UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE POINCARÉ PARA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESCALAR DE ORDÈN TRES"

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTADO POR:

Bach. Mat. ALBUJAR SOPLOPUCO PERCY ESWAR

ASESOR:

Lic. Mat. CORNETERO CAPITÁN JUAN ALBERTO

LAMBAYEQUE - PERÚ

2015

UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE POINCARÉ PARA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESCALAR DE ORDEN TRES"

Tesis
Para optar el título profesional de
Licenciado en Matemáticas

presentado por:

Bach. Mat. Albujar Soplopuco Percy Eswar

Asesor
Lic. Mat. Cornetero Capitán Juan Alberto

Lambayeque – Perú
2015

UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE POINCARÉ PARA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESCALAR DE ORDEN TRES"

Tesis
Para optar el título profesional de
Licenciado en Matemáticas

presentado por:

Bach. Mat. Albujar Soplopuco Percy Eswar

Asesor
Lic. Mat. Cornetero Capitán Juan Antonio

Lambayeque – Perú
2015

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Escuela Profesional De Matemática

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada "Una generalización del teorema de Poincaré para la ecuación diferencial escalar de orden tres", presentado por el Bach. Mat. Percy Eswar Albujar Soplopuco en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Lic. Mat. Blas Rebaza Juana Doris

Presidente del Jurado

Lic. Mat. Peralta Lui Marco Antonio

Secretario del Jurado

Mag. Santamaría Santisteban Oscar A.

Vocal del Jurado

Fecha de defensa: 22-05-2015

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

"UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE POINCARÉ PARA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESCALAR DE ORDEN TRES"

Lic. Mat. Cornetero Capitán Juan Antonio

Asesor

Bach. Mat. Albujar Soplopuco Percy Eswar

Autor

Lambayeque – Perú

2015

Agradecimiento

Agradezco en primer lugar a Dios quien nos da la vida y la ha llenado de bendiciones en todo este tiempo, a él que con su infinito a amor nos ha dado la sabiduría suficiente para culminar nuestra carrera universitaria.

Así también deseo expresar mi más sincero agradecimiento, reconocimiento y cariño a mis padres por todo el esfuerzo que hicieron para darme una profesión y hacerme una persona de bien, gracias por los sacrificios y la paciencia que demostraron todos estos años; gracias a ustedes he llegado hasta aquí.

Gracias a mi hermano y hermanas quienes han sido mis amigos fieles y sinceros, en los que he podido confiar y apoyarme para seguir adelante. Agradezco también de manera especial a mi asesor de tesis: Lic. Mat. Juan Cornetero Capitan y al Mag.Mat.Fernando Huancas Suárez quién con sus conocimientos y apoyo supo guiar el desarrollo de la presente tesis desde el inicio hasta su culminación.
"Ahora podemos decir que todo lo que soy es gracias a todos ustedes"

Dedicatoria

A mis padres Mario y Elvis que con su amor y apoyo estuvieron siempre a lo largo de mi vida estudiantil, a mi hija Marina y a mi esposa Cristina que siempre tuvieron una palabra de aliento en los momentos difíciles.

Resumen

En este trabajo, se estudia el comportamiento asintótico de una ecuación diferencial de orden tres, donde los coeficientes son perturbaciones de la ecuación lineal con coeficientes constantes. Se introduce un cambio de variable y se deduce que la nueva variable satisface una ecuación diferencial de segundo orden de tipo Riccati. Se asumen tres hipótesis. La primera es la siguiente: todas las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación lineal de segundo orden tienen parte real distinta.
Las otras dos hipótesis están relacionadas con las funciones de perturbación. Bajo esta hipótesis general obtenemos cuatro resultados importantes. Los primeros dos resultados están relacionados con la aplicación del Teorema del Punto Fijo para probar que la ecuación de Riccati tiene una única solución. El siguiente resultado es concerniente al comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Riccati.
El tercer teorema principal, se introduce para para establecer la existencia de un sistema fundamental de soluciones así como fórmulas precisas para el comportamiento asintótico de la ecuación diferencial lineal de tercer orden.

Abstract

In this work, the asymptotic behavior of a third order differential equation where the coefficients are perturbations of linear equation with constant coefficients is studied. A change of variable is introduced and it follows that the new variable satisfies a second order differential equation of Riccati type. Three hypotheses are assumed. The first is as follows: all the roots of the characteristic equation associated with the second-order linear equation have different real part.

The other two hypotheses are related to the functions of disturbance. Under this general hypothesis we obtain four important results. The first two results are related to the implementation of Fixed Point Theorem to prove that the Riccati equation has a unique solution. The following result concerning the asymptotic behavior of the solutions of the Riccati equation.

The third main theorem is introduced for establishing the existence of a fundamental system of solutions and precise for the asymptotic behavior of the linear differential equation of third order formulas.

Índice general

Introducción

En esta tesis estamos interesados en la siguiente ecuación diferencial de tercer orden

$$x^{(3)} + \sum_{i=0}^{2}(a_i + r_i(t))x^{(i)} = 0, \ \ a_i \in \mathbb{R}, \ \ r_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

Esta ecuación es perturbación de la siguiente ecuación con coeficientes constantes

$$x^{(3)} + \sum_{i=0}^{2} a_i x^{(i)} = 0, \ \ a_i \in \mathbb{R} \tag{2}$$

El análisis clásico de la ecuación (1) se centra en dos cuestiones: la existencia de un sistema fundamental de soluciones y la caracterización del comportamiento asintótico de estas soluciones. Los trabajos pioneros para responder ambas cuestiones son los desarrollados por Poincaré [1], también han sido investigados en [2, 3, 4, 5]. En la actualidad, a pesar de ser un viejo problema, aún se sigue investigando y obteniéndose nuevos resultados en comportamiento asintótico, por ejemplo en [6, 7, 8, 9,10].

Actualmente existen tres formas de estudiar el problema del comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (1): la teoría analítica, la teoría no analítica y el método escalar. La esencia de la teoría analítica consiste en la suposición de alguna representación de los coeficientes y de la solución, por ejemplo una representación por series de potencias (ver [13] para mayores detalles). Con respecto a la teoría no analítica, se conoce que sus métodos consisten en dos pasos: primero un cambio de variable para transformar la ecuación (1) en un sistema de primer orden de tipo Poincaré y entonces por aplicación de un proceso de diagonalización se obtienen las formulas asintóticas para las soluciones de la ecuación (1) (para mayor detalle consultar [3, 14, 15,16]). Mientras que en el método escalar [2, 6, 7, 8,9, 10, 11,12] el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (1) es obtenido mediante un cambio de variable el cual reduce la ecuación (1) en una ecuación de tipo Riccati de segundo orden entonces los resultados para la ecuación (1) son derivados analizando el comportamiento asintótico de la ecuación de tipo Riccati obtenida mediante este cambio de variable.

En particular en este trabajo se muestran resultados del comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (1) aplicando el método escalar introducido por Bellman en [11], y recientemente aplicado por Figueroa y Pinto en [6, 7], Stepin [8, 9], Pietroczuk [10].

En esta tesis reorganizamos y reformulamos el método escalar original de Bellman introduciendo nuevas hipótesis para caracterizar el comportamiento asintótico de la ecuación (1) considerando que las funciones de perturbaciones $r_i \in L^p[t_0, \infty[$, $i = 0, 1, 2$.

Esta tesis se desarrolla en tres etapas: en la primera etapa se introduce un cambio de variable y se deduce que la nueva variable es una solución de la ecuación tipo Riccati. En la segunda etapa, para obtener que el problema este bien puesto y caracterizar el comportamiento asintótico de la ecuación de tipo Riccati se asume una hipótesis sobre la parte no lineal de la ecuación (1) así como también sobre las funciones de perturbaciones r_i.Finalmente en la tercera etapa se trasladan los resultados de la ecuación tipo Riccati a las soluciones de la ecuación (1), en esta etapa se deduce la existencia de un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1), y concluimos el proceso con la formulación y prueba de fórmulas de integración asintótica para las soluciones de la ecuación (1).

Estos resultados se resumen en el capítulo 2 y se obtienen bajo las siguientes hipótesis:

(I) Todas las raíces del polinomio característico $\lambda^3 + \sum_{i=0}^{2} a_i \lambda^i$ asociado a la ecuación (2) tienen parte real distinta.

(II) Para cada $i = 0, 1, 2$ las funciones de perturbación r_i son seleccionadas de modo que $\mathcal{L}(r_i) \to 0$ cuando $t \to \infty$ donde $\mathcal{L}$ es un funcional definido adecuadamente sobre $L^p[t_0, \infty[$

Capítulo 1

Preliminares

De aquí para adelante la ecuación (1) se escribirá como (1.1), mientras que la ecuación (2) se escribirá como (1.2).
En este capítulo estudiaremos los resultados para la ecuación (1.1), que como ya se dijo se obtienen mediante un cambio de variable que reduce el orden a una de tipo Riccati. Asumiremos que las raíces del polinomio característico de la ecuación (1.2) tienen parte real distinta.
Iniciaremos definiendo lo siguiente

Definición 1.1. Dadas las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que

$$f = O(g) \;\Leftrightarrow\; \exists\, k > 0 \;:\; |f(t)| \leq k|g(t)|,\; t \in \mathbb{R}$$

Definición 1.2. Dadas las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que

$$f = o(g) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$$

SECCIÓN 1.1
Ecuación diferencial de orden 3

Consideremos la ecuación

$$x^{(3)} + \sum_{i=0}^{2} a_i x^{(i)} = 0, \qquad a_i \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

Diremos que el polinomio $P(\lambda) = \lambda^3 + \sum_{i=0}^{2} a_i\lambda_i$ es **polinomio característico** de la ecuación (1.1). Si λ_i, $i = 1, 2, 3$ son las raíces de P entonces diremos que λ_i, $i = 1, 2, 3$

son raíces características de la ecuación (1.1).

Para la perturbación de la ecuación (1.1) dada por la ecuación

$$x^{(3)} + \sum_{i=0}^{2}(a_i + r_i(t))x^{(i)} = 0, \qquad a_i \in \mathbb{R},\ r_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1.2}$$

se tiene el siguiente lema

Lema 1.1. Consideremos la ecuación (1.2) y supongamos que las raíces características, λ_i, $i = 1, 2, 3$, de (1.1) son distintas. Entonces se tiene un conjunto de soluciones de la forma

$$y_i(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t}[\lambda_i + z_i(s)]ds\right), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

donde z_i, $i = 1, 2, 3$ satisfacen respectivamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} z_i'' + (3\lambda_i + a_2)z_i' + (3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1)z_i + r_0(t) + \lambda_i r_1(t) + \lambda_i^2 r_2(t) \\ + (2\lambda_i r_2(t) + r_1(t))z_i + r_2(t)z_i' + 3z_iz_i' + (3\lambda_i + a_2 + r_2(t))z_i^2 + z_i^3 = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Demostración. La demostración consiste en verificar que y_i, $i = 1, 2, 3$ satisfacen la ecuación (1.2), pongamos

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t}[\lambda + z(s)]ds\right).$$

para simplificar la notación, donde λ es una raíz característica de (1.1), luego

$$\begin{aligned} y'(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t}[\lambda + z(s)]ds\right)(\lambda + z(t)) = y(t)(\lambda + z(t)) \\ y''(t) &= y(t)(\lambda + z(t))^2 + y(t)z'(t) \\ y^{(3)}(t) &= y(t)(\lambda + z(t))^3 + 3y(t)(\lambda + z(t))z'(t) + y(t)z''(t) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} y^{(3)} + (a_2 + r_2)y'' + (a_1 + r_1)y' + (a_0 + r_0)y =& y(\lambda + z)^3 + 3y(\lambda + z)z' + yz'' + (a_0 + r_0)y \\ &+ (a_1 + r_1)y(\lambda + z) + (a_2 + r_2)[y(\lambda + z)^2 + yz'] \\ =& y[(\lambda + z)^3 + 3(\lambda + z)z' + z'' + (a_2 + r_2)[(\lambda + z)^2 + z'] \\ &+ (a_1 + r_1)(\lambda + z) + (a_0 + r_0)] \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$
\begin{aligned}
(\lambda+z)^3+3(\lambda+z)z'+z''+(a_2+r_2)[(\lambda+z)^2+z']+(a_1+r_1)(\lambda+z)+(a_0+r_0)&=\\
\lambda^3+3\lambda^2 z+3\lambda z^2+z^3+3\lambda z'+3zz'+z''+a_2\lambda^2+2a_2\lambda z+a_2z^2&\\
+r_2\lambda^2+2r_2\lambda z+r_2z^2+a_2z'+r_2z'+a_1\lambda+a_1z+r_1\lambda+r_1z+a_0+r_0&=\\
z''+(3\lambda+a_2)z'+(3\lambda^2+2a_2\lambda+a_1)z+r_0+\lambda r_1+\lambda^2 r_2+(2\lambda r_2+r_1)z&\\
+r_2z'+3zz'+(3\lambda+a_2+r_2)z^2+z^3&=0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, y es la solución de (1.2). Como las características son distintas tenemos tres ecuaciones para z, dependiendo de λ; luego, dos soluciones z_i, para $i=1,2,3$. □

Este lema presenta de otra forma el cambio de variables $z=\frac{y'}{y}-\lambda$, cuando las raíces características de (1.1) son distintas.
Ahora estudiaremos la ecuación (1.4) para conocer el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (1.2). De hecho, conociendo soluciones de (1.4) para $i=1,2,3$se obtienen soluciones para la ecuación (1.2). Para esto debemos conocer las raíces características de la ecuación

$$z''+(3\lambda+a_2)z'+(3\lambda^2+2a_2\lambda+a_1)z=0.$$

Lema 1.2. Si las raíces de P, λ_i, $i=1,2,3$ son distintas, entonces $\lambda_j-\lambda_i$, $i\neq j$ satisfacen la ecuación

$$\lambda^2+(3\lambda_i+a_2)\lambda+3\lambda_i^2+2a_2\lambda_i+a_1=0..$$

Demostración. Basta verificar que satisfacen la ecuación, luego

$$
\begin{aligned}
(\lambda_j-\lambda_i)^2+(3\lambda_i+a_2)(\lambda_j-\lambda_i)+3\lambda_i^2+2a_2\lambda_i+a_1&=\\
\lambda_j^2-\lambda_i\lambda_j+\lambda_i^2+3\lambda_i\lambda_j-3\lambda_i^2+a_2\lambda_j-a_2\lambda_i+3\lambda_i^2+2a_2\lambda_i+a_1&=\\
\lambda_j^2+\lambda_i\lambda_j+\lambda_i^2+a_2\lambda_j+a_2\lambda_i+a_1,&
\end{aligned}
$$

pero si $i\neq j$ entonces $\lambda_j-\lambda_i\neq 0$,

$$\lambda_i^3+a_2\lambda_i^2+a_1\lambda_i+a_0=0$$

y

$$\lambda_j^3 + a_2\lambda_j^2 + a_1\lambda_j + a_0 = 0,$$

luego, restando esta ecuaciones y dividiendo por $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ se obtiene que

$$\lambda_j^2 + \lambda_i\lambda_j + \lambda_i^2 + a_2\lambda_j + a_2\lambda_i + a_1 = 0.$$

□

SECCIÓN 1.2

Ecuación tipo Riccati

Aquí estudiaremos una ecuación de tipo Riccati.

Consideremos la ecuación diferencial $x'' + b_1x' + b_0x = 0$. Sea $Q(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_0$ el polinomio característico de esta ecuación y γ_i, $i = 1,2$ las raíces de Q, con $\gamma_1 \neq \gamma_2$ y $\operatorname{Re}\gamma_i \neq 0$, $i = 1,2$. Definimos la función g como

$$g(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha_1(t-s)} - e^{-\alpha_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1 = -\operatorname{Re}\alpha_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 = -\operatorname{Re}\alpha_2 < 0$,

$$g(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha_1(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{-\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1 = -\operatorname{Re}\alpha_1 < 0$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$, y

$$g(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq s \\ e^{\gamma_1(t-s)} - e^{\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$. Diremos que g es la función de Green de esta ecuación.

En estricto rigor, la función de Green debería contener un factor $1/(\gamma_1 - \gamma_2)$, pero se puede omitir ya que lo podemos eliminar con un cambio de variables.

Notemos que para la función de Green tenemos 3 casos, y podemos escribir los resultados para la ecuación tipo Riccati simplemente poniendo g. Sin embargo, se mencionarán los distintos casos cuando corresponda.

Lema 1.3. Dados k_1, $k_2 > 0$ existen constantes M, k_a, k_b y $k_f > 0$ que satisfacen

$$k_a + Mk_b + M^2(k_1 + k_f) + M^3k_2 = M, \qquad k_b + 2M(k_1 + k_f) + 3M^2k_2 < 1.$$

Demostración. Escogemos M tal que $0 < 1 - 2k_1M - 3k_2M^2$, es decir, M que satisface

$$0 < M < \frac{-2k_1 + \sqrt{4k_1^2 + 12k_2}}{6k_2}$$

Luego, escogemos k_b y k_f tal que $k_b + 2k_fM < 1 - 2k_1M - 3k_2M^2$, y podemos ya que primero tomamos $0 < k_b < 1 - 2k_1M - 3k_2M^2$ y luego

$$0 < k_f < \frac{1}{2M}(1 - 2k_1M - 3k_2M^2 - k_b).$$

Así, se satisface la desigualdad. Teniendo M, k_b y k_f fijos, k_a se encuentra de la relación

$$k_a = M - k_bM - M^2(k_1 + k_f) - k_2M^3,$$

y $k_a > 0$, pues

$$M(k_1 + k_f) + 2k_2M^2 < 1 - k_b - M(k_1 + k_f) - k_2M^2.$$

Este lema asegura la existencia de las constantes M, k_a, k_b y k_f, que se ocuparán en el siguiente resultado.

Lema 1.4. Consideremos la ecuación diferencial escalar

$$z'' + b_1z' + b_0z = a(t) + b(t)z + c(t)z' + c_1zz' + (c_2 + f(t))z^2 + c_3z^3 \tag{1.5}$$

donde b_i y c_j, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ son constantes; a, b, c y f están definidas en $[0, \infty)$. Sean γ_1, γ_2, las raíces del polinomio $Q(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_0$; y supongamos que $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 \neq 0$, $\mathcal{G}(a)$, $\mathcal{L}(c)$ y $\mathcal{L}(f) \to 0$, cuando $t \to \infty$, donde

$$\mathcal{G}(r)(t) = \left|\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)r(s)ds\right| + \left|\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)r(s)ds\right|$$

y

$$\mathcal{L}(r)(t) = \int_{t_0}^{\infty} \left(|g(t,s)| + \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right|\right)|r(s)|ds,$$

con g la función de Green de la ecuación $x'' + b_1x' + b_0x = 0$. Entonces existe una solución de la ecuación (1.5), digamos z, tal que z, $z' \to 0$, cuando $t \to \infty$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ y $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Sabemos que la ecuación (1.5) es equivalente a la ecuación integral

$$z(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)]ds,$$

por variación de parámetros. Además, notemos que para todo $t \geq t_0$

$$\mathcal{L}(1)(t) \leq \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + 2,$$

ya que en el primer caso ($\mathrm{Re}\,\gamma_1$, $\mathrm{Re}\,\gamma_2 < 0$) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(1)(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \left(|g(t,s)| + \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| \right) ds \\
&= \int_{t_0}^{t} (|e^{-\alpha_1(t-s)} - e^{-\alpha_2(t-s)}| + |\alpha_2 e^{-\alpha_2(t-s)} - \alpha_1 e^{-\alpha_1(t-s)}|)ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (e^{-\alpha_1(t-s)} + e^{-\alpha_2(t-s)} + \alpha_2 e^{-\alpha_2(t-s)} + \alpha_1 e^{-\alpha_1(t-s)})ds \\
&\leq \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + 2;
\end{aligned}$$

y para los otros casos se deduce de forma análoga.

Consideremos el siguiente espacio

$$C_0^1[t_0,\infty) = \{z : [t_0,\infty) \to \mathcal{C}\ z, z' \text{ son continuas y } z, z' \to 0, \text{ cuando } t \to \infty\},$$

que denotaremos por C_0^1 para simplificar (en el caso que $\gamma_i \in \mathcal{C}$ tomamos $z : [t_0,\infty) \to \mathcal{C}$). Observemos que C_0^1 es un espacio de Banach con la norma

$$\|z\| = \sup\{|z(t)| + |z'(t)| \mid t \in [t_0,\infty)\}$$

Entonces definamos el operador T como

$$Tz(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)ds].$$

luego, tenemos que $T : C_0^1 \to C_0^1$ (ya que $\mathcal{L}(r) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $r \in C_0^1$, por el lema 1.1), y buscaremos un punto fijo T en algún conjunto invariante. Notemos que

$$(Tz)'(t) \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)ds].$$

Escojamos M, k_a, k_b y k_f como en el lema anterior, con

$$k_1 = (c_1 + c_2)\left(\frac{1}{|\gamma_1|} + \frac{1}{\gamma_2} + 2\right) \quad \text{y} \quad k_2 = c_3\left(\frac{1}{|\gamma_1|} + \frac{1}{|\gamma_2|} + 2\right),$$

y t_0 tal que $|\mathcal{G}(a)(t)| \leq k_a$, $\mathcal{L}(b)(t) + \mathcal{L}(c)(t) \leq k_b$ y $\mathcal{L}(f)(t) \leq k_f$ para todo $t \geq t_0$. Sean $B = B[0, M]$ y $z \in B$ para $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
|Tz(t)| \leq & \left|\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)ds\right| + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)||b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s)|ds \\
& + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)||(c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)|ds \\
\leq & \left|\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)a(s)ds\right| + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|[|b(s)||z(s)| + |c(s)||z'(s)| + c_1|z(s)||z'(s)|]ds \\
& + \int_{t_0} \infty |g(t,s)|[(c_2 + |f(s)|)|z(s)|^2 + c_3|z(s)|^3]ds
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|(Tz)'(t)| \leq & \left(\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)a(s)ds\right) + \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| |b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s)|ds \\
& + \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| |(c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)|ds \\
& \left(\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)a(s)ds\right) + \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| [|b(s)||z(s)| + |c(s)||z'(s)| + c_1|z(s)||z'(s)|]ds \\
& + \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| [(c_2 + |f(s)|)|z(s)|^2 + c_3|z(s)|^3]ds
\end{aligned}$$

luego,

$$|Tz(t)| + |(Tz)'(t)| \leq \mathcal{L}(a)(t) + M[\mathcal{L}(b)(t) + \mathcal{L}(c)(t)] + c_1 M^2 \mathcal{L}(1)(t) + c_2 M^2 \mathcal{L}(1)(t)$$

$$+ M^2 \mathcal{L}(f)(t) + c_3 M^3 \mathcal{L}(1)(t)$$

Con esto tenemos,

$$|Tz(t)| + |(Tz)'(t)| \leq k_a + Mk_b + k_1 M^2 + M^2 k_f + k_2 M^3.$$

Así, $\|Tz\| \leq M$. Por lo tanto, $Tz \in B$.

Sean $z_1, z_2 \in B$, entonces

$$Tz_1(t) - Tz_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[b(s)(z_1(s) - z_2(s)) + c(s)(z_1'(s) - z_2'(s)) + c_1(z_1(s)z_1'(s)$$

$$- z_2(s)z_2'(s)) + (c_2 + f(s))(z_1^2(s) - z_2^2(s)) + c_3(z_1^3(s) - z_2^3(s))]ds$$

Luego, para $t \geq t_0$ se tiene

$$|Tz_1(t) - Tz_2(t)| \leq \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|[|b(s)||z_1(s) - z_2(s)| + |c(s)||z_1'(s) - z_2'(s)|$$
$$+ c_1|z_1(s)z_1'(s) - z_2(s)z_2'(s)| + (c_2 + |f(s)|)|z_1^2(s) - z_2^2(s)| + c_3|z_1^3(s) - z_2^3(s)|]ds$$

como

$$\begin{aligned}
z_1(t)z_1'(t) &= z_1(t)(z_1'(t) - z_2'(t)) - z_2'(t)(z_1(t) - z_2(t)) \\
z_1^2(t) - z_2^2(t) &= (z_1(t) - z_2(t))(z_1(t) + z_2(t)), \\
z_1^3(t) - z_2^3(t) &= (z_1(t) - z_2(t))(z_1^2(t) + z_1(t)z_2(t) + z_2^2(t)) \\
|z_1(t) + z_2(t)| &\leq 2M
\end{aligned}$$

y

$$|z_1'(t) + z_2'(t)| \leq 2M$$

tenemos

$$\begin{aligned}
|Tz_1(t) - Tz_2(t)| \leq & \left(\int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|[|b(s)| + |c(s)|]ds + 2c_1M \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|ds \right. \\
& \left. +2M \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|[c_2 + f(s)]ds + 3c_3M^2 \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|ds \right) \|z_1 - z_2\|
\end{aligned}$$

Análogamente para $(Tz)'$ tenemos

$$\begin{aligned}
(Tz_1)'(t) - (Tz_2)'(t) = & \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)[b(s)(z_1(s) - z_2(s)) + c(s)(z_1'(s) - z_2'(s)) + c_1(z_1(s)z_1'(s) \\
& -z_2(s)z_2'(s)) + (c_2 + f(s))(z_1^2(s) - z_2^2(s)) + c_3(z_1^3(s) - z_2^3(s))]ds
\end{aligned}$$

Luego, para $t \geq t_0$ se tiene

$$\begin{aligned}
|(Tz_1)'(t) - (Tz_2)'(t)| \leq & \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| [|b(s)||z_1(s) - z_2(s)| + |c(s)||z_1'(s) - z_2'(s)|]ds \\
& + \int_{t_0} \infty \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| [c_1|z_1(s)z_1'(s) - z_2(s)z_2'(s)| + (c_2 + |f(s)|)|z_1^2(s) - z_2^2(s)| \\
& +c_3|z_1^3(s) - z_2^3(s)|]ds \\
\leq & \left(\int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| [|b(s)| + |c(s)|]ds + 2c_1M \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| \right. \\
& \left. +2M \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| (c_2 + |f(s)|)ds + 3c_3M^2 \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| (t,s)ds \right) \|z_1 - z_2\|
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}|Tz_1(t) - Tz_2(t)| + |(Tz_1)'(t) - (Tz_2)'(t)| &\leq [\mathcal{L}(b)(t) + \mathcal{L}(c)(t) + 2M(c_1 + c_2)\mathcal{L}(1)(t) \\ &\quad +2M\mathcal{L}(f)(t) + 3c_3M^2\mathcal{L}(1)(t)]\|z_1 - z_2\| \\ &\leq [k_b + 2M(k_1 + k_f) + 3k_2M^2]\|z_1 - z_2\|\end{aligned}$$

pero $k_b + 2M(k_1 + k_f) + 3k_2M^2 < 1$.
Con esto tenemos $\|Tz_1 - Tz_2\| \leq [k_b + 2M(k_1 + k_f) + 3k_2M^2]\|z_1 - z_2\|$. Por lo tanto tenemos que T es un operador contractivo de B en B, y como B es completo existe un único $z \in B \subseteq \mathcal{C}_0^1$ tal que, $Tz = z$. Así, tenemos una solución, digamos z de la ecuación (1.5) tal que $z, z' \to 0$ cuando $t \to \infty$.
Observemos que si $a, b, c, f \to 0$ cuando $t \to \infty$ entonces se satisfacen las condiciones de este lema, usando el lema 1.1, y además $z'' \to 0$ cuando $t \to \infty$. De la misma manera, se cumplen las hipótesis de este lema si $a, b, c, f \in L^p$ (por el lema 1.1). Por lo tanto, se pueden mezclar estas hipótesis, es decir, podemos tomar $a, c \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $b, f \in L^p$, por ejemplo. □

Ya sabemos que existe una solución de (1.5), digamos z, tal que $z, z' \to 0$ cuando $t \to \infty$. Ahora podemos precisar el comportamiento de esta solución, dependiendo de las condiciones sobre γ_i, $i = 1, 2$; tenemos tres casos, y para cada uno de ellos un resultado.

Corolario 1.1. Consideremos la ecuación (1.5), las hipótesis y conclusiones de la demostración del lema 1.4. Supongamos además que $\operatorname{Re}\gamma_1 = -\operatorname{Re}\alpha_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 = -\operatorname{Re}\alpha_2 < 0$, dado

$$0 < \beta \leq \frac{\alpha}{2},$$

donde $\alpha = \operatorname{mín}\{\operatorname{Re}\alpha_1, \operatorname{Re}\alpha_2\}$, y tal que

$$0 < K < \frac{\alpha - \beta - (c_1 + c_2 + c_3M)M}{(\alpha - \beta)(1 + \alpha + \beta + M)}$$

se satisface que

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|ds \leq K$$

para todo $t \geq t_0$, y que para c y f se satisface la misma desigualdad. Entonces z la solución de (1.5) dada por el lema 1.4 satisface

$$z(t),\ z'(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds\right).$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, supongamos que $c_i > 0$, $i = 1,2,3$, γ_1, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$. Sabemos que existe una solución de (1.5) que satisface la ecuación

$$z(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)]ds$$

y $\|z\| \leq M$. En este caso

$$g(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha_1(t-s)} - e^{-\alpha_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

luego, la ecuación que satisface z es

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha_1(t-s)} - e^{-\alpha_2(t-s)}[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)]ds$$

Tomemos la sucesión dada por $z_0 = 0$ y $z_{n+1} = Tz_n$ para $n \geq 0$, donde T es el operador definido en la demostración del lema 1.4. Sabemos que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$, ya que T es contractivo. Observemos que la condición sobre b equivale a que se satisfaga

$$\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}|b(s)| \leq Ke^{(\alpha-\beta)t}$$

pata todo $t \leq t_0$, y se tiene lo mismo para c y f.

Ahora probaremos por inducción que para todo $t \geq t_0$

$$|z_n(t)| \leq N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, con

$$N \geq 2 + KN(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + M) + M(c_1 + c_2 + c_3 M)\frac{N}{\alpha - \beta}$$

Para $n = 0,1$ claramente es cierto. Supongamos que es cierto para $n = k$, y veamos que sucede para $n = k+1$, entonces

$$\begin{aligned} |z_{k+1}(t)| \leq & \int_{t_0}^{t} (e^{-\alpha_1(t-s)} + e^{-\alpha_2(t-s)})[|a(s)| + |b(s)||z(s)| + |c(s)||z'(s)| + c_1|z_k(s)||z_k'(s)| \\ & + (c_2 + |f(s)|)|z_k(s)|^2 + c_3|z_3(s)|^3]ds \\ \leq & \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \Bigg[|a(s)| + Nb(s) \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau + (\alpha_1 + \alpha_2)N|c(s)| \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau \\ & + c_1 MN \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau + (c_2 f(s))MN \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau \\ & + c_3 M^2 N \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau \Bigg] ds, \end{aligned}$$

Luego usando cambio de región de integración y aplicando el teorema de Fubini se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)| \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds &= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} e^{(\alpha-\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|d\tau ds \\
&= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t}\int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|d\tau ds \\
&= e^{\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)| \int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}|b(s)|dsd\tau \\
&\leq Ke^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|e^{(\alpha-\beta)t}d\tau \\
&= K\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds;
\end{aligned}
$$

y para c y f tenemos la misma desigualdad; además

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds &= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)| \int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}dsd\tau \\
&\leq \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}\int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|e^{(\alpha-\beta)t}d\tau \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds.
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| &\leq \Bigg(2+KN+(\alpha_1+\alpha_2)KN+M(c_1+c_2)\frac{N}{\alpha-\beta} \\
&\quad +KMN+M^2c_3\frac{N}{\alpha-\beta}\Bigg)\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds \\
&\leq N\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds.
\end{aligned}
$$

Y ahora para la derivada tenemos

$$
\begin{aligned}
|z'_{k+1}(t)| &= \int_{t_0}^{t}(\alpha_2 e^{-\alpha_2(t-s)}+\alpha_1 e^{-\alpha_1(t-s)})[|a(s)|+|b(s)||z_k(s)|+|c(s)||z'_k(s)|+c_1|z_k(s)||z'_k(s)| \\
&\quad +(c_2+|f(s)|)|z_k(s)|^2+c_3|z_3(s)|^3]ds \\
&\leq (\alpha_1+\alpha_2)\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\Bigg[|a(s)|+N\int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau\{|b(s)|+(\alpha_1+\alpha_2)|c(s)| \\
&\quad +c_1M+(c_2+|f(s)|)M+c_3M^2\}\Bigg]ds,
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\begin{aligned} |z'_{k+1}(t)| &\leq (\alpha_1+\alpha_2)\Bigg(2+KN(1+\alpha_1+\alpha_2+M) \\ &\qquad +M(c_1+c_2+c_3M)\frac{N}{\alpha-\beta}\Bigg)\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds \\ &\leq (\alpha_1+\alpha_2)N\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$N \geq \frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta-K(\alpha-\beta)(1+\alpha_1+\alpha_2+M)-M(c_1+c_2)-M^2c_3}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} N[\alpha-\beta-K(\alpha-\beta)(1+\alpha_1+\alpha_2+M)-M(c_1+c_2)-M^2c_3] &\geq 2(\alpha-\beta) \\ N\left(1-K(1+\alpha_1+\alpha_2+M)-M(c_1+c_2)\frac{1}{\alpha-\beta}-M^2c_3\frac{1}{\alpha-\beta}\right) &\geq 2 \\ N-KN-(\alpha_1+\alpha)KN-M(c_1+c_2)\frac{N}{\alpha-\beta}-KMN-M^2c_3\frac{N}{\alpha-\beta} &\geq 2 \\ 2+KN+(\alpha_1+\alpha)KN+M(c_1+c_2)\frac{N}{\alpha-\beta}+KMN+M^2c_3\frac{N}{\alpha-\beta} &\leq N \end{aligned}$$

Notemos que $N>0$, ya que

$$K<\frac{\alpha-\beta-(c_1+c_2+c_3M)M}{(\alpha-\beta)(1+\alpha_1+\alpha_2+M)}$$

Además, tenemos que

$$\alpha-\beta \geq \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_1\alpha_2} > \frac{1}{2}(3c_3M^2+2M(c_1+c_2)) > (c_1+c_2+c_3M)M$$

usando la desigualdad que define a M en el lema 1.3 tomando

$$k_1=(c_1+c_2)\left(\frac{1}{|\gamma_1|}+\frac{1}{|\gamma_2|}+2\right) \quad \text{y} \quad k_2=c_3\left(\frac{1}{|\gamma_1|}+\frac{1}{\gamma_2}+2\right)$$

y con esto $K>0$. Así, para todo $n\in\mathbb{N}$ y $t\geq t_0$ tenemos que

$$|z_n(t)|\leq N\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds \quad \text{y} \quad |z'_n(t)|\leq(\alpha_1+\alpha_2)N\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds,$$

entonces podemos decir que

$$|z(t)|\leq N\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds \quad \text{y} \quad |z'(t)|\leq(\alpha_1+\alpha_2)N\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds,$$

Luego,

$$z(t)| = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds\right) \quad \text{y} \quad z'(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds\right).$$

□

Ahora si $\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$ en la ecuación (1.5) tenemos un resultado análogo al anterior.

Corolario 1.2. Consideremos la ecuación (1.5), las hipótesis y conclusiones de la demostración del lema 1.4. Supongamos además que $\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$, dado

$$0 < \beta \leq \frac{\alpha}{2},$$

donde $\alpha = \text{mín}\{\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2\}$ y K tal que

$$K < \frac{\alpha - \beta - (c_1 + c_2 + c_3M)M}{(\alpha - \beta)(1 + \alpha + \beta + M)}$$

se satisface que

$$\int_{t}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|ds \leq K$$

para todo $t \geq t_0$; y que para c y f se satisface la misma desigualdad. Entonces z la solución de (1.5) dada por el lema 1.4 satisface

$$z(t), z'(t) = O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\right).$$

La demostración de este resultado es análoga a la de el corolario anterior. El último caso que vamos a cubrir de la ecuación (1.5) es cuando $\operatorname{Re}\gamma_1 < 0$ y $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$

Corolario 1.3. Consideremos la ecuación (1.5), las hipótesis y conclusiones de la demostración del lema 1.4. Supongamos además que $\operatorname{Re}\gamma_1 = -\operatorname{Re}\gamma_2 < 0$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$ dado

$$0 < \beta \leq \frac{\alpha}{2},$$

donde $\alpha = \text{mín}\{\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2\}$ y $K > 0$ tal que

$$K < \frac{\alpha^2 - \beta^2 - (c_1 + c_2 + c_3M)(3\alpha - \beta)M}{3(\alpha^2 - \beta^2)(1 + \alpha + \beta + M)}$$

con M satisfaciendo

$$M(c_1 + c_2 + c_3M) < \frac{3\alpha}{10},$$

se satisface

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|ds \leq K,$$

$$\int_{t}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|ds \leq K,$$

para todo $t \geq t_0$; y que para c y f se satisface la misma desigualdad. Entonces z la solución de (1.5) dada por el lema 1.4 satisface

$$z(t), z'(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t-s)|a(s)|ds\right),$$

donde

$$\phi(t,s) = \begin{cases} e^{-\beta(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{\beta(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $c_i > 0$, $i = 1,2,3$ y $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$.

Sabemos que existe una solución (1.5) que satisface la ecuación

$$z(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[a(s)+b(s)z(s)+c(s)z'(s)+c_1z(s)z'(s)+(c_2+f(s))z^2(s)+c_3z^3(s)]ds,$$

y $\|z\| \leq M$. En este caso

$$\phi(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha_1(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

Luego la ecuación que satisface z es

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{t_0}^{t} g(t,s)[a(s)+b(s)z(s)+c(s)z'(s)+c_1z(s)z'(s)+(c_2+f(s))z^2(s)+c_3z^3(s)]ds \\ &+ \int_{t}^{\infty} g(t,s)[a(s)+b(s)z(s)+c(s)z'(s)+c_1z(s)z'(s)+(c_2+f(s))z^2(s)+c_3z^3(s)]ds. \end{aligned}$$

Tomemos la sucesión dada por $z_0 = 0$ y $z_{n+1} = Tz_n$ para $n \geq 0$, donde T es el operador definido en la demostración de lema 1.4. Sabemos que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$, ya que T es contractivo. Observemos que la condición sobre b equivale a que satisfaga

$$\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}|b(s)| \leq Ke^{(\alpha-\beta)t}$$

y

$$\int_{t}^{\infty} e^{-(\alpha-\beta)s}|b(s)| \leq Ke^{-(\alpha-\beta)t}$$

para todo $t \geq t_0$, y se tiene lo mismo para c y f. Además, notemos que

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}|b(s)| \leq \int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)| \leq K$$

y

$$\int_{t}^{\infty} e^{(\alpha+\beta)(t-s)}|b(s)| \leq \int_{t}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)| \leq K$$

puesto que $\beta \leq \alpha/2 \leq \alpha - \beta \leq \alpha \leq \alpha+\beta$. Así concluimos que

$$\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha+\beta)s}|b(s)| \leq Ke^{(\alpha+\beta)t}$$

y

$$\int_{t}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)s}|b(s)| \leq Ke^{-(\alpha+\beta)t}$$

para todo $t \geq t_0$, y se tiene lo mismo para c y f.

Ahora probaremos por inducción que para todo $t \geq t_0$

$$|z_n(t)| \leq N\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|ds\right)$$

y

$$|z_n'(t)| \leq (\alpha_1+\gamma_2)N\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|ds\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, con

$$N(\alpha^2-\beta) - 3K(\alpha^2-\beta^2)(1+\alpha_1+\gamma_2+M) - M(c_1+c_2+c_3M)(3\alpha-\beta) \geq \alpha^2-\beta^2$$

Para $n = 0, 1$ claramente es cierto. Supongamos que es cierto para $n = k$, y veamos que sucede para $n = k+1$ entonces

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| &\leq \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[|a(s)| + |b(s)||z_k(s)| + |c(s)||z_k'(s)| + c_1|z_k(s)||z_k'(s)| \\
&\quad + (c_2+|f(s)|)|z_k(s)|^2 + c_3||z_k(s)|^3]ds \\
&\leq \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Bigg[|a(s)| + N\int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)|a(\tau)|d\tau\{|b(s)| + (\alpha_1+\alpha_2)|c(s)| \\
&\quad + c_1M + (c_2+f(s))M + c_3M^2\}\Bigg]ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| \leq & \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \Bigg[|a(s)| + N \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)|a(\tau)|d\tau \{|b(s)| + (\alpha_1+\alpha_2)|c(s)| \\
& + c_1 M + (c_2 + f(s))M + c_3 M^2\} \Bigg] ds \\
& + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)} \Bigg[|a(s)| + N \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)|a(\tau)|d\tau \{|b(s)| + (\alpha_1+\alpha_2)|c(s)| \\
& + c_1 M + (c_2 + f(s))M + c_3 M^2\} \Bigg] ds
\end{aligned}
$$

De manera análoga al corolario anterior usando cambio de región de integración y aplicando el teorema de Fubini se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)| \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)|a(\tau)|d\tau ds = & \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)| \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds \\
& + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)| \int_{s}^{\infty} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds
\end{aligned}
$$

para el primer término ya tenemos una desigualdad y para el segundo tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)| \int_{s}^{\infty} e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds = & e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} \int_{s}^{\infty} e^{(\alpha+\beta)s} e^{-\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|d\tau ds \\
= & e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} e^{(\alpha+\beta)s} e^{-\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|d\tau ds \\
& + e^{-\alpha t} \int_{t}^{\infty} \int_{t_0}^{t} e^{(\alpha+\beta)s} e^{-\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|d\tau ds \\
= & e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{-\beta\tau}|a(\tau)| \int_{t_0}^{\tau} e^{(\alpha+\beta)s}|b(s)|d\tau ds \\
& + e^{-\alpha t} \int_{t}^{\infty} e^{-\beta\tau}|a(\tau)| \int_{t_0}^{t} e^{(\alpha+\beta)s}|b(s)|d\tau ds \\
\leq & e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{-\beta\tau}|a(\tau)|K e^{(\alpha+\beta)\tau} d\tau \\
& + e^{-\alpha t} \int_{t}^{\infty} e^{-\beta\tau}|a(\tau)|K e^{(\alpha+\beta)t} d\tau \\
= & K \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}|a(\tau)|d\tau + K \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-\tau)}|a(\tau)|d\tau
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que

$$
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)| \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)|a(\tau)|d\tau ds \leq K \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}|a(s)|ds + K \int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(\tau)|ds.
$$

Análogamente, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_t^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^{\infty}\phi(s,\tau)|a(\tau)|d\tau ds &= \int_t^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds\\ &+\int_t^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{s}^{\infty} e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds\end{aligned}$$

Y nuevamente usando cambio de región de integración y aplicando el teorema de Fubini se sigue que:

$$\begin{aligned}\int_t^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds &= e^{\alpha t}\int_t^{\infty}\int_{t_0}^{s} e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|d\tau ds\\ &= e^{\alpha t}\int_{t_0}^{t}\int_t^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|dsd\tau\\ &+e^{\alpha t}\int_t^{\infty}\int_{\tau}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|dsd\tau\\ &= e^{\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_t^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)s}|b(s)|dsd\tau\\ &+e^{\alpha t}\int_t^{\infty} e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_{\tau}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)s}|b(s)|dsd\tau\\ &\le e^{\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|Ke^{-(\alpha+\beta)t}d\tau\\ &+e^{\alpha t}\int_t^{\infty} e^{\beta\tau}|a(\tau)|Ke^{-(\alpha+\beta)\tau}d\tau\\ &= K\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}|a(\tau)|d\tau + K\int_t^{\infty} e^{\alpha(t-\tau)}|a(\tau)|d\tau\end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\int_t^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^{\infty}\phi(s,\tau)|a(\tau)|d\tau ds \le K\int_t^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds + K\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds.$$

Y para c y f se tiene la misma desigualdad y nuevamente cambiando la región de integración juntamente con la aplicación del teorema de Fubini se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{s}^{\infty} e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds &= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{\infty} e^{(\alpha+\beta)s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)|d\tau ds \\
&= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} e^{(\alpha+\beta)s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)|dsd\tau \\
&\quad +e^{-\alpha t}\int_{t}^{\infty}\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha+\beta)s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)|dsd\tau \\
&= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_{t_0}^{\tau} e^{(\alpha+\beta)s}dsd\tau \\
&\quad +e^{-\alpha t}\int_{t}^{\infty} e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha+\beta)s}dsd\tau \\
&\leq e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\frac{e^{(\alpha+\beta)\tau}}{\alpha+\beta}d\tau \\
&\quad +e^{-\alpha t}\int_{t}^{\infty} e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\frac{e^{(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}d\tau \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}|a(\tau)|d\tau+\int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-\tau)}|a(\tau)|d\tau\right)
\end{aligned}
$$

y análogamente

$$
\begin{aligned}
\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}\int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds &= e^{\alpha t}\int_{t}^{\infty}\int_{t_0}^{s} e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)|d\tau ds \\
&= e^{\alpha t}\int_{t_0}^{t}\int_{t}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)|dsd\tau \\
&\quad +e^{\alpha t}\int_{t}^{\infty}\int_{\tau}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|dsd\tau \\
&= e^{\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_{t}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)s}dsd\tau \\
&\quad +e^{\alpha t}\int_{t}^{\infty} e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_{\tau}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)s}dsd\tau \\
&\leq e^{\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|\frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}d\tau \\
&\quad +e^{\alpha t}\int_{t}^{\infty} e^{\beta\tau}|a(\tau)|\frac{e^{-(\alpha+\beta)\tau}}{\alpha+\beta}d\tau \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}|a(\tau)|d\tau+\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-\tau)}|a(\tau)|d\tau\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| &\leq \Bigg(1+3KN+(\alpha_1+\gamma_2)3KN+MN(c_1+c_2)\left(\frac{2}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad +3KMN+c_3M^2N\left(\frac{2}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right)\Bigg)\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds \\
&\leq N\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds.
\end{aligned}$$

Y ahora para la primera derivada tenemos que

$$\begin{aligned}
z'(t) &= -\int_{t_0}^{t}\alpha_1 e^{-\alpha_1(t-s)}[a(s)+b(s)z(s)+c(s)z'(s)+c_1z(s)z'(s)+(c_2+f(s))z^2(s)+c_3z^3(s)]ds \\
&\quad +\int_{t}^{\infty}\gamma_2 e^{\gamma_2(t-s)}[a(s)+b(s)z(s)+c(s)+z'(s)+c_1z(s)z'(s)+(c_2+f(s))z^2(s)+c_3z^3(s)]ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|z'_{k+1}(t)| &\leq \int_{t_0}^{t}\alpha_1 e^{-\alpha_1(t-s)}[|a(s)|+|b(s)||z_k(s)|+|c(s)||z'_k(s)|+c_1|z_k(s)||z'_k(s)| \\
&\quad +(c_2+|f(s)|)|z_k(s)|^2+c_3|z(s)|^3]ds \\
&\quad +\int_{t}^{\infty}\gamma_2 e^{\gamma_2(t-s)}[|a(s)|+|b(s)||z_k(s)|+|c(s)||z'_k(s)|+c_1|z_k(s)||z'_k(s)| \\
&\quad +(c_2+|f(s)|)|z_k(s)|^2+c_3|z(s)|^3]ds \\
&\leq \alpha_1\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-s)}\Bigg[|a(s)|+N\int_{t_0}^{\infty}\phi(s,\tau)|a(\tau)|d\tau(|b(s)|+(\alpha_1+\gamma_2)|c(s)| \\
&\quad +c_1M+(c_2+f(s))M+c_3M^2)\Bigg]ds \\
&\quad +\gamma_2\int_{t}^{\infty}e^{\alpha(t-s)}\Bigg[|a(s)|+N\int_{t_0}^{\infty}\phi(s,\tau)|a(\tau)|d\tau(|b(s)|+(\alpha_1+\gamma_2)|c(s)| \\
&\quad +c_1M+(c_2+f(s))M+c_3M^2)\Bigg]ds
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|z'_{k+1}(t)| &\leq (\alpha_1+\gamma_2)\Bigg(1+3KN+(\alpha_1+\gamma_2)3KN+MN(c_1+c_2)\left(\frac{2}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad +3KMN+c_3M^2N\left(\frac{2}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right)\Bigg)\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds \\
&\leq (\alpha_1+\gamma_2)N\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$N(\alpha^2-\beta^2-3K(\alpha^2-\beta^2)(1+\alpha_1+\gamma_2+M)-M(c_1+c_2+c_3M)(3\alpha-\beta))\geq\alpha^2-\beta^2$$

y se tiene que

$$\begin{aligned}
N\left(1-3K(1+\alpha_1+\gamma_2+M)-M(c_1+c_2+c_3M)\left(\frac{2}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right)\right) &\geq 1\\
N-3KN(1+\alpha_1+\gamma_2+M)-MN(c_1+c_2+c_3M)\left(\frac{2}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right) &\geq 1\\
1+3KN(1+\alpha_1+\gamma_2+M)+MN(c_1+c_2+c_3M)\left(\frac{2}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right) &\leq N
\end{aligned}$$

Notemos que $N>0$ ya que

$$K<\frac{\alpha^2-\beta^2-(c_1+c_2+c_3M)(3\alpha-\beta)M}{3(\alpha^2-\beta^2)(1+\alpha+\beta+M)},$$

además, tenemos que

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)>(c_1+c_2+c_3M)(3\alpha-\beta)M$$

puesto que si $0<\beta\leq\alpha/2$ entonces

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{3\alpha-\beta}\geq\frac{3\alpha}{10}>(c_1+c_2+c_3M)M;$$

y con esto $K>0$. Así, para todo $n\in\mathbb{N}$ y $t\geq t_0$ tenemos que

$$|z_n(t)|\leq N\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds \quad \text{y} \quad |z_n'(t)|\leq(\alpha_1+\gamma_2)N\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds,$$

entonces podemos decir que

$$|z(t)|\leq N\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds \quad \text{y} \quad |z'(t)|\leq(\alpha_1+\gamma_2)N\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds,$$

Luego

$$z(t)=O\left(\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds\right) \quad \text{y} \quad z'(t)=O\left(\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|ds\right).$$

□

Notemos que la elección de β depende la elección de M. En los corolarios 1.1 y 1.2 M satisface

$$2(c_1+c_2)M+3c_3M^2<\frac{|\operatorname{Re}\gamma_1\operatorname{Re}\gamma_2|}{|\operatorname{Re}\gamma_1|+|\operatorname{Re}\gamma_2|+2|\operatorname{Re}\gamma_1\operatorname{Re}\gamma_2|}$$

y en el último corolario

$$(c_1 + c_2 + c_3 M)M < \frac{3\alpha}{10}$$

y necesitamos que $0 < \beta \leq \alpha/2$, para que sea $K > 0$. Es fácil ver que si M satisface la segunda desigualdad entonces satisface la primera. Además, para los casos $a, b \to 0$ cuando $t \to \infty$ ó $a, b \in L^p$ podemos encontrar t_0 tal que se satisfacen las condiciones que aseguran la existencia de $z \in \mathcal{C}_0^1$ como solución de (1.5) y que, dependiendo del caso ($\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 < 0$ ó $\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$ ó $\operatorname{Re}\gamma_1 < 0$ y $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$), se cumplan las desigualdades

$$\int_t^\infty e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|ds \leq K$$

ó

$$\int_{t_0}^t e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|ds \leq K$$

ó

$$\int_{t_0}^t e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|ds \leq K \quad \text{y} \quad \int_t^\infty e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|ds \leq K$$

para todo $t \geq t_0$; y lo mismo para c y f, donde

$$0 < K < \frac{\alpha - \beta - (c_1 + c_2 + c_3 M)M}{3(\alpha - \beta)(1 + \alpha + \beta + M)},$$

ó

$$0 < K < \frac{\alpha^2 - \beta^2 - (c_1 + c_2 + c_3 M)(3\alpha - \beta)M}{3(\alpha^2 - \beta^2)(1 + \alpha + \beta + M)}.$$

El siguiente lema tiene relación con condición integrables y nos presenta un desarrollo de la solución de (1.5) como una suma de términos, donde cada término tiene una propiedad de integrabilidad.

Lema 1.5. Consideremos la ecuación (1.5) y las hipótesis del lema 1.4. Supongamos que $a, b, c, f \in L^p[t_0, \infty)$, con $p \geq 1$. Entonces $z, z' \in L^p[t_0, \infty)$, donde z es la solución que nos entrega el lema 1.4. Además, si $p \in (1, 2]$ entonces podemos escribir z como

$$z(t) = \theta(t) + \psi(t),$$

con

$$\theta(t) = \int_{t_0}^\infty g(t, s)a(s)ds,$$

$\theta \in L^p[t_0,\infty)$ y $\psi \in L^1[t_0,\infty)$. Y si $p \in (m,m+1]$ con $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, podemos escribir z de la siguiente manera

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l(t) + \psi_m(t),$$

donde

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)ds,\\
\theta_2(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[b(s)\theta_1(s) + c(s)\theta_1'(s) + c_1\theta_1(s)\theta_1'(s) + c_2\theta_1^2(s)]ds\\
\theta_l(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Bigg[b(s)\theta_{l-1} + c(s)\theta_{l-1}'(s) + c_1\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k(s)\theta_{l-k}'(s) + c_2\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k(s)\theta_{l-k}(s)\\
&\quad + f(s)\sum_{k=1}^{l-2}\theta_k(s)\theta_{l-1-k}(s) + c_3\sum_{i+j+k=l}\theta_i(s)\theta_j(s)\theta_k(s)\Bigg]ds,
\end{aligned}$$

con $\theta_k, \theta_k' \in L^{p/k}[t_0,\infty)$, $k=1,2,\ldots,m-1$ y ψ_m, $\psi_m' \in L^{p/m}[t_0,\infty)$.

Demostración. Sabemos que si $a,b,c,f \in L^p[t_0,\infty)$ entonces para todo $\varepsilon > 0$

$$\ell_1(|a|,\varepsilon,\cdot),\ \ell_2(|a|,\varepsilon,\cdot) \in L^p[t_0,\infty) \cap C_0[t_0,\infty)$$

y lo mismo para b, c y f. Luego, podemos escoger t_0 de tal forma que se satisfacen las hipótesis del lema 1.4 y de los corolarios 1.1, 1.2 y 1.3, así

$$z(t), z'(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} g_\beta(t,s)|a(s)|ds\right),$$

con $\gamma = \min\{|\operatorname{Re}\gamma_1|, |\operatorname{Re}\gamma_2|\}$, $0 < \beta \leq \gamma/2$ y

$$g_\beta(t,s) = \begin{cases} e^{\beta(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 < 0$,

$$g_\beta(t,s) = \begin{cases} e^{-\beta(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{\beta(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1 < 0$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$, y

$$g_\beta(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq s \\ e^{\beta(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$.

Por otro lado, tenemos que

$$\int_{t_0}^{\infty} g_\beta(\cdot, s)|a(s)|ds \in L^p[t_0, \infty).$$

Así, concluimos que $z, z' \in L^p[t_0, \infty)$. Notemos que z y z' son acotadas, luego $z, z' \in L^\mu[t_0, \infty)$ con $\mu \geq p$.

Ahora si $p \in (1, 2]$ entonces p' su exponente conjugado pertenece a $[2, \infty)$, y como $z, z' \in L^\mu[t_0, \infty)$ con $\mu \geq p$ se tiene que $z, z' \in L^p[t_0, \infty)$. Así, bz, cz', zz', $z^2 \in L^1[t_0, \infty)$ y usando el hecho que z y z' son acotadas se tiene que fz^2, $z^3 \in L^1[t_0, \infty)$. Luego, concluimos que

$$\begin{aligned} z(t) &= \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} g(t, s)a(s)ds}_{\theta \in L^p} \\ &\quad + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} g(t, s)[b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)]ds}_{\psi \in L^1} \\ &= \theta(t) + \psi(t), \end{aligned}$$

donde

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t, s)a(s)ds,$$

$\theta \in L^p[t_0, \infty)$ y $\psi \in L^1[t_0, \infty)$.

Para la otra parte, tenemos que si $p \in (m, m+1]$ entonces bz, cz', zz', $z^2 \in L^{p/2}[t_0, \infty)$ y fz^2, $z^3 \in L^{p/3}[t_0, \infty)$. Así, podemos escribir z como

$$z(t) = \theta_1(t) + \psi_2(t),$$

donde

$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t, s)a(s)ds,$$

$\theta_1 \in L^p[t_0, \infty)$ y $\psi \in L^{p/2}[t_0, \infty)$. Luego, si $m = 2$ está demostrado el resultado. Supongamos que $m > 2$, entonces reemplazando z en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
z(t) =&\theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[b(s)(\theta_1(s)+\psi_2(s)) + c(s)(\theta_1'(s)+\psi_2'(s)) + c_1(\theta_1(s)+\psi_2(s))(\theta_1'(s)+\psi_2'(s)) \\
&+ c_2(\theta_1(s)+\psi_2(s))^2]ds + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[f(s)z^2(s) + c_3 z^3(s)]ds \\
=&\theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[b(s)\theta_1(s) + c(s)\theta_1'(s) + c_1\theta_1(s)\theta_1'(s) + c_2[\theta_1(s)]^2]ds \\
&+ \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[b(s)\psi_2(s) + c(s)\psi_2'(s) + c_1\theta_1(s)\psi_2'(s) + c_1(\theta_1'(s)+\psi_2'(s))\psi_2(s) + 2c_2\theta_1(s)\psi_2(s) \\
&+ c_2\psi_2^2(s) + f(s)z^2(s) + c_3 z^3(s)]ds
\end{aligned}$$

tomamos

$$\theta_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[b(s)\theta_1(s) + c(s)\theta_1'(s) + c_1\theta_1(s)\theta_1'(s) + c_2[\theta_1(s)]^2]ds$$

y ψ_3 como el resto; y tenemos que $\theta_2 \in L^{p/2}[t_0,\infty)$, $\psi_2 \in L^{p/3}[t_0,\infty)$ y podemos escribir z como

$$z(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) + \psi_3(t).$$

Supongamos que podemos escribir z como

$$z(t) = \varphi_k(t) + \psi_{k+1}(t) \quad \text{con} \quad \varphi_k(t) = \sum_{l=1}^{k} \theta_l(t),$$

donde

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)ds, \\
\theta_2(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[b(s)\theta_1(s) + c(s)\theta_1'(s) + c_1\theta_1(s)\theta_1'(s) + c_2\theta_1^2(s)]ds
\end{aligned}$$

y para $l \geq 2$

$$\begin{aligned}
\theta_l(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Bigg[&b(s)\theta_{l-1} + c(s)\theta_{l-1}'(s) + c_1\sum_{i=1}^{l-1}\theta_i(s)\theta_{l-i}'(s) + c_2\sum_{i=1}^{l-1}\theta_i(s)\theta_{l-i}(s) \\
&+ f(s)\sum_{i=1}^{l-2}\theta_i(s)\theta_{l-1-i}(s) + c_3\sum_{i+j+n=l}\theta_i(s)\theta_j(s)\theta_n(s)\Bigg]ds,
\end{aligned}$$

$k < m-1$, θ_l, $\theta_l' \in L^{p/l}[t_0,\infty)$, $\psi_{k+1}, \psi_{k+1}' \in L^{p/(k+1)}[t_0,\infty)$. Sustituyamos en la ecuación, luego

$$
\begin{aligned}
z(t) =& \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[b(s)(\varphi_k(s)+\psi_{k+1}(s)) + c(s)(\varphi_k'(s)+\psi_{k+1}'(s)) + c_1(\varphi_k(s)+\psi_{k+1}(s))(\varphi_k'(s) \\
&+ \psi_{k+1}'(s)) + c_2(\varphi_k(s)+\psi_{k+1}(s))^2 + f(s)(\varphi_k(s)+\psi_{k+1}(s))^2 + c_3(\varphi_k(s)+\psi_{k+1}(s))^3]ds \\
=& \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)\varphi_k(s) + c(s)\varphi'(s) + c_1\varphi_k(s)\varphi_k'(s) + c_2[\varphi_k(s)]^2 + f(s)[\varphi_k(s)]^2 \\
&+ c_3[\varphi_k(s)]^3\big]ds + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)\psi_{k+1}(s) + c(s)\psi_{k+1}'(s) + c_1\varphi_k(s)\psi_{k+1}'(s) \\
&+ c_1(\varphi_k'(s)+\psi_{k+1}'(s))\psi_{k+1}(s) + 2c_2\varphi_k(s)\psi_{k+1}(s) + c_2[\psi_{k+1}(s)]^2 + 2f(s)\varphi_k(s)\psi_{k+1}(s) \\
&+ f(s)[\psi_{k+1}(s)]^2 + 3c_3[\varphi_k(s)]^2\psi_{k+1}(s) + 3c_3\varphi_k(s)[\psi_{k+1}(s)]^2 + c_3[\psi_{k+1}(s)]^3\big]ds.
\end{aligned}
$$

simplificando la escritura tomamos $b\varphi_k + c\varphi_k' + c_1\varphi_k\varphi_k' + c_2\varphi_k^2 + f\varphi_k^2 + c_3\varphi_k^3 = \Delta$, que es el segundo término

$$
\begin{aligned}
\Delta =& \sum_{l=1}^{k}(b\theta_l + c\theta_l') + c_1\left(\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}\theta_i\theta_{l-i+1}' + \sum_{1+j>k+1}\theta_i\theta_j'\right) + c_2\left(\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}\theta_i\theta_{l-i+1} + \sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j\right) \\
&+ f\left(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{l}\theta_i\theta_{l-i+1} + \sum_{i+j\geq k+1}\theta_i\theta_j\right) + c_3\left(\sum_{l=3}^{3k}\sum_{i+j+n=l}\theta_i\theta_j\theta_n\right) \\
=& b\theta_1 + c\theta_1' + c_1\theta_1\theta_1' + c_2\theta_1^2 \\
&+ \sum_{l=1}^{k-2}\left(b\theta_{l+1} + c\theta_{l+1}' + c_1\sum_{i=1}^{l+1}\theta_i\theta_{l-i+2}' + c_2\sum_{i=1}^{l+1}\theta_i\theta_{l-i+2} + f\sum_{i=1}^{l}\theta_i\theta_{l-i+1} + c_3\sum_{i+j+n=l+2}\theta_i\theta_j\theta_n\right) \\
&+ b\theta_k + c\theta_k' + c_1\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1}' + c_2\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1} + f\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i\theta_{k-i} + c_3\sum_{i+j+n=k+1}\theta_i\theta_j\theta_n \\
&+ c_1\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j' + c_2\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j + f\sum_{i+j\geq k+1}\theta_i\theta_j + c_3\sum_{i+j+n>k+1}\theta_i\theta_j\theta_n \\
=& \theta_2 + \sum_{l=1}^{k-2}\theta_{l+2} + \theta_{k+1} + c_1\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j' + c_2\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j + f\sum_{i+j\geq k+1}\theta_i\theta_j + c_3\sum_{i+j+n>k+1}\theta_i\theta_j\theta_n,
\end{aligned}
$$

donde tomamos

$$
\theta_{k+1} = b\theta_k + c\theta_k' + c_1\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1}' + c_2\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1} + f\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i\theta_{k-i} + c_3\sum_{i+j+n=k+1}\theta_i\theta_j\theta_n.
$$

Ahora notemos que $b\theta_l$, $c\theta_l' \in L^{p/(l+1)}$ para todo $1 \leq l \leq k$, $\theta_i\theta_{l-i+1}' \in L^{p/(l+1)}$ para todo $1 \leq i \leq l+1$ con $1 \leq l \leq k$, $f\theta_i\theta_{l-i+1} \in L^{p/(l+1)}$ para todo $1 \leq i \leq l$ con $1 \leq l \leq k-1$ y $\theta_i\theta_j\theta_n \in L^{p/l}$ para todo $i+j+n=l$ con $1 \leq i,j,n \leq l-2$ y $3 \leq l \leq k+1$. Para los otros términos tenemos que $\theta_i\theta_j', \theta_i\theta_j \in L^{p/(k+2)}$ para todo $i+j > k+1$, $f\theta_i\theta_j \in L^{p/(k+2)}$ para todo $i+j \geq k+1$ y $\theta_i\theta_j\theta_n \in L^{p/(k+2)}$ para todo $i+j+n > k+1$.

Por otro lado, para el tercer término de la sustitución tenemos que $b\psi_{k+1}$, $c\psi_{k+1}'$, $\varphi_k\psi_{k+1}'$, $\varphi_k'\psi_{k+1}$, $\psi_{k+1}'\psi_{k+1}$, $\varphi_k\psi_{k+1}$, ψ_{k+1}^2, $f\varphi_k\psi_{k+1}$, $f\psi_{k+1}^2$, $\varphi_k^2\psi_{k+1}$, $\psi_k\psi_{k+1}$, $\varphi_k\psi_{k+1}^2$, $\psi_{k+1}^3 \in L^{p/(k+2)}$.

Así, considerando como ψ_{k+2} la suma de todos los términos que pertenecen a $L^{p/(k+2)}$, podemos escribir z de la siguiente manera

$$z(t) = \varphi_k(t) + \theta_{k+1}(t) + \psi_{k+2}(t),$$

donde $\theta_i \in L^{p/i}$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$ y $\psi_{k+2} \in L^{p/(k+2)}$.

De esta manera, iteramos el proceso hasta llegar a $k = m-1$ y obtenemos

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l(t) + \psi_m(t),$$

donde $\theta_l \in L^{p/l}$, $l = 1, 2, \ldots, m-1$ y $\psi_m \in L^{p/m}$. □

Nota. Usando el resultado anterior observamos que si iteramos una vez más el proceso, es decir reemplazamos

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l(t) + \psi_m(t)$$

en la ecuación integral, podemos encontrar θ_m y ψ_{m+1}, donde

$$\theta_m(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Bigg[b(s)\theta_{m-1} + c(s)\theta_{m-1}'(s) + c_1\sum_{k=1}^{m-1}\theta_k(s)\theta_{m-k}'(s) + c_2\sum_{k=1}^{m-1}\theta_k(s)\theta_{m-k}(s)$$

$$+f(s)c_1\sum_{k=1}^{m-2}\theta_k(s)\theta_{m-1-k}(s) + c_3\sum_{i+j+k=m}\theta_i(s)\theta_j(s)\theta_k(s)\Bigg]ds,$$

$\theta_m \in L^{p/m}$ y $\psi_{m+1} \in L^1$. Así, podemos escribir z de la forma

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m} \theta_l(t) + \psi_{m+1}(t),$$

donde

$$\theta_1(t)\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)ds, \qquad \theta_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[b(s)\theta_1(s)+c(s)\theta_1'(s)+c_1\theta_1(s)\theta_1'(s)+c_2\theta_1^2(s)]ds$$

$$\theta_l(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s) \Bigg[b(s)\theta_{l-1} + c(s)\theta'_{l-1}(s) + c_1 \sum_{k=1}^{l-1} \theta_k(s)\theta'_{l-k}(s) + c_2 \sum_{k=1}^{l-1} \theta_k(s)\theta_{l-k}(s)$$

$$+ f(s) \sum_{k=1}^{l-2} \theta_k(s)\theta_{l-1-k}(s) + c_3 \sum_{i+j+k=l} \theta_i(s)\theta_j(s)\theta_k(s) \Bigg] ds,$$

con θ_l, $\theta'_l \in L^{p/l}[t_0, \infty)$, $l = 1, 2, \ldots, m$ y ψ_{m+1}, $\psi'_{m+1} \in L^1[t_0, \infty)$.

Capítulo 2

Generalización del teorema de Poincaré

Aquí veremos los resultados para la ecuación de orden tres. Consideraremos solo la situación cuando las raíces características de la ecuación no perturbada (1.2) son distintas y sus partes reales son distintas. Deduciremos los resultados usando la ecuación de Riccati escalar mostrada en el lema 1.1.

Ahora estamos en condiciones de demostrar una versión generalizada del teorema de Poincaré para la ecuación de orden 3, dada por la ecuación (1.1), usando los resultados previos obtenidos en el capítulo anterior.

Teorema 2.1. Consideremos la ecuación (1.2). Supongamos que

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_3$ y $\gamma_3 = \lambda_2 - \lambda_3$; donde λ_i, $i = 1, 2, 3$ son las raíces características de la ecuación (1.1);

2. $\mathcal{L}_i(r_j) \to 0$ cuando $t \to \infty$, para cada $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2$; donde

$$\mathcal{L}_1(f)(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}|f(s)|ds \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2(f)(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}|f(s)|ds,$$

   con $\gamma = \min\{\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_3\}$.

Entonces la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $i = 1, 2, 3$, tales que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_i'(t)}{y_i(t)} = \lambda_i, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{y_i''(t)}{y_i(t)} = \lambda_i^2. \tag{2.1}$$

Demostración. Sabemos que la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma (1.3), donde z_i satisface la ecuación (1.4); luego tenemos que

$$y_i'(t) = (\lambda_i + z_i(t))y_i(t)$$

y

$$y''(t) = y(t)(\lambda + z(t))^2 + y(t)z'(t)$$

entonces si demostramos que para cada $i = 1, 2, 3$ existe z_i, tal que $z_i, z_i' \to 0$, cuando $t \to \infty$, habremos probado el resultado. Además, debemos verificar que $y_i(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, y así

$$z_i(t) = \frac{y_i'(t)}{y_i(t)} - \lambda_i$$

y

$$(\lambda_i + z_i(t))^2 + z'(t) = \frac{y_i''(t)}{y_i(t)}.$$

Usando las hipótesis 1 y 2, tenemos que, para cada $i = 1, 2, 3$ se cumplen las condiciones del lema 1.4, con

$$b_0 = 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1, \qquad b_1 = 3\lambda_i + a_2$$

$$a(t) = -r_0(t) - \lambda_i r_1(t) - \lambda_i^2 r_2(t), \qquad b(t) = -r_1(t) - 2\lambda_i r_2(t), \qquad c(t) = -r_2(t)$$

$$c_1 = -3, \qquad c_2 = -(3\lambda_i + a_2), \qquad f(t) = -r_2(t) \quad \text{y} \quad c_3 = -1$$

Las ecuaciones para z_i, $i = 1, 2, 3$ son respectivamente

$$z_1(t) = \frac{-1}{\gamma_1 - \gamma_2} \int_{t_0}^{t} (e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)}) f_1(s, z_1(s)) ds,$$

$$z_2(t) = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_3} \left(\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_3(t-s)} f_2(s, z_2(s)) ds + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_1(t-s)} f_2(s, z_2(s)) ds \right)$$

y

$$z_3(t) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_3} \int_{t}^{\infty} (e^{\gamma_3(t-s)} - e^{\gamma_2(t-s)} f_3(s, z_3(s))) ds,$$

donde

$$f_i(t, z) = [r_0(t) + \lambda_i r_1(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + (r_1(t) + 2\lambda_i r_2(t))z + r_2(t)z' + 3zz' + (3\lambda_i + a_2 + r_2(t))z^2 + z^3]$$

Además, claramente se tiene que $\mathrm{Re}\,\gamma_2 > \mathrm{Re}\,\gamma_3$ y $\mathrm{Re}\,\gamma_2 > \mathrm{Re}\,\gamma_1$, luego $\gamma \leq \mathrm{Re}\,\gamma_i$ para $i = 1, 2, 3$. Verificando las hipótesis para z_1, tenemos que claramente las raíces del polinomio

$$\lambda^2 + (3\lambda_1 + a_2)\lambda + 3\lambda_1^2 + 2a_2\lambda_1 + a_1$$

son distintas y con parte real distinta de cero por la hipótesis 1, puesto que las raíces de este polinomio son $-\gamma_1$ y $-\gamma_2$; además la función de Green es

$$(\gamma_2 - \gamma_1)g(t,s) = \begin{cases} e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}$$

luego, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(a)(t) &= \left|\int_{t_0} \infty g(t,s)a(s)ds\right| + \left|\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)a(s)ds\right| \\
&= \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}\left(\left|\int_{t_0}^{t}(e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)})(r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s))ds\right|\right. \\
&\quad \left. + \left|\int_{t_0}^{t}(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t-s)} - \gamma_1 e^{-\gamma_1(t-s)})(r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s))ds\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}\left(\int_{t_0}^{t}(e^{-\operatorname{Re}\gamma_1(t-s)} + e^{-\gamma_2(t-s)})|r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s)|ds\right. \\
&\quad \left. + \int_{t_0}^{t}(|\gamma_2|e^{-\gamma_2(t-s)} + |\gamma_1|e^{-\gamma_1(t-s)})|r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s))ds|\right) \\
&\leq \frac{2 + |\gamma_1| + |\gamma_2|}{|\gamma_1 - \gamma_2|}\int_{t_0}^{t} e^{-\operatorname{Re}\gamma_1(t-s)}(|\lambda_1|^2|r_2(s)| + |\lambda_1||r_1(s)| + |r_0(s)|)ds \\
&\leq \frac{2 + |\gamma_1| + |\gamma_2|}{|\gamma_1 - \gamma_2|}[|\lambda_1|^2\mathcal{L}_1(r_2)(t) + |\lambda_i|\mathcal{L}_1 r_1(t) + \mathcal{L}_1(r_0)(t)]
\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{G}(a) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Análogamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(b)(t) &= \int_{t_0}^{\infty}\left(|g(t,s)| + \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right|\right)|b(s)|ds \\
&= \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|}\int_{t_0}^{t}|(e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)}| + |\gamma_2 e^{-\gamma_2(t-s)} - \gamma_1 e^{-\gamma_1(t-s)}|)|r_1(s) + 2\lambda_1 r_2(s)|ds \\
&\leq \frac{2 + |\gamma_1| + |\gamma_2|}{|\gamma_1 - \gamma_2|}[2|\lambda_1|\mathcal{L}(r_2)(t) + \mathcal{L}(r_1)(t)]
\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{L}(b) \to 0$ cuando $t \to \infty$. De forma más directa se obtiene que $\mathcal{L}(c)$, $\mathcal{L}(f) \to 0$ cuando $t \to \infty$, ya que $c = f = r_2$.

Para z_1 y z_3 se pueden verificar las hipótesis de la misma manera. Así, existe z_i para cada $i = 1, 2, 3$ tales que $z_i, z_i' \to 0$, cuando $t \to \infty$ y como z_i esta definida en $[t_0, \infty)$ y $z_i(t) \in \mathbb{C}$ para todo $t \geq t_0$, tenemos que $y_i(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$.

Por lo tanto, se ha demostrado el teorema. $\square$

Observemos que la condición sobre r_0 se puede relajar a $\mathcal{G}_i(r_0) \to 0$ cuando $t \to \infty$, $i = 1, 2, 3$, donde

$$\mathcal{G}_1(f)(t) = \frac{1}{|\gamma_2 - \gamma_1|} \left(\left| \int_{t_0}^{t} [e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)}] f(s) ds \right| + \left| \int_{t_0}^{t} [\gamma_2 e^{-\gamma_2(t-s)} - \gamma_1 e^{-\gamma_1(t-s)}] f(s) ds \right| \right)$$

$$\mathcal{G}_2(f)(t) = \frac{1}{|\gamma_1 + \gamma_3|} \left[(1+\gamma_3) \left| \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_3(t-s)} f(s) ds \right| + (1+\gamma_1) \left| \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_1(t-s)} f(s) ds \right| \right]$$

$$\mathcal{G}_2(f)(t) = \frac{1}{|\gamma_2 - \gamma_3|} \left(\left| \int_{t_0}^{t} [e^{\gamma_3(t-s)} - e^{\gamma_2(t-s)}] f(s) ds \right| + \left| \int_{t}^{\infty} [\gamma_2 e^{\gamma_2(t-s)} - \gamma_3 e^{\gamma_3(t-s)}] f(s) ds \right| \right)$$

aplicando el lema 1.4 a la ecuación (1.4). Por ejemplo, r_0 podría ser condicionalmente integrable.

Este resultado generaliza el teorema de Poincaré, que pide $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$; y aquí usamos el hecho que $\mathcal{L}(r_i) \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, aquí se consideran muchos más casos. Una condición más general que pueden satisfacer las perturbaciones es

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t}^{t+1} |r_i(s)| ds = 0$$

Sin embargo, dependiendo del tipo de perturbación se puede obtener una fórmula mejor. De hecho, para el caso dado por Poincaré tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2. Consideremos la ecuación (1.2). Supongamos que

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_3$ y $\gamma_3 = \lambda_2 - \lambda_3$; donde λ_i, $i = 1, 2, 3$ son las raíces características de la ecuación (1.1);

2. $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$, para cada $i = 1, 2, 3$.

Entonces la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $i = 1, 2, 3$, tales que satisfacen (2.1) y más aún, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_i'''(t)}{y_i(t)} = \lambda_i^3.$$

$$y_i(t) = (1 + o(1)) e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp\left(\prod_{j\in\mathcal{N}(i)} (\lambda_i - \lambda_j)^{-1} \int_{t_0}^{t} \tilde{f}_i(s, z_i(s)) ds \right), \qquad (2.2)$$

donde $\mathcal{N}(i) = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$

$$\tilde{f}_i(t, z) = -[r_0(t) + \lambda_i^2 r_1(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + (r_1(t) + 2\lambda_i r_2(t)) z + r_2(t) z' + (3\lambda_i + a_2 + r_2(t)) z^2 + z^3],$$

y z_i, $z_i' = O(\tilde{r}_i)$, $i = 1, 2, 3$ con

$$\tilde{r}_1(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s)|ds$$

$$\tilde{r}_3(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|r_0(s) + \lambda_3 r_1(s) + \lambda_3^2 r_2(s)|ds,$$

$$\tilde{r}_2(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + \lambda_2 r_1(s) + \lambda_2^2 r_2(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + \lambda_2^2 r_2(s)|ds$$

$\gamma = \text{mín}\{\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_3\}$ y $0 < \alpha \leq \operatorname{Re}\gamma/2$.

Demostración. Sabemos que $\mathcal{L}_i(f) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $f \to 0$ cuando $t \to \infty$ para $i = 1, 2$, donde $\mathcal{L}_i$ son los operadores del teorema 2.1. Así tenemos que se satisfacen las hipótesis del teorema 2.1 y luego se tiene la existencia de tres soluciones y_i, $i = 1, 2, 3$ que satisfacen las ecuaciones (2.1). Además, tenemos que

$$y_i(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_i + z_i(s)]ds\right)$$

y

$$\frac{y_i'''(t)}{y_i(t)} = (\lambda_i + z_i(t))^3 + (\lambda_i + z_i(t))z_i'(t) + z_i''(t),$$

donde z_i, $i = 1, 2, 3$ satisfacen

$$z_1(t) = \frac{-1}{\gamma_1 - \gamma_2}\int_{t_0}^{t} (e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)})f_1(s, z_1(s))ds,$$

$$z_2(t) = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_3}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_3(t-s)} f_2(s, z_2(s))ds + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_1(t-s)} f_2(s, z_2(s))ds\right)$$

y

$$z_3(t) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_3}\int_{t}^{\infty} (e^{\gamma_3(t-s)} - e^{\gamma_2(t-s)} f_3(s, z_3(s)))ds,$$

con

$$f_i(t, z) = -[r_0(t) + \lambda_i r_1(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + (r_1(t) + 2\lambda_i r_2(t))z + r_2(t)z' + 3zz' + (3\lambda_i + a_2 + r_2(t))z^2 + z^3].$$

Usando integración por partes se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} z_1(s)ds &= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^{t} f_1(s, z_1(s))ds - \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_1(t-s)}\right) - \frac{1}{\gamma_2}\left(\int_{t_0}^{t} f_1(s, z_1(s))ds\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_2(t-s)} f_1(s, z_1(s))ds\right)\right] \\
&= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^{t} \tilde{f}_1(s, z_1(s))ds + o(1)\right], \\
&= \frac{1}{\gamma_1\gamma_2}\int_{t_0}^{t} \tilde{f}_1(s, z_1(s))ds + o(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} z_2(s)ds &= \frac{-1}{\gamma_1+\gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^{t} f_2(s,z_2(s))ds - \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_3(t-s)} f_2(s,z_2(s))ds\right) + \frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^{t} f_2(s,z_2(s))ds\right.\right.\\
&\left.\left. + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_1(t-s)} f_2(s,z_2(s))ds - \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_1(t_0-s)} f_2(s,z_2(s))ds\right)\right]\\
&= \frac{-1}{\gamma_1+\gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\int_{t_0}^{t} \tilde{f}_2(s,z_2(s))ds + o(1) + k_1\right],\\
&= \frac{-1}{\gamma_1\gamma_3}\int_{t_0}^{t} \tilde{f}_2(s,z_2(s))ds + o(1) + \hat{k}_1,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} z_2(s)ds &= \frac{-1}{\gamma_1+\gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^{t} f_2(s,z_2(s))ds - \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_3(t-s)} f_2(s,z_2(s))ds\right) + \frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^{t} f_2(s,z_2(s))ds\right.\right.\\
&\left.\left. + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_1(t-s)} f_2(s,z_2(s))ds - \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_1(t_0-s)} f_2(s,z_2(s))ds\right)\right]\\
&= \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^{t} \tilde{f}_3(s,z_3(s))ds + o(1) + k_2\right],\\
&= \frac{1}{\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t} \tilde{f}_3(s,z_3(s))ds + o(1) + \hat{k}_2,
\end{aligned}$$

Puesto que $f_i(t,z) = \tilde{f}_i(t,z) - 3zz'$ y que

$$\int_{t_0}^{t} z(s)z'(s)ds = \left.\frac{z^2(s)}{2}\right|_{t_0}^{t} = \frac{z^2(t)}{2} - \frac{z^2(t_0)}{2} = c + o(1).$$

Luego, por las hipótesis 1 y 2 se cumplen las condiciones de los corolarios 1.1, 1.2 y 1.3 en los casos correspondientes a los z_i; con $b = -r_1 - 2\gamma_i r_2$, $c = f = -r_2$, entonces $z_i, z_i' = O(\tilde{r}_i)$. Además $\operatorname{Re}\gamma_2 > \operatorname{Re}\gamma_3$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > \operatorname{Re}\gamma_1$ y $\gamma \leq \operatorname{Re}\gamma_i$ para $i = 1, 2, 3$. Verificando las hipótesis para z_1 tenemos que las raíces del polinomio

$$\lambda^2 + (3\lambda_1 + a_2)\lambda + 3\lambda_1^2 + 2a_2\lambda_1 + a_1$$

tienen parte real distinta de cero, por las hipótesis 1, puesto que $\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$. Además la función de Green es

$$(\gamma_2 - \gamma_1)g(t,s) = \begin{cases} e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

luego, tenemos que las hipótesis del lema 1.4 se cumplen (visto en la demostración del teorema 2.1). Además, como para todo $\varepsilon > 0$, $i = 0, 1, 2$ $\ell(r_i, \varepsilon, \cdot) \to 0$ cuando $t \to \infty$, dado $0 < \alpha \leq \gamma/2$ y K tal que

$$0 < K < \frac{\gamma - \alpha - (3 + 3\lambda_1 + a_2 + M)M}{(\gamma - \alpha)(1 + |\gamma_1| + |\gamma_2| + M)}$$

existe t_0 tal que para todo $t \geq t_0$

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\gamma-\alpha)(t-s)}|r_1(s) + 2\lambda_1 r_2(s)|ds \leq K$$

y lo mismo para r_2. De la misma manera se verifican las hipótesis para z_2 y z_3.
Por otro lado de la ecuación (1.4) se deduce que $z_i'' \to 0$ cuando $t \to \infty$. Así, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_i'''(t)}{y_i(t)} = \lambda_i^3.$$

□

Ahora estamos en condiciones de demostrar un teorema tipo Levinson.

Teorema 2.3. Consideremos la ecuación (1.2). Supongamos que

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_3$ y $\gamma_3 = \lambda_2 - \lambda_3$; donde λ_i, $i = 1, 2, 3$ son las raíces características de la ecuación (1.1);

2. $r_i \in L^1$, $i = 0, 1, 2$.

Entonces la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $i = 1, 2, 3$, tales que satisfacen (2.1) y más aún, se tiene que.

$$y_i(t) = (1 + o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)}.$$

Demostración. De la misma manera que el teorema anterior, tenemos un sistema fundamental de soluciones de la forma (1.3), donde z_i satisface (1.4), entonces probaremos que para cada $i = 1, 2, 3$ existe z_i, tal que $z_i, z_i' \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $z_i \in L^1$. Además, sabemos que $\mathcal{L}_i(r) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $r \in L^1$ para $i = 1, 2$, donde $\mathcal{L}_i$ son los operadores del teorema 2.1. Así, tenemos que se satisfacen las hipótesis del teorema 2.1 y luego se tiene la existencia de tres soluciones y_i, $i = 1, 2, 3$ que satisfacen las ecuaciones (2.1).
Usando las hipótesis 1 y 2, vemos que se cumplen las condiciones de los lemas 1.4 y 1.5 para la ecuación (1.4), luego, las del teorema 2.1, con $p = 1$,

$$b_0 = 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1, \qquad b_1 = 3\lambda_i + a_2$$

$$a(t) = -r_0(t) - \lambda_i r_1(t) - \lambda_i^2 r_2(t), \qquad b(t) = -r_1(t) - 2\lambda_i r_2(t), \qquad c(t) = -r_2(t),$$

$$c_1 = -3, \qquad c_2 = -(3\lambda_i + a_2), \qquad f(t) = -r_2(t) \quad \text{y} \quad c_3 = -1.$$

Así, existe z_i tal que $z_i, z_i' \to 0$, cuando $t \to \infty$. Entonces $z_i \in L^1$ y así $\int_{t_0}^t z_i(s)ds = c + o(1)$. En particular, escogemos c tal que $e^{\int_{t_0}^t z_i(s)ds} = 1 + o(1)$, luego queda demostrado el teorema. □

Otro tipo de teorema es el de Hartman-Wintner, que considera perturbaciones en L^p con $p \in (1, 2]$. Ahora veremos un resultado de este tipo para la ecuación (1.2).

Teorema 2.4. Consideremos la ecuación (1.2). Supongamos que

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_3$ y $\gamma_3 = \lambda_2 - \lambda_3$; donde λ_i, $i = 1, 2, 3$ son las raíces características de la ecuación (1.1);

2. $r_i \in L^p$, $i = 0, 1, 2$ y $p \in (1, 2]$.

Entonces la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $i = 1, 2, 3$, tales que satisfacen (2.1) y en particular se tiene

$$y_i(t) = (1 + o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp\left(- \prod_{j \in \mathcal{N}(i)} (\lambda_i - \lambda_j)^{-1} \int_{t_0}^t [r_0(s) + \lambda_i r_1(s) + \lambda_i^2 r_2(s)]ds \right),$$

donde $\mathcal{N}(i) = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.

Demostración. Tenemos soluciones de la ecuación (1.2) de la forma (1.3), donde z_i satisface (1.4), para $i = 1, 2, 3$. Vemos que se cumplen las condiciones de los lemas 1.4 y 1.5 para la ecuación (1.4), con $p \in (1, 2]$,

$$b_0 = 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1, \qquad b_1 = 3\lambda_i + a_2$$

$$a^{(i)}(t) = -r_0(t) - \lambda_i r_1(t) - \lambda_i^2 r_2(t), \qquad b(t) = -r_1(t) - 2\lambda_i r_2(t), \qquad c(t) = -r_2(t),$$

$$c_1 = -3, \qquad c_2 = -(3\lambda_i + a_2), \qquad f(t) = -r_2(t) \quad \text{y} \quad c_3 = -1.$$

Entonces existe z_i tal que $z_i, z_i' \to 0$, cuando $t \to \infty$, además $z_i, z_i' \in L^p$ y podemos escribir z_i de la forma

$$z_i(t) = \theta^{(i)}(t) + \psi^{(i)}(t),$$

donde
$$\theta^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)a^{(i)}(s)ds,$$
$\theta^{(i)} \in L^p$, $\psi^{(i)} \in L^1$ y g_i es la función de Green para cada z_i, $i = 1, 2, 3$, es decir,
$$(\gamma_2 - \gamma_1)g_1(t,s) = \begin{cases} e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases},$$
$$-(\gamma_1 + \gamma_3)g_2(t,s) = \begin{cases} e^{-\gamma_3(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{\gamma_1(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$
y
$$(\gamma_2 - \gamma_3)g_3(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq s \\ e^{-\gamma_3(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases},$$
A partir de esto tenemos que
$$\int_{t_0}^{t} z_i(s)ds = \int_{t_0}^{t} \theta^{(i)}(s)ds + c_i + o(1)$$
Explícitamente para cada caso tenemos
$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \theta^{(1)}(s)ds &= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(1)}(s)ds - \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_1(t-s)}a^{(1)}(s)ds\right) - \frac{1}{\gamma_2}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(1)}(s)ds\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+ \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_2(t-s)}a^{(1)}(s)ds\right)\right]\\
&= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^{t} a^{(1)}(s)ds + o(1)\right],\\
&= \frac{1}{\gamma_1\gamma_2}\int_{t_0}^{t} a^{(1)}(s)ds + o(1),\\
&= \frac{-1}{\gamma_1\gamma_2}\int_{t_0}^{t}[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s)]ds + o(1),
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \theta^{(2)}(s)ds &= \frac{-1}{\gamma_1 + \gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(2)}(s)ds - \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_3(t-s)}a^{(2)}(s)ds\right) + \frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(2)}(s)ds\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+ \int_{t}^{\infty} e^{-\gamma_1(t-s)}a^{(2)}(s)ds - \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_1}(t_0 - s)a^{(2)}(s)ds\right)\right]\\
&= \frac{-1}{\gamma_1 + \gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3} + \frac{1}{\gamma_1}\right)\int_{t_0}^{t} a^{(2)}(s)ds + o(1) + k_1\right],\\
&= \frac{-1}{\gamma_1\gamma_3}\int_{t_0}^{t} a^{(2)}(s)ds + o(1) + \hat{k}_1,\\
&= \frac{1}{\gamma_1\gamma_3}\int_{t_0}^{t}[r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + \lambda_2^2 r_2(s)]ds + o(1) + \hat{k}_1,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \theta^{(3)}(s)ds &= \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)ds + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_3(t-s)}a^{(3)}(s)ds - \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_3(t_0-s)}a^{(3)}(s)ds\right)\right.\\
&\quad \left.-\frac{1}{\gamma_2}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)ds + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_2(t-s)}a^{(3)}(s)ds - \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_2(t_0-s)}a^{(3)}(s)ds\right)\right]\\
&= \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)ds + o(1) + k_2\right],\\
&= \frac{1}{\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)ds + o(1) + \hat{k}_2,\\
&= \frac{-1}{\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t} [r_0(s) + \lambda_3 r_1(s) + \lambda_3^2 r_2(s)]ds + o(1) + \hat{k}_2
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\int_{t_0}^{t} z_i(s)ds = \prod_{j\in\mathcal{N}(i)} (\lambda_i-\lambda_j)^{-1}\int_{t_0}^{t}[-r_0(s) - \lambda_i r_1(s) - \lambda_i^2 r_2(s)]ds + \hat{c}_i + o(1)$$

Luego, escogemos $\hat{c}_i$ de forma que $e^{\hat{c}_i+o(1)}$ para $i = 1, 2, 3$. □

Podemos generalizar la idea anterior y considerar perturbaciones en cualquier L^p, $p \in (m, m+1]$.

Teorema 2.5. Consideremos la ecuación (1.2). Supongamos que

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_3$ y $\gamma_3 = \lambda_2 - \lambda_3$; donde λ_i, $i = 1, 2, 3$ son las raíces características de la ecuación (1.1);

2. $r_i \in L^p$, $i = 0, 1, 2$ y $p \in (m; m+1]$, con $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$

Entonces la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $i = 1, 2, 3$, tales que satisfacen (2.1) y en particular se tiene que

$$y_i(t) = (1+o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)}\exp\left(\int_{t_0}^{t}\sum_{l=1}^{m}\theta_l^{(i)}(t)ds\right),$$

donde

$$\theta_1^{(i)} = -\int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)[r_0(s) + \lambda_i r_1(s) + \lambda_i^2 r_2(s)]ds,$$

$$\begin{aligned}
\theta_2^{(i)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\Big[-(r_1(s)+2\lambda_i r_2(s))\theta_1^{(i)}(s) - r_2(s)(\theta_1^{(i)})'(s) - 3\theta_1^{(i)}(s)(\theta_1^{(i)})'(s)\\
&\quad -(3\lambda_i + a_2)[\theta_1^{(i)}(s)]^2\Big]ds
\end{aligned}$$

$$\theta_l^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\Bigg[-(r_1(s)+2\lambda_i r_2(s))\theta_{l-1}^{(i)} - r_2(s)(\theta_{l-1}^{(i)})'(s) - 3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(i)}(s)(\theta_{l-k}^{(i)})'(s)$$
$$-(3\lambda_i + a_2)\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(i)}\theta_{l-k}^{(i)}(s) - r_2(s)\sum_{k=1}^{l-2}\theta_k^{(i)}(s)\theta_{l-1-k}^{(i)}(s) - \sum_{j+k+n=l}\theta_j^{(i)}(s)\theta_k^{(i)}(s)\theta_n^{(i)}(s)\Bigg]ds$$

para $l > 2$.

Demostración. Tenemos soluciones de la ecuación (1.2) de la forma (1.3), donde z_i satisface (1.4), para $i = 1,2,3$. Vemos que se cumplen las condiciones de los lemas 1.4 y 1.5, y del teorema 2.1, con $p \in (m, m+1]$,

$$b_0 = 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1, \qquad b_1 = 3\lambda_i + a_2$$

$$a(t) = -r_0(t) - \lambda_i r_1(t) - \lambda_i^2 r_2(t), \qquad b(t) = -r_1(t) - 2\lambda_i r_2(t), \qquad c(t) = -r_2(t),$$

$$c_1 = -3, \qquad c_2 = -(3\lambda_i + a_2), \qquad f(t) = -r_2(t) \quad \text{y} \quad c_3 = -1.$$

Entonces existe z_i tal que $z_i, z_i' \to 0$, cuando $t \to \infty$ y $z_i \in L^p$, y como z_i es acotada, $z_i \in L^\mu$ para todo $\mu \geq p$. A partir de esto, tenemos que podemos escribir z_i como

$$z_i(t) = \varphi_m^{(i)}(t) + \psi_m^{(i)}(t), \quad \text{con} \quad \varphi_m^{(i)}(t) = \sum_{l=1}^{m}\theta_l^{(i)}(t) \quad \text{donde}$$

$$\theta_1^{(i)} = -\int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s)]ds,$$

$$\theta_2^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\Bigg[-(r_1(s)+2\lambda_1 r_2(s))\theta_1^{(i)}(s) + r_2(s)(\theta_1^{(i)})'(s) + 3\theta_1^{(i)}(s)(\theta_1^{(i)})'(s)$$
$$+(3\lambda_1 + a_2)[\theta_1^{(i)}(s)]^2\Bigg]ds$$

$$\theta_l^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\Bigg[-(r_1(s)+2\lambda_1 r_2(s))\theta_{l-1}^{(i)} + r_2(s)(\theta_{l-1}^{(i)})'(s) + 3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(i)}(s)(\theta_{l-k}^{(i)})'(s)$$
$$+(3\lambda_1 + a_2)\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(i)}\theta_{l-k}^{(i)}(s) + r_2(s)\sum_{k=1}^{l-2}\theta_k^{(i)}(s)\theta_{l-1-k}^{(i)}(s) + \sum_{j+k+n=l}\theta_j^{(i)}(s)\theta_k^{(i)}(s)\theta_n^{(i)}(s)\Bigg]ds$$

con $\theta_l^{(i)} \in L^{p/l}$, $l = 1,2,\ldots,m$ y $\psi_m^{(i)} \in L^1$ y g_i es la función de Green para cada z_i, $i = 1,2,3$, es decir,

$$(\gamma_2 - \gamma_1)g_1(t,s) = \begin{cases} e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases},$$

$$-(\gamma_1+\gamma_3)g_2(t,s)=\begin{cases} e^{-\gamma_3(t-s)} & \text{si } t\geq s \\ e^{\gamma_1(t-s)} & \text{si } t\leq s \end{cases}$$

y

$$(\gamma_2-\gamma_3)g_3(t,s)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\geq s \\ e^{\gamma_3(t-s)}-e^{\gamma_2(t-s)} & \text{si } t\leq s \end{cases},$$

Así, para z_i tenemos

$$\int_{t_0}^{t} z_i(s)ds=\int_{t_0}^{t}\varphi_m^{(i)}(s)ds+c_i+o(1),$$

y ahora escogemos c_i de modo que $e^{c_i+o(1)}=1+o(1)$ para $i=1,2,3$. □

Nota. Observemos que para el primer término de la suma, en cada caso, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\theta_1^{(1)}(s)ds &= \frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\left[\frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^{t}a^{(1)}(s)ds-\int_{t_0}^{t}e^{-\gamma_1(t-s)}a^{(1)}(s)ds\right)-\frac{1}{\gamma_2}\left(\int_{t_0}^{t}a^{(1)}(s)ds\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\int_{t_0}^{t}e^{-\gamma_2(t-s)}a^{(1)}(s)ds\right)\right]\\
&= \frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\left[\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^{t}a^{(1)}(s)ds+o(1)\right],\\
&= \frac{1}{\gamma_1\gamma_2}\int_{t_0}^{t}a^{(1)}(s)ds+o(1),\\
&= \frac{-1}{\gamma_1\gamma_2}\int_{t_0}^{t}[r_0(s)+\lambda_1r_1(s)+\lambda_1^2r_2(s)]ds+o(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\theta_1^{(2)}(s)ds &= \frac{-1}{\gamma_1+\gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^{t}a^{(2)}(s)ds-\int_{t_0}^{t}e^{-\gamma_3(t-s)}a^{(2)}(s)ds\right)+\frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^{t}a^{(2)}(s)ds\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\int_{t}^{\infty}e^{-\gamma_1(t-s)}a^{(2)}(s)ds-\int_{t_0}^{\infty}e^{\gamma_1}(t_0-s)a^{(2)}(s)ds\right)\right]\\
&= \frac{-1}{\gamma_1+\gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\int_{t_0}^{t}a^{(2)}(s)ds+o(1)+k_1\right],\\
&= \frac{-1}{\gamma_1\gamma_3}\int_{t_0}^{t}a^{(2)}(s)ds+o(1)+\hat{k}_1,\\
&= \frac{1}{\gamma_1\gamma_3}\int_{t_0}^{t}[r_0(s)+\lambda_2r_1(s)+\lambda_2^2r_2(s)]ds+o(1)+\hat{k}_1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\theta_1^{(3)}(s)ds &= \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^{t}a^{(3)}(s)ds+\int_{t}^{\infty}e^{\gamma_3(t-s)}a^{(3)}(s)ds-\int_{t_0}^{\infty}e^{\gamma_3(t_0-s)}a^{(3)}(s)ds\right)\right.\\
&\left.-\frac{1}{\gamma_2}\left(\int_{t_0}^{t}a^{(3)}(s)ds+\int_{t}^{\infty}e^{\gamma_2(t-s)}a^{(3)}(s)ds-\int_{t_0}^{\infty}e^{\gamma_2(t_0-s)}a^{(3)}(s)ds\right)\right]\\
&= \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^{t}a^{(3)}(s)ds+o(1)+k_2\right],\\
&= \frac{1}{\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t}a^{(3)}(s)ds+o(1)+\hat{k}_2,\\
&= \frac{-1}{\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t}[r_0(s)+\lambda_3 r_1(s)+\lambda_3^2 r_2(s)]ds+o(1)+\hat{k}_2
\end{aligned}$$

Y así cada uno de los términos de la suma tiene una expresión en términos de los r_i, $i=0,1,2$ y de los $\theta_l^{(i)}$ anteriores.

Una afirmación que se hecho en todos los teoremas pero que no se ha demostrado es que y_i, $i=1,2,3$ forman un sistema fundamental de soluciones. Esto se deduce fácilmente calculando el wronskiano de y_i, $i=1,2,3$

$$\begin{aligned}
W[y_1,y_2,y_3] &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3\\ y_1' & y_2' & y_3'\\ y_1'' & y_2'' & y_3''\end{vmatrix} = y_1[y_2'y_3''-y_2''y_3']-y_2[y_1'y_3''-y_1''y_3']+y_3[y_1'y_2''-y_1''y_2']\\
&= y_1y_2y_3\left[\frac{y_2'}{y_2}\frac{y_3''}{y_3}-\frac{y_2''}{y_2}\frac{y_3'}{y_3}+\frac{y_1''}{y_1}\frac{y_3'}{y_3}-\frac{y_1'}{y_1}\frac{y_3''}{y_3}+\frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2''}{y_2}-\frac{y_1''}{y_1}\frac{y_2'}{y_2}\right].
\end{aligned}$$

Además, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)\neq 0$ para todo $t_0\leq t$ y

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{y_2'}{y_2}\frac{y_3''}{y_3}-\frac{y_2''}{y_2}\frac{y_3'}{y_3}+\frac{y_1''}{y_1}\frac{y_3'}{y_3}-\frac{y_1'}{y_1}\frac{y_3''}{y_3}+\frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2''}{y_2}-\frac{y_1''}{y_1}\frac{y_2'}{y_2}\right](t)=(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0$$

Luego, existe t_1 tal que $W[y_1,y_2,y_3](t_1)\neq 0$. Así, y_i, $i=1,2,3$ son linealmente independientes. Observemos que este sirve para todos los teoremas.

Capítulo 3

Aplicaciones

En este capítulo mostraremos tres ejemplos ilustrativos de los teoremas trabajados en el capítulo anterior.

Ejemplo 3.1. Consideremos la ecuación

$$y''' - \left(1 - \frac{1}{\log t}\right) y' + \frac{\operatorname{sen} t}{\log t} y = 0.$$

Aquí, tenemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $r_2 = 0$, $r_1(t) = 1/\log t$ y $r_0(t) = \operatorname{sen} t/\log t$. Notemos que $r_0, r_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$ y cualquier $p \geq 1$, $r_0, r_1 \notin L^p$, ya que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^{1/p}} &\leq \frac{1}{\log t} \quad \text{para todo} \quad t \geq e \\ \frac{|\operatorname{sen} t|}{t^{1/p}} &\leq \frac{|\operatorname{sen} t|}{\log t} \quad \text{para todo} \quad t \geq e \end{aligned}$$

Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \left[\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} + \frac{1}{\log s} + \frac{1}{\log s} z_1(s) + 3z_1^2(s) + z_1^3(s)\right] ds\right)$$

$$y_2(t) = (1 + o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left[\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} + \frac{1}{\log s} z_2(s) + 3z_2^2(s) + z_2^3(s)\right] ds\right)$$

y

$$y_3(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \left[\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} - \frac{1}{\log s} + \frac{1}{\log s} z_3(s) + 3z_3^2(s) + z_3^3(s)\right] ds\right)$$

donde z_i, $z_i' = O(\tilde{r}_i)$, $i = 1, 2, 3$ con

$$\tilde{r}_i(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \left|\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} + \frac{1}{\log s}\right| ds, \qquad \tilde{r}_3(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)} \left|\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} - \frac{1}{\log s}\right| ds,$$

$$\tilde{r}_2(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \frac{|\operatorname{sen} s|}{\log s} ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)} \frac{|\operatorname{sen} s|}{\log s} ds$$

y $0 < \alpha \leq 1/2$. Notemos que $r_1' \in L^1$ pero $r_0' \notin L^1$, o sea no podemos aplicar el teorema 2.2. Sin embargo, podemos dar una fórmula para las soluciones. Como r_0 es condicionalmente integrable, entonces podemos decir que

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{\log s} + \frac{1}{\log s} z_1(s) + 3z_1^2(s) + z_1^3(s)\right] ds\right)$$

$$y_2(t) = (1+o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{\log s} z_2(s) + 3z_2^2(s) + z_2^3(s)\right] ds\right)$$

y

$$y_3(t) = (1+o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[-\frac{1}{\log s} + \frac{1}{\log s} z_3(s) + 3z_3^2(s) + z_3^3(s)\right] ds\right)$$

Ejemplo 3.2. Consideremos la ecuación

$$y''' - y' + \cos(t^2) y = 0.$$

Aquí tenemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $r_2 = 0$, $r_1 = 0$ y $r_0(t) = \cos(t^2)$. Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[\cos(s^2) + 3z_1^2(s) + z_1^3(s)] ds\right),$$

$$y_2(t) = (1+o(1)) \exp \int_{t_0}^{t}[\cos(s^2) + 3z_2^2(s) + z_2^3(s)] ds$$

y

$$y_3(t) = (1+o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[\cos(s^2) + 3z_3^2(s) + z_3^3(s)] ds\right),$$

donde z_i, $z_i' = O(\tilde{r}_i)$, $i = 1, 2, 3$ con

$$\tilde{r}_1(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} |\cos(s^2)| ds, \qquad \tilde{r}_3(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)} |\cos(s^2)| ds,$$

$$\tilde{r}_2(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} |\cos(s^2)| ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)} |\cos(s^2)| ds$$

y $0 < \alpha \leq 1/2$. Y como r_0 es condicionalmente integrable, entonces podemos decir que

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[3z_1^2(s) + z_1^3(s)] ds\right),$$

$$y_2(t) = (1 + o(1)) \exp \int_{t_0}^{t} [3z_2^2(s) + z_2^3(s)]ds$$

y

$$y_3(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} [3z_3^2(s) + z_3^3(s)]ds \right),$$

Ejemplo 3.3. Consideremos la ecuación

$$y''' - y' + \frac{1}{t^{1/p}} y = 0.$$

Aquí tenemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $r_1, r_2 = 0$ y $r_0(t) = 1/t^{1/p}$. Notemos que $r_0 \notin L^p$ pero $r_0 \in L^q$ para $q > p$. Para $1 \leq p < 2$ podemos aplicar el teorema 2.3. Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(t-t_0)},$$

$$y_2(t) = (1 + o(1))$$

y

$$y_3(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)}$$

Para $p \geq 2$ podemos aplicar el teorema 2.5. Tenemos $p + 1 \in (m, m + 1]$ y $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(t-t_0)} \exp \left(\int_{t_0}^{t} \varphi_m^{(1)}(s)ds \right), \qquad y_2(t) = (1 + o(1)) \exp \left(\int_{t_0}^{t} \varphi_m^{(2)}(s)ds \right)$$

y

$$y_3(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)} \exp \left(\int_{t_0}^{t} \varphi_m^{(3)}(s)ds \right),$$

con

$$\varphi_m^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^{m} \theta_l^{(i)}(t),$$

donde

$$\begin{aligned}
\theta_1^{(1)}(t) &= \int_{t_0}^{t} (e^{-(t-s)} - e^{-2(t-s)}) \frac{1}{s^{1/p}} ds, \\
\theta_2^{(1)}(t) &= \int_{t_0}^{t} (e^{-(t-s)} - e^{-2(t-s)}) \left[-3\theta_1^{(i)}(s)(\theta_1^{(i)})'(s) - 3[\theta_1^{(i)}(s)]^2 \right] ds,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\theta_l^{(1)}(t) &= \int_{t_0}^{t}(e^{-(t-s)}-e^{-2(t-s)})\Bigg[-3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(1)}(s)(\theta_{l-k}^{(1)})'(s)-3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(1)}(s)\theta_{l-k}^{(i)}(s)\\
&= -\sum_{j+k+n=l}\theta_j^{(1)}(s)\theta_k^{(1)}(s)\theta_n^{(1)}(s)\Bigg]ds,\\
\theta_1^{(2)}(t) &= \frac{-1}{2}\left(\int_{t_0}^{t}e^{-(t-s)}\frac{1}{s^{1/p}}ds+\int_t^{\infty}e^{(t-s)}\frac{1}{s^{1/p}}ds\right),\\
\theta_2^{(2)}(t) &= \frac{-1}{2}\left(\int_{t_0}^{t}e^{-(t-s)}-3\theta_1^{(2)}(s)(\theta_1^{(2)})'(s)ds+\int_t^{\infty}e^{(t-s)}-3\theta_1^{(2)}(s)(\theta_1^{(2)})'(s)ds\right),\\
\theta_l^{(2)}(t) &= \frac{-1}{2}\Bigg(\int_{t_0}^{t}e^{-(t-s)}\left[-3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(i)}(s)(\theta_{l-k}^{(i)})'(s)-\sum_{j+k+n=l}\theta_j^{(i)}(s)\theta_k^{(i)}(s)\theta_n^{(i)}(s)\right]ds\\
&= +\int_t^{\infty}e^{(t-s)}\left[-3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(i)}(s)(\theta_{l-k}^{(i)})'(s)-\sum_{j+k+n=l}\theta_j^{(i)}(s)\theta_k^{(i)}(s)\theta_n^{(i)}(s)\right]ds\Bigg),\\
\theta_1^{(3)}(t) &= \int_t^{\infty}(e^{(t-s)}-e^{2(t-s)})\frac{1}{s^{1/p}}ds,\\
\theta_2^{(3)}(t) &= \int_t^{\infty}(e^{(t-s)}-e^{2(t-s)})\left[-3\theta_1^{(3)}(s)(\theta_1^{(3)})'(s)+3[\theta_1^{(3)}(s)]^2\right]ds
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\theta_l^{(3)}(t) &= \int_t^{\infty}(e^{(t-s)}-e^{2(t-s)})\Bigg[-3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(3)}(s)(\theta_{l-k}^{(3)})'(s)+3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(3)}(s)\theta_{l-k}^{(3)}(s)\\
&= -\sum_{j+k+n=l}\theta_j^{(3)}(s)\theta_k^{(3)}(s)\theta_n^{(3)}(s)\Bigg]ds
\end{aligned}
$$

para $l > 2$

Conclusiones

1. Usando el cambio de variables $z = \frac{y'}{y} - \lambda$ la ecuación (1.2) de orden tres es transformada en una ecuación de Riccati de orden dos.

2. Usando el teorema del punto fijo de Banach se garantiza que la ecuación de Riccati tenga solución única.

3. Estudiando el comportamiento asintótico de la ecuación de Riccati es posible estudiar el comportamiento asintótico de la ecuación (1.2)

4. Usando el método escalar es posible obtener una generalización del teorema de Poincaré (teorema 2.1).

5. Usando el método escalar es posible obtener demostraciones alternativas de los teoremas de Levinson y Hartman-Wintner

Bibliografía

[1] **A. R. Aftabizadeh**; *Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 116(2) (1986), 415-426.

[2] **R. Bellman**; *A Survey of the Theory of the Boundedness, Stability, and Asymptotic Behavior of Solutions of Linear and Non-linear Differential and Difference Equations.* Office of Naval Research of United States, Department of the Navy, NAVEXOS P-596, 1949.

[3] **R. Bellman**; *On the asymptotic behavior of solutions of* $u'' - (1 + f(t))u = 0$. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 31(1) (1950), 83-91.

[4] **R. Bellman**; *Stability Theory of Differential Equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[5] **E.A. Coddington, N. Levinson**; *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.

[6] **W. A. Coppel**; *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations.* D. C. Heath and Co., Boston, Mass., 1965.

[7] **A. R. Davies, A. Karageorghis, T. N. Phillips**; *Spectral Galerkin methods for the primary two-point boundary value problem in modelling viscoelastic flows*, Int. J. Numer. Methods Engng, 26 (1988), 647-662

[8] **M.S.P. Eastham**; *The asymptotic solution of higher-order differential equations with small final coefficient.* Portugal. Math., 45(4) (1988), 351-362.

[9] **M.S.P. Eastham**; *The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems, Applications of the Levinson theorem.* London Mathematical Society Monographs, volume 4, Oxford University Press, New York, 1989.

[10] **U. Elias, H. Gingold**; *A framework for asymptotic integration of differential systems.* Asymptot. Anal., 35(3-4) (2003), 281-300.

[11] **M.V. Fedoryuk**; *Asymptotic Analysis: Linear ordinary differential equations (Translated from the Russian by Andrew Rodick).* Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[12] **P. Figueroa, M. Pinto**; *Asymptotic expansion of the variable eigenvalue associated to second order differential equations.* Nonlinear Stud., 13(3) (2006), 261-272.

[13] **P. Figueroa, M. Pinto**; *Riccati equations and nonoscillatory solutions of third order differential equations.* Dynam. Systems Appl., 17(3-4) (2008), 459-475.

[14] **P. Figueroa, M. Pinto**; *Lp-solutions of Riccati-type differential equations and asymptotics of third order linear differential equations.* Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., 17(4) (2010), 555-571.

[15] **F. Gazzola, H.C. Grunau**; *Radial entire solutions for supercritical biharmonic equations*, Math. Ann., 334(4) (2006), 905-936.

[16] **W.A. Harris Jr., D.A. Lutz**; *On the asymptotic integration of linear differential systems.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 48(1) (1974), 1-16.

[17] **W.A. Harris Jr., D.A. Lutz**; *A unified theory of asymptotic integration.* J. Math. Anal. Appl., 57(3) (1977), 571-586.

[18] **P. Hartman**; *Unrestricted solution fields of almost-separable differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc., 63 (1948), 560-580.

[19] **P. Hartman, A. Wintner**; *Asymptotic integrations of linear differential equations.* American Journal of Mathematics, 77(1) (1955), 45-86.

[20] **T.A. Jangveladze, G.B. Lobjanidze**; *On a nonlocal boundary value problem for a fourth-order ordinary differential equation*, Differential Equations, 47(2) (2011), 179-186.

[21] **P. Karageorghis**; *Asymptotic expansion of radial solutions for supercritical biharmonic equations*, Nonlinear Differential Equations and Applications, 19(4) (2012), 401-415.

[22] **A. Lamnii, O. El-khayyari, J. Dabounou**; *Solving linear fourth order boundary value problem by using a hyperbolic splines of order 4*, Int. Electron. J. Pure Appl. Math., 7(2) (2014), 8598.

[23] **N. Levinson**; *The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations.* Duke Mathematical Journal, 15(1) (1948), 111-126.

[24] **F.W.J. Olver**; *Asymptotics and Special Functions.* (Reprint of the 1974 original Academic Press, New York) AKP Classics, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1997.

[25] **O. Perron**; *Ber einen satz des henr Poincaré.* J. Reine Angew. Math., 136 (1909), 17-37.

[26] **G.W. Pfeiffer**; *Asymptotic solutions of the equation* $y''' + qy' + ry = 0$. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, Thesis (Ph.D.)-University of Georgia, 1970.

[27] **G.W. Pfeiffer**; *Asymptotic solutions of* $y'''+qy'+ry = 0$. J. Differential Equations, 11 (1972), 145-155.

[28] **B. Pietruczuk**; *Resonance phenomenon for potentials of wignervon Neumann type.* In Geometric Methods in Physics (P. Kielanowski, S.T. Ali, A. Odesskii, A. Odzijewicz, M. Schlichenmaier, and T. Voronov, editors). Trends in Mathematics, Springer Basel, pages 203-207, 2013.

[29] **M. Pinto**; *Null solutions of difference systems under vanishing perturbation.* J. Difference Equ. Appl., 9(1) (2003), 1-13.

[30] **H. Poincaré**; *Sur les equations lineaires aux differentielles ordinaires et aux differences finies.* Amer. J. Math., 7(3) (1885), 203-258.

[31] **J. Simsa**; *An extension of a theorem of Perron.* SIAM J. Math. Anal., 19(2) (1988), 460-472.

[32] **S.A. Stepin**; *The wkb method and dichotomy for ordinary differential equations.* Doklady Mathematics, 72(2) (2005), 783-786.

[33] **S.A. Stepin**; *Asymptotic integration of nonoscillatory second-order differential equations.* Doklady Mathematics, 82(2) (2010), 751-754.

[34] **S.P. Timoshenko**; *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book, New York, NY, USA, 2nd edition, 1961.