UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"El Método Simplex en la Optimización Multicriterio"

TESIS

Para optar el título profesional de Licenciado en Matemáticas

Presentado por:

Bach. Mat. **Masabel Carranza Roger Eulises**

Bach. Mat. **Paz Acosta Marcos Tulio**

Asesor:

Lic. Mat. Baca Ferreyros Miguel Ángel

LAMBAYEQUE – PERÚ

2018

UNIVERSIDAD NACIONAL" PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"El método simplex en la optimización multicriterio"**, presentada por los bachilleres en matemáticas, Masabel Carranza Roger Eulises, Paz Acosta Marcos Tulio, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de licenciado en matemáticas .

Dr. Carpena Velásquez Enrique Wilfredo

Presidente Jurado de Tesis

M.Sc. Niño Montero Nancy

Secretario Jurado de Tesis

Lic. Mat. Rojas Burga Victor Raúl

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: 01 de Junio - 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"El método simplex en la optimización multicriterio"

Bach. Mat. Masabel Carranza Roger Eulises
Autor

Bach. Mat. Paz Acosta Marcos Tulio
Autor

Lic. Mat. Baca Ferreyros Miguel Ángel
Asesor

Lambayeque – Perú
Junio-2018

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO
Ciudad Universitaria - Lambayeque

ACTA DE SUSTENTACIÓN Nº 037-2018-D/FACFyM

(Sustentación Autorizada por Resolución N° 718-2018-D/FACFyM)

En la ciudad de Lambayeque, siendo las 4:00 pm. del día 1 de junio del 2018 se reunieron en la videoteca del Laboratorio de física. los miembros del Jurado designados mediante Resolución Nº 086-2016-D/FACFyM, y su modificatoria la Resolución N° 574-2016-D/FACFyM, los docentes:

Dr. Enrique Wilfredo Cárpena Velásquez	Presidente
M.Sc. Nancy Niño Montero	Secretario
Lic. Mat. Victor Raúl Rojas Burga	Vocal

Para recibir la tesis titulada: "El Método Simplex en la optimización multicriterio"

desarrollada por los Bachilleres en Matemáticas, **Paz Acosta Marcos Tulio y Masabel Carranza Roger Eulises.**

Después de escuchar la exposición y las respuestas a las preguntas formuladas por los miembros del Jurado, se acordó Aprobar el trabajo por unanimidad con el calificativo de Muy bueno.

En consecuencia, los Bachilleres en referencia quedan aptos para recibir el Título Profesional de **Licenciado en Matemáticas,** de acuerdo a la Ley Universitaria, el Estatuto y Reglamento de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Lambayeque.

Observaciones:

Para constancia del hecho firman.

Dr. Enrique Wilfredo Cárpena Velásquez
Presidente

M.Sc. Nancy Niño Montero
Secretario

Lic. Mat. Víctor Raúl Rojas Burga
Vocal

Agradecimiento

Mi agradecimiento se dirige a quien ha forjado mi camino y me ha dirigido por el sendero correcto a Dios todo poderoso, sabemos que con él todo es posible.
Agradezco de todo corazón:
A mis queridos padres: Salomón y Ermila , que siempre me apoyaron incondicionalmente en la parte moral y económica para poder llegar a ser un profesional.
A mi hermana y demás familiares en general por el apoyo que siempre me brindaron día a día en el transcurso de cada año de mi carrera Universitaria.
A tios Marìa y Ricardo, por el apoyo incondicional al alojarme todo el tiempo de mi formación profesional.

Roger

Mi agradecimiento se dirige a quien ha forjado mi camino y me ha dirigido por el sendero correcto a Dios todo poderoso, sabemos que con él todo es posible.
Agradezco de todo corazón:
A mis queridos padres: Augusto y Josefa; que han sido mi fortaleza y siempre están conmigo ayudándome a aprender de mis errores y a no cometerlos otra vez.
A mi hermano César por su apoyo constante.
Y sobre todo a mi esposa Yacori y mi adorable hijo Alejandro que son el motivo para lograr mis metas trazadas.
Y a todos de una y otra forma por su apoyo incondicional que hacen posible dicho trabajo.

Marcos

Dedicatoria

Dedico este trabajo principalmente a Dios, por haberme dado la vida y permitirme el haber llegado hasta este momento tan importante de mi formación profesional. A mis padres Salomón y Ermila, porque creyeron en mì y porque me sacaron adelante, dándome ejemplos dignos de superación y entrega, porque en gran parte gracias a ustedes, hoy puedo ver alcanzada mi meta, ya que siempre estuvieron impulsándome en los momentos más difíciles de mi carrera, y porque el orgullo que sienten por mi, fue lo que me hizo ir hasta el final. A mi hijo Jostin, quien es la razón de mi existir y poder seguir superándome cada día. Va por ustedes, por lo que valen, porque admiro su fortaleza y por lo que han hecho de mí. A mis hermanos gracias por haber fomentado en mi el deseo de superación y el anhelo de triunfo en la vida.

Mil palabras no bastarían para agradecerles su apoyo, su comprensión y sus consejos en los momentos difíciles.

A todos, espero no defraudarlos y contar siempre con su valioso apoyo, sincero e incondicional.

Roger

Quiero dedicar esta tesis a mis padres Augusto y Josefa porque ellos han dado la razón a mi vida, por sus sabios consejos, su apoyo incondicional y sobre todo por su paciencia; todo lo que soy es gracias a ellos.

También a mis abuelos que desde el cielo me iluminan en el transcurrir de la vida.

A mi familia que es lo mejor y más valioso que Dios me ha dado y todo lo que pueda conseguir es para ellos.

Marcos

Presentación

En el presente trabajo de investigación tiene como objetivo utilizar el método simplex en la optimización multicriterio donde se presentan n funciones objetivo y para resolver dichos problemas se plantea el método de ponderaciones y el método simplex multicriterio lo cual son resueltos en forma rápida y precisa utilizando el software WinQsb. Donde su aplicación que presentamos es el problema de la dieta, la cual se describe de manera detallada como el método simplex es de gran importancia en su solución y además se utiliza el software WinQsb en dicho problema.

Espero que sea de gran ayuda a futuro, para Estudiantes y Docentes. Les presento esta tesis llamado **"El método simplex en la optimización multicriterio"**.

Resumen

El presente trabajo de investigación presenta el desarrollo del método del simplex y su importancia en la programación lineal multicriterio, cuyo objetivo es analizar técnicas de programación lineal útiles en el proceso de toma de decisiones con objetivos múltiples y el estudio de modelos tipo para su aplicación en problemas reales. En general se analiza, estudia y muestra los conceptos de programación lineal multicriterio, algunos métodos de solución para resolver problemas con más de una función objetivo, así como algunos ejemplos de este tipo, donde existen diversos puntos de vista que se han tenido en cuenta. Así mismo se pretende estimar las posibles implicaciones que puede tomar cada una de las variables, de modo que se tenga una mejor comprensión de las relaciones y sus objetivos, de manera que los resultados son la consecuencia de procesos matemáticos bien fundamentados.

La línea de investigación que se sustenta este trabajo es la reoptimización, y la innovación es la simplificación y comprobación de los procesos utilizando el software WinQsb, el cual contiene herramientas tecnológicas muy útiles para resolver distintos tipos de problemas en el campo de la Investigación de Operaciones y especialmente en Programación Lineal.

Palabras Clave: Método simplex y Multicriterio.

Abstract

The present research project presents the development of the simplex method and its importance in multicriterial linear programming, whose objective is to analyze linear programming techniques useful in the decision making process with multiple objectives and the study of model models for its application in real problems. In general, multicriteria linear programming concepts are analyzed, studied and displayed, some solution methods to solve problems with more than one objective function, as well as some examples of this type, where different points of view have been taken into account. It is also intended to estimate the possible implications that each of the variables can take, so that there is a better understanding of the relationships and their objectives, so that the results are the consequence of well-founded mathematical processes.

The line of research that sustains this work is reoptimization, and innovation is the simplification and verification of processes using WinQsb software, which contains very useful technological tools to solve different types of problems in the field of Operations Research and especially in Linear Programming.

Keywords: Simplex method and Multicriterio.

Índice general

Introducción

En la vida cotidiana, existen diversas características difícil de combinar de algunos problemas de optimización con un objetivo, como la rentabilidad, riesgo en las inversiones, beneficio a corto plazo, costos, etc. Esto puede llegar a crear conflictos entre los diversos objetivos del problema, ya que al intentar mejorar alguno de ellos puede haber un deterioro en otros; además no se puede garantizar que utilizando los métodos clásicos de programación lineal matemática, la solución obtenida sea optima, y muchas veces resultan ser poco eficientes y en algunos casos inoperables Por estas razones muchos problemas requieren optimizar un numero de objetivos simultáneamente y a estos se le llama problemas de programación multicriterio o problemas de programación multiobjetivos, y se formulan encontrando las variables de decisión que satisfagan las restricciones y optimice un vector de funciones cuyas componentes son las funciones objetivo del problema. Optimizar un problema con más de una función objetivo, significa encontrar una solución la cual daría los valores de todas las funciones objetivo para poder tomar una buena decisión y resolver el problema. A esto se le llama programación multicriterio, que es el motivo principal de estudio del presente trabajo. El presente trabajo de investigación está dirigido a estudiantes y profesionales que están familiarizados con la programación lineal, es decir, que tengan conocimientos de lo que es un programa lineal, sus diversas variantes y que conozca la aplicación del método simplex y sus fundamentos. Se centra en estudiar y analizar la programación lineal multicriterio para el caso continuo y se da como respuesta a la poca importancia a los problemas que tienen más de un objetivo. La simplificación y comprobación de realiza con el software WinQsb, el cual es un sistema iterativo que contiene herramientas tecnológicas muy útiles para

resolver distintos tipos de problemas en la programación matemática lineal.
De acuerdo a los estudios realizados, el problema científico quedo formulado de la siguiente manera: ¿En qué medida el método del simplex permite dar solución a los problemas de optimización multicriterio? El objetivo principal es: Realizar una extensión matemática del método del simplex para utilizarlo en la solución de problemas de optimización multicriterio. La hipótesis planteada es: Si se extiende y utiliza el método del simplex en problemas de optimización multicriterio entonces se resolverá y se obtendrá su solución óptima en forma rápida y eficiente.

La estructura del presente trabajo se presenta de la siguiente manera: En el primer capítulo se presentan los preliminares, los cuales son los conocimientos básicos en programación lineal, el método del simplex y programación multicriterio el software WinQsb.
En el segundo capítulo se da a conocer aspectos relacionados a la programación multicriterio y se analiza los diferentes métodos en la solución de problemas donde se presentan más de una función objetivo. Se ejemplariza y se realiza el proceso de solución en forma manual para después comprobarlo con el software winQsb.
En el tercer capítulo se da a conocer una aplicación en un problema de dieta, el cual se resuelve con la asistencia del WinQsb Después se presentan las: Conclusiones, Recomendaciones y Referencias Bibliográficas.

Capítulo 1:

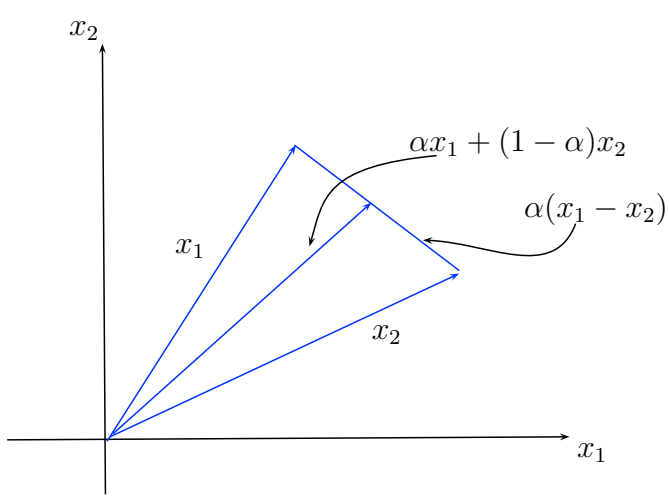
Preliminares

1.1 Región de Factibilidad

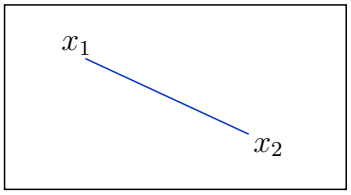
Definición 1.1. A un vector que satisface las restricciones de un PPL incluyendo a las de no-negatividad se le llama SOLUCIÓN FACTIBLE y al conjunto de todas las soluciones factibles se le llama REGIÓN FACTIBLE.

Definición 1.2. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si para cualesquier x_1, $x_2 \in A$ y $0 < \alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que el punto $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A$.

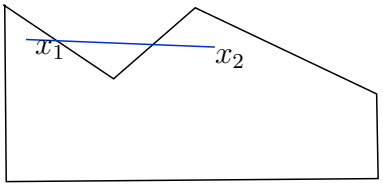
Obsérvese que cualquier punto de la forma $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ con $0 < \alpha < 1$ se encuentra en el segmento de línea que une a x_1 con x_2.



es decir, un conjunto A es convexo si para cualesquier dos puntos en A el segmento de línea que los une está totalmente contenida en A.



Convexo



No convexo

Proposición 1.1. *Sean A y B conjuntos convexos, entonces $A \cap B$ también es convexo.*

Demostración.

Dados $x_1, x_2 \in A \cap B$ debemos probar que

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A \cap B$$

dado que $x_1 \in A \cap B$, se tiene que $x_1 \in A$ y $x_1 \in B$

dado que $x_2 \in A \cap B$, se tiene que $x_2 \in A$ y $x_2 \in B$

como $x_1, x_2 \in A$ y A es convexo, entonces

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A$$

como $x_1, x_2 \in B$ y B es convexo, entonces

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in B$$

lo cual implica que

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A \cap B$$

por lo tanto $A \cap B$ es convexo.

$\square$

Definición 1.3. A los conjuntos

$$H_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / x_i \geq 0\}$$

y

$$H_i^- = \{x \in \mathbb{R}^n / x_i \leq 0\}$$

se les llama semiplanos.

Definición 1.4. Sea A un vector n-dimensional y b un número real al conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\}$ se le llama hiperplano.

Definición 1.5. Se dice que un conjunto de vectores $A^1, A^2, \ldots, A^k$ en $\mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, si $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A^i$ implica que $\alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k$

Definición 1.6. El rango de una matriz A se define como el número máximo de renglones (ó columnas) linealmente independientes de A.
Para cualquier matriz A el número máximo de renglones linealmente independientes es igual al número máximo de columnas linealmente independientes de A.
Asi, si A es de orden $m \times n$ entonces

$$rango(A) \leq mínimo(m, n)$$

si $rango(A) = mínimo(m, n)$ se dice que A es de rango completo.

Definición 1.7. Sea k la región de factibilidad de un PPL en su FE (Forma Estándar) entonces

a) $x \in k$ es una SOLUCIÓN FACTIBLE BÁSICA si x tiene a lo más "mçomponentes positivas.

b) $x \in k$ es una SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA si x optimiza la función objetivo.

Teorema 1.1. ***(Fundamental de la Programación Lineal)***

1. *Si existe una solución factible, entonces existe una solución factible básica.*

2. *Si existe una solución factible óptima, entonces existe una solución factible básica óptima.*

Demostración. i) Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ una solución factible, la restricción $Ax = b$ se puede representar de la forma.

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n = b$$

donde A^i es la i-ésima columna de A. Sin pérdida de generalidad supóngase que solo p componentes de X son distintas de cero y que estas son las primeras, entonces se tendría

$$x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_pA^p = b \tag{1.1}$$

se pueden dar dos casos:

Caso a). Los vectores columna $A^1, A^2, \ldots, A^p$ son linealmente independientes. En este caso puesto que $r(A) = m$, necesariamente se tiene $p \leq m$ de donde se concluye que

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, 0, \ldots, 0)^t$$

es ya una solución factible básica.

Caso b). Los vectores columna $A^1, A^2, \ldots, A^p$ son linealmente dependientes lo cual implica que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ no todos iguales a cero tales que:

$$\alpha_1A^1 + \alpha_2A^2 + \ldots + \alpha_2A^p = 0 \tag{1.2}$$

donde podemos suponer que al menos una de las α_i con $i = 1, 2, \ldots, p$ es positiva multiplicando (1.2) por δ y restando de (1.1) se obtiene

$$(x_1 - \delta\alpha_1)A^1 + (x_2 - \delta\alpha_2)A^2 + \ldots + (x_p - \delta\alpha_p)A^p = b \tag{1.3}$$

nótese que (1.3) es el desarrollo de la expresión $A\overline{x} = b$ donde

$$\overline{x} = (x_1 - \delta\alpha_1, x_2 - \delta\alpha_2, \ldots, x_p - \delta\alpha_p, 0, 0, \ldots, 0)^t$$

pero no necesariamente se satisface que $\overline{x} \geq 0$. Si $\delta \geq 0$ para las α_i negativas no hay problema pues $x_i - \delta\alpha_i \geq 0$ pero para las $\alpha_i \geq 0$ necesitamos que

$$x_i - \delta\alpha_i \geq 0$$

o lo que es lo mismo $x_i/\alpha_i \geq \delta$. Si tomamos

$$\delta = \text{mín}\{x_i/\alpha_i \quad /i = 1, 2, \ldots, p \quad y \quad \alpha_i > 0\}$$

entonces $\overline{x}$ es una solución factible y además y además se tendrá que

$$x_i - \delta\alpha_i = 0$$

para al menos un índice i, entonces la solución factible tendrá $p-1$ componentes pues una se anula. Este argumento se puede repetir hasta obtener una solución factible que tenga a lo más m componentes positivas o equivalentemente hasta que se obtengan vectores linealmente independientes, con lo cual Ya será una solución factible básica.

ii) Sea Y una solución factible óptima, supóngase igual que la anterior, que las primeras p-componentes de Y son positivas y las restantes iguales a cero. Así tendremos

$$y_1A^1 + y_2A^2 + \ldots + y_pA^p = b \tag{1.4}$$

de nuevo se dan dos casos

Caso a). Los vectores columna $A^1 + A^2 + \ldots + A^p$ son linealmente independientes, con lo cual podemos concluir que

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_p, 0, \ldots, 0)^t$$

es una solución factible básica óptima pues necesariamente $p \leq r(A) = m$.

Caso b). Los vectores columna $A^1 + A^2 + \ldots + A^p$ son linealmente dependientes lo cual implica que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ no todos iguales a cero tales que

$$\alpha_1A^1 + \alpha_2A^2 + \ldots + \alpha_pA^p = 0 \tag{1.5}$$

de (1.4) y (1.5) podemos obtener la relación

$$(y_1 + \theta\alpha_1)A^1 + (y_2 + \theta\alpha_2)A^2 + \ldots + (y_p + \theta\alpha_p)A^p = b \tag{1.6}$$

para cualquier número real θ. Analicemos (1.6) por casos, primero para $\alpha_i \geq O$, cuando se les multiplique por $\theta \geq O$ seguirán siendo solución y de hecho se pueden multiplicar por cualquier θ que cumpla la condición

$$\begin{aligned} y_i + \theta\alpha_i &\geq 0 \\ \theta\alpha_i &\geq -y_i \\ \theta &\geq -y_i/\alpha_i \end{aligned}$$

es decir, si tomamos $b = \text{ínf}\{-y_i/\alpha_i,\ \alpha_i < 0\}$, nótese que $b > 0$. Así que para $-a \leq \theta \leq b$, las soluciones que se obtienen son soluciones básicas factibles. Además si llamamos

$$\overline{y} = (y_1 + \theta\alpha_1, y_2 + \theta\alpha_2, \ldots, y_p + \theta\alpha_p, 0, \ldots, 0)$$

se tiene que $C\overline{y} = Cy + \theta C\alpha$, con $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0, \ldots, 0$.
si $C\alpha \not\equiv 0$, entonces $C\alpha > 0$ o $C\alpha < 0$. En el caso en que $C\alpha > 0$, basta tomar $\theta = -a$ para tener una solución $\overline{y}$ tal que

$$C\overline{y} < Cy$$

lo cual contradice que y sea solución óptima. y para $C\alpha < 0$, basta tomar $\theta = b$ y se obtiene la misma conclusión, por lo tanto

$$C\alpha = 0$$

y $\overline{y}$ es una solución que al evaluar θ en b ó en $-a$ tiene una componente menos, se prosigue este procedimiento hasta obtener que son m componentes distintas de cero o que los vectores $A^1, A^2, \ldots, A^p$ son linealmente independientes.
Esto asegura que si hay soluciones se pueden buscar entre las básicas y además si hay soluciones óptimas están también entre las básicas y se puede suponer que siempre provienen de vectores linealmente independientes.

$\square$

1.2 El método simplex en forma de tabla

Dado un problema de Programación Lineal

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z = cx \\ s.a \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde:

- **A:** Es una matriz de $m \times n$.
- **b:** Es un vector.
- **c:** Coeficientes de la función objetivo.

Supóngase que se tiene una solución básica factible inicial x con base **B**. El problema de programación lineal se puede representar como sigue:

$$\text{mín} \quad z - c_B x_B - c_N x_N = 0 \tag{1.7}$$

$$\text{Sujeta a} \quad Bx_B + Nx_N = \text{b} \tag{1.8}$$

$$x_B,\ x_N \geq 0$$

donde A es una matriz $m \times n$, con $n > m$ y $rang(A) = m$. Después de un posible arreglo de las columnas de A, sea $A = [B, N]$, en donde Se define:

- **Base B** como un conjunto de m columnas de A linealmente independientes y además invertible de $m \times m$.
- **N** se llama la matriz no básica de $m \times (n - m)$.
- El punto $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ en donde x_B se llaman variables básicas y x_N se llama variables no básicas.

De la ecuación (1.8) se tiene

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \tag{1.9}$$

Multiplicando (1.9) por c_B y sumando a la ecuación (1.7), se obtiene:

$$z + 0x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b \tag{1.10}$$

Para este caso $x_N = 0$, de las ecuaciones (1.9) y (1.10), se ve que $x_B = B^{-1}b$ y $z = c_B B^{-1}b$. Asimismo, de (1.9) y (1.10), se puede representar convenientemente la solución básica factible actual en la siguiente tabla. Aquí, se piensa en z como una variable (básica) que debe minimizarse. Se hará referencia al renglón objetivo como el renglón 0, y a los renglones restantes como los renglones 1 hasta m. La columna del lado derecho (LD) denotará los valores de las variables básicas (incluyendo la función objetivo).
Las variables básicas se identificarán en la columna de la extrema izquierda.

	z	x_B	x_N	LD	
z	1	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$	Renglón 0
x	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$	Renglones 1 a m

En esta tabla no sólo proporciona el valor de la función objetivo $c_B B^{-1}b$ y el de las variables básicas $B^{-1}b$ en el lado derecho, sino que también da toda la información necesaria para desarrollar el método simplex. De hecho, el renglón de costo da $c_B B^{-1}N - c_N$, que consiste de los valores de $z_j - c_j$ para las variables no básicas. Así, el renglón cero dirá si se ha llegado a la solución óptima (si cada $z_j - c_j \leq 0$), o en caso contrario, cuál es la variable no básica que se debe incrementar. Si se incrementa x_k, entonces el vector es $y_k = B^{-1}a_k$, el cual esta representado en los renglones 1 a m de la tabla bajo la variable x_k, ayudará a determinar que tanto debe incrementarse x_k. Si $y_k \leq 0$, entonces x_k puede crecer indefinidamente sin ser bloqueada, y el objetivo óptimo es no acotado. Por otra parte si $y_k \leq 0$, es decir, si y_k tiene al menos una componente positiva, entonces el incremento en x_k será bloqueado por una de las variables básicas actuales, la cual se hará cero.

Algoritmo

1. Transformar las desigualdades del problema en un problema estándar introduciendo las variables de holgura.

2. C onstruir la tabla inicial.

3. D eterminar la solución inicial, llamada solución básica inicial.

4. D eterminar si se puede mejorar la solución dependiendo de los coeficientes de la función objetivo según el criterio de mejorabilidad:
   Si sí, entonces hay que calcular la nueva solución:

   a) determinar cuál es la variable entrante.

   b) determinar cuál es la variable saliente.

   c) modificar las restricciones por pivoteo.

   d) calcular el valor de la FO.

   e) explicitar la nueva solución.

   f) volver al inciso 4.

   Si no, entonces se termina y la última solución es la solución óptima.

Pivoteo

Todas las operaciones anteriores se pueden efectuar simultáneamente mediante una simple operación de pivoteo. Si x_k entra a la base y x_{B_r} sale de la base, entonces el pivoteo sobre y_{rk} se puede efectuar como sigue:

1. Se divide el renglón r por y_{rk}.

2. Para i=1,2,..., m, con $i \neq r$, se actualiza el i-ésimo renglón sumándole el nuevo r-ésimo renglón por $-r_{ik}$.

3. Se actualiza el renglón cero sumándole el nuevo r-ésimo renglón multiplicado por $c_k - z_k$. Las dos tablas (1.1) y (1.2) representan la situación inmediatamente antes y despues del pivoteo.

Tabla 1.1: Antes de pivotear

	z	x_{B_1}		x_{B_r}		x_{B_m}		x_j		x_k		LD
z	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$z_j - c_j$	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$c_B\overline{b}$
x_{B_1}	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	$\overline{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_{B_r}	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{rj}	$\cdots$	y_{rk}	$\cdots$	$\overline{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	y_{mj}	$\cdots$	y_{mk}	$\cdots$	$\overline{b}_m$

Tabla 1.2: Después de pivotear

	z	x_{B_1}		x_{B_r}		x_{B_m}		x_j		x_k		LD
z	1	0	$\cdots$	$\dfrac{c_k - z_k}{y_{rj}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(z_j - c_j)$ $-\dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$c_B\overline{b} - (z_k - c_k)\dfrac{\overline{b}_r}{y_{rk}}$
x_{B_1}	0	1	$\cdots$	$-\dfrac{y_{1k}}{y_{rk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$y_{1j} - \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}\, y_{1k}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\overline{b}_1 - \dfrac{y_{1k}}{y_{rk}}\, \overline{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_k	0	0	$\cdots$	$-\dfrac{1}{y_{rk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{\overline{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	0	$\cdots$	$-\dfrac{y_{mk}}{y_{mk}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$y_{mj} - \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}\, y_{mk}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\overline{b}_m - \dfrac{y_{mk}}{y_{mk}}\, \overline{b}_r$

Ejemplo 1.1.

$$\begin{array}{lrl} \text{Maximizar} & 3x_1 + 5x_2 & \\ \\ \text{Sujeta a} & x_1 & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ & x_1,\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Solución.

<u>Paso 1:</u>

Ingresar las variables de holgura no negativas $h_1,\ h_2,\ h_3$. El problema se convierte en lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & 3x_1 + 5x_2 + 0h_1 + 0h_2 + 0h_3 & \\ \\ \text{Sujeta a} & x_1 + 0x_2 + h_1 & = 4 \\ & 0x_1 + 2x_2 \qquad + h_2 & =12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + h_3 & =18 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ h_1,\ h_2,\ h_3 & \geq 0 \end{array}$$

<u>Paso 2:</u>

Ingresando los datos en la tabla inicial:

	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	L.D.
z	1	-3	-5	0	0	0	0
h_1	0	1	0	1	0	0	4
h_2	0	0	2	0	1	0	12
h_3	0	3	2	0	0	1	18

Paso 3:

La siguiente tabla es un replanteamiento de la tabla inicial con sus filas y columnas pivote resaltadas.

La intersección de la columna pivote y la fila pivote se conoce como elemento pivote.

Entra

	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	L.D.		
z	1	-3	-5	0	0	0	0		
h_1	0	1	0	1	0	0	4		
Sale h_2	0	0	2	0	1	0	12	Fila pivote	12/2=6
h_3	0	3	2	0	0	1	18		18/2=9

Columna pivote

El siguiente resultado es:

	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
z	1	-3	0	0	2.5	0	30
h_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	0.5	0	6
h_3	0	3	0	0	-1	1	6

El siguiente pivote es:

Entra

	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD	
z	1	-3	0	0	2.5	0	30	
h_1	0	1	0	1	0	0	4	4/1=4
x_2	0	0	1	0	0.5	0	6	
Sale h_3	0	3	0	0	-1	1	6	6/3=2

Tabla 1.3: Tabla óptima

	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	LD
z	1	0	0	0	1.5	1	36
h_1	0	0	0	1	0.3333	-0.3333	2
x_2	0	0	1	0	0.5	0	6
x_1	0	1	0	0	-0.3333	0.3333	2

Luego la solución óptima esta dado por:

$$\begin{aligned} z &= 36.0000 \\ x_1 &= 2.0000 \\ x_2 &= 6.0000 \\ h_1 &= 2.0000 \\ h_2 &= 0.0000 \\ h_3 &= 0.0000 \end{aligned}$$

1.3 Método del Dual

1.3.1 Formulación del problema dual

Definición 1.8. Un problema de programación lineal se dice que está en forma simétrica si toda las variables están restringidas a ser no negativas y todas las restricciones son de tipo "$\leq$.en el caso de máximo y de tipo "$\geq$.en el caso de mínimo, es decir, toman la forma:

$$\begin{array}{rr} \text{Minimizar} & Z = cx \\ \text{Sujeta a} & Ax \geq \text{b} \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \text{Maximizar} & Z = cx \\ \text{Sujeta a} & Ax \leq \text{b} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Definición 1.9. Minimizar (Forma canónica de dualidad):

Supóngase que el programa lineal primal está dado en forma:

$$\begin{array}{rr} \text{P: Minimizar} & Z = cx \\ \text{Sujeta a} & Ax \geq \text{b} \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \textbf{su dual es:} \quad \begin{array}{rr} \text{D: Maximizar} & W = b'y \\ \text{Sujeta a} & A'y \leq c' \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Donde:

c= Vector columna de "n" componentes.

b= Vector columna de "m" componentes.

A= Matriz de orden $m \times n$.

x= Vector de "n" componentes cuyos valores deben ser hallados para maximizar la función Z sujeto a las restricciones dadas.

c'= Transpuesta de c.

b'= Transpuesta de b.

A'= Transpuesta de A.

y= Es un vector de "m" componentes cuyos valores deben ser hallados para minimizar la función W sujeta a las restricciones dadas.

<u>Matricialmente</u>:

$$P : \text{mín } \ Z = [c_1 \ c_2 \cdots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$D : \text{máx } W = [b_1 \ b_2 \cdots b_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0$$

Nótese que existe exactamente una variable dual por cada restricción primal, y exactamente una restricción dual por cada variable primal.

Ejemplo 1.2. Considérese el siguiente programa lineal y su dual:

$$\begin{array}{lll} \text{P:} & \text{Minimizar} & Z = 6x_1 + 8x_2 \\ & \text{Sujeta a} & 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ & & 5x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\begin{array}{lll} \text{D:} & \text{Maximizar} & W = 4y_1 + 7y_2 \\ & \text{Sujeta a} & 3y_1 + 5y_2 \leq 6 \\ & & y_1 + 2y_2 \leq 8 \\ & & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Definición 1.10. Maximizar (Forma canónica de dualidad):

Supóngase que el programa lineal primal está dado en forma:

P: Maximizar	$Z = cx$		D: Minimizar	$W = b'y$
Sujeta a	$Ax \leq$ b	$\Rightarrow$ **su dual es:**	Sujeta a	$A'y \geq c'$
	$x \geq 0$			$y \geq 0$

<u>Matricialmente</u>:

$$P : \text{máx } \ Z = [c_1 \ c_2 \cdots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$D : \text{mín } \ W = [b_1 \ b_2 \cdots b_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0$$

Definición 1.11. Forma estándar de dualidad

Supóngase que el programa lineal primal está dado en la forma:

$$\begin{aligned} \text{P:} \quad \text{Minimizar} \quad & Z = cx \\ \text{Sujeta a} \quad Ax &= \text{b} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\begin{aligned} \text{D:} \quad \text{Maximizar} \quad & W = b'y \\ \text{Sujeta a} \quad A'y &\leq c' \\ y & \quad \text{no restringida} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3. Considérese el siguiente programa lineal y su dual:

$$\begin{aligned} \text{P:} \quad \text{Minimizar} \quad & Z = 6x_1 + 8x_2 \\ \text{Sujeta a} \quad 3x_1 + x_2 - s_1 &= 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \quad - s_2 &= 7 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Entonces su dual es:

$$\begin{aligned} \text{D:} \quad \text{Maximizar} \quad & W = 4y_1 + 7y_2 \\ \text{Sujeta a} \quad 3y_1 + 5y_2 &\leq 6 \\ y_1 + 2y_2 &\leq 8 \\ -y_1 \qquad &\leq 0 \\ -y_2 &\leq 0 \\ y_1, y_2 & \quad \text{no restringidas} \end{aligned}$$

Proposición 1.2. *Se cumplen las siguientes reglas para la construcción de problemas duales:*

i) El problema

$$\begin{array}{rrcrr} P\text{: mín} & Z = cx & & D\text{: máx} & W = b'y \\ s.a & Ax \geq b & \textbf{\textit{se dualiza en:}} & Sujeta\ a & A'y \leq c' \\ & x \geq 0 & & & y \geq 0 \end{array}$$

En consecuencia el problema dual del problema dual es el problema primal.

ii) El problema

$$\begin{array}{rrcrr} P\text{: máx} & Z = cx & & D\text{: mín} & W = b'y \\ s.a & Ax \geq b & \textbf{\textit{se dualiza en:}} & Sujeta\ a & A'y \geq c' \\ & x \geq 0 & & & y \leq 0 \end{array}$$

iii) El problema

$$\begin{array}{rrcrr} P\text{: máx} & Z = cx & & D\text{: mín} & W = b'y \\ s.a & Ax \leq b & \textbf{\textit{se dualiza en:}} & Sujeta\ a & A'y \leq c' \\ & x \leq 0 & & & y \geq 0 \end{array}$$

Demostración.

i) Para que sea un problema de máximo con restricciones de tipo " $\leq$ " y con variables no negativas, para ello basta con cambiar de signo la función objetivo y con multiplicar por -1 cada una de las restricciones del problema, es decir,

$$\begin{array}{rrcrr} \text{mín} & Z = cx & & \text{máx} & (-Z) = -cx \\ \text{s.a} & Ax \geq \text{b} & \Leftrightarrow & \text{Sujeta a} & -A'y \leq -b \\ & x \geq 0 & & & x \geq 0 \end{array}$$

Este problema ya se ajusta a la definición sobre dualidad dada inicialmente, y su dual es

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & W = -b'y & \\ \text{s.a:} & -A'y & \geq -c' \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

que de una manera directa queda

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & W = b'y & \\ \text{s.a:} & A'y & \leq c' \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

ii) Para que sea un problema de mínimo con restricciones de tipo " $\geq$ " y con variables negativas, para ello basta con cambiar de signo la función objetivo y con multiplicar por -1 cada una de las restricciones del problema, es decir,

$$\begin{array}{rrcrr} \text{máx} & Z = cx & & \text{mín} & (-Z) = -cx \\ \text{s.a} & Ax \leq \text{b} & \Leftrightarrow & \text{Sujeta a} & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 & & & x \geq 0 \end{array}$$

Este problema ya se ajusta a la definición sobre dualidad dada inicialmente, y su dual es

$$\begin{array}{lrl} \text{máx} & W = -b'y & \\ \text{s.a:} & -A'y & \geq -c' \\ & y & \leq 0 \end{array}$$

que de una manera directa queda

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & W = b'y & \\ \text{s.a:} & A'y & \geq c' \\ & y & \leq 0 \end{array}$$

iii) Para que sea un problema de mínimo con restricciones de tipo " $\leq$ " y con variables no negativas, para ello basta con cambiar de signo la función objetivo y con multiplicar por -1 cada una de las restricciones del problema, es decir,

$$\begin{array}{rrcrr} \text{máx} & Z = cx & & \text{mín} & (-Z) = -cx \\ \text{s.a} & Ax \leq \text{b} & \Leftrightarrow & \text{Sujeta a} & -Ax \leq -b \\ & x \leq 0 & & & x \leq 0 \end{array}$$

Este problema de $i)$ se obtiene su dual de manera directa queda

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & W = b'y & \\ \text{s.a:} & A'y & \leq c' \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

□

1.3.2 Formas mixtas de dualidad

Muchos programas lineales contienen algunas restricciones del tipo "menor o igual que", algunas del tipo "mayor o igual quez algunas del tipo "igual a". Asimismo, las variables pueden ser "≥ 0", "≤ 0", o "no restringida".

Considérese el siguiente programa lineal.

$$\begin{array}{llrcl} \text{P:} & \text{mín} & Z = cx & & \\ & \text{s.a:} & A_1x & \geq & b_1 \\ & & A_2x & = & b_2 \\ & & A_3x & \leq & b_3 \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Convirtiendo este problema al formato estándar, se obtiene

$$\begin{array}{llrcl} \text{P:} & \text{mín} & Z = cx & & \\ & \text{s.a:} & A_1x - s_1 & = & b_1 \\ & & A_2x & = & b_2 \\ & & A_3x + s_2 & = & b_3 \\ & & x, s_1, s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

El dual de este problema es:

$$\begin{array}{llrcl} \text{D:} & \text{máx} & W = y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 & & \\ & \text{s.a:} & A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 & \leq & c' \\ & & -y_1 & \leq & 0 \\ & & y_3 & \leq & 0 \\ & & y_1, y_2, y_3 \text{ no restringidas} & & \end{array}$$

Para escribir el dual de un problema general, podemos escribir este en forma canónica o estándar y aplicar una de las definiciones anteriores. Otra posibilidad es formular el dual utilizando la siguiente tabla.

Tabla 1.4: Relaciones entre los problemas primal y dual.

	Problema de minimización	Problema de maximización	
VARIABLES	≥ 0 ≤ 0 no restringidas	$\leq$ $\geq$ $=$	RESTRICCIONES
RESTRICCIONES	$\geq$ $\leq$ $=$	≥ 0 ≤ 0 no restringidas	VARIABLES

La ventaja de esta última tabla es que se puede leer de izquierda a derecha o viceversa, según el problema primal sea de maximización o minimización respectivamente. Además en el problema primal pueden darse diferentes combinaciones en cuanto al sentido de sus desigualdades o el signo de sus variables.

Ejemplos de la tabla 2.1:

Ejemplo 1.4.

$$\begin{array}{llrcl} \text{P:} & \text{mín} & Z = 6x_1 + 3x_2 & & \\ & \text{s.a:} & 6x_1 - 3x_2 + x_3 & \geq & 2 \\ & & 5x_1 + 4x_2 + x_3 & \geq & 5 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\begin{array}{llrcl} \text{D:} & \text{máx} & W = 2y_1 + 5y_2 & & \\ & \text{s.a:} & 6y_1 + 5y_2 & \leq & 6 \\ & & -3y_1 + 4y_2 & \leq & 3 \\ & & y_1 + y_2 & \leq & 0 \\ & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Ejemplo 1.5.

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{P:} & \text{mín} & Z = -2x_1 + 13x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + 5x_6 & & \\
& \text{s.a:} & x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 + x_6 & = & 16 \\
& & x_1 + 7x_4 - 2x_5 + 3x_6 & \geq & \text{-1} \\
& & 5x_2 + 7x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 & \leq & 5 \\
& & x_1, x_2, x_3 \geq 0;\ x_4 \leq 0 & \text{y} & x_5, x_6 \text{ no restringidas}
\end{array}
$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{D:} & \text{máx} & W = 16y_1 - 20y_2 + 5y_3 & & \\
& \text{s.a:} & y_1 + y_2 & \leq & \text{-2} \\
& & -y_1 + 5y_3 & \leq & 13 \\
& & 7y_3 & \leq & 3 \\
& & 4y_1 + 7y_2 - y_3 & \geq & \text{-2} \\
& & -y_1 - 2y_2 + 2y_3 & = & 1 \\
& & y_1 + 3y_2 - y_3 & = & 5 \\
& & y_1 \textit{ no restringida},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0 & &
\end{array}
$$

Ejemplo 1.6.

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{P:} & \text{mín} & Z = -2x_1 + 13x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + 5x_6 & & \\
& \text{s.a:} & x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 + x_6 & = & 16 \\
& & x_1 + 7x_4 - 2x_5 + 3x_6 & \geq & \text{-1} \\
& & 5x_2 + 7x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 & \leq & 5 \\
& & x_1, x_2, x_3 \geq 0;\ x_4 \leq 0 & \text{y} & x_5, x_6 \text{ no restringidas}
\end{array}
$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{D:} & \text{máx} & W = 16y_1 - 20y_2 + 5y_3 & & \\
& \text{s.a:} & y_1 + y_2 & \leq & \text{-2} \\
& & -y_1 + 5y_3 & \leq & 13 \\
& & 7y_3 & \leq & 3 \\
& & 4y_1 + 7y_2 - y_3 & \geq & \text{-2} \\
& & -y_1 - 2y_2 + 2y_3 & = & 1 \\
& & y_1 + 3y_2 - y_3 & = & 5 \\
& & y_1 \textit{ no restringida},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0 & &
\end{array}
$$

Ejemplo 1.7.

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & Z = 5x_1 + 6x_2 & & \\ \text{s.a:} & x_1 + 2x_2 & = & 5 \\ & -x_1 + 5x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 \; irrestricto, x_2 & \geq & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lrcl} \text{máx} & Z = 5x_1 + 6x_2 & & \\ \text{s.a:} & x_1 + 2x_2 & = & 5 \\ & x_1 - 5x_2 & \leq & \text{-3} \\ & x_1 \; irrestricto, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Hacemos esto para que sea simétrico, es decir cuando es máximo las restricciones deben ser " $\leq$ ".

Entonces el programa lineal dual está definido por:

$$\begin{array}{llrcl} \text{D:} & \text{mín} & W = 5y_1 - 3y_2 & & \\ & \text{s.a:} & y_1 + y_2 & = & 5 \\ & & 2y_1 - 5y_2 & \geq & 6 \\ & & y_1 \; irrestricto, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Teorema 1.2. ***(Dualidad débil)***.

Si $\overline{x}$ es una solución factible para el problema primal canónico y $\overline{y}$ es una solución factible para el problema dual, entonces $Z = c\overline{x} \leq \overline{y}b = W$

Demostración.

Por ser $\overline{x}$ solución factible del primal se tiene $A\overline{x} \leq b$, y para $\overline{y}$ solución factible se cumple $A'\overline{y} \geq c'$.

Multiplicando la primera restricción por $\overline{y}'$ y la segunda por $\overline{x}'$ se obtiene $\overline{y}'A\overline{x} \leq \overline{y}'b$ y $\overline{x}'A'\overline{y} \geq \overline{x}'c'$.

Además se tiene $(\overline{x}'A'\overline{y})' = \overline{y}'A\overline{x} \geq (\overline{x}'c')' = c\overline{x}$, así $W = \overline{y}'b \geq \overline{y}'A\overline{x} \geq c\overline{x} = Z$. $\square$

Corolario 1.1. *Si las soluciones factibles $x^?$ e $y^?$ verifican $c^T x^? = b^T y^?$, entonces $x^?$ e $y^?$ son soluciones optimas para el primal y el dual respectivamente.*

Demostración.

El teorema de dualidad débil asegura que para cualquier par de soluciones x e y se verifica

$$c^T x \leq b^T y.$$

Si tomamos la solución dual y^* se verifica $c^T x \leq b^T y$. Dado que $c^T x^* = b^T y^*$, para cualquier solución x del problema primal se tiene

$$c^T x \leq c^T x^*,$$

de donde se deduce que x^* es solución óptima del problema primal.
De la misma forma

$$b^T y^* = c^T x^* \leq c^T y.$$

Por tanto, para cualquier solución y del problema dual se verifica

$$b^T y^* \leq b^T y,$$

de donde se deduce que y^* es solución óptima del dual. □

Corolario 1.2. *Si el problema primal es factible y no acotado, el dual es infactible.*

Demostración.
Teniendo en cuenta que cualquier par de soluciones x e y verifican $c^T x \leq b^T y$, si el objetivo primal no está acotado, no existe una solución y para el dual que sea una cota superior para el problema primal. Por tanto el problema dual no tiene solución. □

Corolario 1.3. *Si el problema dual es factible y no acotado, el primal es infactible.*

Demostración.
Si el problema primal es infactible, el dual puede ser infactible o no acotado.
Y si el problema dual es infactible el primal puede se infactible o no acotado. □

Teorema 1.3. ***(Fuerte de dualidad)***
Si el problema primal tiene una solución factible y el correspondiente dual también tiene una solución factible entonces existen x^* solución factible óptima del problema primal, y y^* una solución óptima del problema dual que cumplen:

$$\text{máx } Z = cx^* = \text{mín } W = y^* b$$

Demostración.

Dado el problema Primal en su forma estándar

$$\begin{array}{lll} \text{P:} & \text{máx} & Z = cx \\ & \text{s.a:} & Ax + Uh = \text{b} \\ & & x, h \geq 0 \end{array}$$

y haciendo

$$c' = (c\ 0), \quad x' = \begin{pmatrix} x \\ h \end{pmatrix}, \quad B = (A\ U),$$

Obtenemos el problema equivalente

$$\begin{array}{lll} \text{P':} & \text{máx} & Z = c'x' \\ & \text{s.a:} & Bx' = \text{b} \\ & & x' \geq 0 \end{array}$$

Como por hipótesis el problema primal tiene una solución óptima finita, existe una solución óptima básica x^* de P asociada en una base I. Entonces se puede escribir P en forma explicita respecto a dicha base como sigue:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & Z, & & \\ \text{s.a:} & 0x'_1 + [(c')^J - Z^J]x'_J & = & Z - Z_0 \\ & x'_1 + (B^I)^{-1}B^J x'_J & = & (B^I)^{-1}b \\ & x'_I,\ x'_J & \geq & 0 \end{array}$$

Donde $Z_0 = (c')^I(B^I)^{-1}b$ y $Z^J = (c')^I(B^I)^{-1}B^J$.

La solución óptima básica es $x^* = ((B^I)^{-1}b\ \ 0)$, es decir, $x^*_I = (B^I)^{-1}b$ y $x^*_J = 0$.

Se puede reescribir la función objetivo como sigue:

$$Z = Z_0 + 0x'_I + [(c')^J - Z^J]x'_J$$

$$Z = (c')^I(B^I)^{-1}b + [(c')^I - (c')^I(B^I)^{-1}B^I]x'_I + [(c')^J - (c')^I(B^I)^{-1}B^J]x'_J$$

Donde

$$(c')^I - (c')^I(B^I)^{-1}B^I \leq 0$$

$$(c')^J - (c')^I(B^I)^{-1}B^J \leq 0$$

La última desigualdad se da por ser $\overline{x}^*$ solución óptima. Al reescribir las desigualdades, se obtiene:

$$(c')^I \leq (c')^I (B^I)^{-1} B^I$$

$$(c')^J \leq (c')^I (B^I)^{-1} B^J$$

Que es equivalente a:

$$(c')^I (B^I)^{-1} (B^I \quad B^J) \geq ((c')^I \quad (c')^J)$$

pero $B = (B^I \quad B^J)$ y $c' = ((c')^I \quad (c')^J)$, además $B = (A \quad U)$ y $c' = (c \quad 0)$, así que la desigualdad queda:

$$(c')^I (B^I)^{-1} (A \quad U) \geq (c \quad 0)$$

O bien

$$(c')^I (B^I)^{-1} A \geq c$$

$$(c')^I (B^I)^{-1} U \geq 0$$

Aplicando la transpuesta se tiene:

$$A'[(c')^I (B^I)^{-1}]' \geq c'$$

$$U'[(c')^I (B^I)^{-1}]' \geq 0$$

Sea $\overline{y} = [(c')^I (B^I)^{-1}]'$, entonces $\overline{y}$ es solución factible del problema dual ya que las desigualdades anteriores son las restriciones del problema dual D.

Al evaluar en a función objetivo dual se obtiene

$$b'\overline{y} = b'(c^I (B^I)^{-1})' = (c^I (B^I)^{-1} b)' = (c^I x^*)' = c^I x^*,$$

ya que es un escalar, entonces $\overline{y}$ es óptimo para el dual y

$$b'\overline{y} = c^I x^*.$$

$\square$

1.3.3 Teorema Fundamental de Dualidad

Teorema 1.4. *Si existe una solución óptima del problema primal, entonces existe una solución óptima del problema dual y en ambas soluciones los valores de las respectivas funciones objetivo coinciden.*

Demostración.

Considérese el problema primal en la forma estándar

$$\begin{array}{lll} \text{Máximizar} & z = c^t x & \\ \text{s.a.} & Ax & = \text{b} \\ & \text{con } x & \geq 0 \end{array}$$

La tabla inicial para este problema es:

Variables originales	variables de holgura	
A	I	b
$-c^t$	0	0

Sea $A = [B, N]$ donde B es la base donde se alcanza el óptimo y el N el complemento de la partición. Entonces el problema anterior puede escribirse como:

$$\begin{array}{lll} \text{Máximizar} & z = c_B x_B + c_N x_N & \\ \text{s.a.} & Bx_B + Nx_N & = \text{b} \\ & \text{con } x_B, x_N & \geq 0 \end{array}$$

y la solución se obtiene al hacer cero el vector que no está en la base, x_N y resolver el vector básico. Así la solución de este problema es $x_B = B^{-1}b$ y la función objetivo se convierte en $z = c_B B^{-1} b$ por lo tanto la tabla donde se alcanza el óptimo es de la forma: de aquí que $-c^t + c_B B^{-1} A \geq 0$ y $c_B B^{-1} \geq 0$ ... (*)

$z_j - c_j$ correspondinetes a las variables originales	$z_j - c_j$ correspondinetes a las variables de holgura	
$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c^t$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

Ahora se probará que el vector $y^t = c_B B^{-1}$ es una solución óptima del dual. De (*) se optiene la factibilidad de Y, pues

$$y^t = c_B B^{-1} \geq 0$$

$$y^t \geq c^t$$

$$A^t y \geq c$$

por otra parte la función objetivo del dual es:

$$w = b^t y = b^t (c_B B^{-1})^t = b^t (B^{-1})^t c_B^t = c_B B^{-1} b = z$$

por lo tanto $y^t = c_B B^{-1}$ es una solución óptima del dual. □

1.4 Software WinQsb

La toma de decisiones en los distintos niveles de las organizaciones cada vez es de mayor complejidad, dadas las crecientes restricciones de disponibilidad de todo tipo de recursos. Los académicos se ha preocupado de investigar y proporcionar herramientas que faciliten a los gerentes el abordaje de estos procesos, teniendo en cuenta que no es recomendable asumir un curso de acción confiados únicamente en la intuición. La llamada administración científica aboga por el uso de los métodos cuantitativos en la toma de decisiones empresariales; de ahí que en los planes de estudio correspondientes a la formación de profesionales de la ingeniería industrial, la administración en sus diferentes matices, las finanzas y muchas más disciplinas, figuren asignaturas que pretendan que

los egresados de estas titulaciones se apropien de un cúmulo de herramientas que les facilite el análisis y la toma de decisiones en situaciones complejas.

Con la popularización de los computadores personales (PC's) han surgido programas y aplicaciones muy completas para el tratamiento de los problemas de gestión mediante herramientas cuantitativas, las que en su conjunto constituyen los métodos de la investigación de operaciones.

Se han utilizando diferentes softwars para resolver problemas de investigación de operaciones como lo han sido MSS (mathematical Science System), STROM, QSB (Quantitative System Business), TORA(que acompaña al libro de Investigación de Operaciones de Hamdy Taha), Mathematical Programming y Probabilistic Programming (que acompañaba al libro de Introducción a la Investigación de Operaciones de Hillier y Lieberman), Lido, Lingo y otros programas en Excel como lo es el Solver, etc. De igual manera se han realizado esfuerzos individuales de quienes relacionados con la Investigación de Operaciones hemos desarrollado programas para la solución de problemas diversos en este campo.

WinQsb es una aplicación versátil que permite la solución de una gran cantidad de problemas: administrativos, de producción, de recurso humano dirección de proyectos, etc.

Debido a su facilidad y potencia de manejo, este libro se convierte en una herramienta indispensable para el estudiante de pregrado o postgrado que participa en materias relacionadas como la investigación de operaciones, los métodos de trabajo, planeación de la producción, evaluación de proyectos, control de calidad, simulación, estadística, entre otras.

El acceso al **WinQsb** se puede hacer a través del botón INICIO del sistema operativo WINDOWS, en el menú PROGRAMAS en la carpeta **WinQsb**.

WinQsb es una herramienta poderosa para el manejo de métodos cuantitativos, el cual está conformado por 19 módulos:

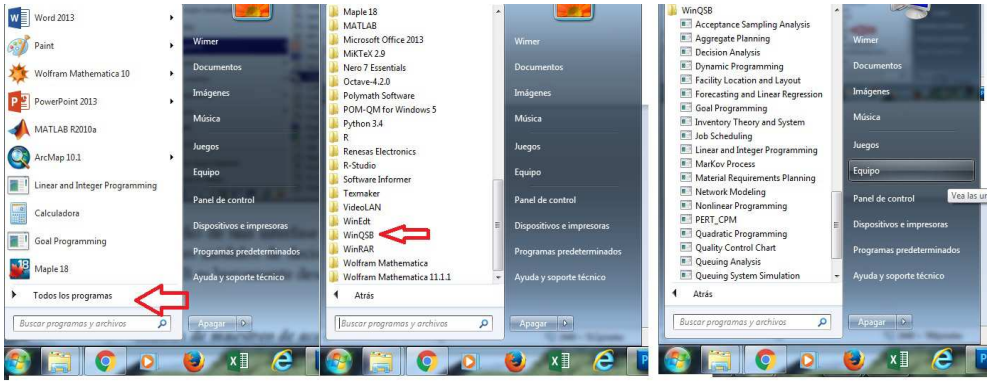


Figura 1.1: *Acceso a WinQsb en menú inicio de Windows*

1. Análisis de muestreo de aceptación (Acceptance Sampling Analysis)
2. Planeación agregada (Aggregate Planning)
3. Análisis de decisiones (Decision Analysis)
4. Programación dinámica (Dynamic Programming)
5. Diseño y localización de plantas (Facility Location and Layout)
6. Pronósticos (Forecasting)
7. Programación por objetivos (Goal Programming)
8. Teoría y sistemas de inventarios (Inventory Theory and System)
9. Programación de jornadas de trabajo (Job Scheduling)
10. Programación lineal y entera (Linear and integer programming)
11. Procesos de Markov (Markov Procces)
12. Planeación de Requerimientos de Materiales (Material Requirements Planning)
13. Programación de redes (Network Modeling)
14. Programación no lineal (Nonlinear Programming)
15. PERT y CPM (PERT_CPM)

16. Programación cuadrática (Quadratic Programming)

17. Cartas de control de calidad (Quality Control Chart)

18. Sistemas de cola (Queuing Analysis)

19. Simulación de sistemas de cola (Queuing Analysis Simulation)

Figura 1.2: *19 módulos de WinQsb*

WinQSB utiliza los mecanismos típicos de la interface de Windows, es decir, ventanas, menús desplegables, barras de herramientas, etc. Por lo tanto el manejo del programa es similar a cualquier otro que utilice el entorno Windows.

Una vez seleccionado el módulo con el cual se desee trabajar, aparecerá una ventana cuyas características iníciales serán similares para todos los módulos del WinQSB. Al acceder a cualquiera de los módulos se abre una ventana en la que debemos elegir entre

crear un nuevo problema (File > New Problem) o leer uno ya creado (File > Load Problem). Las extensiones de los ficheros con los modelos las pone el programa por defecto, por lo tanto solamente debemos preocuparnos del nombre, que no deberá tener más de 8 caracteres.

Todos los módulos del programa tienen en común los siguientes menús desplegables:

- **File:** incluye las opciones típicas de este tipo de menús en Windows, es decir, permite crear y salvar ficheros con nuevos problemas, leer otros ya existentes o imprimirlos.
- **Edit:** incluye las utilidades típicas para editar problemas, copiar, pegar, cortar o deshacer cambios. También permite cambiar los nombres de los problemas, las variables, y las restricciones. Facilita la eliminación o adición de variables y/o restricciones, y permite cambiar el sentido de la optimización.
- **Format:** incluye las opciones necesarias para cambiar la apariencia de las ventanas, colores, fuentes, alineación, anchura de celdas, etc.
- **Solve and Analyze:** esta opción incluye al menos dos comandos, uno para resolver el problema y otro para resolverlo siguiendo los pasos del algoritmo.
- **Results:** incluye las opciones para ver las soluciones del problema y realizar si procede distintos análisis de la misma.
- **Utilities:** este menú permite acceder a una calculadora, a un reloj y a un editor de gráficas sencillas.
- **Window:** permite navegar por las distintas ventanas que van apareciendo al operar con el programa.
- **WinQSB:** incluye las opciones necesarias para acceder a otro módulo del programa.

- **Help:** permite acceder a la ayuda on-line sobre la utilización del programa o las técnicas utilizadas para resolver los distintos modelos. Proporciona información sobre cada una de las ventanas en la que nos encontremos.

Observación 1.1. Para nuestra investigación utilizaremos 2 módulos que son:

1. Programación lineal y entera (Linear and integer programming).
2. Programación por objetivos (Goal Programming).

1.4.1 Programación lineal (Linear and integer programming)

Una vez seleccionado el módulo con el cual se desee trabajar, aparecerá una ventana cuyas características iniciales serán iguales para todos los módulos del **WinQsb**.

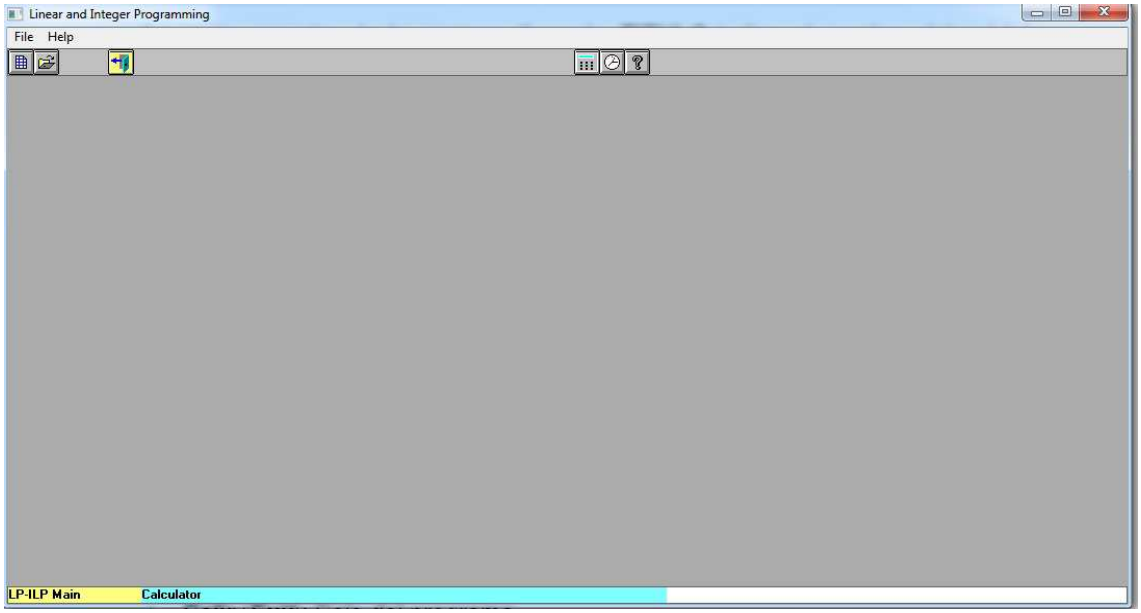
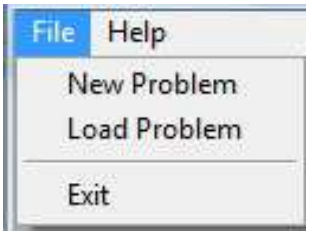


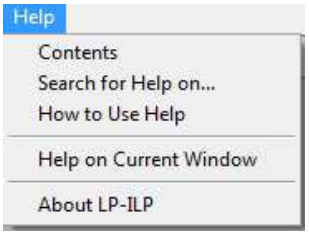
Figura 1.3: *Interfaz de Linear and integer programming*

Encontramos los menú Archivo (File) y Ayuda (Help). El menú archivo comprende las siguientes opciones:



- **Nuevo problema (New Problem):** Permite introducir un nuevo problema.
- **Abrir Problema (Load Problem):** Abre un problema que se ha guardado con anterioridad.
- **Salir (Exit):** Sale del programa.

El menú **Ayuda (Help)** lo conforman:



- **Contenido (Contents):** Contenido completo de la ayuda sobre el módulo seleccionado.
- **Buscar ayuda en... (Search for Help on...):** Búsqueda de ayuda mediante palabras claves.
- **Como usar la ayuda (How to Use Help):** Indicaciones (puede ser en español) de como se utiliza la ayuda para sacarle el máximo provecho.
- **Ayuda sobre la ventana actual (Help on Current Windows):** Interesante opción que muestra la ayuda solo sobre los elementos que aparecen actualmente en la ventana.

- **Acerca de... (About LP-ILP):** Muestra datos sobre la creación del programa e información sobre la licencia.

El programa también cuenta con una barra de herramientas que ayuda de forma significativa la selección de las opciones más usadas.

El primer botón permite la creación de un nuevo problema, el segundo abre un problema existente, mientras que el tercero, permite salir del programa.

En el centro de la venta se encuentra un espacio vacío el cual llamaremos ZONA DE TRABAJO, donde se procederá a alimentar con información al programa.

Creando un nuevo problema de programación lineal

La opción **Nuevo Problema (New Problem)** genera una plantilla en el cual se introducirán las características de nuestro problema:

A continuación se describirán cada una de las casillas de esta ventana:

- **Título del problema (Problem Title):** Se escribe el título con que identificamos el problema.
- **Número de variables (Number of Variables):** Se escribe la cantidad de variables con que cuenta el sistema en el modelo original.
- **Número de restricciones (Number of Constraints):** Se anotan la cantidad de restricciones con que cuenta el modelo (no se debe contar la restricción de no negatividad).

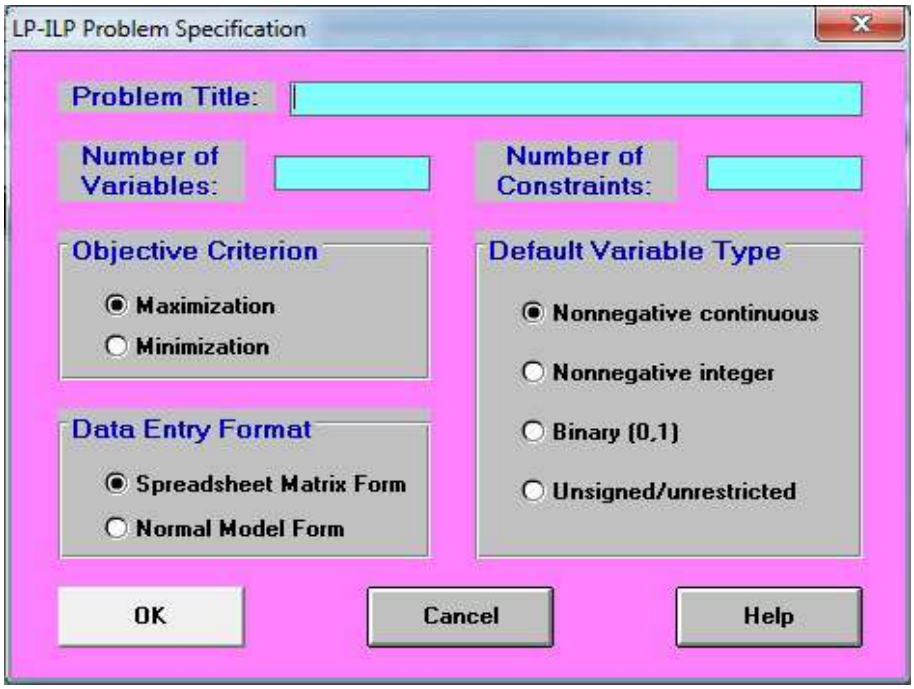


Figura 1.4: *Interfaz donde se ingresan los datos del problema*

- **Objetivo (Objective Criterion):** Los problemas de programación lineal y entera se clasifican en dos: problemas de Maximización (Maximization) y Minimización (Minimization).

- **Formato de entrada de datos (Data Entry Format):** Permite elegir entre dos plantillas distintas para introducir los datos del modelo. La primera alternativa se asemeja a una hoja de calcula, mientras que la segunda, es una plantilla diseñada especialmente para este fin.

- **Tipo de variable (Default Variable Type):** En esta parte se indica las características del modelo:

  - **Continuas no negativas (Nonnegative continuous):** Indica que el modelo lo componen variables continuas no negativas (iguales o mayores a cero).
  - **Enteras no negativas (Nonnegative Integer):** Variables enteras no negativas.
  - **Binarias (Binary):** Variables cuyo valor solo serán 0 o 1.

- **Sin asignar / Irrestrictas (Unsigned/unrestricted):** Variables irrestrictas.

Utilizando WinQsb

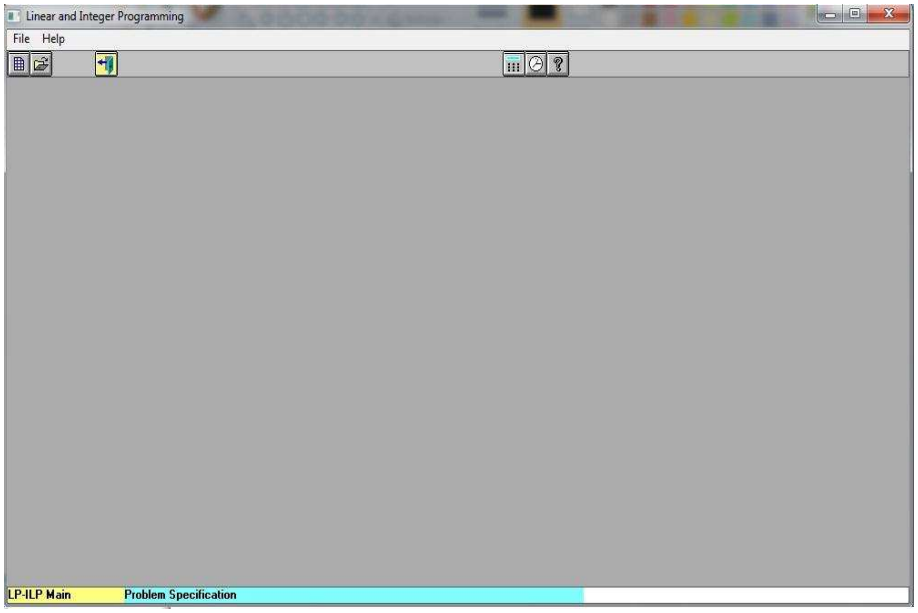
Ejemplo 1.8.

$$\begin{array}{lrl} \text{Maximizar} & 3x_1 + 5x_2 & \\ \text{Sujeta a} & x_1 & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ & x_1,\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Solución.

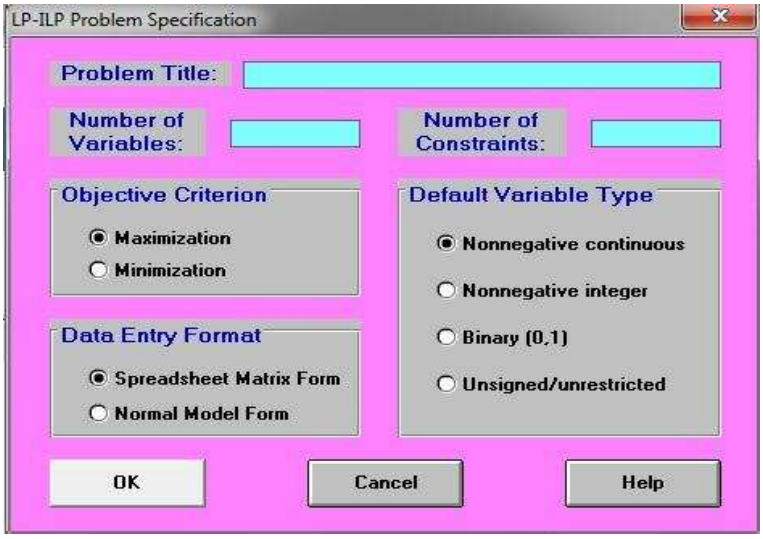
Paso 1:

Seleccionar el paquete **Linear and Integer Programming.**



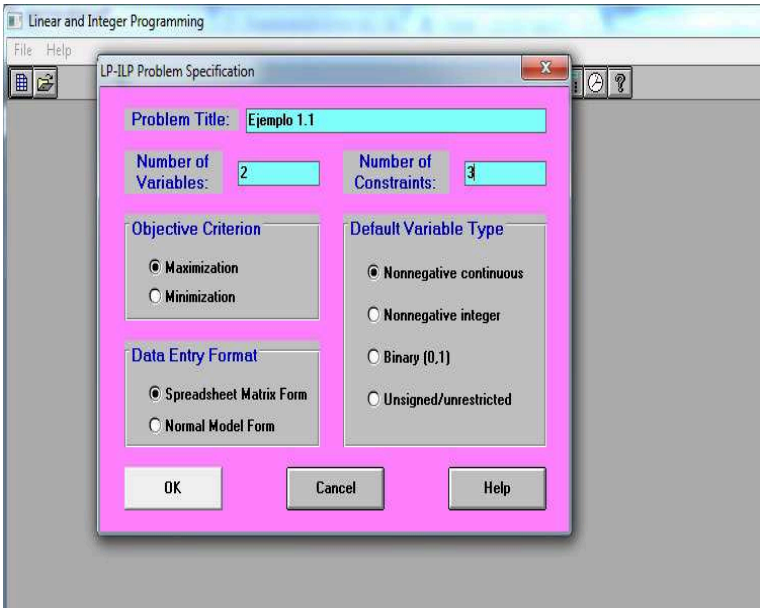
Paso 2:

Click en **File, New Problem**



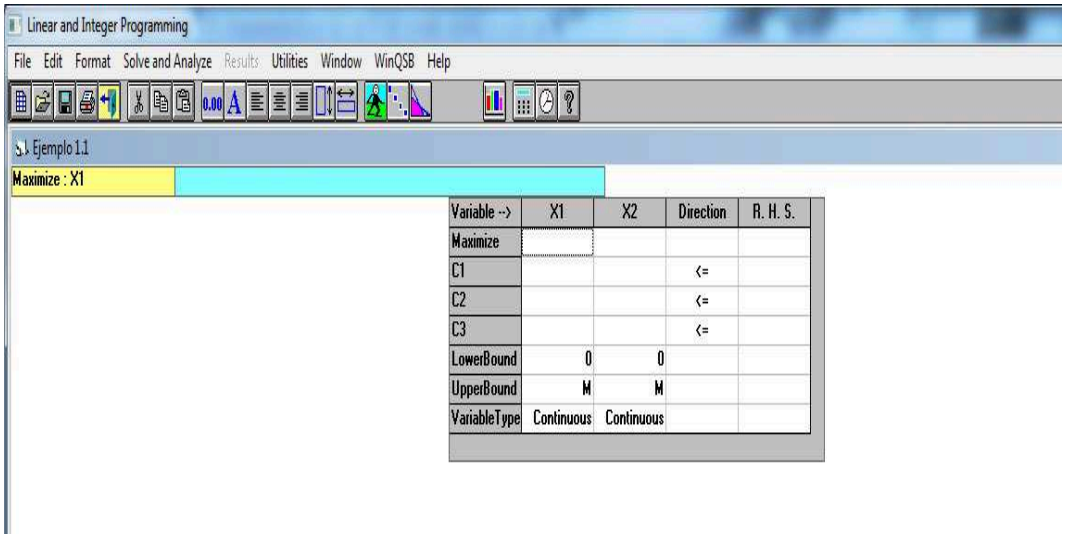
Paso 3:

Llenar el cuadro anterior como se sigue y dar **OK**



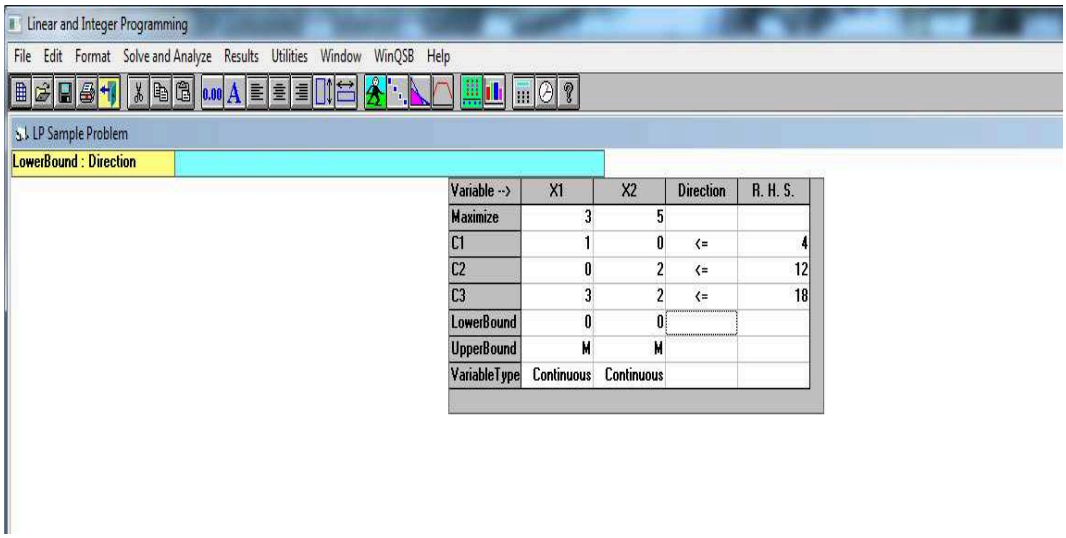
Paso 4:

Se abre la siguiente ventana



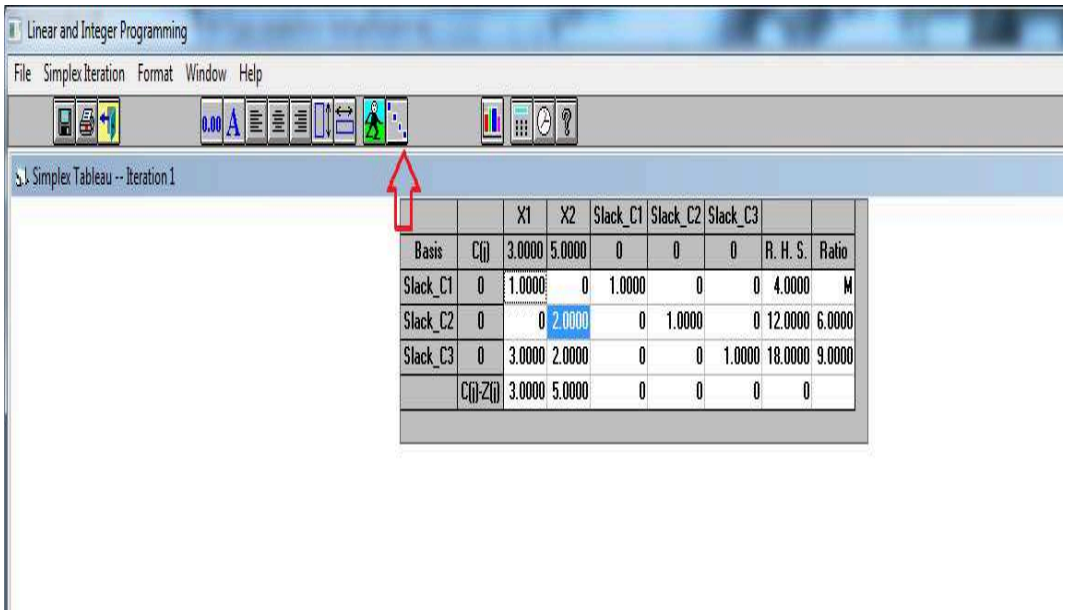
Paso 5:

Ingresar los datos del problema

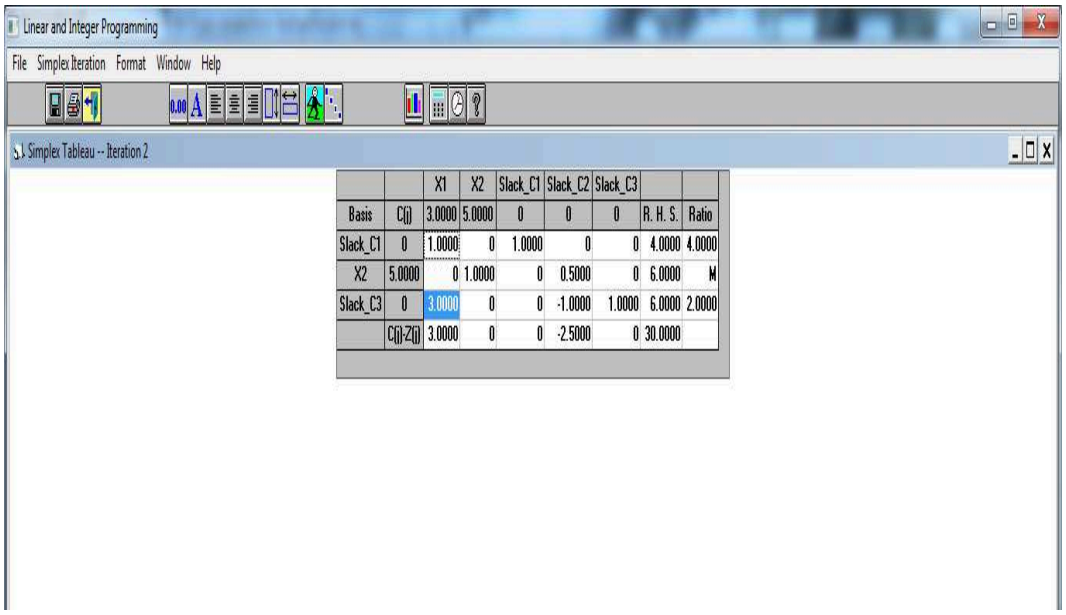


Paso 6:

Iterar hasta obtener el resultado final



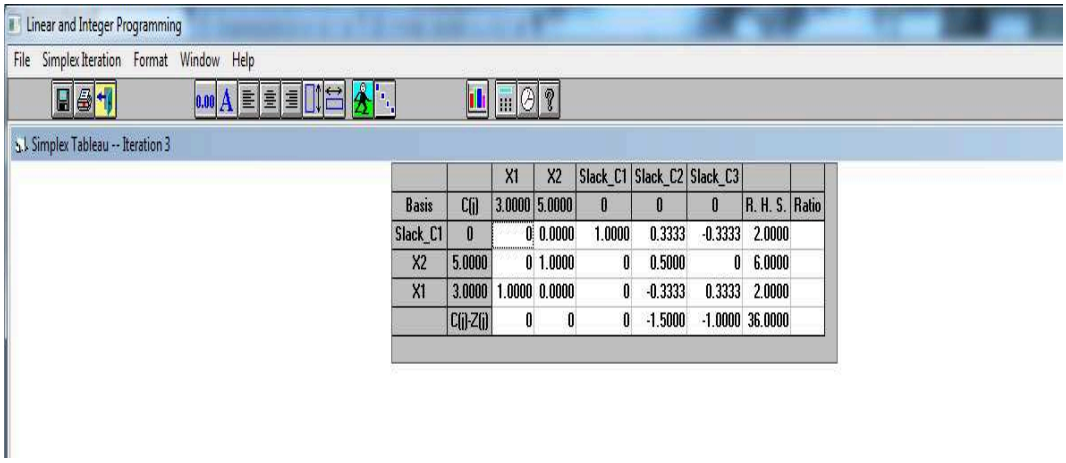
		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	3.0000	5.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	1.0000	0	1.0000	0	0	4.0000	M
Slack_C2	0	0	2.0000	0	1.0000	0	12.0000	6.0000
Slack_C3	0	3.0000	2.0000	0	0	1.0000	18.0000	9.0000
	C(j)-Z(j)	3.0000	5.0000	0	0	0	0	



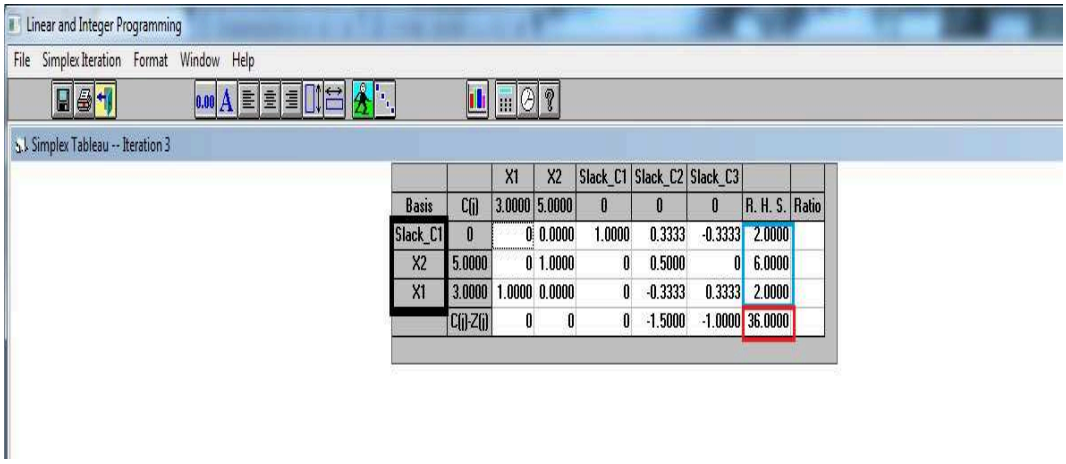
		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	3.0000	5.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	1.0000	0	1.0000	0	0	4.0000	4.0000
X2	5.0000	0	1.0000	0	0.5000	0	6.0000	M
Slack_C3	0	3.0000	0	0	-1.0000	1.0000	6.0000	2.0000
	C(j)-Z(j)	3.0000	0	0	-2.5000	0	30.0000	

Paso 7:

Analizando el resultado final



		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	3.0000	5.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	0	0.0000	1.0000	0.3333	-0.3333	2.0000	
X2	5.0000	0	1.0000	0	0.5000	0	6.0000	
X1	3.0000	1.0000	0.0000	0	-0.3333	0.3333	2.0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	0	-1.5000	-1.0000	36.0000	



		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	3.0000	5.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	0	0.0000	1.0000	0.3333	-0.3333	2.0000	
X2	5.0000	0	1.0000	0	0.5000	0	6.0000	
X1	3.0000	1.0000	0.0000	0	-0.3333	0.3333	2.0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	0	-1.5000	-1.0000	36.0000	

Luego la solución óptima esta dado por:

$$
\begin{aligned}
z &= 36.0000 \\
x_1 &= 2.0000 \\
x_2 &= 6.0000 \\
Slack\_C1 &= 2.0000 \\
Slack\_C2 &= 0.0000 \\
Slack\_C3 &= 0.0000
\end{aligned}
$$

1.4.2 Programación por objetivos (Goal Programming)

Fue inicialmente introducida por Charnes y Cooper en los años 50. Desarrollada en los años 70 por Ljiri, Lee, Ignizio y Romero, es actualmente uno de los enfoques multicriterio que más se utilizan.

En principio fue dirigida a resolver problemas industriales, sin embargo posteriormente se ha extendido a muchos otros campos como la economía, agricultura, recursos ambientales, recursos pesqueros, etc. Resulta de gran interés, sobre todo, en problemas complejos de gran tamaño.

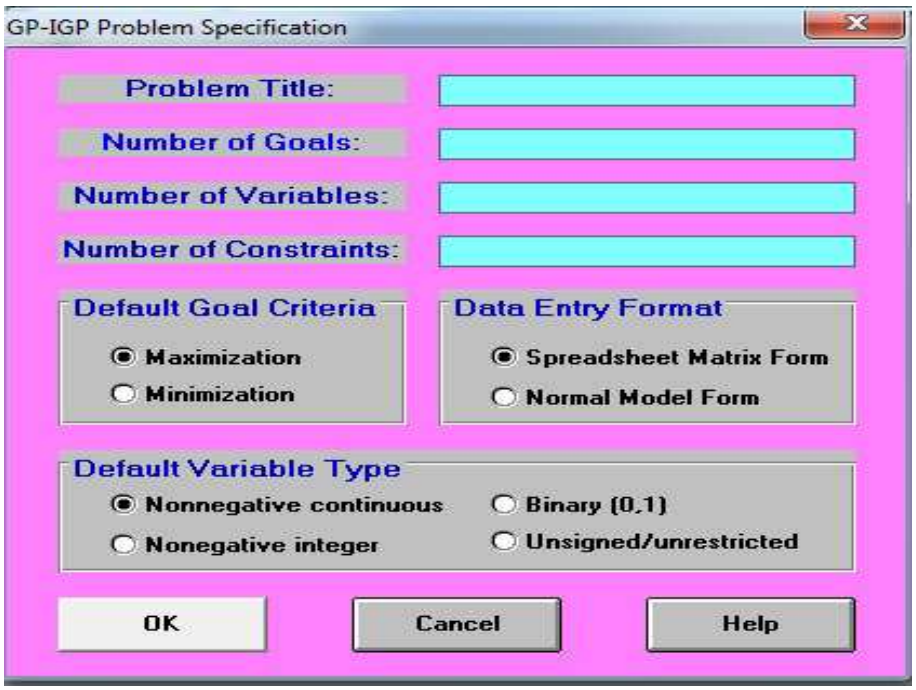


Figura 1.5: *Interfaz donde se ingresan los datos del problema multicriterio*

- **Título del problema (Problem Title):** Se escribe el título con que identificamos el problema.

- **Número de Objetivos (Number of Goals):** Se escribe la cantidad funciones objetivos del problema.

- **Número de variables (Number of Variables):** Se escribe la cantidad de variables con que cuenta el sistema en el modelo original.

- **Número de restricciones (Number of Constraints):** Se anotan la cantidad de restricciones con que cuenta el modelo (no se debe contar la restricción de no negatividad).

- **Multi criterio (Default Goal Criterion):** Los problemas de programación Multicriterio se clasifican en dos: problemas de Maximización (Maximization) y Minimización (Minimization).

- **Formato de entrada de datos (Data Entry Format):** Permite elegir entre dos plantillas distintas para introducir los datos del modelo. La primera alternativa se asemeja a una hoja de calcula, mientras que la segunda, es una plantilla diseñada especialmente para este fin.

- **Tipo de variable (Default Variable Type):** En esta parte se indica las características del modelo:

  - **Continuas no negativas (Nonnegative continuous):** Indica que el modelo lo componen variables continuas no negativas (iguales o mayores a cero).
  - **Enteras no negativas (Nonnegative Integer):** Variables enteras no negativas.
  - **Binarias (Binary):** Variables cuyo valor solo serán 0 o 1.
  - **Sin asignar / Irrestrictas (Unsigned/unrestricted):** Variables irrestrictas.

Capítulo 2:

El método simplex en la optimización multicriterio

2.1 Programación lineal multicriterio

Se plantea mediante un modelo matemático donde la función objetivo toma valores en $\Re^p$ considerando además las restricciones y las variables del problema de programación lineal, se obtiene un problema de programación lineal con p objetivos.

$$\begin{array}{ll} \text{Max(Min)} & \text{z}=[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)] \\ \text{s.a} & \\ & x \in X \end{array}$$

z consta de p componentes, donde cada una de ellas consta de una función objetivo definida:

$$f_k = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 \cdots + c_{kn}x_n, \quad k = 1, \ldots, p.$$

El conjunto de restricciones está conformado sobre un espacio vectorial de dimensión n.

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \ddots & & = \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Este problema es el modelo general de un problema de programación lineal multicriterio (PPLMC) y se formula de la siguiente manera.

Definición 2.1. Problema de Programación Lineal Multicriterio (PPLMC)

$$\begin{aligned} \text{Max(Min)} \quad & \text{z}=[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)] \\ \text{s.a} \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Función Objetivo	: z es un vector con p funciones objetivo.
Restricciones	: A es una matriz de m renglones y n columnas.
Vector de términos independientes	: b es un vector de m filas.
Variables de decisión	: x es un vector de n columnas no negativas.

Definición 2.2. Espacio de decisión

El espacio de decisión de un problema de programación multicriterio (2.1) se define como

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$$

Definición 2.3. Espacio objetivo

El espacio objetivo de un problema de programación multicriterio (2.1) se define como

$$Y = \{(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x)) :\ x \in X\} = \{cx : x \in X\}$$

Teorema 2.1. *El espacio de decisión X y el espacio objetivo Y de un PPLMC, son convexos y cerrados*

Demostración. De acuerdo a las definiciones (2.2) y (2.3) se concluye que son convexos y cerrados □

Definición 2.4. Punto ideal

El punto ideal de un PPLMC (2.1) es un punto fuera del espacio objetivo; $H = f_1^I(x), f_2^I(x), \cdots, f_p^I(x)$ con $i =, \cdots, p$ es el valor óptimo de cada una de las funciones objetivo del problema, es decir la solución en cada uno de los objetivos alcanza su máximo o mínimo.

Definición 2.5. Solución actible

Sea x en el espacio X, entonces es x solución factible del PPLMC (2.1) si satisface $Ax = b, \quad x \geq 0$.

2.2 Método de ponderaciones

En el método de ponderaciones cada objetivo se multiplica por un peso o factor no negativo, procediendo después agregar todos los objetivos ponderados en una única función objetivo. La optimización de dicha función ponderada y agregada genera un elemento del conjunto eficiente. Por medio de la parametrización de los pesos asociados a los objetivos, se va aproximando el conjunto de soluciones eficientes; es así como el método de ponderaciones se formula de la siguiente manera:

Dadas las funciones objetivo en forma individual.

$$\text{máx } \ z_1 = c_1 x, \quad \text{máx } \ z_2 = c_2 x, \quad \cdots, \quad \text{máx } \ z_p = c_p x,$$

Se consideran ponderaciones para cada una de las funciones objetivo.

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \cdots, \lambda_p$$

Es decir, se debe considerar de forma sistemática una serie de conjuntos de pesos positivos de cada objetivo que equivale a tomar los pesos con el vector:

$$\lambda = (1, 0, \cdots, 0), \ (0, 1, \cdots, 0), \ \cdots, \ (0, 0, \cdots, 1)$$

Por tanto se obtiene una función objetivo compuesta, la cual está determinada por la suma del peso de las funciones objetivo.

$$\text{máx } z = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k c_r x$$

Definición 2.6. El problema lineal por $LP(\lambda)$ se denota:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \\ \text{s.a} \quad & \\ & Ax = \text{b} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde cada $\lambda_k \geq 0$ para z_k es la importancia (peso) de la k-ésima función objetivo con respecto del resto de las otras funciones. Este método garantiza la obtención de soluciones eficientes si los pesos son no negativos.

Teorema 2.2. *Dado un problema de programación multiobjetivo:*

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)) \\ s.a \quad & \\ & x \in X \end{aligned}$$

y su correspondiente problema escalarizado:

$$P_\lambda \begin{cases} \text{máx} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x) \\ s.a \\ \qquad x \in X \end{cases}$$

entonces:

i) Si todas las ponderaciones asignadas λ_i son estrictamente mayores que cero, la solución obtenida es propiamente eficiente.

ii) Si alguna es nula, la solución es débilmente eficiente.

iii) Si con alguna ponderación nula la solución del problema es única, entonces ésta es eficiente.

Demostración.

Veamos la eficiencia razonando por reducción al absurdo. Supongamos que x^* solución

del problema ponderado con alguna ponderación nula o ninguna, (el razonamiento es análogo en ambos casos) no es eficiente, entonces existirá un vector factible x tal que:

$$\begin{cases} f_i(x) \geq f_i(x^*) & i = 1, \ldots, p \\ f_j(x) > f_j(x^*) & \text{para algún } j \in \{1, \ldots, p\} \end{cases}$$

en el caso de eficiencia se tiene:

$$f_i(x) > f_i(x^*) \quad i = 1, \ldots, p$$

en el de eficiencia débil. Como las ponderaciones asociadas son estrictamente positivas o alguna nula, al multiplicar y sumar, en ambos casos tendríamos que:

$$\sum_{i=1}^{p} f_i(x) \geq \sum_{i=1}^{p} f_i(x^*)$$

lo cual contradice que x^* sea la solución de P_λ. □

Nota 2.1. Hay que tomar en cuenta, que si el decisor es razonablemente certero acerca de escoger los pesos específicos, la optimización de la función objetivo compuesta (con la combinación de pesos) resultará la combinación deseada. No obstante comúnmente es difícil precisar los pesos específicos, ya que en los modelos reales existe un gran número de funciones objetivo que requerirán muchas combinaciones de pesos a examinar. Por tanto se desearía la cooperación de aquel que toma la decisión y el analista para resolver los problemas, en la cual la función objetivo compuesta es construida usando combinaciones de pesos que parecen al decisor razonables.

2.2.1 Método de promedios ponderados

Lema 2.1. Una solución factible $x^0 \in X$ es eficiente si y solo si el programa lineal

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & u^T b + w^T c x^0 \\ \text{s.a} \quad & \\ & u^T A + w^T C \quad \geq 0 \\ & w \quad \geq e \\ & u \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $e = (1, 1, \ldots, 1)$, tiene una solución óptima $(\widehat{u}, \widehat{w})$ con $\widehat{u}^T b + \widehat{w}^T c x^0 = 0$

Nota 2.2. Las soluciones óptimas de promedios ponderados los problemas son eficientes.

Teorema 2.3. *Una solución factible $x^0 \in X$ es una solución eficiente PPLMC si y solo si existe un $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ tal que*

$$\lambda^T c x^0 \leq \lambda^T c x \tag{2.2}$$

para todo $x \in X$

Demostración.

Sea $x^0 \in X_E$ por lema (2.1) tiene una solución óptima $(\widehat{u}, \widehat{w})$ tal que

$$\widehat{u}^T b = -\widehat{w}^T c x^0 \tag{2.3}$$

$\widehat{u}$ es también una solución óptima del

$$\text{mín} = \{u^T b : \ u^T A \geq -\widehat{T} c\} \tag{2.4}$$

la cual en (2.1) se tiene que $w = \widehat{w}$ son fijos.

$\Rightarrow$ Hay una solución óptima del dual de (2.4)

$$\text{máx} = \{-\widehat{T} c x : \ Ax = b, \ x \geq 0\} \tag{2.5}$$

Por la dualidad débil $\widehat{u}^T b \geq -\widehat{w}^T cx$ para todas las soluciones factibles de u en (2.4), y para todas las soluciones factibles de x en (2.5).

Sabemos que $\widehat{u}^T b = -\widehat{w}^T cx^0$ para (2.3)

$\Rightarrow x^0$ es una solución óptima de (2.5).

Note que la ecuación (2.5) es equivalente a

$$\text{mín} = \{\widehat{T}cx : \ Ax = b, \ x \geq 0\}$$

con $\widehat{w} \geq e > 0$ de las restricciones en (2.1) $\square$

El método de promedios ponderados es un caso particular del método de ponderaciones, la diferencia que existe es $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$. Este método obtiene una solución factible que maximiza la suma ponderada de todos los objetivos.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \\ \text{s.a} \quad & \\ & Ax = \text{b} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$ para $\lambda \geq 0$ y donde z_k es la importancia de la k-ésima función objetivo con respecto del resto.

Ejemplo 2.1. Dado un problema de programación lineal con tres funciones objetivo.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad z_1 &= -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{máx} \quad z_2 &= x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \text{máx} \quad z_3 &= x_1 + x_3 \\ \text{s.a} \quad & \\ & 2x_1 + 8x_2 - x_3 \geq 20 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 50 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución.

Dado los pesos λ_1 =0.2, λ_2 =0.3 y λ_3 =0.5.

Posteriormente, estas combinaciones de peso se multiplican a cada una de las funciones objetivo respectivamente para obtener la función objetivo ponderada. De esta manera se obtiene un problema $LP(\lambda)$, el cual es ahora un problema de programación lineal con un objetivo.

$$\begin{aligned} z_p &= (0.2)(-x_1 + x_2 + 2x_3) + (0.3)(x_1 + 5x_2 + 2x_3) + (0.5)(x_1 + x_3) \\ &= -0.2x_1 + 0.3x_1 + 0.5x_1 + 0.2x_2 + 1.5x_2 + 0.4x_3 + 0.6x_3 + 0.5x_3 \\ z_p &= 0.6x_1 + 1.7x_2 + 1.5x_3 \end{aligned}$$

Por tanto el problema de programación lineal $LP(\lambda)$ es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad z_p &= 0.6x_1 + 1.7x_2 + 1.5x_3 \\ \text{s.a} \quad & \\ & 2x_1 + 8x_2 - x_3 \geq 20 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 50 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando el método simplex se lleva a su forma estandar

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad z_p &= 0.6x_1 + 1.7x_2 + 1.5x_3 + 0h_1 + 0h_2 + 0h_3 + 0s_1 \\ \text{s.a} \quad & \\ & 2x_1 + 8x_2 - x_3 - h_1 + s_1 = 20 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 + h_2 = 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + h_3 = 50 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, h_3, s_1 \geq 0 \end{aligned}$$

	z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	LD
z	1	-0.6	-1.7	-1.5	0	0	0	0	0
s_1	0	2	8	-1	-1	0	0	1	20
h_2	0	-1	1	1	0	1	0	0	30
h_3	0	2	3	1	0	0	1	0	50

entra

		z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	LD	
	z	1	-0.6	-1.7	-1.5	0	0	0	0	0	
sale	s_1	0	2	8	-1	-1	0	0	1	20	fila pivote
	h_2	0	-1	1	1	0	1	0	0	30	
	h_3	0	2	3	1	0	0	1	0	50	

entra

		z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	LD	
	z	1	-0.175	0	-1.7125	-0.2125	0	0	-0.2125	4.25	
	x_2	0	0.25	1	-0.125	-0.125	0	0	0.125	2.5	
sale	h_2	0	-1.25	0	1.125	0.125	1	0	-0.125	27.5	fila pivote
	h_3	0	1.25	0	1.375	0.375	0	1	-0.375	42.5	

entra

		z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	LD	
	z	1	-2.0778	0	0	-0.0222	1.5222	0	0.0212	46.1111	
	x_2	0	0.1111	1	0	-0.1111	0.1111	0	0.1111	5.56	
	x_3	0	-1.1111	0	1	0.1111	0.8889	0	-0.0111	24.4	
sale	h_3	0	2.7778	0	0	0.2222	-1.2222	1	-0.2222	8.8889	fila pivote

	z	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	LD
z	1	0	0	0	0.1440	0.6080	0.748	0.1440	52.76
x_2	0	0	1	0	-0.12	0.16	-0.04	0.12	5.2
x_3	0	0	0	1	0.2	0.4	0.4	-0.2	28
x_1	0	1	0	0	0.08	-0.44	0.36	-0.08	3.2

Donde:

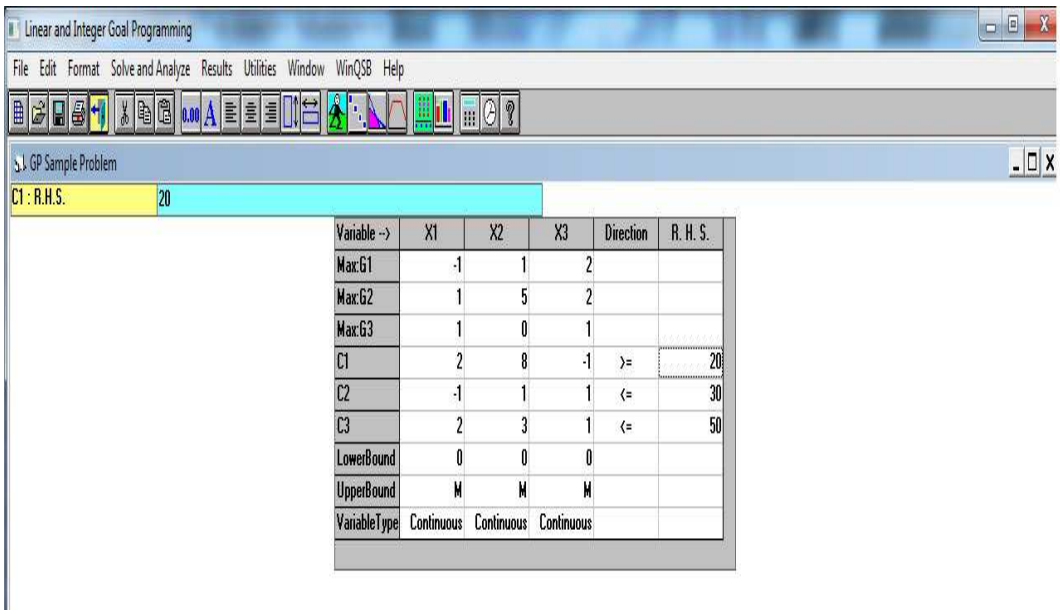
$$z_p = 52.76, \quad x_1 = 3.2, \quad x_2 = 5.2, \quad x_3 = 28$$

Entonces se evalúan cada uno de los valores de las variables obtenidas en la solución óptima, en cada una de las funciones objetivo del problema original para así obtener el valor del resto de las funciones objetivo.

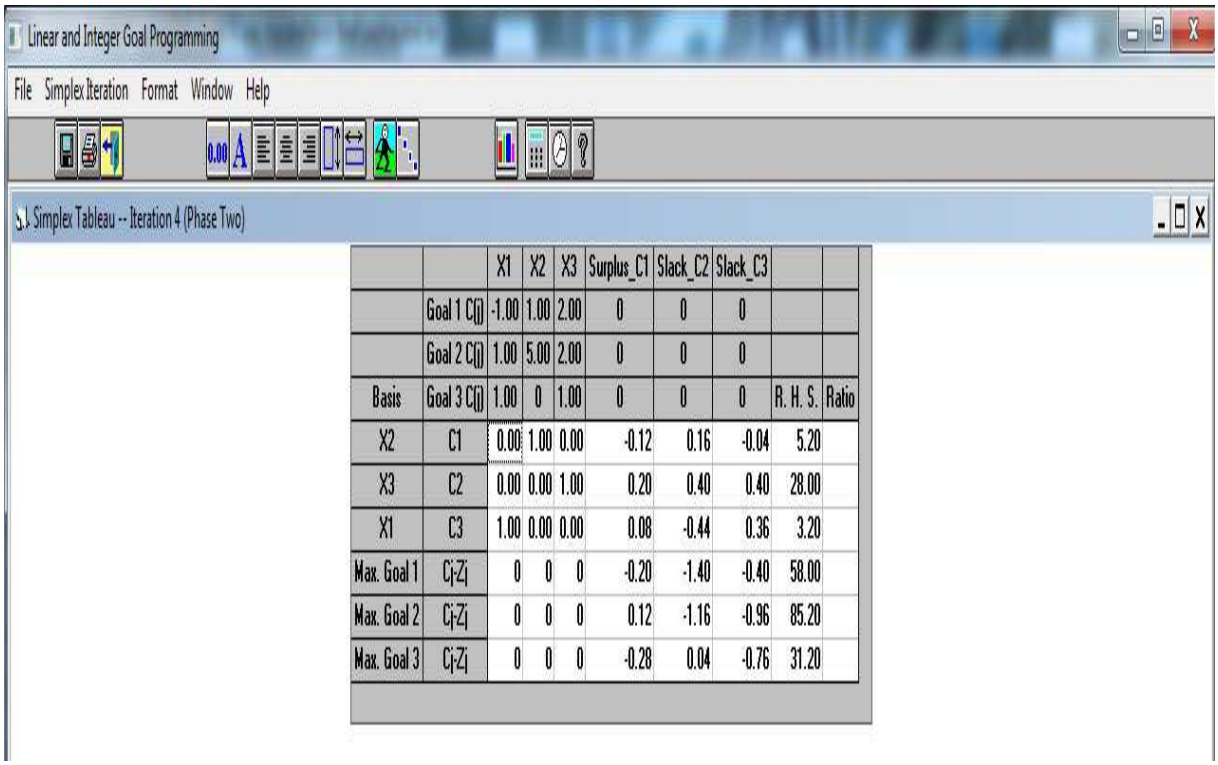
$$z_1 = 58, \quad z_2 = 85.2, \quad z_3 = 31.2$$

Utilizando WinQsb

1. Ingresar los datos tal como esta en el problema.



2. Después de 4 iteraciones se obtiene:



		X1	X2	X3	Surplus_C1	Slack_C2	Slack_C3		
	Goal 1 C[j]	-1.00	1.00	2.00	0	0	0		
	Goal 2 C[j]	1.00	5.00	2.00	0	0	0		
Basis	Goal 3 C[j]	1.00	0	1.00	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	C1	0.00	1.00	0.00	-0.12	0.16	-0.04	5.20	
X3	C2	0.00	0.00	1.00	0.20	0.40	0.40	28.00	
X1	C3	1.00	0.00	0.00	0.08	-0.44	0.36	3.20	
Max. Goal 1	Cj-Zj	0	0	0	-0.20	-1.40	-0.40	58.00	
Max. Goal 2	Cj-Zj	0	0	0	0.12	-1.16	-0.96	85.20	
Max. Goal 3	Cj-Zj	0	0	0	-0.28	0.04	-0.76	31.20	

Se puede observar que

$$x_1 = 3.2, \quad x_2 = 5.2, \quad x_3 = 28$$

$$\Rightarrow z_1 = 58, \quad z_2 = 85.2, \quad z_3 = 31.2$$

2.3 Método Simplex Multicriterio

Este método es un método exacto y el único que garantiza la generación de todos los puntos extremos eficientes. A diferencia de los otros métodos que transforman un PPLMC a un problema con un objetivo, este trabaja directamente con todos los objetivos para determinar las soluciones eficientes; debido a que consiste en encontrar todos los puntos extremos eficientes desplazándose de un punto extremo a otro adyacente.

Considere la teoría con la que se fundamenta el método simplex para problemas con un sólo objetivo y los nuevos conceptos de la programación lineal multiobjetivo:

Definición 2.7.

- Un punto extremo de X eficiente, es llamado punto extremo eficiente.
- Una base B de un PPLMO es llamada base eficiente si existe un $\lambda \in \mathbf{R}^p_{\geq}$ tal que B es una base óptima de programación lineal.
- Sea B una base y $N = \{\text{n elementos menos } B\}$. Sea C_B y C_N columnas de la matriz C indexadas por B y N respectivamente. Por tanto A_B, A_n, es la matriz de las variables básicas y no básicas x_B y x_N respectivamente. Entonces $C = C - C_B A_B^{-1} A$ es llamada la matriz de costos reducidos con respecto a B donde se definen para C_B y C_N.
- Sea B una base eficiente y x_j una variable no básica eficiente. Un pivote factible de B con x_j como la variable entrante es llamada un pivote eficiente.

Por lo anterior, si B es una base entonces (x_B, x_N) con $x_N = 0$ y $x_B = A_B^{-1} b$ es una solución básica y también es una solución básica factible $x_B \geq 0$. Una solución básica factible es un punto extremo de X.

Este método es una extensión del algoritmo simplex con un objetivo, ya que utiliza la misma transformación de pivote para moverse de un punto extremo eficiente a otro adyacente. Los métodos, que llevan a cabo tres etapas, son varios; sin embargo, el método de Zeleny, denominado método simplex multiobjetivo, lleva a cabo las tres etapas en forma conjunta.
En general el método simplex multiobjetivo se basa en tres fases:

- **Fase 1.** Se determina una solución inicial básica factible, como en el caso con un objetivo, introduciendo variables de holgura y/o artificiales, obteniendo así un punto extremo inicial factible.

- **Fase 2.** Se determina un punto extremo eficiente, cuya existencia está garantizada. Si la región factible del problema es no vacía y todas las funciones objetivo están acotadas, entonces existe al menos un punto extremo.

- **Fase 3.** Esta fase consiste en determinar todos los puntos eficientes; se lleva a cabo partiendo de la solución eficiente de la etapa anterior y generando a partir de ellas los puntos extremos eficientes restantes.

Ejemplo 2.2. Dado un problema de programación lineal con tres funciones objetivo.

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad z_1 &= -x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{máx} \quad z_2 &= x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\
\text{máx} \quad z_3 &= x_1 + x_3 \\
\text{s.a} \quad & \\
& 2x_1 + 8x_2 - x_3 \geq 20 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 50 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Solución.

Utilizando el método simplex se lleva a su forma estandar

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad z_1 &= -x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{máx} \quad z_2 &= x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\
\text{máx} \quad z_3 &= x_1 + x_3 \\
\text{s.a} \quad & \\
& 2x_1 + 8x_2 - x_3 - h_1 + s_1 = 20 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 + h_2 = 30 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 + h_3 = 50 \\
& x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, h_3, s_1 \geq 0
\end{aligned}$$

Tabla 2.1: Tabla inicial

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	L.D.
z_1	1	-1	-2	0	0	0	0	0
z_2	-1	-5	-2	0	0	0	0	0
z_3	-1	0	-1	0	0	0	0	0
s_1	2	8	-1	-1	0	0	1	20
h_2	-1	1	1	0	1	0	0	30
h_3	2	3	1	0	0	1	0	50

Iteración 1

entra

		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	L.D.	
	z_1	1	-1	-2	0	0	0	0	0	
	z_2	-1	-5	-2	0	0	0	0	0	
	z_3	-1	0	-1	0	0	0	0	0	
sale	s_1	2	8	-1	-1	0	0	1	20	2.5
	h_2	-1	1	1	0	1	0	0	30	30.00
	h_3	2	3	1	0	0	1	0	50	16.67

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	L.D.
z_1	0.75	0	-2.125	-0.125	0	0	0.13	2.50
z_2	0.25	0	-2.625	-0.625	0	0	0.63	12.50
z_3	-1	0	-1	0	0	0	0	0
x_2	0.25	1	-0.13	-0.13	0	0	0.13	2.50
h_2	-1.25	0	1.13	0.13	1	0	-0.13	27.50
h_3	1.25	0	1.38	0.38	0	1	-0.38	42.50

Iteración 2

		x_1	x_2	entra x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	L.D.	
	z_1	0.75	0	-2.125	-0.125	0	0	0.13	2.50	
	z_2	0.25	0	-2.625	-0.625	0	0	0.63	12.50	
	z_3	-1	0	-1	0	0	0	0	0	
	x_2	0.25	1	-0.13	-0.13	0	0	0.13	2.50	
sale	h_2	-1.25	0	1.13	0.13	1	0	-0.13	27.50	24.44
	h_3	1.25	0	1.38	0.38	0	1	-0.38	42.50	30.91

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	L.D.
z_1	-1.61	0	0	0.11	0	0	-0.11	54.44
z_2	-2.67	0	0	-0.33	0	0	0.33	76.67
z_3	-2.11	0	0	0.11	0	0	-0.11	24.44
x_2	0.11	1	0	-0.11	0	0	0.11	5.56
x_3	-1.11	0	1	0.11	1	0	-0.11	24.44
h_3	2.78	0	0	0.22	0	1	-0.22	8.89

Iteración 3

		entra x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	L.D.	
	z_1	-1.61	0	0	0.11	0	0	-0.11	54.44	
	z_2	-2.67	0	0	-0.33	0	0	0.33	76.67	
	z_3	-2.11	0	0	0.11	0	0	-0.11	24.44	
	x_2	0.11	1	0	-0.11	0	0	0.11	5.56	50
	x_3	-1.11	0	1	0.11	1	0	-0.11	24.44	
sale	h_3	2.78	0	0	0.22	0	1	-0.22	8.89	3.2

Tabla 2.2: Tabla óptima

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	s_1	L.D.
z_1	0	0	0	0.24	0	0.58	0.02	58
z_2	0	0	0	-0.12	0	0.96	0.12	85.20
z_3	0	0	0	0.28	0	0.76	-0.28	31.20
x_2	0	1	0	-0.12	0	-0.36	0.15	5.20
x_3	0	0	1	0.20	1	0.40	-0.51	28
x_1	1	0	0	0.08	0	0.36	-0.08	3.20

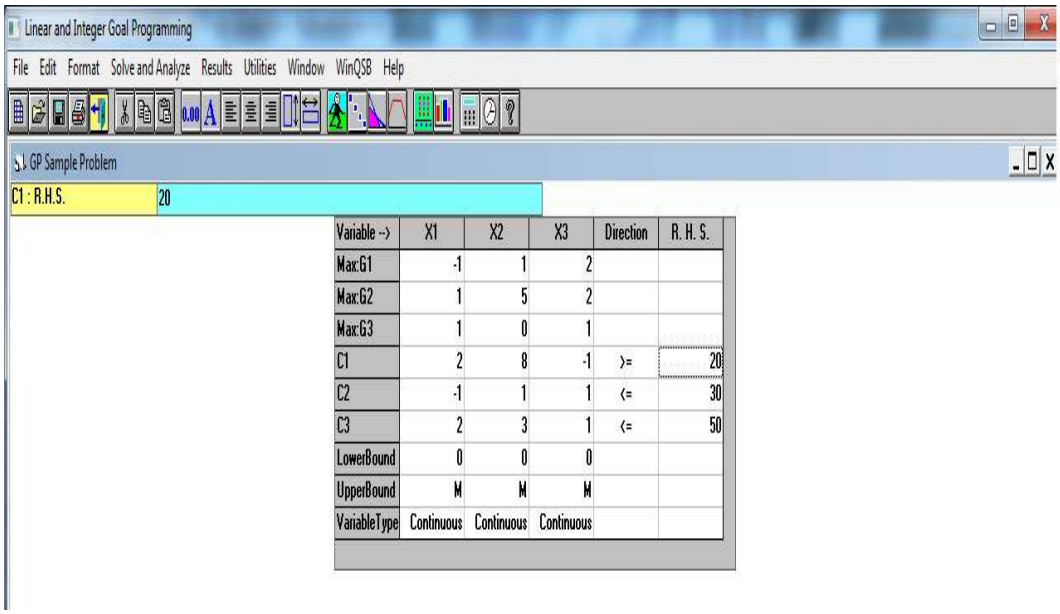
Donde:

$$x_1 = 3.2, \quad x_2 = 5.2, \quad x_3 = 28$$

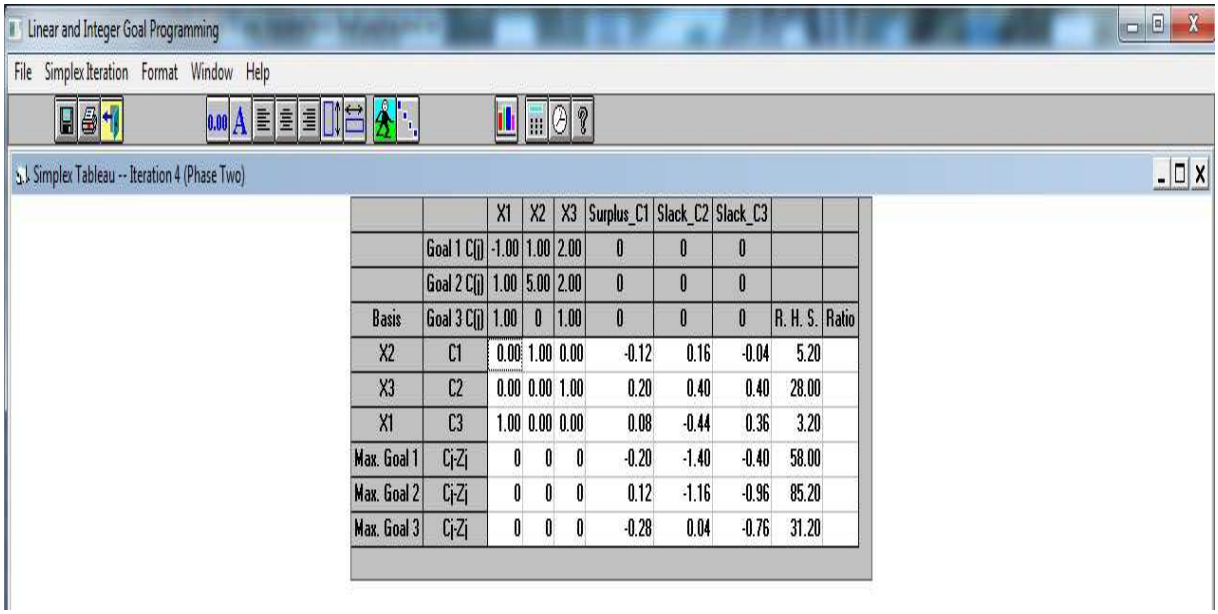
$$z_1 = 58, \quad z_2 = 85.2, \quad z_3 = 31.2$$

Utilizando WinQsb

1. Ingresar los datos tal como esta en el problema.



2. Después de 4 iteraciones se obtiene:



		X1	X2	X3	Surplus_C1	Slack_C2	Slack_C3		
	Goal 1 C[j]	-1.00	1.00	2.00	0	0	0		
	Goal 2 C[j]	1.00	5.00	2.00	0	0	0		
Basis	Goal 3 C[j]	1.00	0	1.00	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	C1	0.00	1.00	0.00	-0.12	0.16	-0.04	5.20	
X3	C2	0.00	0.00	1.00	0.20	0.40	0.40	28.00	
X1	C3	1.00	0.00	0.00	0.08	-0.44	0.36	3.20	
Max. Goal 1	Cj-Zj	0	0	0	-0.20	-1.40	-0.40	58.00	
Max. Goal 2	Cj-Zj	0	0	0	0.12	-1.16	-0.96	85.20	
Max. Goal 3	Cj-Zj	0	0	0	-0.28	0.04	-0.76	31.20	

Se puede observar que

$$x_1 = 3.2, \quad x_2 = 5.2, \quad x_3 = 28$$

$$\Rightarrow z_1 = 58, \quad z_2 = 85.2, \quad z_3 = 31.2$$

Capítulo 3:

Aplicación del Método Simplex Multicriterio

3.1 Aplicación del método de promedios ponderados

Aplicación 1

Se requiere encontrar una dieta con once tipos de alimentos que reúna costos y la cantidad requerida de nutrientes de cada uno de los alimentos; e decir se desea minimizar el costo de la dieta pero cubriendo las necesidades nutritivas mínimas de la cantidad que proporciona el colesterol y los carbohidratos.

La dieta debe incluir requerimientos nutricionales que se deben considerar de acuerdo a los siguientes parámetros:

- Entre 1800 y 2200 calorías.
- No más de $65g$ de grasas.
- No más de $2400mg$ de sodio.
- Al menos $25g$ de fibra.

- Al menos $50g$ de proteínas.
- Al menos del 100 % deben ser consideradas de vitamina A y C, calcio y hierro.

Tabla 3.1: Alimentos a cosidera, nutrientes y costos

	Pasta	Jugo de Tomate	Sopa de Almeja	Carne término medio	Leche	Jugo de Naranja	Manzana	Papas fritas	Yogurt	Pan	Huevo
Calorías	300	60	220	259	110	132	55	152	160	110	78
Grasas	1g	0g	13g	16.3g	2.5g	0g	0.22g	9.8g	2.5g	1g	5.3g
Colesterol	0mg	0mg	5mg	89mg	10mg	0mg	0mg	0mg	10mg	0mg	212m
Sodio	1mg	650mg	790mg	95mg	120mg	5mg	1.1mg	168.4mg	75mg	160mg	62mg
Carbohidratos	63g	12g	19g	20g	12g	33.4g	14.6g	15g	20g	22g	0.6g
Fibra	3g	3g	2g	0g	0g	0g	2.5g	1.3g	0g	2g	0g
Proteinas	11g	2g	5g	26.1g	9g	0.5g	0.3g	2g	6g	4g	6.3g
Vitamina A	0 %	8 %	2 %	1 %	10 %	2 %	1 %	0 %	2 %	0 %	6 %
Vitamina C	0 %	30 %	2 %	0 %	0 %	62 %	8 %	15 %	2 %	0 %	0 %
Calcio	2 %	2 %	2 %	1 %	30 %	0 %	1 %	1 %	20 %	0 %	3 %
Hierro	20 %	15 %	8 %	17 %	0 %	2 %	1 %	3 %	2 %	10 %	3 %
Precio	\$19	\$14	\$30	\$60	\$13	\$11	\$10	\$17	\$12	\$14	\$18

solución

Planteamiento del modelo:

Las variables de decisión son:

$x_i =$ Cantidad de alimento del tipo i a considerar en la dieta $i = 1, \cdots, 11$.

Las restricciones del modelo son:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrcrl}
300x_1 & +60x_2 & +220x_3 & +259x_4 & +110x_5 & +132x_6 & +55x_7 & +152x_8 & +160x_9 & +110x_{10} & +78x_{11} & \geq & 1800 & \text{Cant. mín. de cal.} \\
300x_1 & +60x_2 & +220x_3 & +259x_4 & +110x_5 & +132x_6 & +55x_7 & +152x_8 & +160x_9 & +110x_{10} & +78x_{11} & \leq & 1800 & \text{Cant. máx. de cal.} \\
x_1 & & +13x_3 & +16.3x_4 & +2.5x_5 & & +0.22x_7 & +9.8x_8 & +2.5x_9 & +x_{10} & +5.3x_{11} & \leq & 65 & \text{Grasas} \\
x_1 & +650x_2 & +790x_3 & +95x_4 & +120x_5 & +5x_6 & +1.1x_7 & +168.4x_8 & +75x_9 & +160x_{10} & +62x_{11} & \leq & 2400 & \text{Sodio} \\
3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & & & & +2.5x_7 & +1.3x_8 & & +2x_{10} & & \geq & 25 & \text{Fibra} \\
11x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +26.1x_4 & +9x_5 & +0.5x_6 & +0.3x_7 & +2x_8 & +6x_9 & +4x_{10} & +6.3x_{11} & \geq & 50 & \text{Proteínas} \\
 & 8x_2 & +2x_3 & +x_4 & +10x_5 & +2x_6 & +x_7 & & +2x_9 & & +6x_{11} & \geq & 100 & \text{Vitamina A} \\
 & 30x_2 & +2x_3 & & & +62x_6 & +8x_7 & +15x_8 & +2x_9 & & & \geq & 100 & \text{Vitamina C} \\
2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & +30x_5 & & +x_7 & +x_8 & +20x_9 & & +3x_{11} & \geq & 100 & \text{Calcio} \\
20x_1 & +15x_2 & +8x_3 & +17x_4 & & +2x_6 & +x_7 & +3x_8 & +2x_9 & +10x_{10} & +3x_{11} & \geq & 100 & \text{Hierro} \\
 & & & & & & & & & & x_i & \geq & 0, & \text{con } i = 1, \cdots, 11
\end{array}
$$

El primer objetivo consiste en minimizar los costos de los alimentos, es así como la función objetivo es:

$$z_1 = 19x_1 \quad +14x_2 \quad +30x_3 \quad +60x_4 \quad +13x_5 \quad +11x_6 \quad +10x_7 \quad +17x_8 \quad +12x_9 \quad +14x_{10} \quad +18x_{11} \qquad \text{Costos}$$

El segundo objetivo es disminuir la cantidad de colesterol contenida en cada uno de los alimentos, la función se define:

$$z_2 = \quad 5x_3 \quad +89x_4 \quad +10x_5 \quad +10x_9 \quad +\ 212x_{11} \qquad \text{Colesterol}$$

También se desea disminuir la cantidad de carbohidratos que contiene cada uno de los alimentos de la dieta, la función objetivo es:

$$z_3 = 63x_1 \quad +12x_2 \quad +19x_3 \quad +20x_4 \quad +12x_5 \quad +33.4x_6 \quad +14.6x_7 \quad +15x_8 \quad +20x_9 \quad +22x_{10} \quad +0.6x_{11} \qquad \text{Carbohidratos}$$

El modelo de programación lineal multicriterio queda planteado de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lllllllllllll}
\text{mín}\, z_1 & = 19x_1 & +14x_2 & +30x_3 & +60x_4 & +13x_5 & +11x_6 & +10x_7 & +17x_8 & +12x_9 & +14x_{10} & +18x_{11} \\
\text{mín}\, z_2 & = 5x_3 & +89x_4 & +10x_5 & +10x_9 & +212x_{11} & & & & & & \\
\text{mín}\, z_3 & = 63x_1 & +12x_2 & +19x_3 & +20x_4 & +12x_5 & +33.4x_6 & +14.6x_7 & +15x_8 & +20x_9 & +22x_{10} & +0.6x_{11}
\end{array}$$

Sujetas a:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrcr}
300x_1 & +60x_2 & +220x_3 & +259x_4 & +110x_5 & +132x_6 & +55x_7 & +152x_8 & +160x_9 & +110x_{10} & +78x_{11} & \geq & 1800 \\
300x_1 & +60x_2 & +220x_3 & +259x_4 & +110x_5 & +132x_6 & +55x_7 & +152x_8 & +160x_9 & +110x_{10} & +78x_{11} & \leq & 1800 \\
x_1 & & +13x_3 & +\ 16.3x_4 & +2.5x_5 & & +0.22x_7 & +9.8x_8 & +2.5x_9 & +x_{10} & +5.3x_{11} & \leq & 65 \\
x_1 & +650x_2 & +790x_3 & +95x_4 & +120x_5 & +5x_6 & +1.1x_7 & +168.4x_8 & +75x_9 & +160x_{10} & +62x_{11} & \leq & 2400 \\
3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & & & & +2.5x_7 & +1.3x_8 & & +2x_{10} & & \geq & 25 \\
11x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +26.1x_4 & +9x_5 & +0.5x_6 & +0.3x_7 & +2x_8 & +6x_9 & +4x_{10} & +6.3x_{11} & \geq & 50 \\
 & 8x_2 & +2x_3 & +x_4 & +10x_5 & +2x_6 & +x_7 & & +2x_9 & & +6x_{11} & \geq & 100 \\
 & 30x_2 & +2x_3 & & & +62x_6 & +8x_7 & +15x_8 & +2x_9 & & & \geq & 100 \\
2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & +30x_5 & & +x_7 & +x_8 & +20x_9 & & +3x_{11} & \geq & 100 \\
20x_1 & +15x_2 & +8x_3 & +17x_4 & & +2x_6 & +x_7 & +3x_8 & +2x_9 & +10x_{10} & +3x_{11} & \geq & 100 \\
 & & & & & & & & & & x_i & \geq & 0, \quad \text{con } i = 1, \cdots, 11
\end{array}$$

Dado los pesos λ_1 =0.2, λ_2 =0.3 y λ_3 =0.5.

Posteriormente, estas combinaciones de peso se multiplican a cada una de las funciones objetivo respectivamente para obtener la función objetivo ponderada. De esta manera se obtiene un problema $LP(\lambda)$, el cual es ahora un problema de programación lineal con un objetivo.

$$
\begin{aligned}
z_p &= (0.2)(19x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 60x_4 + 13x_5 + 11x_6 + 10x_7 + 17x_8 + 12x_9 + 14x_{10} + 18x_{11}) \\
&= +(0.3)(5x_3 + 89x_4 + 10x_5 + 10x_9 + 212x_{11}) + (0.5)(63x_1 + 12x_2 + 19x_3 + 20x_4 + 12x_5 + \\
&\quad 33.4x_6 + 14.6x_7 + 15x_8 + 20x_9 + 22x_{10} + 0.6x_{11}) \\
z_p &= 35.3x_1 + 8.8x_2 + 17x_3 + 48.7x_4 + 11.6x_5 + 18.9x_6 + 9.3x_7 + 10.9x_8 + 15.4x_9 + 13.8x_{10} + 67.5x_{11}
\end{aligned}
$$

Por tanto el problema de programación lineal $LP(\lambda)$ es:

$$z_p = 35.3x_1 + 8.8x_2 + 17x_3 + 48.7x_4 + 11.6x_5 + 18.9x_6 + 9.3x_7 + 10.9x_8 + 15.4x_9 + 13.8x_{10} + 67.5x_{11}$$

s.a

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrcl}
300x_1 & +60x_2 & +220x_3 & +259x_4 & +110x_5 & +132x_6 & +55x_7 & +152x_8 & +160x_9 & +110x_{10} & +78x_{11} & \geq & 1800 \\
300x_1 & +60x_2 & +220x_3 & +259x_4 & +110x_5 & +132x_6 & +55x_7 & +152x_8 & +160x_9 & +110x_{10} & +78x_{11} & \leq & 1800 \\
x_1 & & +13x_3 & +16.3x_4 & +2.5x_5 & & +0.22x_7 & +9.8x_8 & +2.5x_9 & +x_{10} & +5.3x_{11} & \leq & 65 \\
x_1 & +650x_2 & +790x_3 & +95x_4 & +120x_5 & +5x_6 & +1.1x_7 & +168.4x_8 & +75x_9 & +160x_{10} & +62x_{11} & \leq & 2400 \\
3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & & & & +2.5x_7 & +1.3x_8 & & +2x_{10} & & \geq & 25 \\
11x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +26.1x_4 & +9x_5 & +0.5x_6 & +0.3x_7 & +2x_8 & +6x_9 & +4x_{10} & +6.3x_{11} & \geq & 50 \\
 & 8x_2 & +2x_3 & +x_4 & +10x_5 & +2x_6 & +x_7 & & +2x_9 & & +6x_{11} & \geq & 100 \\
 & 30x_2 & +2x_3 & & & +62x_6 & +8x_7 & +15x_8 & +2x_9 & & & \geq & 100 \\
2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & +30x_5 & & +x_7 & +x_8 & +20x_9 & & +3x_{11} & \geq & 100 \\
20x_1 & +15x_2 & +8x_3 & +17x_4 & & +2x_6 & +x_7 & +3x_8 & +2x_9 & +10x_{10} & +3x_{11} & \geq & 100 \\
 & & & & & & & & & & & x_i \geq & 0, \quad \text{con } i = 1, \cdots, 11
\end{array}
$$

Tabla inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	h1	h2	h3	h4	h5	h6	h7	h8	h9	h10	s1	s5	s6	s7	s8	s9	s10	LD
	35.3	8.8	17	48.7	11.6	18.9	9.3	10.9	15.4	13.8	67.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s1	300	60	220	259	110	132	55	152	160	110	78	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1800
h2	300	60	220	259	110	132	55	152	160	110	78	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2200
h3	1		13	16.3	2.5	0	0.22	9.8	2.5	1	5.3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	65
h4	1	650	790	95	120	5	1.1	168.4	75	160	62	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2400
s5	3	3	2	0	0	0	2.5	1.3	0	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	25
s6	11	2	5	26.1	9	0.5	0.3	2	6	4	6.3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	50
s7	0	8	2	1	10	2	1	0	2	0	6	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	100
s8	0	30	2	0	0	62	8	15	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	100
s9	2	2	2	1	30	0	1	1	20	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	100
s10	20	15	8	17	0	2	1	3	2	10	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	100

Después de 25 iteraciones se obtiene la tabla final

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	s_1	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	LD
	0	0	46.1726	27.0689	0	0	0	11.5434	12.8253	5.1546	55.4013	0	0	0	0.0619	1.7439	0	1.9031	0.1998	0	1.5065	0	-1.7439	0	-1.9031	-0.1998	0	-1.5065	255.927
h2	0	0	475.2158	51.5353	0	0	0	173.4484	134.3484	41.2541	-35.6854	0	1	0	0.5281	5.9432	0	17.3367	1.1564	0	14.1349	0	-5.9432	0	-17.3367	-1.1564	0	-14.1349	55.9601
x6	0	0	-0.6036	0.0815	0	1	0	0.0565	0.0091	-0.1512	0.0334	0	0	0	-0.0008	0.0568	0	-0.0092	-0.0156	0	-0.0086	0	-0.0568	0	0.0092	0.0156	0	0.0086	0.0742
h3	0	0	15.4631	15.5149	0	0	0	10.5618	2.1385	1.2015	3.5984	0	0	1	0.0043	-0.0165	0	0.3022	-0.0111	0	0.0527	0	0.0165	0	-0.3022	0.0111	0	-0.0527	41.4689
h9	0	0	-23.0503	2.5019	0	0	0	-8.934	-15.6281	-4.9779	15.9606	0	0	0	-0.0354	0.6699	0	-3.4245	0.1141	1	-0.2023	0	-0.6699	0	3.4245	-0.1141	-1	0.2023	149.6092
h1	0	0	-475.2158	-51.5353	0	0	0	-173.4484	-134.3484	-41.2541	35.6854	1	0	0	-0.5281	-5.9432	0	-17.3367	-1.1564	0	-14.1349	-1	5.9432	0	17.3367	1.1564	0	14.1349	344.0399
x1	1	0	-0.5508	0.8007	0	0	0	-0.1027	0.0399	0.2962	0.1713	0	0	0	-0.0012	0.0198	0	-0.0146	0.0021	0	-0.053	0	-0.0198	0	0.0146	-0.0021	0	0.053	3.1404
x7	0	0	-0.1705	-1.1159	0	0	1	0.2695	-0.155	0.1025	-0.1806	0	0	0	-0.0007	-0.4163	0	-0.0079	-0.0018	0	0.0624	0	0.4163	0	0.0079	0.0018	0	-0.0624	3.5522
x5	0	0	-0.7499	0.0919	1	0	0	-0.2874	0.1423	-0.2081	0.628	0	0	0	-0.0012	0.0353	0	-0.1143	0.0038	0	-0.0054	0	-0.0353	0	0.1143	-0.0038	0	0.0054	7.8437
h6	0	0	-15.4419	-16.5001	0	0	0	-4.9838	-4.1439	-2.0892	1.157	0	0	0	-0.0212	0.427	1	-1.154	0.0473	0	-0.6151	0	-0.427	-1	1.154	-0.0473	0	0.6151	60.7055
x2	0	1	1.3596	0.1292	0	0	0	0.3114	0.0892	0.2851	-0.0208	0	0	0	0.0018	-0.0063	0	0.0212	-0.0006	0	0.001	0	0.0063	0	-0.0212	0.0006	0	-0.001	2.2328

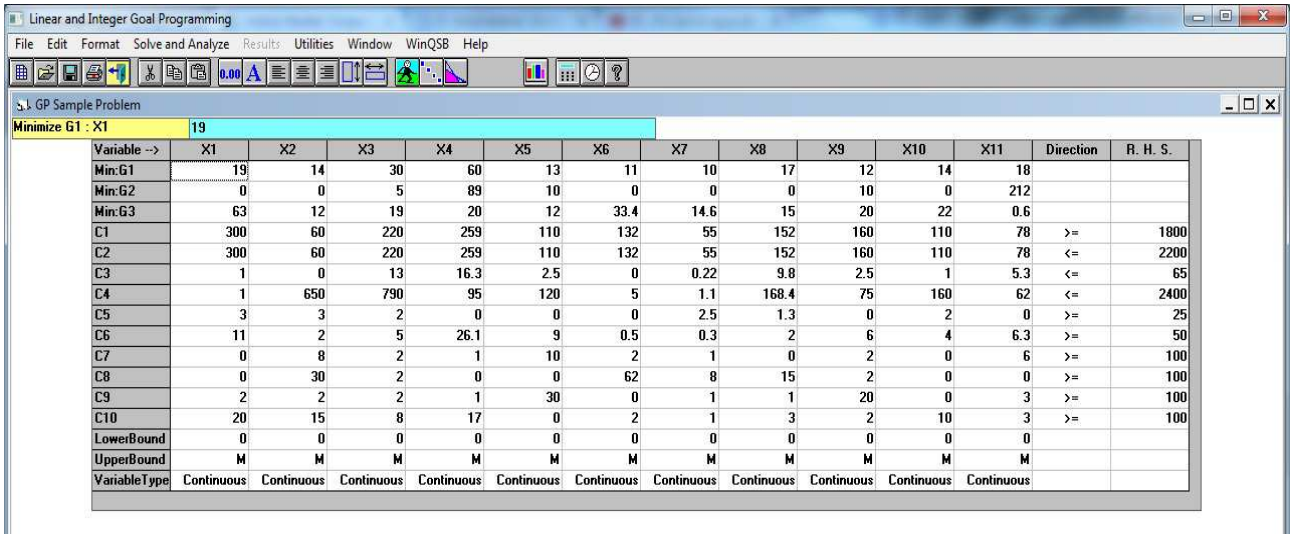
Se puede observar que:

$$x_1 = 3.1404 \quad x_3 = 0 \quad x_5 = 7.8437 \quad x_7 = 3.5522 \quad x_9 = 0 \quad x_{11} = 0$$
$$x_2 = 2.2328 \quad x_4 = 0 \quad x_6 = 0.0742 \quad x_8 = 0 \quad x_{10} = 0$$
$$z_p = 255.9270 \quad z_1 = 229.23 \quad z_2 = 78.44 \quad z_3 = 373.1$$

Costo de la dieta	S/. 229.23
Cantidad que proporciona el colesterol	78.44 mg
Cantidad que proporciona el carbohidratos	373.1 g

Utilizando WinQsb

1. Ingresar los datos tal como esta en el problema.



Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	Direction	R. H. S.
Min:G1	19	14	30	60	13	11	10	17	12	14	18		
Min:G2	0	0	5	89	10	0	0	0	10	0	212		
Min:G3	63	12	19	20	12	33.4	14.6	15	20	22	0.6		
C1	300	60	220	259	110	132	55	152	160	110	78	>=	1800
C2	300	60	220	259	110	132	55	152	160	110	78	<=	2200
C3	1	0	13	16.3	2.5	0	0.22	9.8	2.5	1	5.3	<=	65
C4	1	650	790	95	120	5	1.1	168.4	75	160	62	<=	2400
C5	3	3	2	0	0	0	2.5	1.3	0	2	0	>=	25
C6	11	2	5	26.1	9	0.5	0.3	2	6	4	6.3	>=	50
C7	0	8	2	1	10	2	1	0	2	0	6	>=	100
C8	0	30	2	0	0	62	8	15	2	0	0	>=	100
C9	2	2	2	1	30	0	1	1	20	0	3	>=	100
C10	20	15	8	17	0	2	1	3	2	10	3	>=	100
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

2. Después de 22 iteraciones se obtiene:

Linear and Integer Goal Programming

File Simplex Iteration Format Window Help

Simplex Tableau -- Iteration 22 (Phase Two)

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	Surplus_C1	Slack_C2	Slack_C3	Slack_C4	Surplus_C5	Surplus_C6	Surplus_C7	Surplus_C8	Surplus_C9	Surplus_C10		
	Goal 1 C[j]	19.00	14.00	30.00	60.00	13.00	11.00	10.00	17.00	12.00	14.00	18.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	Goal 2 C[j]	0	0	5.00	89.00	10.00	0	0	0	10.00	0	212.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
Basis	Goal 3 C[j]	63.00	12.00	19.00	20.00	12.00	33.40	14.60	15.00	20.00	22.00	0.60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Surplus_C9	C1	0.00	0.00	-23.05	2.50	0	0.00	0.00	-8.93	-15.63	-4.98	15.96	0	0	0	-0.04	0.67	0	-3.42	0.11	1.00	-0.20	149.61	
Slack_C2	C2	0.00	0.00	475.22	51.54	0.00	0.00	0.00	173.45	134.35	41.25	-35.69	0	1.00	0	0.53	5.94	0	17.34	1.16	0	14.13	55.96	
Slack_C3	C3	0.00	0.00	15.46	15.51	0.00	0.00	0.00	10.56	2.14	1.20	3.60	0	0	1.00	0.00	-0.02	0	0.30	-0.01	0	0.05	41.47	
X6	C4	0.00	0.00	-0.60	0.08	0.00	1.00	0.00	0.06	0.01	-0.15	0.03	0	0	0	0.00	0.06	0	-0.01	-0.02	0	-0.01	0.07	
Surplus_C1	C5	0.00	0.00	-475.22	-51.54	0.00	0.00	0.00	-173.45	-134.35	-41.25	35.69	1.00	0	0	-0.53	-5.94	0	-17.34	-1.16	0	-14.13	344.04	
X1	C6	1.00	0.00	-0.55	0.80	0.00	0.00	0.00	-0.10	0.04	0.30	0.17	0	0	0	0.00	0.02	0	-0.01	0.00	0	-0.05	3.14	
X7	C7	0.00	0.00	-0.17	-1.12	0.00	0.00	1.00	0.27	-0.15	0.10	-0.18	0	0	0	0.00	-0.42	0	-0.01	0.00	0	0.06	3.55	
X5	C8	0.00	0.00	-0.75	0.09	1.00	0.00	0.00	-0.29	0.14	-0.21	0.63	0	0	0	0.00	0.04	0	-0.11	0.00	0	-0.01	7.84	
Surplus_C6	C9	0.00	0.00	-15.44	-16.50	0.00	0.00	0.00	-4.98	-4.14	-2.09	1.16	0	0	0	-0.02	0.43	1.00	-1.15	0.05	0	-0.62	60.71	
X2	C10	0.00	1.00	1.36	0.13	0.00	0.00	0.00	0.31	0.09	0.29	-0.02	0	0	0	0.00	-0.01	0	0.02	0.00	0	0.00	2.23	
Min. Goal 1	Cj-Zj	0	0	39.53	52.05	0	0	0	15.01	9.59	7.72	8.31	0	0	0	0.03	2.79	0	1.65	0.11	0	0.53	229.23	
Min. Goal 2	Cj-Zj	0	0	12.50	88.08	0	0	0	2.87	8.58	2.08	205.72	0	0	0	0.01	-0.35	0	1.14	-0.04	0	0.05	78.44	
Min. Goal 3	Cj-Zj	0	0	69.04	-19.53	0	0	0	15.36	16.67	5.97	-15.95	0	0	0	0.11	2.58	0	2.46	0.38	0	2.77	373.10	

Se puede observar que

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & = 3.1404 & x_5 & = 7.8437 & x_9 & = 0 \\
x_2 & = 2.2328 & x_6 & = 0.0742 & x_{10} & = 0 \\
x_3 & = 0 & x_7 & = 3.5522 & x_{11} & = 0 \\
x_4 & = 0 & x_8 & = 0 & & \\
 & & & & & \\
z_1 & = 229.23 & z_2 & = 78.44 & z_3 & = 373.1
\end{array}
$$

3.2 Aplicación del método simplex Multicriterio

Aplicación 2

Se requiere encontrar una dieta con once tipos de alimentos que reúna costos y la cantidad requerida de nutrientes de cada uno de los alimentos; e decir se desea minimizar el costo de la dieta pero cubriendo las necesidades nutritivas mínimas de la cantidad que proporciona el colesterol y los carbohidratos.

La dieta debe incluir requerimientos nutricionales que se deben considerar de acuerdo a los siguientes parámetros:

- Entre 1800 y 2200 calorías.
- No más de $65g$ de grasas.
- No más de $2400mg$ de sodio.
- Al menos $25g$ de fibra.
- Al menos $50g$ de proteínas.
- Al menos del 100 % deben ser consideradas de vitamina A y C, calcio y hierro.

Tabla 3.2: Alimentos a cosidera, nutrientes y costos

	Pasta	Jugo de Tomate	Sopa de Almeja	Carne término medio	Leche	Jugo de Naranja	Manzana	Papas fritas	Yogurt	Pan	Huevo
Calorías	300	60	220	259	110	132	55	152	160	110	78
Grasas	1g	0g	13g	16.3g	2.5g	0g	0.22g	9.8g	2.5g	1g	5.3g
Colesterol	0mg	0mg	5mg	89mg	10mg	0mg	0mg	0mg	10mg	0mg	212m
Sodio	1mg	650mg	790mg	95mg	120mg	5mg	1.1mg	168.4mg	75mg	160mg	62mg
Carbohidratos	63g	12g	19g	20g	12g	33.4g	14.6g	15g	20g	22g	0.6g
Fibra	3g	3g	2g	0g	0g	0g	2.5g	1.3g	0g	2g	0g
Proteinas	11g	2g	5g	26.1g	9g	0.5g	0.3g	2g	6g	4g	6.3g
Vitamina A	0 %	8 %	2 %	1 %	10 %	2 %	1 %	0 %	2 %	0 %	6 %
Vitamina C	0 %	30 %	2 %	0 %	0 %	62 %	8 %	15 %	2 %	0 %	0 %
Calcio	2 %	2 %	2 %	1 %	30 %	0 %	1 %	1 %	20 %	0 %	3 %
Hierro	20 %	15 %	8 %	17 %	0 %	2 %	1 %	3 %	2 %	10 %	3 %
Precio	$19	$14	$30	$60	$13	$11	$10	$17	$12	$14	$18

solución

De la aplicación 1 se tiene el modelo de programación lineal multicriterio queda planteado de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
\text{mín } z_1 & = 19x_1 & +14x_2 & +30x_3 & +60x_4 & +13x_5 & +11x_6 & +10x_7 & +17x_8 & +12x_9 & +14x_{10} & +18x_{11} \\
\text{mín } z_2 & = 5x_3 & +89x_4 & +10x_5 & +10x_9 & +212x_{11} & & & & & & \\
\text{mín } z_3 & = 63x_1 & +12x_2 & +19x_3 & +20x_4 & +12x_5 & +33.4x_6 & +14.6x_7 & +15x_8 & +20x_9 & +22x_{10} & +0.6x_{11}
\end{array}
$$

Sujetas a:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrcl}
300x_1 & +60x_2 & +220x_3 & +259x_4 & +110x_5 & +132x_6 & +55x_7 & +152x_8 & +160x_9 & +110x_{10} & +78x_{11} & & \geq & 1800 \\
300x_1 & +60x_2 & +220x_3 & +259x_4 & +110x_5 & +132x_6 & +55x_7 & +152x_8 & +160x_9 & +110x_{10} & +78x_{11} & & \leq & 1800 \\
x_1 & & +13x_3 & + 16.3x_4 & +2.5x_5 & & +0.22x_7 & +9.8x_8 & +2.5x_9 & +x_{10} & +5.3x_{11} & & \leq & 65 \\
x_1 & +650x_2 & +790x_3 & +95x_4 & +120x_5 & +5x_6 & +1.1x_7 & +168.4x_8 & +75x_9 & +160x_{10} & +62x_{11} & & \leq & 2400 \\
3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & & & & +2.5x_7 & +1.3x_8 & & +2x_{10} & & & \geq & 25 \\
11x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +26.1x_4 & +9x_5 & +0.5x_6 & +0.3x_7 & +2x_8 & +6x_9 & +4x_{10} & +6.3x_{11} & & \geq & 50 \\
 & 8x_2 & +2x_3 & +x_4 & +10x_5 & +2x_6 & +x_7 & & +2x_9 & & +6x_{11} & & \geq & 100 \\
 & 30x_2 & +2x_3 & & & +62x_6 & +8x_7 & +15x_8 & +2x_9 & & & & \geq & 100 \\
2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & +30x_5 & & +x_7 & +x_8 & +20x_9 & & +3x_{11} & & \geq & 100 \\
20x_1 & +15x_2 & +8x_3 & +17x_4 & & +2x_6 & +x_7 & +3x_8 & +2x_9 & +10x_{10} & +3x_{11} & & \geq & 100 \\
 & & & & & & & & & & & x_i & \geq & 0, \quad \text{con } i = 1, \cdots, 11
\end{array}
$$

Tabla inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	h1	h2	h3	h4	h5	h6	h7	h8	h9	h10	s1	s5	s6	s7	s8	s9	s10	LD
z1	19	14	30	60	13	11	10	17	12	14	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z2	0	0	5	89	10	0	0	0	10	212	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z3	63	12	19	20	12	33.4	14.6	15	20	22	0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s1	300	60	220	259	110	132	55	152	160	110	78	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1800
h2	300	60	220	259	110	132	55	152	160	110	78	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2200
h3	1		13	16.3	2.5	0	0.22	9.8	2.5	1	5.3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	65
h4	1	650	790	95	120	5	1.1	168.4	75	160	62	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2400
s5	3	3	2	0	0	0	2.5	1.3	0	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	25
s6	11	2	5	26.1	9	0.5	0.3	2	6	4	6.3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	50
s7	0	8	2	1	10	2	1	0	2	0	6	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	100
s8	0	30	2	0	0	62	8	15	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	100
s9	2	2	2	1	30	0	1	1	20	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	100
s10	20	15	8	17	0	2	1	3	2	10	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	100

Después de 22 iteraciones se obtiene la tabla final

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	s_1	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	LD
z1	0	0	39.53	52.05	0	0	0	15.01	9.59	7.72	8.31	0	0	0	0.03	2.79	0	1.65	0.11	0	0.53	0	0	0	0	0	0	0	229.23
z2	0	0	12.5	88.08	0	0	0	2.87	8.58	2.08	205.72	0	0	0	0.01	-0.35	0	1.14	-0.04	0	0.05	0	0	0	0	0	0	0	78.44
z3	0	0	69.04	-19.53	0	0	0	15.36	16.67	5.97	-15.95	0	0	0	0.11	2.58	0	2.46	0.38	0	2.77	0	0	0	0	0	0	0	373.1
h2	0	0	475.2158	51.5353	0	0	0	173.4484	134.3484	41.2541	-35.6854	0	1	0	0.5281	5.9432	0	17.3367	1.1564	0	14.1349	0	-5.9432	0	-17.3367	-1.1564	0	-14.1349	55.9601
x6	0	0	-0.6036	0.0815	0	1	0	0.0565	0.0091	-0.1512	0.0334	0	0	0	-0.0008	0.0568	0	-0.0092	-0.0156	0	-0.0086	0	-0.0568	0	0.0092	0.0156	0	0.0086	0.0742
h3	0	0	15.4631	15.5149	0	0	0	10.5618	2.1385	1.2015	3.5984	0	0	1	0.0043	-0.0165	0	0.3022	-0.0111	0	0.0527	0	0.0165	0	-0.3022	0.0111	0	-0.0527	41.4689
h9	0	0	-23.0503	2.5019	0	0	0	-8.934	-15.6281	-4.9779	15.9606	0	0	0	-0.0354	0.6699	0	-3.4245	0.1141	1	-0.2023	0	-0.6699	0	3.4245	-0.1141	-1	0.2023	149.6092
h1	0	0	-475.2158	-51.5353	0	0	0	-173.4484	-134.3484	-41.2541	35.6854	1	0	0	-0.5281	-5.9432	0	-17.3367	-1.1564	0	-14.1349	-1	5.9432	0	17.3367	1.1564	0	14.1349	344.0399
x1	1	0	-0.5508	0.8007	0	0	0	-0.1027	0.0399	0.2962	0.1713	0	0	0	-0.0012	0.0198	0	-0.0146	0.0021	0	-0.053	0	-0.0198	0	0.0146	-0.0021	0	0.053	3.1404
x7	0	0	-0.1705	-1.1159	0	0	1	0.2695	-0.155	0.1025	-0.1806	0	0	0	-0.0007	-0.4163	0	-0.0079	-0.0018	0	0.0624	0	0.4163	0	0.0079	0.0018	0	-0.0624	3.5522
x5	0	0	-0.7499	0.0919	1	0	0	-0.2874	0.1423	-0.2081	0.628	0	0	0	-0.0012	0.0353	0	-0.1143	0.0038	0	-0.0054	0	-0.0353	0	0.1143	-0.0038	0	0.0054	7.8437
h6	0	0	-15.4419	-16.5001	0	0	0	-4.9838	-4.1439	-2.0892	1.157	0	0	0	-0.0212	0.427	1	-1.154	0.0473	0	-0.6151	0	-0.427	-1	1.154	-0.0473	0	0.6151	60.7055
x2	0	1	1.3596	0.1292	0	0	0	0.3114	0.0892	0.2851	-0.0208	0	0	0	0.0018	-0.0063	0	0.0212	-0.0006	0	0.001	0	0.0063	0	-0.0212	0.0006	0	-0.001	2.2328

Se puede observar que

$$x_1 = 3.1404 \qquad x_5 = 7.8437 \qquad x_9 = 0$$
$$x_2 = 2.2328 \qquad x_6 = 0.0742 \qquad x_{10} = 0$$
$$x_3 = 0 \qquad x_7 = 3.5522 \qquad x_{11} = 0$$
$$x_4 = 0 \qquad x_8 = 0$$

$$z_1 = 229.23$$
$$z_2 = 78.44$$
$$z_3 = 373.1$$

Costo de la dieta	S/. 229.23
Cantidad que proporciona el colesterol	78.44 mg
Cantidad que proporciona el carbohidratos	373.1 g

Utilizando WinQsb

1. Ingresar los datos tal como esta en el problema.

Linear and Integer Goal Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

GP Sample Problem

Minimize G1 : X1 19

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	Direction	R. H. S.
Min:G1	19	14	30	60	13	11	10	17	12	14	18		
Min:G2	0	0	5	89	10	0	0	0	10	0	212		
Min:G3	63	12	19	20	12	33.4	14.6	15	20	22	0.6		
C1	300	60	220	259	110	132	55	152	160	110	78	>=	1800
C2	300	60	220	259	110	132	55	152	160	110	78	<=	2200
C3	1	0	13	16.3	2.5	0	0.22	9.8	2.5	1	5.3	<=	65
C4	1	650	790	95	120	5	1.1	168.4	75	160	62	<=	2400
C5	3	3	2	0	0	0	2.5	1.3	0	2	0	>=	25
C6	11	2	5	26.1	9	0.5	0.3	2	6	4	6.3	>=	50
C7	0	8	2	1	10	2	1	0	2	0	6	>=	100
C8	0	30	2	0	0	62	8	15	2	0	0	>=	100
C9	2	2	2	1	30	0	1	1	20	0	3	>=	100
C10	20	15	8	17	0	2	1	3	2	10	3	>=	100
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

2. Después de 22 iteraciones se obtiene:

Linear and Integer Goal Programming

File Simplex Iteration Format Window Help

Simplex Tableau -- Iteration 22 (Phase Two)

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	Surplus_C1	Slack_C2	Slack_C3	Slack_C4	Surplus_C5	Surplus_C6	Surplus_C7	Surplus_C8	Surplus_C9	Surplus_C10		
	Goal 1 C(j)	19.00	14.00	30.00	60.00	13.00	11.00	10.00	17.00	12.00	14.00	18.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	Goal 2 C(j)	0	0	5.00	89.00	10.00	0	0	0	10.00	0	212.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
Basis	Goal 3 C(j)	63.00	12.00	19.00	20.00	12.00	33.40	14.60	15.00	20.00	22.00	0.60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Surplus_C9	C1	0.00	0.00	-23.05	2.50	0	0.00	0.00	-8.93	-15.63	-4.98	15.96	0	0	0	-0.04	0.67	0	-3.42	0.11	1.00	-0.20	149.61	
Slack_C2	C2	0.00	0.00	475.22	51.54	0.00	0.00	0.00	173.45	134.35	41.25	-35.69	0	1.00	0	0.53	5.94	0	17.34	1.16	0	14.13	55.96	
Slack_C3	C3	0.00	0.00	15.46	15.51	0.00	0.00	0.00	10.56	2.14	1.20	3.60	0	0	1.00	0.00	-0.02	0	0.30	-0.01	0	0.05	41.47	
X6	C4	0.00	0.00	-0.60	0.08	0.00	1.00	0.00	0.06	0.01	-0.15	0.03	0	0	0	0.00	0.06	0	-0.01	-0.02	0	-0.01	0.07	
Surplus_C1	C5	0.00	0.00	-475.22	-51.54	0.00	0.00	0.00	-173.45	-134.35	-41.25	35.69	1.00	0	0	-0.53	-5.94	0	-17.34	-1.16	0	-14.13	344.04	
X1	C6	1.00	0.00	-0.55	0.80	0.00	0.00	0.00	-0.10	0.04	0.30	0.17	0	0	0	0.00	0.02	0	-0.01	0.00	0	-0.05	3.14	
X7	C7	0.00	0.00	-0.17	-1.12	0.00	0.00	1.00	0.27	-0.15	0.10	-0.18	0	0	0	0.00	-0.42	0	-0.01	0.00	0	0.06	3.55	
X5	C8	0.00	0.00	-0.75	0.09	1.00	0.00	0.00	-0.29	0.14	-0.21	0.63	0	0	0	0.00	0.04	0	-0.11	0.00	0	-0.01	7.84	
Surplus_C6	C9	0.00	0.00	-15.44	-16.50	0.00	0.00	0.00	-4.98	-4.14	-2.09	1.16	0	0	0	-0.02	0.43	1.00	-1.15	0.05	0	-0.62	60.71	
X2	C10	0.00	1.00	1.36	0.13	0.00	0.00	0.00	0.31	0.09	0.29	-0.02	0	0	0	0.00	-0.01	0	0.02	0.00	0	0.00	2.23	
Min. Goal 1	Cj-Zj	0	0	39.53	52.05	0	0	0	15.01	9.59	7.72	8.31	0	0	0	0.03	2.79	0	1.65	0.11	0	0.53	229.23	
Min. Goal 2	Cj-Zj	0	0	12.50	88.08	0	0	0	2.87	8.58	2.08	205.72	0	0	0	0.01	-0.35	0	1.14	-0.04	0	0.05	78.44	
Min. Goal 3	Cj-Zj	0	0	69.04	-19.53	0	0	0	15.36	16.67	5.97	-15.95	0	0	0	0.11	2.58	0	2.46	0.38	0	2.77	373.10	

Se puede observar que

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3.1404 & x_5 &= 7.8437 & x_9 &= 0 \\
x_2 &= 2.2328 & x_6 &= 0.0742 & x_{10} &= 0 \\
x_3 &= 0 & x_7 &= 3.5522 & x_{11} &= 0 \\
x_4 &= 0 & x_8 &= 0 & &
\end{aligned}
$$

$$
z_1 = 229.23 \qquad z_2 = 78.44 \qquad z_3 = 373.1
$$

Conclusiones

1. La programación lineal multicriterio es una técnica en investigación de operaciones, que permite resolver un problema donde los diversos objetivos están en conflicto o no es imposible reducirlos a uno solo, ya que la solución a encontrar debe satisfacer todos los objetivos del problema.

2. Los métodos utilizados convierten el problema multicriterio a un nuevo problema con un objetivo, para después resolverlo por los métodos clásicos de programación lineal.

3. El software WinQsb es una herramienta que permite comprobar inicialmente los resultados obtenidos manualmente y además garantiza hallar una solución del problema en forma rápida y exacta.

4. La aplicación que se presenta en la solución de un problema de dietas, puede ser extensivo a otras áreas y en la vida cotidiana.

Sugerencias

1. Dar a conocer a los estudiantes de ciencias e ingeniería de pre grado sobre los temas de programación multicriterio para desarrollar sus conocimientos sobre la programación lineal.

2. Ampliar los conocimientos sobre los temas tratados en el presente trabajo y que estos sirvan de base para estudios más complejos en el área de investigación de operaciones.

3. Aplicar la programación multicriterio en las diferentes áreas de las ciencias e ingeniería, dé forma que sea una herramienta que ayude a solucionar problemas reales de la vida cotidiana.

4. Utilizar programas computacionales y en particular el software WinQsb para comprobar los resultados manuales de problemas simples, para después utilizarlo en problemas mas amplios.

Referencias Bibliográficas

[1.] Alvarado, J. (2010). *El Análisis Post-Optimal en Programación Lineal Aplicada a la Agricultura*. 90 (1): 161-173.

[2.] Alvarez, J. (2005). *Investigación de Operaciones*. Uniersidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú: Librería Beta.

[3.] Bazaraa, M. & Jarvis, J. (2006). *Programación Lineal y Flujo en Redes*. México: Editorial Limusa.

[4.] Carro, R. (2009). *Investigación de Operaciones en Administración*. Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.

[5.] Chang, Y. (2009). *Manual de Uso del WinQsb*. Instituto Tecnológico de Tepic. Nayarit, México.

[6.] Deb, K. (2005). *Chapter 10: Multiobjective Optimization.* Volumen 79, Páginas 273-316, Springer, USA.

[7.] Durán, D. (1996). *Interpretación Económica del Análisis de Sensibilidad* 6ta *edición*. Universidad de Barcelona, España.

[8.] Figueira, J., Greco, S. y Ehrgott, M. (2005). *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*. Springer Verlag, New York.

[9.] García, A. y Ortega, M. (2012). *Programación Lineal*. Universidad Politécnica de Madrid, España.

[10.] García, M. (2013). *Interpretaciones de la Dualidad en Programación Lineal* (tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Querétaro, México.

[11.] García, M. & Román P. (2012). *Módulo de Programación Lineal Entera.*

[12.] Goic, M. (2012). *Dualidad y Análisis de Sensibilidad.* Universidad de Chile, Chile.

[13.] Hillier, F. & Lieberman, G. (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones* 9^a *edición.* Ciudad de México, Mexico: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

[14.] Lahoz, D. (2014). *Breve Manual de WinQsb.*

[15.] Pliego, O. (2012). *Programación Multiobjetivo: Análisis, Técnicas y Casos de Aplicación.* Universidad Autónoma de México, México.

[16.] Quesada, V. & Vergara, J. (2003). *Análisis Cuantitativo con WinQsb.* Universidad de Cartagena, Colombia.

[17.] Stewart, T. (2007). *The essential multiobjective of linear programming.* Volumen 23, Orssa, South Africa

[18.] Taha, H. (2012). *Investigación de Operaciones* 9^a *edición.* Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación.