces: $12x_1 + 8x_2$.

Retricciones: Solo se dispone de 150 coches y 100 motos para distribuirlos en vagones, o en camiones, $2x_1 + 3x_1 \leq 100$ motos y $5x_1 + 2x_2 \leq 150$ coches.

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= 12x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a} \quad 5x_1 + 2x_2 &\leq 150 \\ 2x_1 + 3x_1 &\leq 100 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando WinQsb

1. Se abre WINQSB en el modulo Linear and Integer Programming. Para introducir un nuevo problema se selecciona File/ New Problem. Aparece una pantalla (Figura 3.6) donde se introducen las especificaciones del problema a resolver.

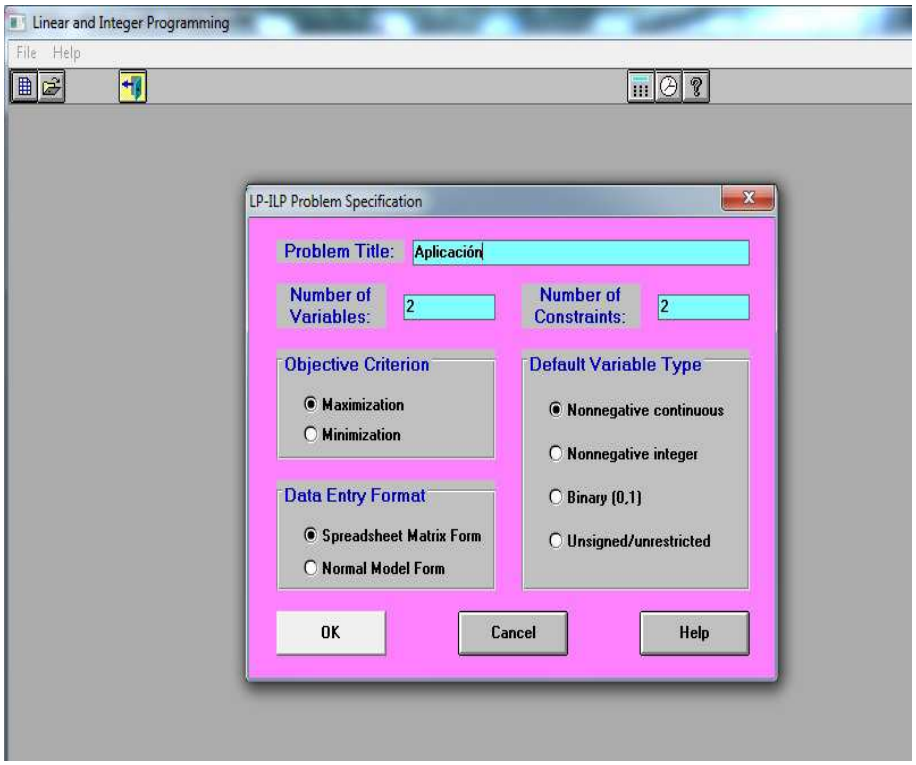


Figura 3.6: *Pantalla inicial de Programación Lineal y Entera.*

2. Ingresar los datos

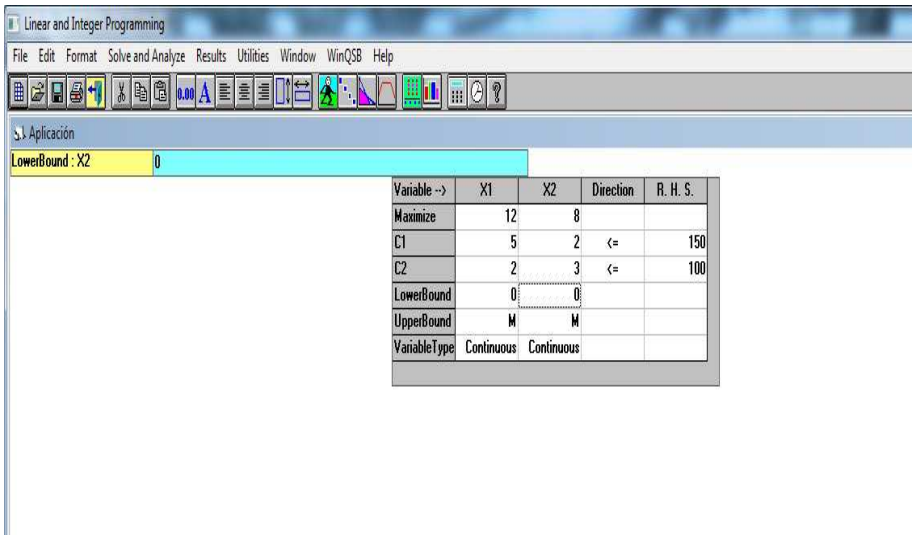


Figura 3.7: *Interfaz donde se ingresan los datos del problema.*

3. Resultado final de la tabla óptima.

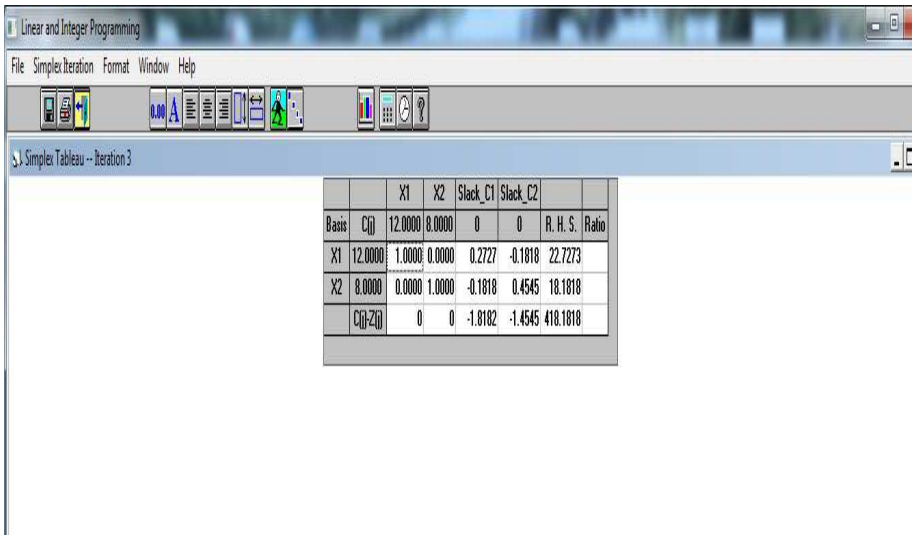
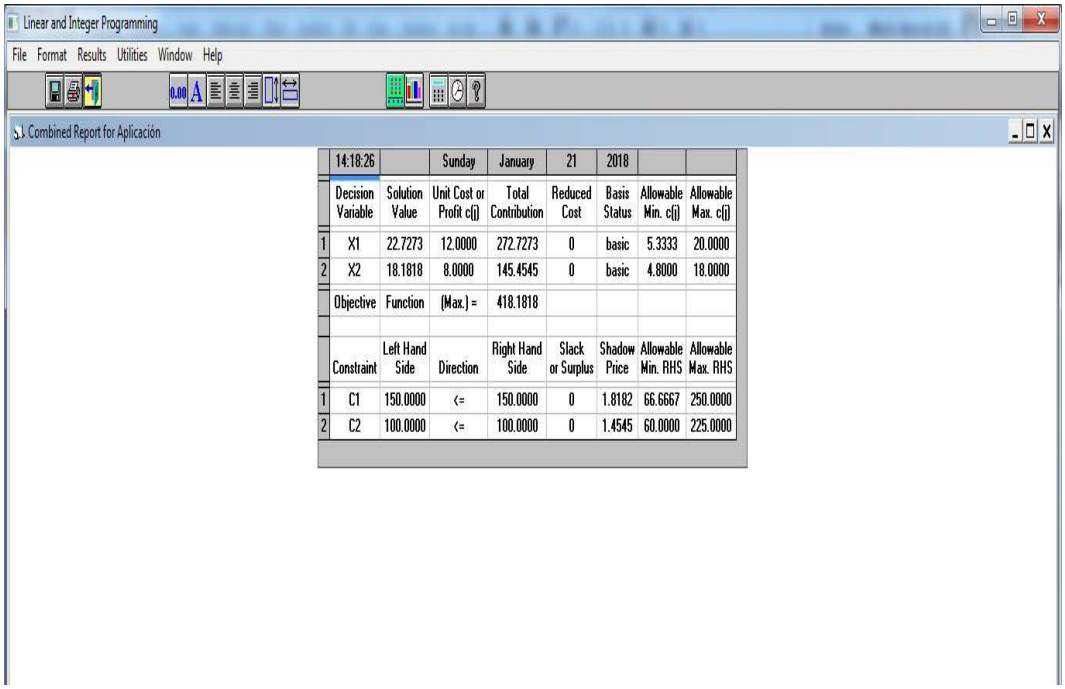


Figura 3.8: *Tabla óptima del simplex.*



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for Aplicación

14:18:26		Sunday	January	21	2018		
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c[j]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c[j]	Allowable Max. c[j]
1 X1	22.7273	12.0000	272.7273	0	basic	5.3333	20.0000
2 X2	18.1818	8.0000	145.4545	0	basic	4.8000	18.0000
Objective	Function	(Max.) =	418.1818				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1 C1	150.0000	<=	150.0000	0	1.8182	66.6667	250.0000
2 C2	100.0000	<=	100.0000	0	1.4545	60.0000	225.0000

Figura 3.9: *Tabla de la solución del problema.*

Por lo que se tiene x_1 =22.72 vagones y x_2 =18.18 camiones, contabiliza las ganancias con cada elemento y muestra el valor máximo $z = 418.18$ que se puede obtener con las restricciones del problema.

Análisis de sensibilidad

1. **Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo (c_j)**

   En la Figura (3.9) muestra el rango mínimo y máximo en que debe de estar los coeficientes de las variables básicas de la función objetivo 5.33 (Allowable Min. c[j]) y 20 (Allowable Max. c[j]) osea $5.33 \leq c_1 \leq 20$ aunque se modifique el valor en ese rango el valor x_1 sigue siendo 22.72.

   El valor de $4.8 \leq c_2 \leq 18$.

2. **Cambios en el vector lado derecho**

   En la parte inferior de la tabla de soluciones Figura (3.9) se da información sobre como quedan las restricciones con la solución dada. Para la restricción de coches existía un tope de 150 *(Right Hand Side o R. H. S.)* y la solución llega a utilizarlos

todos, los 150 *(Left Hand Side)*, no hay excedente ni holgura *(Slack or Surplus)*. Por último muestra cuanto pueden variar las cotas de las restricciones sin que la solución varíe, similar al caso de los coeficientes de las variables en la función objetivo. Variando los 150 coches entre 66.66 y 250 la solución no se modifica. Osea b_1 está entre 66.66$\leq b_1 \leq$250 y b_2 está entre 64$\leq b_2 \leq$240.

3. **Cambios en la matriz de restricciones A**

   Supongamos ahora que la empresa quiera modificar una nueva distribución en la columna básica, en el cual en cada vagón de tren se pueda colocar 7 coches y 2 motos y en cada camión 2 coches y 3 motos.

   Osea en la columna básica $a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ lo cambio por $a_1^{'} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ como se muestra en la Figura (3.10).

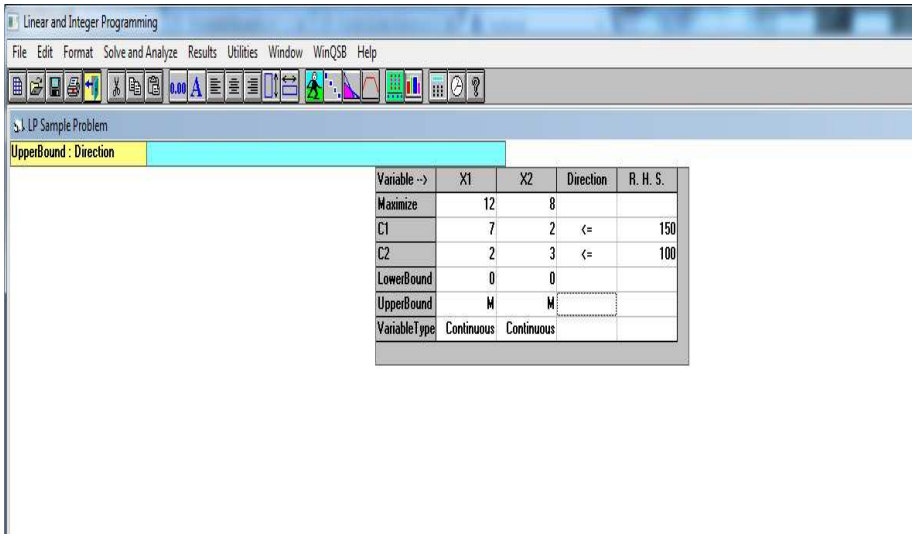
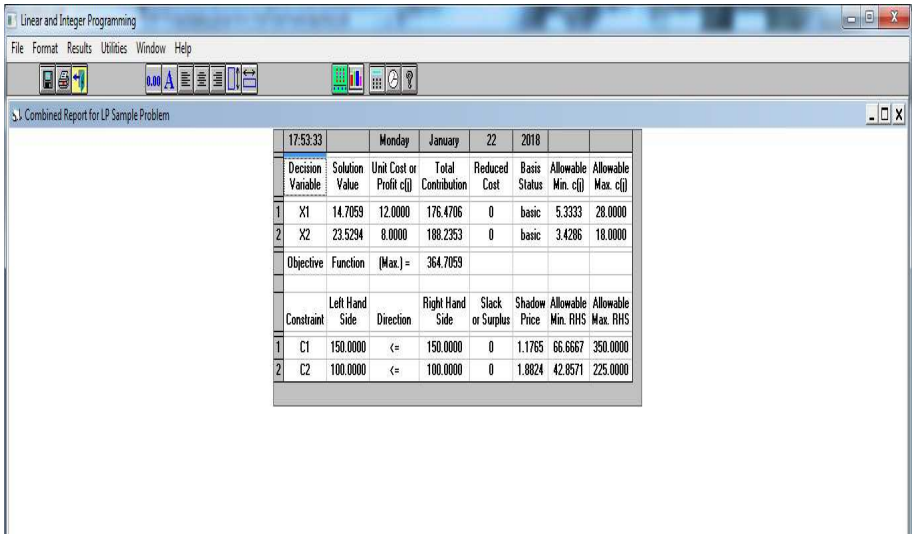


Figura 3.10: *Tabla del problema con la incorporación del nuevo coeficiente de la columna básica.*

Si se resuelve el problema con el nuevo coeficiente de la restricción de la columna básica, esta vez si se modifica la solución. La solución óptima en este caso se reduce y la nueva solución es distribuir 14.70 vagones y 23.52 camiones, reduciendo el beneficio a 364.70 unidades Figura (3.11).



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for LP Sample Problem

	17:53:33		Monday	January	22	2018		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	14.7059	12.0000	176.4706	0	basic	5.3333	28.0000
2	X2	23.5294	8.0000	188.2353	0	basic	3.4286	18.0000
	Objective	Function	(Max.) =	364.7059				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	150.0000	<=	150.0000	0	1.1765	66.6667	350.0000
2	C2	100.0000	<=	100.0000	0	1.8824	42.8571	225.0000

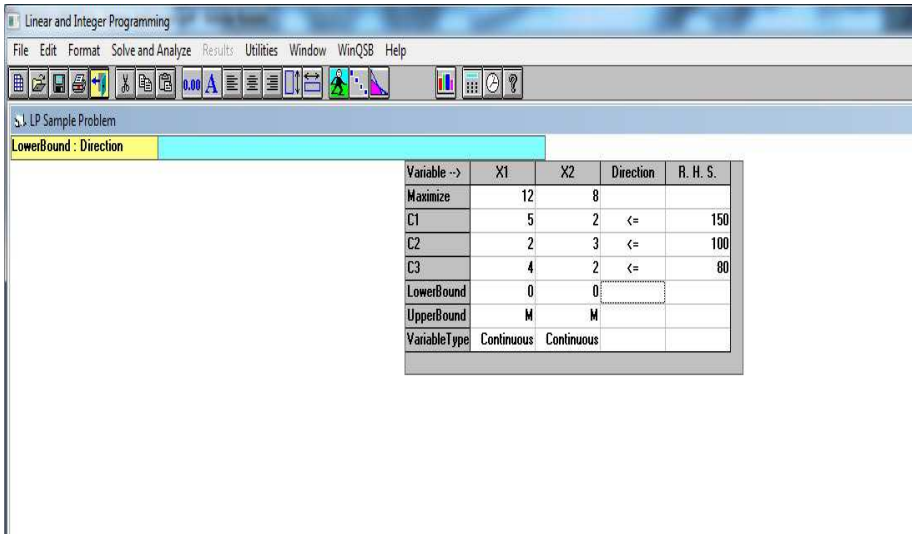
Figura 3.11: *Tabla de la solución del problema.*

4. **Adición de una nueva restricción**

   Ahora acompañando a los productos deben de ir trabajadores de la empresa. Cada vagón de tren necesita de 4 trabajadores y cada camión de 2. La empresa solo dispone de 80 empleados. En este caso se esta añadiendo una nueva restricción al problema: $4x_1 + 2x_2 \leq 80$ Empleados.

   Para hacer esto en WinQsb se selecciona Edit/ Insert a Constraint. Se abre la misma pantalla que a la hora de insertar una nueva variable. Se introduce la nueva restricción al final de la tabla con el nombre Empleados. En la tabla de coeficientes se introducen los correspondientes a la nueva restricción, así como la desigualdad y la cota Figura (3.12).

   Si se resuelve el problema con la nueva restricción, esta vez si se modifica la solución. La solución que se había obtenido en el problema original sobrepasa el número de empleados de la empresa. La solución factible en este caso se reduce y



Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	12	8		
C1	5	2	<=	150
C2	2	3	<=	100
C3	4	2	<=	80
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

Figura 3.12: *Tabla del problema con la incorporación de la nueva restricción.*

la nueva solución es distribuir 5 vagones y 30 camiones, reduciéndose el beneficio a 300 unidades Figura (3.13). Notar que con esta nueva solución no se distribuyen 65 coches, Slack or Surplus en restricción coches.

	16:48:21		Monday	January	22	2018		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	5.0000	12.0000	60.0000	0	basic	5.3333	16.0000
2	X2	30.0000	8.0000	240.0000	0	basic	6.0000	18.0000
	Objective	Function	(Max.) =	300.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	85.0000	<=	150.0000	65.0000	0	85.0000	M
2	C2	100.0000	<=	100.0000	0	1.0000	40.0000	120.0000
3	C3	80.0000	<=	80.0000	0	2.5000	66.6667	127.2727

Figura 3.13: *Solución del problema con la incorporación de la nueva restricción.*

5. **Adición de una nueva actividad**

Supongamos que se dispone de una nueva forma de distribución. Por ejemplo que se permita la distribución de coches y motos por barco. En cada barco entran 4 de las primeras y 3 de las segundas. El beneficio que obtenemos por cada barco es de 4 unidades.

En este caso se esta añadiendo una nueva variable, x_3 o Barco, al problema se selecciona Edit/ Insert a Variable y aparece una ventana par introducir la posición de la nueva variable en la tabla.

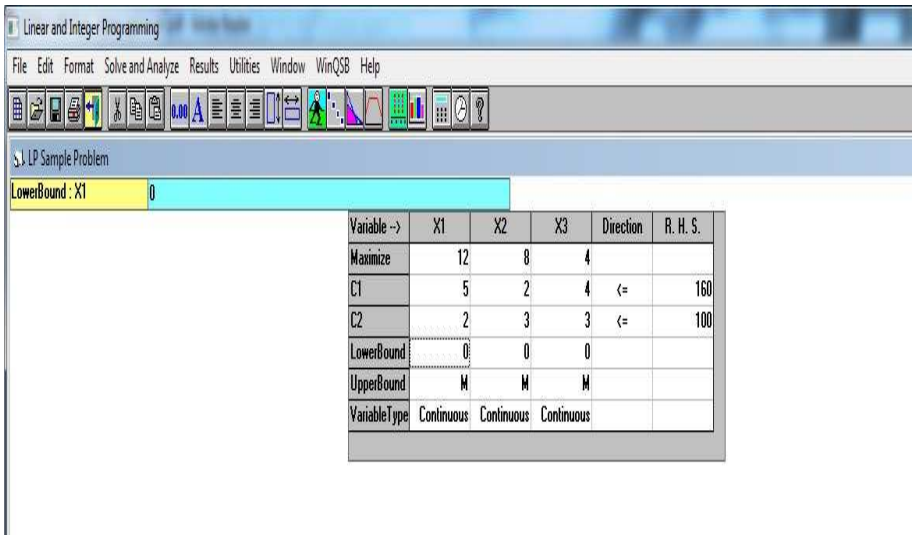
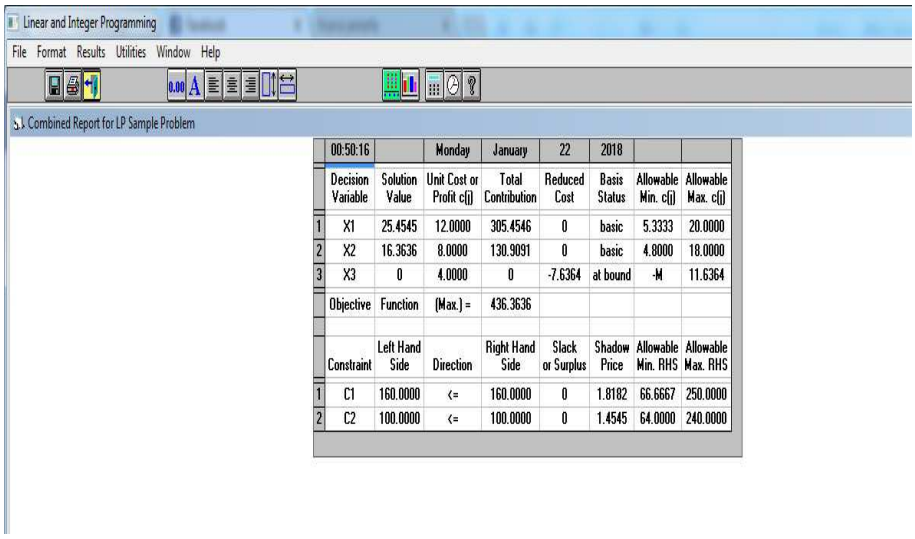


Figura 3.14: *Tabla de coeficientes con la incorporación de la nueva variable.*

Si se resuelve el problema con este nuevo planteamiento se puede comprobar que la solución no varía. El beneficio de la distribución por barco es demasiado pequeño para que sea seleccionado Figura (3.15). En la solución óptima la variable Barco toma valor 0.

Puesto que esta nueva distribución no nos aporta nada la podemos eliminar del problema con Edit/ Delete a Variable. Se selecciona la variable x_3 y se pulsa



	00:50:16		Monday	January	22	2018		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c[j]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c[j]	Allowable Max. c[j]
1	X1	25.4545	12.0000	305.4546	0	basic	5.3333	20.0000
2	X2	16.3636	8.0000	130.9091	0	basic	4.8000	18.0000
3	X3	0	4.0000	0	-7.6364	at bound	-M	11.6364
	Objective	Function	(Max.) =	436.3636				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	160.0000	<=	160.0000	0	1.8182	66.6667	250.0000
2	C2	100.0000	<=	100.0000	0	1.4545	64.0000	240.0000

Figura 3.15: *Solución del problema con la incorporación de la nueva variable.*

Aceptar. Después pregunta si se esta seguro de querer borrarla. Vuelve a mostrar la tabla del problema inicial habiendo eliminado la variable x_3 con todos sus coeficientes, como la Figura (3.7) con el problema original.

Conclusiones

1. El método del Simplex en sus diversas formas de desarrollo, es la base fundamental para la solución de problemas que se presentan en Programación Lineal.

2. El método del DUAL, es el que establece una relación más directa y clara para resolver problemas que se presentan cuando se aplica el análisis de sensibilidad en programación lineal.

3. El análisis de sensibilidad, nos permite resolver de manera más rápida y sencilla problemas de programación lineal que han sido resueltos anteriormente y a los cuales se han realizado algunos cambios, sin tener que resolver el problema nuevamente.

4. En problemas de programación lineal, la tabla final del simplex que da la solución, es la que se utiliza para la solución del nuevo problema que resulta de haber realizado algunos cambios al problema original.

5. El software WinQsb es una herramienta poderosa en la solución de problemas de programación lineal. En el presente trabajo, nos valida los resultados obtenidos operativamente a través de los diferentes formas del simplex.

Recomendaciones

1. Utilizar el Análisis de Sensibilidad en la solución de problemas de programación lineal que han sido resueltos anteriormente pero que le han realizado algunos cambios, ya sea en la función objetivo o en sus restricciones.

2. Seguir profundizando los estudios en el Análisis de Sensibilidad en la solución de problemas de programación lineal, ya que nos va a permitir obtener resultados en forma más rápida y segura.

3. Utilizar el WinQsb como herramienta tecnológica para validar los resultados obtenidos inicialmente, para después aplicarlo con seguridad y en forma directa en la solución de problemas de programación lineal.

4. Poner a disposición de los estudiantes y profesionales interesados en programación lineal, el presente trabajo, en el cual se les da a conocer en forma clara y sencilla la solución de problemas cuando se hace uso del análisis de sensibilidad.

Referencias Bibliográficas

[1.] Alvarado, J. (2010). *El Análisis Post-Optimal en Programación Lineal Aplicada a la Agricultura*. 90 (1): 161-173.

[2.] Alvarez, J. (2005). *Investigación de Operaciones*. Uniersidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú: Librería Beta.

[3.] Bazaraa, M. & Jarvis, J. (2006). *Programación Lineal y Flujo en Redes*. México: Editorial Limusa.

[4.] Carro, R. (2009). *Investigación de Operaciones en Administración*. Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.

[5.] Chang, Y. (2009). *Manual de Uso del WinQsb*. Instituto Tecnológico de Tepic. Nayarit, México.

[6.] Durán, D. (1996). *Interpretación Económica del Análisis de Sensibilidad* 6ta *edición*. Universidad de Barcelona, España.

[7.] García, A. y Ortega, M. (2012). *Programación Lineal*. Universidad Politécnica de Madrid, España.

[8.] García, M. (2013). *Interpretaciones de la Dualidad en Programación Lineal* (tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Querétaro, México.

[9.] García, M. & Román P. (2012). *Módulo de Programación Lineal Entera*.

[10.] Goic, M. (2012). *Dualidad y Análisis de Sensibilidad*. Universidad de Chile, Chile.

[11.] Hillier, F. & Lieberman, G. (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones* 9^a *edición*. Ciudad de México, Mexico: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

[12.] Lahoz, D. (2014). *Breve Manual de WinQsb*.

[13.] Quesada, V. & Vergara, J. (2003). *Análisis Cuantitativo con WinQsb*. Universidad de Cartagena, Colombia.

[14.] Taha, H. (2012). *Investigación de Operaciones* 9^a *edición*. Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación.