Universidad Nacional "Pedro Ruiz Gallo"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

TÉCNICAS DE RECONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA PARA LA SOLUCIÓN POR APROXIMACIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES INCONSISTENTE DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES DE LA IMAGEN DEL CUERPO HUMANO

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADO POR:

Bach. EDER WILDER GONZALES SALAZAR
Bach. MARLENNY ROJAS BARRIOS

ASESOR:

Msc. DOLORES SÁNCHEZ GARCÍA

LAMBAYEQUE - PERÚ
2015

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Técnicas de reconstrucción algebraica para la solución por aproximación del sistema de ecuaciones lineales inconsistente de las secciones transversales de la imagen del cuerpo humano

Tesis para optar el título profesional de

Licenciado en Matemática

Presentado por:

Eder Wilder Gonzales Salazar.
Marlenny Rojas Barrios.

Asesor:

Msc. Dolores Sánchez García

Lambayeque - Perú

2015

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes por la presente certifican que han leído y recomiendan a la facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"Técnicas de reconstrucción algebraica para la solución por aproximación del sistema de ecuaciones lineales inconsistente de las secciones transversales de la imagen del cuerpo humano"** presentada por los Bachilleres en Matemáticas en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Dra. Gloria María Ortiz Basauri
Presidente

Lic. Mat. Walter Arriaga Delgado
Secretario

Lic. Mat. Miriam María Estrada Huancas
Vocal

Fecha de defensa: Marzo 2015

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Técnicas de reconstrucción algebraica para la solución por aproximación del sistema de ecuaciones lineales inconsistente de las secciones transversales de la imagen del cuerpo humano

Bach. Mat. Eder Wilder Gonzales Salazar

Bach. Mat. Marlenny Rojas Barrios

Msc. Dolores Sánchez García

Lambayeque - Perú

Marzo 2015

Dedicatoria:

El presente trabajo está dedicado a Dios y a mis padres Ceferina y Domingo por el apoyo incondicional y por ser el motivo para seguir adelante.

Marlenny

La presente Tesis está dedicado a nuestro Dios todopoderoso, quien siempre fue mi guía y fortaleza para poder seguir adelante en mi proyecto de vida.

A mis Padres Manuel y Manuela que con trabajo, fe esperanza y amor lograron de mí una persona exitosa.

A mi esposa e hijos que Dios colocó en mi camino y ahora son el motivo para seguir firme y adelante.

Eder

Agradecimientos

El presente trabajo se desarrolló gracias al apoyo del asesor Msc. Dolores Sánchez García quién nos asignó y orientó el tema a desarrollar, aportando de alguna manera beneficiar a los alumnos de la escuela profesional de Matemática.

También hacemos extensivo nuestro agradecimiento a todos los docentes que fueron participes de nuestra formación académica, sobre todo aquellos que aportaron en la elaboración del presente trabajo, en especial al Msc. Mariano González Ulloa quién nos orientó en la elaboración de las técnicas de reconstrucción empleando el paquete Mathematica.

En lo referente a instituciones hacemos explícito nuestro agradecimiento a la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo y a la escuela profesional de Matemáticas por sus aportes en nuestra formación académica.

Resumen

El problema básico de la tomografía computarizada es construir una imagen de una sección transversal del cuerpo humano utilizando datos colectados de varios haces individuales de rayos X que se hacen pasar por la sección transversal. Estos datos son procesados por una computadora y la sección transversal obtenida por la computadora se despliega en un monitor de video.

En el presente trabajo de investigación, se analiza la construcción de una sección transversal del cuerpo humano, el cual requiere la solución de un amplio sistema de ecuaciones lineales. Pueden usarse ciertos algoritmos, llamados técnicas de reconstrucción algebraica (ART, por sus siglas en inglés), para resolver estos sistemas lineales, cuyas soluciones producen las secciones transversales en forma digital.

Viendo que la construcción de una imagen de una sección transversal del cuerpo humano analizando escaneos de rayos X lleva a un sistema de ecuaciones lineales inconsistente, para el cual se presenta un algoritmo de iteración que se ajusta a la llamada clase de Técnicas de Reconstrucción Algebraica (TRA), que es utilizado para encontrar soluciones por aproximación de esos sistemas lineales.

Abstract

The basic problem of computed tomography is to build an image of a cross section of the human body using data collected from several individual beams of X- rays that are passed through the cross section. These data are processed by a computer and the cross section obtained by the computer is displayed on a video monitor.

In this research we analyze, the construction of a cross section Human Body, which requires the solution of a large system of linear equations. Certain algorithms can be used, called algebraic reconstruction techniques (ART, for its acronym in English), to solve these linear systems whose solutions produce cross sections in digital form.

Seeing that the construction of an image of a cross section of the human body by analyzing X-ray scans leads to a system to inconsistent linear equations, for which is presented an iteration algorithm that conforms to called class of Algebraic Reconstruction Techniques (TRA), which is used for finding approximate solutions of these linear systems.

Introducción

La tomografía computarizada, TC, es un procedimiento con imágenes que emplea un equipo especial de rayos X para crear imágenes detalladas, o exploraciones de regiones internas del cuerpo. La tomografía computarizada es llamada también tomografía axial computarizada (TAC).

El presente trabajo tiene por finalidad presentar las técnicas de reconstrucción algebraica de manera detallada para una mejor comprensión en su aplicación. Dichas técnicas permiten aproximar la solución del sistema de ecuaciones lineales inconsistente, cuyas soluciones aproximadas representan las imágenes de la sección transversal del cuerpo humano.

En el capítulo 1 introduciremos definiciones ya conocidas como sistemas lineales, matrices, espacio euclidiano, logaritmo natural, producto interno y ortogonal, así como la proyección ortogonal de un vector y el teorema de la proyección ortogonal que nos servirá como herramienta para establecer las técnicas algebraicas antes mencionadas. En el capítulo 2 se muestra la evolución de los tomógrafos por transmisión (primera, segunda, tercera y cuarta generación), los tipos de tomografía: tomografía computarizada de emisión única de fotón, tomografía de emisión de positrones, tomografía eléctrica, tomografía de protones y tomografía computarizada de rayos X. También daremos una idea de como se construye una tomografía. Además mostramos los posibles modos de escanear la sección transversal (modo paralelo, modo haz de abanico). Así como las deducciones de las ecuaciones lineales, para ello emplearemos los métodos del centro del pixel, de la línea central y del área. En el capítulo 3 mostraremos el Algoritmo bidimensional con su respectivo ejemplo así como el algoritmo generalizado con un ejemplo formado por 12 ecuaciones lineales con 9 variables. Finalmente mostraremos el algoritmo bidimensional empleando el software Mathematica para determinar la solución aproximada del sistema lineal inconsistente.

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
CUC-VRACAD
05 OCT 2015
MEMBOVEDA

Índice general

1. Preliminares 12
1.1. Sistema de ecuaciones lineales 12
1.2. Clasificación de sistemas 12
1.3. Matrices 13
1.4. Espacio euclidiano 15
1.5. Logaritmo natural 15
1.6. Producto interno y ortogonal 16
1.7. Expresión matricial de un sistema lineal de ecuaciones 16
1.8. Proyección ortogonal de un vector 17
1.9. Teorema de la proyección ortogonal 18
1.10. Sucesiones convergentes en R 21

2. Tomografía Computarizada 22
2.1 Evolución de los tomógrafos por transmisión 23
2.1.1 Primera generación 23
2.1.2 Segunda generación 24
2.1.3 Tercera generación 25
2.1.4 Cuarta generación 26
2.2 Tipos de tomografía 27
2.3 Construcción de una tomografía 28
2.4 Componentes de un tomógrafo 29
2.5 Posibles modos de escanear la sección transversal 31
2.5.1 Modo paralelo 31
2.5.2 Modo de haz de abanico 32
2.6 Deducción de las ecuaciones 32
2.7 Método para definir los valores de a_{ij} 38

3. Técnicas de reconstrucción algebraicas 40
3.1 Algoritmo bidimensional 41
3.1.1 Aplicación del algoritmo en el caso bidimensional 43
3.2 Algoritmo generalizado 56
3.2.1 Aplicación del algoritmo en el caso de R^9 58
3.3 Algoritmo bidimensional empleando el software Mathematica 84

Índice de figuras

1.1. Proyección ortogonal de un vector en dirección de otro....17

1.2. Producto escalar de $\vec{w}$ por $\vec{v}$ no nulo....17

1.3. Proyección ortogonal de un punto en una recta....18

1.4. Proyecciones ortogonales....19

2.1. Tomógrafo....23

2.2. Sección transversal de la cabeza de un ser humano....23

2.3. Escaneamiento de un tomógrafo de primera generación....24

2.4. Escaneamiento de un tomógrafo de segunda generación....25

2.5. Escaneamiento de un tomógrafo de tercera generación....25

2.6. Escaneamiento de un tomógrafo de cuarta generación....26

2.7. Tomógrafos de rayos X....27

2.8. Tomógrafo en movimiento....28

2.9. Transmisión de los rayos X en un tomógrafo de cuarta generación....29

2.10. Componentes de un tomógrafo clásico....30

2.11. Toshiba Aquilion 64....30

2.12. Armazón metálico que alberga la hileras de detectores....30

2.13. Ranura por donde emerge el haz de rayos X....30

2.14. Escaneo en modo paralelo....31

2.15. Escaneo en modo de haz de abanico....32

2.16. Escaneo de la sección transversal del cuerpo humano....33

2.17. j-ésimo pixel por el que capta un haz de abanico....33

2.18. Hilera completa de pixeles....34

2.19. Funcionamiento de un tomógrafo....37

2.20. Método para hallar los coeficientes a_{ij}....39

3.1. Gráficos de las rectas L_1, L_2, L_3....41

3.2. Interpretación geométrica de los tres primeros ciclos.....42
3.3. Ciclo límite.....43
3.4. Tabla de la aplicación del algoritmo en el caso bidimensional.....55
3.5. Haces de rayos X.....58
3.6. Tabla de la aplicación del algoritmo en el caso de R^9.....82

Capítulo 1

1. Preliminares

1.1 Sistema de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal de "n" variables $x_1, x_2, x_3 ....., x_n$ es escrita de la siguiente forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ...a_nx_n = b$

donde $a_1, a_2, a_3 ....., a_n$ y b son constantes reales.

Las ecuaciones lineales son clásicamente utilizadas para modelar problemas reales. Las constantes reales son conocidas como parámetros y representan las informaciones obtenidas del problema real, en cuanto la constante b es una contribución o suma de contribuciones de datos.

Un conjunto con "m" ecuaciones en "n" variables $x_1, x_2, x_3 ....., x_n$ es llamado sistema de ecuaciones lineales o simplemente sistema lineal y escrito de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

1.2 Clasificación de sistemas

Consideremos un sistema lineal con m filas y n columnas llamaremos

a. Inconsistente o incompatible: Si $m > n$

Un sistema es inconsistente o incompatible si no tiene solución.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ x+3y=5 \\ x-y=9 \end{array}\right\}$$

Tiene m=3 ecuaciones con n=2 incógnitas. Por lo tanto $m > n$ el sistema no tiene solución.

b. Compatible: Si $m \leq n$

Un sistema se llama consistente o compatible si tiene al menos una solución. En este caso si la solución es única se dice **determinado**, en caso contrario es **indeterminado.**

1.3 Matrices

i. Dada una matriz A_{mxn}, la imagen sobre R^n es el conjunto denotado por:

$$I(A) = \left\{ b \in R^n \,/\, b = Ax \text{ para algún } x \in R^n \right\}$$

y el núcleo es:

$$N(A) = \left\{ x \in R^n \,/\, Ax = 0 \right\}$$

ii. Dada una matriz cuadrada A de orden "n", decimos que es invertible si $\exists\ A^{-1}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, siendo I la matriz identidad.

Operaciones con Matrices

a) **Suma de matrices**

Sean las matrices: $A = [a_{ij}]_{mxn}$ y $B = [b_{ij}]_{mxn}$, ambas del mismo orden m x n. La matriz suma de A y B es:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

la cual también es de orden m x n.

Propiedades: Sean las matrices: $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, ambas del mismo orden m x n. Las matrices A y B, cumplen las siguientes igualdades

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $k(A + B) = kA + kB$ (k escalar)

4. $A = IA$

5. La diferencia de A y B, es definida por:

$$A - B = A + (-B)$$

b) **Multiplicación de una Matriz por un Escalar**

Sea $A = [a_{ij}]$ de orden m x n y $k \in R$. Entonces: $kA = [ka_{ij}] \quad \forall\ i,j$.

Nota. Observar que cada elemento de la matriz se multiplica por el escalar k.

c) **Producto de un vector fila por un vector columna**

Sean:

$$A = [a_1\ a_2 \ldots a_n] \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$AB = [a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n] = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \quad \text{es el producto de } A \text{ por } B.$$

Al número $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ se le conoce como producto escalar de A y B.

Nota. Observar que ambas matrices tienen la misma cantidad de elementos (la matriz A tiene n elementos columna y la matriz B tiene n elementos fila)

d) **Producto de dos Matrices**

El producto de una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden m x n y una matriz $B = [b_{ik}]$ de orden n x p, es otra matriz $C = [c_{ik}]$ de orden m x p, donde c_{ik} es el producto escalar de la i-ésima fila de A por la k-ésima columna de B. Gráficamente se puede observar lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ik} & \cdots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = C = [c_{ik}]$$

Fila i de la matriz A Columna k de la matriz B

Donde: $c_{ik} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{ik} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

Propiedades

1. $A(BC)=(AB)C$
2. $(A+B)C=AC+BC$
3. $A(B+C)=AB+AC$
4. En general, no se cumple que $AB=BA$. (No conmutan).

1.4 Espacio Euclidiano

El espacio euclidiano, denotado por R^n está definido por el conjunto

$$R^n = \{x = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) : x_i \in R\}$$

es decir, R^n es el producto cartesiano de n copias de R, el conjunto de los números reales. Un espacio euclídeo es un espacio vectorial completo dotado de un producto interno (lo cual lo convierte además en un espacio normado, un espacio métrico).

1.5 Función logaritmo en base *e*:

Sea $e > 0$, $e \neq 1$. El logaritmo de x con base e se define como $y = \log_e x$ si y sólo si $e^y = x$, siempre y cuando $x > 0$

Nota: en adelante denotaremos $\log_e = \ln$

1.6 Producto interno y Ortogonalidad

Sea V un espacio vectorial entonces un producto interno sobre V es una función donde a cada par ordenado de vectores $u, v \in V$ asocia un número real denotado por $u^T v$ que satisface las siguientes propiedades:

a. $(u+v)^T w = u^T w + v^T w \qquad \forall u, v \in V$

b. $(\alpha u)^T v = \alpha(u^T . v) \qquad \forall u, v \in V, \alpha \in R$

c. $u^T v = v^T u \qquad \forall u, v \in V$

d. $u^T u \geq 0 \qquad \forall u, v \in V$

1.7 Expresión matricial de un sistema lineal de ecuaciones

Vamos a ver que todo sistema lineal de ecuaciones se puede expresar en términos de matrices. Es lo que se conoce como **expresión matricial** de un sistema.

Sea un sistema de m ecuaciones con n incógnitas cualesquiera:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Se puede considerar entonces las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

La matriz A recibe el nombre de matriz de coeficientes, la matriz X es la matriz de incógnitas y la matriz B es la matriz de los términos independientes. En tal caso nuestro sistema se podrá expresar como: $AX = B$

1.8 Proyección ortogonal de un vector

Consideremos la proyección ortogonal de $\vec{u}$ en dirección de $\vec{v}$

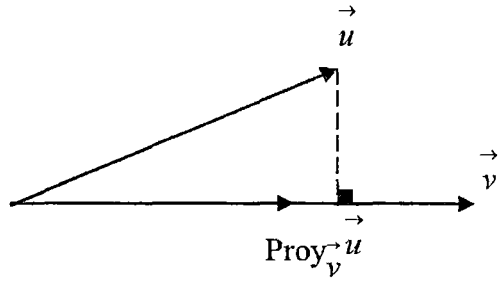


Figura 1.1: Proyección ortogonal de un vector en dirección de otro

Sea $\alpha\vec{v}$ la proyección de $\vec{u}$ en dirección de $\vec{v}$.

Definamos $\vec{w}$ como en la figura 1.2

$$\vec{w}=\vec{u}-\alpha\vec{v}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

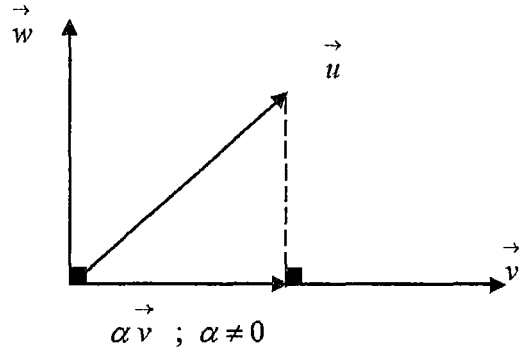


Figura 1.2: Producto escalar de $\vec{w}$ por $\vec{v}$ no nulo

Así mismo, tenemos $\vec{w}$ y $\vec{v}$ son ortogonales. Luego el producto escalar de $\vec{w}$ por $\alpha\vec{v}$ es nulo, es decir

$$\vec{w}(\alpha\vec{v})=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene:

$$\left(\vec{u}-\alpha\vec{v}\right).\left(\alpha\vec{v}\right)=0$$

$$\vec{u}\left(\alpha\vec{v}\right)-\left(\alpha\vec{v}\right)\left(\alpha\vec{v}\right)=0$$

$$\alpha\left(\vec{u}.\vec{v}\right)-\alpha^2\left(\vec{v}.\vec{v}\right)=0 \qquad (\alpha\neq 0)$$

$$\vec{u}.\vec{v}-\alpha\left(\vec{v}.\vec{v}\right)=0$$

$$\vec{u}.\vec{v}=\alpha\left(\vec{v}.\vec{v}\right)$$

$$\alpha=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{v}.\vec{v}}$$

Pero $\alpha\vec{v}=\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}$ lo que implica: $\alpha\vec{v}=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{v}.\vec{v}}.\vec{v}$

Por lo tanto $\alpha\vec{v}=\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}$

1.9 Teorema de la proyección ortogonal

Sea L una recta en R^2 con ecuación $a^T x=b$, y sea x^* cualquier punto en R^2 (ver figura 1.3). Entonces la proyección ortogonal, x_p de x^* sobre L está dada por:

$$x_p=x^*+\frac{\left(b-a^T\cdot x^*\right)}{a^T\cdot a}\cdot a$$

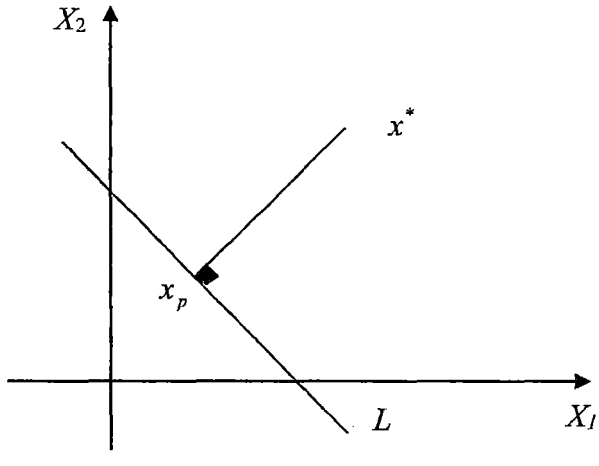


Figura 1.3: Proyección ortogonal
de un punto a una recta

Sean $a=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ y $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, luego la ecuación general de una recta $a_1x_1+a_2x_2=b$ en el plano puede escribirse de la forma $a^Tx=b$, es decir $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=b$.

El vector $a^T=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ es ortogonal a la recta $a^Tx=b$.

Sea $\vec{x}^*$ un vector cualquiera del plano cartesiano y $\vec{x}_p$ su proyección ortogonal en la recta L (ver figura 1.4).

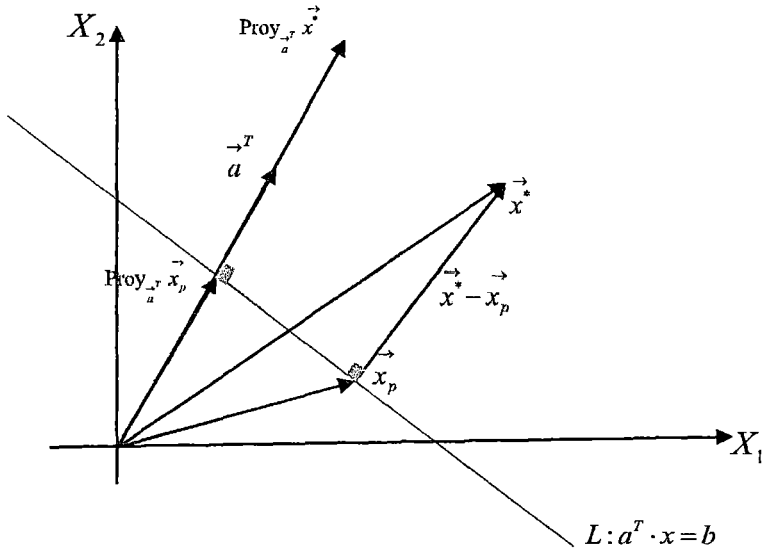


Figura 1.4: Proyecciones ortogonales

Se puede escribir $\vec{x}^*-\vec{x}_p=\text{Proy}_{\vec{a}}\vec{x}^*-\text{Proy}_{\vec{a}}\vec{x}_p$

$$\vec{x}^*-\vec{x}_p=\frac{\vec{x}^*\cdot\vec{a}^T}{\vec{a}^T\cdot\vec{a}^T}\cdot\vec{a}^T-\frac{\vec{x}_p\cdot\vec{a}^T}{\vec{a}^T\cdot\vec{a}^T}\cdot\vec{a}^T$$

En notación matricial, se puede escribir la ecuación vectorial como la ecuación matricial siguiente:

$$x^*-x_p=\frac{x^*\cdot a^T}{a^T\cdot a}\cdot a-\frac{x_p\cdot a^T}{a^T\cdot a}\cdot a$$

$$x^* - x_p = \left(\frac{a^T \cdot x^*}{a^T \cdot a} - \frac{a^T \cdot x_p}{a^T \cdot a} \right) \cdot a$$

Como x_p pertenece a la recta L, entonces x_p satisface la ecuación de la recta:

$$L : a^T x_p = b$$

es decir:

$$x^* - x_p = \left(\frac{a^T . x^*}{a^T . a} - \frac{b}{a^T . a} \right) . a$$

$$x_p = x^* + \frac{\left(b - a^T \cdot x^* \right)}{a^T \cdot a} \cdot a \qquad \square$$

1.10 Sucesiones convergentes en *R*: Una sucesión se dice que converge a un número real x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un $m_\varepsilon > 0$ talque si n es cualquier número natural mayor o igual m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$, es decir $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ m_\varepsilon \in N : n \geq m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

Se dice también que el número x es **límite de la sucesión** $\{x_n\}$, y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = x_0$ o simplemente $\lim\{x_n\} = x_0$ e incluso $\{x_n\} \to x$

Ejemplo:

La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge a cero.

Para probarlo, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un $m \in N$ tal que para todo $n \geq m$ se verifique que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Como $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$ siempre que $n \geq m$, bastará tomar como número m cualquier número natural que verifique $\frac{1}{m} < \varepsilon$ es decir $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Efectivamente hay números naturales, m que verifican la condición $m > \frac{1}{\varepsilon}$ cualquiera sea el número $\varepsilon > 0$ dado, es justamente lo que dice la propiedad Arquimediana del orden de R. Pues bien, cualquier $m \in N$ tal que $m > \frac{1}{\varepsilon}$ nos sirve como apropiado m_ε, pero parece razonable tomar el más pequeño de todos ellos que será la parte entera $\frac{1}{\varepsilon}$ más una unidad, es decir $m_\varepsilon = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$. Por lo tanto $\lim\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$

Capítulo 2

2. Tomografía computarizada

La tomografía computarizada, TC, es un procedimiento con imágenes que usa equipo especial de rayos X para crear imágenes detalladas, o exploraciones, de regiones internas del cuerpo. Se llama también tomografía axial computarizada (TAC).

El término tomografía se origina de las palabras griegas tomos (corte, rebanada o sección) y grafein (escribir o grabar). Cada imagen que se crea en un procedimiento de tomografía computarizada muestra los órganos, los huesos y otros tejidos en una "rebanada" delgada del cuerpo. La serie completa de imágenes producidas en una TC es como una barra de pan en rebanadas, de la que se puede ver una sola rebanada por separado (imágenes en dos dimensiones), o se puede ver la barra completa (imagen en tres dimensiones). Se usan programas informáticos para crear ambos tipos de imágenes.

El problema básico de la tomografía computarizada es construir una imagen de una sección transversal del cuerpo humano utilizando datos colectados de varios haces individuales de rayos X que se hacen pasar por la sección transversal. Estos datos son procesados por una computadora y la sección transversal obtenida por la computadora se despliega en un monitor de video.

La figura 2.1 es un diagrama del sistema CT general Electric que muestra a un paciente preparado para someterlo al escaneo de una sección

transversal de su cabeza con haces de rayos X. Este sistema se conoce también como **escáner CAT** (computer Aided Tomography, tomografía asistida por computadora)

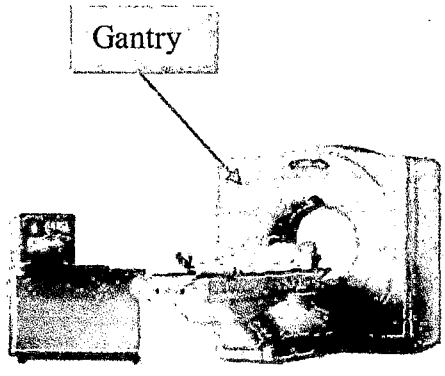


Figura 2.1 Tomógrafo

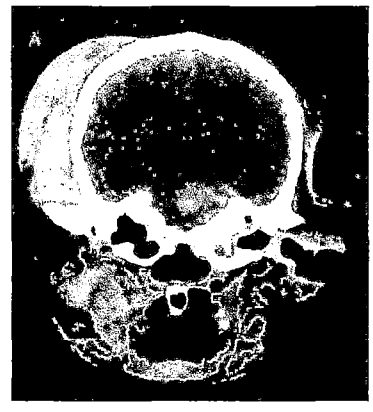


Figura 2.2: Sección transversal de la cabeza de un ser humano

2.1 Evolución de los tomógrafos por transmisión

Desde su invención en 1972 los tomógrafos fueron mejorados en busca de un proyecto mecánico que proporcione una reducción en el tiempo del examen. Cuánto más rápido es el examen el paciente se ve menos expuestos a los rayos X. Principalmente se distinguen 4 generaciones. La diferencia entre uno y otro se basa en el avance tecnológico que implica la adquisición de imágenes.

2.1.1 Primera generación

La primera generación de tomógrafos fue producida por EMI Mark en 1973, y su funcionamiento se basa en una geometría del haz de rayos X paralelo y movimientos de traslación-rotación en un tubo de rayos X y un solo detector; de manera que para obtener un corte tomográfico son necesarias muchas mediciones y por tanto, muchas rotaciones del sistema tubo-detector. Esto hace que nos encontremos con tiempos de barrido muy amplios (entre 4 y 5 min por corte).

El sistema también contaba con un par de colimadores (dos pequeños tubos de metal colocado después del haz que sale de la fuente y antes de la misma alcanza al detector) para minimizar la proporción del haz. Esta generación de dispositivos permitía a penas producir imágenes de partes del cuerpo sin movimiento, por lo tanto las imágenes del tórax eran inviables debido a los latidos del corazón y la respiración y el gran tiempo empleado en su escaneamiento. Este movimiento de traslación-rotación se repetía hasta que la fuente de rayos X y los detectores hubieran rotado 180 grados. En la figura 2.3 muestra como el escaneamiento era realizado.

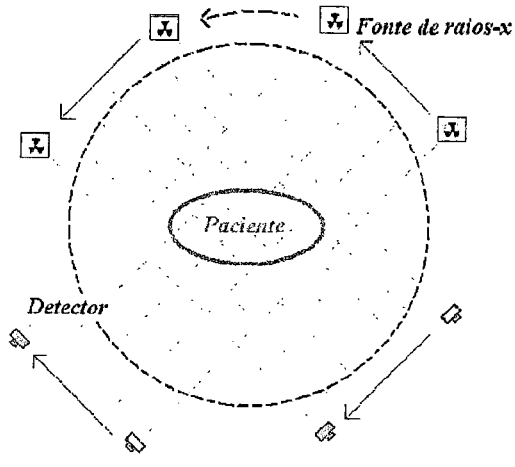


Figura 2.3: Escaneamiento de tomógrafo de primera generación

2.1.2 Segunda generación

Los tomógrafos de segunda generación eran desarrollados para reducir el tiempo de escaneamiento minimizando la exposición del paciente a la radiación y ampliando una gama de órganos que puede tener una sección transversal reconstruida. Entre tanto los haces de rayos dejan de ser cilíndricos y pasan a tener forma de abanicos. En esta generación se montan 30 detectores, con lo que se reduce considerablemente el número de rotaciones (de 180 a 6) y por tanto, el tiempo de barrido,

HEMEROTECA-U.N.P.R.G.

que pasa a ser del orden de entre 20 y 60 s, basado igualmente en una geometría del haz de rayos X en forma de abanico y movimientos de traslación-rotación (ver figura 2.4)

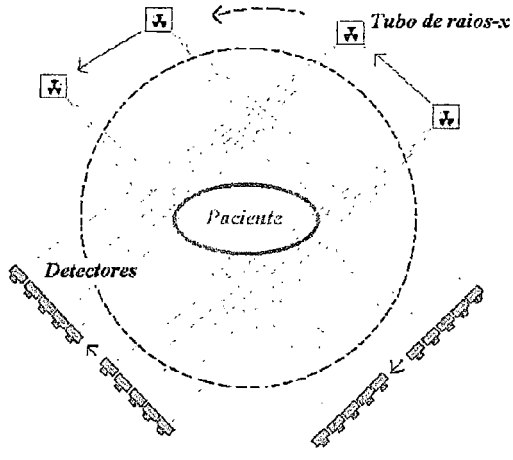


Figura 2.4 Escaneamiento de tomógrafo de segunda generación

2.1.3 Tercera generación

La tercera generación de equipos esquematizada en la figura 2.5 abandona la idea de emplear movimientos en los tubos de rayos X y el detector tiene ahora un ventilador con mayor ángulo y detectores de bases más amplias en forma semicircular. El sistema realiza movimientos de 360 grados alrededor de la sección empleando entre 300 y 1200 detectores para minimizar la dispersión de los rayos X y garantizar la calidad de las imágenes.

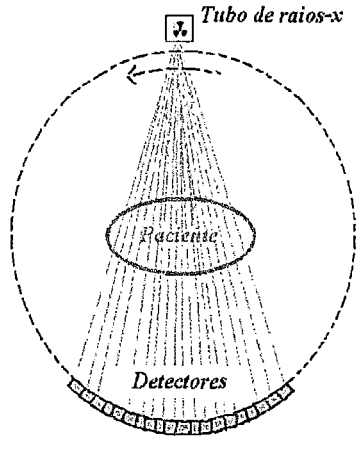


Figura 2.5 Escaneamiento de tomógrafo de tercera generación

A diferencia de las dos generaciones anteriores, en ésta aparece un conjunto de detectores que forman un arco móvil que, junto con el tubo de rayos X, describen al unísono un giro de 360° alrededor del paciente.

2.1.4 Cuarta generación

Esta generación presenta un anillo de detectores fijos y es el tubo de rayos X el que gira en torno al paciente, mejorando de forma notoria el ajuste de los detectores. Se basa en una geometría del haz de rayos X en forma de abanico, con rotación completa del tubo de rayos X dentro de un arreglo de detectores estacionarios de 360°, compuesto por detectores independientes entre 600 y 4 800 (dependiendo del fabricante). El tubo de rayos X, que genera un haz en forma de abanico, rota alrededor del centro mientras que los detectores se mantienen estacionarios, alcanzando los mismos tiempos de exploración que los equipos de la tercera generación.

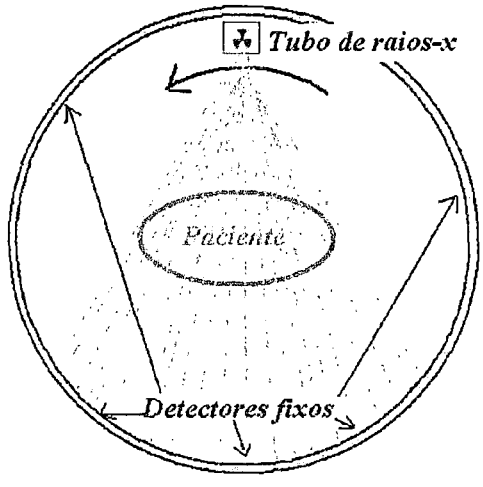


Figura 2.6: Escaneamiento de tomógrafo de cuarta generación

2.2 Tipos de tomografía

Existen tipos de tomografías y cada una de ellas utiliza un principio físico diferente para obtener las imágenes

a. Tomografía computarizada de emisión única de fotón (SPECT-Single-Photon Emisión computerized Tomography).
b. Tomografía de emisión de positrones (PET –Positron Emisión Tomography).
c. Tomografía eléctrica subdividida en:
   - Tomografía de capacitación eléctrica.
   - Tomografía de impedancia eléctrica.
   - Tomografía de inductancia electromagnética.
d. Tomografía de protones.
e. Tomografía computarizada de rayos X (TC).

Para realizar una tomografía precisamos de una máquina para colectar los datos, una computadora para almacenar y procesar esos datos y un buen algoritmo de reconstrucción utilizado para procesar los datos y generar la imagen de cada sección transversal. A continuación se muestra un tomógrafo (ver figura 2.7) utilizado en las tomografías de rayos X, que consiste básicamente de una mesa donde se encuentra el paciente y un conjunto emisor – detector.

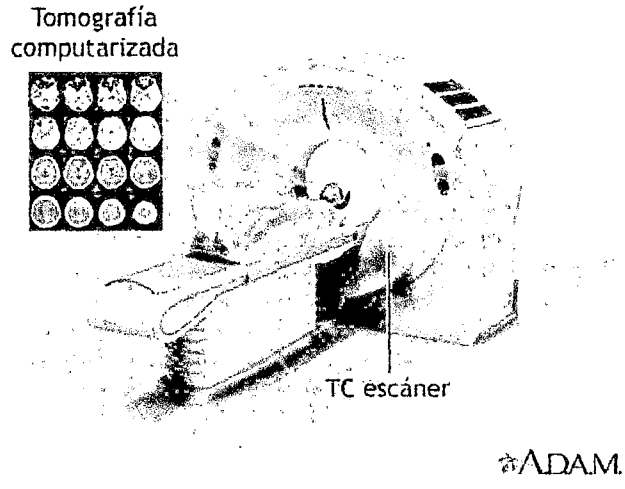


Figura 2.7: Tomógrafo de rayos X

En un tomógrafo de rayos X tanto el paciente como la fuente y el detector están en movimiento durante el registro de datos. Una camilla móvil desplaza la región de interés a través de una abertura circular donde se encuentra el sistema de formación de imágenes (ver figura 2.8). Mientras la camilla y el paciente avanzan, la fuente de rayos X rota en la parte interior de la abertura, generando un haz de pequeño grosor en forma de abanico. Este haz cubre una sección transversal muy estrecha del paciente de 1 a 10 mm según el equipo de que se trate, y es perpendicular al movimiento de la camilla.

El resultado de los movimientos combinados es un espiral que permite recoger información de la parte deseada del cuerpo de cada plano de rotación.

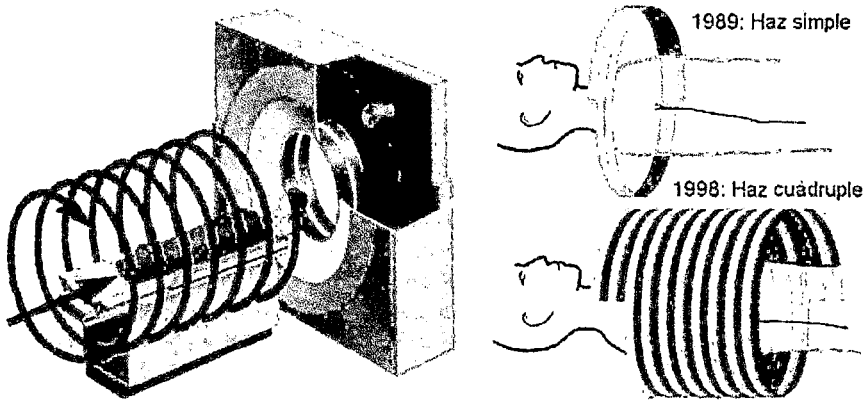


Figura 2.8: Tomógrafo en movimiento

2.3 Construcción de una tomografía

A diferencia de las imágenes de rayos X convencionales que son formados por rayos X que se proyectan perpendiculares al plano de la imagen. Las **tomografías** se construyen a partir de miles de haces individuales de rayos X del grueso de un cabello que están en el plano de la sección transversal. Después de que pasan por la sección transversal, se miden las intensidades de los haces individuales de rayos X con un detector de rayos X, las cuales se retransmiten a una

computadora donde son procesadas. La señal recibida es proporcional a la densidad de los elementos del objeto.

Cuando los rayos X pasan a través del cuerpo se absorben en distinta cantidad dependiendo de la densidad de los objetos con los que se encuentran. Los tejidos blandos absorben pequeñas cantidades de radiación, mientras que los huesos absorben más. En la figura 2.9 se muestra el proceso mediante el cual se transmite los rayos X al cuerpo humano, para luego ser recibidos por los detectores.

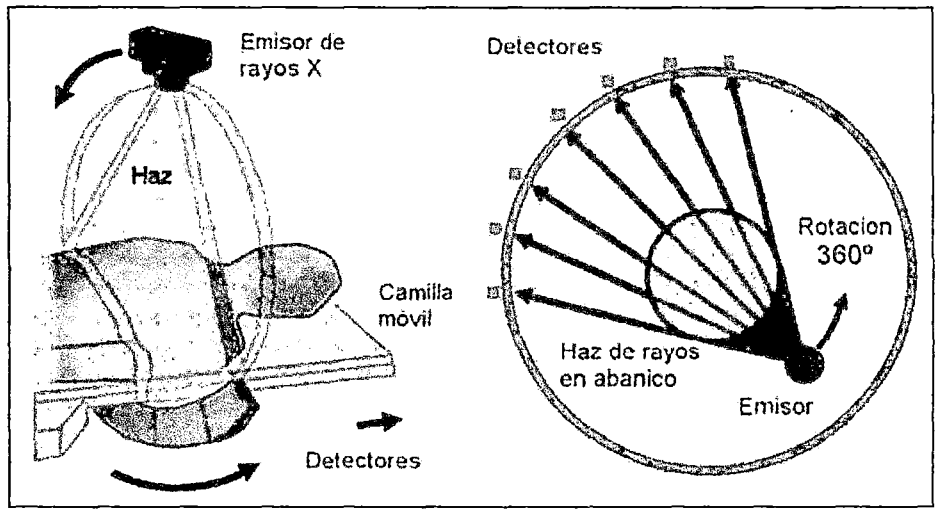


Figura 2.9: Transmisión de los Rayos X en un tomógrafo de cuarta generación.

2.4 Componentes de una tomógrafo:

Gantry o Soporte: conformado por

Tubo de Rayos X, Colimadores, Filtros, Sistema de movimientos, Sistema de Refrigeración, Sistema de Posicionamiento, Slip rings (Comunicación), Electrónica Asociada, Detectores.

Camilla: permite instalar al paciente y está sincronizada al movimiento del tubo de Rayos X.

Computadores. Control del equipo, Adquisición, Procesamiento, Registro, Envío y Archivo de las imágenes y datos.

Estación de trabajo, para el post proceso e informe del examen.

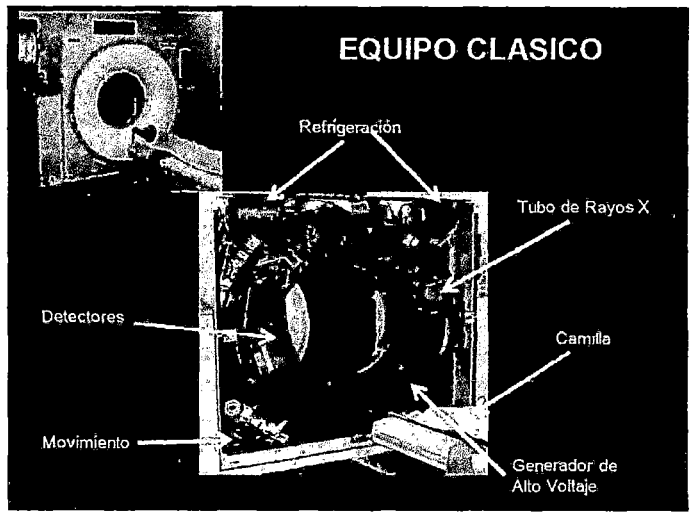


Figura 2.10: Componente de un tomógrafo clásico

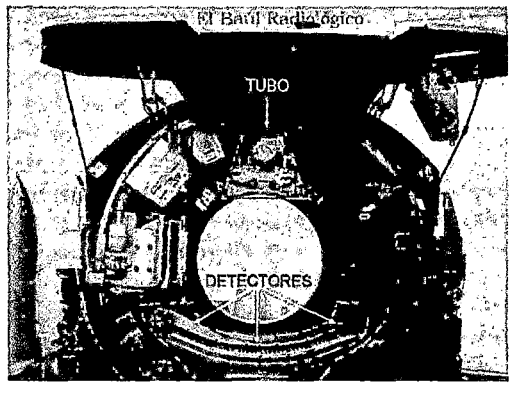


Figura 2.11: Toshiba Aquilion 64

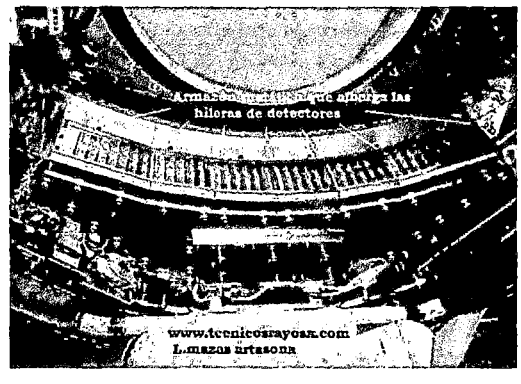


Figura 2.12: Armazón metálico que alberga las hileras de detectores

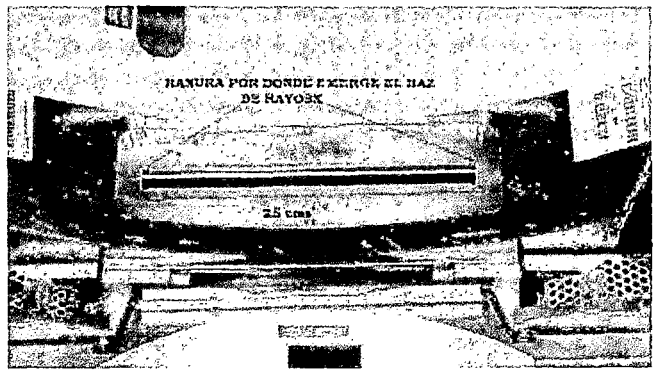


Figura 2.13: Ranura por donde emerge el haz de rayos X.

2.5 Posibles modos para escanear la sección transversal

2.5.1 Modo paralelo: En este modo una sola fuente de rayos X y un par detector de rayos X se trasladan a través del campo visual que contiene la sección transversal y se registran muchas mediciones de los haces paralelos. Entonces la fuente y el par detector se hacen girar a través de un ángulo pequeño, y se toma otra serie de mediciones. El procedimiento anterior se repite hasta completar el número deseado de mediciones del haz. Por ejemplo en la máquina original de 1971 se tomaban 160 mediciones paralelas a través de 180 ángulos con una separación de 1°: un total de m160 x180=28 800 mediciones del haz. Cada uno de estos escaneos tomaba aproximadamente cinco minutos y medio (ver figura 2.9)

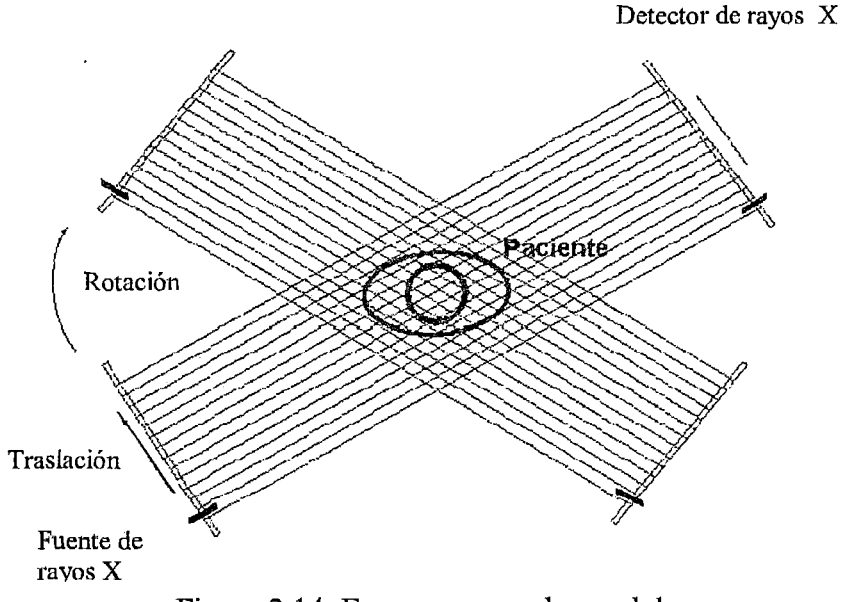


Figura 2.14: Escaneo en modo paralelo

2.5.2 Modo de haz de abanico: En este modo un solo tubo de rayos X genera un abanico de haces colimados cuyas intensidades son medidas simultáneamente por un arreglo de detectores en el otro lado del campo visual. El tubo de rayos X y el arreglo de detectores se hacen girar a través de muchos ángulos, y se toma una serie de mediciones en cada ángulo hasta que se completa el escaneo (ver figura 2.15).

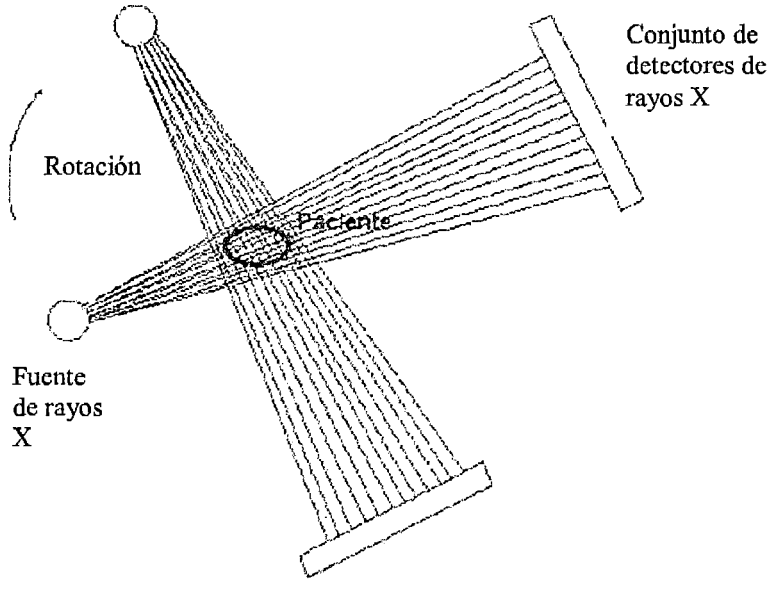


Figura 2.15: Escaneo en modo de haz de abanico

Observación: En el presente trabajo el término pixel tiene dos acepciones: la primera: unidad de imagen, la segunda: porción del tejido que es atravesado por haces de rayos X.

2.6 Deducción de las ecuaciones

Para ver como se construye la sección transversal a partir de mediciones de múltiples haces de rayos X individuales ver figura 2.11

El campo visual en el que se sitúa la sección transversal se ha dividido en muchos pixeles (elementos de imagen) cuadrados numerados de 1 a N como se indica. Se quiere determinar la densidad de rayos X captados en cada pixel. En el sistema EMI se usaban 6400 pixeles, dispuestos en un arreglo cuadrado de 80x80. Después de que se determina la densidad de los pixeles por el método que se describirá, éstas se reproducen en un

monitor de video, con cada pixel sombreado en un grado de gris proporcional a su densidad de rayos X. Como diferentes tejidos dentro del cuerpo humano tienen diferentes densidades de rayos X, la pantalla de video distingue con claridad los diferentes tejidos y órganos que están dentro de la sección transversal.

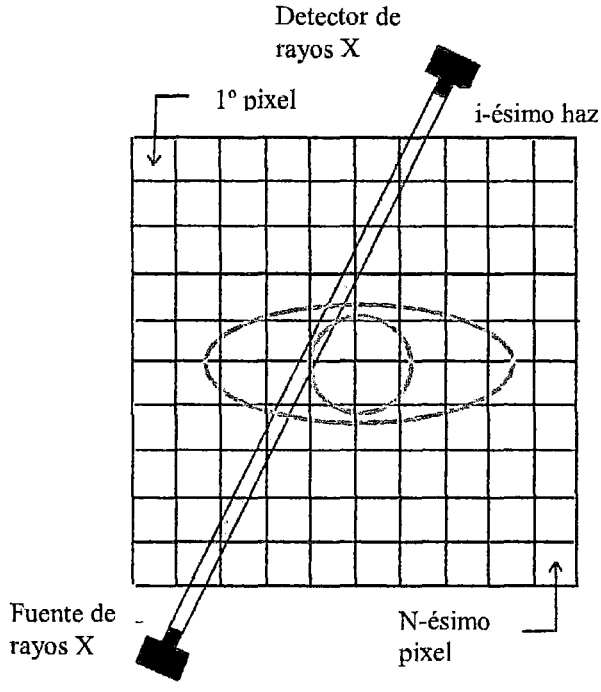


Figura 2.16: Escaneo de la sección transversal del cuerpo humano

En la figura 2.17 se muestra un solo pixel por el que capta un haz de rayos X con aproximadamente el mismo ancho que el pixel cuadrado. Los fotones que constituyen el haz de rayos X son absorbidos por el tejido, con una razón proporcional a la densidad de los rayos X del tejido.

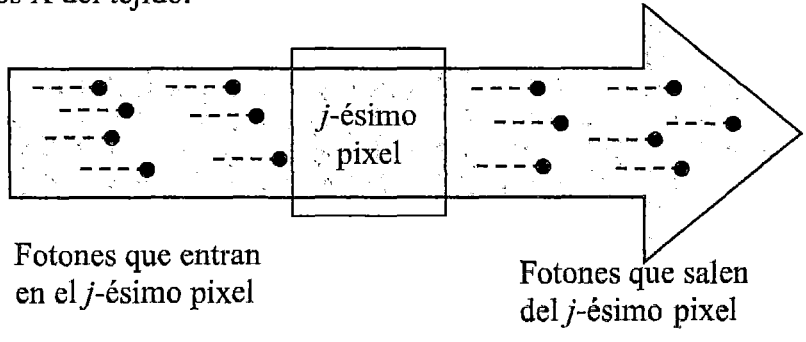


Figura 2.17: *j*-ésimo pixel por el que capta un haz de abanico

Cuantitativamente, la densidad de rayos X del j-ésimo pixel se denota por x_j y está definida por

$$x_j = \ln\left(\frac{\textit{número de fotones que entran en el } j-\textit{ésimo pixel}}{\textit{número de fotones que salen del } j-\textit{ésimo pixel}}\right)$$

donde "ln" denota la función logarítmica natural. Usando la propiedad de los logaritmos $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ se tiene también

$$x_j = -\ln\left(\begin{array}{c}\textit{fracción de fotones que pasan por el}\\ j-\textit{ésimo pixel sin ser absorvidos}\end{array}\right)$$

Si el haz de rayos X captada por una hilera completa de pixeles (figura 2.18), entonces el número que salen de un pixel es igual al número de fotones que entran al siguiente pixel en la hilera.

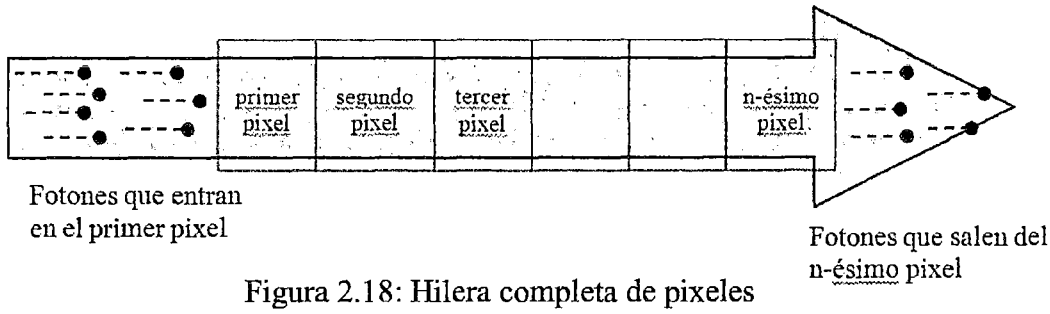


Figura 2.18: Hilera completa de pixeles

Si los pixeles se numeran 1, 2, 3,....n, entonces por la propiedad aditiva de la función logarítmica se obtiene:

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots x_n = \ln\left(\frac{\textit{número de fotones que entran en el primer pixel}}{\textit{número de fotones que salen del } n-\textit{ésimo pixel}}\right)$$

$$= -\ln\left(\begin{array}{c}\textit{fracción de fotones que pasan}\\ \textit{por el renglón de } n \textit{ pixeles}\\ \textit{sin ser absorvidos}\end{array}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

Así para determinar la densidad total de los rayos X captada de una hilera de pixeles, simplemente se suman las densidades individuales de los pixeles.

Consideremos el haz de rayos X de la figura 2.17.

La ***densidad del haz*** del i-ésimo haz de un escaneo denotado por b_i es definido por

$$b_i = -\ln\left(\frac{\begin{array}{c}\textit{número de fotones del } i-\textit{ésimo haz que entra en el}\\ \textit{detector sin la sección transversal en el campo visual}\end{array}}{\begin{array}{c}\textit{número de fotones del } i-\textit{ésimo haz que entra en el}\\ \textit{detector con la sección transversal en el campo visual}\end{array}}\right)$$

$$= -\ln\left(\begin{array}{c}\textit{fracción de fotones del } i-\textit{ésimo haz}\\ \textit{que pasa por la sección transversal}\\ \textit{sin ser absorvidos}\end{array}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

El numerador de la primera expresión para b_i se obtiene haciendo un escaneo de calibración sin la sección transversal en el campo visual. Las mediciones de resultantes se almacenan en la computadora. Entonces se realiza un escaneo clínico con la sección transversal en el campo visual, se calculan las b_i de todos los haces que constituyen el escaneo y los valores se almacenan para procesarlos posteriormente. Para cada haz que capta de lleno por un renglón de pixeles, se tiene

$$\left(\begin{array}{c}\text{fracción de fotones del haz que}\\ \text{pasan por el renglón de}\\ \text{pixeles sin ser absorvidos}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{fracción de fotones del haz que}\\ \text{pasan por la sección transversal}\\ \text{sin ser absorvidos}\end{array}\right)$$

Así, el i-ésimo haz capta directamente por una hilera de n pixeles, entonces por las ecuaciones (3) y (4) tenemos

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_n = b_i$$

Cabe señalar que b_i se conoce a partir de las mediciones clínicas y las de calibración, y $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ son densidades de rayos X captadas de pixeles desconocidas que deben determinarse.

Generalizando, si el i-ésimo haz son captados directamente por una hilera (o columna) de pixeles con números $j_1, j_2, \cdots\cdots, j_n$ tenemos

$$x_{j1}, x_{j2}, \cdots\cdots, x_{ji} = b_i$$

Consideremos $a_{ij} = \begin{cases} 1 \ , \ si \ j = j_1; j_2; \ldots, j_i \\ 0 \ , \ caso \ contrario \end{cases}$

entonces la ecuación se puede escribir como

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{iN}x_N = b_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

la ecuación (5) la llamaremos ***ecuación del* i-*ésimo haz.***

Interpretación del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} : *i*-ésimo haz que capta del *j*-ésimo pixel, representa la densidad de los pixeles.

x_j : densidad de los rayos X captadas del *j*-ésimo pixel

b_i : densidad del *i*-ésimo haz de un escaneo

Nota: los valores que toma los b_i se conocen a partir de las mediciones clínicas

FUNCIONAMIENTO DE UN TOMÓGRAFO

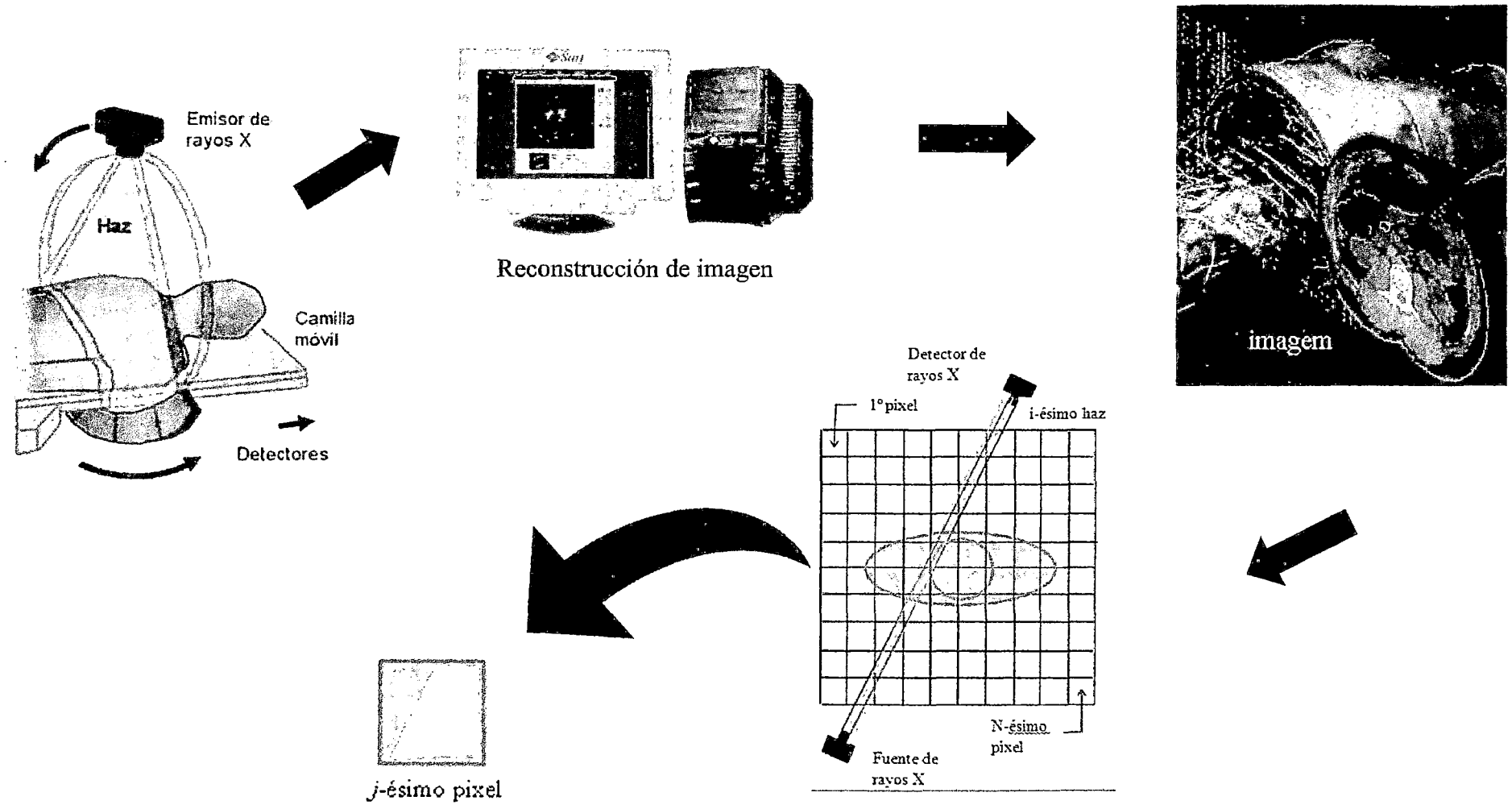


Figura 2.19: Funcionamiento de un tomógrafo

2.7 Métodos para definir los coeficientes a_{ij}

Según la figura 2.17 los haces de un escaneo no pasan necesariamente en forma directa por una hilera o una columna de pixeles, en lugar de ello, un haz típico pasa diagonalmente por cada pixel en su trayectoria. En el presente trabajo se mostrarán tres maneras para definir los valores que toma a_{ij} que aparecen en la ecuación (5) (ver figura 2.20).

Usando cualquiera de los tres maneras para definir las a_{ij} en la ecuación del *i-ésimo*, el conjunto de M ecuaciones del haz en un escaneo completo se puedo escribir como

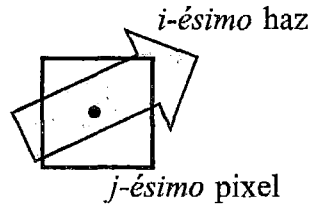
$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1N}x_{1N} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2N}x_{2N} = b_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6) \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots + \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{MN}x_N = b_M \end{array}$$

Obteniendo así un sistema lineal de M ecuaciones (las M ecuaciones del haz) con N incógnitas (las N densidades de los pixeles)

Recordemos que en el presente trabajo solo consideraremos el caso $M > N$, es decir existen más haces en el escaneo que pixeles en el campo visual.

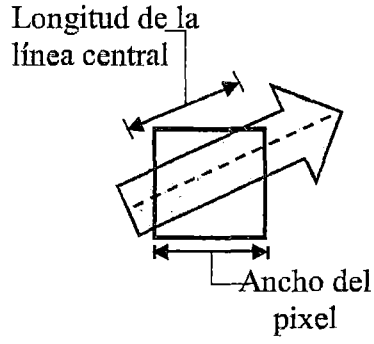
Método del centro del pixel

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-}\acute{e}simo \text{ haz pasa por el centro del } j\text{-}\acute{e}simo \text{ pixel} \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$



Método de la línea central

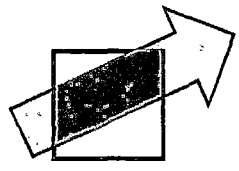
$$a_{ij} = \frac{\text{Longitud de la línea central del } i\text{-}\acute{e}simo \text{ haz que está en el } j\text{-}\acute{e}simo \text{ pixel}}{\text{Ancho del } j\text{-}\acute{e}simo \text{ pixel}}$$



Método del área

$$a_{ij} = \frac{\text{Área del } i\text{-}\acute{e}simo \text{ haz que está En el } j\text{-}\acute{e}simo \text{ pixel}}{\text{Área del } i\text{-}\acute{e}simo \text{ haz que estaría en el } j\text{-}\acute{e}simo \text{ pixel Si el } i\text{-}\acute{e}simo \text{ haz cruzara el pixel en escuadra}}$$

Área en el numerador a_{ij}



Área en el denominador a_{ij}

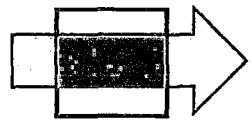


Figura 2.20: Métodos para definir los coeficientes a_{ij}

Capítulo 3

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1N}x_{1N} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2N}x_{2N} = b_2 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots + \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{MN}x_N = b_M \end{array}$$

En este capítulo se pretende encontrar una solución aproximada empleando las técnicas de reconstrucción algebraica. Este método fue el que se utilizó en la primera máquina comercial.

Para dar a conocer el método consideremos los siguientes sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{array}{l} L_1 : x_1 + x_2 \quad = 2 \\ L_2 : x_1 - 2x_2 = -2 \\ L_3 : 3x_1 - x_2 = 3 \end{array}$$

Las tres rectas L_1, L_2 ,L_3 determinadas por las ecuaciones se grafican en el plano X_1, X_2 (ver figura 3.1). Observamos que las tres rectas no se intersecan simultáneamente y, en consecuencia las tres ecuaciones no tienen una solución exacta.

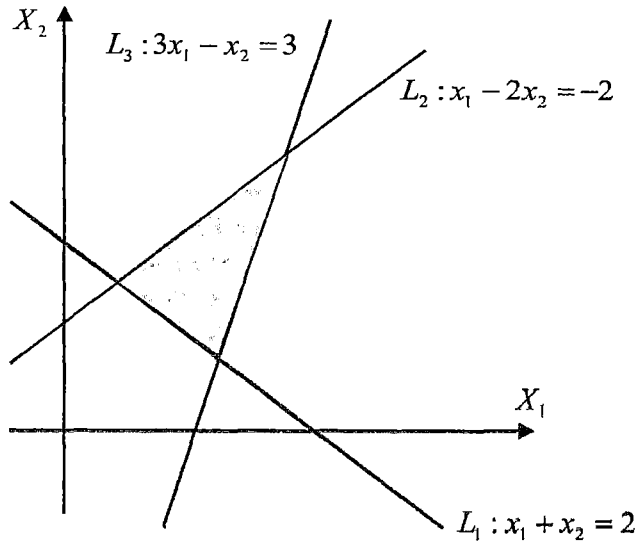


Figura 3.1: Gráfico de las rectas L_1, L_2 ,L_3

Sin embargo, los pares ordenados (x_1, x_2) ubicados en la región triangular formados por las tres rectas se sitúan cerca de estas tres rectas y se pueden considerar que constituyen las soluciones **"aproximadas"** del sistema dado.

A continuación describiremos un procedimiento iterativo que permita generar puntos en la frontera de esta región. Ver la construcción geométrica en la figura 3.2

3.1 Algoritmo bidimensional

Paso 1:

Elegir un punto inicial arbitrario x_0 en el plano x_1x_2.

Paso 2:

Proyectar x_0 ortogonalmente sobre la primera recta L_1 e identificar la proyección como $x_1^{(1)}$. El superíndice (1) indica que se trata del primer ciclo.

Paso 3:

Proyectar $x_1^{(1)}$ ortogonalmente sobre la segunda recta L_2, e identificar la proyección como $x_2^{(1)}$.

Paso 4:

Proyectar $x_2^{(1)}$ ortogonalmente sobre la tercera recta L_3, e identificar la proyección como $x_3^{(1)}$.

Paso 5:

Tomar $x_3^{(1)}$ como el nuevo valor de x_0 e iniciar de nuevo el ciclo (pasos 1 - 3). En el segundo ciclo identificar los puntos proyectados como $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$ en el tercer identificar los puntos proyectados como $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}$ y así sucesivamente.

Observamos que este algoritmo genera las tres sucesiones de puntos

$$L_1 : x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots\ldots$$
$$L_2 : x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, \ldots\ldots$$
$$L_3 : x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots\ldots$$

ubicados sobre las tres rectas L_1, L_2, L_3 respectivamente

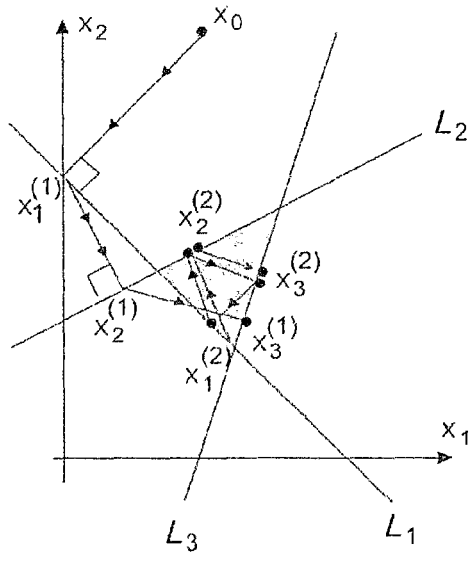


Figura 3.2: Interpretación geométrica de los tres primeros ciclos

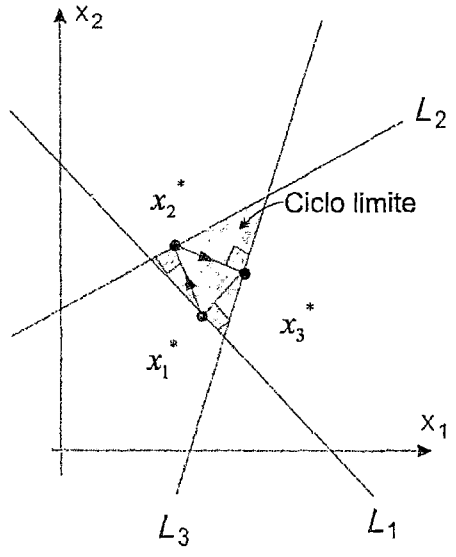


Figura 3.3: Ciclo límite

3.1.1 Aplicación del algoritmo en el caso bidimensional

Obtener una solución aproximada del sistema lineal inconsistente

$$L_1 : x_1 + x_2 = 2$$
$$L_2 : x_1 - 2x_2 = -2$$
$$L_3 : 3x_1 - x_2 = 3$$

Solución:

Método tradicional

Si lo quisiéramos resolver por el método tradicional se tendría:

Despejando x_2 de la recta $L_3 : 3x_1 - x_2 = 3$ tenemos $x_2 = 3x_1 - 3$

Reemplazando x_2 en $L_2 : x_1 - 2x_2 = -2$, obtenemos $x_1 = \frac{8}{5}$

Análogamente reemplazamos x_1 en $L_1 : x_1 + x_2 = 2$, luego $x_2 = \frac{2}{5}$

Ahora si reemplazamos dichos valores x_1 y x_2 en cada una de las ecuaciones tendremos como resultado lo siguiente:

$L_1 : x_1 + x_2 = 2$ $\qquad \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = 2$

$L_2 : x_1 - 2x_2 = -2$ $\qquad \frac{8}{5} - \frac{4}{5} = 0,8$

$L_3 : 3x_1 - x_2 = 3$ $\qquad \frac{24}{5} - \frac{2}{5} = 4,4$

Utilizando el algoritmo

Ahora utilizando el algoritmo daremos una mejor aproximación a su solución.

Escribiendo las ecuaciones de las tres rectas en forma vectorial se tiene:

$$L_1 : \; a_1^T x = b_1$$
$$L_2 : \; a_2^T x = b_2$$
$$L_3 : \; a_3^T x = b_3$$

Siendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad b_1 = 2 \;\; b_2 = -2 \;\; b_3 = 3$$

Entonces utilizando el teorema de la proyección ortogonal con $k = 1,2,3$ es decir:

$$x_k^{(p)} = x_{k-1}^{(p)} + \frac{(b_k - a_k^T x_{k-1}^{(p)})}{a_k^T a_k} a_k$$

donde:

$p = 1$ para el primer ciclo de iterados

$p = 2$ para el segundo ciclo de iterados

y así sucesivamente.

Después de cada ciclo de iterados (es decir, después de calcular $x_3^{(p)}$), el siguiente ciclo de iterados se inicia haciendo x_0 igual a $x_3^{(p)}$.

Comencemos con $x_0 = x_0^{(1)} = (1;3)$ punto inicial arbitrario en el plano X_1X_2. Luego utilizando la fórmula de proyección ortogonal tenemos:

Para $p = 1$ (primer ciclo de iterados)

a) $$x_1^{(1)} = x_0^{(1)} + \frac{(b_1 - a_1^T x_0^{(1)})}{a_1^T a_1} a_1$$

$$x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{2-4}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b) $$x_2{}^{(1)} = x_1{}^{(1)} + \frac{(b_2 - a_2{}^T x_1{}^{(1)})}{a_2{}^T a_2} a_2$$

$$x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-2 - \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$

c) $$x_3{}^{(1)} = x_2{}^{(1)} + \frac{(b_3 - a_3{}^T x_2{}^{(1)})}{a_3{}^T a_3} a_3$$

$$x_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 1,2 \end{bmatrix} + \frac{3 - \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 \\ 1,2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,9 \end{bmatrix}$$

Para $p = 2$ (segundo ciclo de iterados) hacemos $x_0^{(2)} = x_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,9 \end{bmatrix}$

a) $$x_1^{(2)} = x_0^{(2)} + \frac{(b_1 - a_1^T x_0^{(2)})}{a_1^T a_1} a_1$$

$$x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,9 \end{bmatrix} + \frac{2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,9 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,9 \end{bmatrix} + \frac{2 - 2,2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,9 \end{bmatrix} + \frac{-0,2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,8 \end{bmatrix}$$

b) $$x_2^{(2)} = x_1^{(2)} + \frac{(b_2 - a_2^T x_1^{(2)})}{a_2^T a_2} a_2$$

$$x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,8 \end{bmatrix} + \frac{-2 - \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,8 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,8 \end{bmatrix} + \frac{-1,6}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,8 \end{bmatrix} + -0,32 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,32 \\ 0,64 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,88 \\ 1,44 \end{bmatrix}$$

c) $$x_3{}^{(2)} = x_2{}^{(2)} + \frac{(b_3 - a_3{}^T x_2{}^{(2)})}{a_3{}^T a_3} a_3$$

$$x_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,88 \\ 1,44 \end{bmatrix} + \frac{3 - \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,88 \\ 1,44 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,88 \\ 1,44 \end{bmatrix} + \frac{3 - 1,2}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,88 \\ 1,44 \end{bmatrix} + 0,18 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,88 \\ 1,44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,54 \\ -0,18 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,42 \\ 1,26 \end{bmatrix}$$

Para $p = 3$ **(tercer ciclo de iterados) hacemos** $x_0^{(3)} = x_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,42 \\ 1,26 \end{bmatrix}$

a) $$x_1{}^{(3)} = x_0{}^{(3)} + \frac{(b_1 - a_1{}^T x_0{}^{(3)})}{a_1{}^T a_1} a_1$$

$$x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,42 \\ 1,26 \end{bmatrix} + \frac{2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,42 \\ 1,26 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,42 \\ 1,26 \end{bmatrix} - 0,34 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,42 \\ 1,26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,34 \\ -0,34 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,08 \\ 0,92 \end{bmatrix}$$

b) $$x_2^{(3)} = x_1^{(3)} + \frac{(b_2 - a_2^T x_1^{(3)})}{a_2^T a_2} a_2$$

$$x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,08 \\ 0,92 \end{bmatrix} + \frac{-2 - \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,08 \\ 0,92 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,08 \\ 0,92 \end{bmatrix} + -0,248 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,08 \\ 0,92 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,248 \\ 0,496 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,832 \\ 1,416 \end{bmatrix}$$

c) $$x_3^{(3)} = x_2^{(3)} + \frac{(b_3 - a_3^T x_2^{(3)})}{a_3^T a_3} a_3$$

$$x_3^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,832 \\ 1,416 \end{bmatrix} + \frac{3 - \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,832 \\ 1,416 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,832 \\ 1,416 \end{bmatrix} + 0,192 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,832 \\ 1,416 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,576 \\ -0,192 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,408 \\ 1,224 \end{bmatrix}$$

Para $p = 4$ **(cuarto ciclo de iterados) hacemos** $x_0^{(4)} = x_3^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,408 \\ 1,224 \end{bmatrix}$

a) $x_1^{(4)} = x_0^{(4)} + \dfrac{(b_1 - a_1^T x_0^{(4)})}{a_1^T a_1} a_1$

$$x_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,408 \\ 1,224 \end{bmatrix} + \frac{2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,408 \\ 1,224 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,408 \\ 1,224 \end{bmatrix} - 0,316 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,408 \\ 1,224 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,316 \\ -0,316 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,092 \\ 0,908 \end{bmatrix}$$

b) $$x_2^{(4)} = x_1^{(4)} + \frac{(b_2 - a_2^T x_1^{(4)})}{a_2^T a_2} a_2$$

$$x_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,092 \\ 0,908 \end{bmatrix} + \frac{-2 - \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,092 \\ 0,908 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,092 \\ 0,908 \end{bmatrix} + -0,2552 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,092 \\ 0,908 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,2552 \\ 0,5104 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,8368 \\ 1,4184 \end{bmatrix}$$

c) $$x_3^{(4)} = x_2^{(4)} + \frac{(b_3 - a_3^T x_2^{(4)})}{a_3^T a_3} a_3$$

$$x_3^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,8368 \\ 1,4184 \end{bmatrix} + \frac{3 - \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8368 \\ 1,4184 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,8368 \\ 1,4184 \end{bmatrix} + 0,1908 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,8368 \\ 1,4184 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5724 \\ -0,1908 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,4092 \\ 1,2276 \end{bmatrix}$$

Para $p = 5$ (quinto ciclo de iterados) hacemos $x_0^{(5)} = x_3^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,4092 \\ 1,2276 \end{bmatrix}$

a) $x_1^{(5)} = x_0^{(5)} + \dfrac{(b_1 - a_1^T x_0^{(5)})}{a_1^T a_1} a_1$

$$x_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,4092 \\ 1,2276 \end{bmatrix} + \frac{2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,4092 \\ 1,2276 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,4092 \\ 1,2276 \end{bmatrix} - 0,3184 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,4092 \\ 1,2276 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,3184 \\ 0,3184 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,0908 \\ 0,9092 \end{bmatrix}$$

b) $x_2^{(5)} = x_1^{(5)} + \dfrac{(b_2 - a_2^T x_1^{(5)})}{a_2^T a_2} a_2$

$$x_2^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,0908 \\ 0,9092 \end{bmatrix} + \frac{-2 - \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0908 \\ 0,9092 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,0908 \\ 0,9092 \end{bmatrix} + -0,25448 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,0908 \\ 0,9092 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,25448 \\ 0,50896 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,83632 \\ 1,41816 \end{bmatrix}$$

c) $$x_3{}^{(5)} = x_2{}^{(5)} + \frac{(b_3 - a_3{}^T x_2{}^{(5)})}{a_3{}^T a_3} a_3$$

$$x_3^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,83632 \\ 1,41816 \end{bmatrix} + \frac{3 - \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,83632 \\ 1,41816 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,83632 \\ 1,41816 \end{bmatrix} + 0,19092 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,83632 \\ 1,41816 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,57276 \\ -0,19092 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,40908 \\ 1,22724 \end{bmatrix}$$

Para $p = 6$ **(sexto ciclo de iterados) hacemos** $x_0^{(6)} = x_3^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,40908 \\ 1,22724 \end{bmatrix}$

a) $$x_1{}^{(6)} = x_0{}^{(6)} + \frac{(b_1 - a_1{}^T x_0{}^{(6)})}{a_1{}^T a_1} a_1$$

$$x_1^{(6)} = \begin{bmatrix} 1,40908 \\ 1,22724 \end{bmatrix} + \frac{2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,40908 \\ 1,22724 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(6)} = \begin{bmatrix} 1,40908 \\ 1,22724 \end{bmatrix} - 0,31816 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(6)} = \begin{bmatrix} 1,40908 \\ 1,22724 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,31816 \\ 0,31816 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(6)} = \begin{bmatrix} 1,09092 \\ 0,90908 \end{bmatrix}$$

b) $$x_2{}^{(6)} = x_1{}^{(6)} + \frac{(b_2 - a_2{}^T x_1{}^{(6)})}{a_2{}^T a_2} a_2$$

$$x_2^{(6)} = \begin{bmatrix} 1,09092 \\ 0,90908 \end{bmatrix} + \frac{-2 - \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,09092 \\ 0,90908 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(6)} = \begin{bmatrix} 1,09092 \\ 0,90908 \end{bmatrix} + -0,254552 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(6)} = \begin{bmatrix} 1,09092 \\ 0,90908 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,254552 \\ 0,509104 \end{bmatrix}$$

$$x_2^{(6)} = \begin{bmatrix} 0,836368 \\ 1,418184 \end{bmatrix} = x_2^{(6)} = \begin{bmatrix} 0,83637 \\ 1,41818 \end{bmatrix}$$

c) $$x_3{}^{(6)} = x_2{}^{(6)} + \frac{(b_3 - a_3{}^T x_2{}^{(6)})}{a_3{}^T a_3} a_3$$

$$x_3^{(6)} = \begin{bmatrix} 0,836368 \\ 1,418184 \end{bmatrix} + \frac{3 - \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,836368 \\ 1,418184 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(6)} = \begin{bmatrix} 0,836368 \\ 1,418184 \end{bmatrix} + 0,190908 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(6)} = \begin{bmatrix} 0,836368 \\ 1,418184 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,572724 \\ -0,190908 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(6)} = \begin{bmatrix} 1,409092 \\ 1,227276 \end{bmatrix} \qquad x_3^{(6)} = \begin{bmatrix} 1,40909 \\ 1,22728 \end{bmatrix}$$

Finalmente obtenemos la siguiente tabla

	x_1	x_2
x_0	**1,00000**	**3,00000**
$x_1^{(1)}$	**0,00000**	**2,00000**
$x_2^{(1)}$	**0,40000**	**1,20000**
$x_3^{(1)}$	**1,30000**	**0,90000**
$x_1^{(2)}$	**1,20000**	**0,80000**
$x_2^{(2)}$	**0,88000**	**1,44000**
$x_3^{(2)}$	**1,42000**	**1,26000**
$x_1^{(3)}$	**1,08000**	**0,92000**
$x_2^{(3)}$	**0,83200**	**1,41600**
$x_3^{(3)}$	**1,40800**	**1,22400**
$x_1^{(4)}$	**1,09200**	**0,90800**
$x_2^{(4)}$	**0,83680**	**1,41840**
$x_3^{(4)}$	**1,40920**	**1,22760**
$x_1^{(5)}$	**1,09080**	**0,90920**
$x_2^{(5)}$	**0,83632**	**1,41816**
$x_3^{(5)}$	**1,40908**	**1,22724**
$x_1^{(6)}$	**1,09092**	**0,90908**
$x_2^{(6)}$	**0,83637**	**1,41818**
$x_3^{(6)}$	**1,40909**	**1,22728**

Figura 3.4: Tabla de la aplicación 3.1.1

Copyright © Marlenny Rojas –Eder Gonzales

Observamos que la sucesión de puntos en L_1, L_2, L_3 converge para los vértices del ciclo límite cuyas coordenadas poseen los siguientes valores exactos:

$$x_1^* = \left(\frac{12}{11}, \frac{10}{11}\right) = (1.09090..., 0.90909...)$$
$$x_2^* = \left(\frac{46}{55}, \frac{78}{55}\right) = (0.83636..., 1.41818...)$$
$$x_3^* = \left(\frac{31}{22}, \frac{27}{22}\right) = (1.40909..., 1.22727...)$$

Ahora si reemplazamos dichos valores $x_1 = \frac{31}{22}$ y $x_2 = \frac{27}{22}$ en cada una de las ecuaciones tendremos como resultado lo siguiente:

$L_1 : x_1 + x_2 = 2$ $\qquad$ $1,40909 + 1,22728 = 2,63637$

$L_2 : x_1 - 2x_2 = -2$ $\qquad$ $1,40909 - 2,45456 = -1,04547$

$L_3 : 3x_1 - x_2 = 3$ $\qquad$ $4,22727 - 1,22728 = 2.99999$

Se puede observar que el sexto ciclo de iterados proporciona una mejor aproximación del ciclo límite.

Por tanto una de las tres iteradas en el sexto ciclo (o cualquier punto en el interior del triángulo con esos vértices) puede ser usada como una solución aproximada del sistema lineal.

3.2 Algoritmo generalizado

Para generalizar el algoritmo bidimensional de modo que se aplique a un sistema inconsistente de M ecuaciones con N incógnitas tal como se muestra a continuación

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1N}x_{1N} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2N}x_{2N} = b_2 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots + \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{MN}x_N = b_M \end{array} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

Se introducen los vectores columna x y a_i:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ ai_N \end{bmatrix}, \qquad i = 1,2,3,\ldots,M$$

Las M ecuaciones que constituyen el sistema lineal (7) en cuestión se puede escribir en forma vectorial de la siguiente manera

$$a_i^T x = b_i \qquad i = 1,2,\ldots,M$$

Cada una de las M ecuaciones define un hiperplano en el espacio euclidiano N dimensional, es decir R^N. En general, estos M hiperplanos no tienen ninguna intersección común, la idea es buscar algún punto en R^N que se encuentre razonablemente "cerca" de todos ellos. Este punto constituirá una solución aproximada del sistema lineal, y sus N elementos determinarán las densidades de pixeles aproximadas con los cuales formar la sección transversal deseada.

Análogamente como se hizo en el caso bidimensional, se introducirá un proceso iterativo que genere ciclos de proyecciones ortogonales sucesivas sobre los M hiperplanos empezando con algún punto inicial arbitrario en R^N.

En general los iterados se denotarán

$$x_k^{(p)} = (\textit{iterado que está en el } k-\textit{ésimo hiperplano generado durante el } p-\textit{ésimo ciclo de iteraciones})$$

Paso 1:

Elegir un punto inicial arbitrario x_0 en R^N.

Paso 2:

Considere $p = 1$ para el primer ciclo de iterados.

Paso 3:

Para $k = 1,2,\ldots,M$ calculemos

$$x_k^{(p)} = x_{k-1}^{(p)} + \frac{(b_k - a_k^T x_{k-1}^{(p)})}{a_k^T a_k} a_k$$

Paso 4:

Hacemos $x_0^{(p+1)} = x_M^{(p)}$

Paso 5:

Incrementar el número de ciclos, luego ir al paso 3.

Al iterado $x_k^{(p)}$ del paso 3, se denomina la **proyección ortogonal** de $x_{k-1}^{(p)}$ sobre el hiperplano $a_k^T x = b_k$. Como en el caso bidimensional, este algoritmo también genera una sucesión de proyecciones ortogonales de un hiperplano sobre el siguiente en el que el ciclo se vuelve a iniciar en el primer hiperplano después de cada proyección sobre el último hiperplano.

3.2.1 Aplicación del algoritmo en el caso R^9

Consideremos 9 pixeles (N=9) que son "escaneados" usando el modo paralelo, con 12 haces (M=12) cuyas densidades de haces son medidas e indicadas en la figura 3.5

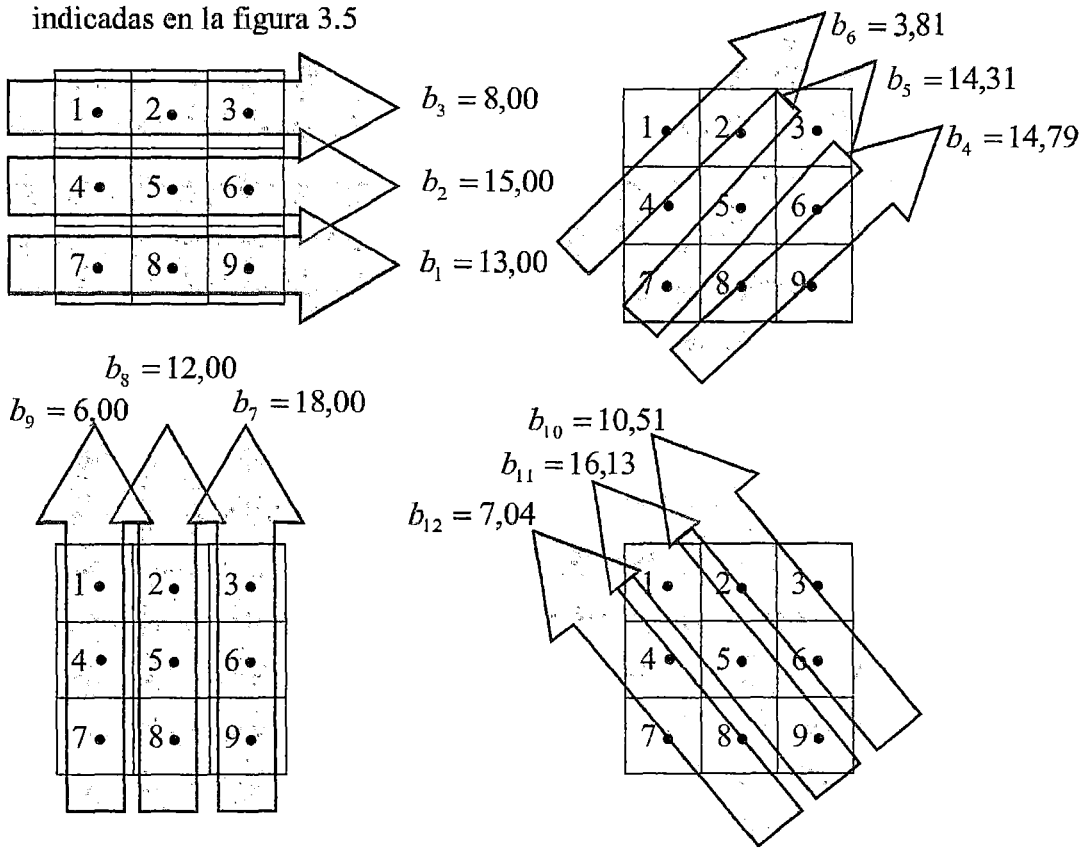


Figura 3.5: Haces de rayos X y sus medidas en el detector.

Mostraremos las doce ecuaciones, empleando el método del centro del pixel, el decir es sistema de ecuaciones está dado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{19}x_9 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{29}x_9 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{39}x_9 = b_3 \\ \vdots \\ a_{(12)1}x_1 + a_{(12)2}x_2 + a_{(12)3}x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{(12)9}x_9 = b_{(12)} \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el } i\text{-ésimo haz pasa por} \\ & \text{el centro del } j\text{-ésimo pixel} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

de la figura 3.5

En el haz b_1 se tiene que $a_{17} = a_{18} = a_{19} = 1$, el resto es 0.

En el haz b_2 se tiene que $a_{24} = a_{25} = a_{26} = 1$, el resto es 0.

En el haz b_3 se tiene que $a_{31} = a_{32} = a_{33} = 1$, el resto es 0.

En el haz b_4 se tiene que $a_{46} = a_{48} = a_{49} = 1$, el resto es 0.

En el haz b_5 se tiene que $a_{53} = a_{55} = a_{57} = 1$, el resto es 0.

En el haz b_6 se tiene que $a_{61} = a_{62} = a_{64} = 1$, el resto es 0.

En el haz b_7 se tiene que $a_{73} = a_{76} = a_{79} = 1$, el resto es 0.

En el haz b_8 se tiene que $a_{82} = a_{85} = a_{88} = 1$, el resto es 0.

En el haz b_9 se tiene que $a_{91} = a_{94} = a_{97} = 1$, el resto es 0.

En el haz $b_{(10)}$ se tiene que $a_{(10)2} = a_{(10)3} = a_{(10)6} = 1$, el resto es 0.

En el haz $b_{(11)}$ se tiene que $a_{(11)1} = a_{(11)5} = a_{(11)9} = 1$, el resto es 0.

En el haz $b_{(12)}$ se tiene que $a_{(12)4} = a_{(12)7} = a_{(12)8} = 1$, el resto es 0.

De esto las ecuaciones serán:

$$\begin{cases} x_7 + x_8 + x_9 = 13,00 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 15,00 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8,00 \\ x_6 + x_8 + x_9 = 14,79 \\ x_3 + x_5 + x_7 = 14,31 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3,81 \\ x_3 + x_6 + x_9 = 18,00 \\ x_2 + x_5 + x_8 = 12,00 \\ x_1 + x_4 + x_7 = 6,00 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 10,51 \\ x_1 + x_5 + x_9 = 16,13 \\ x_4 + x_7 + x_8 = 7,04 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{12\times 9} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}_{9\times 1} = \begin{bmatrix} 13,00 \\ 15,00 \\ 8,00 \\ 14,79 \\ 14,31 \\ 3,81 \\ 18,00 \\ 12,00 \\ 6,00 \\ 10,51 \\ 16,13 \\ 7,04 \end{bmatrix}_{12\times 1}$$

Donde:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times 1} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times 1} \quad a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1} \quad a_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

$$a_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times 1} \quad a_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1} \quad a_9 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1} \quad a_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1} \quad a_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times 1} \quad a_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

Utilizando la fórmula propuesta por el algoritmo generalizado:

$$x_k^{(p)} = x_{k-1}^{(p)} + \frac{(b_k - a_k^T x_{k-1}^{(p)})}{a_k^T a_k} a_k$$

Empezando con un iterado inicial $x_0 = 0$,

Para $p = 1$ (primer ciclo de iterados)

(a) $$x_1^{(1)} = x_0^{(1)} + \frac{(b_1 - a_1^T x_0^{(1)})}{a_1^T a_1} a_1$$

$$x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{13 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{13-0}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1} \qquad x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

(b) $$x_2^{(1)} = x_1^{(1)} + \frac{(b_2 - a_2{}^T x_1^{(1)})}{a_2^T a_2} a_2$$

$$x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{15 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{15-0}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

(c) $$x_3^{(1)} = x_2^{(1)} + \frac{(b_3 - a_3^T x_2^{(1)})}{a_3^T a_3} a_3$$

$$x_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{8-\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{1\times9}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1}}{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{1\times9}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{8-0}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times1} + \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

(d) $$x_4^{(1)} = x_3^{(1)} + \frac{(b_4 - a_4{}^T x_3^{(1)})}{a_4^T a_4} a_4$$

$$x_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times 1} + \frac{14,79 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 9} \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times 1}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 9} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times 1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

$$x_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times 1} + \frac{14,79-13,66}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

$$x_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4,33 \\ 4,33 \\ 4,33 \end{bmatrix}_{9\times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,37 \\ 0 \\ 0,38 \\ 0,38 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

$$x_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 5 \\ 5 \\ 5,37 \\ 4,33 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

(e) $$x_5^{(1)} = x_4^{(1)} + \frac{(b_5 - a_5{}^T x_4^{(1)})}{a_5^T a_5} a_5$$

$$x_5^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 5 \\ 5 \\ 5,37 \\ 4,33 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{14,31 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 5 \\ 5 \\ 5,37 \\ 4,33 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_5^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 5 \\ 5 \\ 5,37 \\ 4,33 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{14,31-12}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_5^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 2,67 \\ 5 \\ 5 \\ 5,37 \\ 4,33 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,77 \\ 0 \\ 0,77 \\ 0 \\ 0,77 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_5^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 3,44 \\ 5 \\ 5,77 \\ 5,37 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

(f) $$x_6^{(1)} = x_5^{(1)} + \frac{(b_6 - a_6{}^T x_5^{(1)})}{a_6^T a_6} a_6$$

$$x_6^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 3,44 \\ 5 \\ 5,77 \\ 5,37 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{3,81 - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 3,44 \\ 5 \\ 5,77 \\ 5,37 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_6^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 3,44 \\ 5 \\ 5,77 \\ 5,37 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{3,81 - 10,34}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_6^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 2,67 \\ 3,44 \\ 5 \\ 5,77 \\ 5,37 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1} + \begin{bmatrix} -2,18 \\ -2,18 \\ 0 \\ -2,18 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_6^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,49 \\ 3,44 \\ 2,83 \\ 5,77 \\ 5,37 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

(g) $$x_7^{(1)} = x_6^{(1)} + \frac{(b_7 - a_7{}^T x_6^{(1)})}{a_7^T a_7} a_7$$

$$x_7^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,49 \\ 3,44 \\ 2,83 \\ 5,77 \\ 5,37 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{18 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,49 \\ 3,44 \\ 2,83 \\ 5,77 \\ 5,37 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_7^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,49 \\ 3,44 \\ 2,83 \\ 5,77 \\ 5,37 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{18 - 13,52}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_7^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,49 \\ 3,44 \\ 2,83 \\ 5,77 \\ 5,37 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 4,71 \end{bmatrix}_{9\times1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,49 \\ 0 \\ 0 \\ 1,49 \\ 0 \\ 0 \\ 1,49 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_7^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,49 \\ 4,93 \\ 2,83 \\ 5,77 \\ 6,87 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

(h) $$x_8^{(1)} = x_7^{(1)} + \frac{(b_8 - a_8{}^T x_7^{(1)})}{a_8^T a_8} a_8$$

$$x_8^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,49 \\ 4,93 \\ 2,83 \\ 5,77 \\ 6,87 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{12-\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,49 \\ 4,93 \\ 2,83 \\ 5,77 \\ 6,87 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_8^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,49 \\ 4,93 \\ 2,83 \\ 5,77 \\ 6,87 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{12-10,97}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_8^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,49 \\ 4,93 \\ 2,83 \\ 5,77 \\ 6,87 \\ 5,10 \\ 4,71 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,34 \\ 0 \\ 0 \\ 0,34 \\ 0 \\ 0 \\ 0,34 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_8^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,83 \\ 4,93 \\ 2,83 \\ 6,11 \\ 6,87 \\ 5,10 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

(i) $x_9^{(1)} = x_8^{(1)} + \dfrac{(b_9 - a_9{}^T x_8^{(1)})}{a_9^T a_9} a_9$

$$x_9^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,83 \\ 4,93 \\ 2,83 \\ 6,11 \\ 6,87 \\ 5,10 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{6-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{1\times9}\begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,83 \\ 4,93 \\ 2,83 \\ 6,11 \\ 6,87 \\ 5,10 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1}}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{1\times9}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_9^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,83 \\ 4,93 \\ 2,83 \\ 6,11 \\ 6,87 \\ 5,10 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{6-8,42}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_9^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,31 \\ 0,83 \\ 4,93 \\ 2,02 \\ 6,11 \\ 6,87 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

(j) $$x_{10}^{(1)} = x_9^{(1)} + \frac{(b_{10} - a_{10}{}^T x_9^{(1)})}{a_{10}^T a_{10}} a_{10}$$

$$x_{10}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,31 \\ 0,83 \\ 4,93 \\ 2,02 \\ 6,11 \\ 6,87 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times 1} + \frac{10,51 - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 9} \begin{bmatrix} -0,31 \\ 0,83 \\ 4,93 \\ 2,02 \\ 6,11 \\ 6,87 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times 1}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 9} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

$$x_{10}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,31 \\ 0,83 \\ 4,93 \\ 2,02 \\ 6,11 \\ 6,87 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{10,51-12,63}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_{10}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,31 \\ 0,12 \\ 4,22 \\ 2,02 \\ 6,11 \\ 6,16 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

(k) $x_{11}^{(1)} = x_{10}^{(1)} + \dfrac{(b_{11} - a_{11}{}^{T} x_{10}^{(1)})}{a_{11}^{T} a_{11}} a_{11}$

$$x_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,31 \\ 0,12 \\ 4,22 \\ 2,02 \\ 6,11 \\ 6,16 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{16,13 - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} -0,31 \\ 0,12 \\ 4,22 \\ 2,02 \\ 6,11 \\ 6,16 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,31 \\ 0,12 \\ 4,22 \\ 2,02 \\ 6,11 \\ 6,16 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 6,20 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{16,13-12}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,06 \\ 0,12 \\ 4,22 \\ 2,02 \\ 7,49 \\ 6,16 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 7,58 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$(1)\ x_{12}^{(1)} = x_{11}^{(1)} + \frac{(b_{12} - a_{12}{}^{T} x_{11}^{(1)})}{a_{12}^{T} a_{12}} a_{12}$$

$$x_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,06 \\ 0,12 \\ 4,22 \\ 2,02 \\ 7,49 \\ 6,16 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 7,58 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{7,04 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 1,06 \\ 0,12 \\ 4,22 \\ 2,02 \\ 7,49 \\ 6,16 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 7,58 \end{bmatrix}_{9\times1}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times9} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,06 \\ 0,12 \\ 4,22 \\ 2,02 \\ 7,49 \\ 6,16 \\ 4,30 \\ 5,05 \\ 7,58 \end{bmatrix}_{9\times1} + \frac{7,04-11,37}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

$$x_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,06 \\ 0,12 \\ 4,22 \\ 0,58 \\ 7,49 \\ 6,16 \\ 2,85 \\ 3,61 \\ 7,58 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

Siguiendo con las iteraciones se obtiene los siguientes resultados en la tabla que se muestra a continuación:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$x_1^{(1)}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,33	4,33	4,33
$x_2^{(1)}$	0,00	0,00	0,00	5,00	5,00	5,00	4,33	4,33	4,33
$x_3^{(1)}$	2,67	2,67	2,67	5,00	5,00	5,00	4,33	4,33	4,33
$x_4^{(1)}$	2,67	2,67	2,67	5,00	5,00	5,37	4,33	4,71	4,71
$x_5^{(1)}$	2,67	2,67	3,44	5,00	5,77	5,37	5,10	4,71	4,71
$x_6^{(1)}$	0,49	0,49	3,44	2,83	5,77	5,37	5,10	4,71	4,71
$x_7^{(1)}$	0,49	0,49	4,93	2,83	5,77	6,87	5,10	4,71	6,20
$x_8^{(1)}$	0,49	0,83	4,93	2,83	6,11	6,87	5,10	5,05	6,20
$x_9^{(1)}$	-0,31	0,83	4,93	2,02	6,11	6,87	4,30	5,05	6,20
$x_{10}^{(1)}$	-0,31	0,12	4,22	2,02	6,11	6,16	4,30	5,05	6,20
$x_{11}^{(1)}$	1,06	0,12	4,22	2,02	7,49	6,16	4,30	5,05	7,58
$x_{12}^{(1)}$	1,06	0,12	4,22	0,58	7,49	6,16	2,85	3,61	7,58
$x_{12}^{(2)}$	2,03	0,69	4,42	1,34	7,49	5,39	2,65	3,04	6,61
$x_{12}^{(3)}$	1,78	0,51	4,52	1,26	7,49	5,48	2,56	3,22	6,86
$x_{12}^{(4)}$	1,82	0,52	4,62	1,37	7,49	5,37	2,45	3,22	6,82
$x_{12}^{(5)}$	1,79	0,49	4,71	1,43	7,49	5,31	2,37	3,25	6,85
$x_{12}^{(10)}$	1,68	0,44	5,03	1,70	7,49	5,03	2,04	3,29	6,96
$x_{12}^{(20)}$	1,49	0,48	5,29	2,00	7,49	4,73	1,79	3,25	7,15
$x_{12}^{(30)}$	1,38	0,55	5,34	2,11	7,49	4,62	1,74	3,19	7,26
$x_{12}^{(40)}$	1,33	0,59	5,33	2,14	7,49	4,59	1,75	3,15	7,31
$x_{12}^{(45)}$	1,32	0,60	5,32	2,15	7,49	4,59	1,76	3,14	7,32

Figura 3.6: Tabla de la Aplicación 3.2.1

En la tabla, se presentan los valores de cada uno de los iterados del primer ciclo $x_1^{(1)}$ al $x_{12}^{(1)}$, pero después solo se presentan los iterados $x_{12}^{(p)}$ para varios valores de p. Los iterados $x_{12}^{(p)}$ empiezan a repetirse con dos cifras decimales para $p \geq 45$, de modo que $x_{12}^{(45)}$, constituye la solución aproximada.

3.3 Aplicación del software Mathematica para determinar la solución a aproximada del sistema de ecuaciones lineales inconsistente

Tomografia01.nb *

ALGORITMO PARA HALLAR EL CICLO LIMITE

```
A = {{1, 1}, {1, -2}, {3, -1}};
B = {{2}, {-2}, {3}};

Pr = {1, 3};
NPasadas = 10;
Print["X^(0)", " = ", N[Pr, 6]];
For[p = 1, p < NPasadas, p++,
 For[i = 1, i < 4, i++,
  Pr = Flatten[Pr + (B[[i]] - A[[i]].Partition[Pr, 1])[[1]] / (A[[i]].Partition[A[[i]], 1])[[1]] A[[i]]];
  Print[X^Row[{"(",p,")"}], " = ", N[Pr, 6]]
 ]
]
```

Tomografia01.nb *

$X^{(1)}$ = {0, 2.00000}

$X^{(1)}$ = {0.400000, 1.20000}

$X^{(1)}$ = {1.30000, 0.900000}

$X^{(2)}$ = {1.20000, 0.800000}

$X^{(2)}$ = {0.880000, 1.44000}

$X^{(2)}$ = {1.42000, 1.26000}

$X^{(3)}$ = {1.08000, 0.920000}

$X^{(3)}$ = {0.832000, 1.41600}

$X^{(3)}$ = {1.40800, 1.22400}

$X^{(4)}$ = {1.09200, 0.908000}

$X^{(4)}$ = {0.836800, 1.41840}

$X^{(4)}$ = {1.40920, 1.22760}

$X^{(5)}$ = {1.09080, 0.909200}

$X^{(5)}$ = {0.836320, 1.41816}

$X^{(5)}$ = {1.40908, 1.22724}

$X^{(6)}$ = {1.09092, 0.909080}

$X^{(6)}$ = {0.836368, 1.41818}

$X^{(6)}$ = {1.40909, 1.22728}

$X^{(7)}$ = {1.09091, 0.909092}

$X^{(7)}$ = {0.836363, 1.41818}

$X^{(7)}$ = {1.40909, 1.22727}

$X^{(8)}$ = {1.09091, 0.909091}

$X^{(8)}$ = {0.836364, 1.41818}

$X^{(8)}$ = {1.40909, 1.22727}

$X^{(9)}$ = {1.09091, 0.909091}

$X^{(9)}$ = {0.836364, 1.41818}

$X^{(9)}$ = {1.40909, 1.22727}

Tomografia01.nb

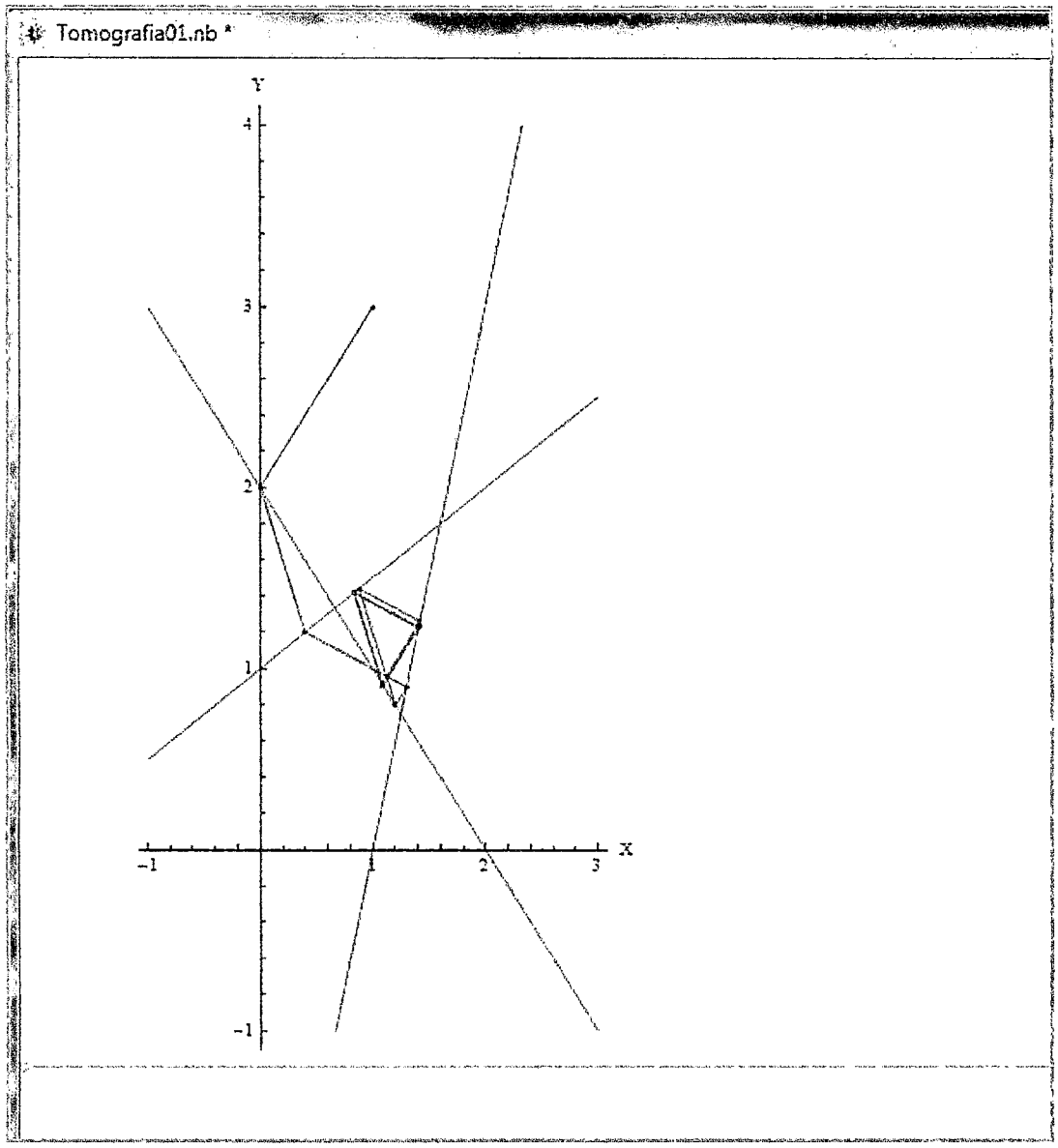
GRAFICAS DE LAS RECTAS Y LA SECUENCIA DEL CICLO LIMITE

```
Ecuaciones = Flatten[A.{{x}, {y}}];
Rectas = ContourPlot[Ecuaciones == Flatten[B], {x, -1, 3}, {y, -1, 4}, Frame → False, AspectRatio → 2/1, Axes → True, AxesLabel → {"X", "Y"}];
```

Lista de puntos obtenidos en el algoritmo

```
Pr = {1, 3};
NPasadas = 10;
(* Print["X(0)", " = ",N[Pr,6]]; *)
Puntos = List[Pr];
For[p = 1, p < NPasadas, p++,
 For[i = 1, i < 4, i++,
  Pr = Flatten[Pr + (B[[i]] - A[[i]].Partition[Pr, 1])[[1]] / (A[[i]].Partition[A[[i]], 1])[[1]] A[[i]]];
  AppendTo[Puntos, Pr]
  (* Print["X^(k+1)", " = ",N[Pr,6],"->",Puntos]*)
 ]
]

GrafPuntos = ListPlot[Puntos, PlotStyle → {Blue, Thin}];
Ruta = ListPlot[Puntos, Joined → True, PlotStyle → {Red, Thin}];
Show[Rectas, Ruta, GrafPuntos]
```


Tomografia01.nb *
Y
4
3
2
1
-1
X
-1
1
2
3

Conclusiones

1. A través de la solución aproximada del sistema lineal inconsistente se puede construir la imagen en corte transversal del cuerpo humano.
2. Empleando las técnicas de reconstrucción algebraica se puede aproximar la solución de un sistema lineal inconsistente de dos variables y de nueve variables.
3. Se aplicó el Software Mathematica para el cálculo de la solución aproximada del sistema lineal inconsistente

Sugerencias

1. Aplicar otros métodos de reconstrucción para obtener las imágenes reproducidas en la tomografía computarizada, por ejemplo empleando integrales.

Bibliografía

1. Antón, Howard; Rorres, Chris. Introducción al Álgebra Lineal. Editorial Limusa-Wiley. Quinta Edicion.2011.
2. Del Valle Sotelo, Juan C. Álgebra Lineal Para Estudiantes de Ciencias e Ingenieria. Editorial McGraw Hill, 2012.
3. Franciella Marques da Costa. Edson Agustini. Algebra Linear e Formação de Imagens: a Tomografía a Computadorizada. Universidade Federal de Uberlandia - Ufu – MG. Setembro de 2005.
4. Josue Ervin Musial. Técnicas de reconstrução algébricas aplicadas em tomografia computadorizada. Curitiba-PR 2010

Linkografía

- ✓ **http://www.fisica.uh.cu/bibvirtual/vidaytierra/tomografia/index.htm**
  Extraída 15/12/2014.
- ✓ **http://es.slideshare.net/pedro091224/tomografia-espiral-multicorte**
  Extraída 22/12/2014.
- ✓ **http://fejer.ucol.mx/cursos2/wp-content/uploads/2011/02/VariasVariables-Cap1.pdf**
  Extraída 11/01/2015.
- ✓ **http://www.cancer.gov/espanol/recursos/hojas-informativas/deteccion-diagnostico/tomografia-computarizada**
  Extraída 23/01/2015
- ✓ **https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/asignaturas/calc1inf1011/apjperez/calculo_cap07.pdf**
  Extraída 04/02/2015