UNIVERSIDAD NACIONAL

“PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

TEOREMA DE SARD Y LA DEPENDENCIA FUNCIONAL DE FUNCIONES REALES DIFERENCIABLES

TESIS

Para optar el título profesional de

Licenciado en Matemáticas

presentado por:

Omar Alfredo Díaz Tantarico

Asesor

Dra. Gloria María Ortiz Basauri

Lambayeque – Perú

2018

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Teorema de Sard y la dependencia funcional de funciones reales diferenciables

Omar Alfredo Díaz Tantarico

Autor

Gloria María Ortiz Basauri

Asesor

Lambayeque – Perú

2018

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Escuela Profesional de Matemática

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"Teorema de Sard y la dependencia funcional de funciones reales diferenciables "**, presentado por Omar Alfredo Díaz Tantarico en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Mag. Mat. Malca Villalobos Amado

Presidente del Jurado

Mag. Mat. Oscar Antonio Santamaria Santisteban

Secretario del Jurado

Mag. Mat. Danessa Lisbeth Chirinos Fernández

Vocal del Jurado

Fecha de defensa: 12 de Febrero del 2018

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco al Dios todopoderoso con todo mi corazón, por permitirme culminar este trabajo importante en mi carrera y también algunas personas que fueron el pilar y el empuje necesario a la realización de este trabajo de tesis.

Doy gracias a mi querida asesora profesora Gloria María Ortiz Bazauri por su paciencia infinita, apoyo moral y comprensión que me guío en la realización de esta tesis.

A mis mentores y amigos en especial a los Mag. Mat. Fernando Huancas Suarez y Mag. Mat. Pedro Pablo Julca Córdova y Mg. Mat. Alan Chávez Obregón que me enseñaron y apoyaron en el pregrado, a quienes estaré eternamente agradecido por sus enseñanzas.

A mi esposa e hija por ser el motor y motivo en mi vida, en el cual me dió fortaleza y confianza para seguir adelante con el término de mi trabajo.

Asimismo agradezco también a mis padres Sabina y Clemente por su apoyo incondicional desde el principio y término de mi carrera, además de su invalorable paciencia y fortalecer mi confianza en culminar este trabajo.

DEDICATORIA

Dedico:

A Dios todopoderoso, el que me ha dado fortaleza para terminar con satisfacción este anhelado trabajo.

A mí querida y adorada hija Eilidh, que es el motor de mi vida.

A mí querida esposa Carmen por su invalorable confianza y motivación en concretar este proyecto en mi carrera para seguir adelante y alcanzar mis objetivos.

A mis queridos padres Sabina y Clemente por su paciencia, cariño y constante apoyo moral en cada momento de mi vida.

Presentación

El presente trabajo tiene como objetivo principal mostrar la aplicación del Teorema de Sard a la dependencia funcional de aplicaciones reales diferenciables definidas en subconjuntos del $\mathbb{R}^n$ además permite simplificar la demostración de los teoremas de la dependencia funcional.

Como objetivo secundario, muestra la demostración del Teorema de Sard a nivel de espacios euclideanos en sus tres casos, justificando cada paso de su demostración.

Espero que sea de gran ayuda a futuro, para Estudiantes y Docentes. Les presento esta tesis llamado **"Teorema de Sard y la dependencia funcional de funciones reales diferenciables "**.

RESUMEN

El teorema de Sard ha sido investigado desde 1940 y posteriormente se han ido encontrando varias aplicaciones. En este trabajo de investigación, uno de los objetivos fue presentar el teorema para funciones diferenciables $\mathcal{C}^\infty$ $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ justificando cada paso de la demostración en sus tres casos: $m > n, m = n$ y $m < n$.

Por último para la aplicación elegida, se busca justificar la demostración sobre las condiciones para la dependencia funcional de las funciones componentes de una aplicación diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ definida en un abierto en sus tres casos (Teorema (3.2), Teorema (3.3) y Teorema (3.4)).

Abstract

Sard's theorem has been investigated since 1940 and several applications have been added later. This research work paper, in one of the objectives was to present the theorem to work differentiable $\mathcal{C}^\infty$ $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ justifying each step of the demonstration in its three cases: $m > n, m = n$ y $m < n$.

Finally, for the chosen application, we search to justify the demonstration about the conditions for the functional dependence of the component functions of a differentiable application $\mathcal{C}^\infty$ defined in an open in both cases (Theorem 3. 2, Theorem 3.3 and Theorem 3.4)

Índice general

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de investigación se analizó a profundidad el Teorema de Sard, ya demostrado por Arthur Sard en los años 40, dando las justificaciones de cada una de las afirmaciones dadas, trabajo arduo pero satisfactorio. Además, se desarrolló una aplicación del teorema a la dependencia funcional de funciones reales diferenciales.

Para mejor comprensión el trabajo fue dividido en tres capítulos:

En el primer capítulo, se desarrolló los preliminares básicos indispensables de análisis, topología y variedades diferenciables.

El segundo capítulo, está dirigido a la justificación de cada afirmación del Teorema de Sard, *"Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ en un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$, sea $C = \{x \in U / \operatorname{Ran}[f'(x)] < n\}$, entonces $f(C)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$"*. La demostración se hace en sus tres casos, para $m < n, m = n$ y el caso más complicado $m > n$.

En el tercer capítulo, se dá a conocer un estracto de la teoría de la dependencia funcional, donde en dos de sus teoremas el Teorema de Sard permitió una demostración más precisa.

Por último, se presentan las conclusiones y sugerencias.

Capítulo 1:

Preliminares

1.1. Valor regular y valor crítico de una aplicación diferenciable.

Definición 1.1. (**Punto crítico y valor crítico**)

Sean M^m y N^n variedades diferenciables de clase $C^k, (k \geq 1)$ y $f : M^m \longrightarrow N^n$ una aplicación de clase $C^k, (k \geq 1)$. Un punto $p \in M^m$ es punto crítico de f si, $dimImg$ $[df(p)] < n$. Un punto $q \in N^n$ es un valor crítico, si todo $p \in f^{-1}(q)$ es punto crítico.

Ejemplo 1.1. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Vemos que su vector gradiente; el cual coincide con su matriz jacobiana $df(x, y) = (2x, 2y)$, se anula en el origen (0,0). Luego $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico de f y además su valor $f(0, 0) = 0$ es valor crítico de f.

Definición 1.2. (**Punto regular y valor regular**)

Sean M^m y N^n variedades diferenciables de clase $C^k, (k \geq 1)$ y $f : M^m \longrightarrow N^n$ una aplicación de clase $C^k, (k \geq 1)$.

Un punto $p \in M^m$ es punto regular de f si $dimImg\,[df(p)] = n$. Un punto $q = f(p) \in N^n$ es valor regular de f, si todo $p \in f^{-1}(q)$ es punto regular.

Ejemplo 1.2. Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Se prueba que es de clase $C^k, (k \geq 1)$ y que todo punto de $\mathbb{R} - \{0\}$ es un valor regular de f.

1.2. Conjuntos de medida nula.

Definición 1.3. Un cubo $n-$dimensional $C \subset \mathbb{R}^n$ de lado $r > 0$ es un producto cartesiano de n intervalos compactos de lado "r":

$C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ tal que $b_i - a_i = r$.

El volumen del cubo C queda definido como $Vol(C) = \|C\| = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = r^n$.

Definición 1.4. (**Conjuntos de Medida Nula**)

Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$, y lo escribimos $med(X) = 0$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de cubos $(W_k)_{k\geq 1}$ tales que $X \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} Vol(W_k) < \varepsilon$.

Ejemplo 1.3. El conjunto $S = \{p\} \subset \mathbb{R}^n$, tiene medida nula.

Dado $\epsilon > 0$, consideremos un cubo C de arista $r = \sqrt[n]{\varepsilon/2}$ tal que $S = \{p\} \subset C$, así el $Vol(C) < \varepsilon$, por tanto $med(S) = 0$.

Ejemplo 1.4. El conjunto $S = \{p_i\}_{i=\overline{1,k}} \subset \mathbb{R}^n$, también tiene medida nula.

De la misma forma que el ejemplo anterior, dado un $\varepsilon > 0$, consideremos una sucesión de cubos $(W_i)_{i=\overline{1,k}}$ de arista $r = \sqrt[n]{\dfrac{\varepsilon}{i(i+1)}}$ para cada $i = \overline{1,k}$.

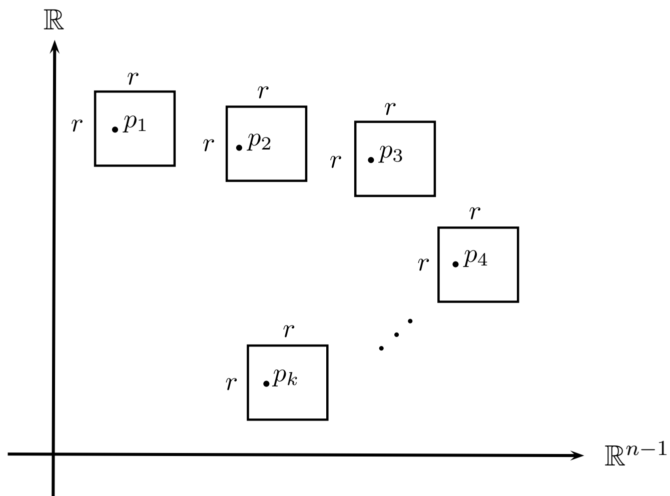


Figura 1.1 *Sucesión de cubos.*

Observamos que se cumple: $S \subset \bigcup_{i=1}^{k} W_i$ y además tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} Vol(W_i) &= \frac{\varepsilon}{1(2)} + \frac{\varepsilon}{2(3)} + \cdots + \frac{\varepsilon}{k(k+1)} \\
\sum_{i=1}^{k} Vol(W_i) &= \varepsilon\left[\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right] \\
\sum_{i=1}^{k} Vol(W_i) &= \varepsilon\left[\frac{k}{k+1}\right] < \varepsilon, \quad \text{por lo tanto } med(S) = 0
\end{aligned}
$$

Proposición 1.1. *Si $I \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces la gráfica de f tiene medida nula.*

Demostración.

Como $Graf(f) = \{(x, f(x)/x \in I)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, f es continua e I compacto, se tiene que f es uniformemente continua en I, esto es dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow$

$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon, \forall x, y \in I$; para $\varepsilon > 0$ damos una sucesión finita $\{R_k\}_{k\geq 1}$ de cubos cerrados en I tal que $\forall\ x, y \in\ R_k : \|x - y\| < \delta$, donde δ depende de ε y además $Vol(R_k) = \dfrac{1}{10^k}$.

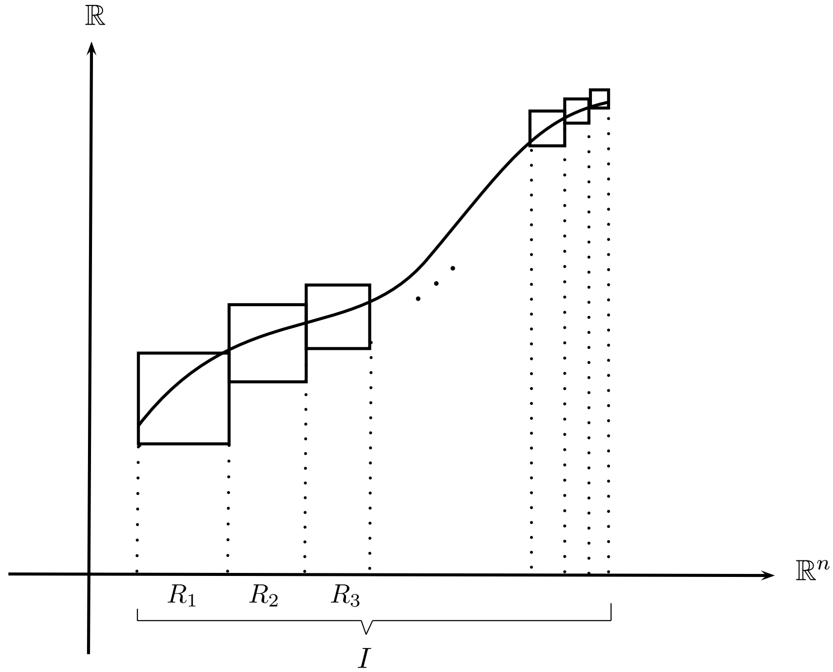


Figura 1.2 *Sucesión finita.*

A continuación formamos la nueva sucesión de cubos de la forma:

$$C_k = \begin{cases} R_k \times [y_{k-1}, y_k], & y_{k-1} < y_k \\ R_k \times [-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}], & y_{k-1} = y_k \end{cases}$$

Se tiene $\inf(f)_{R_k} = y_{k-1}$; $\sup(f)_{R_k} = y_k$

Si escogemos un punto arbitrario $a_k \in R_k$ resulta $f(a_k) = b_k$ tal que $\inf(f)_{R_k} < b_k < \sup(f)_{R_k}$, significa que $(a_k, b_k) \in R_k \times [y_{k-1}, y_k]$, $\forall\ k \geq 1$. Siendo f uniformemente continua resulta $|y_{k-1} - y_k| < \varepsilon$, $\forall\ k \geq 1$. Por tanto $Graf(f) \subset \bigcup\limits_{k\geq 1} C_k$, asimismo con el primer cubo $Vol\left([y_{k-1}, y_k]\right) < \varepsilon$ es obvio, además se satisface las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
Vol(C_k) &\leq Vol(R_k) \times Vol\left([y_{k-1}, y_k]\right) < Vol(R_k) \times \varepsilon \\
Vol(C_k) &< \varepsilon \times Vol(R_k) \\
\sum_{k\geq 1} Vol(C_k) &< \varepsilon \times \sum_{k\geq 1} Vol(R_k) = \varepsilon \times \sum_{k\geq 1} \frac{1}{10^k} < \epsilon \\
\Rightarrow \sum_{k\geq 1} Vol(C_k) &< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando el segundo cubo se tiene $Vol\left(\left[-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right]\right) < \varepsilon,$ luego $Vol(R_k) \times Vol\left(\left[-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right]\right) < Vol(R_k) \times \varepsilon \Rightarrow \ Vol(C_k) < Vol(R_k) \times \varepsilon.$ Luego

$$\sum_{k\geq 1} Vol(C_k) < \sum_{k\geq 1} Vol(R_k) \times \varepsilon = \varepsilon \sum_{k\geq 1} Vol(R_k) < \varepsilon \Rightarrow \ \sum_{k\geq 1} Vol(C_k) < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$med[Graf(f)] = 0$$

□

Teorema 1.1. *Sea la sucesión* $(X_k)_{k\geq 1}$ *de conjuntos de medida nula en* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $med\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = 0.$

Demostración.

Siendo $med(X_k) = 0 \ \forall \ k \in \mathbb{N}$, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(W_{jk})_{j\geq 1}$ de cubos tales que $X_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{jk}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} |W_{jk}| < \frac{\varepsilon}{2^k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego se tiene:
$X_1 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{j1}, X_2 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{j2}, \cdots, X_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{jk}, \cdots$, en consecuencia $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} W_{jk}$.
Además se tiene:

$\sum_{j=1}^{\infty}|W_{j1}| < \frac{\varepsilon}{2^1}, \sum_{j=1}^{\infty}|W_{j2}| < \frac{\varepsilon}{2^2}, \sum_{j=1}^{\infty}|W_{j3}| < \frac{\varepsilon}{2^3}, \cdots, \sum_{j=1}^{\infty}|W_{jk}| < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Se tiene

$\sum_{j,k=1}^{\infty}|W_{jk}| < \varepsilon$

Por lo tanto, por la Definición 1.4 se cumple que, $med\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = 0$.

□

Proposición 1.2. *Todo subconjunto de un conjunto de medida nula, también tiene medida nula.*

Demostración.

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de medida nula, por Definición 1.4 existe una sucesión de cubos $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} Vol(W_k) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Si escogemos un subconjunto arbitrario $Y \subset X$ y se tiene la siguiente relación $Y \subset X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$, luego tenemos $Y \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} Vol(W_k) < \varepsilon$, por la Definición 1.4 se concluye que, $med(Y) = 0$. □

Proposición 1.3. *Todo conjunto numerable en $\mathbb{R}^n$ tiene medida nula.*

Demostración.

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto numerable tal que $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$. Dada una sucesión de cubos W_i de arista $r = \sqrt[n]{\frac{\epsilon}{3^i}}$ para cada $x_i \in X \subset \mathbb{R}^n$, tal que el $Vol(W_i) = \frac{\epsilon}{3^i}$, se tiene $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} Vol(W_i) < \epsilon$.

$$\therefore med(X) = 0$$

□

Teorema 1.2. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida nula y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es Lipschitziana, entonces $f(X)$ tiene medida nula.*

Demostración.

Como f es Lipschitziana en $X, \exists\ c > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|, \forall\ x, y \in X$. La medida de X es nula, entonces se tiene que $\exists(W_i)$ cubos abiertos con arista r_i tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} Vol(W_i) < \dfrac{\varepsilon}{c^m}$. Luego si $\forall\ x, y \in W_i$, $\|x - y\| \leq r_i$, entonces $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\| \leq cr_i$, luego $\|f(x) - f(y)\| \leq cr_i$. Tomando la norma del máximo se tiene que la $j-$ésima proyección de $f(X \cap W_i)$ es un subconjunto de un intervalo I_j de longitud cr_i. Por tanto, se tiene $f(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(X \cap W_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, donde $f(X \cap W_i) \subset \prod_{j=1}^{m} I_j = D_i$ cuyo volumen es $c^m r_i^m$, luego $\sum_{i=1}^{\infty} Vol(D_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c^m r_i^m = c^m \sum_{i=1}^{\infty} r_i^m < c^m \dfrac{\varepsilon}{c^m} = \varepsilon$. Por lo tanto la $med[f(X)] = 0$. $\square$

Teorema 1.3. *Si $X \subset \mathbb{R}^m$ tiene medida nula y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitziana, entonces $f(X)$ tiene medida nula.*

Demostración.

Para cada $x \in X$, damos V_x una bola abierta con centro en x, tal que $X \subset \bigcup V_x$ y por hipótesis resulta $\|f(a) - f(b)\| \leq k_x\|a - b\|$ con $k_x > 0$ y $\forall\ a, b \in V_x$. Por el teorema de Lindelof, existe un recubrimiento numerable de abiertos tal que $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_x^i$. Tomemos la norma del máximo y esto convierte los abiertos V_x en cubos abiertos con arista r_i. por el Teorema 1.2 se tiene $med[f(X \cap V_x^i)] = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$; como $f(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(X \cap V_x^i)$, es la unión numerable de conjuntos de medida nula, entonces $med[f(X)] = 0$. $\square$

Teorema 1.4. *Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si $X \subset U$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$, entonces $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ también tiene medida nula.*

Demostración.

Para cada $x \in X$, sean V_x (bola abierta de centro en x) tal que $\overline{V_x} \subset U$ y como $f \in C^1$, entonces definimos $K_x = \sup\{\|f'(x)y\|/y \in \overline{V_x}\}$ luego por el teorema de Valor Medio resulta $\|f(z) - f(y)\| \leq K_x\|z - y\|$, $\forall z, y \in V_x$. Así se tiene que f es localmente Lipschitziana, por el Teorema 1.3 se concluye que $med[f(X)] = 0$. □

Lema 1.1. ***(del cubrimiento)***

Un cubrimiento abierto del intervalo $[0, 1]$, contiene un recubrimiento finito, $[0, 1] = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ tal que $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < 2$.

Demostración.

El conjunto $[0, 1]$ es compacto, entonces para todo cubrimiento abierto de $[0, 1]$ existirá un recubrimiento finito de intervalos $I_j = \langle a_j, b_j\rangle$ donde $j = \overline{1, r}$ tal que $a_j < a_{j+1} < b_j < a_{j+2}$. Seguimos la demostración por inducción de r.

Sea $j = \overline{1, r}$: $a_1 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 \cdots < a_{r-1} < b_r < a_{r+1}$

- Para $r = 1$: $a_1 < a_2 < b_1 < a_3$, donde $a_1 = 0$ y $b_1 = 1$

  $(b_1 - a_1) = (a_2 - a_1) + (b_1 - a_2) = 1 < 2$ (trivial)

- $r = 2$: $a_1 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < a_4$ donde $a_1 = 0$ y $b_2 = 1$ para $r \geq 2$

$$\begin{aligned}(b_2 - a_2) + (b_1 - a_1) &= (b_2 - a_1) + (b_1 - a_2) \\ \sum_{j=1}^{2}(b_j - a_j) &= 1 + (\underbrace{b_1 - a_2}_{0<l<1}) < 2\end{aligned}$$

- $r = 3$: $a_1 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < a_4 < b_3 < a_5$ donde $a_1 = 0$ y $b_3 = 1$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}(b_j - a_j) &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3)\\ &= \underbrace{(b_3 - a_1)}_{1} + \underbrace{(b_1 - a_2) + (b_2 - a_3)}_{<1} < 2\end{aligned}$$

Hipótesis Inductiva

- Supongamos que se cumple. $r = k$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j) = 1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1}(b_j - a_{j+1})}_{<1} < 2$

- Para $r = k + 1$, mostremos entonces que se cumple:
$\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1}(b_j - a_j) = 1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_{j+1})}_{<1} < 2.$
En efecto, sea $a_1 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < a_4 < \cdots < b_{k-2} < a_k < b_{k-1} < a_{k+1} < b_k < a_{k+2} < b_{k+1}$ donde $a_1 = 0$ y $b_{k+1} = 1$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j) + (b_{k+1} - a_{k+1}) &= 1 + \sum_{j=1}^{k-1}(b_j - a_{j+1}) + \underbrace{(b_k - a_{k+1})}_{<1}\\ \sum_{j=1}^{k+1}(b_j - a_j) &= 1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_{j+1})}_{1} < 2\end{aligned}$$

Por lo tanto $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}|I_j| < 2.$

□

1.3. Teorema de Fubbini

Teorema 1.5. *Sea* $\mathbb{R}_t^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / x_n = t\} \subset \mathbb{R}^n$ *un hiperplano, sea* $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto tal que* $K \cap \mathbb{R}_t^{n-1}$ *tiene medida nula en* $\mathbb{R}^{n-1}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. *Entonces* K *tiene medida nula en*

$\mathbb{R}^n$.

Demostración.

Sin perder generalidad podemos suponer que $K \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0,1]$ y $K \cap \mathbb{R}^{n-1}$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$ $\forall t \in [0,1]$, hacemos $K_t = K \cap \mathbb{R}_t^{n-1}$ y dado $\varepsilon > 0$ consideremos un cubrimiento de K_t por cubos abiertos W_t^i en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$ tal que $\sum_{i \geq 1} Vol(W_t^i) < \varepsilon$.

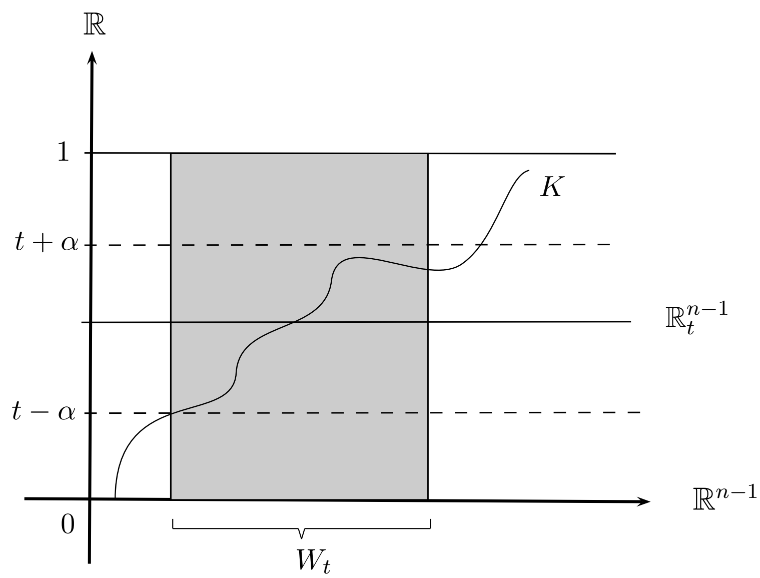


Figura 1.3

Sea W_t la proyección de $\bigcup_{i \geq 1} W_t^i$ sobre el primer eje $\mathbb{R}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,1]$, siendo $x_n = t$ la última coordenada, se tiene para "t" fijo la función $\| x_n - t \|$ es continua en K. Además se anula en K_t, esto es para un punto $p \in K_t$ tal que $p = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, t)$ se satisface $\|x_n - t\| = 0$. Siendo K compacto, aplicando el teorema de Wierstrass se cumple que en K la función $\|x_n - t\|$ tiene un mínimo "α" que también será mínimo en $W_t \times [0,1]$, por tanto se tiene $\{x \in K / \|x_n - t\| < \alpha\} \subset W_t \times I_t^\alpha$ donde $I_t^\alpha = \langle t-\alpha, t+\alpha \rangle$ y $[0,1] \subset \bigcup_t I_t^\alpha$.

Por el lema 1.1 existe un recubrimiento finito I_j para $j = \overline{1,r}$ tal que $\sum_{j=1}^{k} \|I_j^\alpha\| < 2$, aquí $I_j^\alpha = I_{t_j}^\alpha$ donde $t_j \in [0,1]$. Se tiene los rectángulos de la forma $W_{t_j}^i \times I_{t_j}^\alpha$ para $j = \overline{1,k}$; observamos que para un $j \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ se cumple $K_{t_j} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_{t_j}^i \times I_{t_j}^\alpha \Rightarrow K = \bigcup_{j=1}^{r} K_{t_j} \subset \bigcup_{\substack{i\geq 1\\ j\in\mathbb{N}'}} W_{t_j}^i \times I_{t_j}^\alpha \Rightarrow\ K \subset \bigcup_{\substack{i\geq 1\\ j\in\mathbb{N}'}} W_{t_j}^i \times I_{t_j}^\alpha$ para $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.
Vemos también:

$$
\begin{aligned}
& Vol(K) \leq \sum_{\substack{i\geq 1\\ j\in\mathbb{N}'}} Vol(W_{t_j}^i \times I_{t_j}^\alpha) = \sum_{i\geq 1} Vol(W_{t_1}^i \times I_{t_1}^\alpha) + \cdots + \sum_{i\geq 1} Vol(W_{t_r}^i \times I_{t_r}^\alpha) \\
\Rightarrow \quad & Vol(K) \leq \|I_{t_j}^\alpha\| \sum_{i\in\mathbb{N}} Vol(W_{t_j}^i) + \cdots + \|I_{t_r}^\alpha\| \sum_{i\in\mathbb{N}} Vol(W_{t_r}^i) \\
\Rightarrow \quad & Vol(K) < \|I_{t_1}^\alpha\|\varepsilon + \|I_{t_2}^\alpha\|\varepsilon + \cdots + \|I_{t_r}^\alpha\|\varepsilon \\
& Vol(K) < \varepsilon \sum_{j=1}^{r} \|I_{t_j}^\alpha\| < 2\varepsilon, \quad \text{así resulta } Vol(K) < 2\varepsilon, \quad \text{por lo tanto } med(K) = 0.
\end{aligned}
$$

□

Definición 1.5. Sea M una variedad diferenciable m dimensional. Un subconjunto $C \subset \mathbb{M}$ tiene medida nula, si para todo sistema de coordenadas (h, U) en M, el conjunto $h(U \cap C) \subset \mathbb{R}^m$ tiene medida nula.

Lema 1.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Existe una función diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\varphi(x) = 0$ si y solo si $x \in K$.*

Demostración. Ver libro [3, pág. 69]

Capítulo 2:

El Teorema de Sard

Teorema 2.1. ***(Teorema de Sard)***

Sea $f : M^m \longrightarrow N^n$ una aplicación de clase C^∞ entre variedades, sea C el conjunto de puntos críticos de f. Entonces la imagen $f(C)$ tiene medida nula.

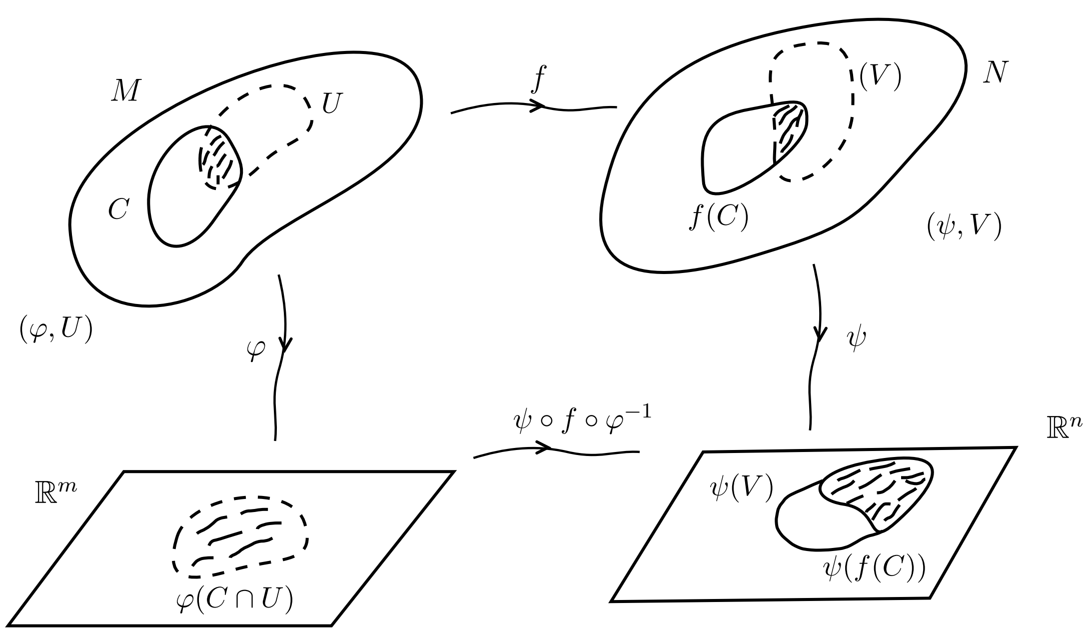


Figura 2.1

Tomando un sistema de coordenadas (φ, U) *en* M *tal que para* $x \in C \cap U$, *se tiene* $f(x) \in V \cap f(C)$, *para otro sistema de coordenadas* (ψ, V) *en* N, *bastará demostrar que para todo* $x \in C \cap U, f(C \cap U)$ *tiene medida nula en* N. *Si cubrimos a* C *con la unión de abiertos* $(U_n)_{n \geq 1}$ *tal que* $C \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C \cap U_n$ *y luego aplicando* f *tenemos* $f(C) \subset f(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C \cap U_n) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(C \cap U_n)$. *Por otra parte si* $med[(f(C \cap U))] = 0$ *en* N *sí y solo si* $med[\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(C \cap U)] = 0$ *en* $\mathbb{R}^n$, *vemos que* $\varphi(C \cap U)$ *es el conjunto de puntos críticos de la aplicación* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. *Por tanto, el Teorema de Sard se reduce con aplicaciones diferenciables* $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y queda enunciado de la siguiente forma.*

Teorema 2.2. *Sea* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una aplicación* C^∞ *en un abierto* $U \subset \mathbb{R}^m$, *sea* $C = \{x \in U / dim[Img\ df(x)] < n\}$. *Entonces* $f(C)$ *tiene medida nula en* $\mathbb{R}^n$.

La demostración del teorema se hará en 3 partes, los casos $m < n, m = n$ y el caso más complicado $m > n$.

Observación. Si $m < n$, entonces $U = C$.

En efecto, sea $x \in U$ arbitrario y de la diferenciabilidad de f resulta $df(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, del teorema del núcleo e imagen $m = \dim[\operatorname{Ker} df(x)] + \dim[\operatorname{Im} df(x)]$, entonces se tiene $\dim[\operatorname{Im} df(x)] \leq \dim[\operatorname{Ker} df(x)] + \dim[\operatorname{Im} df(x)]$, luego $\dim[\operatorname{Im} df(x)] \leq m < n$ y de esto $\dim[\operatorname{Im} df(x)] < n \Rightarrow x \in C$. Por tanto $U \subset C$ y siendo por definición $C \subset U$, se concluye que $U = C$.

A continuación daremos la demostración del caso $m < n$.

2.1. Caso I: $m < n$

Por lindelof, para toda cubierta abierta de U tal que $U \subset \bigcup V_x$ para cada $x \in U$, admite un recubrimiento enumerable $U \subset \bigcup_{i=1}^{\propto} V_i$, se tiene $f(U) \subset \bigcup_{i=1}^{\propto} f(V_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\propto} f(\overline{V}_i)$. Basta probar $f(\overline{V}_i) = 0$ en $\mathbb{R}^n$ y por la Proposición 1.2, resulta la *med* $f(V_i) = 0$

Demostración.

Sea V un cubo abierto para $x \in U$ con las aristas paralelas a los ejes coordenados de $\mathbb{R}^m$ tal que $\overline{V} \subset U$. Dividimos cada arista de $\overline{V}$ en r partes iguales, además consideramos los hiperplanos que pasan por las líneas de división paralelos a los ejes coordenados de $\mathbb{R}^m$, y sea h la longitud de su arista de $\overline{V}$. El cubo $\overline{V}$ se divide en r^m cubitos iguales, sea K_i uno de esos cubitos cerrados con diámetro $\dfrac{h}{r}\sqrt{m}$.

Se sabe que la función f es diferenciable y $\overline{V}$ es compacto, existe un número $M > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \leq \dfrac{Mh\sqrt{m}}{r}$ para todo $x, y \in \overline{V}$. Luego $f(K_i) \subset W_i$ con $W_i \subset \mathbb{R}^n$ es un cubo cerrado con longitud de su arista $\dfrac{2Mh\sqrt{m}}{r}$.

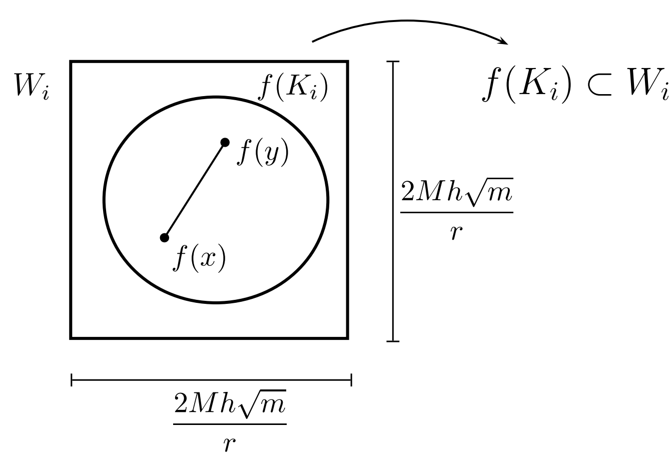


Figura 2.2

El volumen W_i es $\text{Vol}(W_i) = \left(\dfrac{2Mh\sqrt{m}}{r}\right)^n = \dfrac{c}{r^n}$ con $c = (2Mh\sqrt{m})^n$. Como $\overline{V} = \bigcup_{i=1}^{r^m} K_i$, se tiene $f(\overline{V}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r^m} f(K_i) \subset \bigcup_{i=1}^{r^m} W_i$, cuya suma de volúmenes es $\sum_{i=1}^{r^m} \text{Vol}(W_i) = \underbrace{\dfrac{c}{r^n} + \dfrac{c}{r^n} + \dfrac{c}{r^n} + \cdots + \dfrac{c}{r^n}}_{r^m}$, resulta $\sum_{i=1}^{r^m} \text{Vol}(W_i) = r^m \dfrac{c}{r^n} = cr^{m-n}$. Como $m - n < 0$ y haciendo $r \to \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}(W_i) < \varepsilon$, por lo tanto se tiene $med[f(\overline{V})] = 0$. $\square$

2.2. Caso II: $m = n$

Demostración.

Sea R un rectángulo cerrado de lado $a > 0$ tal que $R \subset U$, cuyas aristas son paralelas a los ejes coordenados. Todo punto $x \in U$ es centro del cubo R, luego dividimos R en pequeños cubos cerrados S_i de lado $\dfrac{a}{k}$, para $k \in \mathbb{N}$ y obtenemos en total k^m cubos. (Ver Fig 2.3)

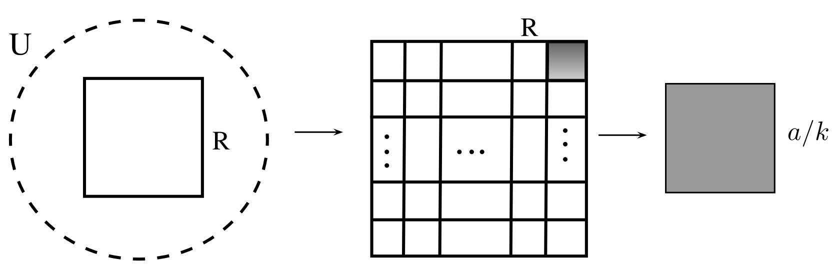


Figura 2.3

Luego al escoger $x, y \in S_i$ se cumple $\|x - y\| < \sqrt{n}\dfrac{a}{k}$, además siendo $f \in C^1$ y de la compacidad de R, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene $\|x - y\| < \delta$, entonces

$\|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)\| < \varepsilon\|y-x\|$ para un $\varepsilon > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, elegimos un rectángulo S_i tal que $S_i \cap C \neq \emptyset$ y tomando $x_i \in S_i \cap C$, entonces $\det f'(x_i) = 0$ y por tanto $f'(x_i)(y - x_i)$ pertenece a un subespacio E_i tal que $\dim(E_i) \leq n-1$ en $\mathbb{R}^n$, esto es $\{f'(x_i)(y-x_i)/y \in S_i\} \subset E_i$. Luego por la desigualdad anterior obtenemos $\|f(y) - f(x_i) - f'(x_i)(y-x_i)\| < \varepsilon\sqrt{n}\ \dfrac{a}{n}$ y haciendo $e_i = f'(x_i)(y-x_i)$, el conjunto $\{f(x_i) - f(y)/y \in S_i\}$ y el vector $e_i = f'(x_i)(y-x_i)$ están a una distancia menor a $\varepsilon\sqrt{n}\ \dfrac{a}{k}$. Se sabe que $f \in C^1$ esto nos permite definir $M = \sup\{\|f'(x_i)\|/x_i \in S_i\}$, luego $\|f'(x_i)\| \leq M$, aplicando el teorema del valor medio se tiene $\|f(y)-f(x_i)\| \leq M\|y-x_i\|$ con $x_i, y \in S_i$, como $\|x-y\| < \sqrt{n}\ \dfrac{a}{k}$ para $x_i, y \in S_i$ entonces se tiene $\|f(x_i) - f(y)\| \leq M\sqrt{n}\left(\dfrac{a}{k}\right)$ así que $f(y)$ pertenece a un rectángulo cerrado "P" en $\mathbb{R}^n$ que tiene como base un rectángulo "Q" en $\mathbb{R}^{n-1}$ de lado $2M\sqrt{n}\left(\dfrac{a}{k}\right)$ y de altura $2\varepsilon\sqrt{n}\left(\dfrac{a}{k}\right)$.

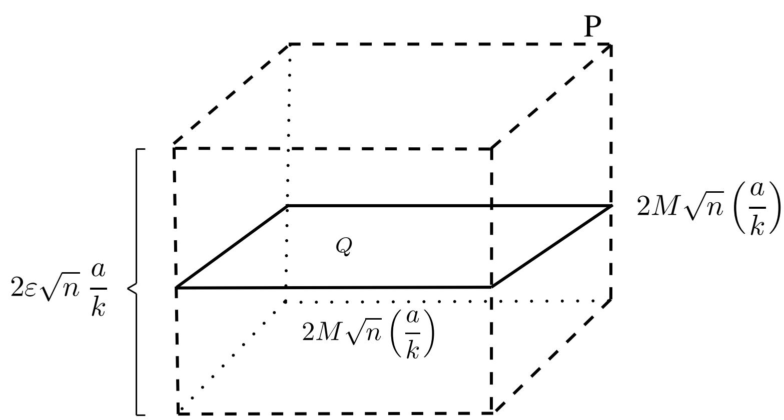


Figura 2.4

En la figura se ve claramente que $P \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(y) \in P$, $\forall x \in S_i$, luego el volumen del rectángulo cerrado "P" queda determinado por:

$$\mathrm{Vol}(P) = \left[2M\sqrt{n}\left(\frac{a}{k}\right)\right]^{n-1} \times \left[2\varepsilon\sqrt{n}\left(\frac{a}{k}\right)\right] = M^{n-1}2^n\varepsilon\left[\sqrt{n}\left(\frac{a}{k}\right)\right]^n$$

$\mathrm{Vol}(P) = \dfrac{A\varepsilon}{k^n}$, $A = (2\sqrt{n})^n M^{n-1}a^n$, como $S_i \subset \mathbb{R} \Rightarrow\ f(S_i) \subset P_i$ donde el $\mathrm{Vol}[f(S_i)] \leq \mathrm{Vol}(P_i) = \dfrac{A\varepsilon}{k^n}$, además se cumple $f(R\cap C) \subset \bigcup\limits_{i\geq 1} P_i$ y esto implica que $\mathrm{Vol}[f(R\cap C)] \leq \sum\limits_{i\geq 1}\mathrm{Vol}(P_i) = k^n\left(\dfrac{A\varepsilon}{k^n}\right) \Rightarrow\ \mathrm{Vol}[f(R\cap C)] \leq A\varepsilon$ y como ε es arbitrario se tiene $\mathrm{Vol}[f(R\cap C)] = 0$. Hacemos $R\cap C = B_j$, donde $B_j \neq \emptyset$ con $j \in I < \infty$, luego $C = \bigcup\limits_{j\geq 1} B_j$ y vía f resulta $f(C) \subset \bigcup\limits_{j\geq 1} f(B_j)$, aplicando volumen $\mathrm{Vol}[f(C)] \leq \sum\limits_{j\geq 1}\mathrm{Vol}[f(B_j)]$ y por parte anterior se tiene que $med[f(C)] = 0$. $\square$

2.3. Caso III: $m > n$

Ahora para completar la prueba vamos a subdividir el conjunto de los puntos críticos del siguiente modo. Sea $C_1 = \{x \in C/Jf(x) = 0\}$ y en forma general $C_k = \{x \in U/$ se anulan todas las derivadas parciales de f hasta el orden k $\}$.

A continuación se dará la demostración en tres partes.

A) El conjunto $f(C - C_1)$ tiene medida nula (cero).

Observación. Si $N = \mathbb{R}$, resulta que $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ luego $df(x) = \left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right)$. Suponiendo que la $dim\ Img < 1$, entonces $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0,\ \forall i = \overline{1, m}$. Por tanto se tiene $C = C_1$ y como consecuencia $med[f(C - C_1)] = 0$.

Nuestro objetivo es considerar en dimensión superior $n \geq 2$, y escogeremos un $x_0 \in C - C_1$ para después encontrar un abierto V que contiene a x_0 y terminar con $med[f(V \cap C)] = 0$.

Sea un elemento arbitrario $x_0 \in C - C_1$, vemos que $x_0 \notin C_1$ entonces nos garantiza que al menos un elemento de la matirz jacobiana $Jf(x_0)$ es no nula. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} \neq 0$, donde $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ con $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Se define una aplicación $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $h(x) = (f_1(x), x_2, x_3, \cdots, x_m)$. Así $dh(x_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cuya matriz jacobiana viene dado por:

$$dh(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1(x_0)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial h_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2(x_0)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_m(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_m(x_0)}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{m\times m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_m} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m\times m}$$

Siendo $\dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} \neq 0$, implica que $\text{Ran}(dh(x_0)) = m \Rightarrow dh(x_0)$ es un isomorfismo, luego por el teorema de la función inversa, la aplicación h es un difeomorfismo desde un abierto $V \subset U$ con $x_0 \in V$ sobre un abierto $W \subset \mathbb{R}^m$ con $h(x_0) \in W = h(V)$.

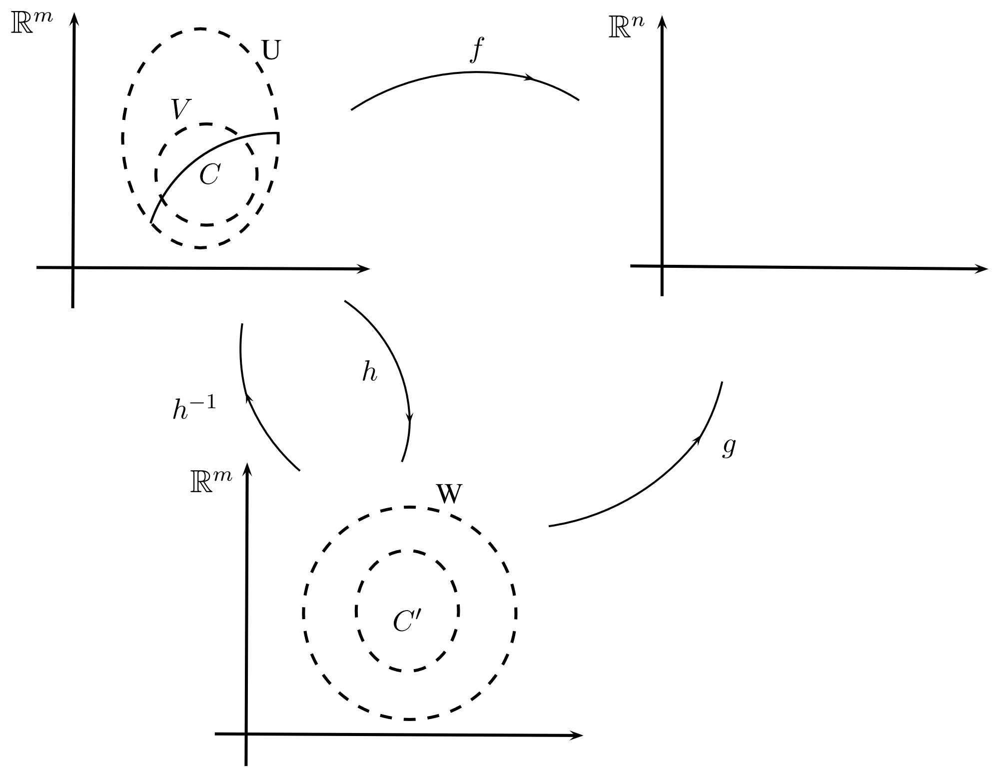


Figura 2.5

Sea $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f \circ h^{-1}$ y sea $C' \subset W = h(V)$ el conjunto de puntos críticos de g, luego se afirma que $C' = h(V \cap C)$.

En efecto, sea $p \in h(V \cap C)$ entonces aplicando la derivada se tiene $dg(p) = d(f \circ h^{-1})(p) \Rightarrow dg(p) = d[f(h^{-1}(p))] \circ dh^{-1}(p)$.

Luego $\text{Ran}[dg(p)] \leq \text{mín}\{\text{Ran}[df(h^{-1}(p))],\ \text{Ran}[dh^{-1}(p)]\}$ como $\text{Ran}[df(h^{-1}(p))] < n$ y $m > n$ resulta $\text{Ran}[dg(p)] < n$, y para todo $p \notin h(V \cap C)$ se tiene que el $\text{Ran}[dg(p)] = n$, puesto que dh^{-1} es un isomorfismo, por tanto haciendo $C' = h(V \cap C)$ se tiene la tesis.

Por otra parte, se tiene $g(C') = f(V \cap C)$ y por la definición de g, la imagen de cada punto de W de la forma $(t, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ pertenece al hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

En efecto escogemos un punto de W de la forma $(t, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ tal que

$(t, x_2, x_3, \cdots, x_m) = h(x_1, x_2, \cdots, x_m) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), x_2, x_3, x_m))$ luego

$h^{-1}(t, x_2, x_3, \ldots, x_m) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ ya que h es biyectiva, aplicando f

resulta $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = (f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m), f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m), \ldots,$

$f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)) = (t, f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x))$

$\Rightarrow g(t, x_2, x_3, \ldots, x_m) = (t, f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x)) \ \in \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ un hiperplano.

Consideremos la familia de aplicaciones $g^t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap W \longrightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, para cada $t \in \mathbb{R}$, de manera que queda restringida g. Sea $\alpha = (t, x_2, x_3, \ldots, x_m) \in W$, luego $g(\alpha) = g(t, x_2, x_3, \ldots, x_m) = (t, g_2^t(\alpha), \ldots, g_n^t(\alpha))$

$\Rightarrow (t, f_2(h^{-1}(\alpha)), \ldots, f_n(h^{-1}(\alpha))) = (t, g_2^t(\alpha), \ldots, g_n^t(\alpha))$

$\Rightarrow \ g(\alpha) = (t, g_2^t(\alpha), g_3^t(\alpha), \ldots, g_n^t(\alpha)) \ \Leftrightarrow \ g_1^t(\alpha) = t$, su matriz jacobiana en α:

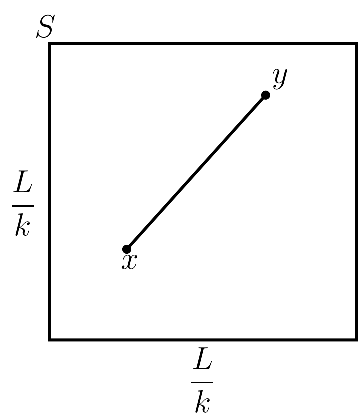
$$dg(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^t(\alpha)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1^t(\alpha)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1^t(\alpha)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2^t(\alpha)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2^t(\alpha)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2^t(\alpha)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n^t(\alpha)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n^t(\alpha)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n^t(\alpha)}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{n\times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g_2^t(\alpha)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2^t(\alpha)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2^t(\alpha)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n^t(\alpha)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n^t(\alpha)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n^t(\alpha)}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

Vemos que α es un punto crítico de g sí y solo si $\gamma = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_m)$ es un punto crítico de g^t, puesto que el conjunto de vectores columna de la submatriz es linealmente dependiente en γ.

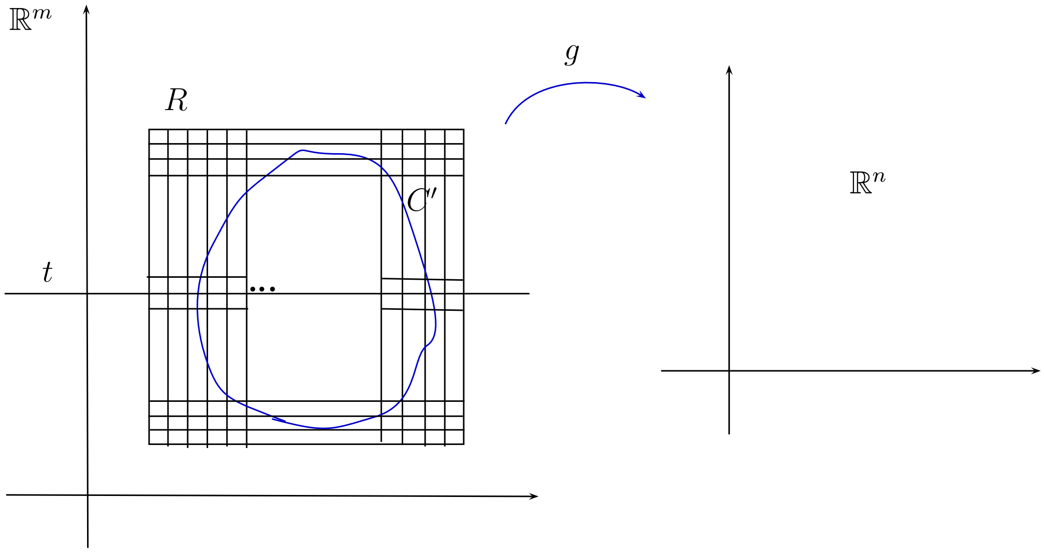
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_2^t(\gamma)}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2^t(\gamma)}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_2^t(\gamma)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_3^t(\gamma)}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3^t(\gamma)}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial g_3^t(\gamma)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(\gamma)^t}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n(\gamma)^t}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n(\gamma)^t}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{(n-1)\times(m-1)}$$

Luego el rango de la submatriz es menor que "$n-1$". Por tanto $\gamma \in C'_t$ (conjunto de puntos críticos de g^t) y así se obtiene $C' \subset \bigcup_t C'_t \Rightarrow\ g(C') \subset \bigcup_t g^t(C'_t)$.

Luego el conjunto de valores críticos de g^t tiene medida nula en $t \times \mathbb{R}^{n-1}$. En efecto, Sea $\mathcal{R}$,un cubo cerrado en $\mathbb{R}^m$ con la arista L, tal que $C' \subset \mathcal{R}$. Dividimos a $\mathcal{R}$ en k partes cada lado $\dfrac{L}{k}$, se tiene k^m subcubos cerrados de diámetro $\dfrac{L}{k}\sqrt{m}$. Sea S uno de esas subcubos en $\mathcal{R}$.



$\forall x, y \in S\ : \|x-y\| \leq \dfrac{L}{k}\sqrt{m}$, siendo g diferenciable y $\mathcal{R}$ un compacto, $\exists M > 0$ tal que: $\|g(y)-g(x)\| \leq M\|y-x\|$, se tiene de la desigualdad anterior: $\|g(y)-g(x)\| \leq M\dfrac{L}{k}\sqrt{m}$



Haciendo $g(S) = H$ un cubo con arista $2M\dfrac{L}{k}\sqrt{m}$

$g(S \cap C'_t) \subset g^t(S_i^t) \subseteq H_i^t$

$g^t(C'_t) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k^{n-1}} g^t(S_i^t) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k^{n-1}} H_i^t$ tal que $Vol\ g(C'_t) = \sum\limits_{i=1}^{k^{n-1}} Vol\ H_i^t$

$Vol\left[\bigcup\limits_{i=1}^{k^{n-1}} H_i^t\right] = \left(\dfrac{2ML\sqrt{m}}{k}\right)^m .k^{n-1} = \dfrac{A}{k^{m-n+1}}$, donde $A = (2ML\sqrt{m})^m$

Haciendo $k \to \infty : Vol\left[\bigcup\limits_{i=1}^{k^{n-1}} H_i^t\right] = \sum\limits_{i=1}^{k^{n-1}} Vol\ H_i^t = 0 + 0 + \ldots + 0$, lo cual implica $\sum\limits_{i=1}^{\infty} Vol\ H_i^t < \varepsilon$. Por tanto $med[g^t(C')] = 0$ en $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$

Además $g(C') \subseteq \bigcup\limits_t g^t(C'_t)$, luego:

$med[g(C')] \leq \sum med[g^t(C'_t)] = 0$, entonces $med[g(C')] = 0$ en $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Esto implica que lleva valores críticos de g en el hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ que son el conjunto de medida nula. Pero el conjunto de valores críticos de g es $g(C') = f(V \cap C)$ y siendo $g(C')$ compacto, se tiene que $f(V \cap C) \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ tiene medida nula, y por el teorema de Fubbini $f(V \cap C)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$.

Ahora como $g(C') = f(V \cap C)$, se tiene que para todo $x \in C - C_1$ existe un abierto

$V \subset \mathbb{R}^m$ conteniendo a x, tal que $med[f(V \cap C)] = 0$. Por el teorema de Lindelof podemos cubrir con un conjunto numerable de abiertos V_i tal que $C - C_1 \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i \cap C$ luego $f(C - C_1) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(V_i \cap C)$, como $med[f(V_i \cap C)] = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$ resulta lo siguiente $med[f(C - C_1)] \leq med\left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(V_i \cap C)\right] = \sum_{i\in\mathbb{N}} med[f(V_i \cap C)] = 0$. Por tanto $med[f(C - C_1)] = 0$.

B) $f(C_i - C_{i+1})$ tiene medida nula, $i \geq 1$.

Sea $x_0 \in C_i - C_{i+1},\ x_0 \notin C_{i+1}$ entonces todas las derivadas parciales de orden menor o igual a i se anulan, pero existe al menos una derivada parcial de orden $i+1$ no se anula, supongamos que

$$\frac{\partial^{i+1} f_r(x_0)}{\partial x_s^{i+1}} \neq 0, \quad 0 < r \leq n, \quad 0 < s \leq m$$

Haciendo $l(x) = \dfrac{\partial^i f_r(x)}{\partial x_s^i}$, tal que $l(x_0) = 0$.

Sin perder generalidad suponemos que la derivada parcial de l respecto a x_1 en $x = x_0$ es diferente de cero, i.e.:

$$\frac{\partial l}{\partial x_1}(x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_0$$

Definimos la aplicación $h : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $h(x) = (\overbrace{l(x)}^{h_1}, \overbrace{x_2}^{h_2}, \overbrace{x_3}^{h_3}, \ldots, \overbrace{x_m}^{h_m})$

luego $dh(x_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cuya matriz jacobiana

$$dh(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial l}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial l}{\partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial h_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix}_{m\times m}$$

$$dh(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial l}{\partial x_2}(x_0) & \frac{\partial l}{\partial x_3}(x_0) & \cdots & \frac{\partial l}{\partial x_m}(x_0) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m\times m}$$

como $\dfrac{\partial l}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$, entonces el Ran$(dh(x_0)) = m$ luego $dh(x_0)$ es un isomorfismo y por el teorema de la Función Inversa se cumple:

h es un difeomorfismo desde un abierto de x_0, $V(x_0) = V \subset U$ sobre un abierto $W \subset \mathbb{R}^m, h(V) = W$, analizando el conjunto $h(C_i \cap V)$, como la primera coordenada de h es $l(x)$ de manera que se anulan en el conjunto C_i, se sigue que h envía $C_i \cap V$ en el hiperplano $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$.

Definimos $g = f \circ h^{-1} : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como en el caso (A) tenemos que todo punto $h(x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap W$ será punto crítico de g, $\forall x \in C_i \cap V$, restringimos g del siguiente modo $g^\circ : (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap W \longrightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^n$

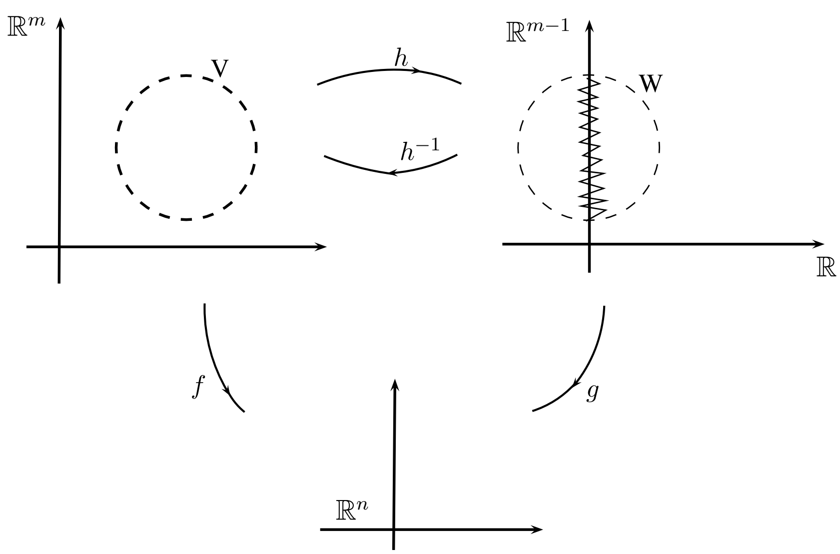


Figura 2.6

$$g^{\circ}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap W) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

luego:

$$0 \leq med\{g^{\circ}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap W)\} \leq med\{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}\} = 0$$

entonces $med\{g^{\circ}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap W)\} = 0$ luego como $g(C') \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, $C' = h(C_i \cap V)$ puntos críticos de g. Por Teorema de Fubinni: $med\{g(C')\} = 0$ siendo $g(C') = f(C_i \cap V)$, se tiene $med\{f(C_i \cap V)\} = 0$ sabemos por Teorema de Lindelof, cubrimos a $C_i - C_{i+1}$ con un conjunto numerable de abiertos $V_i \ \ \in \mathbb{N}$ tal que: $C_i - C_{i+1} \subset \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} V_j \cap C$

$$\begin{aligned} f(C_i - C_{i+1}) \subset f\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j \cap C\right) &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(V_j \cap C) \\ \text{luego aplicamos } \ med\{f(C_i - C_{i+1})\} &\leq med\left\{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(V_j \cap C)\right\} \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} med\left\{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(V_j \cap C)\right\} \end{aligned}$$

Se tiene: $\quad 0 \leq med\{f(C_i - C_{i+1})\} \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} 0, \quad$ en $\mathbb{R}^n$

por lo tanto $\quad med[f(C_i - C_{i+1})] = 0$

C) $med(f(C_k)) = 0$, para "k" suficientemente grande.

Como $C_k = \{x \in U / \operatorname{Ran} df(x) < n\}$, cubrimos a C_k con una colección numerable de cubos I_s^m de lado δ, tomamos uno de esos cubos $I_{s_0}^m$ en U, esto es:

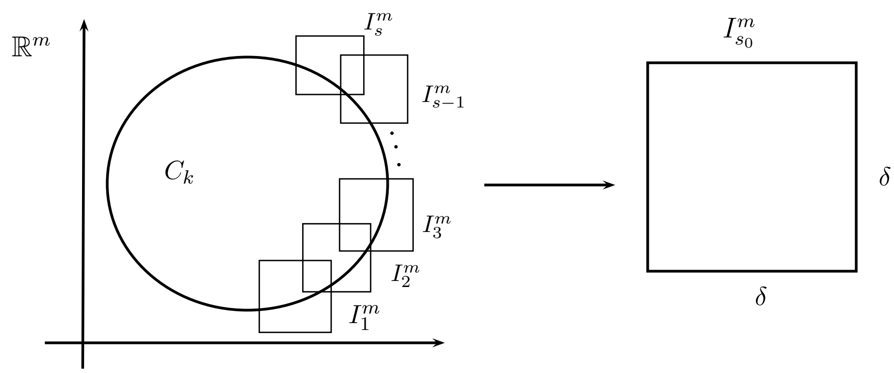


Figura 2.7

luego para "k" suficientemente grande demostraremos que $med[f(C_k \cap I_{s_0}^m)] = 0$.

En efecto, de la definición de C_k y tomando arbitrariamente un $x \in C_k \cap I_{s_0}^m$ tal que $x + h \in I_{s_0}^m$ $\forall h \in \mathbb{R}^m$, aplicando el Teorema de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h)\ , \quad \|R(x,h)\| \leq M\|h\|^{k+1}$$

donde $M > 0$ es constante y depende de f y de $I_{s_0}^m$, subdividimos $I_{s_0}^m$ en r^m subcubos de lado δ/r

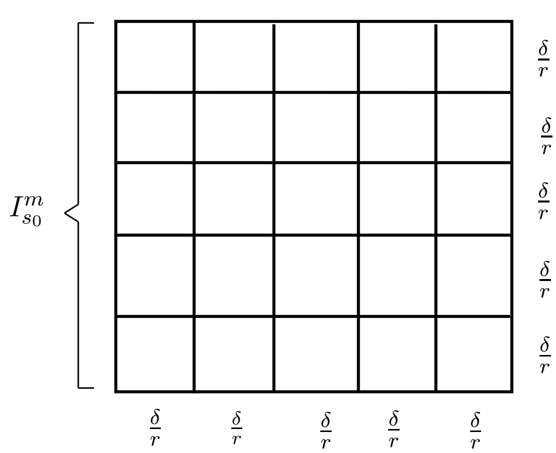
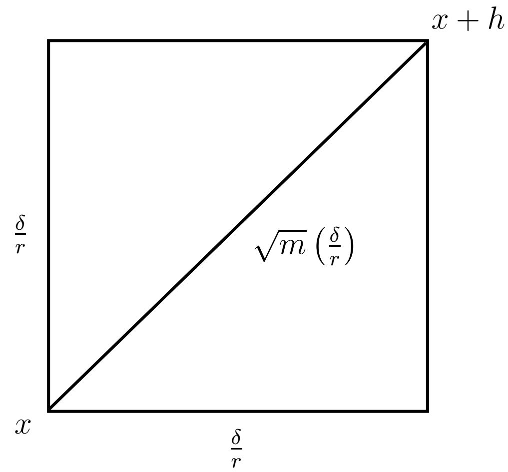


Figura 2.8

Sea $I^m_{s_{0j}}$ uno de los subcubos de la división que contiene a x y $x+h$, entonces

$$\|h\| \leq \sqrt{m}\frac{\delta}{r}$$



$$I^m_{s_{0j}} \subset U$$

Figura 2.9

si $x \in C_k \cap I^m_{s_{0j}}$, implica que $f(C_k \cap I^m_{s_{0j}}) \subset f(I^m_{s_{0j}})$ y el lado del cubo $f(I^m_{s_{0j}})$ será: $2M\left(\sqrt{m}\frac{\delta}{r}\right)^{k+1}$

$$\begin{aligned}
\|f(x+h)-f(x)\| &= \|R(x,h)\| \leq M\left|\frac{\delta}{r}\right|^{k+1} \leq M\left(\sqrt{m}\frac{\delta}{r}\right)^{k+1} \\
\|f(x+h)-f(x)\| &\leq M\left(\sqrt{m}\frac{\delta}{r}\right)^{k+1}, \quad \text{en } \mathbb{R}^1
\end{aligned}$$

esto implica, el cubo $f(I^m_{s_{0j}})$ su lado será $M\left(\sqrt{m}\ \frac{\delta}{r}\right)^{k+1}$

$$\begin{aligned}
\text{Sabemos que:}\quad C_k \cap I_{s_{0j}} &\subset I_{s_{0j}} \subset \bigcup_{j=1}^{r^m} I_{s_{0j}} \\
f(C_k \cap I_{s_{0j}}) &\subset f\left(\bigcup_{j=1}^{r^m} I_{s_{0j}}\right) \\
f(C_k \cap I_{s_{0j}}) &\subset \bigcup_{j=1}^{r^m} f(I_{s_{0j}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}\left[f(C_k \cap I_{s_{0j}})\right] &\leq \operatorname{Vol}\bigcup_{j=1}^{r^m} f(I_{s_{0j}}) \\
\operatorname{Vol}\left[f(C_k \cap I_{s_{0j}})\right] &\leq \sum_{j=1}^{r^m} \operatorname{Vol} f(I_{s_{0j}}) \\
\operatorname{Vol}\left[f(C_k \cap I_{s_{0j}})\right] &\leq r^m \operatorname{Vol} f(I_{s_{0j}})
\end{aligned}$$

ya que $\operatorname{Vol} f(I_{s_{0j}})$, $\forall j = \overline{1, r^m}$ tendrá el mismo valor, luego

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}\left[f(C_k \cap I_{s_{0j}})\right] &\leq r^m \left[2M\left(\frac{\sqrt{m}\ \delta}{r}\right)^{k+1}\right]^n \\
\operatorname{Vol}\left[f(C_k \cap I_{s_{0j}})\right] &\leq r^m \frac{\left[2M(\sqrt{m}\ \delta)^{k+1}\right]^n}{r^{(k+1)n}} \\
\operatorname{Vol}\left[f(C_k \cap I_{s_{0j}})\right] &\leq \frac{a^n}{r^{(k+1)n-m}} \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Observación. Como $m > n$, resulta $\dfrac{m}{n} > 1$ y siendo "k" suficientemente grande se tiene:

$$\begin{aligned}
k+1 &> \frac{m}{n} \\
n(k+1) &> m \\
n(k+1) - m &> 0
\end{aligned}$$

En (2.1) hacemos $r \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}\left[f(C_k \cap I_{s_{0j}})\right] &\leq \lim_{r\to\infty} \frac{a^n}{r^{(k+1)n-m}} \\
0 \leq \operatorname{Vol}\left[f(C_k \cap I_{s_{0j}})\right] &\leq 0, \quad \text{por tanto} \\
\operatorname{Vol}\left[f(C_k \cap I_{s_{0j}})\right] &= 0
\end{aligned}$$

además $C_k = \bigcup C_k \cap I^m_{s_j}$, $s \in \mathbb{N} \ \wedge \ j = \overline{1, r^m}$

aplicamos

$$\begin{aligned}
f(C_k) &\subset f\left(\bigcup C_k \cap I^m_{s_j}\right)\\
f(C_k) &\subset \bigcup_{s,j} f(C_k \cap I^m_{s_j})\\
\mathrm{Vol}[f(C_k)] &\leq \mathrm{Vol}\left[\bigcup f(C_k \cap I^m_{s_j})\right]\\
\mathrm{Vol}[f(C_k)] &\leq \sum_{s\geq 1}\sum_{j=1} f(C_k \cap I^m_{s_j})\\
&\leq \sum_{s\geq 1}(0+0+\ldots+0) = \sum_{s\geq 1} 0\\
&\leq 0, \quad s \in \mathbb{N}\\
0 \leq \mathrm{Vol}[f(C_k)] &\leq 0, \text{ “}k\text{”suficientemente grande}\\
\text{entonces, } \mathrm{Vol}[f(C_k)] &= 0
\end{aligned}$$

$$\text{por lo tanto } med[f(C_k)] = 0$$

Ahora por conjuntos tenemos:

$C_{k-1} = C_k \cup (C_{k-1} - C_k)$ ya que

$C_\infty \subset \ldots \subset C_k \subset C_{k-1} \subset \ldots \subset C_1 \subset C$

aplicamos f, $f(C_{k-1}) \subset f(C_k) \cup f(C_{k-1} - C_k)$

luego $med[f(C_{k-1})] \leq med[f(C_k)] + med[f(C_{k-1} - C_k)]$

de $A)$, $B)$ y $C)$ resulta: $med[f(C_{k-1})] = 0$ y por indución, para “k” tenemos $med[f(C_1)] = 0$, pero como $f(C) = f(C_1) \cup f(C - C_1)$, aplicando medida

$$medf(C)] \leq med[f(C_1)] + med[f(C - C_1)]$$

se tiene $med[f(C)] = 0$, el teorema queda demostrado.

Ejemplo 2.1. Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, con A abierto, tal que

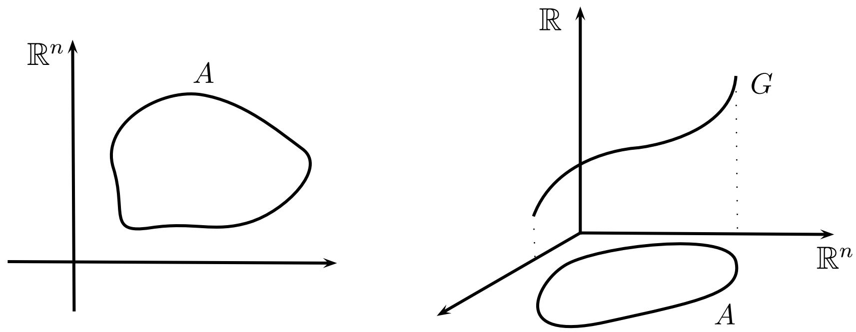


Figura 2.10

$$
\begin{aligned}
F : A \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\
(x, y) &\longrightarrow F(x, y) = (\overbrace{x}^{F_1}, \overbrace{f(x)}^{F_2})
\end{aligned}
$$

$$
JF(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{\overline{2,n+1}}} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{\overline{2,n+1}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\overline{1,n}} & 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{\overline{1,n}}} & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)^2}
$$

$|JF(x, y)| = 0 \longrightarrow \operatorname{Ran} dF(x, y) < n + 1$, $\forall (x, y) \in A \times \mathbb{R}$ y como $F(A \times \mathbb{R}) = \operatorname{Graf}(f) = G$, se tiene por el teorema de Sard, $med[G] = 0$.

Ejemplo 2.2. La esfera S^n tiene medida nula. Se sabe que S^n es unión de $2n$ funciones de la forma

$$
x_j : B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \ , \ B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n
$$

$$
x_j(x_1, x_2, \ldots, x_i) = \pm\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \ i \neq j
$$

luego el conjunto G representa la gráfica de x_j, $G = \{(x, x_j) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_j > 0\}$

$$\begin{array}{rcl} \text{Sea } F : B \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ (x, x_j) & \longrightarrow & F(x, x_j) = (\overbrace{x_1}^{F_1}, \overbrace{x_2}^{F_2}, \ldots, \overbrace{x_n}^{F_n}, \overbrace{x_j}^{F_{n+1}}) \end{array}$$

$$JF(x, x_j) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{\overline{1,n}}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_{\overline{1,n}}} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{n+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_{n+1}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_{n+1}}{\partial x_3} & \ldots & 0 & \ldots & \dfrac{\partial F_{n+1}}{\partial x_{n+1}} \end{pmatrix}_{(n+1)^2}$$

se tiene $\mathrm{Ran}[JF(x, x_j)] = n < n + 1$, $\forall (x, x_j) \in B \times \mathbb{R}$, por el teorema de Sard, $med[G] = 0$.

Capítulo 3:

Aplicación del Teorema de Sard para la dependencia funcional de funciones reales diferenciables

3.1. Dependencia funcional de funciones reales diferenciables (C^∞) como componentes de una función (C^∞), $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Definición 3.1. Sean $f^1, f^2, \ldots, f^n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales diferenciables (de clase C^∞), definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que las n funciones son funcionalmente dependientes sobre un conjunto $K \subset \Omega$, sí y solamente si, existe una función diferenciable real (de clase C^∞) $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, que no se anula en ningún abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que

$\varphi(f^1(x), f^2(x), \ldots, f^n(x)) = 0$ para todo $x \in K$.

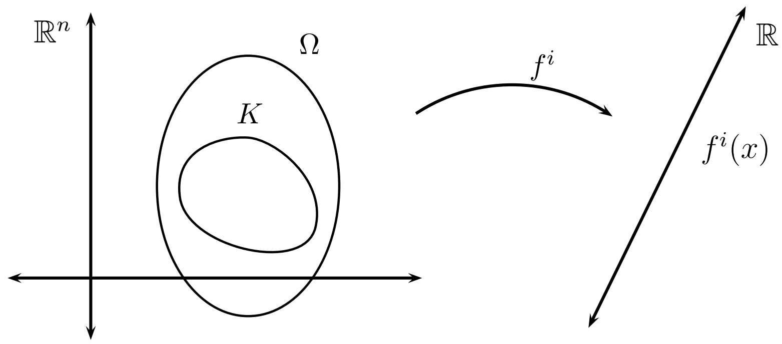


Figura 3.1

Nota. Desde aquí en adelante se considera el término funciones diferenciables aquellas funciones de clase C^∞.

Ejemplo 3.1. Sean las funciones diferenciables $f^1, f^2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^1(x, y) = x$ y $f^2(x, y) = y$. Se define la función diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(p, q) = p^2 + q^2 - 1$. Haciendo $\varphi(p, q) = 0$, se tiene $\varphi^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} = S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Por lo tanto f^1 y f^2 son funcionalmente dependientes sobre $K = S^1$.

Ejemplo 3.2. Sea la función diferenciable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (x + a)^r$ un polinomio de grado "r".

Se define también la función diferenciable $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(y) = y^2$. Haciendo $\varphi(f(x)) = 0$, se tiene $[(x + a)^r]^2 = 0$. Luego $x = -a$ es solución de multiplicidad "$2r$" en $\mathbb{R}$. Por lo tanto en $K = \{-a\} \subset \mathbb{R}$ la función f es funcionalmente dependiente.

Definición 3.2. Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación cuyas componentes son las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$, esto es $F(x) = (f^1(x), f^2(x), \ldots, f^n(x))$.

Se dice que las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ son funcionalmente dependientes sobre $K \subset \Omega$, si y solamente si existe $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable que no se anula en ningún abierto de $\mathbb{R}^n$, y tal que $\varphi(F(x)) = 0$, para todo $x \in K$.

Observación. Haciendo $\varphi(F(x)) = 0$, para todo $x \in K$, entonces $F(K) \subset \varphi^{-1}(0)$. Luego nuestras interrogantes ¿$\varphi^{-1}(0)$ puede contener conjuntos abiertos o cerrados?, así como también, ¿qué clase de conjunto será $F(K)$?.

Para garantizar la dependencia funcional de $f^1, f^2, \ldots, f^n$ sobre $K \subset \Omega$, ¿qué condiciones debe reunir el conjunto K?. De todo esto, el siguiente teorema nos dará respuestas a nuestras interrogantes.

Teorema 3.1. *Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y sea un compacto $K \subset \Omega$. Las funciones diferenciables $f^1, f^2, \ldots, f^n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, componentes de F, son funciones dependientes sobre K, si y solamente si $F(K)$ es un conjunto de interior vacío en R^n.*

Demostración.

$\Rightarrow]$ Supongamos por contradicción que el *int* $F(K) \neq \phi$, entonces existe algún abierto V tal que el $V \subset F(K)$. Por hipótesis K es compacto y F continua, entonces $F(K)$ es compacto. Luego por el Lema 1.2, existe una función diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(F(K)) = 0$, entonces $\varphi(F(V)) = 0$ y esto es una contradicción. Pues $F(V)$ es abierto y por Definición φ no se anula en ningún abierto del $\mathbb{R}^n$.

$\Leftarrow]$ Si $\operatorname{Int} F(K) = \emptyset$, entonces las funciones diferenciables $f^1, f^2, \ldots, f^n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, son funcionalmente dependientes sobre K.

En efecto, como el *int* $F(K) = \phi$, no existe ningún abierto V en $F(K)$. Como K es compacto y F continua, entonces $F(K)$ es compacto y por el Lema 1.2, existe φ diferenciable tal que $\varphi(F(K)) = 0$. Luego φ no se puede anular en ningún abierto del $\mathbb{R}^n$. Se sigue que las funciones $f^1, \cdots, f^n$ componentes de F son funcionalmente dependientes sobre K.

$\square$

Ejemplo 3.3. Sea $f^1, f^2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables definidas por:

$$f^1(x,y) = x, \quad \text{ y } \ f^2(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \ \text{ donde } \Omega = <-2, 2> \times \mathbb{R}$$

Definimos la función diferenciable $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x,y) = \left(x, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Se tiene $F(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1, \ y > 0\}$ tiene interior vacío en $\mathbb{R}^2$.

Por el Teorema 3.1 las funciones f^1 y f^2 son funcionalmente dependientes sobre cualquier compacto $K \subset \Omega$.

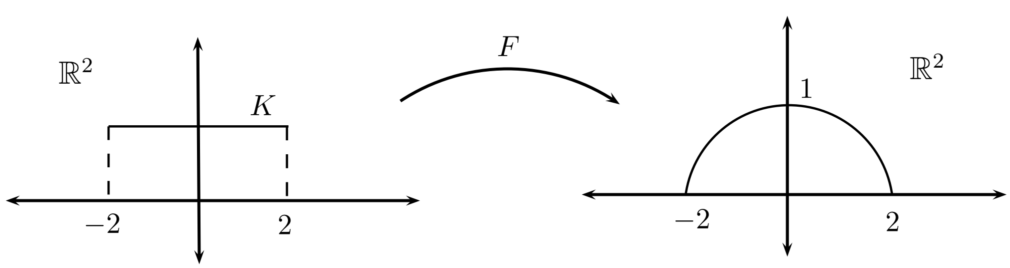


Figura 3.2

Teorema 3.2. *Sea* $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una aplicación diferenciable cuyo dominio* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto. Para que las funciones* $f^1, f^2, \ldots, f^n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$*, componentes de* F*, sean funcionalmente dependientes sobre todo conjunto compacto* $K \subset \Omega$*, es necesario y suficiente que el determinante de la matriz jacobiana de* F *se anule sobre* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*.*

Demostración.

Condición necesaria: Debe probarse que el determinante de la matriz jacobiana de F se anule, esto es $J[dF(x)] = 0\ \forall x \in \Omega$.

Suponiendo que $J[dF(x)] \neq 0$ para algún $x \in \Omega$, por el teorema de la función inversa existe una vecindad U de $x, U \subset \Omega$ tal que F es un difeomorfismo sobre la vecindad $F(U)$ de $F(x)$. Tomamos una vecindad compacta $V \subset U$ que contiene a x, luego $F(V)$ es también una vecindad compacta de $F(x)$, la cual implica que $F(V)$ contiene al menos un abierto en $\mathbb{R}^n$, luego, $\operatorname{Int} F(V) \neq \emptyset$, por el Teorema 3.1 las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ no son funcionalmente dependientes sobre V y esto es una contradicción. Por lo tanto $J[dF(x)] = 0$.

Probemos la condición suficiente:

Supongamos que el determinante de la matriz jacobiana, $J[dF(x)] = 0$, para toda $x \in \Omega$, y como $K \subset \Omega$ es un compacto cualesquiera, se tiene $J[dF(x)] = 0$ para todo $x \in K$ se tiene la nulidad en todo K. Esto significa que K es el conjunto de puntos críticos de F, aplicando el **Teorema de Sard** resulta que el $\operatorname{Int} F(K) = \emptyset$ en $\mathbb{R}^n$. Por el teorema 3.1 las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ son funcionalmente dependientes sobre K.

$\square$

Ejemplo 3.4. Sean las aplicaciones diferenciables $f^1, f^2 : \langle -3, 3\rangle \times \langle -3, 3\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f^1(x, y) = x$, $f^2(x, y) = x + 1$ y dada $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación definida por $F(x, y) = (x, x + 1)$, donde $\Omega = \langle -3, 3\rangle \times \langle -3, 3\rangle$. Se tiene: $dF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tal que $J[dF(x, y)] = 0$ para todo $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, luego las funciones f^1 y f^2 son funcionalmente dependientes para todo compacto $K \subset \Omega$.

En particular, si escogemos $K = \{(0, 0), (1, 1)\} \subset \Omega$, se satisface.

Ejemplo 3.5. Sean las funciones diferenciables $f^1, f^2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f^1(x, y) = x$ y $f^2(x, y) = -x$ donde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 < 1\}$. Se define la función diferenciable $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) = (x, -x)$, se tiene $dF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tal que $J[dF(x, y)] = 0$ para todo $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Por teorema 3.2 se tiene que las funciones f^1 y f^2 son funcionalmente dependientes para cualquier compacto $K \subset \Omega$, en particular para $K = \{(x, y) \in \Omega/y = x \ \wedge\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}\}$

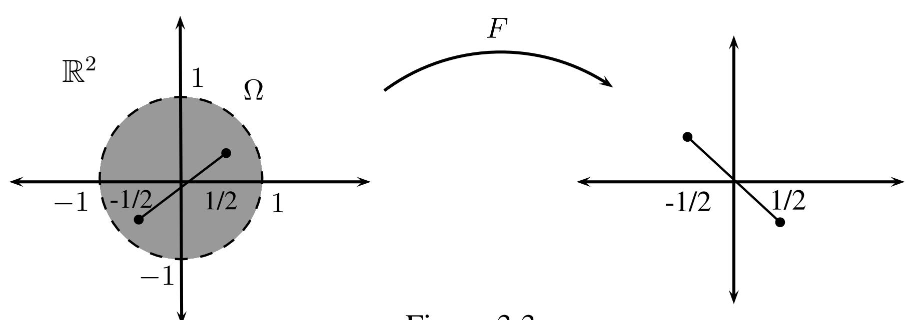


Figura 3.3

Ahora se tratará la dependencia funcional para el caso general donde se considera "n" funciones de "m" variables.

3.2. Dependencia funcional de funciones reales diferenciables (C^∞) como componentes de una función (C^∞), $F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Definición 3.3. Sea una colección de "n" funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables, definidas en el conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación definida por $F(x) = (f^1(x), f^2(x), \ldots, f^n(x))$ dónde $x \in \Omega$. Las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ se dicen funcionalmente dependientes sobre el conjunto $K \subset \Omega$, si y solamente si existe una función $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciable la cual no se anula en ningún abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(F(x)) = 0,\ \forall x \in K$.

Teorema 3.3. *Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, además se define $f^1, f^2, \ldots, f^n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones componentes de F y considerando $m > n$. Para que las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ sean funcionalmente dependientes sobre todo compacto $K \subset \Omega$, es necesario y suficiente que el $dim[Img\ dF(p)] < n$ en todo punto $p \in \Omega$.*

Demostración.

Probando la suficiencia: Sea un conjunto compacto $K \subset \Omega$, y siendo de hipótesis $dim[Img\ dF(p)] < n$ en todo punto p de Ω, por el **teorema de Sard** se tiene que $med[F(\Omega)] = 0$. Esto equivale a decir que $\mathrm{Int}[F(\Omega)] = \emptyset$, y como $K \subset \Omega$, resulta que $\mathrm{Int}[F(K)] = \emptyset$, luego las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ son funcionalmente dependientes sobre todo compacto $K \subset \Omega$.

Probando la necesidad: Supongamos que las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ sean funcionalmente dependientes sobre todo compacto $K \subset \Omega$. Afirmamos que existe un punto p de Ω tal que la matriz jacobiana $\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}(p)\right)$ tiene rango n, esto probará que conduce a una contradicción a la dependencia funcional de las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$.

Supongamos que $D = \det\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}(p)\right) \neq 0$, donde $i, j = 1, \ldots, n$. Consideremos la aplicación $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\psi(q) = (f^1(q), f^2(q), \ldots, f^n(q), x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^m)$ para todo punto $p \in \Omega$. Su matriz jacobiana será:

$$d\psi(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_2}(p) & & \cdots & & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_m}(p) \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_2}(p) & & \cdots & & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial f^n}{\partial x_2}(p) & & \cdots & & \dfrac{\partial f^n}{\partial x_m}(p) \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m\times m} \quad , \ \forall p = (x^1, x^2, \ldots, x^m) \in \Omega$$

Como vemos dicha matriz también tiene rango igual a m y a la vez también presenta el mismo determinante de la matriz anterior $D = \det\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}(p)\right) \neq \emptyset$ para $i, j = 1, \ldots, n$.

Aplicando el teorema de la función inversa, la función ψ aplica difeomorficamente desde un abierto $U \subset \Omega$ de p, sobre un abierto V de $\psi(p)$. Sea un cubo $A \subset V$ de $\psi(p)$ cuyas aristas son paralelos a los ejes coordenados de $\mathbb{R}^m$, y hacemos $U \cap \psi^{-1}(A) = W$ en el cual ψ es un difeomorfismo de W sobre A. Sea $\prod : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección tal que

$(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^m) \rightarrow (x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n)$ en la que deja las $m-n$ últimas coordenadas, además se tiene $F = \prod \circ \psi$ como se ve en el siguiente gráfico:

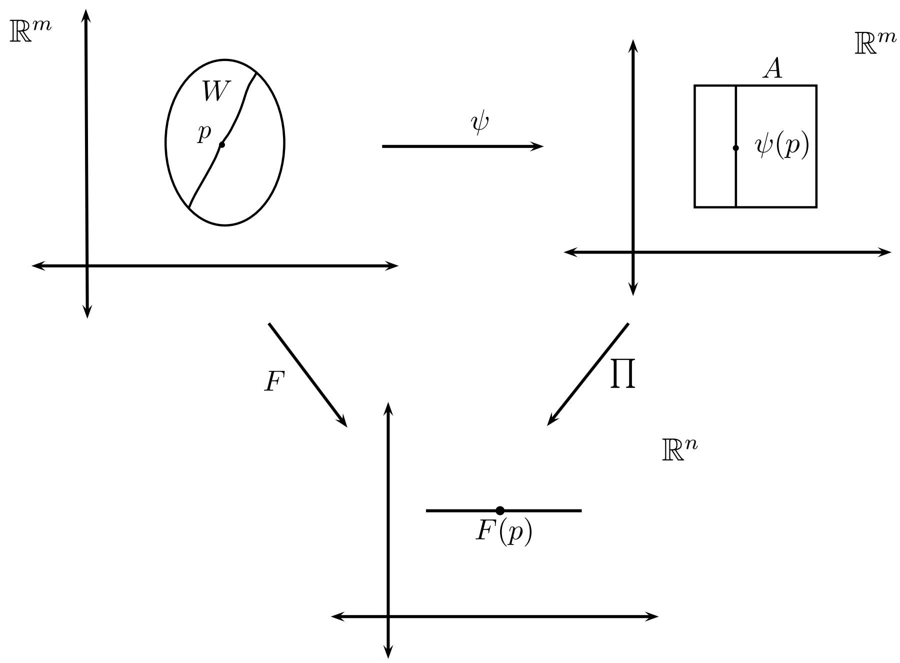


Figura 3.4

Sabemos que ψ es continua y la proyección también lo es, por tanto $F = \prod \circ \psi$ es continua. Si escogemos una vecindad compacta $Z \subset W$, entonces $F(Z)$ también será una vecindad compacta cuyo interior es no vacío, esto implica que las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ no son funcionalmente dependientes sobre el compacto Z y esto es una contradicción. Por lo tanto para todo punto $p \in \Omega$ debe cumplir que su $dim[Img\ dF(p)] < n$ y esto implica la tesis. $\square$

Ejemplo 3.6. Sean las funciones diferenciables $f^1(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ y $f^2(x, y, z) = k$ (cte) definidas en $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Se define la función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un subconjunto abierto tal que $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, k)$, su matriz jacobiana es:

$$dF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde $dim[Img\ dF(p)] < 2,\ \forall p \in \Omega$.

Por lo tanto, las funciones f^1 y f^2 componentes de F son funcionalmente dependientes sobre cualquier compacto $k \subset \Omega$.

Teorema 3.4. *Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, además se define $f^1, f^2, \ldots, f^n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones componentes de F y $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Si $dim[Img\ dF(p)] < n$; $\forall p \in \Omega$ con $m < n$, las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ son funcionalmente dependientes sobre todo K.*

Demostración. Sea $C = \{x \in \Omega / dim[Img\ dF(p)] < n\}$ el conjunto de puntos críticos para $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ siendo $m < n$, se tiene $C = \Omega$ y el teorema de Sard resulta $\text{Int}[F(\Omega)] = \emptyset$. Luego por el Teorema 3.1 las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ son funcionalmente dependientes sobre todo compacto $K \subset \Omega$.

Observación. Para el caso $n = m$ ya está demostrado en el Teorema 3.2.

Ejemplo 3.7. Sean las funciones $f^1(x,y) = x^2+y^2,\ f^2(x,y) = x-y$ y $f^3(x,y) = x^2+y^3$, definidas en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que no contenga el cero. Definimos la función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(x,y) = (x^2+y^2, x-y, x^2+y^3)$ diferenciable en $\mathbb{R}^2$, luego la matriz jacobiana:

$$dF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_2}(p) \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_2}(p) \\ \dfrac{\partial f^3}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial f^3}{\partial x_2}(p) \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix}$$

tiene rango igual a 2, $\forall (x,y) \in \Omega$.

Por tanto, las funciones f^1, f^2, f^3 componentes de F son funcionalmente dependientes sobre cualquier compacto $K \subset \Omega$. En particular para $K = \{(1,1)\} \subset \Omega$.

Conclusiones

1. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y sea $\mathbb{R}_t^{n-1}$ un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ con la última componente t constante. Si la intersección de cada hiperplano con K tiene medida nula en $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces K tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$.

2. Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación C^∞ en un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$, sea C el conjunto de puntos críticos de f, entonces $f(C)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$.

3. Para que las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ componentes de F sean funcionalmente dependendientes sobre $K \subset \Omega$, es necesario y suficiente que $intF(K) = \phi$.

4. Sean $f^1, f^2, \ldots, f^n$ funciones reales diferenciables de clase C^∞ componentes de F definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y sea K un compacto en Ω, para que las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ dependan funcionalmente sobre K, es necesario y suficiente que el determinante de la matriz Jacobiana de F se anule en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

5. Sea $m > n$, sean $f^1, f^2, \ldots, f^n$ funciones reales diferenciables de clase C^∞ componentes de F definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, y sea K un compacto en Ω. , para que las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ dependan funcionalmente sobre K, es necesario y

suficiente que $dim[Img\ dF(p)] < n, \quad \forall p \in \Omega$.

6. Sean $f^1, f^2, \ldots, f^n$ funciones reales diferenciables de clase C^∞ componentes de F definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, y sea K un compacto en Ω. Si $m < n$, las funciones $f^1, f^2, \ldots, f^n$ dependen funcionalmente sobre K, siempre y cuando la $dim[Img\ dF(p)] < n, \quad \forall p \in \Omega$.

Sugerencia

Realizar un estudio de los tres teoremas de dependencia funcional de funciones sobre variedades con borde.

Bibliografía

[1] **Broker T. & Janich**, (1973). "*Introducción a la Topología Diferencial*", Universidad de Regensburg , Madrid. Editorial A.C.

[2] **De Burgos R.**,(1995). "*Cálculo Infinitesimal de Varias Variables*", Universidad Politécnica de Madrid. Editorial McGraw Hill.

[3] **Durao E.**, (2012). "*O Teorema de Sard e sus Aplicacoes* ", Brasil, IMPA.

[4] **Guillemin V. & Pollack**, (1974). "*Differential Topology*", Englewood Cliffs, New Jersey.Prentice - Hall INC.

[5] **Lages E.**, (1973). "*Variedades Diferenciables*", Rio de Janeiro.

[6] **Milnor J.**, (1965). "*Topology From The Diferentiable Viewpoint*", University Press of Virginia Charlottesville.

[7] **SpivaK M.**, (1965). "*Cálculus on Manifolds*", Brandeis. University. Editorial reverte.