# UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"

## FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

## ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

# "La Formulación Variacional del Problema de Newmann en los Espacios de Sobolev"



# TESIS

## PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

**Presentado por:**

Bach. Mat. Juan Carlos Arbañil Chozo
Bach. Mat. Luis Antonio Gamarra Rondon

**Asesor**

Dra. Iris Margarita Tejada Romero

**LAMBAYEQUE - PERÚ**

**Mayo 2015**

UNIVERSIDAD NACIONAL

"PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

# "La Formulación Variacional del Problema de Newmann en los Espacios de Sobolev"

TESIS

**Para optar el título profesional de**

Licenciado en Matemáticas

presentado por:

**Bach. Mat. Juan Carlos Arbañil Chozo**

**Bach. Mat. Luis Antonio Gamarra Rondon**

Asesor

**Dra. Iris Margarita Tejada Romero**

Lambayeque – Perú

Mayo 2015

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERIA EN COMPUTACION E INFORMATICA

# "LA FORMULACION VARIACIONAL PARA EL PROBLEMA DE NEWMANN EN LOS ESPACIOS DESOBOLEV"

# TESIS

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

PRESENTADO POR:

Bach.ARBAÑIL CHOZO JUAN CARLOS
Bach: GAMARRA RONDON LUIS ANTONIO

SUSTENTADO ANTE EL JURADO CALIFICADOR:

Mg: Alcides Raúl Cutí Gutiérrez
PRESIDENTE

Lic.: Mat: Diana Mercedes Castro Cárdena
SECRETARIO

Lic.: Mat: Edgar Uriarte Bernal
VOCAL

Lambayeque-Perú
Mayo-2015

# DEDICATORIA

Al apoyo incondicional de mi familia, luz y camino de mi vida. A Angel Santiago, cuya inocencia es un motivo de esperanza y lucha.

**Juan Carlos**

Principalmente a Dios, por haberme dado la vida y permitirme el haber llegado hasta este momento tan importante de mi formación profesional.

A mi madre por ser el pilar más importante y por demostrarme siempre su cariño y apoyo incondicional sin importar nuestras diferencias de opiniones. A mi padre, a pesar de nuestra distancia física, siento que estas conmigo siempre y aunque nos faltaron muchas cosas por vivir juntos, sé que estarías orgulloso.

**Luis Antonio**

# AGRADECIMIENTOS

A mis profesores y a mi asesora

que hicieron realidad este trabajo.

Por su gran apoyo.

**Juan Carlos**

A mis profesores y de manera especial la Dra. Iris Tejada Romero por sus conocimientos transmitidos.

**Luis Antonio.**

# Resumen

En este trabajo se presenta una descripción del método variacional, haciendo un estudio cualitativo de las ecuaciones de Newmann en los espacios de Sobolev para el caso homogéneo y no homogéneo de existencia y unicidad de la solución, mostrando la adaptavilidad del método variacional.

# Índice general

# Capítulo 1:

# Teoría Matemática del Método Variacional

## 1.1. Introducción a los espacios Funcionales

### 1.1.1. Un toque a la teoría de integración de Lebesgue

En esta sección revisaremos algunos conceptos básicos de la teoría de integración de Lebesgue. Entendemos por un dominio $\Omega$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ medible Lebesgue con interior no vacío (generalmente abierto o cerrado). Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible-Lebesgue e integrable, cuya integral se denota por

$$\int_\Omega f(x)dx$$

donde $dx$ denota la medida de Lebesgue. Hagamos algunas notaciones y definiciones.

Una función medible, se dice que es totalmente acotada sii existe una constante $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, sobre $\Omega$.



Definamos el espacio de funciones

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \text{integrable según Lebesgue } \}$$

**Ejemplo 1.1.1.** Sea la función $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$, se puede observar fácilmente que $f$ no es integrable según Riemann, pero según Lebesgue se tiene que

$$\int_0^1 d\mu = \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$$

para $1 \leq p < \infty$, y $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ se define

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)^p| dx\right)^{1/p} \tag{1.1}$$

Para $p = \infty$, escribimos

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)| \tag{1.2}$$

Observar que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ es solamente una semi-norma, pues muchas funciones no nulas, tendrán por ejemplo, $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Entonces se puede identificar funciones usando la siguiente relación: en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ por $f \sim g$ sii el conjunto $\{x \in \Omega / f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula. Así se define el espacio de Lebesgue

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}(\Omega)/\sim$$

el espacio de funciones $L^p$ en el cual $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ es una norma, con identificación se dirá que todas las funciones que pertenecen a la misma clase de equivalencia se representan por una sola y diremos que $f = g$, y de ello se tiene que $\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega g(x)dx$ y en general $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^p(\Omega)}$.

**Ejemplo 1.1.2.** $n = 1$, $\Omega = [-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \quad x > 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, 1 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Como $f, g$ y $h$ difieren solamente en un conjunto de medida nula, entonces son la misma función en un espacio de Lebesgue.

De esta manera, se puede pensar que $L^p(\Omega)$ es un conjunto de clases de equivalencia de funciones respecto a la identificación vista anteriormente. Pero en la práctica no se pensará que los elementos de $L^p$ son clases de equivalencia de funciones, más sí como funciones definidas.

Los siguientes resultados se prueban en cualquier texto de teoría de la medida o análisis moderno:

1. Desigualdad de Hölder: para $1 \leq p, q < \infty$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y además

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Generalización: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, entonces

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega).$$

De ello se sigue para $\Omega$ acotado;

$$\|f\|_1 \leq \cdots \|f\|_p \leq \|f\|_q \cdots \leq \|f\|_\infty, \qquad 1 \leq p \leq q \leq \infty$$

de donde se tiene la siguiente cadena de inclusiones continuas

$$L^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset L^q(\Omega) \subset \cdots \subset L^p(\Omega) \subset \cdots \subset L^1(\Omega), \qquad 1 \leq p \leq q \leq \infty \tag{1.3}$$

2. Desigualdad de Cauchy-Schawrz: es un caso particular de la desigualdad de Hölder, cuando $p = 2 = q$, si $f, g \in L^2(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y además

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Si denotamos en $L^2(\Omega)$ el producto interno como

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa como

$$|\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

3. La desigualdad de Minkowski: para $1 \leq p \leq \infty$, si $f, g \in L^p(\Omega)$ se tiene

$$\|f+g\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^p(\Omega)}$$

Usando la la desigualdad de Minkowski se puede verificar que si $f, g \in L^p(\Omega)$, entonces $f + g \in L^p(\Omega)$ y $\beta f \in L^p(\Omega)$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Por consiguiente $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial normado, puesto que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ cumple las condiciones de una norma, y tenemos los siguientes teoremas que son la piedra angular de la **Integración de Lebesgue**

### 1.1.2. Derivada Generalizada

Consideremos ahora la derivada de una distribución, si un funcional la definimos $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre $K$, definida mediante la función $f(x)$ (en el sentido corriente) por

$$F[\varphi(x)] = \langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

parece natural definir su derivada por

$$\frac{dF[\varphi(x)]}{dx} = F'[\varphi(x)] = \langle f'(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

Si la función $f(x)$ es diferenciable su primera derivada $f'(x)$ es continua, haciendo uso de la integración por partes en $F[\varphi(x)]$ con $u = \varphi(x)$ $dv = f'(x)dx$

$$\begin{aligned} F'[\varphi(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -F[\varphi'(x)] \end{aligned}$$

ya que si $\varphi(x)$ es una función de prueba, tiene soporte compacto y se desvanece fuera de un intervalo finito, es decir $\varphi(\pm\infty) = 0$, por lo cual el primer término de la ecuación se anula, obteniendo una expresión en la que no figura la derivada de $f(x)$, y escribimos

$$\langle f'(x), \varphi(x)\rangle = -\langle f(x), \varphi'(x)\rangle$$

Esta nueva funcional es lineal y continua sobre $K$, ya que si $\varphi(x)$ es función de prueba, su derivada $\varphi'(x)$ también lo es.

Lo anterior sugiere la siguiente definición.

**Derivada Generalizada**

Llamaremos derivada $\dfrac{dF}{dx}$ de la función generalizada $F[\varphi(x)]$ a la funcional definida mediante $\dfrac{dF}{dx} = F'[\varphi(x)] = -F[\varphi'(x)]$.

## 1.2. El Espacio de Distribuciones.

En primer lugar introducimos algunas notaciones para derivadas parciales y multiíndices:

Dado un vector $x$ con componentes $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Un multiíndice es un vector, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_0^+$; la longitud de $\alpha$ se define por

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Para $\varphi \in C^\infty$, denotamos por

$$D^\alpha\varphi, \quad D_x^\alpha\varphi, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi, \quad \varphi^\alpha, \quad \text{ó} \quad \partial_x^\alpha\varphi$$

a la derivada parcial usual

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

El espacio de Distribuciones $D(\Omega)$ puede ser dotado de una topología, la denominada topología límite inductivo, que no proviene de una norma, pero que es compatible con la estructura de espacio vectorial del mismo.

Nos contentamos con describir en que se traduce la convergencia de sucesiones para esta topología.

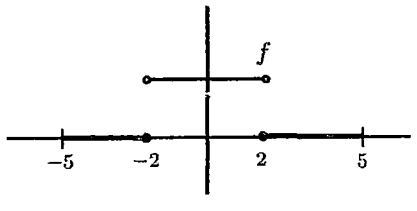
## Soporte de una función

Sea $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, el *soporte* de una función es la clausura del conjunto de puntos donde $\varphi$ no se anula, y se denota por $sop(\varphi)$, es decir:

$$sop(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; /\varphi(x) \neq 0\}}$$

Si este conjunto es compacto y está en el interior de $\Omega$, entonces se dice que la función tiene "soporte compacto", con respecto a $\Omega$. Cuando $\Omega$ se dice acotado se dice que $\varphi$ se anula en una vecindad de $\partial\Omega = \Gamma$

El



Los $x \in \mathbb{R}$ tal que $f \neq 0$ es $(-2, 2)$.

Soporte de $\varphi = \overline{(-2, 2)} = [-2, 2]$.

**Definición 1.2.1.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un dominio con $\Gamma = \partial\Omega$. Se denota el conjunto de funciones $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en $D(\Omega)$ o $C_0^\infty(\Omega)$, es decir:

$$D(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ / \varphi \ \text{ es diferenciable y de soporte compacto en } \Omega\}$$

**Definición 1.2.2.** Una distribución o función generalizada es un funcional $T$ definida sobre el espacio $D(\Omega)$, que es continua en el siguiente sentido. Para cada subconjunto compacto $K \in \Omega$ le corresponde $c > 0$ y $k$ entero positivo tal que:

$$|T(\phi)| \leq c \sup_{|j| \leq k,\ x \in K} |D^j \phi(x)|, \quad \forall \phi \in D(\Omega)$$

**Definición 1.2.3.** El espacio de distribuciones sobre $\Omega$ se define como el dual $D'(\Omega)$ de $D(\Omega)$, es decir

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{R} \ / \ T \text{ es lineal y continua } \}$$

**Notación:** Uasremos la notación de dualidad $\langle T, \varphi \rangle$ para $\varphi \in D(\Omega)$

**Definición 1.2.4.** Una distribución sobre $\Omega$ es cualquier aplicación $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

a) $T$ es lineal.

b) $T$ es (secuencialmente) continua, es decir, tal que si $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, entonces $T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.

Al conjunto de todas las distribuciones sobre $\Omega$ se le denota $D'(\Omega)$.

**Ejemplo 1.2.1.** La función generalizada delta de Dirac, se define como $\langle \delta x_0, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$, esta función también se le llama función impulso unitario y se puede observar que $\delta x_0 \in D'(\Omega)$.

**Ejemplo 1.2.2.** Sea $m$ una medida $\sigma-$finita sobre conjuntos de Baire de $\Omega$, se define:

$$\langle T_m, \phi \rangle = \int_\Omega \phi(x) m(dx) \quad , \quad \phi \in D(\overline{\Omega})$$

Se cumple que $T_m \subset D'(\Omega)$

## Funciones localmente integrables

**Definición 1.2.5.** Dado un dominio $\Omega$, el conjunto de funciones localmente integrables se define por

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f \, . \quad f \in L^1(K), \quad \forall \text{ compacto } K \subset int\Omega\}$$

$$f L^1_{loc}(\Omega) = \{\in L^1(K), \quad \forall \text{ compacto } K \subset \Omega \ (int\Omega, \quad \text{si } \Omega \text{ es arbitrario })\}$$

Recordar que

$$L^1(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \ / \ \int_K |f| < \infty\}$$

Así, se puede decir una funcional lineal $T_f : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi \to \langle Tf, \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi d\Omega = \int_{Sop\varphi} f \varphi d\Omega$$

Así, se puede decir que $L^1_{loc} \subset D'(\Omega)$

Notación: Sugeridos por la anterior representación, usaremos también la siguiente notación para cada $T \in D'(\Omega)$, por

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega T\varphi d\Omega.$$

De acuerdo a esta notación se tiene que el conjunto $C^0(\Omega)$ está contenido en $L^1_{loc}(\Omega)$.

Usando este espacio podemos presentar el nuevo concepto de derivada.

**Definición 1.2.6.** (Derivada generalizada).

Dada una función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, decimos que $f$ tiene **derivada débil o generalizada**, $D^\alpha f$, sii existe una función $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in D(\Omega) \tag{1.4}$$

Si tal $g$ existe, se define $D^\alpha f := g$ en el sentido generalizado.

**Definición 1.2.7.** (Derivada Distribucional).

Si $T \in D'(\Omega)$ la derivada de $T$ se define por la siguiente expresión:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi \rangle \quad \forall\varphi \in D(\Omega)$$

**Ejemplo 1.2.3.** Hallar $D^1 f$, si $f(x) = 1 - |x|$, $\Omega = (-1, 1)$

**Solución.** En efecto, para $\forall \varphi \in D(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
\langle D^1 f, \varphi \rangle &= -\langle f, D^1 \varphi \rangle \\
&= -\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{1} \varphi'(x)dx + \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx \\
&= -\varphi(x)|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} |x|\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} |x|\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\
&= -\left[ x\varphi|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx \right] + \left[ x\,\varphi|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx \right] \\
&= \int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx
\end{aligned}
$$

donde

$$
g(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \end{cases}
$$

Por tanto se concluye que en el sentido distribucional

$$
\langle D^1 f, \varphi \rangle = \langle g(x), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega)
$$

de donde se puede observar que

$$
\frac{df}{dx} = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \end{cases}
$$

## 1.3. Espacios de Sobolev

Sea el operador $D_j = \partial/\partial x_j$ , $j = 1, \cdots, n$. Sea $\alpha \in \mathbb{Z}_0^n$ cualquier $n-$upla de enteros no negativos, sea $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n}$ y $D^\alpha = \prod_{i=1}^{n} D_i^{\alpha_i}$

**Definición 1.3.1.** Sea $1 \leq p < \infty$ y $m \in \mathbb{Z}_0^+$ un entero no negativo, se define

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)/D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ , \ \text{ para } |\alpha| \leq m, \}$$

dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha u| & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Aquí siempre tratamos a las derivadas en sentido de las distribuciones.

Si $p = 2$, se denota por $H^m(\Omega) = W^{m,2}$ al espacio de Sobolev que se define por

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)/D^\alpha \in L^2, \ \text{ para } |\alpha| \leq m\}$$

el cual es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha, D^\alpha v); \quad u, v \in H^m(\Omega)$$

donde $(u, v)$ es el producto interno ordinario en $L^2$, también se denota por $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$.

Sea $D(\Omega)$ el espacio de funciones $C^\infty$ con soporte compacto contenido en $\Omega$. El cerrado

de $D(\Omega)$ en la topología de $H^m = W^{m,2}$ será denotado por $W_0^{m,2}$ ó $H_0^m$ cuando $p = 2$ el cual también es un espacio de Hilbert.

Para $m = 1$ y $p = 2$, definimos al espacio $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$

$H^1(\Omega) =$ La clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.

Ellos son ambos espacios de Hilbert con el producto escalar

$$(\bar{u}, \bar{v})_{H^1(\Omega)} = (\bar{u}, \bar{v})_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (D_i\bar{u}, D_i\bar{v}) = \int_\Omega \bar{u}\bar{v} + \sum_{i=1}^{n} D_i\bar{u}\ D_i\bar{v}\ d\bar{x}$$

y norma

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

En $H_0^1(\Omega)$ se define el producto escalar $(\cdot, \cdot)$ por

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

El espacio $H^1(\Omega)$ es separable (ver Brezis pag. 203 ó 264) cuando $\Omega$ es limitado, o al menos limitado en una dirección, tenemos la desigualdad de Poincaré.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2} &\leq k \left\{ \sum_{i=1}^{n} |D_i u|^2 \right\}^{1/2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^2} &\leq k \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)\} \end{aligned}$$

donde $k$ es una constante.

**Teorema 1.1.** *El espacio $W_p^k(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

**Demostración.** Consideremos una sucesión de Cauchy $\{v_j\}$, respecto a la norma $\|.\|_{k,p,\Omega}$. Teniendo en cuenta que justo esta norma es una combinación de normas de $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ de

derivadas generalizadas, se cumple que para cada $|\alpha| \leq k$, la sucesión $\{D^\alpha v_j\}$ es de nuevo una sucesión de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Por [1], se dice que existe $v^\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $\|D^\alpha v_j - v^\alpha\|_{L^p} \longrightarrow 0$, cuando $j \longrightarrow \infty$. En particular $v_j \longrightarrow v^{0,\cdots,0} := v$ en $L^p(\Omega)$. Solo falta verificar que $D^\alpha v$ existe y es igual a $v^\alpha$.

Para ello, observe que si $w_j \longrightarrow w$ en $L^p$, entonces para todo $\varphi \in D(\Omega)$, se cumple

$$\int_\Omega w_j(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \int_\Omega w(x)\varphi(x)dx$$

Esto se sigue de la desigualdad de Hölder

$$\|w_j\varphi - w\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \|w_j - w\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } j \longrightarrow \infty$$

Para mostrar que $D^\alpha = v^\alpha$, debemos verificar la identidad en el sentido distribucional

$$\int_\Omega v^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi^{(\alpha)} dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_\Omega v^\alpha \varphi dx &= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega (D^\alpha v_j)\varphi dx \\ &= \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_j \varphi^\alpha dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi^\alpha dx \end{aligned}$$

□

Existe otra definición de Espacios de Sobolev que podría haberse hecho por

$$H_p^k(\Omega) = \text{clausura de } C^k(\Omega) \text{ con la norma de Sobolev}$$

[1]Teorema de Riesz-Fischer: Para $1 \leq p < \infty$; $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach separable; $L^\infty(\Omega)$ es un espacio de Banach.

En el caso de $p = \infty$ se tiene que $H^k_\infty$, el cual no es el espacio $W^k_\infty$. Sin embargo para $1 \leq p < \infty$, se cumple que $H^k_p(\Omega) = W^k_p(\Omega)$.

### 1.3.1. Desigualdades en los Espacios de Sobolev

En los espacios de Sobolev existen relaciones de inclusión que se usan muy a menudo, cuando las inclusiones de un espacio en otro son continuas.

**Proposición 1.1.** *Sea $\Omega$ cualquier dominio, $k, m \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $k \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$W^m_p(\Omega) \subset W^k_p(\Omega)$$

*inclusión continua y compacta.*

Observemos que

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p_{L^p} \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p_{L^p} \right)^{1/p} = \|u\|_{m,p,\Omega}$$

por tanto, tomando la inclusión:

$$\begin{aligned} i : W^{m,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{k,p}(\Omega) \\ u &\longmapsto i(u) = u \end{aligned}$$

la desigualdad anterior significa que :

$$\|i(u)\|_{k,p,\Omega} \leq \|u\|_{k,p,\Omega} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

**Proposición 1.2.** *Sea $\Omega$ dominio acotado, $k \in \mathbb{Z}_0^+$, $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces*

$$W^{m,q}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega).$$

*observe que para $k = 0$ se tiene la siguiente cadena*

$$L^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset L^q(\Omega) \subset \cdots \subset L^p(\Omega) \subset \cdots \subset L^2(\Omega) \subset \cdots \subset L^1(\Omega), \quad 2 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Recordar que:

$$\begin{aligned} (L^{50}(\Omega))' &= L^{50/49}(\Omega) \\ (L^2(\Omega))' &= L^2(\Omega) \end{aligned}$$

donde

$$(L^p(\Omega))' = \{T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R} : T \text{ lineal continua } \},$$

con la notación de dualidad $\langle T, f \rangle = \int_\Omega Tf$ la continuidad significa que se cumple para algún $c > 0$

$$|\langle T, f \rangle| = \left| \int_\Omega Tf \right| \leq c\|f\|_{L^p} \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Si $T \in L^p$, y además $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1$, entonces, la desigualdad de Hölder garantiza:

$$|\langle T, f \rangle| \leq c\|f\|_{L^p} \quad \text{con } c = \|T\|_{L^r}$$

Por otro lado se tiene:

$$\|T\|_{(L^p)'} = \sup_{\|f\|_{L^p}=1} |\langle T, f \rangle|$$

Por tanto

$$\|T\|_{L^r(\Omega)} = \sup_{\|f\|_{L^p}=1} |\langle T, f\rangle|$$

**Definición 1.3.2.** Definimos los espacios $W_p^k(\Omega)$ por

$$W_p^k(\Omega) = \text{ la clausura de } D(\Omega) \text{ en } W_p^k(\Omega)$$

Es natural que estos espacios se pueden caracterizar por

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in W_p^k(\Omega) \ / \ u = 0 \text{ sobre } \Gamma = \partial\Omega\}$$

Como $W_p^k(\Omega)$ es espacio de Bnanach, entonces se cumple que $W_p^k(\Omega)$ es un espacio de Banach.

En particular para $p = 2$ se denota por

$$H_0^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$$

**Teorema 1.2.** *(Desigualdad de Poincare-Friedrichs)*

*Si $\Omega$ es un dominio acotado en almenos una dirección, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ $\exists c_k$ tal que*

$$\|u\|_{k,\Omega} \leq c_k |u|_{k,\Omega} \quad , \quad \forall u \in H_0^k(\Omega) \tag{1.5}$$

**Observación.** 1. $|u|_{k,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|_{L^2}^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|_{L^2}^2\right)^{1/2} = \|u\|_{k,\Omega}.$

2. La desigualdad (1.6) implica que $|\ |_{k,\Omega}$ es norma en $H_0^k(\Omega)$.

### 1.3.2. Dualidad en los Espacios de Sobolev

Sabemos que si $V$ es un espacio de Banach, $V'$ es el espacio dual de $V$, y la norma en $V'$ se define por:

$$\|T\|_{V'} = \sup_{\|x\|_V} |Tx| = \sup_{\|x\|\leq 1} |Tx| = \sup_{x\in V, x\neq 0} \frac{|Tx|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \langle T, x\rangle$$

**Ejemplo 1.3.1.** Para $1 \leq p < \infty$

$$(L^p(\Omega))' = \{T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}, \text{ lineal y continua } \}$$

$$\begin{aligned} T : L^p(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle T, v\rangle = \int_\Omega Tv \end{aligned}$$

Si $f \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

por desigualdad de Hölder se cumple

$$|\langle f, v\rangle| \leq \|f\|_{L^q} \|v\|_{L^p}, \quad \forall v \in L^p(\Omega).$$

Entonces se cumple que $f \in (L^p(\Omega))'$.

Por otro lado si:

$$T \in (L^p(\Omega))',$$

entonces $\exists c > 0$ tal que:

$$|\langle T, v\rangle| \leq c\|v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall v \in L^p(\Omega)$$

Usando el Teorema de Riesz se tiene en [Brezis pag. 61] que existe $f_T \in L^q(\Omega)$ tal que

$$\langle T, v\rangle = \int_\Omega f_T v$$

y de ello se tiene que

$$L^q(\Omega) = (L^p(\Omega))', \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Definición 1.3.3.** Sea $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se define el espacio Dual de $W^{k,q}$ por

$$W_q^{-k}(\Omega) = (W_p^k(\Omega))'$$

su norma

$$\|v\|_{-k,q,\Omega} = \sup_{u \subset W^{k,p}(\Omega)} = \sup_{u \subset W^{k,p}(\Omega)} \frac{|\langle v, u\rangle|}{\|u\|_{k,p,\Omega}}$$

en particular si $p = 2$ tenemos $H^{-k}(\Omega) = (H^k(\Omega))'$

**Observación.** Sean $V, W$ dos espacios de Banach tal que $V \subset W$; veamos la relación de $V'$ y $W'$.

Sea $T \in W'$ se cumple

$$|\langle T, w\rangle| \leq c\|w\|_W, \quad \forall w \in W$$

En particular

$$|\langle T, v\rangle| \leq c\|v\|_W, \quad \forall v \in W. \tag{1.6}$$

entonces $T \in V'$ con la norma de $W$. Por lo tanto

$$W' \subset V' \text{ con la norma de } W.$$

Si $V \subset W$ es una inyección continua ($\|v\|_W \leq M\|v\|_V$) para algún $M$, entonces si $T \in V'$, de (1.7) se tendría

$$|\langle T, v\rangle| \leq c\|v\|_W \leq cM\|v\|_V, \quad \forall v \in V;$$

Por lo tanto $W' \subset V'$ si $V \subset W$ (inclusión continua).

De las inclusiones de Sobolev sabemos que

$$D(\Omega) \subset \cdots H^k(\Omega) \subset H^{k-1}(\Omega) \subset \cdots H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

de ello se cumple

$$L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \cdots \subset H^{-k+1}(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega) \subset \cdots \subset D'(\Omega)$$

obteniendo la siguiente cadena de inclusiones continuas para $k$ entero positivo

$D(\Omega) \subset \cdots \subset H^k(\Omega) \subset H^{k-1}(\Omega) \subset \cdots \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \cdots \subset H^{-k+1}(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega) \subset \cdots \subset D'(\Omega)$

## 1.4. Espacios de Hilbert

### Espacio con Producto Interno

Sea $H$ un espacio vectorial, $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{H}$ es un producto interno si:

*i)* $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in H.$

*ii)* $\langle x, x\rangle = 0, \quad \text{si} \quad x = 0.$

*iii)* $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in H$, $\alpha$ escalar.

*iv)* $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

*v)* $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$.

**Ejemplo 1.4.1.** $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Demostraremos que $\langle x, y\rangle$ es un producto interno

*i)* $\langle x, x\rangle \geq 0$

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
\text{Como } x_i^2 &\geq 0 \\
\langle x, x\rangle &\geq 0.
\end{aligned}$$

*ii)* $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= 0 \\
\iff x_i^2 &= 0 \text{ para cada } i. \\
\iff |x_i| &= 0 \text{ para cada } i. \\
\iff x_i &= 0 \text{ para cada } i. \\
\iff x &= 0.
\end{aligned}$$

*iii)* $\langle \alpha x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha\langle x, y\rangle.$

*iv)* $\overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{n} y_i, x_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i}\,\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y\rangle.$

*v)* $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle.$

$$\begin{aligned}
\langle x + z, y\rangle &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + z_i)y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i + z_i y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i y_i \\
&= \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle
\end{aligned}$$

Luego : $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio con producto interno.

**Ejemplo 1.4.2.** $l^2 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ es un espacio con producto interno, con

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \overline{y}_n$$

Demostraremos que $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \overline{y}_n$ es un producto interno.

*i)* $\langle x, x\rangle \geq 0$

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n.\overline{x}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \\
\text{Como } |x_n|^2 &\geq 0 \\
\langle x, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \geq 0 \\
\langle x, x\rangle &\geq 0
\end{aligned}$$

*ii)* $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n.\overline{x}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 0 \\
\iff |x_n|^2 &= 0 \text{ para cada } n. \\
\iff x_n &= 0 \text{ para cada } n. \\
\iff x &= 0 \text{ para cada } n.
\end{aligned}$$

*iii)* $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha x, y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n)\overline{y}_n \\
&= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n)\overline{y}_n \\
&= \alpha\langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

*iv)*

$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle &= \overline{\sum_{n=1}^{\infty} y_n.\overline{x}_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y}_n.x_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n.\overline{y}_n \\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

*v)* $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$

$$\begin{aligned}\langle x+z, y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + z_n)\overline{y}_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n.\overline{y}_n + z_n.\overline{y}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n.\overline{y}_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n.\overline{y}_n \\ &= \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle.\end{aligned}$$

**Propiedades**

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio con producto interno

*i)* $\langle z, x+y\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle.$

*ii)* $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$

**Desigualdad de Cauchy-Schwartz**

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

**Observación.** Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio con producto interno.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in H$$

define una norma sobre $H$.

La norma proviene de un producto interno.

*i)* $\|x\| \geq 0$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ \text{se sabe que } \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \Longrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} &\geq 0 \\ \Longrightarrow \|x\| &\geq 0 \end{aligned}$$

*ii)* $\|x\| = 0 \iff x = 0$

$$\begin{aligned} \|x\| &= 0 \\ \sqrt{\langle x, x \rangle} &= 0 \\ \iff \langle x, x \rangle &= 0 \\ \iff x &= 0 \end{aligned}$$

*iii)* $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} \\
\|\alpha x\| &= \sqrt{\alpha.\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} \\
\|\alpha x\| &= \sqrt{|\alpha|^2\langle x, x\rangle} \\
\|\alpha x\| &= |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} \\
\|\alpha x\| &= |\alpha|\|x\|
\end{aligned}$$

*iv)* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2 \\
\|x+y\|^2 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
\|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

**Desigualdad de Cauchy-Schwartz.**

Si la norma proviene de un producto interno entonces:

$$|\langle x, y\rangle| < \|x\|.\|y\|$$

La norma $\|\cdot\|$ proviene de un producto interno si cumple la ley del paralelogramo.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

- $$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

- $$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**Espacio de Hilbert**

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno.

El espacio $H$ es de Hilbert con $\|\cdot\|$ si

*i)* $H$ es de Banach con $\|\cdot\|$.

*ii)* $\|\cdot\|$ provenga del producto interno.

### 1.4.1. Algunos Espacios de Hilbert

1. $\mathbb{R}^n$ con $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

   En efecto:

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \qquad \text{es un espacio de Banach}$$

   El producto interno en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
\langle x, x\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \\
\langle x, x\rangle &= \|x\|^2 \\
\|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle}
\end{aligned}$$

   Luego: $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ proviene de un producto interno.

2. $l^2 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ con $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$

   En efecto:

   $l^2$ es un espacio con producto interno

   $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i;\ x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}; y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2.$

   $(l^2, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$

El producto interno en $l^2$

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i \\
\langle x, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i \\
\langle x, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^2 \\
\langle x, x\rangle &= \|x\|^2 \\
\|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ proviene de un producto interno.

Luego:

$l^2$ es Hilbert con $\|\cdot\|$.

### 1.4.2. Funciones Lineales

Sea $V$ un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y norma $\|\cdot\|_V$.

**Definición 1.4.1.** (Funcional Lineal).

Una funcional lineal en $V$ es una función:

$$\begin{aligned}
L : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto L(u)
\end{aligned}$$

tal que $L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Una funcional lineal es acotada (contínua) si existe $C \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|L(v)| \leq C\|v\|_V \quad \forall v \in V \tag{1.7}$$

**Ejemplo 1.4.3.** $V = L_2([a,b])$

$$\begin{aligned} l : L_2([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto l(g) = \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

Veamos:

($i$) Linealidad:

$$l(\alpha g + \beta f) = \int_a^b [\alpha g(x) + \beta f(x)]dx = \alpha \int_a^b g(x)dx + \beta \int_a^b f(x)dx = \alpha l(g) + \beta l(f)$$

Es acotada, puesto que por la desigualdad de Cauchy-Schawrz

$$\begin{aligned} |l(g)| &= \left|\int_0^1 g(x)dx\right| \leq \int_0^1 |g(x)|dx \leq \|1\| \, \|g\| \\ |l(g)| &\leq c\|g\| \end{aligned}$$

## 1.5. Teorema de la Traza

**Teorema 1.3.** *Supongamos que $\Omega$ es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ de frontera $\partial\Omega$ "suficientemente regular". Entonces $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ y la aplicación:*

$$\gamma_0 : V \mapsto \gamma_0 V = V|_{\partial\Omega}$$

*de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ en $C^0(\partial\Omega)$ se prolonga por continuidad en una aplicación lineal continua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\partial\Omega)$, también denotada por $\gamma_0$.*

La aplicación $\gamma_0$ así definida se llama **aplicación traza**, y su valor $\gamma_0 V$ para una función $V$ de $H^1(\Omega)$ se llama **traza de V sobre $\partial\Omega$**. Es importante hacer notar que la imagen $\gamma_0(H^1(\Omega))$ es un subespacio propio de $L^2(\partial\Omega)$, es decir, la aplicación $\gamma_0$ no es sobreyectiva de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\partial\Omega)$.

**Aplicación de la Traza**

**Teorema 1.4.** *Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ de frontera $\partial\Omega$ de clase $C^1$ a trozos. Entonces $H_0^1(\Omega)$ es el* núcleo *de la aplicación traza $\gamma_0$ de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\partial\Omega)$, es decir.*

$$H_0^1(\Omega) = \{V \in H^1(\Omega) : V|_{\partial\Omega} = 0\}$$

*es decir, $\gamma_0$ sobre funciones de clase $C^1$, es su restricción sobre $\partial\Omega$.*

**Nota.** En realidad, Rango$(\gamma_0) = H^{1/2}(\partial\Omega)$. Por lo tanto, $H^{1/2}(\partial\Omega)$ es denso en $L^2(\partial\Omega)$.

**Fórmula de Green para funciones de $H_0^1(\Omega)$.**

$\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$, se tiene:

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}vdx \ , \quad \forall\, i = \overline{1,n}$$

**Fórmula de Green clásica a las funciones $D(\Omega)$:**

$$\int_\Omega u_i\ vdx = -\int_\Omega u\ v_i dx + \int_{\partial\Omega} u\ v\ \gamma^i ds$$

donde $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \cdots, \gamma^n)$ vector normal y $\gamma^i$ es la i-ésima componente del vector normal.

Demostraremos que:

$$\int_\Omega \Delta u.v dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla v, \quad \forall v \in C_0^\infty$$

En efecto:

Hacemos $u = u_{x_i}$

Reemplazando en Teorema de Green clásica o Teorema de divergencia:

$$\int_\Omega u_{x_i}.v dx = \int_\Omega u_{x_i}.v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u_{x_i} v\ \gamma^i ds$$

Tomando $\sum_{i=1}^{3}$ tenemos.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{3} \int_\Omega u_{x_i x_i} v\ dx &= -\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i}\ dx + \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial\Omega} u_{x_i} v\ \gamma^i ds \\
\int_\Omega \sum_{i=3}^{3} u_{x_i x_i} v\ dx &= -\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_{x_i} v_{x_i}\ dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{3} u_{x_i} v\ \gamma^i ds \\
\int_\Omega \Delta u.v\ dx &= -\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{3} u_{x_i}\ \gamma^i.v ds \\
\int_\Omega \Delta u.v\ dx &= -\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx + \int_{\partial\Omega} \cancelto{0}{\Delta u.\gamma.v ds} \\
\Rightarrow \int_\Omega \Delta u.v\ dx &= -\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx.
\end{aligned}$$

## 1.6. Método Variacional

1. Se precisa la noción de solución clásica y de solución débil en los espacios de Sobolev, y se demuestra que toda solución clásica es solución débil.

2. Se establece la existencia y unicidad de la solución débil usando el Teorema de Lax-Milgram.

3. Recuperación de la solución clásica, se demuestra que si una solución débil se le suma la regularidad se logra recuperar la solución clásica.

**Definición 1.6.1.** Sea $H$ un espacio de Hilbert. Se dice que la forma bilineal

$$\begin{aligned} a : H \times H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) \end{aligned}$$

es continua si existe una constante $C > 0$ tal que

$$a(u, v) \leq C\|u\|_H\|v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

y es $H-$elíptica si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|_H^2, \quad \forall u \in H.$$

En caso de existir, $C$ y $\alpha$ son llamadas constantes de continuidad y elipticidad, respectivamente.

A continuación presentaremos el teorema de Lax-Milgram, importante para el estudio de existencia y unicidad de la solución.

**Teorema 1.5.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y $a$ una forma bilineal, continua y coersiva. Entonces para cada $f \in H^1$ ($f$ lineal y continua) existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \ , \quad \forall v \in H$$

*además, si $a$ es simétrica, entonces $u$ es caracterizado por la propiedad*

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle \right\}$$

**Demostración.** Ver [3].

# Capítulo 2:

# Formulación Variacional de Problemas de Contorno

## 2.1. El problema de Neumann homogéneo asociado a la ecuación $-\Delta + I$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto acotado de clase $C^1$. Dado $f \in L^2(\Omega)$. Hallar $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \Omega$ y solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada normal exterior de $u$ es decir $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \gamma$ siendo $\gamma$ el vector unitario exterior a $\partial\Omega$.

Supongamos que $u \in H^2$, de modo que la ecuación anterior tiene sentido, para esto tomemos una función *test* $v \in H^1(\Omega)$.

Multiplicando la primera ecuación por una función $v \in H^1(\Omega)$ e integrando en $\Omega$.

$$\int_\Omega -\Delta u.v\ dx + \int_\Omega u.v \ = \ \int_\Omega fv\ dx \ \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.2}$$

Utilizando la fórmula de Green:

$$-\int_\Omega \Delta u.v\ dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}.v\ ds,$$

de modo que la ecuación anterior nos queda

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}.v\ ds + \int_\Omega u.v\ dx \ = \ \int_\Omega fv\ dx\ ,\ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.3}$$

teniendo en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx + \int_\Omega u.v\ dx \ = \ \int_\Omega fv\ dx\ ,\ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.4}$$

Por lo tanto el problema (2.4) recibe el nombre de formulación variacional o débil, como:

$$\text{Dada } f \in L^2(\Omega) \quad , \quad \text{hallar un } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que ,}$$

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx + \int_\Omega u.v\ dx \ = \ \int_\Omega f.v\ dx \ \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.5}$$

**Teorema 2.1.** *El problema anterior tiene solución única.*

Para la demostración de este teorema utilizaremos Lax-Milgran.

Sea $u, v \in H^1$, $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + u.v)dx$$

$$\text{y} \quad L : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definido por}$$

$$L(v) = \int_\Omega f.v \; dx.$$

Demostraremos la **Bilinealidad.**

En efecto

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in H^1(\Omega)$ se sigue

$$\begin{aligned}
a(\lambda u + \mu v, w) &= \int_\Omega \nabla(\lambda u + \mu v)\nabla w + (\lambda u + \mu v)w \; dx \\
&= \int_\Omega [(\lambda \nabla u + \mu \nabla v)\nabla w + \lambda u.w + \mu v.w] \, dx \\
&= \lambda \int_\Omega \nabla u.\nabla w \; dx + \mu \int_\Omega \nabla v.\nabla w \; dx + \lambda \int_\Omega u.w \; dx + \mu \int_\Omega v.w \; dx \\
&= \lambda \int_\Omega (\nabla u.\nabla w + u.w)dx + \mu \int_\Omega (\nabla v.\nabla w + v.w)dx \\
&= \lambda a(u, w) + \mu a(v, w)
\end{aligned}$$

Para la linealidad de la otra componente se demuestra en forma análoga.

$$\begin{aligned}
a(w, \lambda u + \mu v) &= \int_\Omega \nabla w \nabla(\lambda u + \mu v) + w(\lambda u + \mu v)\, dx \\
&= \int_\Omega [(\lambda \nabla u + \mu \nabla v)\nabla w + \lambda u.w + \mu v.w]\, dx \\
&= \lambda \int_\Omega \nabla u.\nabla w\, dx + \mu \int_\Omega \nabla v.\nabla w\, dx + \lambda \int_\Omega u.w\, dx + \mu \int_\Omega v.w\, dx \\
&= \lambda \int_\Omega (\nabla w.\nabla u + w.u) dx + \mu \int_\Omega (\nabla w.\nabla v + w.v) dx \\
&= \lambda a(w, u) + \mu a(w, v)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $a(u, v)$ es bilineal.

**Continuidad** se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz, en efecto

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \int_\Omega |u||v| dx + \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 + |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 + |\nabla v|^2\right)^{1/2} \\
&= 2\left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 + |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= 2\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \\
&= 2\|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $|a(u, v)| \leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)}$, la constante de continuidad es $C = 2$.

$H^1$**−elipticidad** se obtiene de la definición de norma en $H^1$,

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega (\nabla u.\nabla u + u.u)dx = \int_\Omega ((\nabla u)^2 + u^2)dx \\ &= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $a(u,u) \geq \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, la constante de $H^1$−elipticidad es $\alpha = 1$.

Finalmente $L : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$L(v) = \int_\Omega f\ v\ dx$$

es lineal y continuo Demostraremos la **Linealidad**, en efecto: $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

se sigue:

$$\begin{aligned} L(\lambda u + \mu v) &= \int_\Omega f(\lambda u + \mu v)\ dx \\ &= \lambda \int_\Omega f.u\ dx + \mu \int_\Omega f.v\ dx \\ &= \lambda L(u) + \mu L(v). \end{aligned}$$

**Continuidad**, usando desigualdad de Cauchy-Schwartz y $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^k}$ y $f \in L^2(\Omega)$

fijo se sigue

$$\begin{aligned}
|L(u)| &= \left|\int_\Omega f\ u\ dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |f|\ |u|\ dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \|f\|_{L^2}\ \|u\|_{L^2} \\
&\leq \|f\|_{L^2}.\|u\|_{H^1} \quad \text{si} \quad k = \|f\|_{L^2}
\end{aligned}$$

se sigue la continuidad.

Por lo tanto, como las hipótesis del teorema de Lax-Milgram se verifica, se tiene que el problema variacional (3.5) tiene única solución $u \in H^1(\Omega)$.

Recíprocamente, si $u \in H^1(\Omega)$ es solución del problema débil, entonces podemos recuperar las ecuaciones de la formulación fuerte.

Sea $\varphi \subset D(\Omega) = C_0^\infty \subset H^1(\Omega)$ de la ecuación (2.4) se tiene

$$\int_\Omega \nabla u\ \nabla\varphi\ dx + \int_\Omega u\varphi\ dx = \int_\Omega f\ \varphi\ dx, \quad \forall\varphi \in D(\Omega)$$

Interpretando las integrales como productos de dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$, podemos escribir

$$\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} + \langle u, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)}, \quad \forall\varphi \in D(\Omega) \tag{2.6}$$

y por definición (2.7) de derivada en sentido de las distribuciones tenemos

$\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \langle -\Delta u, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)}$, y por propiedad de producto interno se sigue

en (2.6)

$$\begin{aligned}\langle -\Delta u, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} + \langle u, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= \langle f, \varphi\rangle \\ \langle -\Delta u + u - f, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega)\end{aligned}$$

Y así podemos recuperar la ecuación de la formulación clásica en el sentido de distribuciones,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } D'(\Omega) \tag{2.7}$$

Como $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in L^2$, desde que $u \in H^1(\Omega)$, se tiene

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad L^2(\Omega) \tag{2.8}$$

Para recuperar la condición de contorno se necesita cierta regularidad en la solución. En efecto, si suponemos que $u \in H^2(\Omega)$ tiene sentido integrar por partes en la ecuación de la formulación débil (2.5), $\nabla u \in L^2(\Omega)$ además, como $u \in H^2(\Omega)$ entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$, $1 \leq i \leq 3$ y por lo tanto se puede definir las trazas de estas funciones $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\partial\Omega}$, $1 \leq i \leq 3$, que pertenecen a $L^2(\partial\Omega)$.

La función $\gamma^i \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\partial\Omega}$ es una función de $L^2(\Omega)$ por ser producto de una función de $L^\infty(\partial\Omega)$ y otra de $L^2(\Omega)$ y podemos definir la derivada normal.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \nabla u.\gamma = \sum_{i=1}^{3} \gamma^i \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{2.9}$$

como función de $L^2(\partial\Omega)$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta uv\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, ds + \int_\Omega uv\, dx &= \int_\Omega fvdx,\ \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_\Omega (-\Delta u + u)vdx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} vds &= \int_\Omega fvdx,\ \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Pero por (2.8),

$$\int_\Omega fvdx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, ds = \int_\Omega fvdx,\ \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

entonces

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.10}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ en } \partial\Omega. \tag{2.11}$$

## 2.2. El problema de Neumann no homogéneo asociado a la ecuación $-\Delta + I$

Dado $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^2$. Hallar $u$ definida y solución de,

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada normal hacia afuera sobre la frontera de $\Omega$.

Supongamos que $u$ es suficientemente regular de modo que la ecuación anterior tenga

sentido, por ejemplo que $u \in H^2(\Omega)$, entendiendo las derivadas en sentido de distribuciones, para esto tomemos una función en $H^1(\Omega)$.

Multiplicando la primera ecuación por una función $v \in H^1(\Omega)$ e integrando sobre $\Omega$.

$$\int_\Omega -\Delta u.v\ dx + \int_\Omega u.v \ = \ \int_\Omega fv\ dx \quad \text{en } \Omega \tag{2.13}$$

Utilizando la fórmula de Green:

$$\int_\Omega \Delta u.v\ dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}.v\ ds,$$

obtenemos

$$-\int_\Omega \Delta u.v\ dx \ = \ \int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}.v\ ds \tag{2.14}$$

de modo que la ecuación anterior nos queda

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}.v\ ds + \int_\Omega u.v\ dx \ = \ \int_\Omega fv\ dx\ ,\ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.15}$$

y utilizando la condición de la frontera $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ sobre $\partial\Omega$ se sigue que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx + \int_\Omega u.v\ dx \ = \ \int_\Omega fv\ dx + \int_{\partial\Omega} g.v\ ds\ ,\ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.16}$$

esta ecuación tiene sentido aunque $u$ no esté en $H^2(\Omega)$, basta con que $u \in H^1(\Omega)$.

Por lo tanto el problema (2.15) recibe el nombre de formulación variacional o débil,

como:

Dada $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}$, hallar un $u \in H^1(\Omega)$ tal que,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx + \int_\Omega u.v\ dx = \int_\Omega f.v\ dx + \int_{\partial\Omega} g.v\ ds$$

**Teorema 2.2.** *El problema anterior tiene solución única.*

Para la demostración de este teorema utilizaremos Lax-Milgran.

Sea $u, v \in H^1$, $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + u.v)dx$$

y dado $f \in L^2(\Omega)$ $L : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$L(v) = \int_\Omega fv\ dx + \int_\Omega gv\ ds$$

Demostraremos la

**Bilinealidad.** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in H^1(\Omega)$ se sigue

$$\begin{aligned}
a(\lambda u + \mu v, w) &= \int_\Omega [\nabla(\lambda u + \mu v)\nabla w + (\lambda u + \mu v)w]dx \\
&= \int_\Omega (\lambda \nabla u + \mu \nabla v)\nabla w + \lambda u.w + \mu v.w\ dx \\
&= \lambda \int_\Omega \nabla u.\nabla w\ dx + \mu \int_\Omega \nabla v.\nabla w\ dx + \lambda \int_\Omega u.w\ dx + \mu \int_\Omega v.w\ dx \\
&= \lambda \int_\Omega (\nabla u.\nabla w + u.w)dx + \mu \int_\Omega (\nabla v.\nabla w + v.w)dx \\
&= \lambda a(u, w) + \mu a(v, w)
\end{aligned}$$

Para la linealidad de la otra componente se demuestra en forma análoga.

$$\begin{aligned}
a(w, \lambda u + \mu v) &= \int_\Omega \nabla w \nabla(\lambda u + \mu v) + w(\lambda u + \mu v)\, dx \\
&= \int_\Omega [(\lambda \nabla u + \mu \nabla v)\nabla w + \lambda u.w + \mu v.w]\, dx \\
&= \lambda \int_\Omega \nabla u.\nabla w\, dx + \mu \int_\Omega \nabla v.\nabla w\, dx + \lambda \int_\Omega u.w\, dx + \mu \int_\Omega v.w\, dx \\
&= \lambda \int_\Omega (\nabla w.\nabla u + w.u) dx + \mu \int_\Omega (\nabla w.\nabla v + w.v) dx \\
&= \lambda a(w, u) + \mu a(w, v)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $a$ es bilineal.

**Continuidad**, se obtiene gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz, en efecto

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \int_\Omega |u||v| dx + \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 + |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 + |\nabla v|^2\right)^{1/2} \\
&= 2 \left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 + |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= 2 \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \\
&= 2\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \text{ la constante de continuidad es } C = 2.
\end{aligned}$$

$II^1$**−elipticidad** se obtiene de la definición de norma en $II^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega (\nabla u.\nabla u + u.u)dx = \int_\Omega ((\nabla u)^2 + u^2)dx \\ &= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $a(u,u) \geq \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, la constante de $H^1$−elipticidad es $\alpha = 1$.

Finalmente dado $f, g \in L^2(\Omega)$ y

$$\begin{aligned} L &: H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definido por} \\ L(v) &= \int_\Omega f\ v\ dx + \int_{\partial\Omega} g\ v\ ds \end{aligned} \tag{2.17}$$

Demostraremos la

**Linealidad**, $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se sigue:

$$\begin{aligned} L(\lambda u + \mu v) &= \int_\Omega f(\lambda u + \mu v)dx + \int_{\partial\Omega} g(\lambda u + \mu v)ds \\ &= \int_\Omega (\lambda f u + \mu f v)dx + \int_{\partial\Omega} g(\lambda g u + \mu g v)ds \\ &= \lambda \int_\Omega f\ u\ dx + \mu \int_\Omega f\ v\ dx + \lambda \int_{\partial\Omega} g\ u\ ds + \mu \int_{\partial\Omega} g\ v\ ds \\ &= \lambda \left[\int_\Omega f\ u\ dx + \int_{\partial\Omega} g\ u\ ds\right] + \mu \left[\int_\Omega f\ v\ dx + \int_{\partial\Omega} g\ v\ ds\right] \\ &= \lambda L(u) + \mu L(v). \end{aligned}$$

**Continuidad**,

si hacemos $l(v) = \int_\Omega f v dx$ y $z(v) = \int_{\partial\Omega} g\ v\ ds$

Entonces en (2.16) se sigue

$$L(v) = l(v) + z(v) \tag{2.18}$$

La Continuidad de $l$ se sigue de Cauchy-Schwartz y la desigualdad $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= \int_\Omega |f|\,|v| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \|f\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2}\,\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

tomando $k = \|f\|_{L^2}$ se sigue la continuidad de $l$

Nos resta demostrar la continuidad de $z$, utilizando la desigualdad $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|\cdot\|_{H^1(\partial\Omega)}$

y para $g \in L^2(\Omega)$ fijo se sigue

$$\begin{aligned}
|z(v)| &\leq \int_{\partial\Omega} |g|\,|v|\,ds \\
&\leq \left(\int_{\partial\Omega} |g|^2 ds\right)^{1/2} + \left(\int_{\partial\Omega} |v|^2 ds\right)^{1/2} \\
&= \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_{H^1(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

tomando $K' = \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}$ se sigue la continuidad de $z$

Luego como $l$ y $z$ son continuas de (2.17) se sigue que $L$ es continua.

Por lo tanto, como las hipótesis del teorema de Lax-Milgram se verifica, se tiene que el problema variacional (2.11) tiene única solución $u \in H^1(\Omega)$.

Recíprocamente, si $u \in H^1(\Omega)$ es solución del problema débil, entonces podemos recuperar las ecuaciones de la formulación fuerte.

Sea $\varphi \subset D(\Omega) = C_0^\infty \subset H^1(\Omega)$ de la ecuación (2.15) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \, \nabla\varphi dx + u\varphi dx &= \int_\Omega f\varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} g\varphi ds, \quad \forall\varphi \in D(\Omega) \\
\text{pero} \int_{\partial\Omega} g\varphi &= 0, \text{ pués } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \\
\text{Luego} \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi + u\varphi \, dx &= \int_\Omega f \, g \, dx,
\end{aligned}$$

Interpretando las integrales como productos de dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$, podemos escribir

$$\langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} + \langle u, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} \quad \forall\varphi \in D(\Omega) \tag{2.19}$$

y por definición de derivada en sentido de las distribuciones, tenemos $\langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \langle -\Delta u, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)}$, y por propiedad de producto interno se sigue en (2.18)

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta u, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} + \langle u, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= \langle f, \varphi \rangle \\
\langle -\Delta u + u - f, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= 0 \quad \forall\varphi \in D(\Omega)
\end{aligned}$$

Y así podemos recuperar la ecuación de la formulación clásica en el sentido de distribuciones,

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } D'(\Omega)$$

Como $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in L^2(\Omega)$, entonces $\Delta u \in L^2(\Omega)$.

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad L^2(\Omega) \tag{2.20}$$

Para recuperar la condición de contorno se necesita cierta regularidad en la solución.

En efecto, supongamos que $u \in H^2(\Omega)$ tiene sentido integrar por partes en la ecuación de la formulación débil, y $\Delta u \in L^2(\Omega)$

Si $u \in H^2(\Omega)$ entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$, $1 \leq i \leq 3$ y por lo tanto se puede definir las trazas de estas funciones $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\partial\Omega}$, $1 \leq i \leq 3$ que pertenecen a $L^2(\partial\Omega)$. La función $\gamma^i \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\partial\Omega}$ es una función de $L^2(\partial\Omega)$ por ser producto de una función de $L^\infty(\partial\Omega)$ y otra de $L^2(\partial\Omega)$ y podemos definir la derivada normal.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \nabla u.\gamma = \left.\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}\gamma^i\right|_{\partial\Omega} \tag{2.21}$$

como función de $L^2(\partial\Omega)$

Luego

$$\int_\Omega -\Delta u v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds \ , \forall v \in H^1(\Omega)$$

Pero por (2.19), se sigue

$$\int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds, \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

entonces

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) v \, ds = 0 \ , \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.22}$$

Entonces, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ en $\partial\Omega$

# Conclusiones

1. La formulación variacional o enfoque variacional es una herramienta muy útil para el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales parciales por permitir estudiar las soluciones en un ambiente muy general, y así superar la problemática presentada por los métodos clásicos.

2. La formulación variacional es de fácil adaptabilidad a diversas situaciones expuesta de manera parcial en el presente trabajo.

3. La formulación variacional ha permitido que sea la técnica preponderante para el análisis de problemas de ecuaciones diferenciales parciales.

4. La formulación variacional destaca por la aproximación de sus soluciones, basada en demostrar que toda solución fuerte o clásica es una solución débil.

5. En el problema de Newmann solo la primera condición de contorno aparece en el espacio funcional elegido para resolver el problema que es muy diferente a otros problemas como de Dirichlet y los problemas mixtos.

# Bibliografía


[1] **Brézis H,**, "*Análisi Funcional*", Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[2] **Ciarlet P. G**, "*The Finite Element Method for Elliptic Problems*", North-Holland, Amster-dam, 1978.

[3] **Evans L**, "*Partial Differential Equations*", American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.