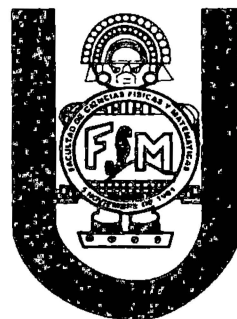




**UNIVERSIDAD NACIONAL  
"PEDRO RUIZ GALLO"**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS  
Y MATEMÁTICAS**



**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**

**"Sistemas de Ecuaciones Lineales de dos  
a más Variables para la Solución de  
Problemas de Redes Eléctricas"**



**TESIS**

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"	
OFICINA CENTRAL DE BIBLIOTECA PROCESOS TÉCNICOS	
Nº DE INGRESO:	
COD. DE CLASIFICACIÓN:	

**PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO  
PROFESIONAL EN MATEMÁTICAS**

**Presentado por:**

**Bach. Mat. Bracamonte Ugaz Wendy Zaira**

**Bach. Mat. LLontop Samillan Armando**

**Asesor:**

**Dr. Cárpene Velásquez Enrique Wilfredo**

**LAMBAYEQUE – PERÚ**

**2015**



UNIVERSIDAD NACIONAL  
"PEDRO RUIZ GALLO"  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



---

**"Sistemas de Ecuaciones Lineales de dos a más  
Variables para la Solución de Problemas de Redes  
Eléctricas"**

---

**TESIS**

---

**"PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO  
PROFESIONAL EN MATEMÁTICAS".**

---

Presentado por:

**Bach. Mat. Bracamonte Ugaz Wendy Zaira**

**Bach. Mat. LLontop Samillan Armando**

Asesor:

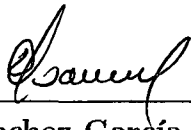
**Dr. Cárpena Velásquez Enrique Wilfredo**

**LAMBAYEQUE – PERÚ**

**2015**

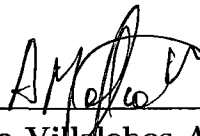
**UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"Sistemas de Ecuaciones Lineales de dos a más Variables para la Solución de Problemas de Redes Eléctricas"**, presentada por las Bachilleres en Matemáticas, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.



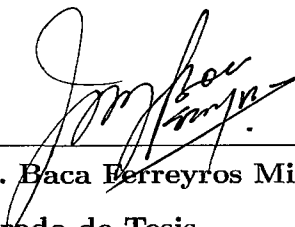
---

**Mg. Sánchez García Dolores**  
**Presidente Jurado de Tesis**



---

**Mg. Malca Villalobos Amado**  
**Secretario Jurado de Tesis**



---

**Lic. Mat. Baca Berreyros Miguel Ángel**  
**Vocal Jurado de Tesis**

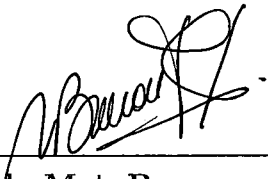
**Fecha de Defensa: Octubre - 2015**

UNIVERSIDAD NACIONAL " PEDRO RUIZ GALLO"  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

---

**"Sistemas de Ecuaciones Lineales de dos a más  
Variables para la Solución de Problemas de Redes  
Eléctricas"**

---



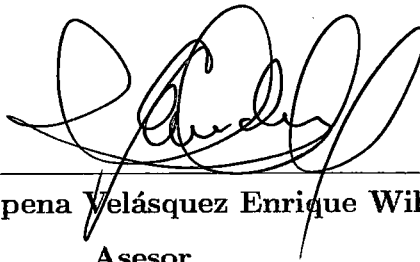
---

Bach. Mat. Bracamonte Ugaz Wendy Zaira  
Autor



---

Bach. Mat. Llontop Samillan Armando  
Autor



---

Dr. Cárpena Velásquez Enrique Wilfredo  
Asesor

Lambayeque – Perú  
Octubre - 2015

# Agradecimiento

A Dios y a la Virgen María por estar conmigo y guiar cada paso que doy, cuidando y dándome fortaleza para continuar;

A mis padres Lita y Armando, quienes a lo largo de mi vida han velado por mi bienestar y educación siendo mi apoyo en todo momento, depositando su entera confianza en cada reto que se me presentaba sin dudar ni un solo momento en mi inteligencia y capacidad.

A mis hermanas Lourdes, Paola, Mercely, por el apoyo incondicional.

A mi compañero de vida, Enrique quien me motiva constantemente, el representó el esfuerzo y tesón en momentos de cansancio.

A mi hijo Sebastián mi aliciente para superar obstáculos y seguir creciendo cada día. Los amo con mi vida.

A mis profesores a quienes les debo gran parte de mis conocimientos, gracias a su paciencia y enseñanza y finalmente un especial agradecimiento al Dr. Enrique Wilfredo Cárpena Velásquez, amigo y asesor por el tiempo y colaboración que nos brindó para culminar esta tesis.

## Wendy

A Dios y a María Santísima por acompañarme y guiarme a lo largo de mi carrera por ser mi fortaleza en mis momentos de debilidad por su infinito amor y cuidado.

A mis padres Miguel y Francisca mis ejemplos a seguir, por su apoyo y aliento.

A mis hermanos y hermanas : Marcela, Aurora, Esperanza, Christian, por su apoyo en todo momento en especial a Esther.

A los amigos y amigas por su apoyo en las distintas etapas de mi vida tardaría en mencionar a todos en especial a Wendy compañera de estudios y tesis gracias amiga.

Al Dr. Enrique Wilfredo Cárpena Velásquez, amigo y asesor por toda la colaboración brindada durante la elaboración de este proyecto sin el cual no se hubiera materializado, Gracias mil.

## Armando

# Dedicatoria

Dedico este trabajo :

A Dios nuestro señor y a su santísima madre la Virgen María.

A Lita y Armando, mis padres, A Sebastián , mi hijo.

A mis hermanas Lourdes, Paola, Mercely.

A Enrique mi Compañero de Vida.

**Wendy**

Dedico este trabajo :

A Dios nuestro señor y a su santísima madre la Virgen María.

A Miguel y Francisca, mis padres, A Renzo Adriano, mi hijo.

A Giuseppe, Verónica, Magali, Consuelo, Verónica, Roger,

Miguel, amigos y amigas a los que están y a los que ya partieron.

**Armando**

# Resumen

---

En el presente trabajo de investigación se presenta un análisis de sistemas de ecuaciones lineales de dos o más variables para la solución de problemas en redes eléctricas, con el cual se pretende orientar al estudiante de manera que no solo reciba los fundamentos teóricos sobre la solución de sistemas de ecuaciones lineales sino también pueda familiarizarse con sus aplicaciones en redes eléctricas. Es por eso que el objetivo de esta tesis es obtener sistemas de ecuaciones lineales a través del estudio de las leyes físicas que rigen en un circuito eléctrico tales como las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm que permiten calcular intensidades de corrientes en los ramales del mismo y diferencial de potencial en los nodos a partir de baterías y resistencias.

Se muestra además que para facilitar los cálculos se utiliza el software matemático MATLAB.

# Abstract

---

In the present investigation an analysis of systems of linear equations in two or more variables to solve problems in electrical networks which aims to guide the student so that not only receives the theoretical foundations of the solution is presented systems of linear equations but also to become acquainted with applications in power grids.

That is why the aim of this thesis is to obtain systems of linear equations by studying the physical laws in an electrical circuit such as Kirchhoff's laws and Ohm's law that calculate intensities of currents in the branches of same potential difference and the nodes from batteries and resistors.

It also shows that to facilitate mathematical calculations MATLAB software is used.



# Introducción

---

Actualmente hablar de matrices es hablar de una teoría llena de aplicaciones en las diferentes disciplinas. El objetivo ahora es el uso adecuado de algunas aplicaciones para interesar, motivar, ilustrar e informar al estudiante cuando estemos presentando la teoría sobre estos temas afines a saber: matrices, sistemas de ecuaciones lineales, métodos numéricos para sistemas de ecuaciones lineales, determinantes, métodos directos, etc. Para ello estos métodos se utilizará en el desarrollo de redes eléctricas, se pretende orientar técnicamente al alumno de manera que reciba no solo los fundamentos teóricos si no que también pueda familiarizarse con una gran cantidad de aplicaciones incorporadas directamente a los desarrollos teóricos, al igual que valorar algunos conceptos numéricos necesarios para implementar luego la teoría en una computadora.

La teoría de redes eléctricas resulta valiosa para los estudiantes de ciencias e ingeniería y para los que se especializan en otras ramas como la matemática aplicada a la que es necesario recurrir.

Es por eso que la presente tesis tiene como objetivo, obtener sistemas de ecuaciones lineales, que permitan calcular intensidades de corrientes en los ramales del mismo y diferencias de potencial en los nodos a partir de elementos eléctricos: baterías y resistencias.

Para dar solución a estos sistemas de ecuaciones lineales utilizaremos métodos clásicos y numéricos tales como Descomposición LU, Gaus-Seidel, Jacobi y SOR; y para facilitar los cálculos utilizaremos el software matemático MATLAB, ya que es uno de los paquete-

tes más utilizados por científicos e ingenieros.

En el primer capítulo se detalla la teoría de Matrices y Determinantes, el uso del software Matlab, la solución de ecuaciones lineales por métodos clásicos, métodos directos en donde se desarrolla el método de descomposición LU y además los métodos numéricos Jacobi, Gauss-Seidel y SOR .

En el Segundo Capítulo se define la base teórica de redes eléctricas, la Ley de Oh, y las Leyes de Kirchhoff.

Finalmente en el Tercer Capítulo los métodos para el análisis de circuitos: el análisis de circuitos por el método nodal, que se basa en una aplicación sistemática de la primera ley de Kirchhoff y el análisis de circuitos por el método de mallas, que se basa en la segunda ley de Kirchhoff y las aplicaciones.

# Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>III</b>
4   CAPÍTULO 1	
4   Matrices y Métodos Numéricos Para Ecuaciones Lineales	
1.1. Matrices, Propiedades . . . . .	4
1.2. Operaciones y Propiedades . . . . .	6
1.3. Matrices Especiales . . . . .	11
1.4. Determinantes . . . . .	18
1.5. Matlab . . . . .	24
1.5.1. Elementos de Matlab . . . . .	24
1.6. Solución de Ecuaciones Lineales por Métodos Clásicos . . . . .	30
1.6.1. Sistema de ecuaciones lineales . . . . .	30
1.6.2. Expresión matricial de un sistema . . . . .	30
1.6.3. Métodos Directos . . . . .	32
1.7. Métodos Numéricos para la Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales	40
1.7.1. Método de Jacobi . . . . .	41
1.7.2. Método de Gauss-Seidel . . . . .	44
1.7.3. Método de SOR . . . . .	48

---

54	CAPÍTULO 2	
	Electricidad	
2.1.	Red Eléctrica . . . . .	54
2.2.	Ley de Ohm . . . . .	57
2.2.1.	Circuito en serie o cascada . . . . .	58
2.2.2.	Circuito en paralelo . . . . .	59
2.3.	Leyes de Kirchhoff . . . . .	61
2.3.1.	La primera Ley de Kirchhoff . . . . .	61
2.3.2.	Segunda Ley de Kirchhoff . . . . .	63
	CAPÍTULO 3	
65	Aplicaciones del Sistemas de Ecuaciones Lineales de Dos a Más Variables para la Solución de Problemas de Redes Eléctricas	
3.1.	Análisis de circuitos por el método nodal . . . . .	65
3.1.1.	Análisis nodal con fuentes de corriente independientes . . . . .	66
3.1.2.	Análisis nodal con supernodos . . . . .	70
3.2.	Análisis de circuitos por el método de las mallas . . . . .	75
3.2.1.	Análisis de malla con fuentes de voltaje independientes . . . . .	77
3.2.2.	Análisis de mallas con supermallas . . . . .	81
3.3.	Aplicaciones . . . . .	84
	<b>Conclusiones</b>	<b>98</b>
	<b>Anexos</b>	<b>99</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>102</b>

---

# Capítulo 1:

## Matrices y Métodos Numéricos Para Ecuaciones Lineales

---

### 1.1 Matrices, Propiedades

---

**Definición 1.1.** Una matriz  $A_{m \times n}$  es un arreglo rectangular de  $m \times n$  números dispuestos en  $m$  filas (renglones) y  $n$  columnas. El orden de una matriz también se denomina dimensión o tamaño, siendo  $m$  y  $n$  números naturales.

Las matrices se denotan con letras mayúsculas:  $A, B, C, \dots$  y los elementos de las matrices con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar ocupado:

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{mn}$ . Un elemento genérico que ocupe la fila “ $i$ ” y la columna “ $j$ ” se escribe  $a_{ij}$ . Si el elemento genérico aparece entre paréntesis también representa a toda la matriz:  $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Así tenemos:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

**Ejemplo 1.1.** Son ejemplos de matrices los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 3 & 12 & 11 \\ 8 & 23 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} i & 2 & -1 \\ 5 & 3 - 2i & 2i \end{bmatrix}$$

A es una matriz de orden  $2 \times 2$ ;  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ .

B es una matriz de orden  $3 \times 3$ ;  $b_{ij} \in \mathbb{R}$ .

C es una matriz de orden  $2 \times 3$ ;  $c_{ij} \in \mathbb{C}$ .

### 1. Igualdad de matrices

Se dice que dos matrices  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  son iguales si y solo si son idénticas; es decir, si y solo si son del mismo orden y sus respectivos elementos son iguales:  $A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$  para cada  $i$  y para cada  $j$ .

**Ejemplo 1.2.** Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Averiguar si son iguales o no.}$$

**Solución.**

A y B tienen el mismo orden ( $2 \times 2$ ). Veamos si tiene los mismos elementos:

$$a_{11} = b_{11} = 3; \quad a_{12} = b_{12} = -10; \quad a_{21} = b_{21} = 8; \quad a_{22} = b_{22} = 4$$

Luego  $A=B$ .

---

**Ejemplo 1.3.** Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Averiguar si son iguales o no.}$$

**Solución.**

A y B tienen el mismo orden ( $2 \times 2$ ). Veamos si tiene los mismos elementos:

$$a_{11} = 3 \neq b_{11} = -1; \quad a_{12} = b_{12} = 0; \quad a_{21} = b_{21} = 0; \quad a_{22} = b_{22} = 0$$

Como  $a_{11} \neq b_{11}$ , entonces  $A \neq B$ .

## 1.2 Operaciones y Propiedades

---

### 1. Suma de matrices

Sean las matrices:  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$ , ambas del mismo orden  $m \times n$ . La matriz suma de A y B es:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

la cual también es de orden  $m \times n$ .

**Observación 1.1.** En otras palabras, para sumar matrices, lo que se hace es sumar los elementos que están situados en la misma fila y en la misma columna. [2]

---

**Ejemplo 1.4.** Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 4 \\ -1 & 8 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 3 & -4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 + (-2) & 6 + (-8) & 0 + 3 & 4 + (-4) \\ -1 + 4 & 8 + 3 & 3 + 5 & 5 + 3 \\ 5 + 3 & 7 + (-1) & 0 + 4 & -2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 11 & 8 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

**Propiedad 1.1.**

- a)  $A + B = B + A$
- b)  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- c)  $k(A + B) = kA + kB$  ( $k$  : escalar)
- d)  $(k+1)A = kA + 1A$  ( $k, 1$  : escalares)
- e)  $(kl)A = k(lA)$  ( $k, l$  : escalares)
- f)  $1A = A$
- g)  $-A = (-1)A$
- h) La diferencia de A y B, del mismo orden, es definida por:  $A - B = A + (-B)$



**Ejemplo 1.5.** Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 8 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$



Hallar A-B

Solución.- Se puede efectuar la diferencia, ya que las matrices son del mismo orden ( $3 \times 3$ ).

$$\text{Luego: } A-B = A+(-B)=A=\begin{bmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 1 & -12 & -10 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2. Multiplicación de una Matriz por un Escalar

Sea  $A = [a_{ij}]$  de orden  $m \times n$  y  $k$  un número real. Entonces:  $kA = [ka_{ij}]$  para todo  $i, j$ .

**Nota 1.1.** Observar que cada elemento de la matriz se multiplica por el escalar  $k$ .

**Ejemplo 1.6.** Sea

$$\begin{bmatrix} -3 & -8 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} y k = 2 \quad \text{hallar } kA$$

entonces  $kA = 2A = \begin{bmatrix} -6 & -16 & 8 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

## 3. Producto de un Vector Fila por un Vector Columna

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Entonces  $AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_ib_i$  es el producto de  $A$  por  $B$ .

Al número  $\sum_{i=1}^n a_ib_i$  se le conoce como producto escalar de  $A$  y  $B$ .

**Nota 1.2.** . Observar que ambas matrices tienen la misma cantidad de elementos (la matriz  $A$  tiene  $n$  elementos columna y la matriz  $B$  tiene  $n$  elementos fila)

**Ejemplo 1.7.** Hallar  $AB$ , si :

$A = [2 \ -5 \ 7]_{1 \times 3}$  (una fila y 3 columnas) y

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

(tres filas y una columna)


**solución**

$$AB = [2 \ -5 \ 7] \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = [(2)(2) + (-5)(7) + (7)(3)] = [-10]$$

#### 4. Producto de dos Matrices

El producto de una matriz  $A = [a_{ij}]$  de  $m \times n$  y una matriz  $B = [b_{ik}]$  de  $n \times p$ , es otra matriz  $C = [c_{ik}]$  de orden  $m \times p$ , donde  $c_{ik}$  es el producto escalar de la  $i$ -ésima fila de  $A$  por la  $k$ -ésima columna de  $B$ . Gráficamente podemos observar lo siguiente:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{Fila } i \text{ de} \\ \text{la matriz} \\ A \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ik} & \cdots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}
 \end{array}
 = C = [c_{ik}]$$

  
 Columna k  
de la matriz B

---


$$\text{Donde: } C_{ik} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{ik} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

**Ejemplo 1.8.** Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular  $A \times B$ .

**Solución**

Calculando los elementos  $C_{ik}$  del producto se tienen:

$C_{11}$  : (primera fila de  $A$  por primera columna de  $B$ )

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [26]$$

$C_{12}$ : (primera fila de  $A$  por segunda columna de  $B$ )

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0]$$

$C_{21}$  : (segunda fila de  $A$  por primera columna de  $B$ )

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [134]$$


---

$C_{22}$  (segunda fila de  $A$  por segunda columna de  $B$ )

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [-2]$$

Luego

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 134 & -2 \end{bmatrix}$$

## 5. Propiedades

- a)  $A(BC)=(AB)C$
- b)  $(A+B)C=AC+BC$
- c)  $A(B+C)=AB+AC$
- d) En general, no se cumple que  $AB = BA$ . (No conmutan).

## 1.3 Matrices Especiales

---

### 1. Matrices positivas

**Proposición 1.1.** *Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$  una matriz positiva. Entonces*

- a)  $\det(A) > 0$
  - b)  $A$  es invertible
  - c)  $A$  es simétrica y por lo tanto diagonalizable por medio de una matriz ortogonal.
  - d)  $A^{-1}$  es también positiva.
-

e)  $A^T$  es también positiva

f) Para cada  $1 \leq k \leq n$ ,  $A_k$  es también positiva

**Ejemplo 1.9.** La matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\implies \det(A) = 48$$

Por lo tanto es positiva.

■ **Matriz simétrica positiva**

Sea  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$

La matriz  $A$  es simétrica si  $A = A^T$

La matriz  $A$  es definida positiva si para todo  $X \neq 0$  se tiene que

$$X^T A X > 0$$

**Notación:** Con  $A > 0$  indicamos que la matriz es definida positiva.

Decimos que  $H$  es una submatriz principal de  $A$  si es una submatriz cuadrada formada con las entradas alrededor de la diagonal principal

$$H = A(j : k, j : k)$$

**Proposición 1.2.**

- a) Sea  $X$  no singular.  $A$  es simétrica positiva si y sólo si  $X^T A X$  es simétrica positiva
- b) Si  $A$  es simétrica positiva y  $H$  es cualquier submatriz principal de  $A$ , entonces  $H$  es simétrica positiva.
- c)  $A$  es simétrica positiva si y sólo si  $A$  es simétrica y todos sus eigenvalores son positivos.

- d)  $A$  es simétrica positiva si y sólo si existe una única matriz triangular inferior no singular  $L$ , con entradas positivas en la diagonal, tal que  $A = LL^T$ .

## 2. Matriz Cuadrada

Se dice que una matriz  $A$  es cuadrada cuando el número de filas es igual al número de columnas.  $A_{m \times n}$  es cuadrada si y sólo si  $m = n$ , en este caso se dice que  $A$  es de orden  $(n \times n)$  y se representa por  $A_n$ .

**Ejemplo 1.10.**

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  es cuadrada, mientras que  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  no lo es.

En una matriz cuadrada  $A$  de orden  $(n \times n)$ , los elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , forman la diagonal principal de la matriz.

Denotaremos el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden  $n$  por  $M_n$ .

## 3. Matriz Nula

Una matriz en la cual todos sus elementos son ceros, se denomina matriz nula y se denota por  $\theta_{m \times n}$ .

**Ejemplo 1.11.**

$$\theta_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 4. Matriz Diagonal

Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$ , es diagonal si  $a_{ij} = 0$ , para  $i \neq j$  y

$\exists i, a_{ii} \neq 0, 1 \leq i \leq n$ .

Es decir, si todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son ceros.

Por ejemplo:

**Ejemplo 1.12.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 5. Matriz Escalar

Es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

**Ejemplo 1.13.**

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

### 6. Matriz Identidad

La matriz cuadrada  $I_n$  es una matriz diagonal, si y solo si  $a_{ij} = 0; \forall i \neq j \wedge a_{ii} = 1; \forall i = j;$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, etc.$$

Se acostumbra denotar a la matriz identidad de orden  $n \times n$  por  $I_n$ .

### 7. Matriz Fila

Se llama matriz fila a una matriz de orden  $1 \times n$  ( 1 fila y n columnas) de la forma:

$$A = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]$$

**Ejemplo 1.14.**

$$A = [5 \ 6 \ 3 \ 1]$$

### 8. Matriz Columna

Se llama matriz columna a una matriz de orden  $n \times 1$ , (n filas y 1 columna), de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$$

## 9. Transpuesta

Dada una matriz  $A$ , se llama transpuesta de  $A$  a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por  $A^t$  ó  $A^T$ . Si es

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ , su transpuesta es  $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$

**Ejemplo 1.15.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \text{ entonces su transpuesta es } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

## 10. Matriz triangular

### a) Matriz Triangular Superior

La matriz cuadrada  $A_n$  es triangular superior si  $a_{ij} = 0, \forall i > j$

**Ejemplo 1.16.**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

### b) Matriz Triangular Inferior

La matriz cuadrada  $A_n$  es triangular inferior si  $a_{ij} = 0, \forall i < j$

**Ejemplo 1.17.**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

## 11. Matriz Ortogonal

Una matriz ortogonal es necesariamente cuadrada e invertible:  $A^{-1} = A^T$  es decir la inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal. El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal. El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1.  $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 12. Matriz Normal

Una matriz es normal si conmuta con su transpuesta es decir  $A \cdot A^T = A^T \cdot A$ . Las matrices simétricas, antisimétricas u ortogonales son necesariamente normales.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

entonces cumple que:  $A \cdot A^T = A^T \cdot A$ .

## 13. Matriz Inversa

Decimos que una matriz cuadrada  $A$  tiene inversa,  $A^{-1}$ , si se verifica que:  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ su inversa es } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

## 14. Matriz Hermitiana

Son una generalización de las matrices simétricas. Son aquellas igual a su transpuesta conjugada, es decir:  $A = A^H$ .

Sea la matriz  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  ¿es Hermitiana?

**Solución.**

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

Luego su conjugada

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces se cumple:  $A = A^H$ .

$\therefore A$  es una matriz Hermitiana.

## 15. Matriz Tridiagonal

Una matriz tridiagonal es una matriz “casi” diagonal. De un modo más exacto, una

matriz tridiagonal es una matriz cuadrada que tiene elementos distintos a cero solo en la diagonal principal, la primera diagonal sobre ésta, y la primera diagonal bajo la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$



**Ejemplo 1.18.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

16. **Matriz Regular** Decimos que una matriz cuadrada es “regular” si su determinante es distinto de cero, y es “singular” si su determinante es igual a cero.

$$|A| \neq 0 \implies \text{Matriz Regular}$$

$$|A| = 0 \implies \text{Matriz Singular}$$

### 17. Matriz de Diagonal Dominante

Una matriz cuadrada de orden “n”,  $A = (a_{ij})$  donde, Se dice que es una matriz de diagonal dominante si  $|a_{ii}| > \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}| \quad i = 1, 2, \dots, n$

**Ejemplo 1.19.**

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$  es diagonal dominante por verificar que:

$$3 > 1 + 1; \quad 2 > 0 + 1 \text{ y } 5 > 2 + |-1| = 3$$

### 18. Matrices Fundamentales De Una Matriz "A"

Se denominan matrices fundamentales de una matriz A, y se denotan por  $A_k$  a la submatrices constituidas por los elementos de A situados en las  $k$  primeras filas y las  $k$  primeras columnas, es decir:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \dots$$

### 19. Matriz de Hessenberg

Una matriz de Hessenberg es una matriz "casi" triangular. Para ser más exactos, una matriz superior de Hessenberg tiene todos ceros por debajo de la primera subdiagonal, y una matriz inferior de Hessenberg tiene todos ceros por debajo de la primera superdiagonal.

**Ejemplo 1.20.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz de Hessenberg superior.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz de Hessenberg inferior.}$$

## 1.4 Determinantes

**Definición 1.2.** El determinante viene a ser una función que aplicada a una matriz cuadrada da un único valor numérico.

Sea  $M_{n \times n}$  el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden  $n$ , entonces la definición

queda de la siguiente manera:

$$||: M_{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C})$$

$$A \longrightarrow |A|$$

**Notación:**

Sea  $A$  una matriz cuadrada, entonces el determinante de la matriz  $A$  se representa por  $|A|$  o  $\det(A)$  o  $\det A$ .

### 1. Determinante de una matriz cuadrada de orden 2

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Su determinante se define mediante la fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**Ejemplo 1.21.**

Sea la matriz cuadrada de orden 2,  $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ , hallar  $\det A$

**Solución**

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = (5)(3) - (8)(10) = 15 - 80 = -65$$

### 2. Determinante de una matriz cuadrada de orden 3 Sea $A$ una matriz cuadrada de orden 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Su determinante se define mediante la fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

**Ejemplo 1.22.** Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ hallar } \det A$$

**Solución**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(2)(3) + (2)(1)(2) + (3)(3)(1) - (2)(2)(3) - (1)(1)(1) - (3)(3)(2) = -12$$

### 3. Cálculo del determinante de orden n, por los adjuntos

Cuando el orden de los determinantes es superior a 3 la regla de Sarrus no es fácilmente aplicable y entonces utilizamos el método de los adjuntos, que reduce el orden en una unidad cada vez que le utilizamos. Para ello vamos a definir dos nuevos conceptos:

### 4. Menor complementario

Dada una matriz  $A_n$  se llama menor complementario de un elemento  $a_{ij}$  al determinante de la matriz, que resulta de suprimir la fila  $i$  y la columna  $j$  en la matriz  $A_n$ : se llama  $m_{ij}$ .

### 5. Adjunto de un elemento Al producto de $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario $m_{ij}$ de $a_{ij}$ se llama adjunto de un elemento $a_{ij}$ y se escribe $A_{ij}$ .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

A partir de estas definiciones obtenemos otra forma de calcular un determinante: el valor de un determinante de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos.

$$|A| \sum_{i \neq j}^n a_{ij} \times A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \dots + a_{in}A_{in} \\ + a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$



**Ejemplo 1.23.**

Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Elegimos la primera fila

ya que tiene dos elementos nulos y eso va a simplificar el cálculo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 0A_{12} + 2A_{13} + 0A_{14} =$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 0m_{12} + 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 0m_{14} =$$

Cuando llegamos a un determinante de orden tres, podemos aplicar Sarrus:

$$1[(-16) + (-3) - [(-4) + 6]] + 2[(-2) + 1 + (-6) - [3 + 1 + 4]] = -51$$

**En Matlab:**

```
>> A=[1 0 2 0;1 2 0 1;-1 1 4 -1; 3 -1 -3 -2]
```

```
A =
```

```
1 0 2 0
```

```
1 2 0 1
```

```
-1 1 4 -1
```

```
3 -1 -3 -2
```

```
>> det(A)
```

```
ans =
```

### Propiedades

1. Para toda matriz  $A_{n \times n}$  se tiene  $\det A = \det(A^t)$ .
2. El determinante de una matriz  $A_{n \times n}$  cambia de signo si dos filas o dos columnas se intercambian.
3. Si la matriz  $B_{n \times n}$  se obtiene de la matriz  $A_{n \times n}$  trasladando una de sus filas o columnas  $k$  lugares, entonces,  $|B| = (-1)^k |A|$ .
4. Si una matriz  $A_{n \times n}$  se tiene que una fila o columna es múltiplo de otra fila o columna, entonces el determinante de dicha matriz vale CERO.
5. Si en una matriz  $A_{n \times n}$  todos los elementos de una matriz fila o columna son CEROS entonces su determinante es CERO.
6. Si una matriz  $A_{n \times n}$  todos los elementos de una fila o columna son múltiplos por un escalar  $K$ , entonces el valor del determinante también queda multiplicado por  $K$ .
7. Si a una fila o una columna de una matriz  $A_{n \times n}$  se le suma el múltiplo de otra fila o columna, se tendrá que el valor del determinante  $A_{n \times n}$  no varía.
8. Si los elementos de una fila o columna cualquiera consta de dos términos, el determinante puede expresarse como la suma de otros dos determinantes.
9. El determinante de la matriz identidad es igual a la unidad.
10. Sea  $D = [d_{ij}]$  una matriz diagonal de orden  $n \times n$ , entonces  

$$|D| = d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} \cdots d_{nn}$$
11. El determinante de una matriz triangular superior o triangular inferior es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
12. En forma general el determinante de una suma de matrices es diferente de la suma de los determinantes de cada matriz, es decir:  

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

13. El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, es decir:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

---



---

## 1.5 Matlab

---

---

### 1.5.1 Elementos de Matlab

---

MATLAB es un entorno de computación y desarrollo de aplicaciones totalmente integrado orientado para llevar a cabo proyectos en donde se encuentren implicados elevados cálculos matemáticos y la visualización gráfica de los mismos. MATLAB integra análisis numérico, cálculo matricial, proceso de señal y visualización gráfica en un entorno completo donde los problemas y sus soluciones son expresados del mismo modo en que se escribirían tradicionalmente, sin necesidad de hacer uso de la programación tradicional.

#### Matrices en Matlab:

Para introducir una matriz en Matlab se procede de la forma siguiente.

**Ejemplo 1.24.** tenemos la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Se introduce como:

$$>> A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ; & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

O bien

$$>> A = \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 & ; & 5, 6, 7, 8 \end{bmatrix};$$

Observemos que unas matrices especiales son los vectores, de esta forma, el vector fila  $v = (1.0, 1.1, 1.2, \dots, 2.0)$ , se escribe en Matlab como:

$$>> v = \begin{bmatrix} 1.0, & 1.1, & 1.2, & 1.3, & 1.4, & 1.5, & 1.6, & 1.7, & 1.8, & 1.9, & 2.0 \end{bmatrix}$$

---

**Operaciones y comandos para matrices:**

Hemos visto cómo se introducen las matrices en Matlab. Veamos un ejemplo para introducir algunos de los comandos básicos:

**Ejemplo 1.25.** Definimos dos matrices:

```
>> A=[2 1 ; 3 2]
```

```
A =  
    2    1  
    3    2
```

```
>> B=[3 4 ; -1 5]
```

```
B =  
    3    4  
   -1    5
```

- Para sumas las 2 matrices:

```
>> A+B
```

```
ans =  
    5    5  
    2    7
```

- Para multiplicar una matriz por un escalar:

```
>> 3*A
```

```
ans =  
    6    3  
    9    6
```

- Producto de matrices:

```
C=A*B  
    5   13  
    7   22
```

Siempre que los tamaños de las matrices sean los adecuados. Para saber cuál es el tamaño de una matriz con la que estamos trabajando, se utiliza el siguiente comando:

---

```
>> size(A)
```

```
ans =
```

```
2 2
```

Que quiere decir, evidentemente, 2 filas y 2 columnas.

- Para calcular la matriz transpuesta:

```
>> A'
```

```
ans =
```

```
2 3
```

```
1 2
```

## 1. Operaciones Básicas

Operación	Signo	Código ASCII
Suma a+b	+	Alt 43
Resta a-b	-	Alt 45
Multiplicación a*b	*	Alt 42
División a/b	/	Alt 47
Potenciación a^b	^	Alt 94

## 2. Uso interactivo de Matlab

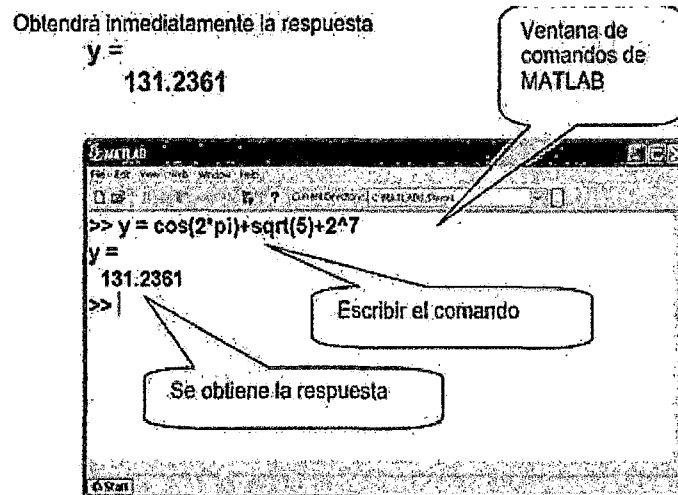
Al ingresar al programa MATLAB se tiene acceso a la ventana comando. Los comandos son las instrucciones que se escriben para obtener resultados en forma inmediata.

**Ejemplo 1.26.** Para calcular

$$y = \cos(2\pi) + \sqrt{5} = 2^7$$

Digite en la ventana de comandos de Matlab

$$<< y = \cos(2 * \pi) + \text{sqrt}(5) + 2^7$$



### 3. Matrices especiales con Matlab:

- Para generar la matriz identidad cuadrada:

```
>> eye(3)

     1     0     0
ans =  0     1     0
       0     0     1
```

- Una matriz  $3 \times 2$  llena de unos:

```
>> ones(3,2)
```

- Si queremos que esté llena de ceros:

```
>> zeros(3,2)
```

- Para generar una matriz con números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1:

```
>> rand(3,2)
```

### 4. Rango, Inversa y Determinante:

Definimos la matriz:

**Ejemplo 1.27.**

$$>> X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & ; & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular su rango:

$$>> \text{rank}(X)$$

$$\text{ans} = 2$$

Supongamos que tenemos definida la siguiente matriz:

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Para calcular su inversa:

$$>> \text{inv}(H)$$

$$\text{ans} = \begin{bmatrix} 0,1472 & -0,1444 & 0,0639 \\ -0,0611 & 0,0222 & 0,1056 \\ -0,0194 & 0,1889 & -0,1028 \end{bmatrix}$$

Y si queremos ver el resultado en forma racional:

$$>> \text{format rational}$$

$$>> \text{inv}(H)$$

$$\text{ans} = \begin{bmatrix} 53/360 & -13/90 & 23/360 \\ -11/180 & 1/45 & 19/180 \\ -7/360 & 17/90 & -37/360 \end{bmatrix}$$

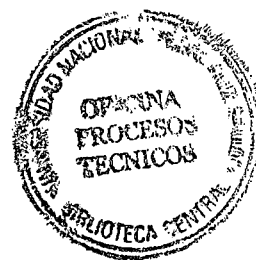
Para calcular el determinante de la matriz anterior H:

$$>> \text{det}(H)$$

$$\text{ans} = -360$$

### 5. Funciones matemáticas elementales:

sqrt(x)	raiz cuadrada	sin(x)	seno
abs(x)	módulo	cos(x)	coseno
conj(z)	complejo conjugado	tan(z)	tangente
real(z)	parte real	asin(x)	arcoseno
imag(z)	parte imaginaria	acos(x)	arcocoseno
angle(z)	argumento	atan(x)	arcotangente
exp(x)	exponencial	rats(x)	aprox. racional
log(x)	logaritmo natural	rem(x,y)	resto de dividir x por y
log10(x)	logaritmo decimal	sign(x)	signo (1 / -1 / 0)



### 6. Funciones matriciales fundamentales:

$B = A'$	Calcula la transpuesta(conjugada) de la matriz A.
$B = A!$	Calcula la tranpuesta(sin conjugar) de la matriz A.
$V = \text{poly}(A)$	Devuelve un vector V con los coeficientes del polinomio característico de la matriz cuadrada A.
$t = \text{trace}(A)$	Devuelve la traza t(Suma de los elementos de la diagonal) de una matriz cuadrada A.
$[m,n] = \text{size}(A)$	Devuelve el número de filas $m$ y de columnas $n$ de una matriz rectangular A.
$n = \text{size}(A)$	Devuelve el tamaño de una matriz cuadrada A.
$nf = \text{size}(A,1)$	Devuelve el número de filas de A.
$nc = \text{size}(A,2)$	Devuelve el número de columnas de A.

## 1.6 Solución de Ecuaciones Lineales por Métodos Clásicos

### 1.6.1 Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

En este caso tenemos  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas. Los números reales  $a_{ij}$  se denominan coeficientes y los  $x_i$  se denominan incógnitas (o números a determinar) y  $b_j$  se denominan términos independientes. Resolver el sistema consiste en calcular las incógnitas para que se cumplan todas las ecuaciones del sistema simultáneamente. Diremos que dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

### 1.6.2 Expresión matricial de un sistema

Cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial del modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

La matriz  $A$  se llama matriz de coeficientes. La matriz  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  se llama matriz de incógnitas y

La matriz  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  se llama matriz de términos independientes

La matriz formada por  $A$  y  $B$  conjuntamente, es decir:

$$(A | B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Se llama matriz ampliada del sistema y se representa por  $(A | B)$  o por  $A^*$ .

### Ejemplo 1.28.

El sistema

$$x + 3y - z = 5$$

$$5x + y = 7$$

$$2x + z = 12$$

escrito matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Y la matriz ampliada es:

$$(A | B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 12 \end{array} \right)$$



**En Matlab:**

```
>> A = [13 - 1; 510; 201]
```

```
A =
```

```
13 -1
```

```
510
```

```
201
```

```
>> B = [5; 7; 12]
```

```
B =
```

```
5
```

```
7
```

```
12
```

```
>> x = inv(A) * B
```

```
x =
```

```
0.3333
```

```
5.3333
```

```
11.3333
```

---

### 1.6.3 Métodos Directos

---

#### 1. Sistema de solución inmediata:

a) **Matriz diagonal**  $A = D$

Se define de la siguiente manera:

$$Dx = b$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cada ecuación se escribe  $d_{ii}x_i = b_i$

y por tanto podemos resolver  $x_i = d_{ii}^{-1}b_i$

---

b) **Matriz triangular superior**  $A = U$

Se define de la siguiente manera:

$$Ux = b$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Empezamos resolviendo la última ecuación

$$u_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = b_n/u_{nn}$$

Las ecuaciones restantes pueden resolverse a partir de ésta para

$$i = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$u_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j = b_i \Rightarrow x_i = \left( b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right) / u_{ii}$$

c) **Matriz triangular inferior**  $A = L$

Se define de la siguiente manera:

$$Lx = b$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Empezamos resolviendo la primera ecuación

$$l_{11}x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = b_1/l_{11}$$

Las ecuaciones restantes pueden resolverse a partir de ésta para

$$i = 2, 3, \dots, n$$

$$l_{ii}x_i + \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j = b_i \Rightarrow x_i = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j \right) / l_{ii}$$

## 2. Métodos de eliminación:

### a) Método de Gauss:

Dado un Sistema de Ecuaciones Lineal  $Ax = b$  con  $A \in M_{n \times n}$  inversible, el principio que rige el método de Gauss para la resolución del sistema se puede resumir en “la determinación de una matriz inversible  $M$  tal que la matriz  $MA$  sea triangular superior”. Este es el proceso llamado de eliminación. Una vez analizado este proceso se resolverá el sistema triangular equivalente  $MAx = Mb$  mediante el método de sustitución retrógrada.

En la práctica no se calcula  $M$ ; sino directamente los productos  $MA$  y  $Mb$ .

El método de Gauss se realiza en tres bloques:

- i) Proceso de eliminación sucesiva de incógnitas, que equivale a la determinación de una matriz  $M$  tal que  $MA$  sea triangular superior.
- ii) Cálculo del vector  $Mb$ ; que se suele realizar simultáneamente al bloque 1.
- iii) Resolución de sistema triangular  $MAx = Mb$  por sustitución retrógrada.

**Ejemplo 1.29.** Resolver por el método de Gauss

$$x - 2y + 5z = 13$$

$$2x - 5y + z = 19$$

$$x + 3y - 2z = -4$$

**Solución.**

Lo escribimos así:

$$\left\{ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 2 & -5 & 1 & 19 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{array} \right\}$$

e indicamos a la izquierda las transformaciones que vamos haciendo para

obtener los ceros. Empezando por 1°:  $a_{31}$ , 2°:  $a_{21}$ , y 3°:  $a_{32}$ .

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 2 & -5 & 1 & 19 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_3 - F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 2 & -5 & 1 & 19 \\ 0 & 5 & -7 & -17 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -7 \\ 0 & 5 & -7 & -17 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{F_3 - 5F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & -52 & -52 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Con lo que obtenemos:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

#### b) Método de Gauss-Jordan:

El Método de Gauss - Jordan o también llamado eliminación de Gauss - Jordan, es un método por el cual pueden resolverse sistemas de ecuaciones lineales con  $n$  números de variables, encontrar matrices y matrices inversas, en este caso desarrollaremos la primera aplicación mencionada.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando este método, se debe en primer lugar anotar los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones lineales en su notación matricial:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right] &\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right] \\ &\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array} \right] &\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & 0 & b_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(n)} \end{array} \right] \end{aligned}$$

- 1) Casi 50 % mas de operaciones aritméticas que la Eliminación Gaussiana.
- 2) Gauss-Jordan (GJ) Eliminación es preferible cuando la inversa de una matriz es requerido.

$$\left[ A \mid I \right]$$

- 3) Aplicar eliminación GJ para convertir A en una matriz identidad.

$$\left[ I \mid A^{-1} \right]$$

### 3. Método de descomposición:

#### a) Método de Doolittle:

Este método es el que iguala a la diagonal principal de la matriz  $L$  a 1.

$$A = LU$$

$$u_{1i} = a_{1i} \quad i = 1 : n \quad l_{11} = 1 \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \quad i = 2 : n$$

$$j = 2 : n \left\{ \begin{array}{l} u_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{ki} \quad i = j : n \\ l_{jj} = 1; \text{ Si } j < n : \quad l_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) / u_{jj} \quad i = j+1 : n \end{array} \right.$$

**Ejemplo 1.30.** Resolver el sistema de ecuación

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 17 \\ 11 \\ 25 \end{bmatrix}$$

**En Matlab:**

`>> [L U] = doolittle(A)`

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 12/10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 10/4 & 25/4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b$$

$$>> y = L \setminus b$$

$$17$$

$$\frac{95}{4}$$

$$-12$$

$$Ux = y$$

$$>> x = U \setminus y$$

$$1$$

$$2$$

$$3$$

La solución sería  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = 3$

**b) Método de Crout:**

Para una matriz cuadrada de rango  $r = n$  la eliminación de Gauss llega al siguiente resultado:

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A este mismo resultado se puede llegar por identificación directa

- A partir de la primera fila de A

$$u_{1j} = a_{1j} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

- A partir de la primera columna de  $\mathbf{A}$

$$a_{j1} = l_{j1}u_{11}; \quad l_{j1} = a_{j1}/u_{11} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

- A partir de la segunda fila de  $\mathbf{A}$

$$a_{2j} = l_{21}u_{1j} + 1 \cdot u_{2j} \quad u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j} = a_{2j} - \frac{u_{12}u_{1j}}{u_{11}} \quad j = 2, \dots, n$$

- A partir de la segunda columna de  $\mathbf{A}$

$$a_{j2} = l_{j1}u_{12} + l_{j2}u_{22}; \quad l_{j2} = \frac{1}{u_{22}}(a_{j2} - l_{j1}u_{12}) \quad j = 3, 4, \dots, n$$

Para la tercera fila y columna de  $\mathbf{A}$

- Elemento de la diagonal

$$a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + 1 \cdot u_{33} \quad u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$$

- Resto de los elementos de la 3<sup>ra</sup> fila

$$a_{34} = l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} \quad u_{34} = a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24}$$

- Elemento de 3<sup>a</sup> columna

$$a_{43} = l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} \quad l_{43} = \frac{1}{u_{33}}(a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23})$$

Para el último elemento de la diagonal

$$a_{44} = l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + 1 \cdot u_{44} \quad u_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34}$$

### En forma general:

- Cálculo de la primera columna de  $\mathbf{L}$

$$l_{i1} = a_{i1}$$

- Cálculo de la primera fila de  $\mathbf{U}$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

- Cálculo alternado de las columnas de L y filas de U

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad j \leq i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}} \quad i \leq j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

**En Matlab:**

`>> [L U] = crout(A)`

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 5/2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b$$

`>> y = L \ b`

$$\frac{17}{4}$$

$$\frac{19}{2}$$

$$3$$

$$Ux = y$$

`>> x = U \ y`

$$1$$

$$2$$

$$3$$

La solución sería  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = 3$



---

## 1.7 Métodos Numéricos para la Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

---

Cuando un sistema de ecuaciones es de tamaño moderado, casi nadie duda en utilizar el método de Gauss en alguna de sus múltiples variantes (incluidas las descomposiciones matriciales). Los métodos iterativos sin embargo se vuelven imprescindibles en problemas con matrices grandes y sparse donde el método de Gauss presenta las dificultades. Una técnica iterativa para resolver un sistema lineal  $Ax = B$  de  $n \times n$  empieza con una aproximación inicial  $x^{(0)}$  a la solución  $x$ , y genera una sucesión de vectores  $\{x^{(k)}\}_{k=0}$  que converge a  $x$ . La mayoría de estas técnicas iterativas involucran un proceso que convierte el sistema  $Ax = B$  en un sistema equivalente de la forma  $x = Tx + c$  para alguna matriz  $T$  de  $n \times n$  y un vector  $c$ . Ya seleccionado el vector inicial  $x^{(0)}$  la sucesión de vectores de solución aproximada se genera calculando

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c; \text{ para cada } k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

### Detalles sobre su implementación:

En un método iterativo no podemos esperar calcular exactamente la solución, sino hallar una aproximación con una tolerancia prefijada. Por tanto debemos fijar un criterio de parada que termine el método cuando la solución se considere suficientemente buena. Un posible criterio es medir la diferencia entre dos iteraciones consecutivas  $\|x_{m+1} - x_m\|$  en alguna norma que queda a elección del programador o del usuario. Si la diferencia es pequeña, se considera que estamos cerca de la solución y se finaliza el método. Ahora, debemos ocuparnos de que se conoce como norma de un vector. Así, dado un vector

$$x := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$


---

Tenemos entre sus normas habituales:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

A continuación veremos tres métodos iterativos: Jacobi, Gauss-Seidel y SOR.

### 1.7.1 Método de Jacobi

Dado un sistema de ecuaciones de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Si se despeja la variable  $x_i$  de cada ecuación se obtiene lo siguiente:

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}}$$

El sistema anterior, puede usarse como una fórmula recursiva, es decir,

$$x_1^{(t+1)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(t)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(t)} - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(t)} + \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2^{(t+1)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(t)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(t)} - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(t)} + \frac{b_2}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(t+1)} = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(t)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(t)} - \cdots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(t)} + \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Puede usarse para obtener los valores de  $x_i^{(t+1)}$  en función de los valores de  $x_i^{(t)}$ .

Si definimos la matriz  $T$  y el vector  $c$  de la siguiente manera,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Se pueden escribir las ecuaciones recursivas en forma matricial:

$$x^{(t+1)} = Tx^{(t)} + c$$

Si denotamos  $x_i^{(t)}$  la coordenada  $i$ -ésima del iterante  $x^{(t)}$ , entonces se tiene la expresión:

$$X_i^{(t+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ - \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij} x_j^{(t)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(t)} + b_i \right]$$

Para  $i = 1, \dots, n$  y  $t = 0, 1, \dots$

Observamos que las  $n$  componentes del vector  $X^{(t+1)}$  se calculan simultáneamente a partir de las componentes de  $X^{(t)}$ . Por eso el método de Jacobi también se conoce como el "método de iteraciones simultáneas".

El criterio de paro es iterar hasta que :

$$\frac{\|X^{(t+1)} - X^{(t)}\|_{\infty}}{\|X^{(t)}\|_{\infty}}$$

O que sea menor que alguna tolerancia predeterminada  $\epsilon > 0$ .

Para este propósito se puede usar cualquier norma conveniente. La que más se usa es la norma:

$$\|X\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

observacion: Si  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  e  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$  son vectores de  $\mathbb{R}^n$ , las distancias entre  $x$  e  $y$  se define como:

$$\|X - Y\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

**Ejemplo 1.31.** Sea el sistema lineal  $Ax = b$ , dado por:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

Solución:

Usando :  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$

Para  $k = 1$

$$x_1^1 = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^0) = \frac{1}{4}[24 - 3(1)] = 5,25000$$

$$x_2^1 = \frac{1}{4}(30 - 3x_1^0 + x_3^0) = \frac{1}{4}[30 - 3(1) + 1] = 7$$

$$x_3^1 = \frac{1}{4}(-24 + x_2^0) = \frac{1}{4}[-24 + 1] = -5,75000$$

Para  $k = 2$

$$x_1^2 = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^1) = \frac{1}{4}[24 - 3(7)] = 0,75$$

$$x_2^2 = \frac{1}{4}(30 - 3x_1^1 + x_3^1) = \frac{1}{4}[30 - 3(5,25000) + (-5,75000)] = 2,12500$$

$$x_3^2 = \frac{1}{4}(-24 + x_2^1) = \frac{1}{4}[-24 + 7] = -4,25000$$

Para  $k = 3$

$$x_1^3 = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^2) = \frac{1}{4}[24 - 3(2,12500)] = 4,40625$$

$$x_2^3 = \frac{1}{4}(30 - 3x_1^2 + x_3^2) = \frac{1}{4}[30 - 3(0,75) + (-4,25000)] = 5,87500$$

$$x_3^3 = \frac{1}{4}(-24 + x_2^2) = \frac{1}{4}[-24 + 2,12500] = -5,468750$$

Para  $k = 32$

$\vdots$

$$x_1^{32} = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^{31}) = \frac{1}{4}[24 - 3(4,00260)] = 2,99805$$

$$x_2^{32} = \frac{1}{4}(30 - 3x_1^{31} + x_3^{31}) = \frac{1}{4}[30 - 3(3,00195) - 5,00065] = 3,99837$$

$$x_3^{32} = \frac{1}{4}(-24 + x_2^{31}) = \frac{1}{4}[-24 + 4,00260] = -4,99935$$

En Matlab:

`x=jacobi(A,b,x0,delta, max1)`

```
>> A=[4 3 0 ; 3 4 -1 ; 0 -1 4]
```

```
A =
```

```
    4    3    0
```

```
    3    4   -1
```

```
    0   -1    4
```

```
>> b=[24;30;-24]
```

```
b =
```

```
    24
```

```
    30
```

```
   -24
```

```
>> x0=[1; 1; 1]
```

```
x0 =
```

```
    1
```

```
    1
```

```
    1
```

```
x=jacobi(A,b,x0,0.001, 32)
```

```
x =
```

```
    2.9980
```

```
    3.9984
```

```
   -4.9993
```

---

### 1.7.2 Método de Gauss-Seidel

---

El método de Gauss-Seidel, es un método iterativo y por lo mismo, resulta ser un método bastante eficiente. Comenzamos con nuestro sistema de ecuaciones:

---

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1)$$

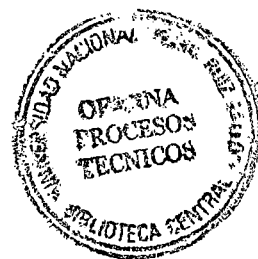
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \quad (n)$$

En las ecuaciones recursivas, es posible utilizar inmediatamente los valores obtenidos para calcular los siguientes valores, es decir,

$$\begin{aligned} x_1^{(t+1)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(t)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(t)} - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(t)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(t+1)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(t+1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(t)} - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(t)} + \frac{b_2}{a_{22}} \\ x_3^{(t+1)} &= -\frac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(t+1)} - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(t+1)} - \cdots - \frac{a_{3n}}{a_{33}}x_n^{(t)} + \frac{b_3}{a_{33}} \\ &\vdots \\ x_n^{(t+1)} &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(t+1)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(t+1)} - \cdots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(t+1)} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned}$$



El utilizar los valores de  $x_i$  que se acaban de calcular para calcular los siguientes valores permite que el método converja más rápidamente a una solución.

Se pueden escribir las ecuaciones recursivas en forma matricial:

$$x_i = T(i, :)x + c_i$$

donde  $T(i, :)$  representa la fila  $i$  de la matriz  $T$ , y la regla debe aplicarse en orden para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Si denotamos  $x_i^{(t+1)}$  la coordenada  $i$ -ésima del iterante  $x^{(t+1)}$ , entonces se tiene la expresión:

$$X_i^{(t+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ - \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij}x_j^{(t)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(t)} + b_i \right]$$

Para  $i = 1, 2, \dots$ , y  $t = 0, 1, \dots$

**Ejemplo 1.32.** Sea el sistema lineal  $Ax = b$ , dado por:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

Solución:

Utilizando el criterio de convergencia se tiene:

$$|4| > |3| + |0| \longrightarrow 4 > 3$$

$$|4| > |3| + |-1| \longrightarrow 4 > 4$$

$$|4| > |0| + |-1| \longrightarrow 4 > 1$$

Como el criterio converge, entonces aplicaremos el método de sobre-relajación, en el cual el parámetro  $w > 1$ , entonces asumimos  $w = 1,25$ .

Luego, aplicando el algoritmo de Gauss - Seidel :

Con  $w = 1,25$ , se tiene:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{4}(24 - x_2^{(k-1)})$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{4}(30 - x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)})$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{4}(-24 + x_2^{(k)})$$

Usando  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$

Para  $k = 1$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^{(0)}) = \frac{1}{4}[24 - 3(1)] = 5,25000$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(30 - 3x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}[30 - 3(5,25000) + 1] = 3,812500$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(-24 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{4}[-24 + 3,812500] = -5,046875$$

Para  $k = 2$

---

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{4}[24 - 3(3,812500)] = 3,1406250$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(30 - 3x_1^{(2)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}[30 - 3(3,1406250) + (-5,046875)] = 3,8828125$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{4}(-24 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{4}[-24 + 3,8828125] = -5,0292969$$

Para  $k = 3$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^{(2)}) = \frac{1}{4}[24 - 3(3,8828125)] = 3,0878906$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(30 - 3x_1^{(3)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{4}[30 - 3(3,0878906) + (-5,0292969)] = 3,9267578$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{4}(-24 + x_2^{(3)}) = \frac{1}{4}[-24 + 3,9267578] = -5,0183105$$

⋮

Para  $k = 7$

$$x_1^{(7)} = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^{(6)}) = \frac{1}{4}[24 - 3(3,9821186)] = 3,0134111$$

$$x_2^{(7)} = \frac{1}{4}(30 - 3x_1^{(7)} + x_3^{(6)}) = \frac{1}{4}[30 - 3(3,0134111) + (-5,0044703)] = 3,9888241$$

$$x_3^{(7)} = \frac{1}{4}(-24 + x_2^{(7)}) = \frac{1}{4}[-24 + 3,9888241] = -5,0027940$$

Luego los resultados de las siete iteraciones lo presentamos en la siguiente tabla:

$K$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.000000	1.000000	1.000000
1	5.250000	3.812500	-5.0429269
2	3.1406250	3.8828125	-5.0292969
3	3.0878906	3.9267578	-5.0183105
4	3.0549317	3.9542236	-5.0114441
5	3.0343323	3.9713898	-5.0071526
6	3.0214577	3.9821186	-5.0044703
7	3.0134111	3.9888241	-5.0027940



**En Matlab:**

```
X=gseid(A,b,x0,delta, max1)
```

```
>> A=[4 3 0 ; 3 4 -1 ; 0 -1 4]
```

```
A =
```

```
    4    3    0
```

```
    3    4   -1
```

```
    0   -1    4
```

```
>> b=[24;30;-24]
```

```
b =
```

```
    24
```

```
    30
```

```
   -24
```

```
>> x0=[1;1;1]
```

```
x0 =
```

```
    1
```

```
    1
```

```
    1
```

```
>> X=gseid(A,b,x0,0.001, 7)
```

```
X =
```

```
    3.0134
```

```
    3.9888
```

```
   -5.0028
```

---

### 1.7.3 Método de SOR

---

Dado un sistema de ecuaciones lineales:

---

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots &\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Usando :

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = \dots = x_n^{(0)} = 1$$

El algoritmo a usar es:

$$X_i^{(k)} = (1 - w)X_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij}X_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}X_j^{(k-1)} \right]$$

Esto es equivalente a:

$$x_1^{(k)} = (1 - w)x_1^{(k-1)} + \frac{w}{a_{11}} [b_1 - (a_{12}x_2^{(k-1)} + a_{13}x_3^{(k-1)} + a_{14}x_4^{(k-1)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k-1)})]$$

$$x_2^{(k)} = (1 - w)x_2^{(k-1)} + \frac{w}{a_{22}} [b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k-1)} + a_{24}x_4^{(k-1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k-1)})]$$

$$x_3^{(k)} = (1 - w)x_3^{(k-1)} + \frac{w}{a_{33}} [b_3 - (a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{34}x_4^{(k-1)} + \dots + a_{3n}x_n^{(k-1)})]$$

$\vdots$

$$x_n^{(k)} = (1 - w)x_n^{(k-1)} + \frac{w}{a_{nn}} [b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{n3}x_3^{(k)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})]$$

Observacion:

1 La condición de convergencia es que la matriz sea diagonalmente dominante, es decir:

$$\begin{aligned}
|a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}| \\
|a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| + \dots + |a_{2n}| \\
|a_{33}| &> |a_{31}| + |a_{32}| + \dots + |a_{3n}| \\
\vdots & \\
|a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{n,n-1}|
\end{aligned}$$

- 2 Los valores iniciales se pueden asumir en forma diferente de cero.
- 3 Cuando al sistema de ecuaciones lineales es convergente al método de Gauss-Seidel, se asume un parámetro  $W > 1$ , el cual sirve para acelerar la convergencia. También recibe el nombre de método de SOBRELAJACIÓN.
- 4 Cuando el sistema de ecuaciones lineales es divergente al método de Gauss-Seidel, se asume el parámetro  $0 < W < 1$ , el cual sirve para obtener la convergencia, también recibe el nombre de método de SUB-RELAJACIÓN.

**Ejemplo 1.33.** Sea el sistema lineal  $Ax = b$ , dado por:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

Solución:

Utilizando el criterio de convergencia se tiene:

$$|4| > |3| + |0| \longrightarrow 4 > 3$$

$$|4| > |2| + |-1| \longrightarrow 4 > 3$$

$$|4| > |0| + |-1| \longrightarrow 4 > 1$$

Como el criterio converge, entonces aplicaremos el método de sobre-relajación, en el cual el parámetro  $w > 1$ , entonces asumimos  $w = 1,25$ .

Luego, aplicando el algoritmo de SOR tenemos:

Con  $w = 1,25$ , se tiene:

$$x_1^{(k)} = (1 - 1,25)x_1^{(k-1)} + \frac{1,25}{4}[24 - 3x_2^{(k-1)}]$$

$$x_2^{(k)} = (1 - 1,25)x_2^{(k-1)} + \frac{1,25}{4}[30 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}]$$

$$x_3^{(k)} = (1 - 1,25)x_3^{(k-1)} + \frac{1,25}{4}[-24 + x_2^{(k)}]$$

Usando  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$

Para  $k = 1$

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= (1 - 1,25)x_1^{(0)} + \frac{1,25}{4}(24 - 3x_2^{(0)}) = -0,25(1) + 0,3125[24 - 3(1)] \\&= -0,25 + 7,5 - 0,9375 = 6,3125\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2^{(1)} &= (1 - 1,25)x_2^{(0)} + \frac{1,25}{4}(30 - 2x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) = -0,25(1) + 0,3125[30 - 2(6,3125) + 1] \\&= -0,25 + 9,375 - 3,95703 + 0,3125 = 5,4807\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3^{(1)} &= (1 - 1,25)x_3^{(0)} + \frac{1,25}{4}(-24 + x_2^{(1)}) = -0,25(1) + 0,3125(-24 + 5,4807) \\&= -0,25 - 7,5 + 1,71272 = -6,03728\end{aligned}$$

Para  $k = 2$

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= (1 - 1,25)x_1^{(1)} + \frac{1,25}{4}(24 - 3x_2^{(1)}) = (-0,25)(6,3125) + 0,3125[24 - 3(5,4807)] \\&= -1,57813 + 7,5 - 5,13816 = 0,78371\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2^{(2)} &= (1 - 1,25)x_2^{(1)} + \frac{1,25}{4}(30 - 2x_1^{(2)} + x_3^{(1)}) \\&= (-0,25)(5,4807) + 0,3125[30 - 2(0,78371) + (-6,03728)] \\&= -1,370175 + 9,375 - 0,48982 - 1,88665 = 5,628355\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3^{(2)} &= (1 - 1,25)x_3^{(1)} + \frac{1,25}{4}(-24 + x_2^{(2)}) = (-0,25)(-6,03728) + 0,3125(-24 + 5,628355) \\&= 1,50932 - 7,5 + 1,758861 = -4,231819\end{aligned}$$

---

Para  $k = 3$

$$\begin{aligned}x_1^{(3)} &= (1 - 1,25)x_1^{(2)} + \frac{1,25}{4}(24 - 3x_2^{(2)}) = \\&= (-0,25)(0,78371) + 0,3125[24 - 3(5,628355)] = 1,973417\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2^{(3)} &= (1 - 1,25)x_2^{(2)} + \frac{1,25}{4}(30 - 2x_1^{(3)} + x_3^{(2)}) \\&= (-0,25)(5,628355) + 0,3125[30 - 2(1,973417) - 4,231819] = 12,44752\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3^{(3)} &= (1 - 1,25)x_3^{(2)} + \frac{1,25}{4}(-24 + x_2^{(3)}) \\&= (-0,25)(-4,231819) + 0,3125(-24 + 12,44752) = -3,86015\end{aligned}$$

⋮

Luego los resultados de las siete iteraciones lo presentamos en la siguiente tabla:

$k$	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$
0	1.000000	1.000000	1.000000
1	6.3125	5.4807	-6.03728
2	0.78371	5.628355	-4.231819
3	1.973417	12.44752	-3.86015

### En Matlab:

SOR(a,b,om,x0,nmax,toll)

```
>> a=[4 3 0 ; 2 4 -1 ; 0 -1 4]
```

```
a =
```

```
4 3 0
```

```
2 4 -1
```

```
0 -1 4
```

```
>> b=[24;30;-24]
```

b =

24

30

-24

>> x0=[1;1;1]

x0 =

1

1

1

>> x=SOR(a,b,1.25,x0,7,0.001)

x =

1.9990 5.3331 -4.6651

---

# Capítulo 2:

## Electricidad

---

### 2.1 Red Eléctrica

---

Una red eléctrica o circuito eléctrico, es una colección de elementos eléctricos interconectados en alguna forma específica.

El propósito de un circuito eléctrico consiste en mover o transferir cargas a lo largo de trayectorias especificadas. Este movimiento de cargas constituye una corriente eléctrica, denotada por las letras  $i$  o  $I$ , tomadas de la palabra francesa intensité.

En la teoría de circuitos, la corriente es generalmente especificada como el movimiento de cargas positivas. Esta convención fue propuesta por un gran científico americano, inventor y diplomático, **Benjamín Franklin** (1706-1790) quien supuso que la electricidad viajaba de lo positivo a lo negativo.

La teoría de circuitos eléctricos comenzó en realidad el 20 de marzo de 1880, cuando el físico italiano **Alessandro Volta** (1745-1827) anunció su invento de la batería eléctrica. Este magnífico aparato le permitió a Volta producir corriente eléctrica, un flujo de electricidad continuo y estable, en oposición a la electricidad estática, producida en descargas por máquinas eléctricas anteriores como la botella de Leyden y el electróforo del mismo Volta.

**Definición 2.1.** Una red eléctrica o circuito eléctrico es aquel conjunto de elementos que suministran energía eléctrica, (generadores, baterías, etc.), y elementos que la consumen, (resistencias), unidos unos a continuación de otros, formando recorridos cerrados por la corriente

**Definición 2.2. Voltaje:** Llamado también diferencia de potencial o tensión, es la energía que requiere para mover una carga a través de un elemento, y se mide en voltios (V).

**Definición 2.3. Corriente Eléctrica:** Movimiento de cargas a lo largo de trayectorias especificadas. La corriente se mide en Amperios.

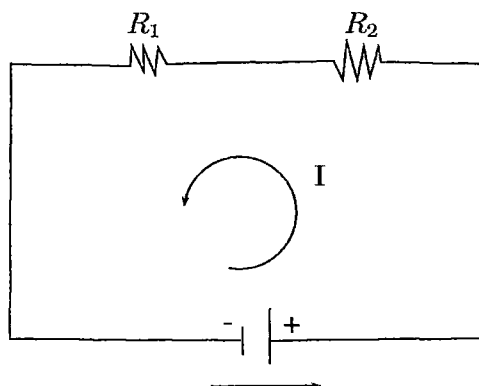
**Definición 2.4. Intensidad de Corriente Eléctrica:** Magnitud física escalar que nos da la cantidad de carga que pasa a través de la sección recta de un conductor en cada unidad de tiempo.

**Definición 2.5. Fuente:** Dispositivo que genera diferencia de potencial, posibilitando movimiento de electricidad, tal como: pilas, baterías y generadores de corriente.

Las fuentes eléctricas (de corriente continua), tienen dos regiones o zonas denominadas "POLOS." "BORNES"; un polo positivo de elevado potencial, y otro negativo, de bajo potencial.

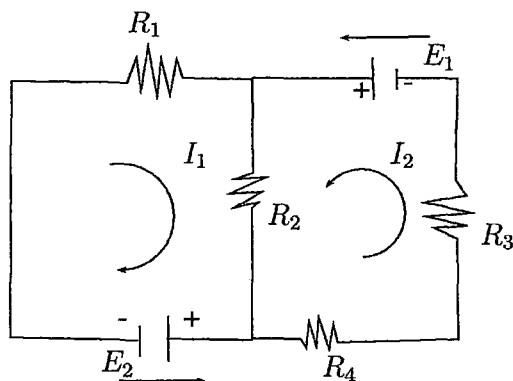
### Características de un circuito eléctrico

1. **Circuitos simples:** Se llaman así cuando la corriente se desplaza en un solo recorrido; por ejemplo

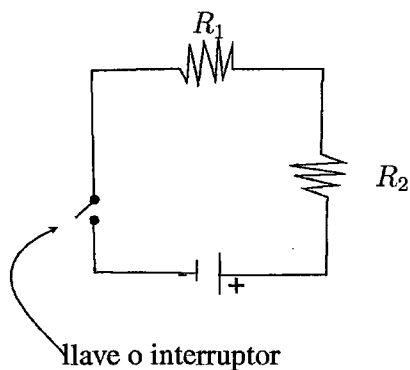




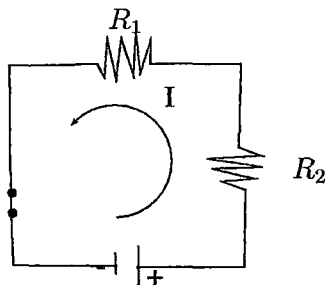
2. **Circuitos complejos:** Se llaman así cuando la corriente se desplaza por varios recorridos a los cuales se les llaman "mallas" por ejemplo:



3. **Circuitos abiertos:** Se dice que un circuito está abierto cuando no hay circulación de corriente, es decir se interrumpe el paso de corriente mediante un interruptor.



4. **Circuitos cerrados:** Se dice que un circuito está cerrado cuando hay circulación de corriente eléctrica.



---

## 2.2 Ley de Ohm

---

La corriente fluye por un circuito eléctrico siguiendo varias leyes definidas.

La ley básica del flujo de la corriente es la ley de Ohm, así llamada en honor a su descubridor, el físico alemán Georg Ohm.

Según la ley de Ohm, la cantidad de corriente que fluye por un circuito formado por resistencias puras es directamente proporcional a la fuerza electromotriz aplicada al circuito, e inversamente proporcional a la resistencia total del circuito.

Esta ley suele expresarse mediante la fórmula:

$$V = I \times R \quad (2.1)$$

Donde:

V: Diferencia de potencial o voltaje aplicado a la resistencia, Voltios

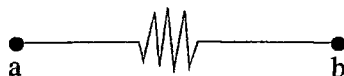
I: Corriente que atraviesa la resistencia, Amperios

R: Resistencia, Ohmios

La ley de Ohm se aplica a todos los circuitos eléctricos, tanto a los de corriente continua (CC) como a los de corriente alterna (CA), aunque para el análisis de circuitos complejos y circuitos de CA deben emplearse principios adicionales que incluyen inductancias y capacitancias.

**Definición 2.6. Resistencia:** Dificultad variable que opone un conductor al paso de la corriente. La resistencia se mide en ohmios.

El símbolo de la resistencia es:



### 2.2.1 Circuito en serie o cascada

Cuando se colocan las resistencias una a continuación de otra.

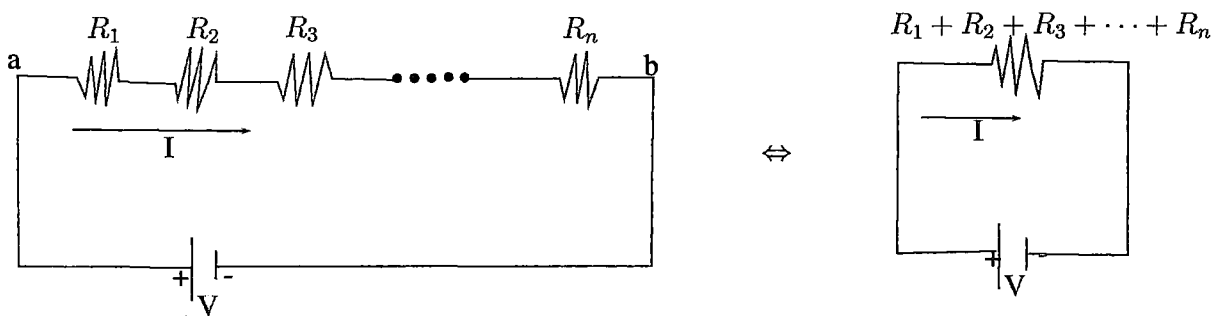


Figura 2.1: Circuito en serie

#### Características:

1. Por todas las resistencias circula la misma corriente.

$$I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_n = I \quad (2.2)$$

2. La suma de los voltajes en cada resistencia es igual al voltaje en la resistencia equivalente.

$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \quad (2.3)$$

3. La resistencia equivalente es:

$$R_E = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (2.4)$$

Por la ley de ohm de la ecuación (2.1) , (2.3) y (2.4) se tiene:

$$R_E I = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots + R_n I$$

## 2.2.2 Circuito en paralelo

En un circuito en paralelo los dispositivos eléctricos, por ejemplo las lámparas incandescentes o las celdas de una batería, están dispuestos de manera que todos los polos, electrodos y terminales positivos (+) se unen en un único conductor, y todos los negativos (-) en otro, de forma que cada unidad se encuentra, en realidad, en una derivación paralela. El valor de dos resistencias iguales en paralelo es igual a la mitad del valor de las resistencias componentes y, en cada caso, el valor de las resistencias en paralelo es menor que el valor de la más pequeña de cada una de las resistencias implicadas. Si las resistencias están en paralelo, el valor total de la resistencia del circuito se obtiene mediante la fórmula:

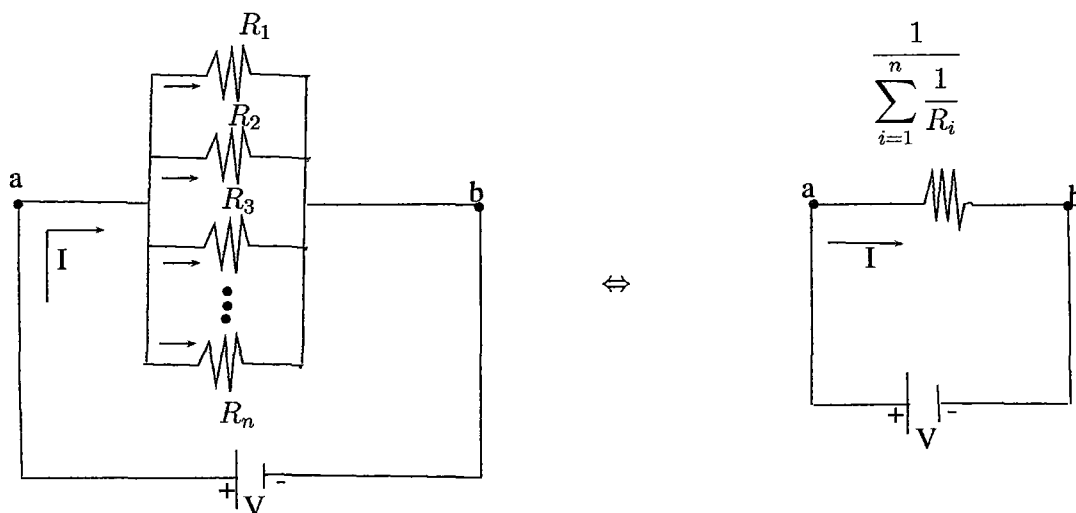


Figura 2.2: Circuito en paralelo.

### Características:

1. La corriente que circula por la resistencia equivalente es igual a la suma de las

corrientes que circulan por cada una de las resistencias.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n \quad (2.5)$$

2. Como todas las resistencias tienen sus terminales comunes:

$$V_1 = V_2 = V_3 = \cdots = V_n = V \quad (2.6)$$

3. La resistencia equivalente es:

$$R_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \quad (2.7)$$

Donde:

$R_e$ : resistencia equivalente de la disposición, ohmios

$R_i$ : resistencia individual i, ohmios

De la ecuación (2.1) se tiene:

$$I = \frac{V}{R}$$

Luego de (2.5) se obtiene:

$$\frac{V}{R_E} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \cdots + \frac{V_n}{R_n}$$

De la ecuación (2.6)

$$\frac{V}{R_E} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \cdots + \frac{V}{R_n}$$

- Para  $n$  resistencias iguales

$$R_E = \frac{R}{n}$$

- Para dos resistencias diferentes:

$$R_E = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

---

## 2.3 Leyes de Kirchhoff

Las leyes de Kirchhoff fueron formuladas por Gustav Kirchhoff en 1845, mientras aún era estudiante. Son muy utilizadas en ingeniería eléctrica para obtener los valores de la corriente y el potencial en cada punto de un circuito eléctrico. Surgen de la aplicación de la ley de conservación de la energía.

Estas leyes nos permiten resolver los circuitos utilizando el conjunto de ecuaciones al que ellos responden.

### 2.3.1 La primera Ley de Kirchhoff

Llamada también **ley de nudos** ; establece que la suma de corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de corrientes que salen del mismo.

$$\sum_{n=i}^N I_n = 0 \quad (2.8)$$

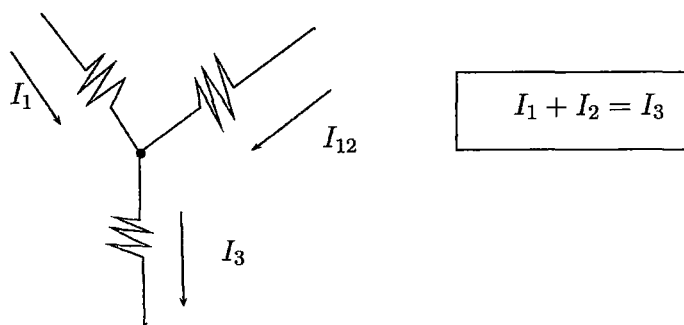


Figura 2.3: Circuito básico con un nudo.

**Ejemplo 2.1.** Encontrar la corriente  $I$  de la siguiente figura.

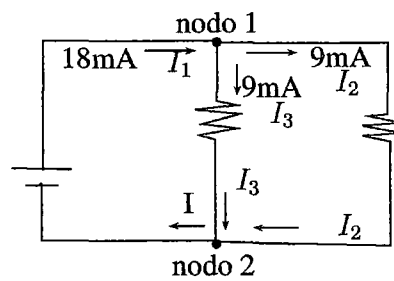


Figura 2.4: Aplicación de la primera ley de Kirchoff.

Es decir que en el nodo 1 podemos decir que

$$I_1 = I_2 + I_3$$

y reemplazando valores: que

$$18mA = 9mA + 9mA$$

y que en el nodo 2

$$I = I_2 + I_3 = 18mA$$

Es obvio que las corriente  $I_1$  e  $I$  son iguales porque lo que egresa de la batería debe ser igual a lo que ingresa.

### 2.3.2 Segunda Ley de Kirchhoff

Llamada también **ley de mallas**; establece que en una trayectoria cerrada (malla) la suma algebraica de las fem debe ser igual a la suma algebraica de las caídas de potencial en las resistencias.

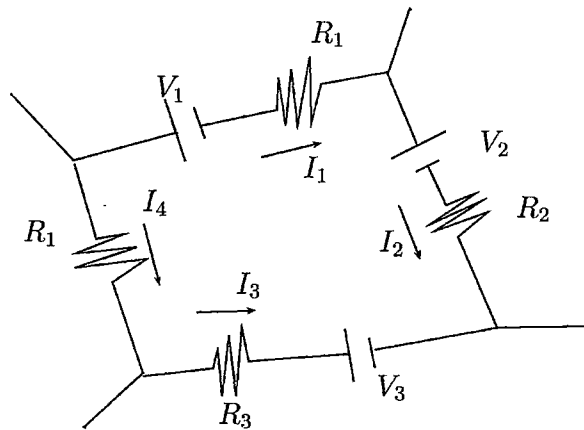


Figura 2.5: Aplicación de la segunda ley de Kirchhoff.

**Matemáticamente**

$$\sum V = \sum IR \quad (2.9)$$

$$\sum_{n=1}^N V_n = 0 \quad (2.10)$$

Esta ley es un enunciado de la conservación de la energía.

- Los signos de los voltajes serán considerados:
  - Positivos: Al ir de + a - (de mayor a menor potencial).
  - Negativos: Al ir de - a + (de menor a mayor potencial).



## Capítulo 3:

# Aplicaciones del Sistemas de Ecuaciones Lineales de Dos a Más Variables para la Solución de Problemas de Redes Eléctricas

---

Este capítulo describe dos maneras para formular un conjunto de ecuaciones linealmente independientes, de un circuito lineal. El primer método, el análisis nodal, entrega la solución del circuito en términos de un conjunto de variables de voltajes de nodo linealmente independientes. El segundo método es el análisis de mallas, el cual halla la solución para un circuito plano usando un conjunto de variables de corriente de malla linealmente independiente.

### 3.1 Análisis de circuitos por el método nodal

---

El análisis nodal formula una solución de circuito usando un conjunto de ecuaciones linealmente independientes según la ley de Kirchhoff de corrientes, escritas en términos de voltajes de nodo. Usando los valores de estos voltajes de nodo y los valores de las

fuentes independientes, se puede determinar el valor de cualquier variable restante del circuito. Se asume que el circuito es propio. Un circuito propio no tiene fuentes de voltaje o inductancias en serie y no tiene fuentes de corriente o conjuntos de condensadores en paralelo. El problema con una fuente de voltaje o inductancias en serie es que la corriente en el lazo no tiene un único valor. Las fuentes de corriente o conjunto de condensadores en paralelo crean circuitos separados que no tienen un único voltaje entre un nodo en un punto y otro nodo en otro punto.

### **3.1.1 Análisis nodal con fuentes de corriente independientes**

---

El análisis nodal de un circuito lineal que tiene  $n+1$  nodos esenciales implica seleccionar un nodo de referencia y escribir un conjunto de  $n$  ecuaciones independientes mediante la ley de Kirchhoff de corrientes, en cada uno de los nodos seleccionados en términos de los voltajes de nodos. Estos voltajes de nodo constituyen un conjunto linealmente independiente de variables de solución. Si el circuito solo tiene conductancias y fuentes de corriente, se puede escribir el conjunto de ecuaciones independientes de forma matricial directamente inspeccionando el circuito. Este hecho proviene directamente de la forma de la ley de Kirchhoff de corrientes. Cada conductancia en el circuito se conecta entre dos nodos y transporta una corriente proporcional a ambos: la diferencia entre los voltajes de nodo asociados y el valor de conductancia. Si la secuencia de los voltajes de nodo en el vector solución del voltaje de nodo es la misma como para las ecuaciones de la ley de Kirchhoff de corrientes, entonces las ecuaciones de nodo tienen una diagonal simétrica. Por ejemplo, si una conductancia  $G_A$  está conectada desde el nodo  $i$  al nodo  $j$  entonces los términos mostrados en la ecuación 3.1 aparecen en las ecuaciones de la ley de Kirchhoff de corrientes.

---

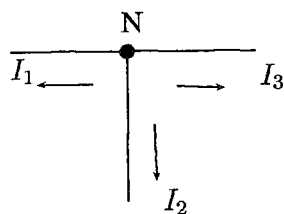
$$\begin{array}{rcl}
& \vdots & \\
i & \cdots + G_A(V_{N_i} - V_{N_j}) + \cdots & = \cdots \\
& \vdots & \\
j & \cdots + G_A(V_{N_j} - V_{N_i}) + \cdots & = \cdots \\
& \vdots &
\end{array} \tag{3.1}$$

El coeficiente  $G_A$  aparece como una entrada positiva en la ley de Kirchhoff de corrientes (primera ley de Kirchhoff) en las posiciones  $i$ -ésima y  $j$ -ésima de la diagonal y como una entrada negativa en la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna, y en la  $j$ -ésima fila e  $i$ -ésima columna. Si una conductancia está conectada entre el nodo  $i$  y el nodo de referencia, entonces esta conductancia aparece solamente como un término positivo en la posición  $i$ -ésima de la diagonal.

#### Los pasos en el método de análisis nodal son los siguientes:

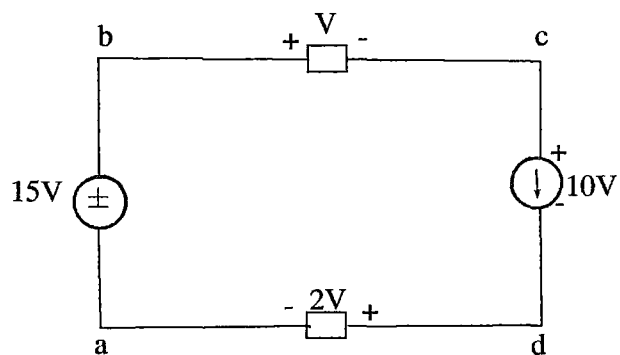
1. Se cuenta el número de nodos principales o uniones del circuito.
2. Se enumeran los nodos como  $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$  y los dibujamos en el diagrama del circuito. Los voltajes en estos nodos se denominan  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  respectivamente.
3. Se escoge uno de estos nodos como la referencia o tierra y se le asigna un voltaje de cero.
4. En cada nodo excepto en el nodo de referencia aplicamos la **Primera Ley de Kirchhoff**.

Por ejemplo, para el siguiente nodo aplicamos la primera ley de Kirchhoff.



$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

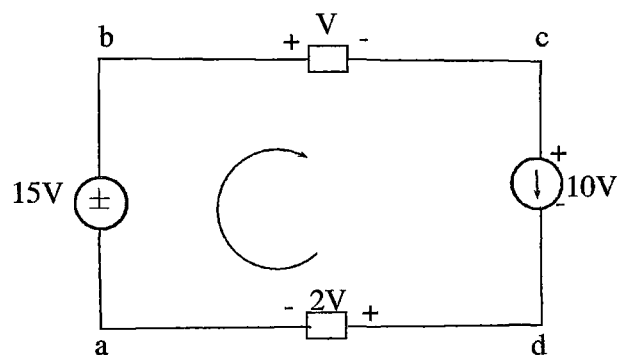
**Ejemplo 2.2.** Encontrar el voltaje  $V$  en la siguiente figura.



**Solución.**

Empezando el recorrido de la malla en el sentido de las manecillas del reloj en el punto

a.



$$-15 + V + 10 + 2 = 0$$

De donde

$$V = 3V$$

5. Se expresa las corrientes en cada ramal en términos de los voltajes nodales en cada uno de los extremos, utilizando la **ley de Ohm**.

**Ejemplo 3.1.** Analizar el siguiente circuito

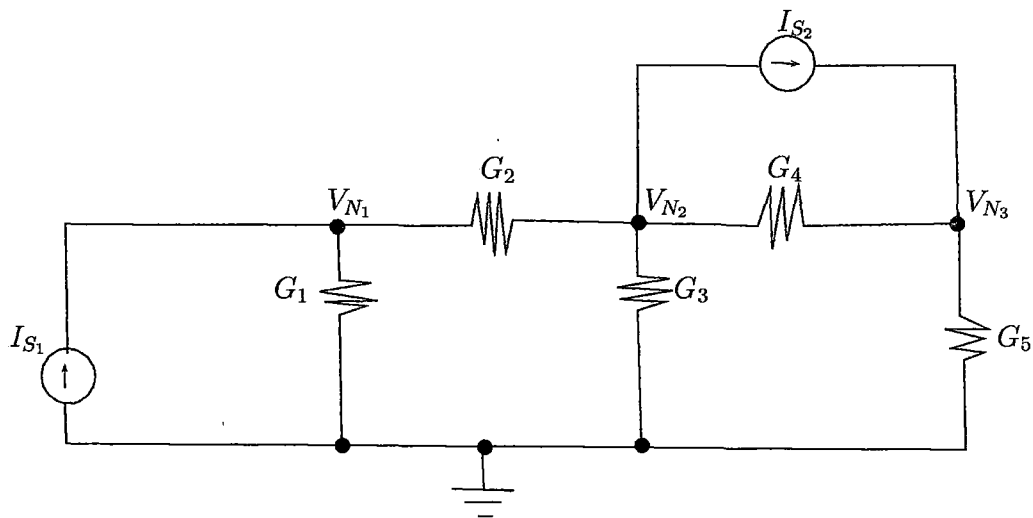
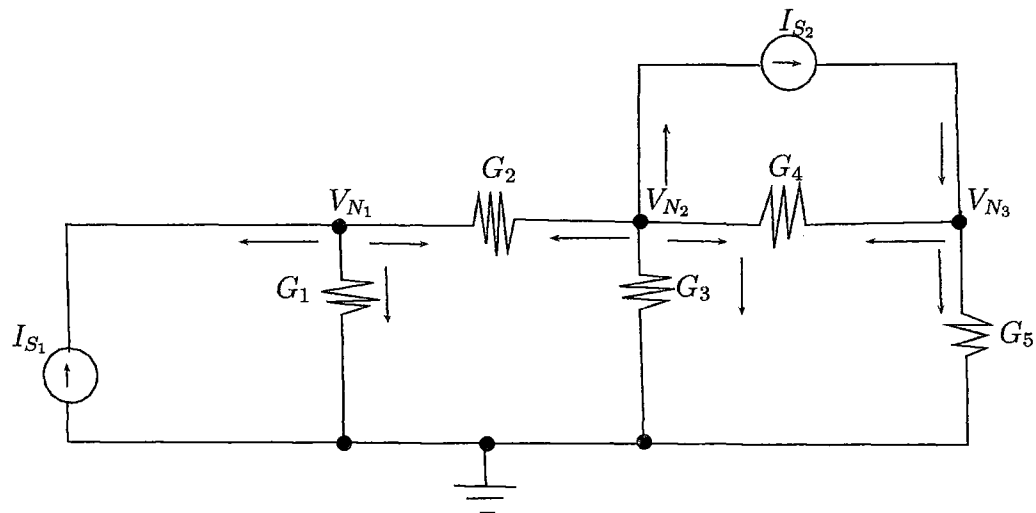


Figura 3.1: Circuito simple de nodos.

**Solución.**



- a) Las tres ecuaciones según la primera ley de Kirchhoff:

$$G_1 V_{N1} + G_2 (V_{N1} - V_{N2}) = I_{S1} \quad (3.2)$$

$$G_2(V_{N_2} - V_{N_1}) + G_3V_{N_2} + G_4(V_{N_2} - V_{N_3}) = -I_{S_2} \quad (3.3)$$

$$G_4(V_{N_3} - V_{N_2}) + G_5V_{N_3} = I_{S_2} \quad (3.4)$$

b) Agrupando los coeficientes de cada nodo de voltaje

$$(G_1 + G_2)V_{N_1} - G_2V_{N_2} = I_{S_1} \quad (3.5)$$

$$-G_2V_{N_1} + (G_2 + G_3 + G_4)V_{N_2} - G_4V_{N_3} = -I_{S_2} \quad (3.6)$$

$$-G_4V_{N_2} + (G_4 + G_5)V_{N_3} = I_{S_2} \quad (3.7)$$

c) Escribiendo estas ecuaciones en forma matricial

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N_1} \\ V_{N_2} \\ V_{N_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{S_1} \\ -I_{S_2} \\ I_{S_2} \end{bmatrix}$$

Se puede escribir esta matriz solución directamente inspeccionando el circuito. Cada término sobre la diagonal resulta de la sumatoria de las conductancias que conectan a cada nodo. Estos términos son expresiones de autoconductancia. Cada término de conductancia mutua fuera de la diagonal es la suma negativa de las conductancias que se conectan entre pares de nodos.

Los voltajes de nodos desconocidos se determinan con una ecuación matricial cuya forma sea:

$$[G][V] = [I_S] \quad (3.8)$$

Los vectores  $[V]$  e  $[I_S]$  representan  $N \times 1$  arreglos de columna

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} I_{S_1} \\ I_{S_2} \\ \vdots \\ I_{S_N} \end{bmatrix}$$

Donde:

$V_N$  = Voltaje de nodo desconocido en el nodo  $n$

$I_{S_N}$  = Corriente de fuente equivalente neta que fluye hacia el nodo  $n$ .

Los elementos del vector fuente-corriente equivalente  $[I_S]$  pueden ser positivos, negativos o cero según la configuración del circuito.

La **matriz conductancia**  $[G]$  en la ecuación (3.8) representa  $N \times N$  ordenaciones en cuadro

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \cdots & -G_{1N} \\ -G_{21} & G_{22} & \cdots & -G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{N1} & -G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix}$$

Donde:

$G_{NN}$  Suma de conductancias conectadas al nodo  $n$ .

$G_{NM} = G_{MN}$  Conductancia equivalente que conecta directamente los nodos  $n$  y  $m$ .

Sistema de  $m$  ecuaciones con  $m$  voltajes nodales desconocidos (donde  $m$  es menor en 1 que el número de nodos;  $m=n-1$ ). Las ecuaciones son de la siguiente forma:

$$\begin{cases} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \cdots + G_{1m}V_m & = I_1 \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + \cdots + G_{2m}V_m & = I_2 \\ \vdots & \vdots & = \vdots \\ G_{m1}V_1 + G_{m2}V_2 + \cdots + G_{mm}V_m & = I_m \end{cases}$$

- El sistema de ecuaciones para los  $m$  voltajes nodales  $V_1, V_2, \dots, V_m$  se resuelve utilizando descomposición LU, Gauss-Seidel, Jacobi.

### 3.1.2 Análisis nodal con supernodos

La existencia de una fuente de voltaje en un circuito simplifica y al mismo tiempo complica el método de análisis nodal. Cada fuente de voltaje reduce el número de voltajes de nodo desconocidos en uno. El número de ecuaciones independientes de acuerdo a la

primera ley de Kirchhoff se reduce a

$$N^{\circ} \text{ de ecuaciones independientes} = n - n_{fv} \quad (3.9)$$

donde  $n_{fv}$  es el número de fuentes de voltajes del circuito. Una fuente de voltaje que está conectada entre un nodo y el nodo de referencia identifica ese voltaje de nodo.

Una fuente de voltaje que conecta dos nodos diferentes al nodo de referencia identifica uno de los voltajes de nodo en términos del otro, eliminando uno de los voltajes de nodo como una incógnita en la solución. Al mismo tiempo, cada fuente de voltaje en el circuito tiene una corriente que en algunos casos se puede determinar. Dicha corriente se determina inmediatamente. Cada fuente de voltaje elimina una ecuación del conjunto de ecuaciones entregando la solución del voltaje de nodo. Debido a que cada una de las ecuaciones restantes es esencial para completar el conjunto de ecuaciones linealmente independientes necesarias para determinar los voltajes de nodo, dichas ecuaciones se denominan ecuaciones esenciales de la primera ley de Kirchhoff.

Para una fuente de voltaje conectada entre un nodo y el nodo de referencia, la ecuación para el nodo que no es referencia no es una ecuación esencial, pero se puede usar para calcular las corrientes en las fuentes de voltaje, posteriormente. Para una fuente de voltaje que no está conectada al nodo de referencia, la ecuación para cualquiera de los nodos incluye la corriente de la fuente de voltaje, ninguna de estas ecuaciones es esencial. Para la primera ley de Kirchhoff sin embargo, la suma de estas dos ecuaciones no depende de la corriente de la fuente de voltaje, porque esta corriente se da como un término positivo en una de las ecuaciones y como un término negativo en la otra. La adición de dos ecuaciones entrega una ecuación que no incluye la corriente de la fuente de voltaje. Si no hay más fuentes de voltaje conectadas a este par de nodos, este par de nodos conforman un supernodo.

Generalmente, un supernodo es un conjunto de nodos que contienen unos voltajes de nodo que dependen solamente de un voltaje de nodo y un conjunto de fuentes de voltaje.

---



La ecuación del supernodo consiste de una sumatoria de corrientes que salen de una superficie que encierra el grupo de nodos. Esta ecuación de supernodo iguala la suma de ecuaciones individuales para cada nodo en el conjunto de supernodo. La sumatoria de las ecuaciones de nodo formando la ecuación del supernodo elimina las corrientes individuales de las fuentes de voltaje, ya que cada corriente de la fuente de voltaje aparece dos veces, primero como un término positivo y luego como un término negativo.

### Ejemplo 3.2. Circuito con fuentes de voltaje

Para el circuito mostrado en la figura 3.2

- Seleccione un conjunto independiente de nodos o supernodos. Defina todos los voltajes de nodo y supernodo. Dibuje la superficie que representa el supernodo.
- Escriba las ecuaciones para cada nodo en el supernodo o sume estas ecuaciones para obtener la ecuación del supernodo.
- Escriba la(s) ecuación(es) restante(s) para el circuito.
- Cambie el conjunto de ecuaciones esenciales, agrupando coeficientes.
- Expresa este conjunto de ecuaciones como una ecuación matricial única.

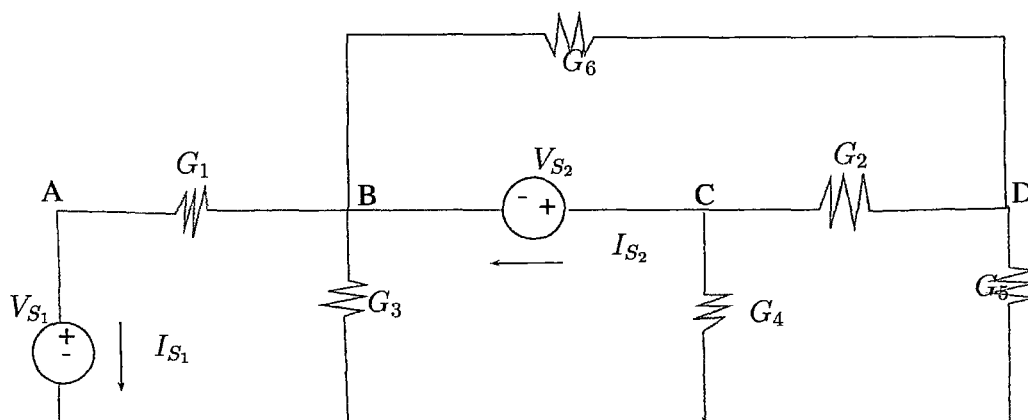


Figura 3.2: Circuito de supernodos.

**Solución.**

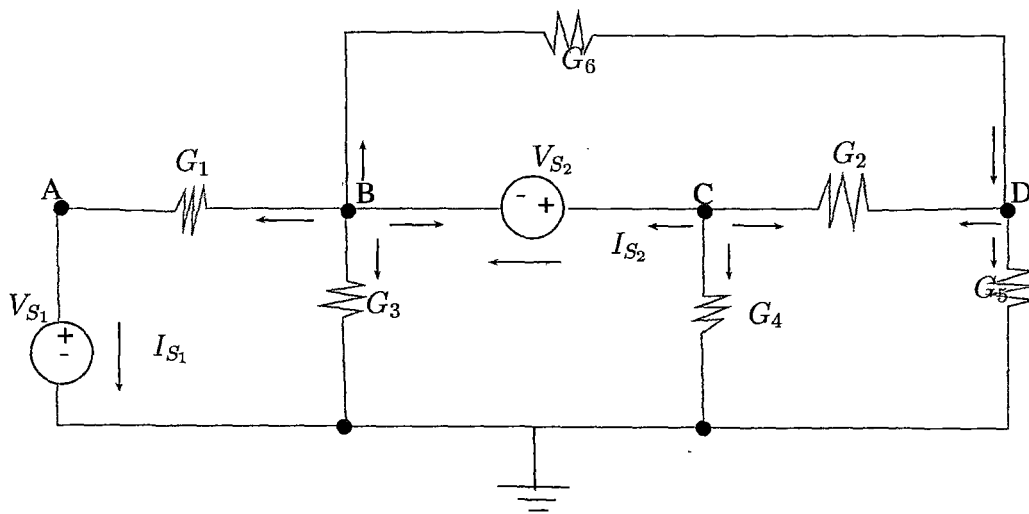


Figura 3.3: Descripción del Circuito de supernodos.

- a) El circuito tiene  $n = 4$  y  $n_{fv} = 2$ , por lo tanto el número de nodos independientes es

$$\text{Número de ecuaciones} = n - n_{fv} = 4 - 2 = 2$$

El circuito de la figura 3.2 se redibuja en la figura 3.3, mostrando una selección de nodos independientes, se define los voltajes de nodo y de supernodo, y se muestra la superficie del supernodo. Debido a que la fuente de voltaje  $V_{S1}$  está conectada al nodo A, el voltaje en éste nodo es igual al voltaje de la fuente. Se selecciona el voltaje de nodo para el nodo B el cual es  $V_{N1}$ . Entonces, por segunda ley de Kirchhoff, el voltaje de nodo para el nodo C es igual a  $V_{N1} + V_{S2}$ . Si se escoge el voltaje para el nodo C, en lugar del nodo B, para que este sea  $V_{N1}$  entonces el voltaje para el nodo B será  $V_{N1} - V_{S2}$ . La elección es arbitraria pero debe permanecer por el resto del análisis. El nodo D es el segundo nodo independiente y es nombrado  $V_{S2}$ .

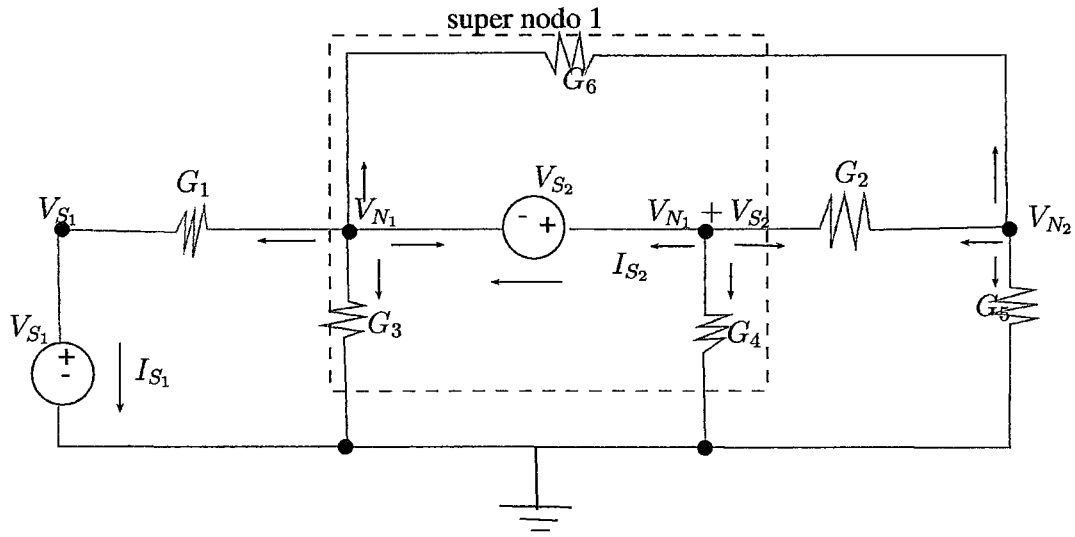


Figura 3.4: Circuito de la figura 3.2 mostrando nodos y supernodos.

b) Las dos ecuaciones según la primera ley de Kirchhoff son:

$$G_1(V_{N_1} - V_{S_1}) + G_3V_{N_1} + G_6(V_{N_1} - V_{N_2}) = I_{S_2} \quad (3.10)$$

$$G_2[(V_{N_1} + V_{S_2}) - V_{N_2}] + G_4(V_{N_1} + V_{S_2}) = -I_{S_2} \quad (3.11)$$

Al sumar estas ecuaciones se obtiene:

$$G_1(V_{N_1} - V_{S_1}) + G_3V_{N_1} + G_6(V_{N_1} - V_{N_2}) + G_2[(V_{N_1} + V_{S_2}) - V_{N_2}] + G_4(V_{N_1} + V_{S_2}) = 0 \quad (3.12)$$

Esta ecuación es la ecuación de la ley de Kirchhoff de corriente para el supernodo de la figura 3.4.

c) La ecuación esencial restante para el nodo 2 es:

$$G_2[V_{N_2} - (V_{N_1} + V_{S_2})] + G_5V_{N_2} + G_6(V_{N_2} - V_{N_1}) = 0 \quad (3.13)$$

d) Agrupando términos para las ecuaciones del nodo y del supernodo se obtiene:

$$\begin{aligned}
(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_6)V_{N_1} - (G_2 + G_6)V_{N_2} &= G_1V_{S_1} - (G_2 + G_4)V_{S_2} \\
-(G_2 + G_6)V_{N_1} + (G_2 + G_5 + G_6)V_{N_2} &= G_2V_{S_2}
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

e) La forma matricial de estas dos ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_6 & -(G_2 + G_6) \\ -(G_2 + G_6) & G_2 + G_5 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N_1} \\ V_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & -(G_2 + G_4) \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{S_1} \\ V_{S_2} \end{bmatrix}$$

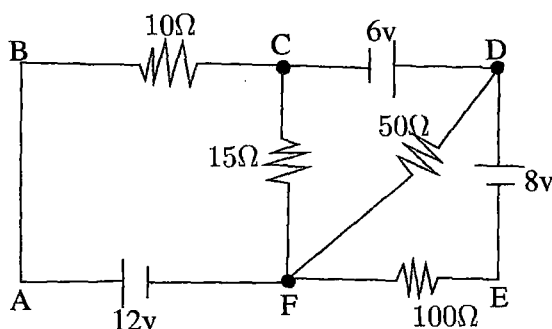
## 3.2 Análisis de circuitos por el método de las mallas

El análisis de mallas expresa una solución de circuitos planares usando un conjunto linealmente independiente de corrientes de malla. Una corriente de malla es una componente de corriente que circula a través de todos los elementos en el perímetro de una ventana de un diagrama esquemático de circuito. Por convención todas las corrientes de malla circulan en la misma dirección, usualmente lo hacen en sentido de las manecillas del reloj. Una corriente de malla físicamente es medible si las corrientes de los elementos del circuito tienen solamente una componente de la corriente de malla. La solución del circuito consiste de un conjunto de ecuaciones linealmente independiente de corrientes de malla según la segunda ley de Kirchhoff.

**Definición 3.1. Malla:** Es cualquier recorrido cerrado por los conductores, de modo que ninguno sea tocado dos veces al hacer el recorrido.

A una malla también se le llama **RED**.

**Ejemplo 3.3.** Dado el siguiente circuito



En el circuito mostrado se pueden tener las siguientes mallas:

1. Malla **ABCFA** ( $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow A$ )
2. Malla **FCDEF** ( $F \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ )
3. Malla **ABCDEFA** ( $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A$ )
4. Malla **FCDF** ( $F \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F$ )
5. Malla **FDEF** ( $F \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ )

¿Serán mallas: **ABCDFA**, **CDEFDC**?

Se puede ver que **CDEFDC** no es una malla, pues el conductor **CD** se recorre dos veces.

$$(C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow C)$$

### Características de una malla

El siguiente método de formato es usado para abordar el análisis de mallas.

1. Asignar una corriente de malla a cada trayectoria cerrada independiente en el sentido de las manecillas del reloj (Figura 3.5).
2. El número de ecuaciones necesarias es igual al número de trayectorias cerradas independientes escogidas. La columna 1 de cada ecuación se forma sumando los valores de resistencia de los resistores por los que pasa la corriente de malla que interesa y multiplicando el resultado por esa corriente de malla.

3. Debemos considerar los términos mutuos, se restan siempre de la primera columna. Es posible tener más de un término mutuo si la corriente de malla que interesa tiene un elemento en común con más de otra corriente de malla. Cada término es el producto del resistor mutuo y la otra corriente de malla que pasa por el mismo elemento.
4. La columna situada a la derecha del signo igual es la suma algebraica de las fuentes de tensión por las que pasa la corriente de malla que interesa. Se asignan signos positivos a las fuentes de fuerza electromotriz que tienen una polaridad tal que la corriente de malla pase de la terminal negativa a la positiva. Se atribuye un signo negativo a los potenciales para los que la polaridad es inversa.
5. Se resuelven las ecuaciones simultáneas resultantes para las corrientes de malla deseadas.

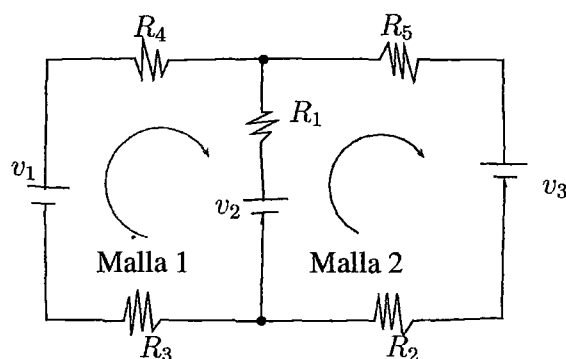


Figura 3.5: Una red eléctrica donde claramente se distinguen dos mallas. Nótese como las corrientes de malla se dibujan en el sentido de las agujas del reloj.

### 3.2.1 Análisis de malla con fuentes de voltaje independientes

El análisis de corrientes de malla de un circuito que sólo tiene fuentes de voltaje independientes involucra identificar un conjunto de corrientes de malla y escribir un número

de ecuaciones independientes (de la segunda ley de Kirchhoff) dadas por

$$N^{\circ} \text{ de ecuaciones independientes} = b - n \quad (3.15)$$

donde  $b$  es el número de ramas esenciales y  $n$  es el número de nodos esenciales en el circuito. Se puede escribir el conjunto de ecuaciones independientes en forma matricial directamente por inspección del circuito. Este hecho se presenta directamente de la forma de sumatoria de la segunda ley de Kirchhoff. Cada resistencia en el circuito tiene una corriente igual a la diferencia entre dos corrientes de malla y tiene un voltaje proporcional a la diferencia de las corrientes de malla y al valor de la resistencia.

Si la secuencia de las corrientes de malla en el vector solución de corrientes de malla es la misma como para las ecuaciones de la segunda ley de Kirchhoff, entonces las ecuaciones de corrientes de malla tienen simetría diagonal. Por ejemplo, si la resistencia  $R_A$  está conectada entre la malla  $i$  y la malla  $j$ , los términos aparecen en las siguientes ecuaciones según la segunda ley de Kirchhoff.

$$\begin{array}{rcl} & \vdots & \\ i & \cdots + R_A(I_{M_i} - I_{M_j}) + \cdots & = \cdots \\ & \vdots & \\ j & \cdots - R_A(I_{M_i} - I_{M_j}) + \cdots & = \cdots \\ & \vdots & \end{array} \quad (3.16)$$

El término  $R_A$  aparece como un término positivo en la ecuación de la segunda ley de Kirchhoff en la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima posiciones de la diagonal y como un término negativo en la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna y, en la  $j$ -ésima fila y la  $i$ -ésima columna. Si una resistencia está conectada en el perímetro externo del diagrama del circuito, entonces esta resistencia aparece sólo como un término aditivo en la  $i$ -ésima posición de la diagonal.

### Ejemplo 3.4. Análisis de mallas con fuentes de voltaje independientes

Para el circuito mostrado en la figura 3.6.

- Escriba las ecuaciones de corrientes de malla en términos de los voltajes individuales de las fuentes y de las corrientes de malla  $I_{M_1}$ ,  $I_{M_2}$  e  $I_{M_3}$ .

- b) Reescriba las ecuaciones agrupando los coeficientes comunes de cada corriente de malla.
- c) Exprese las tres ecuaciones de corriente de malla en forma matricial. Nótese la simetría diagonal de la matriz de resistencias y la localización de las entradas diferentes de cero en la matriz de fuentes de voltaje.

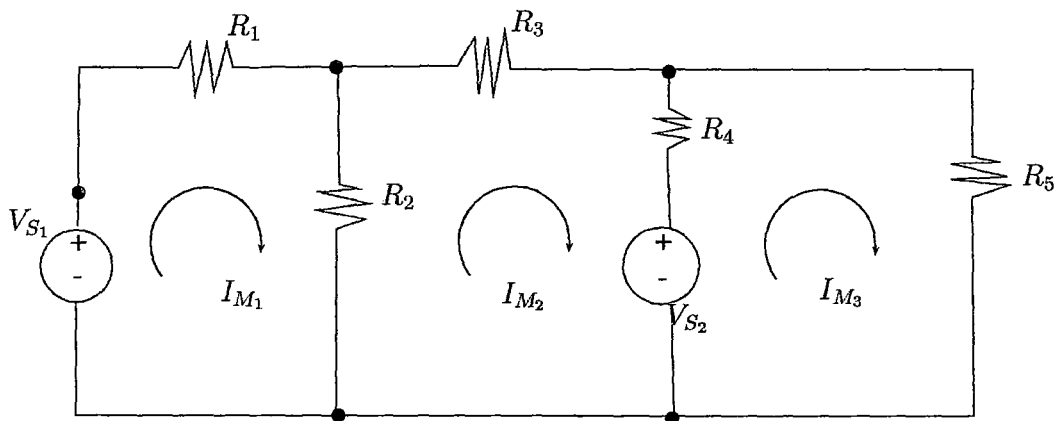


Figura 3.6: Circuito de 3 mallas

- a) Las tres ecuaciones son:

$$R_1 I_{M1} + R_2 (I_{M1} - I_{M2}) = V_{S1} \quad (3.17)$$

$$R_2 (I_{M2} - I_{M1}) + R_3 I_{M2} + R_4 (I_{M2} - I_{M3}) = -V_{S2} \quad (3.18)$$

$$R_4 (I_{M3} - I_{M2}) + R_5 I_{M3} = V_{S2} \quad (3.19)$$

- b) Agrupando coeficientes de cada corriente de malla:

$$(R_1 + R_2) I_{M1} - R_2 I_{M2} = V_{S1} \quad (3.20)$$

$$-R_2 I_{M1} + (R_2 + R_3 + R_4) I_{M2} - R_4 I_{M3} = -V_{S2} \quad (3.21)$$

$$-R_4 I_{M2} + (R_4 + R_5) I_{M3} = V_{S2} \quad (3.22)$$



c) Escribiéndola en forma matricial

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M_1} \\ I_{M_2} \\ I_{M_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S_1} \\ V_{S_2} \\ V_{S_3} \end{bmatrix}$$

Ahora consideremos cualquier circuito plano que tenga  $N$  corrientes de malla desconocidas y que contengan solo resistores y fuentes independientes. Las corrientes de malla se pueden calcular a partir de una ecuación matricial de la forma general:

$$[R][I] = [V_S] \quad (3.23)$$

Los vectores  $[I]$  e  $[V_S]$  representan  $N \times 1$  arreglos de columna

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad [V_S] = \begin{bmatrix} V_{S_1} \\ V_{S_2} \\ \vdots \\ V_{S_N} \end{bmatrix}$$

Donde:

$I_N$  = Corriente desconocida alrededor de la malla  $n$ .

$V_{S_N}$  = Voltaje de fuente equivalente neto que produce  $I_N$ .

Los elementos del vector voltaje equivalente  $[V_S]$  pueden ser positivo, negativo o cero según la configuración del circuito.

La **matriz Resistencia**  $[R]$  en la ecuación (3.23) indica el arreglo cuadrado de  $N \times N$

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & \cdots & -R_{1N} \\ -R_{21} & R_{22} & \cdots & -R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{N1} & -R_{N2} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix}$$

Donde:

$R_{NN}$  Suma de resistencias alrededor de la malla  $n$ .

$R_{NM} = R_{MN}$  Resistencia equivalente compartida por las mallas  $n$  y  $m$ .

Sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $m$  corrientes de malla desconocidas, en la siguiente forma:

$$\begin{cases} R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \cdots + R_{1m}I_m &= V_1 \\ R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + \cdots + R_{2m}I_m &= V_2 \\ \vdots &\vdots = \vdots \\ R_{m1}I_1 + R_{m2}I_2 + \cdots + R_{mm}I_m &= V_m \end{cases}$$

Donde  $R_{11}, R_{12}, \dots, R_{mm}$  y  $V_1, V_2, \dots, V_m$  son constantes.

- El sistema de ecuaciones para los  $m$  voltajes nodales  $V_1, V_2, \dots, V_m$  se resuelve utilizando descomposición LU, Gauss-Seidel, Jacobi.

### 3.2.2 Análisis de mallas con supermallas

Se ha podido observar cómo manipular circuitos con fuentes de voltaje independientes y dependientes, éstas obligan la diferencia entre dos voltajes de nodo en el análisis nodal. Ahora, se puede aprender que hacer en el análisis de mallas cuando un circuito tiene fuentes de corriente común a dos mallas. Para ilustrar esto consideramos el circuito de la figura 3.5 que tiene dos fuentes de corriente.

#### Ejemplo 3.5. Ejercicio con supermallas

Para el circuito mostrado en la figura 3.7

- a) Seleccionar el conjunto de mallas o supermallas existentes en el circuito. Definir todas las corrientes y dibujar la trayectoria de la(s) supermalla(s).
- b) Escribir las ecuaciones de la segunda ley de Kirchhoff para cada malla en la supermalla. Sume estas ecuaciones para obtener la ecuación de la supermalla.
- c) Escribir las ecuaciones de la segunda ley de Kirchhoff de voltaje de Kirchhoff restantes para el circuito.
- d) Organizar el conjunto de ecuaciones esenciales reagrupando los coeficientes.
- e) Expresar este conjunto de ecuaciones en forma matricial.

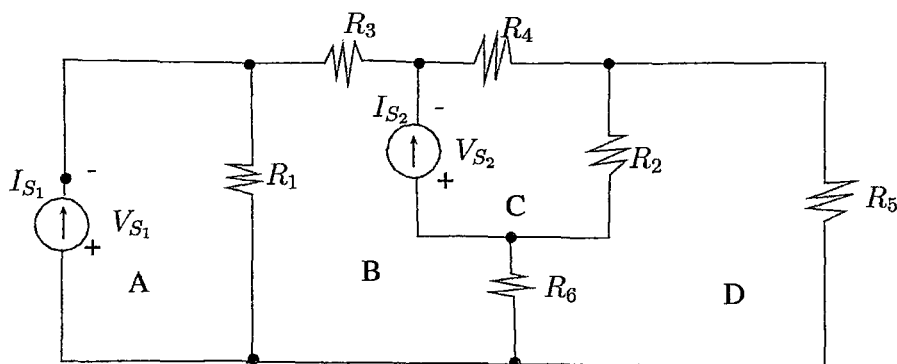


Figura 3.7: Circuito con fuentes de corriente

### Solución.

- a) El circuito tiene  $b = 8$ ,  $n = 4$  y  $n_{fc} = 2$  ( $n_{fc}$  representa el número de fuentes de corriente), por lo tanto el número de mallas independientes son

$$N^{\circ} \text{ de ecuaciones} = b - n - n_{fc} = 8 - 4 - 2 = 2$$

El circuito de la figura 3.7 está redibujado en la figura 3.8, mostrando una selección de mallas, definiendo todas las corrientes de malla y supermalla y la trayectoria de la supermalla. Se puede observar que la corriente de la malla A es igual a la corriente de la fuente  $I_{S1}$ . La malla B se convierte en la malla 1 y tiene una corriente de malla  $I_{M1}$ . Por la segunda ley de Kirchhoff, la corriente de malla en la malla C es igual a  $I_{M1} + I_{S2}$ . Eligiendo la malla B en vez de la malla C para que tenga una corriente de malla  $I_{M1}$  es una escogencia conveniente pero arbitraria que genera una segunda corriente de malla en el sistema de la supermalla que depende de la primera malla. La malla D es la segunda malla independiente.

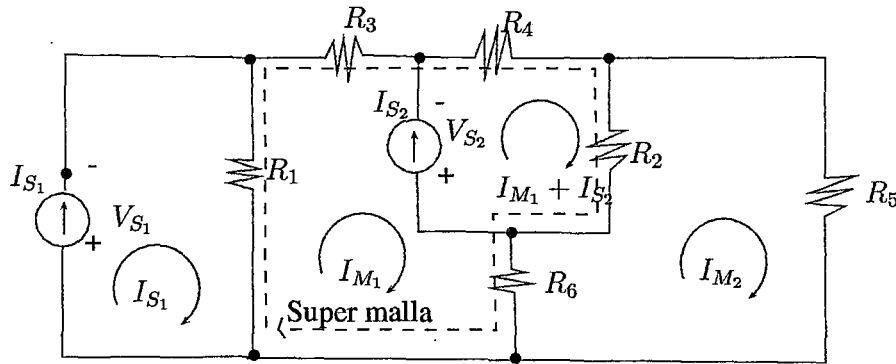


Figura 3.8: Circuito de mallas y supermalla

b) Las ecuaciones para las mallas B y C son:

$$R_1(I_{M_1} - I_{S_1}) + R_3I_{M_1} + R_6(I_{M_1} - I_{M_2}) = V_2 \quad (3.24)$$

$$R_2[(I_{M_1} + I_{S_2}) - I_{M_2}] + R_4(I_{M_1} + I_{S_2}) = -V_{S_2} \quad (3.25)$$

Adicionando éstas se tiene:

$$R_1(I_{M_1} - I_{S_1}) + R_3I_{M_1} + R_6(I_{M_1} - I_{M_2}) + R_2[(I_{M_1} + I_{S_2}) - I_{M_2}] + R_4(I_{M_1} + I_{S_2}) = 0 \quad (3.26)$$

c) La ecuación de malla restante pertenece a la malla D y es:

$$R_2[I_{M_2} - (I_{M_1} + I_{S_2})] + R_5I_{M_2} + R_6(I_{M_2} - I_{M_1}) = 0 \quad (3.27)$$

d) Agrupando términos en las dos últimas ecuaciones se tiene:

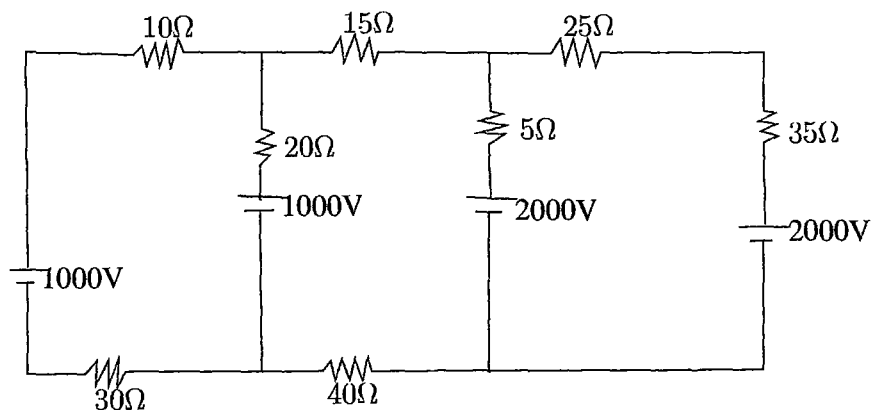
$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_6)I_{M_1} - (R_2 + R_6)I_{M_2} &= R_1I_{S_1} - (R_2 + R_4)I_{S_2} \\ -(R_2 + R_6)I_{M_1} + (R_2 + R_5 + R_6)I_{M_2} &= R_2I_{S_2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

e) Escribiendo estas dos ecuaciones en forma matricial se tiene:

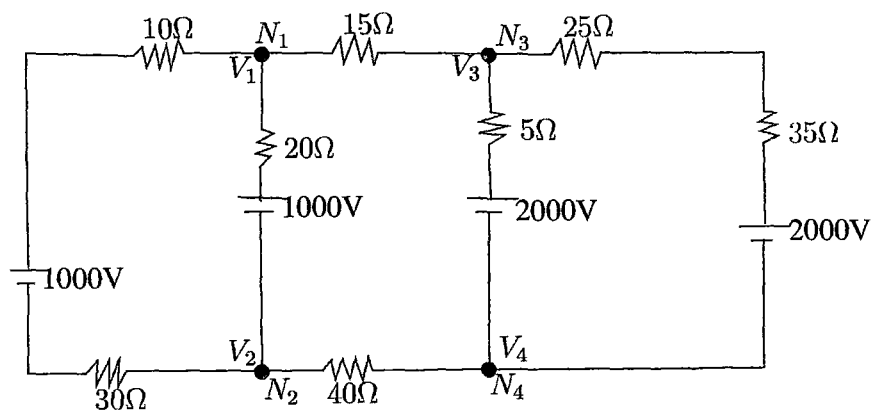
$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_6 & -(R_2 + R_6) \\ -(R_2 + R_6) & R_2 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M_1} \\ I_{M_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & -(R_2 + R_4) \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{S_1} \\ I_{S_2} \end{bmatrix}$$

### 3.3 Aplicaciones

**Ejemplo 3.6.** Utilice análisis nodal para hallar el voltaje en cada nodo del siguiente circuito:



**Solución.**



- El número de nodos es 4.
- Se enumeran los nodos como se muestra en la figura  $N_1, N_2, N_3$  y  $N_4$ . Llamando  $V_1$  al voltaje en el nodo  $N_1$ ,  $V_2$  al voltaje en el nodo  $N_2$ ,  $V_3$  al voltaje en el nodo  $N_3$  y  $V_4$  al voltaje en el nodo  $N_4$
- Se escogerá el nodo 4 como nodo de referencia, asignándole voltaje cero; es decir  $V_4 = 0$
- Aplicaremos ahora la **Ley primera de Kirchhoff** en cada nodo y obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{Para el nodo } N_1: \quad \frac{V_1 - V_2 - 1000}{20} + \frac{V_1 - V_2 - 1000}{40} + \frac{V_1 - V_3}{15} = 0$$

$$\text{Para el nodo } N_2: \quad \frac{V_2 - V_1 + 1000}{20} + \frac{V_2 - V_1 + 1000}{40} + \frac{V_2}{40} = 0$$

$$\text{Para el nodo } N_3: \quad \frac{V_3 - V_1}{15} + \frac{V_3 - 2000}{5} + \frac{V_3 - 2000}{60} = 0$$

Efectuando en las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{15}\right)V_1 - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40}\right)V_2 - \left(\frac{1}{15}\right)V_3 &= \frac{1000}{20} + \frac{1000}{40} \\ -\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{40}\right)V_1 + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40}\right)V_2 &= -\frac{1000}{20} - \frac{1000}{40} \\ -\left(\frac{1}{15}\right)V_1 + \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{60}\right)V_3 &= \frac{2000}{5} + \frac{2000}{60} \end{aligned}$$

Vemos que es un sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres incógnitas; el cual es equivalente a la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{15} & -\frac{1}{20} - \frac{1}{40} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{20} - \frac{1}{40} & \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} & 0 \\ -\frac{1}{15} & 0 & \frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1000}{20} + \frac{1000}{40} \\ -\frac{1000}{20} - \frac{1000}{40} \\ \frac{2000}{5} + \frac{2000}{60} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{120} & -\frac{3}{40} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{3}{40} & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{15} & 0 & \frac{17}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ -75 \\ \frac{1300}{3} \end{bmatrix}$$

- Para hallar los voltajes  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  utilizaremos el método de descomposición LU:

```
>> A = [17/120 -3/40 -1/15;-3/40 1/10 0;-1/15 0 17/60]
```

```
A =
```

```
0.1417 -0.0750 -0.0667
```

```
-0.0750 0.1000 0
```

```
-0.0667 0 0.2833
```

```
>> b = [75;-75;1300/3]
```

```
b =
```

```
75.0000
```

```
-75.0000
```

```
433.3333
```

```
>> [L U] = doolittle(A)
```

```
L =
```

```
1.0000 0 0
```

```
-0.5294 1.0000 0
```

```
-0.4706 -0.5854 1.0000
```

```
U =
```

```
0.1417 -0.0750 -0.0667
```

```
0 0.0603 -0.0353
```

```
0 0 0.2313
```

```
>> y = L \ b
```

---

```

y =
    75.0000
   -35.2941
  447.9675
>> x = U \ y

```

```

x =
    1.0e+003*
    1.7311
    0.5483
    1.9367

```

■ Utilizando el método de **Jacobi**

```

>> x0=[0;0;0]

```

```

x0 =
    0
    0
    0
>> x = Jacobi(A,b,x0,0.001,32)

```

```

x =
    1.0e+003*
    1.7310
    0.5483
    1.9367

```

■ Utilizando el método de **Gauss-Seidel**

```

>> P = [0;0;0]
P =

```

---



0

0

0

```
>> B = [-55/9;107/15;-19/5]
```

B =

-6.1111

7.1333

-3.8000

```
>> X = gseid(A,B,P,0.001,30)
```

X =

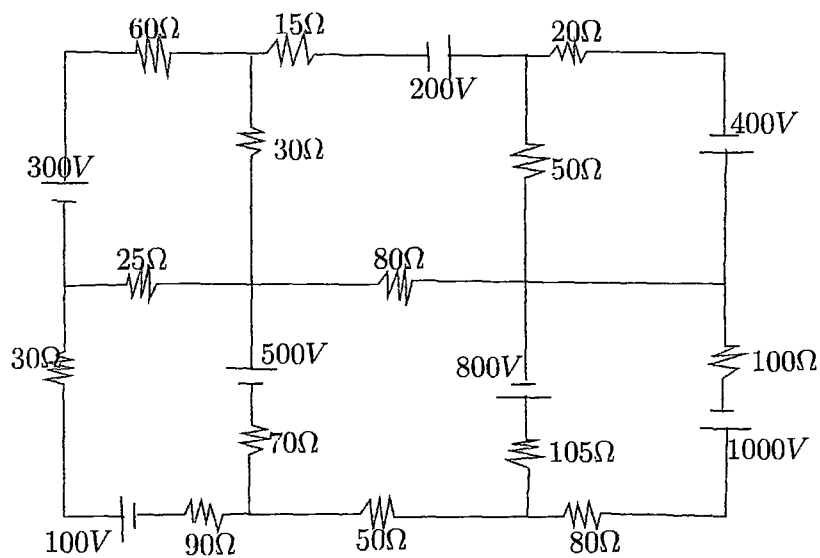
1.0e+003\*

1.7281

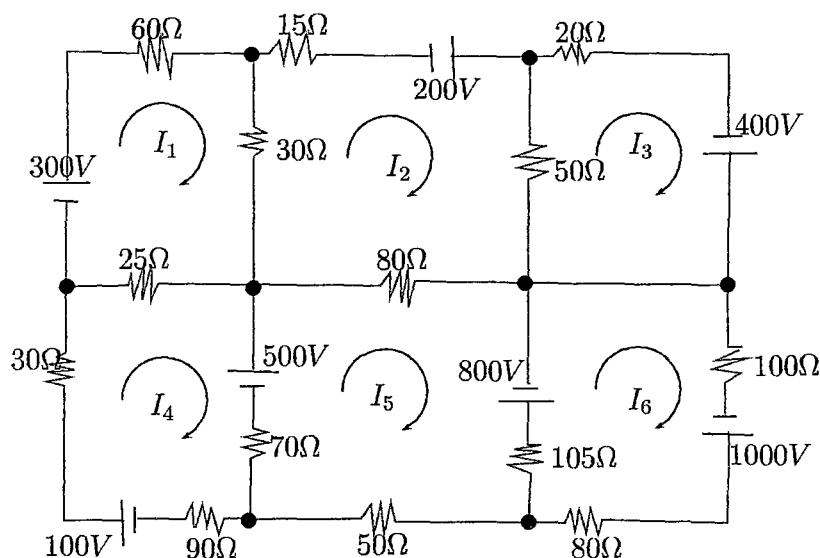
0.5450

1.9360

**Ejemplo 3.7.** Calcule las corrientes que fluyen en cada ramal del circuito, utilizando análisis de corrientes por mallas:



**Solución.**



- El número de corriente de mallas es 6.
- Escogeremos las corrientes de mallas señaladas en la figura, sean:  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ .
- Aplicando la **Segunda Ley de Kirchhoff** en cada malla obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{Para la corriente por malla } I_1: & 60I_1 + 30(I_1 - I_2) + 25(I_1 - I_4) &= 300 \\
 \text{Para la corriente por malla } I_2: & 15I_2 + 50(I_2 - I_3) + 80(I_2 - I_5) + 30(I_2 - I_1) &= 200 \\
 \text{Para la corriente por malla } I_3: & 20I_3 + 50(I_3 - I_2) &= 400 \\
 \text{Para la corriente por malla } I_4: & 25(I_4 - I_1) + 70(I_4 - I_5) + 90I_4 + 30I_4 &= -500 + 100 \\
 \text{Para la corriente por malla } I_5: & 80(I_5 - I_2) + 105(I_5 - I_6) + 50I_5 + 70(I_5 - I_4) &= 800 + 500 \\
 \text{Para la corriente por malla } I_6: & 100I_6 + 80I_6 + 105(I_6 - I_5) &= 1000 - 800
 \end{aligned}$$

Efectuando en las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Para la corriente por malla } I_1: & 115I_1 - 30I_2 - 25I_4 &= 300 \\
 \text{Para la corriente por malla } I_2: & -30I_1 + 175I_2 - 50I_3 - 80I_5 &= 200 \\
 \text{Para la corriente por malla } I_3: & -50I_2 + 70I_3 &= 400 \\
 \text{Para la corriente por malla } I_4: & -25I_1 + 215I_4 - 70I_5 &= -400 \\
 \text{Para la corriente por malla } I_5: & -80I_2 - 70I_4 + 305I_5 - 105I_6 &= 1300 \\
 \text{Para la corriente por malla } I_6: & -105I_5 + 285I_6 &= 200
 \end{aligned}$$

Vemos que es un sistema de ecuaciones lineales con seis ecuaciones y seis incógnitas; el cual es equivalente a la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 115 & -30 & 0 & -25 & 0 & 0 \\ -30 & 175 & -50 & 0 & -80 & 0 \\ 0 & -50 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 0 & 215 & -70 & 0 \\ 0 & -80 & 0 & -70 & 305 & -105 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -105 & 285 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \\ -400 \\ 1300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

- Para hallar las corrientes  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$  aplicaremos el método de descomposición LU.

#### En Matlab:

```
>> A = [115 -30 0 -25 0 0; 30 175 -50 0 -80 0; 0 -50 70 0 0 0; 25 0 0 215 -70 0;
        0 -80 0 -70 305 -105; 0 0 0 0 -105 285]
```

A =

```
115   -30    0   -25    0    0
-30   175   -50    0   -80    0
  0   -50    70    0    0    0
-25    0    0   215   -70    0
  0   -80    0   -70   305  -105
  0    0    0    0  -105   285
```

```
>> [L U] =doolittle(A)
```

L =

---

```

1.0000      0      0      0      0      0
-0.2609  1.0000      0      0      0      0
      0 -0.2991  1.0000      0      0      0
-0.2174 -0.0390 -0.0354  1.0000      0      0
      0 -0.4785 -0.4347 -0.3535  1.0000      0
      0      0      0      0 -0.4562  1.0000

```

U =

```

115.0000 -30.0000      0 -25.0000      0      0
      0 167.1739 -50.0000 -6.5217 -80.0000      0
      0      0 55.0455 -1.9506 -23.9272      0
      0      0      0 209.2417 -73.9688      0
      0      0      0      0 230.1672 -105.0000
      0      0      0      0      0 237.1000

```

>> y = L\ b

y =

1.0e+003\*

0.3000

0.2783

0.4832

-0.3068

1.5348

0.9001

>> x = U\ y

---

x =

5.4076  
9.4764  
12.4832  
1.5032  
8.3999  
3.7964

Por lo tanto, la solución es:

$I_1 = 5.4076$   
 $I_2 = 9.4764$   
 $I_3 = 12.4832$   
 $I_4 = 1.5032$   
 $I_5 = 8.3999$   
 $I_6 = 3.7964$

- Utilizando el método de **Gauss-Seidel**, obtenemos:

>> P = [0; 0;0;0;0;0]

P =

0  
0  
0  
0  
0  
0

>> X =gseid(A,B,P,0.001,30)

---

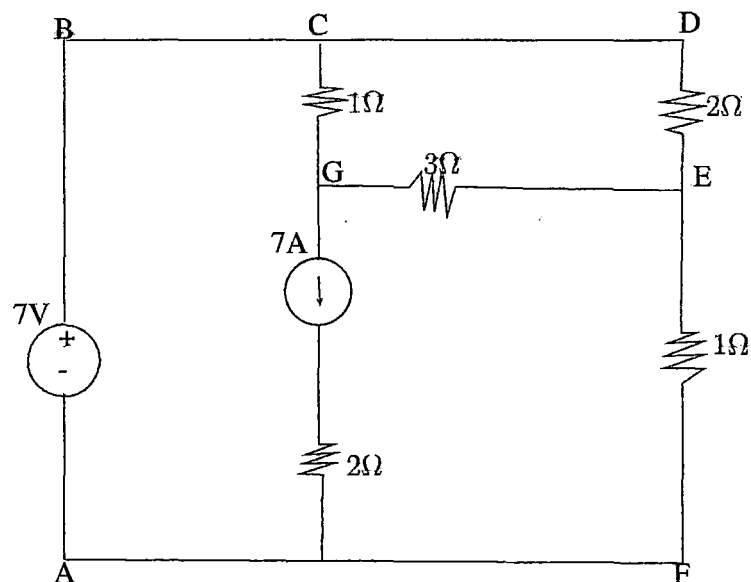
```
X =  
    5.3958  
    9.4552  
   12.4588  
    1.4948  
    8.3853  
    3.7911
```

- Utilizando el método de **Jacobi**, obtenemos:

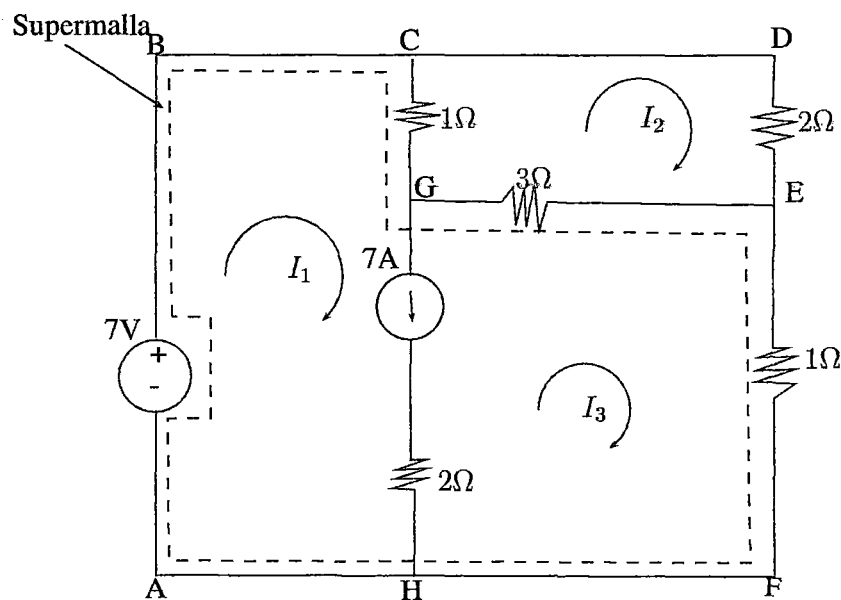
```
>> x0 = [0;0;0;0;0]  
x0 =  
     0  
     0  
     0  
     0  
     0  
     0  
  
>> x = Jacobi(A,b,x0,0.00001,20)  
x =  
    5.4033  
    9.4702  
   12.4744  
    1.5006  
    8.3940  
    3.7942
```

---

**Ejemplo 3.8.** Calcular las corrientes que fluyen en cada ramal del siguiente circuito.



**Solución.**



- El número de corriente de mallas es 3
- Escogeremos las corrientes señaladas en la figura  $I_1, I_2, I_3$
- Aplicando la **Segunda ley de Kirchhoff** en la malla GCDEG se obtiene la ecuación:

$$1(I_2 - I_1) + 2I_2 + 3(I_2 - I_3) = 0$$

Efectuando obtenemos:

$$-I_1 + 6I_2 - 3I_3 = 0 \quad (*)$$

- Las mallas 1 y 3 comparten una fuente de corriente. Esto define la supermalla cuyo trayectoria cerrada se puede tomar como ABCGEFA. Las ecuaciones que se obtiene de esta supermalla son las siguientes:

$$I_1 - I_3 = 7 \quad (**)$$

$$-7 + 1(I_1 - I_2) + 3(I_3 - I_2) + 1I_3 = 0$$

Efectuando obtenemos:

$$I_1 - 4I_2 + 4I_3 = 7 \quad (***)$$

En forma matricial de las ecuaciones (\*)(\*\*)(\*\*\*)

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- Para hallar las corrientes  $I_1, I_2, I_3$  aplicaremos el método de descomposición LU.

$$>> A = [-1 \ 6 \ -3; 1 \ 0 \ -1; 1 \ -4 \ 4]$$

$$A =$$



---

```
-1  6 -3
```

```
1   0 -1
```

```
1  -4  4
```

```
>> b = [0;7;7]
```

```
b =
```

```
0
```

```
7
```

```
7
```

```
>> [L U] =doolittle(A)
```

```
L =
```

```
1.0000      0      0
```

```
-1.0000  1.0000      0
```

```
-1.0000  0.3333  1.0000
```

```
U =
```

```
-1.0000  6.0000 -3.0000
```

```
0  6.0000 -4.0000
```

```
0      0  2.3333
```

```
>> y = L\b
```

```
y =
```

```
0
```

```
7.0000
```

```
4.6667
```

---

$$>> x = U \setminus y$$

x =

9.0000

2.5000

2.0000

}

---

■

# Conclusiones

---

1. El método de descomposición LU y los métodos numéricos de Jacobi y Gauss-Seidel son convenientes para resolver sistemas de ecuaciones lineales producidos por el análisis de corrientes por bucles ya que sus matrices de coeficientes son cuadráticas simétricas, no singulares, diagonalmente dominante y definidas positivas.
2. El análisis de voltajes por nodos produce matrices diagonalmente dominantes y definidas positivas.
3. Los métodos matriciales se utilizan como alternativa conveniente en la solución de problemas en redes eléctricas.
4. Estos análisis se pueden aplicar en circuitos pequeños y amplios.
5. El software matemático MATLAB se utiliza para facilitar los cálculos en los diferentes problemas que se presentan en el presente trabajo.

# Anexos

---

## Algoritmo de LU por Doolittle

```
function [L U]=doolittle(A)
%Este programa factoriza la matriz A en la forma LU
%donde L es triangular inferior unitaria
% U es triangular superior
n=length(A(:,1));
for k=1:n-1
    for i=k+1:n
        m(i,k)=A(i,k)/A(k,k);
        A(i,k)=m(i,k);
        A(i,k+1:n)=A(i,k+1:n)-m(i,k)*A(k,k+1:n);
    end
end
U=triu(A);
for k=1:n
    A(k,k)=1;
end
L=tril(A);
```

### Algoritmo de Jacobi

```
% Este programa resuelve un sistema  $Ax=b$ , usando
%el metodo iterativo de Jacobi
function x= Jacobi(A,b,x0,tol,M)
% Datos: x0 vector inicial
% M número máximo de iteraciones
% tol tolerancia para x
n=length(b);
for k=1:M
for j=1:n
x(j)= (b(j)-A(j,[1:j-1,j+1:n])
*x0([1:j-1,j+1:n]))/A(j,j);
end
err=abs(norm(x'-x0));
x0=x';
if(err<tol)--- (k==M)
break
end
end
x=x';
```

---

### Algoritmo de Gauus-Seidel

```
% Este programa resuelve un sistema  $Ax=b$ , usando el
% metodo iterativo de Jacobi
function x=gausseidel(A,b,x0,tol,M)
% Datos: x0 vector inicial
% M número máximo de iteraciones
% tol tolerancia para x
n=length(b);
x(1)=(b(1)-A(1,2:n)*x0(2:n))/A(1,1);
for k=1:M
for i=1:n
x(i)=(b(i)-A(i,1:i-1)*x(1:i-1)-
A(i,i+1:n)*x0(i+1:n))/A(i,i);
end
err=abs(norm(x'-x0));
x0=x';
if(err<tol)——(k==M)
break
end
end
x=x'
```

# Bibliografía

---

- [1] **Alhiet O., Cristian M. y Alfonso V.** *Software para ciencia e ingeniería MATLAB*, Empresa Editora MACRO-2010.
- [2] **Bruce Carlson,A.,** “*Circuitos*”. Segunda edición. Thompsom Editores S.A. México, 2012
- [3] **Christian Páez P.** *Matrices y Sistemas Lineales*, Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2014.
- [4] **Hornbeck. Robert W,** “*Numerical Methods Quantum*”, New York.
- [5] **Goñi Galarza, J.,** “*Física General*”. Editorial Ingeniería. Lima- Perú.
- [6] **Johnson, D.;Hilburn, J.,** “*Análisis Básico de Circuitos Eléctricos*”. sexta edición. México, 2010
- [7] **Kenneth Hoffmann - Ray Kunze,** “*Álgebra Lineal*”, Printice-Hall.
- [8] **Moisés Lázaro C,** “*Álgebra Lineal*”, Editorial Moshera.
- [9] **R. L Burden y J.D. Faires,** “*Análisis Numérico*”, 9ª ed. Cengage, 2011.
- [10] **S. Chapra y R. Canale,** “*Numerical Methods for Engineers*”, 6 edición Mcgraw- Hill, 2010.
- [11] **Walter Mora F.** *Introducción a los Métodos Numéricos*, Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2014.