



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**Solución de la Ecuación de Poisson con
Condiciones de Frontera no Homogéneas
Utilizando el Método de Rayleigh-Ritz**

TESIS

**Para optar el título profesional de
Licenciado en Matemáticas**

Presentado por:

Bach. Mat. Santamaría Santisteban José Ramos

Bach. Mat. Vega Ramos Marco Antonio

Asesor

Lic. Mat. Reupo Vallejos Raúl Eduardo

**LAMBAYEQUE - PERÚ
2015**



UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**Solución de la Ecuación de Poisson con
Condiciones de Frontera no Homogéneas
Utilizando el Método de Rayleigh-Ritz**

TESIS

**Para optar el título profesional de
Licenciado en Matemáticas**

Presentado por:

Bach. Mat. Santamaría Santisteban José Ramos

Bach. Mat. Vega Ramos Marco Antonio

Asesor:

Lic.Mat. Reupo Vallejos Raúl Eduardo

LAMBAYEQUE – PERÚ

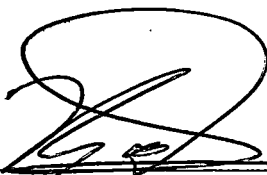
2015

UNIVERSIDAD NACIONAL " PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"Solución de la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera no Homogéneas Utilizando el Método de Rayleigh-Ritz "**, presentada por los Bachilleres en Matemáticas, Santamaría Santisteban José Ramos, Vega Ramos Marco Antonio, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.



M.Sc. Guevara Quiliche Santos Henry
Presidente Jurado de Tesis



Lic. Mat. Coronado Juárez William Wilmer
Secretario Jurado de Tesis



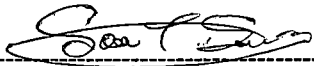
Lic. Mat. Díaz Delgado Darwin
Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: Junio - 2015

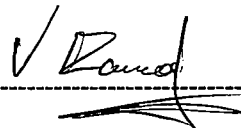
UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

SOLUCIONES DE LA ECUACION DE POISSON CON CONDICIONES DE FRONTERAS NO
HOMOGENEAS UTILIZANDO EL METODO DE RAYLEIGH-RITZ



Bach. Mat. Santamaría Santisteban José Ramos



Bach. Mat. Vega Ramos Marco Antonio



Lic. Mat. Reupo Vallejos Raúl Eduardo

Asesor

Agradecimiento

A Dios, gracias de todo corazón, por la sabiduría y bendición que nos ha dado para culminar nuestra tesis.

A nuestro asesor Lic.Mat. Reupo Vallejos Raúl Eduardo por su permanente apoyo, logrando de esta manera la meta trazada y por la cual estamos comprometidas a cumplir sus enseñanzas para alcanzar el éxito profesional.

Dedicatoria

*A mis padres María Emilia y Luis Alberto,
por ser ellos los que me brindan su
constante ayuda y debo todo lo que soy .*

José Ramos

*A mis padres María Hilda y Eladio Antonio
por ser ellos los que me brindan su esfuerzo
y sacrificio en beneficio de mi formación.
A mis hermanos por su valiosa ayuda moral
y apoyo desinteresado.*

Marco Antonio

Resumen

En el presente trabajo de investigación se obtuvo soluciones aproximadas a la solución exacta de una ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas. Para el logro de este objetivo primero se tuvo que obtener un funcional asociado a la ecuación de Poisson con condiciones de frontera homogéneas y luego con los resultados obtenidos, obtener un funcional asociado a la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas, Con el fin de obtener un problema de minimización de un funcional y de esta manera aplicar el método de Rayleigh-Ritz, para solucionar este problema. Se demostró también que una función U que minimiza a un funcional viene hacer una solución exacta o aproximada de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas.

Palabras Claves: Ecuacion de Poisson, condiciones de frontera, método de Rayleigh-Ritz

Abstract

In the present investigation approximate the exact solution of a Poisson equation with inhomogeneous boundary conditions was obtained solutions. To achieve this goal first had to obtain a functional associated with the Poisson equation with homogeneous conditions of border and then with the results, get a functional associated with the Poisson equation with conditions of inhomogeneous boundary, order to obtain a minimization problem of a functional and thus applying the Rayleigh-Ritz method to solve this problem. They also showed that a function U that minimizes a functional comes to make an exact or approximate solution of the Poisson equation with inhomogeneous boundary conditions.

Introducción

En la actualidad las ecuaciones diferenciales parciales tienen varias aplicaciones a distintas ramas de la ciencia como por ejemplo: Física, química, biología, ingeniería, etc. Algunas veces las ecuaciones diferenciales que ayudan a modelar los distintos fenómenos en estas ciencias, no son tan sencillas de solucionarlas por los métodos analíticos es por ello que se tienen que buscar algunos métodos numéricos de solución para encontrar una solución aproximada a dichas ecuaciones. El presente trabajo de investigación tiene como objetivo principal Aplicar el método de Rayleigh-Ritz para encontrar una solución de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas.

En el capítulo uno de este trabajo hacemos referencia al problema, a los objetivos general y específicos, y a la hipótesis y además se mencionan las teorías, teoremas, definiciones, etc que se utilizaran en el desarrollo del trabajo. En el capítulo dos se encontrara una solución para la ecuación de Poisson con condiciones de frontera homogéneas. Y en el ultimo capitulo se plantea la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas para encontrar una solución de la misma aplicando el método de Rayleigh-Ritz.



Índice general

Resumen	I
Abstract	II
Introducción	III
3 CAPÍTULO 1	
3 Preliminares	
1.1. Planteamiento del Problema	3
1.1.1. Situación Problemática	3
1.1.2. Problema	4
1.1.3. Objetivos	5
1.1.4. Justificación e importancia	5
1.1.5. Hipótesis	6
1.2. Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales	6
1.3. Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales	7
1.3.1. Según su orden	7
1.3.2. Según su Homogeneidad	8
1.3.3. Según su Linealidad	9
1.4. Solución Aproximada de una E.D.P.	10
1.5. Funcional	11
1.6. Teoremas del Cálculo Vectorial	12
1.6.1. Teorema de la divergencia de Gauss para un campo vectorial de F	12

1.6.2.	Primera Forma del Teorema Green para campos escalares u, v . . .	15
1.6.3.	Segunda Forma del Teorema de Green	15
	CAPÍTULO 2	
16	Obtención de un Funcional Asociado a la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera	
2.1.	Operador Diferenciable	17
2.2.	Obtención de un Funcional Asociado a la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera Homogéneas	20
2.3.	Obtención de un Funcional Asociado a la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera no Homogéneas	27
	CAPÍTULO 3	
30	El Método de Rayleigh-Ritz	
3.1.	Aplicación del Método de Rayleigh-Ritz	30
3.2.	Ejemplos Aplicativos	32
	Conclusiones	46
	Recomendaciones	47
	Bibliografía	48

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Planteamiento del Problema

En esta sección se tratará los siguientes puntos: Situación problemática, problema, objetivos, justificación e importancia e hipótesis

1.1.1 Situación Problemática

La ecuación de poisson

$$-\nabla^2 \mu = f \quad (1.1)$$

Modela muchos fenómenos que acontecen en la naturaleza, y en particular en la física. El significado físico de algunos términos y parámetros que intervienen en la ecuación (1.1) ,depende del área particular en la cual esta se aplica. Si la ecuación de Poisson (1.1) está sujeta a condiciones de frontera no homogéneas, entonces se obtiene un problema bien puesto, como el siguiente:

$$-\nabla^2 \mu = f$$

$$\mu = g(s) \text{ en } C_1 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = j(s) \text{ en } C_2$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} + \sigma(s)\mu = h(s) \text{ en } C_3$$

Existen métodos analíticos que ayudan a solucionar el problema (1.2), pero a veces resulta difícil de aplicar estos para tal fin y hay que pensar en otras alternativas de solución, y todo el peso recae en los métodos numéricos. Estos ayudan a obtener una solución aproximada del problema (1.2), entonces se formula una primera interrogante, ¿Qué método numérico ayudará a resolver el problema (1.2)?

Si la ecuación (1.2) con frecuencia equivale al problema de la minimización de una funcional, la cual esta misma puede ser interpretada en términos de la energía total del sistema bajo consideración, entonces es posible pensar que el problema (1.2) puede ser solucionado utilizando algún método directo, propio del cálculo variacional, tales como: el método de diferencias finitas de Euler, método de Rayleigh-Ritz, etc.

El método de diferencias finitas es el más simple de todos, en particular para mallas con una energía uniforme, sin embargo su mayor desventaja consiste en la incapacidad para tratar efectivamente la solución de problemas sobre formas geométricas irregulares; el método Rayleigh-Ritz es otra alternativa para el problema (1.2). El método Rayleigh-Ritz proporciona un algoritmo para minimizar una funcional, entonces con lo expuesto anteriormente, es posible preguntarse, ¿de qué manera se aplica el método de Rayleigh-Ritz para solucionar el problema (1.2)?

1.1.2 Problema

¿De qué manera se aplica el método de Rayleigh - Ritz, para solucionar la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas?

1.1.3 Objetivos

1. **Objetivo general** Aplicar el método de Rayleigh-Ritz para encontrar una solución de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas.

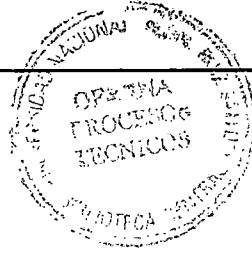
2. **Objetivos específicos**

- Formular la ecuación de poisson con condiciones de frontera homogéneas como un problema de minimización de una funcional.
- Formular la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas como un problema de minimización de una funcional.
- Aplicar el método de Rayleigh-Ritz para encontrar una solución al problema de minimización de una funcional.

1.1.4 Justificación e importancia

Este proyecto de investigación es importante porque se mostrará una alternativa para resolver una ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas ,utilizando el método variacional de Rayleigh-Ritz. El cual permitirá obtener soluciones aproximadas a la solución exacta , de una manera más sencilla , desarrollando simplemente sistemas de ecuaciones lineales algebraicas.

Se justifica ya que la mayoría de problemas en matemática, física, economía, biología, etc. Se modelan a través de ecuaciones diferenciales parciales, y en particular, de una ecuación de poisson. A veces estas ecuaciones resultan poco tediosas poder resolverlas por métodos analíticos, por lo que el método de rayleigh-Ritz, surge como alternativa de solución.



1.1.5 Hipótesis

Aplicando el método de rayleigh-Ritz, se obtiene una solución de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas

1.2 Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales

Definición 1.1. Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (E.D.P) a la ecuación de la forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n}) = 0 \quad (1.3)$$

que permite conexionar las variables independientes x_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n$ la función que se busca y sus derivadas parciales.

Se cumple que k_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n$ son enteros no negativos tales que: $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$.

La función F es la función prefijada de sus argumentos

Definición 1.2. (Solución)

Sea la E.D.P. definida en (1.3) de orden m , se llama solución de dicha E.D.P. en cierta región D de variación de las x_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n \in C^m(D)$ (conjunto de funciones continuas en la región D junto con todas las derivadas de hasta orden m inclusive), tal que al sustituir u , y sus derivadas en (1.3) la última se convierte en la identidad respecto a x_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n$ en la región D .

Ejemplo 1.1. Hallar la solución $u = u(x, y)$ de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

Solución 1.1.

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u$ no depende de x , pero puede ser una función cualquiera de y , $u = \phi(y)$.
Solución de la ecuación (1.1) que contiene una función arbitraria.

1.3 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Aquí se hará un estudio detallado de la clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales que será una herramienta muy importante para el desarrollo de los capítulos siguientes.

1.3.1 Según su orden

El orden de una ecuación diferencial, es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación. La ecuación de Poisson.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y), \quad u = u(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.5)$$

Es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, puesto que la derivada de orden más alto que aparece es la derivada.

1.3.1.1. Clasificación de las (Ecuaciones Diferenciales Parciales) *E.D.P's* de Segundo orden de dos Variables Independientes

Definición 1.3. Sea la E.D.P. de segundo orden

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} +$$

$$b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + c(x, y) u(x, y) = f(x, y) \quad (1.6)$$

en una cierta región $\Omega \in \mathbb{R}^2$ (plano oxy) se dice :

1. Hipérbola en Ω , si $\Delta = B^2 - AC > 0$ en Ω
2. Parabólica en Ω , si $\Delta = B^2 - AC = 0$ en Ω
3. Elíptica en Ω , si $\Delta = B^2 - AC < 0$ en Ω

Ejemplo 1.2. Las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

son hiperbólicas $\forall x, y \in \Omega$

Ejemplo 1.3. La ecuación:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \text{ es parabólica } \forall x, y \in \Omega$$

Ejemplo 1.4. La ecuación:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \text{ es elíptica } \forall x, y \in \Omega$$

1.3.2 Según su Homogeneidad

Una ecuación lineal es homogénea si el término que no está afectado por la variable dependiente ni por sus derivadas (término independiente) es cero para todo x . De ser así se dirá que es no homogénea.

Ejemplo 1.5.

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = h(x, y) \dots \text{ (Ecuación de Poisson)}$$

Es una E.D.P Homogénea

Ejemplo 1.6.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \dots \text{(Ecuación de Laplace)}$$

Es una E.D.P Homogénea

1.3.3 Según su Linealidad

Desde el punto de vista de la linealidad, una E.D.P. se dice que es lineal si es de primer grado en la variable u y en todas las derivadas parciales que existen en la ecuación; caso contrario, la E.D.P. se llama no lineal.

Ejemplo 1.7. $u_t + uu_x = 0$ es una E.D.P. no lineal de primer orden

1.3.3.1. Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales no Lineales

1.3.3.1.1 Cuasilineales

Se consideran ecuaciones de forma

$$f_1(x_1, x_2, u)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2, u)u_{x_2} = f_1(x_1, x_2, u)$$

estas ecuaciones se llaman cuasilineales, porque dependen linealmente de las derivadas parciales u_{x_1}, u_{x_2} , pero la dependencia con respecto a u no es necesariamente lineal.

Ejemplo 1.8.

$$yu_x - xu_y = 0$$

1.3.3.1.2 Semi-Lineales

La parte de la E.D.P. que contiene las derivadas parciales de mayor orden es llamada parte principal de la E.D.P. por ejemplo la parte principal de la ecuación (1.6) es

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy}$$

de donde $u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}$; $u_{xy} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$; $u_{yy} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$

Dentro de las E.D.P's no Lineales, las que tienen parte principal lineal son llamadas semi-Lineales.

Ejemplo 1.9. la ecuación

$$u_t = u_{xxx} + uu_x, \quad u = u(x, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

es una ecuación diferencial de tercer orden semi-lineal, ya que a pesar de no ser lineal por el término uu_x la parte principal que es u_{xxx} , es lineal.

1.4 Solución Aproximada de una E.D.P.

En muchos problemas teóricos y aplicados, se requiere hallar la solución de una ecuación diferencial parcial. En algunos casos simples es posible hallar una fórmula que representa la solución a través de funciones elementales bien conocidas. Sin embargo, por regla general es posible hallar la solución exacta. Para un problema lineal si el dominio de definición de la solución tiene forma geométrica arbitraria. El caso de un problema no lineal es aún más complicado. Es así que en las últimas décadas paralelo con los métodos analíticos se usan cada vez los métodos numéricos en donde la solución numérica representa un conjunto de números y se considera la solución aproximada del problema diferencial original

1.5 Funcional

Sea M una clase de funcionales $y(x) \in M$ le corresponde, según una regla, un número determinado I , se dice que en la clase M está definida la funcional I y se escribe $I = [y(x)]$. La clase M de funciones $y(x)$ en la clase que está definida la funcional $I = [y(x)]$ se denomina campo de funciones de la funcional

Ejemplo 1.10. Sea $M = C[0, 1]$ el conjunto de todas las funciones continuas $y(x)$ definidas en el segmento $[0, 1]$ y sea

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx \quad (1.7)$$

Entonces $J[y(x)]$ es una funcional de $y(x)$; a toda función $y(x) \in C[0, 1]$ le corresponde un valor determinado.

$J[y(x)]$. Tomando (1.7) funciones concretas en lugar de $y(x)$, obtendremos los valores correspondientes de $J[y]$.

Por ejemplo

$$\begin{aligned} \text{si } y(x) &= 1, \text{ tenemos} \\ J[1] &= \int_0^1 1 dx = 1; \\ \text{si } y(x) &= e^x, \text{ tenemos} \\ J[e^x] &= \int_0^1 e^x dx = 1e - 1; \\ \text{si } y(x) &= \cos(\pi x), \text{ tenemos} \\ J[\cos(\pi x)] &= \int_0^1 \cos(\pi x) dx = 0; \end{aligned}$$

1.6 Teoremas del Cálculo Vectorial

Para poder realizar un estudio de los capítulos siguientes, será de gran ayuda algunos teoremas importantes. como: teorema de la divergencia de Gauss para campos vectoriales, Primera Forma del Teorema Green para campos escalares y Segunda Forma del Teorema Generalizado de Green

1.6.1 Teorema de la divergencia de Gauss para un campo vectorial de F

Teorema 1.1. (de Gauss de la divergencia)

Sea V un sólido simple de \mathbb{R}^3 y $S = \partial V$ su borde, orientado con la normal unitaria exterior n . Sea $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Entonces

$$\int_V \operatorname{div} F = \int_S F \cdot n dS$$

Demostración.

Haremos la demostración suponiendo que V es un sólido proyectable xy , proyectable yz , y proyectable xz . Que V sea proyectable xy significa que V puede escribirse la manera siguiente:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

donde D es una región del plano xy limitada por una curva cerrada simple regular a trozos, y $\varphi, \psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 en D ; es decir, V puede verse como lo que queda entre las gráficas de dos funciones de clase C^1 definidas en la proyección de V sobre el plano xy . Análogamente se define el ser proyectable xz o proyectable yz .

Sea $F = (P, Q, R)$. Como V es proyectable xy podemos escribir

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

donde D, φ, ψ cumplen las condiciones explicitadas anteriormente, y tenemos, aplicando el teorema de Fubini, que

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_D R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy \quad (1.8)$$

Calculemos por otra parte la integral

$$\int_S (0, 0, R) \cdot ndS$$

Podemos descomponer S en tres piezas, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde

$$S_1 = \{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

$$S_2 = \{(x, y, \psi(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \partial D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

En S_3 el vector normal exterior unitario n es perpendicular al eje z y por tanto también en al campo $(0, 0, R)$, de modo que

$$\int_{S_3} (0, 0, R) \cdot ndS = 0$$

Por otro lado la normal n apunta hacia arriba en S_2 y hacia abajo en S_1 , de modo que, al calcular las integrales $\int_{S_i} (0, 0, R) \cdot ndS$ obtenemos

$$\int_{S_3} (0, 0, R) \cdot ndS = \int_D (0, 0, R(x, y, \psi(x, y))) \cdot \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}, -\frac{\partial \psi}{\partial y}, 1\right) dx dy = \int_D R(x, y, \psi(x, y)) \cdot dx dy$$

mientras que

$$\int_{S_1} (0, 0, R) \cdot ndS = \int_D (0, 0, R(x, y, \varphi(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, -1\right) dx dy = - \int_D R(x, y, \varphi(x, y)) \cdot dx dy$$

Por tanto

$$\int_S (0, 0, R) \cdot ndS = \int_{S_2} (0, 0, R) \cdot ndS + \int_{S_1} (0, 0, R) \cdot ndS + \int_{S_3} (0, 0, R) \cdot ndS$$

$$= \int_D R(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \int_D R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy$$

lo que combinado con (1.8) nos da

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_S (0, 0, R) \cdot ndS \quad (1.9)$$

Análogamente, usando que V es proyectable xz y proyectable yz , se comprueba que

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \int_S (0, Q, 0) \cdot ndS \quad (1.10)$$

y que

$$\int_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \int_S (P, 0, 0) \cdot ndS \quad (1.11)$$

Finalmente, sumando (1.9), (1.10) y (1.11) obtenemos que

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_S (P, Q, R) \cdot ndS$$

es decir el enunciado del teorema para sólidos proyectables en cualquiera de las tres direcciones de los ejes. La clase de dichos sólidos incluye las bolas y en general todos los sólidos convexos de \mathbb{R}^3 .

1.6.2 Primera Forma del Teorema Green para campos escalares u, v

Teorema 1.2. (*Primera Forma del Teorema de Green*)

$$\int_V (u \nabla^2 v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v) dV = \int_S (u \text{grad } v \cdot \eta) dS$$

1.6.3 Segunda Forma del Teorema de Green

Teorema 1.3. (*Segunda Forma del Teorema de Green*)

$$\int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \int_S (u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}) dS$$

Capítulo 2

Obtención de un Funcional Asociado a la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad - \nabla^2 u = f \quad (2.1)$$

donde: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$-\nabla^2 u = f \quad \dots \quad E. Poisson$$



Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y no homogénea. Es importante indicar que las condiciones de frontera que se consideran son

$$\text{Dirichlet} \quad u = g(s) \quad \text{en } C_1$$

$$\text{Neuman} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = j(s) \quad \text{en } C_2$$

$$\text{Robbin} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \theta(s)u = h(s) \quad \text{en } C_3$$

se sabe que estas condiciones son homogéneas si

$$g(s) = j(s) = h(s) = 0$$

Antes de estudiar lo que se mencionó anteriormente, se darán algunas definiciones y resultados importantes

2.1 Operador Diferenciable

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$Lu = f \tag{2.2}$$

donde

$$Lu \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{2.3}$$

Sujeta a condiciones de frontera homogéneas

$$\text{C.F Dirichlet } u=0 \quad \text{en } C_1$$

$$\text{C.F Neuman } \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{en } C_2$$

$$\text{C.F Robbin } \frac{\partial u}{\partial \eta} + \theta(s)u = 0 \quad \text{en } C_3$$

Definición 2.1. El operador L , es llamado autoadjunto si y solo si, la expresión

$$\int_D \int v L u dx dy - \int_D \int u L v dx dy$$

Es una función solo de v, u y de sus derivadas parciales.

Ejemplo 2.1. Si $L = -\nabla^2$, entonces es autoadjunto

Demostración.

Hipótesis: $L = -\nabla^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y}$

Tesis: L es autoadjunto

$$\equiv \int_D \int v L u dx dy - \int_D \int u L v dx dy$$

sea una función solo de v, u y de sus derivadas parciales

En efecto

$$\begin{aligned} \int_D \int v L u dx dy - \int_D \int u L v dx dy &= F \\ F &= - \int_D \int v \nabla^2 u dx dy + \int_D \int u \nabla^2 v dx dy \\ F &= \int_D \int (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dx dy \\ &= \int_S (u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}) dS \end{aligned}$$

\therefore el operador $L = -\nabla^2$ es autoadjunto.

Corolario 2.1. Si el operador L esta Sujeta a condiciones de frontera homogénea entonces L es auto-adjunto si y solo si

$$\int_D \int v L u dx dy = \int_D \int u L v dx dy$$

Sea $-\nabla^2 = f$, sujeta a condiciones de frontera

Dirichlet $u=0$ en c_1

Neuman $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ en c_2

Robbin $\frac{\partial u}{\partial \eta} + \theta(s)u = 0$ en c_3

Demostrar que $-\nabla^2$ es auto adjunto $\Leftrightarrow \int_D \int v \nabla^2 u dx dy = \int_D \int u \nabla^2 v dx dy$

$$F = \int_D \int v \nabla^2 u dx dy - \int_D \int u \nabla^2 v dx dy$$

$$= \int_S (u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}) dx dy$$

$$= \int_{c_1} (u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds + \int_{c_2} (u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds + \int_{c_3} (u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds$$

$$*) \int_{C_1} (u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds = \int_{C_1} \overset{0}{u \cancel{\frac{\partial v}{\partial \eta}}} ds - \int_{C_1} \overset{0}{v \cancel{\frac{\partial u}{\partial \eta}}} ds$$

$$*) \int_{C_2} (u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds = \int_{C_2} u \frac{\partial v}{\partial \eta} ds - \int_{C_2} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds$$

$$*) \int_{C_3} (u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds = \int_{C_3} u \frac{\partial v}{\partial \eta} ds - \int_{C_3} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds$$

$$= - \int_{C_3} u \theta(s) v ds + \int_{C_3} v \theta(s) u ds$$

$$= \int_{C_3} uv \theta(s) ds - \int_{C_3} uv \theta(s) ds$$

$$= 0$$

$$\therefore F = \int_D \int v \nabla^2 u dx dy - \int_D \int u \nabla^2 v dx dy = 0$$

$$\int_D \int v \nabla^2 u dx dy = \int_D \int u \nabla^2 v dx dy$$

Definición 2.2. El operador \mathcal{L} es definido positivo si y solo si, para toda las funciones μ

$$\int_D \int \mu \mathcal{L} \mu dx dy \geq 0$$

Ejemplo 2.2. Demostrar que $-\nabla^2$ es definido positivo

Demostración

$v\nabla^2 u = \text{div}(v\text{grad}\mu) - \text{grad}\mu \cdot \text{grad}\mu$ (por teorema de la divergencia).

Entonces

$$\begin{aligned} - \int \int \mu \nabla^2 \mu dx dy &= - \int_D \int \text{div}(\mu \text{grad}\mu) + \int_D \int \text{grad}\mu \cdot \text{grad}\mu \\ &= - \int_C \mu \frac{\partial \mu}{\partial \eta} ds + \int_D \int \|\text{grad}\mu\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.2 Obtención de un Funcional Asociado a la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera Homogéneas

Para encontrar el desplazamiento de equilibrio de una membrana extendida a través de una estructura, en la forma de una curva C , la cual es sometida a una recarga de presión $P(x, y)$ por unidad de área.

Si la tensión T en la membrana se asume constante, entonces la deflexión (o desviación) transversal “ w ” satisface la ecuación de Poisson.

$$-\nabla^2 w = \frac{P}{T} \quad (2.4)$$

En mecánica la ecuación de Poisson gobierna la deflexión “ w ” de la membrana sometida a tensiones internas T . Es decir, esta ecuación describe el equilibrio estático de una membrana.

Supóngase que la membrana da un pequeño desplazamiento virtual interno “ Δw ” en el punto (x, y) .

Si D es el área de la superficie de la membrana, entonces el trabajo total virtual realizado por aplicar la fuerza presión está dado por

$$\Delta \int_D \int P w dx dy = \int_D \int P \Delta w dx dy \quad (2.5)$$

Ahora supongamos que tenemos el problema con condiciones de frontera

$$-\nabla^2 w = \frac{P}{T}$$

$$w = 0 \quad \text{en } C_1$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad \text{en } C_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} + \theta(s)w = 0 \quad \text{en } C_3$$

(2.6)

en (2.5)

$$\Delta \int_D \int P w dx dy = \int_D \int P \Delta w dx dy$$

De: $-\nabla^2 w = \frac{P}{T} \rightarrow P = -T \nabla^2 w$ Luego:

$$\begin{aligned} \Delta \int_D \int P w dx dy &= \int_D \int -T \nabla^2 w \Delta w dx dy \\ &= \int_D \int -T \left[\operatorname{div}(\Delta w \operatorname{grad} w) - \operatorname{grad} \Delta w \cdot \operatorname{grad} w \right] dx dy \\ &= - \int_D \int T \operatorname{div}(\Delta w \cdot \operatorname{grad} w) + \int_D \int T (\operatorname{grad} \Delta w \cdot \operatorname{grad} w) dx dy \\ &= - \oint_C T \Delta w \frac{\partial w}{\partial \eta} dS + \int_D \int T \operatorname{grad} \Delta w \operatorname{grad} w dx dy \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \Delta w &= \left(\frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} \quad \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} \right) \\ &= \left(\Delta \frac{\partial w}{\partial x} \quad \Delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &= \Delta \operatorname{grad} w \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\text{grad } \Delta w \cdot \text{grad } w &= \Delta \text{grad } w \cdot \text{grad } w \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Delta y \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \Delta y \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \Delta x + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \Delta y \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \| \text{grad } w \|^2 \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \| \text{grad } w \|^2 \Delta y \\
&= \frac{1}{2} \Delta \| \text{grad } w \|^2 \\
\Delta \int_D \int P w dx dy &= - \oint_C T \Delta w \frac{\partial w}{\partial \eta} dS + \int_D \int \frac{T}{2} \Delta \| \text{grad } w \|^2 dx dy \\
&= -T \oint_C \Delta w \frac{\partial w}{\partial \eta} dS + \Delta \int_D \int \frac{T}{2} \| \text{grad } w \|^2 dx dy \\
&= -T \left[\oint_{C_1} \Delta w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds + \oint_{C_2} \Delta w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds + \oint_{C_3} \Delta w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds \right] \\
&\quad + \Delta \int_D \int \frac{T}{2} \| \text{grad } w \|^2 dx dy \\
\text{en } C_1 \quad w = 0 &\rightarrow \Delta w = 0 \quad \rightarrow \oint_{C_1} \Delta w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds = 0 \\
\text{en } C_2 \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 &\quad \rightarrow \oint_{C_2} \Delta w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds = 0 \\
\text{en } C_3 \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\theta(s)w &\quad \rightarrow \oint_{C_3} \Delta w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds = - \oint_{C_3} \Delta w \theta(s) ds
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\Delta \int_D \int P w dx dy &= T \oint_{C_3} \Delta w \theta(s) w ds + \Delta \int_D \int \frac{T}{2} \| \text{grad } w \|^2 dx dy \\
0 &= \Delta \int_D \int \frac{T}{2} \| \text{grad } w \|^2 dx dy - \Delta \int_D \int P w dx dy + T \oint_{C_3} \Delta w \theta(s) w ds \\
0 &= \Delta \int_D \int \left[\frac{T}{2} \| \text{grad } w \|^2 - P w \right] dx dy + T \oint_{C_3} \Delta \theta(s) w^2 ds \\
0 &= \frac{T}{2} \Delta \int_D \int \left[\| \text{grad } w \|^2 - \frac{2P}{T} w \right] dx dy + T \Delta \oint_{C_3} \theta(s) w^2 ds \\
0 &= \Delta \left[\frac{T}{2} \int_D \int \left[\| \text{grad } w \|^2 - \frac{2P}{T} w \right] dx dy + T \oint_{C_3} \theta(s) w^2 ds \right] \\
0 &= \Delta \left[\frac{1}{2} \int_D \int \left[\| \text{grad } w \|^2 - \frac{2P}{T} w \right] dx dy + \oint_{C_3} \theta(s) w^2 ds \right] \\
0 &= \Delta I[w]
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
I[w] &= \left[\frac{1}{2} \int_D \int \left[\| \text{grad } w \|^2 - \frac{2P}{T} w \right] dx dy + \oint_{C_3} \theta(s) w^2 ds \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_D \int \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{2P}{T} w \right] dx dy + \oint_{C_3} \theta(s) w^2 ds
\end{aligned}$$

La solución del problema (2) es tal que $\Delta I = 0$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
&= \text{grad } w \cdot \text{grad } w \\
&= \text{grad}^2 w
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
I[w] &\approx \int_D \int \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{2P}{T} w \right] dx dy + \oint_{C_3} \theta(s) w^2 ds \quad ; \quad C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \\
&\approx \int_D \int [\text{grad } w \text{ grad } w - \frac{2P}{T} w] dx dy + \oint_{C_3} \theta(s) w^2 ds \\
&\approx \int_D \int [-w \nabla^2 w] dx dy + \oint_C w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds + \oint_{C_3} \theta w^2 ds - \int_D \int \frac{2P}{T} w dx dy \\
&\approx \int_D \int [-w \nabla^2 w] dx dy + \left[\oint_{C_1} w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds + \oint_{C_2} w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds + \oint_{C_3} w \frac{\partial w}{\partial \eta} ds \right] + \\
&\quad \oint_{C_3} \theta w^2 ds - \int_D \int \frac{2P}{T} w dx dy \\
&\approx \int_D \int [-w \nabla^2 w - \frac{2P}{T} w] dx dy + \oint_{C_3} (w \frac{\partial w}{\partial \eta} + \theta w^2) ds \\
&\approx \int_D \int [-w \nabla^2 w - \frac{2P}{T} w] dx dy + \oint_{C_3} w [\frac{\partial w}{\partial \eta} + \theta w] ds \\
I[w] &\approx \int_D \int [-w \nabla^2 w - \frac{2P}{T} w] dx dy = \int_D \int [w(-\nabla^2 w) - \frac{2P}{T} w] dx dy
\end{aligned}$$

En forma general si se tiene

$$-\nabla^2 u = f$$

$$Lu = f$$

en alguna región D con condiciones de frontera homogénea, la funcional debe ser:

$$I[u] = \int_D \int u Lu dx dy - 2 \int_D \int u f dx dy \quad (2.7)$$

Demostraremos que si L es un operador definido positivo y autoadjunto entonces la única solución de $Lu = f$ con condiciones de frontera homogéneas ocurre en el mínimo valor de $I[u]$ dado por la ecuación (2.7)

Supongamos que u_0 es la solución exacta, entonces

$$Lu_0 = f$$

$$\begin{aligned} I[u] &= \int_D \int u L u dx dy - 2 \int_D \int u L u_0 dx dy \\ &= \int_D \int u L u dx dy - \int_D \int u L u_0 dx dy - \int_D \int u L u_0 dx dy \\ &= \int_D \int u L (u - u_0) dx dy - \int_D \int u L u_0 dx dy \\ &= \int_D \int u L (u - u_0) dx dy - \int_D \int (u - u_0) L u_0 dx dy - \int_D \int u_0 L u_0 dx dy \end{aligned}$$

Puesto que L es autoadjunto y las condiciones son homogéneas

$$\begin{aligned} &= \int_D \int (u - u_0) L u dx dy - \int_D \int (u - u_0) L u_0 dx dy - \int_D \int u_0 L u_0 dx dy \\ &= \int_D \int (u - u_0) L (u - u_0) dx dy - \int_D \int u_0 L u_0 dx dy \end{aligned}$$

Puesto que L es definido positivo y u_0 es no trivial

$$\int_D \int u_0 L u_0 dx dy > 0$$

y

$$\int_D \int (u - u_0) L (u - u_0) dx dy \geq 0$$

La igualdad ocurre si y solo si $u \equiv u_0$. $I[u]$ toma su mínimo valor cuando $u = u_0$.

El resultado da un método para encontrar una solución aproximada para la ecuación $Lu = f$ con condiciones de frontera homogéneas, en método sistemático para encontrar una solución aproximada en el método de Royleigh-Ritz, el cual, como se verá más adelante, se buscará un valor estacionario de I para encontrar sus derivadas con respecto al conjunto de parámetros escogido.

Supongamos que u_0 es una función la cual proporciona un valor estacionario para $I[u]$.

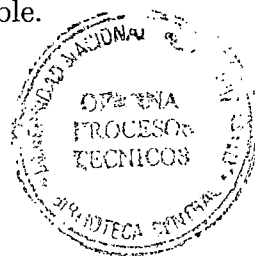
Consideremos variaciones alrededor de u_0 dadas por las así llamadas funciones de prueba.

$$\tilde{u} = u_0 + \alpha v$$

donde v es una función de prueba y α es un parámetro variable.

Entonces $I[u]$ es estacionario cuando $\alpha = 0$, es decir

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (2.8)$$



Ahora:

$$I[\tilde{u}] = \int_D \int (u_0 + \alpha v) L(u_0 + \alpha v) dx dy - 2 \int_D \int (u_0 + \alpha v) f dx dy$$

De esta manera

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_D \int \{v L(u_0 + \alpha v) + (u_0 + \alpha v) Lv\} dx dy - 2 \int_D \int v f dx dy$$

Puesto que L y $\frac{d}{d\alpha}$ conmutan, así que la ecuación (2.8) da

$$\int_D \int (v Lu_0 + u_0 Lv) dx dy - 2 \int_D \int v f dx dy$$

Puesto L es autoadjunto y las condiciones de frontera son homogéneas, de esto entonces se sigue que

$$\int_D \int v (Lu_0 - f) dx dy = 0$$

Finalmente, puesto que v es arbitraria, la integral es cero $\Leftrightarrow Lu_0 = f$, es decir u_0 es la única solución de la ecuación (2.5)

2.3 Obtención de un Funcional Asociado a la Ecuación de Poisson con Condiciones de Frontera no Homogéneas

En la sección anterior, el funcional para $Lu = f$ fue deducido asumiendo que las condiciones de frontera fueron homogéneas, esto fue debido al hecho de que L fue lineal, autoadjunto y definido positivo. En general, la mayoría de problemas involucran condiciones de frontera no homogéneas, y en esta sección el funcional

$$I[u] = \int_D \int u L u dx dy - 2 \int_D \int u f dx dy$$

es extendida para incluir tales casos.

Las condiciones de frontera no homogéneas son:

Condiciones de frontera de Dirichlet

$$u = g(s)$$

Condiciones de frontera de Neuman

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = j(s)$$

Condiciones de frontera de Robbin

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \theta(s)u = h(s)$$

La condición de Neuman será tratado como un caso especial de la condición de Robbin con $\theta(s) \equiv 0$. Todas estas condiciones son de la forma

$$Bu = b(s) \tag{2.9}$$

donde B es un operador diferencial lineal adecuado.

Ahora consideremos el problema

$$\begin{cases} Lu_0 = f \\ Bu = b(s) \end{cases}$$

para encontrar una solución de u_0 del problema anterior, procederemos en cambiar el problema a uno con condiciones en frontera homogéneas.

Supongamos que v es una función la cual satisface las condiciones de frontera (2.9) es decir:

$$Bv = b$$

Entonces, si

$$w = u - v \quad (2.10)$$

$$Bw = B(u - v) = Bu - Bv$$

$$Bw = 0 \quad (2.11)$$

tal que u es escogida satisfaciendo las condiciones de frontera sea

$$w_0 = u_0 - v$$

entonces:

$$\begin{aligned} Lw_0 &= Lu_0 - Lv \quad \text{puesto que } L \text{ es lineal} \\ &= f - Lv \end{aligned}$$

ahora sea

$$F = f - Lv \quad (2.12)$$

entonces

$$Lw_0 = F$$

w_0 además satisface las condiciones de frontera homogéneas (2.11) además w_0 es la única función la cual minimiza la funcional

$$I[w] = \int_D \int (wLw - 2wF) dx dy$$

pero esta funcional puede ser reescrita en términos de u usando las ecuaciones (2.10) y (2.12) como:

$$\begin{aligned} I[u] &= \int_D \int \{(u-v)L(u-v) - 2(u-v)(f-Lv)\} dx dy \\ &= \int_D \int (uLu - 2uf + uLv - vLu) dx dy + \int_D \int (2vf - vLv) dx dy \end{aligned}$$

Ahora la última integral de la derecha es una cantidad fija y con respecto a la minimización y es tal que no puede ser afectada por la función u_0 el cual da el mínimo valor.

Consecuentemente, este término es eliminado de I , obteniendo la funcional

$$I[u] = \int_D \int (uLu - 2uf + uLv - vLu) dx dy$$

el cual es minimizado por u_0

Capítulo 3

El Método de Rayleigh-Ritz

3.1 Aplicación del Método de Rayleigh-Ritz

El método de Rayleigh-Ritz proporciona un algoritmo para minimizar un funcional dado y requiere el escoger un conjunto completo adecuado de funciones bases linealmente independiente

$$v_i(x, y), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

La solución exacta u , es aproximada por una sucesión de funciones de prueba

$$\tilde{u}_n = \sum_{i=0}^n c_i v_i \tag{3.1}$$

donde las constantes c_i son escogidas para minimizar $I[\tilde{u}_n]$ (en cada etapa).

Una medida de la calidad de la solución es como las condiciones naturales son satisfechas. Si $\tilde{u}_n \rightarrow u$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces el procedimiento es llamado una convergencia para la solución. En cada etapa, el problema es reducido a una solución de un sistema de ecuaciones lineales algebraicas.

Consideremos la ecuación de Poisson

$$-\nabla^2 u = f$$

Con condiciones de frontera homogéneas de Neuman o Dirichlet.

El funcional es dado por:

$$I[u] = \int_D \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2uf \right\} dx dy$$

utilizando la aproximación (3.1), este funcional puede ser escrito como

$$\begin{aligned} I(c_0, \dots, c_n) &= \int_D \int \left\{ \left(\sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 - 2 \sum_{i=0}^n c_i v_i f \right\} dx dy \\ &= c_i^2 \int_D \int \left\{ \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + 2 \sum_{j \neq i} c_i c_j \int_D \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) dx dy \\ &\quad - 2c_i \int_D \int v_i f dx dy + \text{término independiente de } c_i \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 2A_{ii}c_i + 2 \sum_{j \neq i} A_{ij}c_j - 2h_i \quad (3.2)$$

donde

$$A_{ij} = \int_D \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.3)$$

y

$$h_i = \int_D \int v_i f dx dy \quad (3.4)$$

ahora los parámetros variacionales c_i son escogidos tal que $I(c_0, \dots, c_n)$ es un mínimo.

Así

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0$$

entonces en (3.2)

$$\sum_{i,j=0}^n A_{ij} \cdot c_j = h_i$$

o

$$AC = h \quad (3.5)$$

donde los elementos de las matrices A y h están dados por las ecuaciones (3.3) y (3.4) y $c = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$. Ecuación (3.5) es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales para los parámetros desconocidos el cual tiene una única solución si A es no singular.

3.2 Ejemplos Aplicativos

Ejemplo 3.1. Considere la ecuación de Poisson

$$-\nabla^2 u = 2(x + y) - 4$$

En el cuadrado cuyo vértices son $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ y las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= y^2, & u(x, 0) &= x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) &= 2 - 2y - y^2, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) &= 2 - 2x - x^2 \end{aligned}$$

Resuelve el problema de valores en la frontera usando funciones de prueba de la forma

$$\begin{aligned} \bar{u}_A &= x^2 + y^2 + c_0 xy \\ \bar{u}_B &= x^2 + y^2 + c_0 xy + c_1(x + y) \end{aligned}$$

Aplicando el Método de Rayleigh - Ritz

$$A_{00} = \int_0^1 \int_0^1 (y^2 + x^2) dx dy = \frac{2}{3}$$

$$A_{01} = A_{10} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ y(2xy + y^2 + x(x^2 + 2xy)) \right\} dx dy = \frac{7}{6}$$

$$A_{11} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (2xy + y^2)^2 + (x^2 + 2xy)^2 \right\} dx dy = \frac{103}{45}$$

$$A_{02} = \int_0^1 \int_0^1 (y2x + 2yx) dx dy = 1$$

$$A_{12} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (2xy + y^2)2x + (x^2 + 2xy)2y \right\} dx dy = 2$$

$$S_{ij} = 0 \quad (i = 0, 1, 2; j = 0, 1, 2, 3);$$

$$h_0 = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ 2(x + y) - y \right\} xy(x + y) dx dy = -\frac{7}{8}$$

$$h_1 = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ 2(x + y) - y \right\} xy(x + y) dx dy = -\frac{7}{8}$$

$$k_0 = \int_0^1 1y(2 - 2y - y^2)dy + \int_0^1 1x(2 - 2x - x^2)dx = \frac{1}{6}$$

$$k_1 = \int_0^1 1y(1 + y)(2 - 2y - y^2)dy + \int_0^1 1x(2 - 2x - x^2)dx = \frac{1}{10}$$

Así la solución aproximada \bar{u}_A se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{2}{3}c_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - 1;$$

$$\text{es decir } c_0 = \frac{7}{4}$$

De esta manera

$$\bar{u}_A = x^2 + y^2 - \frac{7}{4}xy$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} & \frac{103}{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 \\ -\frac{7}{18} + \frac{1}{10} - 2 \end{bmatrix}$$

Así también para la solución aproximada \bar{u}_B tenemos:

$$\bar{u}_B = x^2 + y^2 - xy(x + y)$$

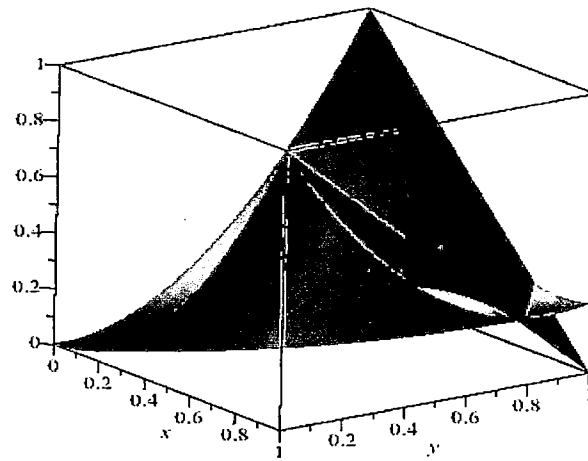


Figura 3.1: Gráfica de la solución aproximada con una función de prueba

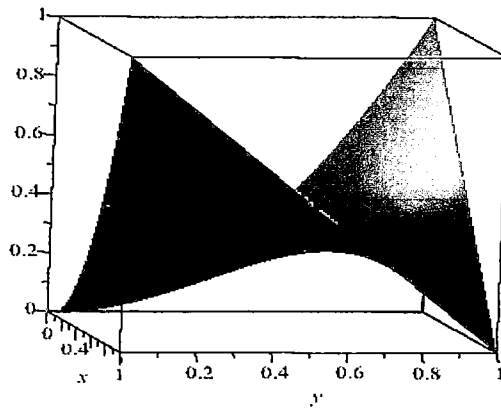


Figura 3.2: Gráfica de la solución aproximada con dos funciones de prueba

Ejemplo 3.2.

$$-\nabla^2 = -6x - 2$$

$$\text{C.I. } \mu(0, y) = y^2 \quad ; \quad \mu(x, 0) = x^3$$

$$\mu_x(1, y) = 3 \quad ; \quad \mu_y(x, 1) = 2$$

Primero hallaremos la solución aproximada pero con 2 funciones de prueba

$$\tilde{\mu}_c = x^3 + y^2 + c_0 v_0 + c_1 v_1$$

$$v_0 = xy; \quad v_1 = xy(x + y)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix}$$

1.

$$\begin{aligned} A_{00} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A_{01} &= A_{10} \\ A_{01} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (y^3 + 2xy^2 + x^3 + 2x^2y) dx dy \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (y^4 + x^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 8x^2y^2) dx dy \\ A_{11} &= \frac{103}{45} \end{aligned}$$

Así

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} & \frac{103}{45} \end{pmatrix}$$

hallamos A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1236}{89} & -\frac{630}{89} \\ -\frac{630}{89} & \frac{360}{89} \end{pmatrix}$$

Luego

$$h_0 = \int_0^1 \int_0^1 v_0 f dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy(-6x-2) dx dy$$

$$h_0 = -\frac{3}{2}$$

$$h_1 = \int_0^1 \int_0^1 v_1 f dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)(-6x-2) dx dy$$

$$h_1 = -\frac{25}{12}$$

Luego

$$AC = H \implies C = A^{-1}H$$

es decir

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1236}{89} & -\frac{630}{89} \\ -\frac{630}{89} & \frac{360}{89} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{25}{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1083}{178} \\ \frac{195}{89} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \tilde{\mu}_c = x^3 + y^2 - \frac{1083}{178}xy + \frac{195}{89}xy(x+y)$$

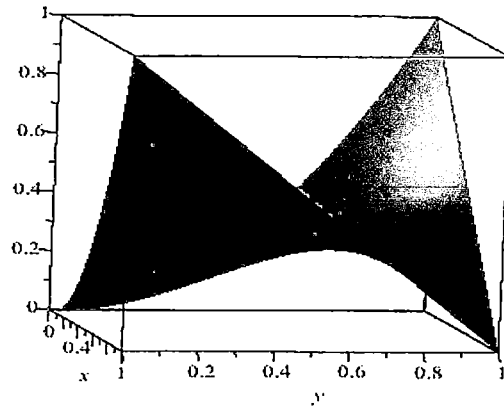


Figura 3.3: Gráfica de la solución aproximada con dos funciones de prueba

Ahora hallaremos la solución aproximada pero con cuatro funciones de prueba.

$$\tilde{\mu}_c = x^3 + y^2 + c_0 v_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

donde

$$v_0 = xy; \quad v_1 = xy(x+y); \quad v_2 = x^2y(x+y); \quad v_3 = xy^2(x+y)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

1.

$$\begin{aligned} A_{00} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(xy^2 + \frac{x^3}{3} \right)_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(y^2 + \frac{1}{3} \right) dy \\ &= \left(\frac{y^3}{3} + \frac{y}{3} \right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
A_{01} &= A_{10} \\
A_{01} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ y[y(x+y) + xy] + x[x(x+y) + xy] \right\} dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ y^3 + 2xy^2 + x^3 + 2x^2y \right\} dx dy \\
&= \int_0^1 \left(xy^3 + x^2y^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3y \right) \Big|_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left(y^3 + y^2 + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}y \right) dy \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

$$A_{01} = A_{10} = \frac{7}{6}$$

3.

$$\begin{aligned}
A_{02} &= A_{20} \\
A_{02} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ y[2xy(x+y) + x^2y] + x[x^2(x+y) + x^2y] \right\} dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ 3x^2y^2 + 2xy^3 + x^4 + 2x^3y \right\} dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(y^2 + y^3 + \frac{1}{5} + \frac{y}{2} \right) dx dy \\
&= \left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{1}{5}y + \frac{y^2}{4} \right)_0^1 dy \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{31}{30}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
A_{03} &= A_{30} \\
A_{03} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial y} \right] dx dy \\
A_{03} &= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ y[y^2(x+y) + xy^2] + x[2xy(x+y) + xy^2y] \right\} dx dy \\
A_{03} &= \frac{31}{30} = A_{30}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ [y(x+y) + xy]^2 + [x(x+y) + xy]^2 \right\} dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ y^4 + x^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 8x^2y^2 \right\} dx dy \\
&= \int_0^1 \left(y^4 + \frac{1}{5} + y + 2y^3 + \frac{8}{3}y^2 \right) dy \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{8}{9} \\
A_{11} &= \frac{103}{45}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
A_{12} &= A_{21} \\
A_{12} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ [y(x+y) + xy] \cdot [2xy(x+y) + x^2y] + \right. \\
&\quad \left. [x(x+y) + xy] \cdot [x^2(x+y) + x^2y] \right\} dx dy \\
&= \int_0^1 \left\{ \frac{5}{2}y^2 + \frac{7}{3}y^3 + y^4 + \frac{1}{6} + \frac{4}{5}y \right\} dy \\
&= \frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

$$A_{12} = \frac{131}{60}$$

7.

$$\begin{aligned}
A_{13} &= A_{31} \\
A_{12} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial y} \right] dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ [y(x+y) + xy] \cdot [y^2(x+y) + xy^2] + \right. \\
&\quad \left. [x(x+y) + xy] \cdot [2xy(x+y) + xy^2] \right\} dx dy
\end{aligned}$$

$$A_{13} = \frac{413}{180} = A_{31}$$

8.

$$\begin{aligned}
A_{22} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ [2xy(x+y) + x^2y]^2 + [x^2(x+y) + x^2y]^2 \right\} dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (3x^2y + 2xy^2)^2 + (x^3 + 2x^2y)^2 \right\} dx dy \\
&= \int_0^1 \left(13x^4y^2 + 12x^3y^3 + 4x^2y^4 + x^6 + 4x^5y \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{13}{5}y^2 + 3y^3 + \frac{4}{3}y^4 + \frac{1}{7} + \frac{2}{3}y \right) dy \\
&= \frac{17}{15} + \frac{3}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$



$$A_{22} = \frac{991}{420}$$

9.

$$\begin{aligned}
A_{23} &= A_{32} \\
A_{23} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial y} \right] dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ [2xy(x+y) + x^2y] \cdot [y^2(x+y) + xy^2] + \right. \\
&\quad \left. [x^2(x+y) + x^2y] \cdot [2xy(x+y) + xy^2] \right\} dx dy
\end{aligned}$$

$$A_{23} = A_{32} = \frac{121}{60}$$

10.

$$\begin{aligned}
A_{33} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial v_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial y} \right] dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ [y^2(x+y) + xy^2]^2 + [2xy(x+y) + xy^2]^2 \right\} dx dy \\
A_{33} &= \frac{991}{420}
\end{aligned}$$

Así

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{6} & \frac{31}{30} & \frac{31}{30} \\ \frac{7}{6} & \frac{103}{45} & \frac{131}{60} & \frac{413}{180} \\ \frac{31}{30} & \frac{131}{60} & \frac{991}{420} & \frac{121}{60} \\ \frac{31}{30} & \frac{413}{180} & \frac{121}{60} & \frac{991}{420} \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

hallamos A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{947}{736} & \frac{3782}{537} & -\frac{1665}{602} & -\frac{4715}{934} \\ \frac{3782}{537} & -\frac{1427}{124} & \frac{2282}{967} & \frac{1772}{291} \\ -\frac{1665}{602} & \frac{2282}{967} & \frac{2723}{1944} & -\frac{2153}{944} \\ -\frac{4715}{934} & \frac{1772}{291} & -\frac{2153}{944} & -\frac{1407}{1052} \end{pmatrix}$$

Luego hallamos

$$h_0 = \int_0^1 \int_0^1 v_0 f dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy(-6x-2) dx dy$$

$$h_0 = \int_0^1 \int_0^1 (-6x^2y - 2xy) dx dy$$

$$h_0 = \int_0^1 (-2x^3y - x^2y)_0^1 dy$$

$$h_0 = \int_0^1 (-2y - y) dy$$

$$h_0 = \int_0^1 (-3y) dy$$

$$h_0 = -\frac{3}{2}$$

$$h_1 = \int_0^1 \int_0^1 v_1 f dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)(-6x-2) dx dy$$

$$h_1 = \int_0^1 \int_0^1 (x^2y + xy^2)(-6x-2) dx dy$$

$$h_1 = \int_0^1 \int_0^1 (-6x^3y - 6x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2) dx dy$$

$$h_1 = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x^4y - 2x^3y^2 - \frac{2}{3}x^3y - x^2y^2 \right)_0^1 dy$$

$$h_1 = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}y - 2y^2 - \frac{2}{3}y - y^2 \right) dy$$

$$h_1 = \left(-\frac{3}{4}y^2 - \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right)_0^1 dy$$

$$h_1 = \left(-\frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) dy$$

$$h_1 = -\frac{25}{12}$$

$$h_2 = \int_0^1 \int_0^1 v_2 f dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2y(x+y)(-6x-2) dx dy$$

$$h_2 = \int_0^1 \int_0^1 (x^3y + x^2y^2)(-6x-2) dx dy$$

$$h_2 = \int_0^1 \int_0^1 (-6x^4y - 6x^3y^2 - 2x^3y - 2x^2y^2) dx dy$$

$$h_2 = \int_0^1 \left(-\frac{6}{5}y - \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}y^2 \right) dy$$

$$h_2 = \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{2}{9} \right) dy$$

$$h_2 = -\frac{283}{180}$$

$$h_3 = \int_0^1 \int_0^1 v_3 f dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy^2(x+y)(-6x-2) dx dy$$

$$h_3 = \int_0^1 \int_0^1 (x^2y^2 + xy^3)(-6x-2) dx dy$$

$$h_3 = \int_0^1 \int_0^1 (-6x^3y^2 - 6x^2y^3 - 2x^2y^3 - 2xy^3) dx dy$$

$$h_3 = -\frac{53}{36}$$

Luego

$$AC = H$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{6} & \frac{31}{30} & \frac{31}{30} \\ \frac{7}{6} & \frac{103}{45} & \frac{131}{60} & \frac{413}{180} \\ \frac{31}{30} & \frac{131}{60} & \frac{991}{420} & \frac{121}{60} \\ \frac{31}{30} & \frac{413}{180} & \frac{121}{60} & \frac{991}{420} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{25}{12} \\ -\frac{283}{180} \\ -\frac{53}{36} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = A^{-1}H$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \frac{947}{736} & \frac{3782}{537} & -\frac{1665}{602} & -\frac{4715}{934} \\ \frac{3782}{537} & -\frac{1427}{124} & \frac{2282}{967} & \frac{1772}{291} \\ -\frac{1665}{602} & \frac{2282}{967} & \frac{2723}{1944} & -\frac{2153}{944} \\ -\frac{4715}{934} & \frac{1772}{291} & -\frac{2153}{944} & -\frac{1407}{1052} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{25}{12} \\ -\frac{283}{180} \\ -\frac{53}{36} \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2223}{461} \\ \frac{1824}{2479} \\ \frac{1266}{3265} \\ \frac{747}{1694} \end{pmatrix}$$

de donde

$$c_0 = -\frac{2223}{461} ; c_1 = \frac{1824}{2479} ; c_2 = \frac{1266}{3265} ; c_3 = \frac{747}{1694}$$

$$\therefore \tilde{\mu}_c = x^3 + y^2 - \frac{2223}{461}xy + \frac{1824}{2479}xy(x+y) + \frac{1266}{3265}x^2y(x+y) + \frac{747}{1694}xy^2(x+y)$$

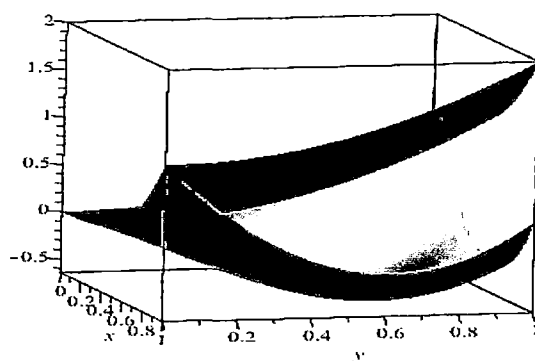


Figura 3.4: Gráfica de la solución aproximada con una función de prueba

X	Y	SE	$SA4FP$	$Error4$	$SA2FP$	$Error2$
0	0	0	0	0	0	0
0	0.25	0.0625	0.0625	0	0.025	0
0	0.5	0.25	0.25	0	0.25	0
0	0.75	0.5625	0.5625	0	0.5625	0
0	1	1	1	0	1	0
0.25	0	0.015625	0.015625	0	0.015625	0
0.25	0.25	0.078125	-0.1937904	0.2719154	-0.2336728	0.3117978
0.25	0.5	0.265625	-0.2384031	0.5040281	-0.2895014	0.5551264
0.25	0.75	0.578125	-0.1078779	0.6860029	-0.151861	0.729986
0.25	1	1.015625	0.2081204	0.8075046	0.1792486	0.8363764
0.5	0	0.125	0.125	0	0.125	0
0.5	0.25	0.1875	-0.3177754	0.5052754	-0.3676264	0.5551264
0.5	0.5	0.375	-0.5429967	0.9179967	-0.5983146	0.9733146
0.5	0.75	0.6875	-0.5299936	1.2174936	-0.5670646	1.2545646
0.5	1	1.125	-0.2580956	1.3830856	-0.2738764	1.3988764
0.75	0	0.421875	0.421875	0	0.421875	0
0.75	0.25	0.484375	-0.2066172	0.6909922	-0.245611	0.729986
0.75	0.5	0.671875	-0.5518552	1.2237302	-0.5826896	1.2545646
0.75	0.75	0.984375	-0.5828335	1.5672085	-0.589361	1.573736
0.75	1	1.421875	-0.2685464	1.6904214	-0.265625	1.6875
1	0	1	1	0	1	0
1	0.25	1.0625	0.2425221	0.8199779	0.2261236	0.8363764
1	0.5	1.25	-0.1530528	1.4030528	-0.1488764	1.3988764
1	0.75	1.5625	-0.145384	1.707884	-0.125	1.6875

SE solución exacta

SA4FP solución aproximada con 4 funciones de prueba

error4 error entre la SA4FP y SE

SA2FP solución aproximada con 2 funciones de prueba

error2 error entre la SA2FP y SE

Conclusiones

1. Aplicando el método de Rayleigh-Ritz se encontró una solución aproximada para la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas.
2. La ecuación de Poisson en la que intervienen ecuaciones diferenciales parciales de orden dos se planteó como un problema en la que intervienen ecuaciones diferenciales parciales de orden uno. Esto fue posible al formular la ecuación de Poisson con condiciones de frontera como un problema de minimización de un funcional.
3. Mediante el método de Rayleigh-Ritz fue posible resolver el problema de minimización de un funcional, como un sistema de ecuaciones lineales algebraicas.
4. A través de un ejemplo concreto se llegó a obtener una solución aproximada de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas, la cual fue igual a la solución exacta.

Recomendaciones

1. El método de Rayleigh-Ritz resulta muy ventajoso cuando el dominio en la se quiere encontrar una solución a la ecuación de Poisson con condiciones de frontera no homogéneas tiene forma regular. Lo que se sugiere investigar es que sucede si el dominio tiene forma irregular.
2. En la aplicación que se ha realizado se ha utilizado funciones de prueba tipo polinómicas, pero que sucede si estas funciones no necesariamente son polinómicas si no como por ejemplo trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.

Bibliografía

- [1] **A.J.Davies**, The Finite Element Method, An Introduction With Differential Equations. Second Edition. Oxford University Press United States, 2011.
- [2] **M. Krasnov; G. Makarenko; A. Kiseliiov**, Calculo Variacional .Ejemplos y Problemas. Editorl Mir. Moscú ,1974.
- [3] **P. Krysl**. Thermal And Stress Analysis Withthe Finite Element Method. Pressure Cooker Press. San Diego, 2010.
- [4] **L. Levedev, R. Grossi**; La Ecuacion De Poisson Desde El Punto De Vista De La Mecanica. Revista Internacional De Metodos Numericos Para Calculo y Diseño De Ingenieria. Vol. 19; 3,383-389; 2013.
- [5] **S. Larsson**; V. Thomee. Partial Differential Equation With Numerical Methods. Springer - Verlag. Berlin - Heidelberg; 2009.
- [6] **A. Quarteroni; Alberto Valli**. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer - Verlag. Berlin - Heidelberg; 2008