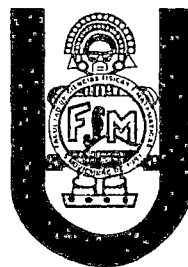


*Universidad Nacional*  
*"Pedro Ruiz Gallo"*



**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**

**EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS  
EN LA JERARQUIZACIÓN DE LAS  
PÁGINAS WEB**

**TESIS**

12 ABR. 2015

**PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**PRESENTADA POR:**

BACH.MAT. KARINA VIRGINIA CHAVESTA AYASTA  
BACH.MAT. GUISELLA DEL ROCÍO CHAFLOQUE SÁNCHEZ

**ASESOR:**

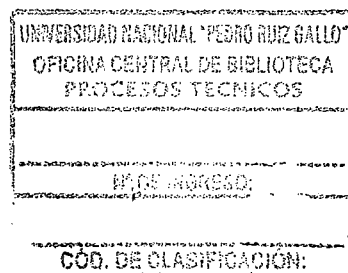
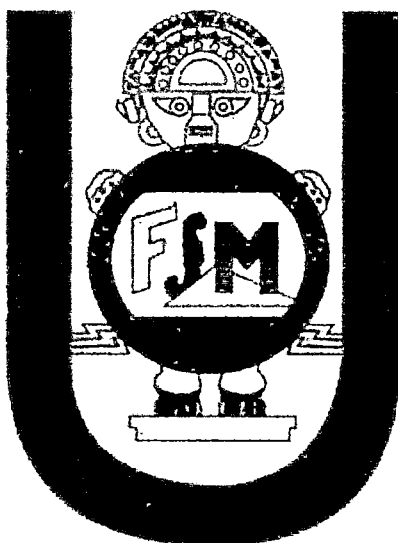
LIC.MAT. ROLANDO CÓRDOVA DESCALZI

**LAMBAYEQUE - PERÚ**

**2015**

**UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA**

**EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS EN LA JERARQUIZACIÓN DE  
LAS PÁGINAS WEB**



**TESIS PRESENTADA POR**

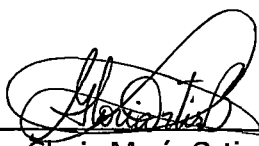
**BACH.MAT. KARINA VIRGINIA CHAVESTA AYASTA  
BACH.MAT. GUISELLA DEL ROCÍO CHAFLOQUE SÁNCHEZ  
PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**ASESORES: LIC.MAT. ROLANDO CÓRDOVA DESCALZI**

**LAMBAYEQUE-PERÚ  
2015**

**UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA**

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada "EL teorema de Perron-Frobenius en la Jerarquización de las páginas web" Presentada por la Bach. Mat. Karina Virginia Chavesta Ayasta y la Bach. Mat. Guisella del Rocío Chafloque Sánchez, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática.



---

Dra. Gloria María Ortiz Basauri  
**Presidente del Jurado**



---

Lic. Mat. Marco Antonio Peralta Lui  
**Secretario del Jurado**



---

Lic. Mat. Elmer Lluén Cumpa  
**Vocal del Jurado**

Fecha de defensa:

10 de Julio 2015

## UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

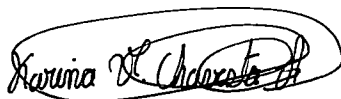
Título de la Tesis: EL teorema de Perron-Frobenius en la Jerarquización de las páginas web.

Escuela Profesional: Matemática.

Autores: Bach. Mat. Karina Virginia Chavesta Ayasta.

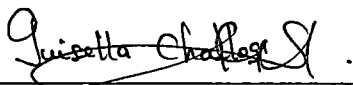
Bach. Mat. Guisella del Rocío Chafloque Sánchez.

Asesor: Lic. Mat. Rolando Córdova Descalzi.



---

Bach. Mat. Karina Virginia Chavesta Ayasta  
**Autor**



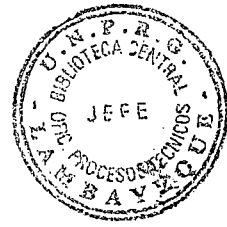
---

Bach. Mat. Guisella del Rocío Chafloque Sánchez  
**Autor**



---

Lic. Mat. Rolando Córdova Descalzi  
**Asesor**



## DEDICATORIA

Esta tesis se la dedico:

A DIOS, por permitir cumplir un RETO más en mi vida a pesar de las adversidades.

A mis padres Isabel e Hipólito por creer en mí, por su apoyo, sus consejos y estar conmigo en todo momento.

A mis hermanos que son lo más preciado que tengo, por acompañarme en la realización de mi vida profesional y personal.

A quien considero una persona especial en mi vida: Jorge Luis, por su comprensión, su paciencia y su apoyo incondicional.

**Guisella del Rocío**

Este trabajo de investigación de manera muy especial se la dedico:

A DIOS, por ser mi fortaleza ante todas mis adversidades.

A MIS PADRES: Alejandro y Dorka, en especial a mi madre por apoyarme aún más en los momentos difíciles.

Al mejor ESPOSO que DIOS me ha podido dar, Marco; por su paciencia, comprensión y confianza para lograr uno de mis sueños.

A MIS HIJOS: Aymar, Cielo y bebé que son mi motor y motivo para hacer realidad lo que tanto había anhelado.

A MIS HERMANOS: Rubén, María y Luciana por apoyarme constantemente de diversas maneras. A todos ellos les digo que sí se pueden hacer realidad nuestros sueños.

**Karina Virginia**

## **AGRADECIMIENTOS**

En el presente trabajo de tesis agradecemos en primer lugar a DIOS, por bendecirnos en la realización de este proyecto que es nuestro sueño anhelado.

A la Universidad Nacional “Pedro Ruiz Gallo”, por darnos la oportunidad de estudiar y ser profesionales.

A nuestros catedráticos que con su aporte científico han permitido llevar a cabo nuestros saberes y emprender nuevos retos en nuestra carrera profesional.

A nuestro asesor de Tesis, por su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, experiencia, paciencia y motivación ha logrado en nosotras el término de este proyecto.

A nuestro maestro y amigo, Mag. Fernando Huancas Suárez por su ayuda incondicional y aporte importante en la elaboración de este trabajo de investigación.

De manera especial agradecemos a la Dra. Gloria María Ortiz Basauri, por su aporte a nuestra formación profesional, su visión crítica en muchos aspectos cotidianos de la vida, por su rectitud como docente, por sus consejos que nos ayudan a formarnos como personas en el ámbito profesional.

A todas las personas que han formado parte de nuestra vida profesional.

De manera especial:

Quiero agradecer al ser que me acompaña en todo momento y permite que sea mejor persona cada día, por su entrega, su abnegación, su amor, su lucha constante, y ver su sueño realizado en sus hijos, por su apoyo incondicional, MI MADRE: Isabel Sánchez Sánchez a quien amo y admiro por siempre.

A mi familia por estar siempre apoyándome para realizarme profesionalmente, no sólo en conocimientos sino también en valores y virtudes.

**Karina Virginia**

**Guisella del Rocío**

## RESUMEN

En esta tesis, se hace un estudio bibliográfico sobre la aplicación del teorema de Perron-Frobenius en la jerarquización de las páginas web.

La tesis se divide en tres capítulos:

En el primer capítulo, es el marco teórico sobre la teoría de grafos así como su representación gráfica, en la sección 1.1, se revisan definiciones y resultados sobre grafos dirigidos, en la sección 1.2 se estudian los Subgrafos y sus propiedades, en la sección 1.3 se define una matriz de adyacencia, así como también se determinan condiciones bajo las cuales existe la inversa de una matriz y su aplicación en el cálculo de valores y vectores propios.

En el segundo capítulo, se revisan resultados útiles para la demostración del teorema de Perron-Frobenius, en la sección 2.1, se definen los espacios de Banach y sus principales propiedades, en la sección 2.2, se demuestra el teorema del punto fijo de Brouwer, así como el teorema más importante de esta tesis, es decir el teorema de Perron-Frobenius

En el tercer capítulo, se muestra la técnica del PageRank así como una aplicación de la teoría descrita en el capítulo 2, en la sección 3.1, se presentan las definiciones relacionadas con internet, en la sección 3.2, se describe el algoritmo PageRank, mediante el cual Google jerarquiza sus páginas Web, en la sección 3.3, se muestra una aplicación del teorema de Perron-Frobenius, para seis páginas Web, poniendo de manifiesto la fuerza de la técnica revisada en esta tesis.

**INDICE GENERAL**

**Resumen.....6**

**1. Capítulo 1: GRAFOS.....9**

**1.1. Grafos dirigidos .....10**

**1.2. Subgrafos.....13**

**1.3. Matriz de adyacencia.....21**

**2. Capítulo 2: Teorema de Perron-Frobenius.....38**

**2.1. Teorema del punto fijo de Banach.....38**

**2.2. Teorema de Perron-Frobenius.....52**

**3. Capítulo 3: Aplicación del Teorema de Perron-Frobenius..... 64**

**3.1. Introducción.....64**

**3.2. El modelo PageRank.....66**

**3.3. Aplicación del teorema de Perrón – Frobenius .....71**

**Conclusiones.....77**

**Bibliografía.....78**



# CAPÍTULO 1: GRAFOS

Las líneas telefónicas, las líneas de televisión por cable, el transporte colectivo, las líneas del metropolitano de la ciudad de Lima, los circuitos eléctricos de nuestras casas, los 3 circuitos eléctricos en los automóviles, constituyen ejemplos particulares de lo que en Matemáticas se conoce con el nombre de **grafos**. En este capítulo se tratará de explicar lo que son los grafos, sus tipos, y algunas derivaciones de ellos, así como su representación gráfica.

El siguiente mapa representa un grafo de las rutas de transporte entre las ciudades de Chota y Lima.

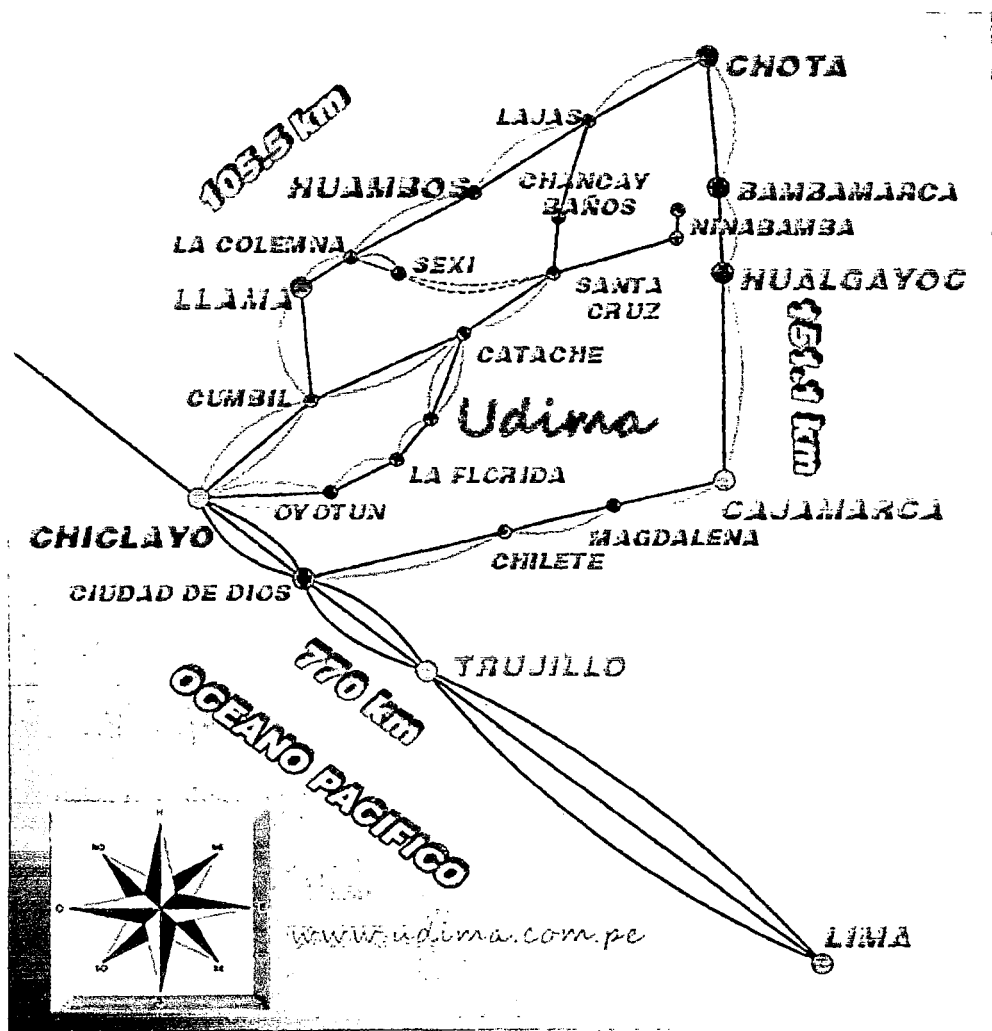


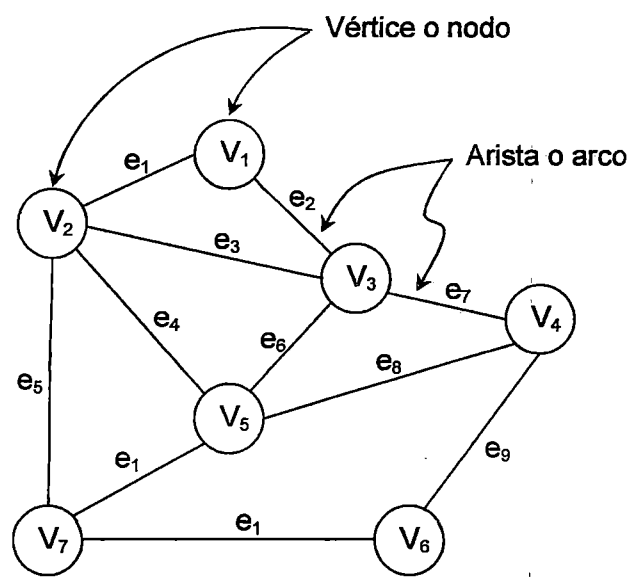
Fig.1. Rutas de transporte entre las ciudades de Chota y Lima.

En la siguiente sección se definen los tipos de grafos existentes.

# 1. GRAFOS

**Definición:** Dados dos conjuntos  $V$  y  $E$ , donde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  cuyos elementos  $v_i$  son llamados vértices o nodos y el conjunto  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V \times V$ , cuyos los elementos  $e_k$  son llamados aristas o arcos, con  $e_k \in \{v_i, v_j\}, v_i \neq v_j$ . Al par  $G = (V, E)$  se le llama **grafo**.

Generalmente un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas) como se muestra a continuación.



*Fig.2. Un grafo y sus elementos*

El siguiente gráfico muestra que al buscar una información en internet se origina un grafo, en donde los vértices están constituidos por las páginas web y las aristas son las conexiones que existen entre estas páginas web.

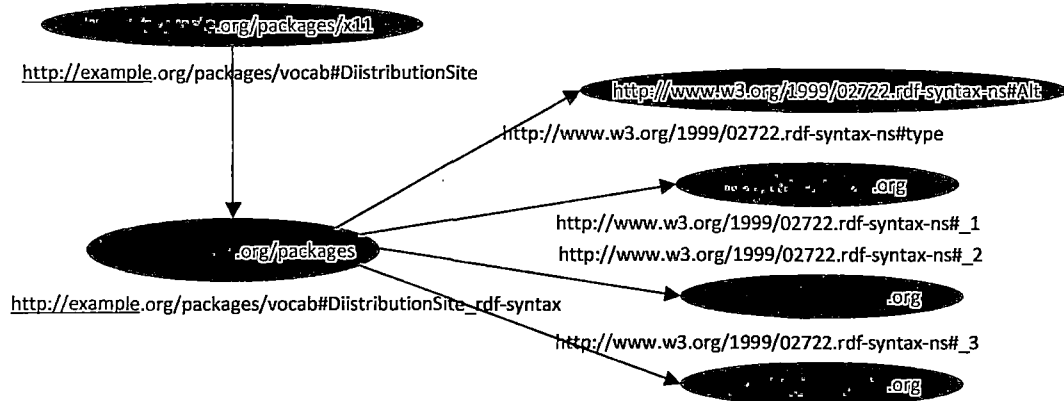


Fig.3. Búsqueda de información en Internet vista como un grafo.

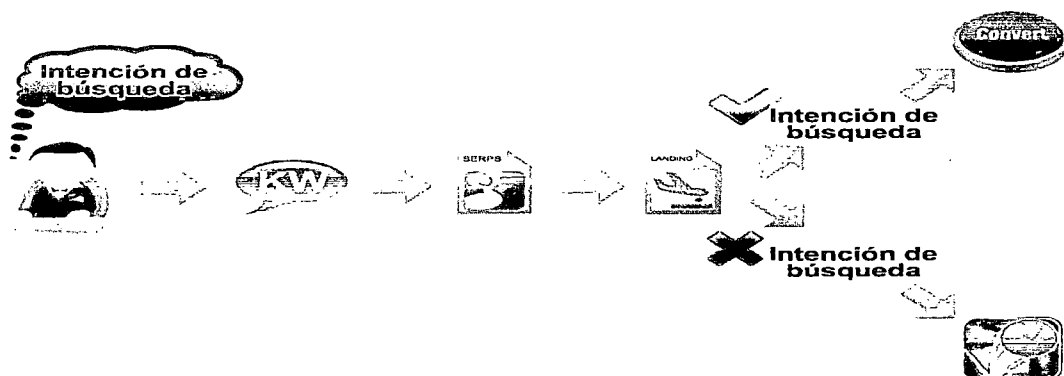
Existen dos tipos de grafos, los **dirigidos** y los **no dirigidos**, en particular se denotará los grafos dirigidos.

### 1.1 GRAFOS DIRIGIDOS

**Definición:** Sea  $V$  un conjunto finito de puntos no vacío, un **grafo dirigido o dígrafo**  $G$  sobre  $V$  está formado por los elementos de  $V$  (llamados vértices o nodos) y un subconjunto  $E \subset V \times V$ , conocido como las aristas (dirigidas) o arcos de  $G$ .

Si  $a, b \in V$  y  $(a, b) \in E$ , entonces existe una arista de  $a$  (origen o fuente de la arista) hacia  $b$  (fin o vértice final de la arista), y decimos que  $b$  es adyacente desde  $a$  y que  $a$  es adyacente hacia  $b$ . Además, si  $a \neq b$ , entonces  $(a, b) \neq (b, a)$ . Una arista de la forma  $(a, a)$  es llamado un lazo (en  $a$ ). Si  $v$  es un extremo de una arista  $a$ , se dice que  $a$  es incidente con  $v$ . Un vértice que no tiene aristas se llama vértice aislado.

En el siguiente grafico se muestra un grafo dirigido obtenido al buscar una información en la web.

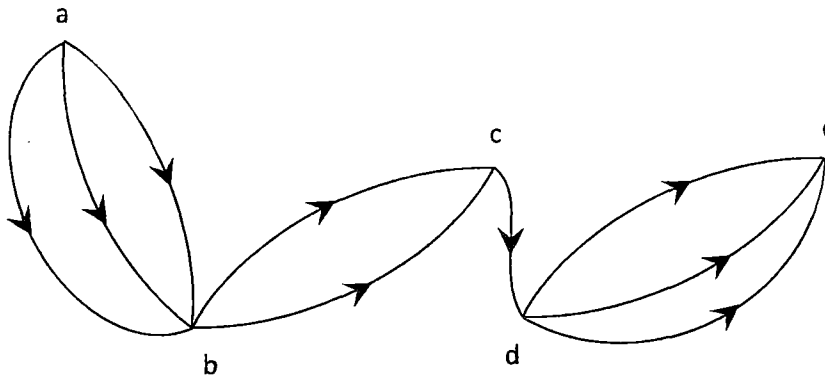


© Fernando Maciá, 2014

Fig.4. Búsqueda de información en Internet vista como un grafo dirigido.

**Definición:** Un grafo  $G = (V, E)$  es un **multígrafo** si existen  $a, b \in V, a \neq b$  con dos o más aristas de la forma  $(a, a), (a, b)$  (para un grafo dirigido), o  $\{b, b\}, \{a, b\}$  (para un grafo no dirigido).

**Ejemplo 1:** La figura siguiente es un multígrafo



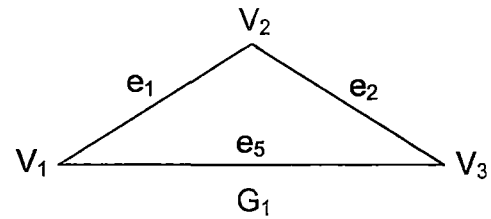
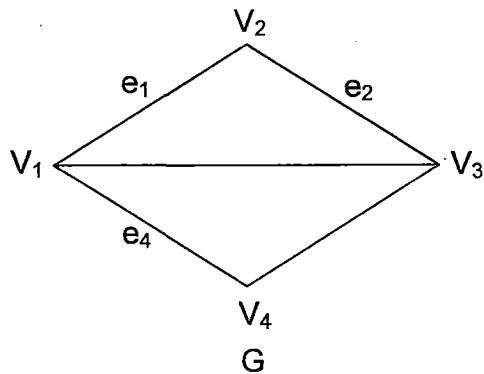
En el grafo, se observa que existe tres aristas de  $a$  hacia  $b$ , por lo que se dice que  $(a, b)$  tiene multiplicidad 3, en forma análoga la arista  $(b, c)$  tiene multiplicidad dos mientras que la arista  $(d, e)$  tienen multiplicidad 3, como no existe ninguna arista con multiplicidad mayor que 3 diremos que el grafo es un 3-grafo dirigido.

## 1.2 SUBGRAFOS

**Definición:** Sea  $G = (V, E)$ , un grafo dirigido o no. Se dice que el par  $G_1 = (V_1, E_1)$  es un subgrafo de  $G$  si:

1.  $V_1 \subset V$
2.  $E_1 \subset E$
3.  $G_1 = (V_1, E_1)$  es un grafo

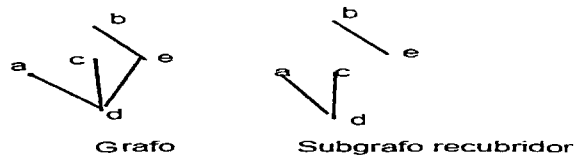
**Ejemplo 2:** Considere este grafo  $G$ ; un subgrafo podría ser  $G_1$ .



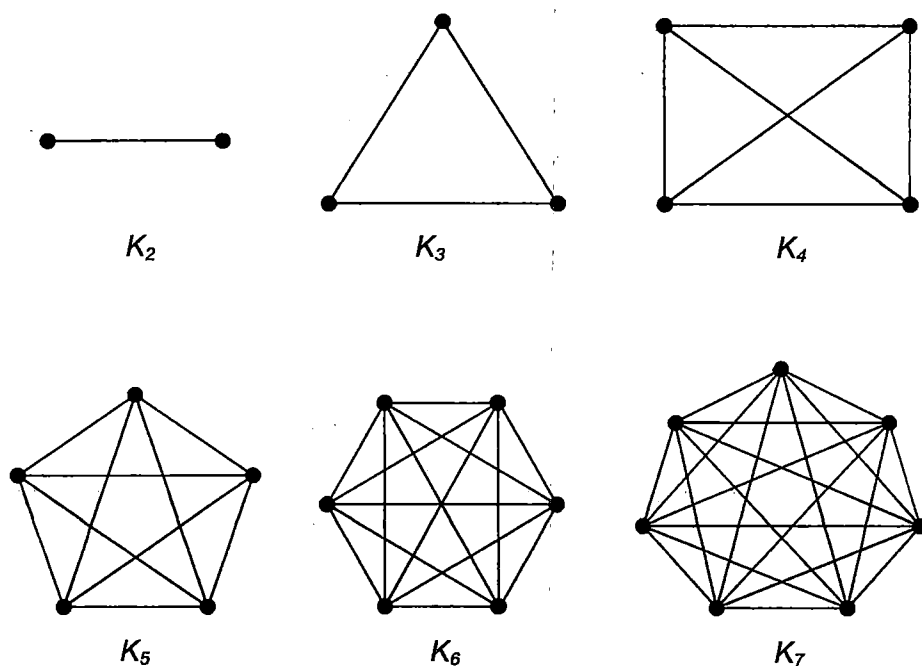
**Definición:** Dado un grafo, dirigido o no  $G = (V, E)$ , sea  $G_1 = (V_1, E_1)$  un subgrafo de  $G$ . Si  $V_1 = V$ , entonces  $G_1$  es llamado un subgrafo recubridor de  $G$ .

**Ejemplo 3:** El subgrafo del ejemplo anterior no es un subgrafo recubridor de  $G$

**Ejemplo 4:** El grafo derecho es un subgrafo recubridor del grafo izquierdo



**Definición:** Para cada  $n \geq 1$  se llama grafo completo de orden  $n$ , y se representa por  $K_n$ , al grafo de  $n$  vértices conectados de todas las formas posibles. Es decir para todos  $a, b \in V, a \neq b$ , existe una arista  $\{a, b\}$ . En el grafico siguiente se muestran los  $K_n, 1 < n \leq 7$



### 1.3. MATRICES

Las matrices son una herramienta del álgebra lineal muy importante para expresar y discutir problemas que surgen en la vida real. En los comercios a menudo es necesario calcular y combinar ciertos costos y cantidades de productos. Las tablas son una forma de representar estos datos.

Sin embargo, agrupar los datos en un rectángulo nos muestra una representación más clara y fácil de los datos. Tal representación de los datos se denomina matriz. Las matrices aparecen en situaciones propias de las Ciencias Sociales, Económicas, Ingenierías y Biológicas. Sobre este tipo de representaciones es de lo que se estudia a continuación.

#### 1.3.1. DEFINICIÓN

A continuación se revisan tanto la definición como propiedades básicas de la teoría matricial.

**Definición:** Considere los conjuntos  $I = \{1, 2, 3, \dots, m\}$  y  $J = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Una matriz  $m \times n$  sobre  $\mathbb{R}$  es una función  $A: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a cada par  $(i, j) \in I \times J$  le asocia el número real  $A(i, j) = a_{ij}$ . A la expresión  $m \times n$  se le llama **orden** de la matriz.

Es decir, una matriz  $A$  es un arreglo rectangular de números reales dispuestos en filas y columnas del modo siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Abreviadamente se puede expresar  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ . Cada elemento de la matriz lleva dos subíndices. El primero de ellos "i", indica la fila en la que se encuentra el elemento, y el segundo, "j", la columna.

Así el elemento  $a_{23}$  está en la fila 2 y columna 3. Las matrices siempre se representarán con letras mayúsculas.

**Definición:** Una matriz en la que  $m = n$ , se le llama **matriz cuadrada** de orden  $n$ .

Un ejemplo muy importante en este trabajo es la llamada **matriz de adyacencia** cuya definición y ejemplos se revisa a continuación.

### 1.3.2. MATRIZ DE ADYACENCIA

Otra forma de representación de un grafo es a través de la llamada **matriz de adyacencia**.

**Definición:** Si  $G = (V, E)$  es un grafo con  $|V| = n$ , y  $|E| = k$ .

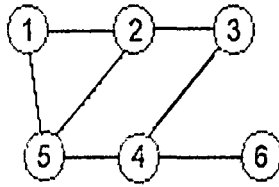
Sea  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , a la matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  dónde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se le llama **matriz de adyacencia** asociada al grafo  $G$ .

Nótese también que  $a_{ij}$  es el número de arcos que tienen a  $v_i$  como extremo inicial y a  $v_j$  como extremo final.

**Ejemplo 5:** Construya la matriz de adyacencia del siguiente grafo



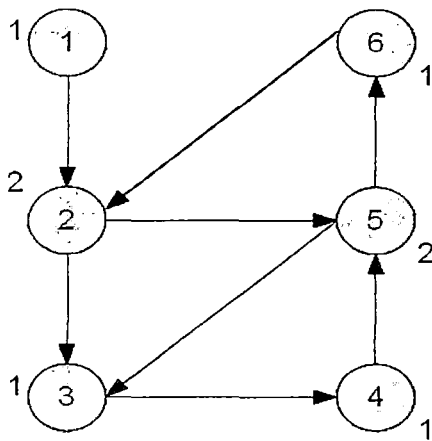
**Solución,** según el grafo se tiene que  $|V| = 6$ , y  $|E| = 7$ , de acuerdo a la definición de matriz de adyacencia se tiene:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Se observa que la matriz de adyacencia es una matriz simétrica.

En general la matriz de adyacencia de un grafo no dirigido es una matriz simétrica.

**Ejemplo 6:** Construya la matriz de adyacencia del siguiente grafo.



**Solución,** según el grafo se tiene que  $|V| = 6$ , y  $|E| = 8$ , de acuerdo a la definición de matriz de adyacencia se tiene:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



A continuación se enumeran algunas de las propiedades de las matrices semipositivas irreducibles que serán de utilidad en el siguiente capítulo.

**Propiedades:**

1. Sea  $A \geq 0$  e irreducible y sea  $X$  un vector columna,  $X \geq 0$  entonces  $AX \geq 0$ .
2. Sea  $A \geq 0$  e invertible y sea  $X$  un vector columna,  $X \geq 0$  entonces  $AX \geq 0$ .

### 1.3.3. VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

**Definición:** Dada una matriz cuadrada  $A$  de orden  $m$  y  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , se dice  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un **valor propio** de la matriz  $A$  si  $\exists \mathbf{0} \neq x \in V$  tal que:

$$Ax = \lambda x \dots \dots (1)$$

Cualquier vector no nulo  $x \in V$  que satisface:

$$Ax = \lambda x$$

Es llamado **vector propio asociado al valor propio  $\lambda$** .

**Teorema 4:**  $\lambda$  es un valor propio de la matriz cuadrada  $A$  si y solamente si  $\lambda$  satisface la siguiente ecuación:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

**Demostración,** si  $\lambda$  es un valor propio de la matriz cuadrada  $A$  entonces  $\exists \mathbf{0} \neq x \in V$  tal que:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \rightarrow Ax - \lambda x = 0 \\ \rightarrow Ax - \lambda x &= Ax - \lambda Ix = 0 \\ \rightarrow (A - \lambda I)x &= 0 \dots \dots (*) \end{aligned}$$

El sistema dado por la ecuación (\*) tiene solución si y solamente si

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

De donde el sistema dado por la ecuación (\*) tiene solución si y solamente si

$$\det(\lambda I - A) = 0 \blacksquare$$

El teorema 4, permite calcular los valores propios de una matriz cuadrada  $A$ , definiendo el polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) \dots \dots (*_1)$$

Las raíces de  $P(\lambda)$  son los valores propios de la matriz cuadrada  $A$ , las cuales pueden ser reales diferentes o repetidas e incluso complejas.

La teoría básica desarrollada en este capítulo será de utilidad en la demostración del llamado teorema de Perron-Frobenius que se estudia en el siguiente capítulo.

## CAPÍTULO 2: TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

### 2.1. TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH

El teorema central de esta sección es el llamado **Teorema del punto fijo de Banach**, el cual es válido incluso para un espacio más general, como lo es un espacio métrico, sin embargo para propósitos de este trabajo solo será demostrado para los llamados **espacios de Banach**.

#### 2.1.1. ESPACIO DE BANACH

En esta subsección se estudia a los llamados espacios normados, en particular se revisan definiciones y resultados de los espacios normados completos a los cuales se les llama espacios de Banach.

Para iniciar este estudio se necesita definir una operación interna de los espacios vectoriales, esta operación se define a continuación.

**Definición:** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , un **producto interno** sobre  $V$  es una función definida sobre el producto cartesiano  $V \times V$  con valores en la recta real  $\mathbb{R}$ ; que denotaremos por  $\langle . \rangle$ ; es decir:

$$\langle . \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Tal que  $\forall x, y, z \in V; \forall \alpha \in \mathbb{R}$  se satisface las siguientes condiciones:

1.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
2.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$   
 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

**Ejemplo 7:** Sea  $V = \mathbb{R}^n$ , definamos  $\langle . \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue:

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Entonces el siguiente teorema garantiza que la función así definida es un producto interno sobre  $\mathbb{R}^n$ , llamado producto interno euclidiano.

**Teorema 5:** Para  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tenemos:

1.  $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$
2.  $x \cdot y = y \cdot x$
3.  $x \cdot x \geq 0$
4.  $x \cdot x = 0 \leftrightarrow x = 0$

**Definición:** Sea  $V$  un espacio vectorial. Decimos que una función  $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$  es una **norma** sobre  $V$  si verifica, para todos los vectores  $x, y \in V$  y todo escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , las siguientes propiedades:

1.  $\|x\| \geq 0$
2.  $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Al par  $(V, \| \cdot \|)$  se le llama **espacio normado**.

**Ejemplo 8:** Sea  $X = \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ , entonces  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$  es un espacio normado.

**Nota 1:**

- a) Si definimos  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Entonces  $(X, d)$  es un espacio métrico, es decir todo espacio normado es un espacio métrico, el recíproco en general no se cumple.
- b) En  $\mathbb{R}^n$ , todas las normas son equivalentes.

**Definición:** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , dotado del **producto interno**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Una **norma** proveniente del producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se define como:

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

El siguiente teorema, conocido como la **desigualdad de Cauchy-Bunyakovski-Schwartz**, es muy importante para demostrar la desigualdad triangular.

**Teorema 6:** Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Entonces:

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

**Teorema 7 (desigualdad triangular):** Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Entonces:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Definición:** Sea  $(E, \| \cdot \|)$  un espacio normado, una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$  es llamada **sucesión de Cauchy**, si dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N > 0: \forall m, n \geq N$  se cumple que  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ .

**Definición:** Se llama **espacio de Banach** a un espacio normado que es completo con respecto a la norma  $\| \cdot \|$ , es decir cuando toda sucesión de Cauchy  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$  converge en el mismo espacio  $E$ .

**Ejemplo 9:** Sea  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ , entonces  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$  es un espacio normado completo, por lo tanto es un espacio de Banach.

**Nota 2:** Sea  $X$  un espacio normado, y supongamos que  $Y$  es un subespacio vectorial de  $X$ . Se verifica:

- a)  $Y$  es un subespacio vectorial de  $X$ .
- b) Si  $X$  es Banach e  $Y$  es cerrado, entonces  $Y$  es también un espacio de Banach.

Sea  $x \in \mathbb{R}^l$ ,  $0 < r \in \mathbb{R}$

**Definición:** Sea  $X$  un espacio de Banach, dada una función  $f: X \rightarrow X$  de un conjunto en sí mismo, un **punto fijo** de la función es un elemento  $a \in X$  tal que  $f(a) = a$ .

**Ejemplo 10:** Si  $X = \mathbb{R}^n$ , y  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(x) = x$  tiene infinitos puntos fijos.

**Definición:** Sea  $X$  un espacio de Banach, la función  $f: X \rightarrow X$  de un conjunto en sí mismo, es llamada una **contracción** si existe  $k \in ]0,1[$  tal que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \forall x, y \in X$$

**Ejemplo 11:** Si  $X = \mathbb{R}$ , y  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{2}x + b$ ,  $b \in \mathbb{R}$  es una contracción, puesto que si  $x, y \in \mathbb{R}$  se tiene:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \left( \frac{1}{2}x + b \right) - \left( \frac{1}{2}y + b \right) \right| = \left| \frac{1}{2}(x - y) \right| = \frac{1}{2}|x - y| \\ &\rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y| \end{aligned}$$

Si se elige  $k = \frac{1}{2}$ , se deduce que  $f$  es una contracción. ■

**Teorema del punto fijo de Banach:** Si  $X$  es un espacio de Banach y  $f: X \rightarrow X$  es una contracción entonces  $f$  tiene un único punto fijo.

**Demostración,** puesto que para cualquier  $x, y \in X$  se cumple:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Sea  $x_0 \in X$  y una sucesión en  $X$  definida en forma recursiva como sigue:

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1)$$

$$x_3 = f(x_2)$$

$$\vdots$$

$$x_n = f(x_{n-1})$$

Puesto que la función  $f$  es una contracción se tiene que existe  $k \in ]0,1[$  tal que:

$$d(f(x_1), f(x_0)) \leq kd(x_1, x_0)$$

De donde

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq kd(x_1, x_0)$$

$$\rightarrow d(x_2, x_1) \leq kd(x_1, x_0)$$

En forma análoga se deduce

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq kd(x_2, x_1) \leq k(kd(x_1, x_0))$$

$$\rightarrow d(x_3, x_2) \leq k^2 d(x_1, x_0)$$

Si procedemos de forma análoga a los casos anteriores se obtiene que en forma general:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

Luego si se tiene que  $n > m$ , para  $x_n, x_m$  y usando la generalización de la desigualdad triangular se obtiene:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$$\rightarrow d(x_n, x_m) \leq k^m \frac{(1 - k^{n-m})}{1 - k} d(x_1, x_0)$$

$$\rightarrow d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{1 - k} d(x_1, x_0)$$

Puesto que  $0 < k < 1 \rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} k^m = 0$

De donde si  $n > m$  por lo anterior se tiene que la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy y como  $X$  es un espacio de Banach se tiene  $x_n \rightarrow x \in X$

Puesto que

$$x_n = f(x_{n-1})$$

Si aplicamos límites a la igualdad anterior:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1})$$

De donde

$$x = f(x)$$

Y puesto que el límite de una sucesión es único, se tiene que  $x$  es el único punto fijo de  $f$  en  $X$  ■

## 2.2. Teorema de Perron-Frobenius

Puesto que para jerarquizar los resultados de las búsquedas en la web, se necesita determinar la constante de proporcionalidad así como el vector de “importancias” de las paginas censadas, los cuales en términos matemáticos son representados por los valores y vectores propios de la transpuesta de la matriz de adyacencia del grafo dirigido que representa a la red de navegación en internet, se hace necesario contar con un resultado que permita garantizar la existencia de los valores y vectores propios de esta matriz de adyacencia, este resultado es el llamado **Teorema de Perron-Frobenius**, razón por la cual es el teorema central de esta sección.

Para su demostración se hace uso del llamado teorema del punto fijo de Brouwer, que se presenta a continuación.

### 2.2.1. Teorema del punto Fijo de Brouwer

Este resultado fue probado por primera vez en 1910 por Brouwer, es equivalente al problema de encontrar un punto fijo de una función continua de un conjunto compacto en sí mismo.

Se presenta una demostración breve y elegante del Teorema del punto fijo de Brouwer, por razones de simplicidad, lo haremos para el caso en que  $n = 2$ . En dicha demostración sólo se involucra el concepto de homotopia en términos de relación de equivalencia, sin necesidad de hablar de grupos de homotopia.

**Definición:** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Una **homotopia** de  $X$  a  $Y$ , es una función continua  $H: X \times I = [0,1] \rightarrow Y$ , definida por  $H_t(x) = H(x,t) \forall x \in X, \forall t \in I$ . Dos funciones continuas  $f, g: X \rightarrow Y$  son homotópicas, y se denota  $f \approx g$ , si existe una homotopia  $H$  de  $X$  a  $Y$  tal que  $H_0(x) = f(x)$  y  $H_1(x) = g(x)$ .

El primer resultado establece la propiedad básica del concepto de homotopia.

**Lema 3.2.1:** La relación de homotopia es de equivalencia.

**Demostración,** sean  $f, g, h: X \rightarrow Y$  funciones continuas entre los espacios topológicos  $X$  e  $Y$ .

**1. Reflexividad,** basta definir  $H_t(x) = H(x, t) = f(x), \forall x \in X, \forall t \in I$ .

**2. Simetría,** si  $f \approx g$  entonces existe  $H: X \times I = [0, 1] \rightarrow Y$ , tal que:

$$H_0(x) = f(x) \text{ y } H_1(x) = g(x).$$

Definamos  $G(x, t) = H_t(x) = H(x, 1 - t)$ , luego  $H$  es una función continua y además,  $H_0(x) = H(x, 1) = H_1(x) = g(x)$  y  $H_1(x) = H(x, 0) = H_0(x) = f(x)$ .

Por lo tanto  $g \approx f$ .

**3. Transitividad,** si  $f \approx g \wedge$  si  $g \approx h$ , entonces existen funciones continuas:

$F, G: X \times I = [0, 1] \rightarrow Y$ , tales que:  $F_0(x) = f(x)$  y  $F_1(x) = g(x)$   
 $G_0(x) = g(x)$  y  $G_1(x) = h(x)$ , se define  $H: X \times I = [0, 1] \rightarrow Y$  como:

$$H_t(x) = \begin{cases} F(x, 2t); & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t); & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces  $H$  es continua y además:

$$H_0(x) = F(x, 0) = F_0(x) = f(x) \rightarrow H_0(x) = f(x)$$

$$H_1(x) = G(x, 1) = G_1(x) = h(x) \rightarrow H_1(x) = h(x).$$

Por lo tanto  $f \approx h$ .

El próximo lema es el primero de una serie de cuatro cuyo objetivo final es demostrar que la aplicación identidad de  $S^1$  en  $S^1$  no es homotópica a una función constante (lo que se llama una función esencial). Para ello, primero se prueba que las aplicaciones no sobreyectivas que llegan a  $S^1$  tienen un logaritmo continuo, para a continuación determinar que la propiedad de tener un logaritmo continuo es invariante por homotopías (eso se llevará dos lemas) y obtener finalmente la equivalencia entre las propiedades de tener un logaritmo continuo y la de ser homotópica a una función constante, de donde el resultado deseado será un corolario.





**Lema 3.2.2:** Si  $f: X \rightarrow S^1$  es una función continua con  $f(X) \neq S^1$ , entonces  $f$  tiene un logaritmo continuo. Es decir, existe  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(x) = e^{i\phi(x)}$  para todo  $x \in X$ .

**Demostración,** sea  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $e^{iq} \notin S^1$ , pues  $f(X) \neq S^1$ .

La función  $\exp: ]q, q + 2\pi[ \rightarrow S^1 - \{e^{iq}\}$ , definida por  $\exp(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$  es un homeomorfismo.

Luego su inversa,  $\exp^{-1}: S^1 - \{e^{iq}\} \rightarrow ]q, q + 2\pi[$  es también una función continua, definida por  $\exp^{-1}(x) = -i \operatorname{Ln}(x)$ , así se puede definir  $\phi := \exp^{-1} \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , por  $\phi(x) = (\exp^{-1} \circ f)(x) = \exp^{-1}(f(x)) = -i \operatorname{Ln}(f(x))$  luego  $\phi$  es una función continua, además:  $e^{i\phi(x)} = e^{i(-i \operatorname{Ln}(f(x)))} = e^{-i^2 \operatorname{Ln}(f(x))} = e^{\operatorname{Ln} f(x)} = f(x)$

$$\rightarrow e^{i\phi(x)} = f(x) \blacksquare$$

**Lema 3.2.3:** Sean  $f_1, f_2: X \rightarrow S^1$  continuas con

$$|f_1(x) - f_2(x)| = \sup\{|f_1(x) - f_2(x)| : x \in X\} \leq 1$$

Entonces  $f_1$  tiene un logaritmo continuo si y solo si  $f_2$  también lo tiene.

**Demostración,** como  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  pertenecen a  $S^1$ , luego si se consideran como números complejos, entonces el cociente  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \in S^1$ , esto permite definir:

$h: X \rightarrow S^1$  Por  $h(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ , luego:

$$|h(x) - 1| = \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - 1 \right| = \left| \frac{f_1(x) - f_2(x)}{f_2(x)} \right| = \frac{|f_1(x) - f_2(x)|}{|f_2(x)|} = |f_1(x) - f_2(x)|, \text{ pues } |f_2(x)| = 1$$

$$\rightarrow |h(x) - 1| = |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1 - f_2| \leq 1$$

$$\rightarrow |h(x) - 1| \leq 1$$

De lo anterior se deduce que  $h$  no es sobreyectiva, puesto que de serlo  $-1 \in h(X) \rightarrow |-1 - 1| = 2 > 1 (\rightarrow \leftarrow)$ , luego  $h(X) \neq S^1$ , entonces por lema 3.2.2, existe una función continua,  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = h(x) = e^{i\phi(x)} \forall x \in X$

$$\rightarrow f_2(x) = f_1(x) e^{-i\phi(x)} = e^{i\theta(x)} e^{-i\phi(x)} = e^{i(\theta - \phi)(x)}$$

Con  $\theta: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua, pues  $f_1$  tiene un logaritmo continuo, por lo tanto  $f_2$  también tiene un logaritmo continuo.

Recíprocamente, si  $f_2$  tiene un logaritmo continuo, es decir existe  $\phi_2: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f_2(x) = e^{i\phi_2(x)}, \forall x \in X$ .

De otro lado,  $h(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \rightarrow f_1(x) = f_2(x)h(x) = e^{i\phi_2(x)}e^{i\phi(x)} = e^{i(\phi+\phi_2)(x)}$

$$\rightarrow f_1(x) = e^{i(\phi+\phi_2)(x)}$$

Entonces existe  $\phi + \phi_2: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$f_1(x) = e^{i(\phi+\phi_2)(x)}, \forall x \in X.$$

Por lo tanto  $f_1$  tiene un logaritmo continuo ■

**Lema 3.2.4:** Sea  $X$  compacto y  $H: X \times I \rightarrow S^1$  una homotopía. Entonces  $H_0$  tiene un logaritmo continuo si y solo si  $H_1$  tiene un logaritmo continuo.

**Demostración,** como  $H$  es una función continua definida sobre el conjunto compacto  $X \times I$ , entonces  $H$  es uniformemente continua sobre  $X \times I$ , en particular para

$$\varepsilon = 1 \exists \delta = 1/n \text{ Tal que } |s - t| \leq 1/n \rightarrow |H(x, s) - H(x, t)| < 1 \forall t, s \in I, \forall x \in X$$

Se define  $f_j = H_{j/n}$ , entonces:

$$|f_{j+1}(x) - f_j(x)| = \left| H\left(x, j+1/n\right) - H\left(x, j/n\right) \right| < 1 \text{ Puesto que } \left| \frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

$$\rightarrow |f_{j+1}(x) - f_j(x)| < 1 \text{ Para todo } x \in X$$

Luego usando el lema 3.2.3, se tiene que  $f_{j+1}$  tiene un logaritmo continuo si y solamente si  $f_j$  tiene un logaritmo continuo, reiterando el proceso desde 0 hasta  $n$  y usando la transitividad de la relación de homotopía, se obtiene que  $f_0 = H_0$  tiene un logaritmo continuo si y solamente si  $f_n = H_1$  tiene un logaritmo continuo. ■

**Lema 3.2.5:** Sea  $X$  compacto y  $f: X \rightarrow S^1$  una función continua;  $f$  es homotópica a una función constante si y solo si  $f$  tiene un logaritmo continuo.

**Demostración,** supóngase que  $f$  es homotópica a una función constante  $g(x) = a$ , entonces existe una homotopía  $H: X \times I \rightarrow S^1$  tal que  $H_0 = f$  y  $H_1 = a$ .

Defínase  $\phi(x) = q, \forall x \in X$ , con  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $e^{iq} = a$ , luego  $H_1 = a$  tiene un logaritmo continuo, de donde por lema anterior se tiene que  $H_0 = f$  también tiene un logaritmo continuo.

Recíprocamente, supóngase que  $f$  tiene un logaritmo continuo, es decir existe:

$\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $e^{i\phi(x)} = f(x)$ , definamos:  $H: X \times I \rightarrow S^1$  como:

$H_t(x) = H(x, t) = e^{it\phi(x)}$ , para todo  $x \in X$  y para todo  $t \in I$ ,  $H$  así definida es una función continua y además  $H_0(x) = 1$ ;  $H_1(x) = e^{i\phi(x)} = f(x)$ , de donde  $f$  es homotópica a la función constante 1. ■

**Corolario 3.2.1:** Sea  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  y sea  $\psi_n: S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $\psi_n(z) = z^n$  para todo  $z \in S^1$ . Entonces  $\psi_n$  no es homotópica a una función constante.

**Demostración,** supóngase  $\psi_n$  es homotópica a una función constante, luego por lema 3.2.5  $\psi_n$  tiene un logaritmo continuo, es decir existe  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que:

$\psi_n(x) = e^{2\pi i \phi(x)}$ , basta con elegir como  $\phi$  el resultado de dividir el logaritmo continuo que proporciona el lema anterior por  $2\pi$ .

De otro lado dado  $x \in S^1$  existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $x = e^{2\pi i \theta}$ , y como  $x^n = \psi_n(x) = e^{2\pi i \phi(x)}$

$$\rightarrow e^{2n\pi i \theta} = e^{2\pi i \phi(e^{2\pi i \theta})}$$

$$\rightarrow e^{2\pi i [\phi(e^{2\pi i \theta}) - n\theta]} = 1$$

Se define  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , por  $f(\theta) = \phi(e^{2\pi i \theta}) - n\theta$ , luego  $f$  así definida es continua y además cumple  $e^{2\pi i f(\theta)} = 1$ .

Puesto que  $e^{2\pi i z} = (\cos 2\pi z, \sin 2\pi z)$

Si  $e^{2\pi i f(\theta)} = 1 \rightarrow (\cos 2\pi f(\theta), \sin 2\pi f(\theta)) = (1, 0) \leftrightarrow f(\theta) \in \mathbb{Z} \rightarrow f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$

Ahora como  $f$  es continua y  $\mathbb{R}$  es conexo, se tiene que  $f(\mathbb{R})$  es conexo en  $\mathbb{Z}$  y como las únicas componentes conexas de  $\mathbb{Z}$  son los puntos se sigue que  $f$  es constante. Usando la condición del logaritmo continuo, se tiene:

$$1 = \psi_n(1) = e^{2\pi i \phi(1)} \rightarrow e^{2\pi i \phi(1)} = 1 \leftrightarrow \phi(1) = 0$$

De donde  $f(0) = \phi(1) = 0$ , y como también  $f(1) = \phi(e^{2\pi i}) - n = \phi(1) - n = -n$

Se tiene que  $f(0) = 0 \wedge f(1) = -n$ , contradiciendo el hecho que  $f$  es constante. ■

Como consecuencia del resultado anterior se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 3.2.2:** La función identidad  $Id: S^1 \rightarrow S^1$  no es homotópica a una función constante.

**Demostración,** haciendo  $n = 1$  en el Corolario 3.2.1 ■

Este corolario resume todos los conocimientos de homotopias y del cuerpo de los números complejos que serán necesarios en la demostración que a continuación se presenta del Teorema del punto fijo de Brouwer.

**Teorema 2.5.1. (Teorema del Punto Fijo de Brouwer en una bola unitaria de  $\mathbb{R}^2$ ):** Sea  $D$  una bola unitaria cerrada en  $\mathbb{R}^2$ , con centro en el origen, y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua con  $f(S^1) \subset D$ . Entonces existe un punto  $x \in D$  tal que  $f(x) = x$ .

**Demostración,** supóngase que  $f(x) \neq x, \forall x \in D \rightarrow f(x) - x \neq 0, \forall x \in D$ , definase:  $r: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow S^1$ , definido por  $r(z) = \frac{z}{\|z\|}$  y como  $u - f(u)$  no se anula en ningún punto de  $D$ , se puede definir la función  $g: S^1 \rightarrow S^1$ , por  $g(u) = r \circ (Id - f)(u) = r(u - f(u))$  la cual es continua.

Nótese que:

- $u - tf(u) \neq 0$ , para  $t = 1$ .
- $t < 1 \rightarrow tf(u) < f(u) \rightarrow \|tf(u)\| < \|f(u)\| \leq 1 \rightarrow \|tf(u)\| < 1$ , luego  $tf(u) \in \text{Int}D$  y como  $u \in S^1$ , se sigue que también  $u - tf(u) \neq 0$

Lo anterior permite definir la función continua:  $H: S^1 \times I \rightarrow \mathbb{C}$  por:

$$H(u, t) = H_t(u) = u - tf(u).$$

Usando la función  $H$ , se puede definir la composición:  $r \circ H: S^1 \times I \rightarrow S^1$  que es una función continua, además:

- $(r \circ H)_0(u, t) = r(H_0(t)) = r(H(u, 0)) = r(u) = \frac{u}{\|u\|} = u = Id_{S^1}$   

$$\rightarrow (r \circ H)_0 = Id_{S^1}$$
- $(r \circ H)_1(u, t) = r(H_1(t)) = r(H(u, 1)) = r(u - f(u)) = g(u) \rightarrow (r \circ H)_1 = g$

De donde,  $r \circ H$  es una homotopia entre  $Id_{S^1}$  y  $g$ .

De otro lado, para  $0 < t < 1 \rightarrow 0 < tu < u < 1 \rightarrow 0 < tu < 1$ , así  $tu \in D$  y como  $D$  no tiene puntos fijos, se sigue que  $tu - f(tu) \neq 0$ , esto permite definir la función continua:  $G: S^1 \times I \rightarrow \mathbb{C}$  por:

$$G(u, t) = G_t(u) = tu - f(tu).$$

Usando la función  $G$ , se define la composición:  $r \circ G: S^1 \times I \rightarrow S^1$  que es una función continua, además:

$$\bullet (r \circ G)_0(u, t) = r(G(u, 0)) = r(-f(0)) = -f(0) / \|f(0)\|$$

$$\rightarrow (r \circ G)_0 = \text{constante}$$

$$\bullet (r \circ G)_1 = r(u - f(u)) = g(u) \rightarrow (r \circ G)_1 = g$$

De donde,  $r \circ G$  es una homotopia entre  $g$  y una función constante.

Por lema 3.21, la relación de homotopia es transitiva, como  $Id_{S^1} \approx g$  y  $g \approx cte$ , entonces  $Id_{S^1} \approx cte$ , lo cual contradice al corolario 3.2.2. ■

Como se sabe que una bola unitaria cerrada es convexa y cerrada, el teorema anterior es generalizado por el siguiente resultado, cuya demostración de por sí es un trabajo de tesis y por lo cual omitiremos su demostración, sin embargo referenciamos la bibliografía para aquellos interesados en emprender esta empresa.

**Definición:** Decimos que un conjunto  $X$  es **convexo** si y solamente si, para todo  $\lambda \in [0, 1]$ , siendo  $x$  e  $y$  elementos de  $X$  se cumple que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$ .

**Ejemplo 12:** El conjunto  $K = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$  es convexo.

**Demostración,** dados  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in K, \lambda \in [0, 1]$ , entonces:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2, \dots, \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n)$$

Halleemos la suma de las coordenadas de  $\lambda x + (1 - \lambda)y$ :

$$\begin{aligned} & \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 + \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 + \dots + \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n \\ &= \lambda(x_1 + \dots + x_n) + (1 - \lambda)(y_1 + \dots + y_n) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

Puesto que  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in K \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = 1; \sum_{i=1}^n y_i = 1$ , de donde:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 + \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 + \dots + \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n = \lambda(1) + (1 - \lambda)(1) = 1$$

Luego  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$

Por lo tanto  $K$  es un conjunto convexo ■

**Ejemplo 13:** El conjunto  $K = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$  es compacto

**Demostración,** es claro que  $K \subset [-1; 1]^n$ , y como  $[-1; 1]^n$  es un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^l$ , solo nos resta demostrar que  $K$  es un conjunto cerrado con la norma:

$$\|x\|_s = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

Sea  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ , cuyo  $n$ -ésimo termino es  $x^n = (x_1^n, \dots, x_l^n) \in \mathbb{R}_+^n$  tal que  $x^n \rightarrow x$ , donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ . Demostraremos que  $x \in K$ , es decir demostraremos que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

Puesto que  $x^n \in K \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^n = 1$

De otro lado, como  $x^n \rightarrow x$ , entonces  $x_i^n \leq x_i; i = 1, 2, \dots, l$ ; de donde:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^n x_i^n \leq \sum_{i=1}^n x_i \\ &\rightarrow 1 \leq \sum_{i=1}^n x_i \dots (*) \end{aligned}$$

También se tiene que  $x_i = (x_i - x_i^n) + x_i^n$ , de donde

$$|x_i| \leq |x_i^n - x_i| + |x_i^n|; i = 1, 2, \dots, n$$

De donde:

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i^n - x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i^n|$$

Y como  $x_i; x_i^n \geq 0$ , la desigualdad anterior se transforma en:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &\leq \sum_{i=1}^n |x_i^n - x_i| + \sum_{i=1}^n x_i^n \\ &\rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \leq \|x^n - x\|_s + 1 \end{aligned}$$

Luego como para todo  $\varepsilon > 0; \exists N_0: n \geq N_0: \|x^n - x\|_s < \varepsilon$ , usando esto en la desigualdad anterior se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \|x^n - x\|_s + 1 < \varepsilon + 1$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n x_i < \varepsilon + 1; \forall \varepsilon > 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \dots (*_2)$$

De.  $(*_1)$  y  $(*_2)$  se obtiene que:  $\sum_{i=1}^l x_i = 1 \rightarrow x \in K$

Luego  $K$  es un conjunto cerrado en el compacto  $[-1; 1]^l$  de donde por afirmación 5 concluimos que  $K$  es un conjunto compacto ■

**Observación 1:** Puesto que  $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_+^n$  y además como  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , entonces  $(1, 0, \dots, 0) \in K$ , por lo tanto  $K$  es no vacío.

**Teorema 2.5.1. (Versión general del Teorema del Punto Fijo de Brouwer):** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto no vacío, compacto y convexo. Toda función continua de  $K$  en sí mismo, tiene un punto fijo.

**Demostración,** ver [Aliprantis, C. D.; Border, K. C.; pag. 583]

### 2.2.2. Enunciado y demostración del Teorema de Perron-Frobenius

En esta sección se analizan algunas de las propiedades del conjunto de valores propios o espectro de una matriz cuadrada semipositiva. Los resultados que aquí se obtienen guardan relación con la existencia de solución no negativa en los sistemas de ecuaciones lineales.

En 1907 Perron obtuvo un importante resultado para matrices positivas, este resultado fue generalizado en el año 1913 por Frobenius, para el caso de las matrices semipositivas irreducibles, a este resultado se le conoce no con el nombre de teorema de Perron-Frobenius.

**Teorema de Perron-Frobenius:** Sea  $A$  una matriz  $A \geq 0$  semipositiva e irreducible. En estas condiciones:

- i) Aposee un valor propio  $\lambda^*(A)$  positivo llamado "raíz de Frobenius" de  $A$ .
- ii)  $\lambda^*(A)$  es simple.
- iii)  $\lambda^*(A)$  crece cuando alguno de los elementos de  $A$  aumenta.
- iv) El módulo de las restantes raíces características de  $A$  no excede a  $\lambda^*(A)$

- v) Asociado a  $\lambda^*(A)$  existe un vector propio  $X^*$  con todas sus componentes positivas.
- vi) Si  $\lambda$  es otro valor propio de  $A$  con  $\lambda \neq \lambda^*$  no existe ningún vector propio asociado a  $\lambda$  con todas sus componentes positivas.

**Demostración**, en primer lugar de demuestra la parte (i)

**Demostración de (i)**,  $A$  posee un valor propio  $\lambda^*(A)$  positivo llamado "raíz de Frobenius" de  $A$ .

En efecto para lo cual se construye una función  $f$  definida sobre un convexo y compacto  $K$  que satisfaga las condiciones del teorema del punto fijo de Brouwer.

Sea  $K = \{X \in \mathbb{R}^n : X \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$ . De acuerdo con los ejemplos 12, 13 y la observación 1 se tiene que  $K$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  convexo, compacto y no vacío.

Si  $X \in K$  se tiene que  $X \geq 0$  y puesto que  $A$  es semipositiva e irreducible, entonces de acuerdo con las propiedades se tiene que  $AX \geq 0, \forall X \in K$ .

Sea  $Z = AX$  y considérese  $M(X) = z_1 + z_2 + \dots + z_n$  puesto que  $Z \neq 0, \forall X \in K$  se tiene que  $Z = AX > 0$  de donde se deduce que

$$M(X) > 0 \dots \dots (*_1)$$

Lo anterior permite definir la siguiente función.

$$f: K \Rightarrow K$$

$$X \rightarrow f(X) = \frac{1}{M(X)} AX$$

Puesto que  $M(X) > 0, \forall X \in K$  y además  $A$  es lineal se tiene que  $f$  es una función continua  $\forall X \in K$ .

Solo resta verificar que  $f(X) \in K$  lo cual se cumple puesto que  $AX \geq 0, \forall X \in K$  y como  $M(X) > 0, \forall X \in K$  entonces se tiene que  $f(X) \geq 0, \forall X \in K$ .

De otro lado si  $f(X) = W$

$$\begin{aligned} &\rightarrow w_1 + w_2 + \dots + w_n \\ &= \frac{Ax_1}{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)} + \frac{Ax_2}{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)} + \dots + \frac{Ax_n}{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)} \\ &\rightarrow w_1 + w_2 + \dots + w_n \\ &= \frac{z_1}{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)} + \frac{z_2}{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)} + \dots + \frac{z_n}{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)} \end{aligned}$$



De donde  $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$  por lo tanto  $f(X) \in K, \forall X \in K$

Luego se cumplen las hipótesis del teorema de Brouwer entonces existe  $X^* \in K$  tal que

$$f(X^*) = X^*$$

De otro lado por definición se tiene que

$$f(X^*) = \frac{1}{M(X^*)} AX^* \rightarrow X^* = f(X^*) = \frac{1}{M(X^*)} AX^*$$

$$\rightarrow X^* = \frac{1}{M(X^*)} AX^*$$

$$\rightarrow AX^* = M(X^*)X^*$$

De donde  $M(X^*)$  es un valor propio de la matriz  $A$  con un vector propio asociado  $X^*$ .

Puesto que por  $(*)_1$  se tiene que  $M(X^*)$  es un valor propio de la matriz  $A$  estrictamente positivo es decir si se denota por  $\lambda^*(A)$  a  $M(X^*)$  se tiene que  $\lambda^*(A) = M(X^*) > 0$  como se quería demostrar.

**Demostración de (ii):  $\lambda^*(A)$  es simple**

En efecto, Si no fuera simple, sería raíz de alguna submatriz principal de  $A$  y por tanto sería raíz de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq A$$

Y  $B \neq A$  en contra de la proposición anterior.

**Demostración de (iii):  $\lambda^*(A)$  crece cuando alguna componente de  $A$  aumenta.**

En efecto, supongamos que existe un valor propio de  $B$  denotado por  $\beta$  de modo que  $|\beta| = \lambda^*(A)$  de donde se sigue que las desigualdades dadas en  $(*)$  se convierten en igualdades, ya que coinciden primer y último término.

$$(Y^*)^T |\beta| \underline{Z} = (Y^*)^T B \underline{Z} = (Y^*)^T A \underline{Z} = \lambda^*(A^T) (Y^*)^T \underline{Z}$$

Puesto que  $Y^* > 0$  entonces se tendría que

$$|\beta| \underline{Z} = B \underline{Z} = A \underline{Z} = \lambda^*(A^T) A \underline{Z} = \lambda^*(A) \underline{Z}$$

E

ntonces

$$|\beta|\underline{Z} = \lambda^*(A)\underline{Z}$$

**Demostración(iv):** El módulo de las restantes raíces características de  $A$  no excede a  $\lambda^*(A)$

En efecto, sea  $B$  una matriz cuadrada semipositiva del mismo orden que  $A$  tal que  $A \geq B \geq 0$  y sea  $\beta$  un valor propio de  $B$  con un vector asociado  $Z$  de donde se cumple que  $BZ = \beta Z$ .

Defínase el vector

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_2| \end{bmatrix}$$

Puesto que  $\beta Z = BZ \rightarrow \leq |\beta||Z| \leq |B||Z| \leq |A||Z|$

Por hipótesis tanto  $A$  como  $B$  son matrices semipositivas de donde  $|A| = A; |B| = B$

Usando lo anterior se tiene que

$$|\beta|\underline{Z} \leq B\underline{Z} \leq A\underline{Z} \dots (1)$$

Como por hipótesis  $A$  es irreducible entonces también su matriz traspuesta  $A^T$  es irreducible entonces por la parte (i) se tiene que un valor propio positivo denotado por  $\lambda^*(A^T)$  con vector propio asociado  $Y^* > 0$  es decir se cumple

$$A^T Y^* = \lambda^*(A^T) Y^*$$

Si aplicamos la traspuesta en la igualdad anterior y usamos las propiedades de la traspuesta se obtiene

$$(A^T Y^*)^T = (\lambda^*(A^T) Y^*)^T$$

$$\rightarrow (Y^*)^T A = \lambda^*(A^T) (Y^*)^T \dots (2)$$

Multiplicando la ecuación (1) por  $(Y^*)^T$  se obtiene

$$(Y^*)^T |\beta|\underline{Z} \leq (Y^*)^T B\underline{Z} \leq (Y^*)^T A\underline{Z}$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la desigualdad anterior se obtiene:

$$(Y^*)^T |\beta| \underline{Z} \leq (Y^*)^T B \underline{Z} \leq (Y^*)^T A \underline{Z} = \lambda^*(A^T) (Y^*)^T \underline{Z} \dots \dots (*)$$

$$\rightarrow (Y^*)^T |\beta| \underline{Z} \leq \lambda^*(A^T) (Y^*)^T \underline{Z}$$

$$\rightarrow |\beta| (Y^*)^T \underline{Z} \leq \lambda^*(A^T) (Y^*)^T \underline{Z}$$

$$\rightarrow |\beta| \leq \lambda^*(A^T)$$

Puesto que el mismo razonamiento puede hacerse para la matriz  $A$ , se obtiene que

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A^T)$$

Y mediante un razonamiento simétrico se obtiene

$$\lambda^*(A^T) \leq \lambda^*(A)$$

De donde se sigue que

$$\lambda^*(A^T) \leq \lambda^*(A) \leq \lambda^*(A^T)$$

Por lo tanto

$$\lambda^*(A^T) = \lambda^*(A)$$

De donde se obtiene que  $|\beta| \leq \lambda^*(A^T) = \lambda^*(A) \rightarrow |\beta| \leq \lambda^*(A)$  siendo  $\beta$  cualquier valor propio de la matriz  $B$ .

**Demostración de (v):** Asociado a  $\lambda^*(A)$  existe un vector propio  $X^*$  con todas sus componentes positivas.

En efecto, se sabe que  $X^* \geq 0$  pues  $X^* \in K$  Si  $X^*$  tiene alguna componente nula, mediante alguna reordenación conveniente de sus coordenadas dada por cierta permutación  $\pi$  podemos escribir:

$$X^* = \begin{bmatrix} Y^* \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Con } Y^* > 0$$

Realizando la misma permutación sobre las filas y las columnas de  $A$  obtenemos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^* \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda^*(A) \begin{bmatrix} Y^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando este producto de matrices se obtiene

$$\begin{bmatrix} a_{11}Y^* \\ a_{21}Y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^*(A)Y^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$a_{11}Y^* = \lambda^*(A)Y^*$$

$a_{21}Y^* = 0 \rightarrow a_{21} = 0$  Lo cual contradice el hecho que la matriz  $A$  es irreducible, de donde no es posible que  $X^* \geq 0$  es decir se cumple que  $X^* > 0$ .

**Demostración de (vi):** Si  $\lambda$  es otro valor propio de  $A$  con  $\lambda \neq \lambda^*(A)$  no existe ningún vector propio asociado a  $\lambda$  con todas sus componentes del mismo signo.

En efecto, sea  $\mu$  un autovalor cualquiera de  $A$  entonces  $Ay = \mu y \dots (1)$

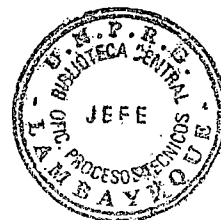
De otro lado sea  $\lambda^*(A^T)$  la raíz de Frobenius de  $A^T$  y  $Y^*$  su valor propio asociado con  $Y^* > 0$  de donde se sigue que:

$$A^T Y^* = \lambda^*(A^T) Y^* \rightarrow (Y^*)^T A = \lambda^*(A) (Y^*)^T \dots (2)$$

Multiplicando (1) por  $(Y^*)^T$  y (2) por  $Y$  se obtiene

$$\mu (Y^*)^T Y = \lambda^*(A) (Y^*)^T Y$$

Si  $\lambda^*(A) \neq \mu$  para que se de la igualdad ha de ser  $(Y^*)^T Y = 0$ , es decir,  $Y$  e  $Y^*$  han de ser ortogonales. Y esto no puede suceder si  $Y$  tiene todas sus componentes del mismo signo ( $Y^* > 0$ ) ■



## CAPÍTULO 3: LA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

### 3.1. Introducción

Puesto que la red de internet puede representarse como un grafo orientado en el cual los  $N$  vértices representan las  $N$  páginas de la red y las aristas orientadas representan enlaces entre páginas. Luego si queremos jerarquizar la búsqueda de información lo que debemos hacer es trasladar la información del grafo, usando su matriz de adyacencia, la cual será una matriz  $P$  de tamaño  $N \times N$ , donde la  $j$ -ésima columna representa la  $j$ -ésima página de partida y la  $i$ -ésima fila representa la  $i$ -ésima página de destino. Cada vértice tiene un “peso” diferente en la red, de acuerdo al papel del vértice en la conectividad de la red. Si se supone que la importancia  $x_j$  de la página  $P_j$  es proporcional a la suma de las importancias de las páginas que enlazan con  $P_j$ , se tiene que debemos resolver el siguiente problema:

$$P^T x = \lambda x$$

Donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  es el vector de “importancias” de las páginas censadas. Surgiendo las siguientes interrogantes: ¿Por qué debería tener valores propios reales  $P^T$ ? ¿Por qué habría de haber vectores propios todos positivos? ¿Existe algún tipo de unicidad? En este capítulo mediante la herramienta matemática conocida como el teorema de Perron-Frobenius desarrollado en el capítulo anterior se responde de manera positiva a las interrogantes planteadas.

Revisemos algunas definiciones que nos serán útiles en las secciones siguientes.

**Internet:** Es una red de redes global o mundial de equipos informáticos que se comunican mediante programas de cómputo; en ella se encuentra todo tipo de información que genera la humanidad. Funciona como una gran “biblioteca” mundial que permite la consulta de cualquier documento que esté disponible en algún Servidor del planeta. A través de esta red es posible intercambiar documentos (audio-escrito-visuales) con otras personas que se encuentran conectadas al sistema. Su principal característica es que se trata de un sistema telemático accesible, económico, abierto y global, que trasciende las fronteras tanto políticas como culturales (idiomas, credos, razas, etc.)

**URL:** Dirección electrónica de las páginas web.

**Página Web:** En internet se llama así a aquella que es posible visualizar en una pantalla de la computadora, por haber sido creada en lenguaje HTML. En ella se pueden crear imágenes estáticas, en movimiento, a colores, incluir sonido y hasta video; dichas páginas también permiten el uso del hipervínculo o hipertexto que es la posibilidad de ligar otros sitios o contenidos.

**Hipertexto:** Se aplica a los enlaces existentes en las páginas escritas en el lenguaje HTML, enlaces que llevan a otras páginas que pueden a su vez contener otros enlaces de hipertexto. El acceso a las páginas hipertextuales se realiza a través de navegadores WWW (Yahoo, Explorer, Google, etc.). Los enlaces se destacan a través de una o varias palabras subrayadas, que aparecen en color diferente al resto del texto. Al hacer clic en dichas palabras se conecta con otro texto o documento y se despliega nueva información relacionada con la anterior.

**Host:** Es el servidor que proporciona todos los servicios que posee a los usuarios a través de la red internet, para llegar a contactarse con este es necesario conocer la dirección electrónica del mismo.

**Interfaz:** Recurso por el cual dos equipos se comunican entre sí.

**Interfaz del usuario:** Referido a la computadora es el ambiente en que un usuario puede utilizar el teclado, el mouse, ventanas, menús, iconos, imágenes, sonidos y todos aquellos elementos que permitan la comunicación entre el hombre y la computadora.

### **3.1.1. Buscadores de Internet**

En la actualidad se podría comparar el trabajo de un buscador con el de un bibliotecario. Para hacerlo más explícito, digamos que se trata de un bibliotecario, como la mayoría de los bibliotecarios en nuestro país, que no cuenta con una computadora. Si uno acude a estas bibliotecas intentando encontrar información sobre algún tema en particular, se encuentra con un gran fichero o catálogo enorme, impreso, conteniendo toda la información existente en esa biblioteca hasta la última actualización. Con un poco de suerte además habrá alguna especie de catálogo-diccionario, relacionando libros con

algunas palabras clave, luego se hace necesaria la interacción con este bibliotecario, para que nos guíe en nuestra búsqueda, sino quedamos satisfechos con la información proporcionada por el bibliotecario, entonces tendremos que buscar en todos los archivos la información buscada, pero imaginemos que en esta biblioteca, hay millones de documentos que tienen relación con la información que nosotros requerimos, sin embargo de esta cantidad enorme de documentos, quizás la información solo se encuentra en unos pocos documentos, pero ¿Cómo hago para decidir la importancia de los documentos que me ayudarán en mi trabajo?. El algoritmo de PageRank nos ayuda a solucionar nuestro problema, en realidad el problema de buscador (en este caso el problema del bibliotecario) y particularmente el problema de los llamados buscadores de internet que a continuación definimos.

**Definición:** Un buscador es un tipo de software que crea índices de bases de datos o de sitios web en función de los títulos de los ficheros, de palabras clave, o del texto completo de dichos ficheros. El usuario conecta con un buscador y especifica la palabra o las palabras clave del tema que desea buscar. El buscador devuelve una lista de resultados presentados en hipertexto, es decir que se pueden pulsar y acceder directamente al fichero correspondiente.

En este trabajo estamos interesados en el buscador Google, debido a su gran importancia en el mundo actual.

Los buscadores para recoger información de la red usan los llamados spider, que definimos a continuación.

**Definición:** Spider es un programa que recorre la WWW y recoge páginas web, visitando los enlaces que tiene de forma automática. Suelen utilizarlo los grandes buscadores para dar de alta (indexar) las páginas y luego poder buscar en ellas.

Un Spider, consta básicamente de tres elementos:

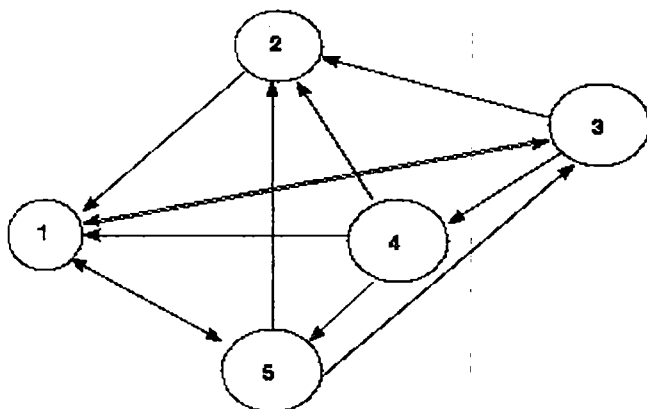
- El **Spider** propiamente dicho, que explora las páginas y sus **enlaces**.
- La **base de datos** confeccionada con los datos obtenidos por el Spider.
- Un **constructor de resultados**, que es lo que nosotros vemos cuando realizamos una búsqueda en los **buscadores**.

Google el spider llamado **Googlebot**

En la siguiente sección se describe el algoritmo que usa el motor de búsqueda de Google, el cual lo ha llevado a posicionarse como el buscador número uno a nivel mundial.

### 3.2. El modelo PageRank

Este modelo ayuda al buscador en su tarea de jerarquizar la búsqueda de información por la red, ya que permite asignarle una “importancia” a cada página web censada, para lo cual hará uso de la teoría de grafos, particularmente de los grafos dirigidos, descrita en el capítulo 1. Puesto que la red puede ser descrita como un gran grafo dirigido, donde cada nodo representa una página censada, y cada arista dirigida representa un enlace entre las respectivas páginas, si el siguiente grafo dirigido representara lo que llamaremos el **grafo de internet**, observamos que la pagina 1 es la más popular ya que hay enlaces de todas las otras hacia ella y además es la única con tal propiedad.

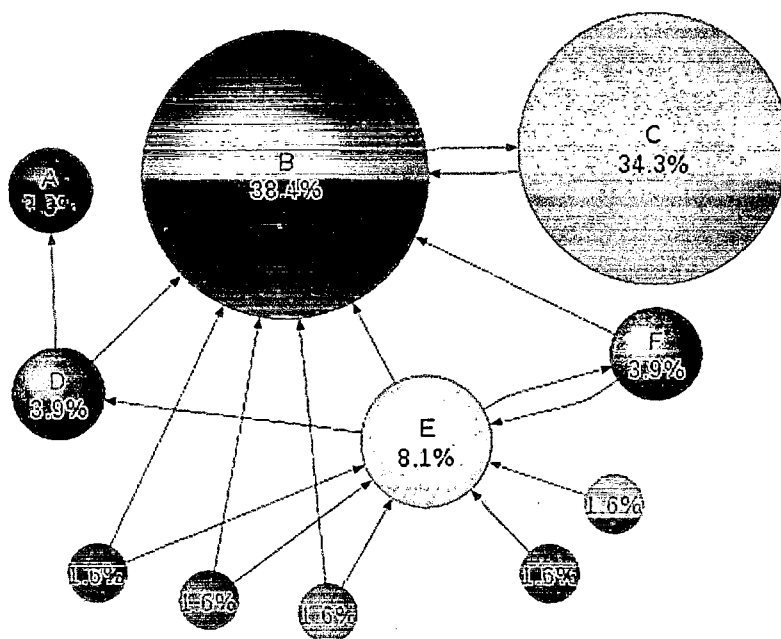


Es decir estamos asignándoles su nivel de “importancia” a cada página con respecto a las otras, diciendo que una página es más importante que otra si es ella recibe más enlaces que las demás.

Sin embargo este modelo tiene una debilidad, y es que, fácilmente puede “inflarse” la importancia de una determinada página web, creando varias páginas que tengan enlaces con esta página, y este procedimiento es muy fácil de implementar en poco tiempo, y este hecho claramente haría que todo el sistema fuera muy fácil de influir.

Lo anterior obliga a modificar la forma de medir lo que se entenderá por “importancia” de cada página, del modo siguiente, cambiaremos la función “número de citas” por “importancia de las citas”. Es decir, no solo vamos a darle importancia a la cantidad de citas que tiene una página dada, sino que también tendremos en cuenta si la citan páginas importantes. Digamos que, por ejemplo, si obtengo enlaces desde Amazon.com o Microsoft.com, mi importancia debería ser mayor. En ese sentido, el grafo de las páginas web sería algo más bien parecido a lo que aparece en la figura abajo, donde se ve una distribución de importancias relativas a las importancias de las páginas dadas. Aquí se entiende por qué la página “C” es más importante que la “F” dado que ambas reciben un enlace cada una, pero la primera es enlazada por una página mucho más importante que la segunda.





Dicho en palabras, el “postulado” del modelo PageRank dice lo siguiente:

“La importancia  $x_i$  de la página  $p_i$  es directamente proporcional a la suma de las importancias de las páginas que enlazan con ella”.

Veamos cómo se traduce esto matemáticamente, puesto que el grafo de internet tiene más de un billón de páginas, sería imposible dibujarlo por lo que usaremos su matriz de adyacencia, que como ya sabemos está formada por ceros (si no hay enlace entre las páginas  $p_i$  y  $p_j$ ) y unos (si hay enlace entre las páginas  $p_i$  y  $p_j$ ).

Puesto que en las filas de la matriz de adyacencia del grafo de internet se puede leer cuántos enlaces salen de una página dada, justamente en las columnas aparecerán tantos unos como enlaces haya hacia la página indexada por esa columna. Es por ello que se necesita trasponer la matriz para utilizarla en el problema del PageRank. Por otra parte, de acuerdo con el “postulado” del modelo PageRank, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_1 &= K(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ x_2 &= K(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= K(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \end{aligned}$$

Con  $a_{ij} \in M_I^T$ , donde  $M_I$  denota la matriz de adyacencia del grafo de internet, de lo anterior se tiene que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$M_I^T x^T = \frac{1}{K} x^T$$

Donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de "importancias". Si hacemos  $\lambda = \frac{1}{K}$  entonces la ecuación anterior se puede reescribir como sigue:

$$M_I^T x^T = \lambda x^T$$

De donde se tiene que:

- $\lambda$  es la constante de proporcionalidad si y solamente si  $\lambda$  es un valor propio de la matriz  $M_I^T$ .
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de "importancias" si y solamente si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un vector propio asociado al valor propio  $\lambda$ .

Lo anterior origina las siguientes interrogantes:

¿Tiene valores propios reales la matriz  $M_I^T$ ? ¿Si existen estos valores propios, ellos son únicos?

Como hemos visto en el capítulo 2 el teorema de Perron-Frobenius, nos proporcionan las condiciones que debe poseer la matriz  $M_I^T$  para que las interrogantes anteriores se respondan afirmativamente.

Lamentablemente la matriz  $M_I^T$  está lejos de ser una matriz semipositiva, originada por el siguiente hecho: Si una página tiene un solo enlace, este enlace vale lo mismo que cualquier otro enlace de otra página que produzca un millón de enlaces. Es como, si bien producir enlaces desde mi propia página no aumenta mi importancia, cuantos más enlaces produce mi página, más afecta a toda la red.

Este problema de exceso de autoridad se evita procediendo como sigue: si hubiera un enlace desde  $p_i$  hacia  $p_j$ , en el lugar  $(i, j)$  de la matriz de adyacencia se coloca el número:

De esta manera, cada página tiene “poder de voto” igual a 1, y esta unidad se va distribuyendo de acuerdo a los enlaces. De este modo se obtiene una matriz la cual es llamada **matriz estocástica por filas** (una matriz en la que en cada fila la suma de sus elementos es igual a la unidad), a esta matriz la denotamos por  $M_{I,E}$ , puesto que no podemos aplicar directamente el teorema de Perron-Frobenius a la matriz  $M_I^T$ , aplicaremos la técnica de “perturbación”, esta técnica se basa en que la función “importancia” es continua, y si puedo calcularla “cerca” de la situación donde me encuentro, me sirve para lo que quiero: que es ordenar las importancias y no realmente calcularlas, la matriz que perturbaremos será  $M_{I,E}$ . Dado  $0 < \varepsilon < 1$  definimos:

$$M_{I,E}^\varepsilon = (1 - \varepsilon)M_{I,E} + \frac{\varepsilon}{n} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

No es difícil verificar que la matriz  $M_{I,E}^\varepsilon \geq 0$ , es decir esta matriz satisface las hipótesis del teorema de Perron-Frobenius y entonces “declaramos” que “la” solución al problema es la que se obtiene según ese enunciado para un  $\varepsilon$  prefijado (en la práctica, Google utiliza  $\varepsilon = 0.15$ ). Por lo tanto existe un valor propio positivo  $\lambda^*$  asociado a este  $\lambda^*$  existe un vector propio  $x^*$  con todas sus componentes positivas, Este teorema nos trae una cierta unicidad que consistiría en quedarnos con el único vector propio positivo de la matriz, el asociado al valor propio más grande que todos los otros (en módulo) tal como queríamos.

Sin embargo hay un “pequeño” inconveniente, las matrices con las cuales trabaja Google son matrices cuadradas del orden de más de un billón, así que tratar de calcular lo expuesto hasta aquí mediante las técnicas tradicionales sería una tarea titánica y muy costosa, para resolver este inconveniente Google utiliza lo que se llama el **método de las potencias**, en apariencia bastante ingenuo de enunciar pero computacionalmente muy efectivo. Se basa en el siguiente hecho bastante simple:

Si una matriz cuadrada  $M$  es diagonalizable y tiene todos sus vectores propios  $\{v_1, \dots, v_n\}$  numerados de tal manera que los valores propios correspondientes cumplan lo siguiente:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Partiendo de  $v_0 \geq 0$  tal que:

$v_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ , con  $\alpha_1 \neq 0$  entonces se tiene que

$$M^k v_0 = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v_n$$

De donde  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M^k v_0}{\lambda_1^k} = \alpha_1 v_1$  es un múltiplo no trivial del vector propio buscado.

Este es el método que utiliza Google para ordenar sus páginas de internet, y con resultados bastante razonables.

### 3.3. Aplicación del TEOREMA DE PERRÓN FROBENIUS para determinadas páginas web.

En el campo de búsqueda “fenómeno del niño” y a partir de seis páginas web interrelacionadas creamos el grafo y la matriz de adyacencia asociada al grafo. Las páginas escogidas son:

- 1: Word Meteorological Organization (WMO).
- 2: Centro Internacional para la Investigación del Fenómeno del Niño (CIIFEN).
- 3: Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología del Perú (SENAMHI).
- 4: Instituto Nacional de Meteorología e Hidrología del Ecuador (INAMHI).
- 5: Dirección Meteorológica de Chile.

Cuyo grafo dirigido es el siguiente:

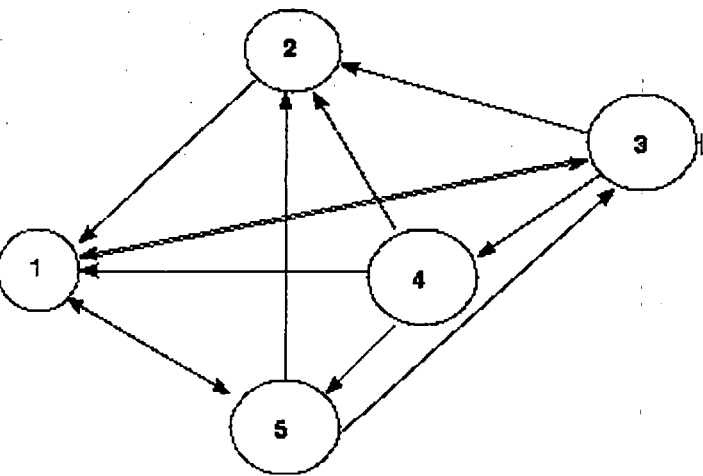


Figura del grafo del ejemplo ilustrativo

Cuya matriz de adyacencia viene dada por:

$$M_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego la matriz traspuesta de  $M_I$  es

$$M_I^T = \begin{bmatrix} 00101 \\ 10000 \\ 11010 \\ 11001 \\ 11100 \end{bmatrix}^T$$

Luego se tiene que debemos resolver la ecuación  $M_I^T x^T = \lambda x^T$

Es decir debemos resolver:

$$M_I^T x^T = \begin{bmatrix} 00101 \\ 10000 \\ 11010 \\ 11001 \\ 11100 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 01111 \\ 00111 \\ 10001 \\ 00100 \\ 10010 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \lambda x_5 \end{bmatrix}$$

Lo que significa que debemos calcular los valores propios  $M_I^T$ , que de acuerdo al teorema 1 de la sección 1.4.6 es equivalente a determinar las raíces del polinomio característico definido por:

$$P(\lambda) = \det(M_I^T - \lambda I)$$

Y los vectores asociados a cada valor propio es el vector propio de la matriz  $M_I^T$ .

$$P(\lambda) = \det(M_I^T - \lambda I) = \begin{vmatrix} 01111 \\ 00111 \\ 10001 \\ 00100 \\ 10010 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda 0000 \\ 0\lambda 000 \\ 00\lambda 00 \\ 000\lambda 0 \\ 0000\lambda \end{vmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$P(\lambda) = \det(M_I^T - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

De donde el determinante viene dada por:

$$\det(M_I^T - \lambda I) = (-1)^{5+1}a_{51}A_{51} + (-1)^{5+2}a_{52}A_{52} + (-1)^{5+3}a_{53}A_{53} + (-1)^{5+4}a_{54}A_{54} \\ + (-1)^{5+5}a_{55}A_{55}$$

De donde:

$$P(\lambda) = \det(M_I^T - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \dots \dots (1)$$

Si en la ecuación (1) llamamos:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; D_3 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = D_1 - D_2 - \lambda D_3 \dots \dots (2)$$

Ahora calculemos por separado cada  $D_i; i = 1, 2, 3$

$$\triangleright D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = [1 - (-\lambda)] + \lambda[1 + \lambda^2 - (-\lambda - \lambda)]$$

$$D_1 = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\triangleright D_2 = 0 + 0 + (-1)^{4+3}(1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\triangleright D_3 = 0 + 0 + (-1)^{4+3}(1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow D_3 = -[1 - (-\lambda)] + (-\lambda)[(-\lambda^3 + 1) - (-\lambda)]$$

$$\rightarrow D_3 = \lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

Sustituyendo los valores  $D_1; D_2$  y  $D_3$  en la ecuación (2) se tiene que:

$$\rightarrow P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 - (\lambda^2 - \lambda - 1) - \lambda(\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda - 1)$$

$$\rightarrow P(\lambda) = -\lambda^5 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$$

Usando el comando *eig* de Matlab en la forma siguiente se obtienen los valores y vectores propios correspondientes.

$$>> A = [00101; 10000; 11010; 11001; 11100]$$

$$>> [V D] = eig(A)$$



Las columnas de la matriz  $V$  son los vectores propios mientras que los elementos de la diagonal de la matriz  $D$  son los valores propios. Se obtiene que los valores propios y vectores asociados son:

$$\lambda_1 = 2,27, v_1 = (1,74; 1,21; 1,21; 0,532; 1)$$

$$\lambda_2 = -0,5 - 0,86i, v_2 = (0; -0,5 - 0,866i; -0,5 + 0,866i; 1)$$

$$\lambda_3 = -0,5 + 0,86i, v_3 = (0; -0,5 + 0,866i; -0,5 - 0,866i; 1)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= -0,635 + 0,629i, v_4 \\ &= (-0,469 + 0,101i; -0,303 - 0,490i; -0,303 - 0,490i; -0,166 \\ &\quad + 0,59i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_5 &= -0,635 - 0,629i, v_5 \\ &= (-0,469 - 0,101i; -0,303 + 0,490i; -0,303 + 0,490i; -0,166 \\ &\quad - 0,59i) \end{aligned}$$

Puesto que estamos buscando una constante de proporcionalidad real y positiva se deduce que la solución es elegir  $\lambda_1 = 2,27$  cuyo vector propio asociado es

$$v_1 = (1,74; 1,21; 1,21; 0,532; 1)$$

De donde  $x_1 = 1,74; x_2 = 1,21; x_3 = 1,21; x_4 = 0,532; x_5 = 1$

Es decir la primera página es la que les gana a todas las demás, sin embargo no podemos decidir cómo ordenar las otras dos páginas siguientes, ya que tanto la segunda como la tercera página tienen el mismo valor 1,2 a pesar que la segunda página tiene un voto más que la tercera, sin embargo la tercera página es votada por la página más importante de todas, es decir por la primera página, esto nos obliga a usar la llamada matriz modificada **matriz estocástica por filas** que denotaremos  $M_{0,E}$

$$M_{0,E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2^{-1} & 0 & 2^{-1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 3^{-1} & 0 \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 0 & 3^{-1} \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando nuevamente el comando *eig* de Matlab se obtiene que los valores propios y vectores asociados son:

$$\lambda_1 = 1; v_1 = (1,73; 0,867; 1,2; 0,4; 1)$$

$$\lambda_2 = -0,333 + 0,471i; v_2 = (-0,333 + 0,943i; -0,667 - 0,236i; 0,5 - 0,707i; -0,5; 1)$$

$$\lambda_3 = -0,333 - 0,471i; v_3 = (-0,333 - 0,943i; -0,667 + 0,236i; 0,5 + 0,707i; -0,5; 1)$$

$$\lambda_4 = -0,167 + 0,289i; v_4 = (0; 0; -0,5 - 0,866i; -0,5 + 0,866i; 1)$$

$$\lambda_5 = -0,167 - 0,289i; v_5 = (0; 0; -0,5 + 0,866i; -0,5 - 0,866i; 1)$$

Puesto que estamos buscando una constante de proporcionalidad real y positiva se deduce que la solución es elegir  $\lambda_1 = 1$  cuyo vector propio asociado es

$$v_1 = (1,73; 0,867; 1,2; 0,4; 1)$$

De donde  $x_1 = 1,73; x_2 = 0,867; x_3 = 1,2; x_4 = 0,4; x_5 = 1$

Es decir ya tenemos la siguiente ordenación:  $x_1 > x_3 > x_5 > x_2 > x_4$

Nótese la diferencia con lo que se hizo anteriormente en donde no se podía establecer una ordenación entre la segunda y la tercera página, ya que ambas tenían la misma "importancia", este problema fue solucionado mediante el uso de la matriz estocástica  $M_{0,E}$

Sin embargo, aún no tenemos unicidad, para determinar la unicidad de la solución debemos garantizar que se cumplen las hipótesis de teorema de Perron-Frobenius, lamentablemente la matriz asociadas a los grafos de internet tienen muchos ceros, ya que existen páginas que no se enlazan con otras páginas, como en nuestro ejemplo la página de WMO no se enlaza con la página de CIIFEN.

Para obtener una matriz que satisfaga las hipótesis de teorema de Perron-Frobenius, perturbaremos la matriz  $M_{0,E}$  con  $\varepsilon = 0,15$  a la cual denotamos por  $M_{0,E}^\varepsilon$  y que como se sabe se define como sigue:

$$M_{0,E}^\varepsilon = (1 - \varepsilon)M_{0,E} + \frac{\varepsilon}{n} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$



Luego

$$M_{0,E}^{0,15} = (0,85) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2^{-1} & 0 & 2^{-1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 3^{-1} & 0 \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 0 & 3^{-1} \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{0,15}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow M_{0,E}^{0,15} = (0,85) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2^{-1} & 0 & 2^{-1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 3^{-1} & 0 \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 0 & 3^{-1} \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} + (0,03) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow M_{0,E}^{0,15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,425 & 0 & 0,425 \\ 0,85 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,283 & 0,283 & 0 & 0,283 & 0 \\ 0,283 & 0,283 & 0 & 0 & 0,283 \\ 0,283 & 0,283 & 0,283 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$M_{0,E}^{0,15} = \begin{bmatrix} 0,03 & 0,03 & 0,455 & 0,03 & 0,455 \\ 0,88 & 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 \\ 0,313 & 0,313 & 0,03 & 0,313 & 0,03 \\ 0,313 & 0,313 & 0,03 & 0,03 & 0,313 \\ 0,313 & 0,313 & 0,313 & 0,03 & 0,03 \end{bmatrix}$$

Claramente la matriz  $M_{0,E}^{0,15}$  es una matriz no negativa, y satisface las hipótesis del teorema de Perron-Frobenius, y por lo tanto la solución obtenida es única. Usando el comando *eig* de Matlab se obtiene el valor propio  $\lambda = 1$  cuyo vector propio asociado es:

$v = (0,67259; 0,363478; 0,463318; 0,194141; 0,403921)$  De donde:

$$x_1 = 0,67259; x_2 = 0,363478; x_3 = 0,463318; x_4 = 0,194141; x_5 = 0,403921$$

Es decir nuevamente se tiene la siguiente ordenación:  $x_1 > x_3 > x_5 > x_2 > x_4$  ■

## CONCLUSIONES

1. Una red en Internet tiene asociado un grafo dirigido, y por ende se le puede asociar una matriz de adyacencia.
2. La matriz de adyacencia asociada al grafo de una red de internet tiene muchos ceros. Esta matriz debe ser semipositiva e irreducible.
3. Si se modifica la matriz de adyacencia transformándola en una matriz estocástica se obtiene una jerarquización de las páginas webs de esta red; sin embargo, la jerarquización obtenida no es única.
4. Perturbando la matriz estocástica se obtiene la matriz  $M_{0,E}^\varepsilon$  la cual satisface las hipótesis del teorema de Perron-Frobenius.
5. Aplicando el teorema de Perron-Frobenius a la matriz  $M_{0,E}^\varepsilon$  se obtiene una única jerarquización de las páginas webs de una red de internet.
6. El  $\varepsilon = 0,15$  es un valor numérico que utiliza Google.

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. Antón.: Introducción al Álgebra Lineal, Editorial Limusa, México, 2008.
2. Brezis, H: Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones, Alianza Editorial S.A, Madrid, 1984.
3. Borobia, A., Trías, U.: A geometric proof of the Perron-Frobenius theorem, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid. Volumen 5, número 1, 1992,57-63.
4. Fernández, P.: El secreto de Google y el álgebra lineal, Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid, 2004.
5. Larson & Edwards: Introducción al Álgebra Lineal, Editorial Limusa Noriega Editores, México, 2008.
6. Markarian, R., Möller, N.: La importancia de cada nodo en una estructura de enlaces: Google-PageRank<sup>TM</sup>, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XI, No. 2 (2004), 233-252.