UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Transformaciones de Householder para resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales"

TESIS

Para optar el título profesional de

Licenciado en Matemáticas

Presentado por:

Bach. Mat. Danny Wuilliam Adanaqué Santos

Bach. Mat. Jorge Tuñoque Larrea

Asesor

Mg. Mat. Dolores Sánchez García

LAMBAYEQUE – PERÚ

2015

UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Transformaciones de Householder para resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales"

Para optar el título profesional de
Licenciado en Matemáticas

presentado por:

Bach. Mat. Danny Wuilliam Adanaqué Santos

Bach. Mat. Jorge Tuñoque Larrea

Asesor
Mg. Mat. Dolores Sánchez García

Lambayeque – Perú
2015

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Escuela Profesional De Matemática

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesina titulada "El Método de Thomas y sus Aplicaciones", presentado por los Bachilleres en Matemáticas, Danny Wuilliam Adanaqué Santos y Jorge Tuñoque Larrea, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Mg. Mat. Santos Henry Guevara Quiliche
Presidente del Jurado

Lic. Mat. Raúl Eduardo Reupo Vallejos
Miembro del Jurado

Lic. Mat. Mardo Gonzales Herrera
Miembro del Jurado

Fecha de defensa: 30 de Octubre de 2015

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

"TRANSFORMACIONES DE HOUSEHOLDER PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACION LINEALES"

Bach. Mat. Danny Wuilliam Adanaqué Santos

Bach. Mat. Jorge Tuñoque Larrea

Lic. Mat. Dolores Sánchez García

Asesor

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a las siguientes personas: Mg. Mat. Dolores Sánchez García por servirme de guía y apoyo incondicional a través del proceso de la investigación y la preparación de mi tesina. A mis compañeros de estudios por el entusiasmo y la dedicación demostrados durante los cursos adquiridos.
Sin ustedes no hubiera podido alcanzar la inspiración que me motiva a seguir con esta visión y misión de potenciar y promover el desarrollo personal y profesional de nuestra carrera.

Jorge

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.
Debo agradecer de manera especial y sincera al Mag. Mat. Dolores Sánchez García por aceptarme para realizar este trabajo bajo su dirección, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado que sea posible la culminación de este trabajo.
Muchas gracias Magister.
También me gustaría agradecer a los profesores, compañeros y amigos que tuve durante toda mi carrera profesional por sus valiosos aportes a mi formación académica y moral.
Y, por supuesto, el agradecimiento más profundo y sentido va para mi familia, mis padres Bernardo y Soledad, mis hermanos Patricia y Adrián, mi esposa Jessica, mis hijos Brayan y Dayron, mis sobrinos Yaritza, Alexis y Zhair. Sin su apoyo y colaboración habría sido imposible la realización del presente trabajo.
Para ellos: Muchas gracias y que Dios los bendiga.

Danny

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a Dios, porque Él es la inspiración de todo aquello que es bueno y fructífero. Para Él sea toda la gloria en la Tierra y en el Cielo.
Dedico mis logros a mi familia, mi esposa Karina Becerra Pérez, a mis tres hijos Leonardo Tuñoque Becerra, Katty Tuñoque Becerra y Sergio Renato Alejandro Tuñoque Becerra, los que han dado todo su apoyo incondicional y a la vez son los recipientes de todas mis alegrías.
Dedico también este trabajo a mi madre Tomasa Larrea Yamunaque por ser un verdadero ejemplo de esfuerzo, superación y de amor.

Sinceramente

Jorge Tuñoque Larrea

Dedico este trabajo a Dios quién supo guiarme por el buen camino, darme fuerzas para seguir adelante y no desmayar en los problemas que se presentaban.
A mi familia quienes por ellos soy lo que soy.
Para mis padres Bernardo y Soledad, mis hermanos Patricia y Adrián, por su apoyo, consejos, comprensión, amor, ayuda en los momentos difíciles.
A mi esposa Jessica Liliana, quien me apoyó y alentó para continuar, cuando parecía que me iba a rendir. A mis hijos Brayan y Dayron, quienes son mi motivación y felicidad.
A mis maestros, por su comprensión; en especial a mi asesor Mg. Mat. Dolores Sánchez García, por su gran apoyo en este trabajo.

Danny Wuilliam Adanaqué Santos.

Resumen

El tema central del presente trabajo es la aplicación de transformaciones de Householder para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
La resolución de sistemas de ecuaciones lineales es un problema que se presenta con frecuencia en la computación científica tales como: procesado de señal, resolución de problemas en electromagnetismo, simulación de dinámica molecular, econometría, etc. La modelización de estos problemas da lugar a sistemas de ecuaciones lineales, cuya resolución se realizará mediante transformaciones de Householder.
El presente trabajo consta de tres capítulos:
En el primer capítulo se estudiará todo lo relacionado a las matrices y ortogonalidad, pues el sistema $Ax = b$, se denotará en forma matricial y se trabajará con matrices.
En el segundo capítulo se estudiaran las transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales, pues la transformación o reflexión de Householder es una transformación lineal (matriz), también se estudian los tipos de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando el teorema de Rouché-Frobenius, en este trabajo estudiaremos los sistemas con solución y con coeficientes Reales.
Y por último, en el tercer capítulo se estudiarán las transformaciones de Householder y su aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, para ello primero estudiaremos la descomposición de una matriz (matriz de coeficientes del sistema) en un producto de dos matrices QR (ortogonal y triangular superior, respectivamente) para luego resolver el sistema $Rx = Q^T b$, (por sustitución regresiva) que es equivalente al sistema inicial $Ax = b$.
Finalizamos con las conclusiones, sugerencias y anexos de este trabajo, y adjuntamos un archivo en MATLAB, que permite realizar la descomposición de la matriz de coeficientes A en QR y la solución del sistema.

Abstract

The focus of this work is the application of Householder transformations to solve systems of linear equations.

Solving systems of linear equations is a problem that occurs frequently in scientific computing such as signal processing, problem solving in electromagnetics, molecular dynamics simulation, econometrics, etc. The modeling of these problems leads to systems of linear equations, whose decision will be made by Householder transformations.

This work has of three chapters:

In the first chapter everything related to matrices and orthogonal be studied, since the system $Ax = b$ is denoted in matrix form and work with matrices.

In the second chapter linear transformations and systems of linear equations are studied, for processing or Householder reflection is a linear transformation (matrix), the types of systems of linear equations are also studied, using the Frobenius theorem Rouché-in This paper will study the systems solution and Royal coefficients.

And finally, in the third chapter Householder transformations and its application to solving systems of linear equations will be studied, for this first study the decomposition of a matrix (matrix coefficients of the system) into a product of two QR matrices (orthogonal and upper triangular, respectively) and then solve the system $Rx = Q^T b$ (by back-substitution) that is equivalent to the initial system $Ax = b$.

We finish with conclusions, suggestions and appendices of this document, and attach a file in MATLAB, which allows the decomposition of the coefficient matrix A in QR and system solution.

Introducción

En la actualidad casi todo el trabajo de cálculo con matrices de gran tamaño se realiza en computadoras y esto ha dado un gran empuje a un área relativamente nueva, el Algebra Lineal Numérica, cuya finalidad es evaluar diversos métodos de solución, mejorar los actuales y encontrar nuevos.

Durante años, los problemas matriciales típicos fueron resueltos focalizando en las manipulaciones hechas en las entradas individuales de una matriz. En lugar de esta técnica, los algoritmos son ahora formulados descomponiendo primero una matriz genérica en el producto de distintas matrices más simples, cada una de las cuales es más fácil de trabajar que con la matriz original. Esta nueva perspectiva facilita el diseño y análisis de algoritmos, de aquí la importancia de entender cómo realizar los cálculos matriciales de manera eficiente y precisa.

El análisis de algoritmos en el área de cómputos matriciales requiere de conocimientos en Algebra Lineal, y tener alguna experiencia computacional en el uso del software Matlab. El valor que se asigna al uso de herramienta computacional está basado en el hecho de la rapidez de respuesta.

El trabajo ha sido dividido en tres capítulos: En el capítulo I ,se inicia con una revisión de los conceptos que nos permitirán comprender sin dificultad el resto del trabajo, tales como matrices , definiciones, notaciones, clases de matrices, matriz invertible, ortogonal , espacios vectoriales, ortogonalidad y norma en un espacio vectorial.

En el capítulo II, se estudia las transformaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales, así como la descripción de las soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando los diversos métodos (Jacobi y Gauss Seidel) y la descomposición

QR, por sus diversos métodos (Gram-Schmidt, Householder y Givens).

Y por último en el capítulo III, se estudia las Transformaciones de Householder y su aplicación para la resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales, este capítulo contiene la definición de las transformaciones de Householder, la construcción de la matriz Householder, así como la descomposición QR basada en Householder y su aplicación para resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales $Ax = B$.

Esperamos que este trabajo, sea de gran ayuda y sobre todo de conocimiento e información para el futuro matemático que se dedicará a las matemáticas aplicada, ya que tiene impacto en muchas áreas de investigación.

Índice general

Capítulo 1

Matrices y ortogonalidad

1.1. Matrices

Definición 1.1. Se llama matriz de orden $m \times n$ al arreglo rectangular de elementos de $m-$renglones o filas y $n-$columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n},$$

el orden de una matriz se denomina dimensión o tamaño, siendo m y n números naturales.

Notación. Simbólicamente se escribe $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Esto es a_{ij} representa el número que se encuentra en la fila i y en la columna j. A los elementos a_{ij} se les llama componentes de la matriz A.

Ejemplo 1.1. $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, donde sus filas son: $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ y sus columnas $\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

Los elementos de la matriz A son $a_{11} = 6$; $a_{12} = -3$; $a_{13} = 1$; $a_{21} = 7$; $a_{22} = 6$; $a_{23} = 8$.

1.2. Clases de matrices

1. **Matriz cuadrada:** Se denomina **matriz cuadrada de orden** n a aquella que tiene mismo número de filas que de columnas (n).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Diagonal Principal: Son los elementos a_{ij}; donde $i = j$, $\forall\ i, j$.
Diagonal Secundaria: Son los elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$

Ejemplo 1.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$; A es una matriz cuadrada de orden 3.
Elementos de la diagonal principal: 1, 3 y 5.
Elementos de la diagonal secundaria: 8,3 y 4.

2. **Matriz identidad:** Se denomina **matriz identidad** $n \times n$ a aquella que tiene a la unidad como componentes de su diagonal principal y ceros en las demás componentes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Ejemplo 1.3. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$, es la matriz identidad de orden 3.

3. **Matriz triangular superior:** Una matriz cuadrada A de orden n es **triangular superior** si las componentes que están por debajo de la diagonal principal son

todas nulas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

4. **Matriz triangular inferior:** La matriz cuadrada A es **triangular inferior** si las componentes que están por arriba de la diagonal principal son todas iguales a cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Ejemplo 1.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz triangular superior.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz triangular superior.

5. **Matriz transpuesta:** Si $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$ se define la **matriz transpuesta de** A como $A^t = (b_{ij})$ donde $b_{ij} = a_{ji}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$. A^t tiene tamaño $n \times m$ y en la matriz transpuesta la primera columna es la primera fila de A, etc.

Ejemplo 1.5. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ entonces su transpuesta es $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$.

6. **Matriz simétrica:** Una matriz cuadrada A es **simétrica** cuando $A^t = A$.

Ejemplo 1.6. $A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{8} & \boxed{3} \\ \boxed{8} & 6 & \boxed{1} \\ \boxed{3} & \boxed{4} & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$; $A^t = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{8} & \boxed{3} \\ \boxed{8} & 6 & \boxed{1} \\ \boxed{3} & \boxed{4} & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$.

A es simétrica, pues $A^t = A$.

1.3. Matriz invertible

Se dice que una matriz cuadrada A es **invertible** (o **no singular**) si existe una matriz B con la propiedad de que $AB = BA = I$, siendo I la matriz identidad, tal matriz B es única y es llamada la inversa de A.

Ejemplo 1.7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, su inversa es $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, pues $AB = I$

1.4. Matriz ortogonal

Se dice que una matriz cuadrada A es **ortogonal** si y sólo si $A^{-1} = A^t$, donde A^t es la matriz transpuesta.

Ejemplo 1.8. $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, es ortogonal, pues $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$
y $A^t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$; es decir $A^{-1} = A^t$.

1.5. Espacios vectoriales

Un **espacio vectorial** X **sobre un campo** F es un conjunto no vacío de elementos (llamados vectores) donde se han definido dos operaciones. La primera operación es llamada suma vectorial representada como $\vec{u}+\vec{v}$, y multiplicación (o producto) de escalares (números reales) con elementos de X, representada como $\alpha\vec{u}$, que satisface las siguientes condiciones:
$\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in X; \forall\ \alpha, \beta \in F$

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \in X$ (La suma es cerrada)

2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (Asociatividad de la suma)

3. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (Conmutatividad de la suma)
4. Existe un vector nulo $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ (Existencia del neutro aditivo)
5. Para cada $\vec{u}\in X$ existe un vector único $-\vec{u}\in X$, tal que: $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$ (Existencia del inverso aditivo)
6. $\alpha\vec{u}\in X$ (La multiplicación con escalares es cerrada)
7. $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$ (Asociatividad del producto escalares)
8. $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ (Distributividad del producto con respecto a la suma de escalares)
9. $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{u}$ (Distributividad del producto con respecto a la suma de vectores)
10. $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$ (Preservación de la escala)

Ejemplo 1.9. $\mathbb{R}^n$ con la suma usual de vectores y la multiplicación de un escalar por un vector, esto es, si $\vec{u}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\vec{v}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ y λ un número real:

$$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$$

$$\lambda\cdot\vec{u}=\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$$

es un espacio vectorial.

En $\mathbb{R}^n$ el producto interior (producto punto) se define como:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

Ejemplo 1.10. Sean los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$; $\vec{v}=(4,5,6)$ entonces:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6=4+10+18=32$$

1.6. Ortogonalidad de vectores

Se dice que $\vec{u}$, $\vec{v}\in E$ son ortogonales (perpendiculares) si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, escribiremos $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Ejemplo 1.11. $\vec{u}=(1,2,3)$; $\vec{v}=(-4,5,-2)$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales ($\vec{u}\perp\vec{v}$), pues $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4+10-6=0$.

1.7. Norma en un espacio vectorial

Sea E un espacio vectorial. Una norma en E es una función $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, que a cada vector $\vec{u} \in E$ le asigna un número real denotado como $\|\vec{u}\|$, llamado la norma (o módulo) de este vector, que satisface las siguientes condiciones:

1. $\|\vec{u}\| \geq 0, \forall\, \vec{u} \in E$.
2. $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}_E$.
3. $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, \vec{u} \in E$.
4. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in E$. (Desigualdad triangular).

Si en E se ha definido una norma, diremos que E **es un espacio vectorial normado.**

Ejemplo 1.12. Algunas normas comunes en $\mathbb{R}^n$ se definen como sigue:

$\|\vec{x}\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$	norma 2 o norma euclidiana
$\|\vec{x}\|_1 |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$	norma 1
$\|\vec{x}\|_\infty \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$	norma infinito

Capítulo 2

Transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales

2.1. Transformaciones lineales

Sean E y F dos espacios vectoriales y $T : E \to F$ una función. Diremos que T es una transformación lineal de E en F si:

1. $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$, $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E$
2. $T(\alpha\vec{x}) = \alpha T(\vec{x})$, $\forall\ \vec{x} \in E$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Ejemplo 2.1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3)$. Mostrar que T es lineal

1. Si $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\begin{aligned} T(\vec{a}+\vec{b}) &= T(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ &= (x_1+y_1-2(x_2+y_2), x_2+y_2+3(x_3+y_3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\vec{a})+T(\vec{b}) &= T(x_1,x_2,x_3)+T(y_1,y_2,y_3) \\ &= (x_1-2x_2, x_2+3x_3)+(y_1-2y_2, y_2+3y_3) \\ &= (x_1+y_1-2(x_2+y_2), x_2+y_2+3(x_3+y_3)) \\ &= T(\vec{a}+\vec{b}) \end{aligned}$$

2. Si $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\alpha\vec{a}) &= T(\alpha(x_1, x_2, x_3)) \\ &= T(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \\ &= (\alpha x_1 - 2\alpha x_2, \alpha x_2 + 3\alpha x_3) \\ &= \alpha(x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3) \\ &= \alpha T(x_1, x_2, x_3) \\ &= \alpha T(\vec{a}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal.

2.2. Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

En este caso tenemos m ecuaciones y n incógnitas.
Los números reales a_{ij} se denominan coeficientes, los x_i se denominan incógnitas (o números a determinar) y b_j se denominan términos independientes.
Resolver el sistema consiste en calcular las incógnitas para que se cumplan todas las ecuaciones del sistema simultáneamente.
Diremos que **dos sistemas son equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 2.2. El sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = -20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$ tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas. La solución es $(1, 7, -2)$.

2.2.1. Expresión matricial de un sistema

Cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial del modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

$$AX = B$$

La matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$ se llama matriz de coeficientes.

La matriz $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$ se llama matriz de incógnitas.

La matriz $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{m\times 1}$ se llama matriz de términos independientes.

Ejemplo 2.3. El sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = -20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$ escrito matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2.2.2. Tipos de sistemas

En general, buscaremos las soluciones de los sistemas en los números reales ($\mathbb{R}$). Dependiendo del posible número de tales soluciones reales que tenga un sistema, estos se pueden clasificar en:

$$\begin{cases} * \text{ INCOMPATIBLES} \rightarrow \text{(No tienen solución)} \rightarrow \text{S.I.} \\ * \text{ COMPATIBLES} \rightarrow \text{(Tienen solución)} \\ \begin{cases} * \text{ DETERMINADOS (Solución única)} \rightarrow \text{S.C.D.} \\ * \text{ INDETERMINADOS (Infinitas soluciones)} \rightarrow \text{S.C.I.} \end{cases} \end{cases}$$

2.2.3. Teorema de Rouché-Frobenius

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

1. El sistema de ecuaciones de matriz A y matriz ampliada $(A \setminus B)$ tiene solución (**es compatible**) si y sólo si $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A \setminus B)$ donde $\text{Rang}\, A$ es el rango de A (número de filas diferentes de cero que tiene la matriz en cualquiera de sus formas escalonadas); si los dos rangos son distintos el sistema no tienen solución (**es incompatible**).
   Propiedad:
   Sea A una matriz cualquiera. El rango A es el tamaño del mayor determinante diferente de cero que podemos construir dentro la matriz eliminando filas y columnas.

2. Supongamos que el sistema de ecuaciones es compatible. Entonces:

   a) El sistema es **compatible determinado** si y sólo si: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A \setminus B) = n$.

   b) El sistema es **compatible indeterminado** si y sólo si: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A \setminus B) < n$.

En un sistema de n **ecuaciones** y n **incógnitas**, la matriz del sistema es una **matriz cuadrada.**

El sistema será compatible determinado si, y sólo si, el rango de la matriz del sistema es n o lo que es lo mismo si el **determinante de la matriz del sistema es diferente de cero.**

Ejemplo 2.4. Consideremos el sistema: $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+y+3z=2 \\ 3x+2y+5z=3 \end{cases}$.

La matriz del sistema y la matriz ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$

Calculamos simultáneamente el rango de A y de $(A \setminus B)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-1F_2]{-1F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto el rango de A y de $(A \setminus B)$ es 2.

El sistema es **compatible indeterminado**, pues $n = 3$.

2.3. Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

Un método iterado de resolución del sistema $Ax = b$ es aquel que genera, a partir de un vector inicial x_0, una sucesión de vectores x_1, x_2, ...

El método se dirá que es consistente con el sistema $Ax = b$, si el límite de dicha sucesión, en caso de existir, es solución del sistema. Se dirá que el método es convergente si la sucesión generada por cualquier vector inicial x_0 es convergente a la solución del sistema.

En esta sección se describirán los métodos iterativos más usuales para la resolución de un sistema lineal $Ax = b$, basados en una descomposición de la matriz A en la forma $A = M - N$, donde M es una matriz, "fácilmente" inversible (triangular, diagonal, ...)

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow (M-N)x = b \\ &\Leftrightarrow Mx = Nx + b \\ &\Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{aligned}$$

Comparando con la expresión general:

$$x = Bx + c$$

Esto nos induce a elegir:

$$B = M^{-1}N; \qquad c = M^{-1}b$$

Veamos los métodos de Jacobi y Gauss Siedel

2.3.1. Método de Gauss Siedel

1. Este método en general converge más rápidamente que el método de Jacobi.
2. Supone que una mejor aproximación a la solución, se obtiene sustituyendo los valores parciales calculados, en lugar de asumir una aproximación inicial.
3. Utilizando las ecuaciones de:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

4. Y despejando para x_1, x_2 y x_3 y adicionando los valores ya obtenidos, esta se puede expresar como:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}}{a_{33}} \end{aligned}$$

5. El valor de x_1 se calcula con los valores asumidos de x_2 y x_3.
6. Posteriormente el valor de x_1 obtenido y x_3 asumido, se usan para calcular x_2. Y finalmente el nuevo valor de x_3 sale de los valores calculados x_1 y x_2.

Ejemplo 2.5. Resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones por el método de Gauss Seidel, para un $\varepsilon_a = 5\,\%$

$$\begin{aligned} 17x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 500 \\ -5x_1 + 21x_2 - 2x_3 &= 200 \\ -5x_1 - 5x_2 + 22x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Las siguientes fórmulas las utilizamos para encontrar x_1, x_2 y x_3 en cada una de las iteraciones:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \qquad x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

- El valor de x_1 se calcula con los valores asumidos de x_2 y x_3 que en principio es cero. Posteriormente el valor de x_1 es obtenido y x_3 asumido (0), se usan para calcular x_2. Y finalmente el nuevo valor de x_3 sale de los valores calculados x_1 y x_2

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_1 = \frac{500 - (-2)(0) - (-3)(0)}{17} \qquad x_2 = \frac{200 - (-5)(29,41176) - (-2)(0)}{21}$$

$$x_1 = 29,71176 \qquad x_2 = 16,52661$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \\ x_3 &= \frac{30 - (-5)(29{,}41176) - (-5(16{,}52661))}{22} \\ x_3 &= 11,80418 \end{aligned}$$

- Para la segunda iteración, en el cálculo de x_1, el valor de x_2 y x_3 serán los calculados anteriormente. Entonces para x_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ x_1 &= \frac{500 - (-2)(16,52661) - (-3)(11,80418)}{17} \\ x_1 &= 33,43916 \end{aligned}$$

- Para x_2 se utiliza el valor de x_3 de la primera iteración y el de x_1 de la segunda iteración

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ x_2 &= \frac{200 - (-5)(33,43916) - (-2)(11,80418)}{21} \\ x_2 &= 33,4 \end{aligned}$$

- Para x_3 se utiliza el valor de x_1 y x_2 calculados en la segunda iteración:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \\ x_3 &= \frac{30 - (-5)(33,43916) - (-5)(18,60972)}{22} \\ x_3 &= 13,19293 \end{aligned}$$

- Una vez obtenidos estos resultados, se debe calcular el error aproximado porcentual para cada uno de los resultados, con la fórmula:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}} \right| \cdot 100\,\%$$

- Una vez aplicado el cálculo de error se determina que los valores son superiores a la premisa inicial ($\varepsilon = 5\,\%$), determinándose que se deben continuar las iteraciones hasta que se cumpla el criterio

Iteración	x_1	x_2	x_3	$\varepsilon_a x_1$	$\varepsilon_a x_2$	$\varepsilon_a x_3$
0	0,00000					
1	29,41176	16,52661	11,80418			
2	33,43916	18,60972	13,19293	12,044 %	11,194 %	10,256 %
3	33,92931	15,85869	13,36091	1,445 %	1,320 %	1,257 %

- Se resaltan los datos donde los errores obtenidos son menores que 5 %, se logra un error aproximado porcentual menor en las tres incógnitas en la tercera iteración.

- Si sustituimos los valores en las ecuaciones originales para verificar los resultados se obtiene:

$$\begin{aligned} 17 \cdot (33,92931) - 2 \cdot (18,85869) - 3 \cdot (13,36091) &= 498,99813 \\ -5 \cdot (33,92931) + 21 \cdot (18,85869) - 2 \cdot (13,36091) &= 199,66404 \\ -5 \cdot (33,92931) - 5 \cdot (18,85869) + 22 \cdot (13,36091) &= 30,00000 \end{aligned}$$

- Al calcular los porcentajes de error de estos resultados se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Error}_{EC1} &= \frac{500 - 498,99813}{500} \cdot 100\,\% = 0,20\,\% \\ \text{Error}_{EC2} &= \frac{200 - 199,66404}{200} \cdot 100\,\% = 0,17\,\% \\ \text{Error}_{EC3} &= \frac{30 - 30}{30} \cdot 100\,\% = 0,00\,\% \end{aligned}$$

- Los resultados obtenidos son una aproximación muy buena de los valores verdaderos.

2.3.2. Método de Jacobi

Se resuelve la $i-$ésima ecuación para x_i:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Siempre que $a_{ii} \neq 0$.

$$x_i^{(k)} = \frac{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \left(-a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) + b_i}{a_{ii}}$$

Escribimos la matriz del sistema $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n}$ como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\begin{aligned} A &= D - L - U \\ Ax &= b \\ (D - L - U)x &= b \\ Dx &= (L + U)x + b \\ x &= D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \\ x^{(k)} &= D^{-1}(L + U)x^{(k-1)} + D^{-1}b \qquad k = 1, 2, \ldots \\ x^{(k)} &= T_j x^{(k-1)} + C_j \end{aligned}$$

En resumen:

Se elige: $M = D$, (Matriz diagonal)

$$N = E + F$$

La matriz del método es:

$$J = D^{-1}(E + F) \qquad \text{(Matriz de Jacobi)}$$

y el vector del método es:

$$c = D^{-1}b$$

Por tanto, el método quedará

$$x_{k+1} = D^{-1}(E+F)x_k + D^{-1}B, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

o equivalentemente:

$$Dx_k = (E+F)x_k + b, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

2.4. Descomposición QR

En álgebra lineal, la **descomposición o factorización** QR de una matriz es una descomposición de la misma como producto de una **matriz ortogonal** (Q) **por una triangular superior** (R).
Sea $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$, inversible, entonces $A = Q \cdot R$.
Donde: Q : matriz ortogonal y R : matriz triangular superior

Ejemplo 2.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ donde el $\det(A) = -17$ (inversible) entonces:
$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -1/3 \\ 0 & 4 & 1/3 \\ 0 & 3 & 5/3 \end{pmatrix}$ tal que $A = Q \cdot R$

Existen varios métodos para calcular la factorización QR. Así, los hay que se basan en **transformaciones de Householder**, otros se basan en **rotaciones de Givens**, y por ultimo están los métodos que realizan una **ortogonalización vía Gram-Schmidt** o vía Gram-Schmidt modificado.

Capítulo 3

Transformaciones de Householder y su aplicación a sistemas de ecuaciones lineales

3.1. Transformaciones de Householder

Definición 3.1. Sea $\vec{u} \neq 0$; $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, se denomina transformación o reflexión de Householder a una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ caracterizada por una matriz $H^{n\times n}$ de la forma:

$$\begin{aligned} H &= H(u) = I - 2\frac{uu^T}{\|u\|_2^2} \\ H &= I - \frac{uu^T}{\beta}, \qquad \beta = \frac{\|u\|_2^2}{2} \end{aligned}$$

donde $\vec{u}$ es el vector de Householder.

Si: $\|u\|_2 = 1$, entonces $H = I - 2uu^T$, por lo que en algunos textos definen de esta manera a la Transformación de Householder.
Por convenio se considera $H(0) = I$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2u_1^2 & 2u_1u_2 & \cdots & 2u_1u_n \\ 2u_2u_1 & 2u_2^2 & \cdots & 2u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2u_nu_1 & 2u_nu_2 & \cdots & 2u_n^2 \end{pmatrix}$$

3.1.1. Construcción de la matriz de Householder

Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, queremos construir una matriz de Householder H tal que $Hx = \alpha e_1$ (todas las componentes de Hx son ceros; excepto la primera).
Escogemos el vector $\vec{u}$ como $\vec{u} = x \pm \|x\|_2 e_1$.
Es fácil de comprobar que, construyendo H con este vector $\vec{u}$, Hx tiene todas sus componentes iguales a 0, excepto la primera.

Ejemplo 3.1. Sea $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ construiremos su matriz de Householder H.

Tomamos el vector:

$$u = x \pm \|x\|_2 e_1 \quad \Rightarrow \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces: $H = I - 2\dfrac{uu^T}{\beta}$, donde: $\beta = \dfrac{\|u\|_2^2}{2} = \dfrac{9^2 + 1^2 + 5^2 + 1^2}{2} = \dfrac{108}{2} = 54$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 81 & 9 & 45 & 9 \\ 9 & 1 & 5 & 1 \\ 45 & 5 & 25 & 5 \\ 9 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} -27 & -9 & -45 & -9 \\ -9 & 53 & -5 & -1 \\ -45 & -5 & 29 & -5 \\ -9 & -1 & -5 & 53 \end{pmatrix}, \quad \text{matriz Householder}$$

Luego comprobamos:

$$Hx = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} -27 & -9 & -45 & -9 \\ -9 & 53 & -5 & -1 \\ -45 & -5 & 29 & -5 \\ -9 & -1 & -5 & 53 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Hx = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{1}{6} - \frac{25}{6} - \frac{1}{6} \\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{6} - \frac{25}{6} - \frac{1}{6} \\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{6} - \frac{25}{6} - \frac{1}{6} \\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{6} - \frac{25}{6} - \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices de Householder son simétricas y ortogonales, y dependen sólo de la dirección del vector $\vec{u}$.

Proposición 3.1. *Sea $H = I - 2uu^T$ una matriz de Householder, entonces H es simétrica y ortogonal; por tanto $H^{-1} = H^T = H$.*

Propiedades de las matrices de Householder

1. Para cualquier par de vectores distintos de igual norma $\| \ \|_2$, existe una transformación de Householder que transforma el uno en el otro.

   $$Ha = \left(I - \frac{uu^T}{\beta}\right) a = b, \text{ con } \|a\|_2 = \|b\|_2; \quad \text{(es decir } u \text{ es un múltiplo de } b - a)$$

2. Cualquier vector c transformado por una matriz de Householder posee una forma especial: $Hc = \left(I - \frac{uu^T}{\beta}\right) c = c - \frac{u^t c}{\beta} u$, de manera que Hc es la diferencia entre el vector original c y un múltiplo especial del vector de Householder u.

3.2. Descomposición QR basada en Householder

Para una matriz genérica A, $n \times n$, no singular, las propiedades que se acaban de describir permiten construir una sucesión de $n-1$ matrices de Householder tales que: $H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A = R$, (una matriz no singular y triangular superior).

Procedimiento:

1. Construiremos una matriz Householder H_1 que transforma a_1 (la primera columna de A) en un múltiplo de e_1, es decir hacer ceros en las componentes 2 hasta n del vector a_1.

$$H_1 a_1 = \left(I - \frac{u_1 u_1^T}{\beta_1}\right) a_1 = \pm\|a_1\|_2 e_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $\gamma_{11} = \|a_1\|_2$, y su signo puede ser positivo o negativo, usualmente se escoge el signo opuesto de a_{11}: $\text{Sign}(\gamma_{11}) = -\text{Sign}(a_{11})$.

Y su vector se define como: $u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} - \gamma_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, (pues u_1 tiene que ser múltiplo de $\|a_1\|_2 e_1 - a_1$, y H_1 depende sólo de u_1).

2. Aplicamos la primera transformación de Householder H_1 en la matriz A, donde obtenemos la matriz parcialmente reducida $A^{(2)} = H_1 A$, donde la primera columna es múltiplo de e_1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Mediante una matriz householder H_1, hacemos ceros en la primera columna

$$H_1 A = A^{(2)} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Luego repetimos el mismo procedimiento, con cada columna para hacerla triangular superior.

3. Construimos la segunda transformación de Householder, el objetivo principal es reducir la segunda columna a la forma correcta, sin alterar la primera fila y la primera columna de la matriz parcialmente reducida.
   Definimos el segundo vector de Householder u_2 con la primera componente nula, de tal manera que la aplicación de la matriz de Householder H_2 a un vector cualquiera no cambia la primera componente.

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22}^{(2)} - \gamma_{22} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(2)} \end{pmatrix}$$

4. Si A es una matriz no singular, se pueden efectuar $n-1$ pasos de reducción de Householder, para obtener

$$H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A = R,$$

   con R una matriz triangular superior o singular.
   Si se denota con Q^T la matriz ortogonal $n \times n$:

$$Q^T = H_{n-1} \cdots H_2 H_1 \quad \Rightarrow \quad Q = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$$

   entonces la descomposición QR de la matriz A es:

$$Q^T A = R \quad \text{o} \quad A = QR$$

Ejemplo 3.2. Descomponer la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ en la forma QR.

1. Sea: $\|a_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, entonces: $\gamma_{11} = -\sqrt{14}$
   Definimos: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 - (-\sqrt{14}) \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta_1 = \dfrac{\|u_1\|_2^2}{2} = \dfrac{35{,}4833}{2} = 17{,}7416.$
   Construimos la matriz:

$$\begin{aligned} H_1 &= I_3 - \frac{u_1 u_1^T}{\beta} \\ H_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{17{,}7416}\right) \begin{pmatrix} 4{,}7416 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}7416 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{17{,}7416}\right) \begin{pmatrix} 22{,}4833 & 9{,}4833 & 14{,}2250 \\ 9{,}4833 & 4 & 6 \\ 14{,}2250 & 6 & 9 \end{pmatrix} \\
H_1 &= \begin{pmatrix} -0{,}2673 & -0{,}5345 & -0{,}8018 \\ -0{,}5345 & 0{,}7745 & -0{,}3382 \\ -0{,}8018 & -0{,}3382 & 0{,}4927 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Aplicamos $A^{(2)} = H_1 A$

$$
\begin{aligned}
A^{(2)} &= H_1 A = \begin{pmatrix} -0{,}2673 & -0{,}5345 & -0{,}8018 \\ -0{,}5345 & 0{,}7745 & -0{,}3382 \\ -0{,}8018 & -0{,}3382 & 0{,}4927 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
A^{(2)} &= H_1 A = \begin{pmatrix} -3{,}7417 & -1{,}0691 & -0{,}2673 \\ 0 & 2{,}1273 & 0{,}0437 \\ 0 & -2{,}3091 & -2{,}4345 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Construimos la segunda transformación de Householder:
Sea: $\|a_2\|_2 = \sqrt{2{,}1273^2 + (-2{,}3091)^2} = \sqrt{9{,}8573481} = 3{,}1396$, entonces: $\gamma_{22} = -3{,}1396$

Definimos: $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}1273 - (-3{,}1396) \\ -2{,}3091 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}2669 \\ -2{,}3091 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \frac{\|u_2\|_2^2}{2} = \frac{33{,}0726}{2} = 16{,}5363$ Construimos la matriz:

$$
\begin{aligned}
H_2 &= I_3 - \frac{u_2 u_2^T}{\beta} \\
H_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{16{,}5363}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}2669 \\ -2{,}3091 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5{,}2669 & -2{,}3091 \end{pmatrix} \\
H_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{16{,}5363}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27{,}7402 & -12{,}1618 \\ 0 & -12{,}1618 & 5{,}3319 \end{pmatrix} \\
H_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}6775 & 0{,}7355 \\ 0 & 0{,}7355 & 0{,}6776 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4. Finalmente hallamos "Q"

$$\begin{aligned}
Q &= H_1H_2\\
Q &= \begin{pmatrix} -0{,}2673 & -0{,}5345 & -0{,}8018\\ -0{,}5345 & 0{,}7745 & -0{,}3382\\ -0{,}8018 & -0{,}3382 & 0{,}4927\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -0{,}6775 & 0{,}7355\\ 0 & 0{,}7355 & 0{,}6776\end{pmatrix}\\
Q &= \begin{pmatrix} -0{,}2673 & -0{,}2275 & -0{,}9364\\ -0{,}5345 & -0{,}7745 & 0{,}3405\\ -0{,}8018 & 0{,}5915 & 0{,}0851\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego hallamos "R"

$$\begin{aligned}
R &= H_2H_1A = H_2A^{(2)}\\
R &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -0{,}6775 & 0{,}7355\\ 0 & 0{,}7355 & 0{,}6776\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3{,}7417 & -1{,}0691 & -0{,}2673\\ 0 & 2{,}1273 & 0{,}0437\\ 0 & -2{,}3091 & -2{,}4345\end{pmatrix}\\
R &= \begin{pmatrix} -3{,}7417 & -1{,}0691 & -0{,}2673\\ 0 & -3{,}1395 & -1{,}8201\\ 0 & 0 & -1{,}6174\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego se tiene la descomposición: $A = QR$

3.3. El método de Householder para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b$

Consiste en calcular la factorización QR de A, mediante las matrices de Householder, y teniendo en cuenta las equivalencias:

$$\begin{aligned}
Ax = b &\Leftrightarrow Q^TAx = Q^Tb\\
&\Leftrightarrow Rx = Q^Tb
\end{aligned}$$

se resuelve el sistema triangular equivalente: $Rx = Q^Tb$ donde x se halla con sustitución regresiva.

Con la ayuda del matlab se tiene: $x = \mathrm{inv}(R) * (Q^Tb)$

Ejemplo 3.3.

1. Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

   Observamos que: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   Además el $\det(A) = -8$, entonces $A = QR$, donde por el ejercicio anterior (descomposición QR) se tiene:

$$Q = \begin{pmatrix} -0{,}2673 & -0{,}5345 & -0{,}8018 \\ -0{,}5345 & 0{,}7745 & -0{,}3382 \\ -0{,}8018 & -0{,}3382 & 0{,}4927 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} -3{,}7417 & -1{,}0691 & -0{,}2673 \\ 0 & -3{,}1395 & -1{,}8201 \\ 0 & 0 & -1{,}6174 \end{pmatrix}$$

   Entonces:

$$\begin{aligned} Q^T b &= \begin{pmatrix} -0{,}2673 & -0{,}5345 & -0{,}8018 \\ -0{,}5345 & 0{,}7745 & -0{,}3382 \\ -0{,}8018 & -0{,}3382 & 0{,}4927 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \\ Q^T b &= \begin{pmatrix} -6{,}6815 \\ 1{,}3195 \\ -1{,}6174 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Luego:

$$\begin{aligned} Rx &= Q^T b \\ \begin{pmatrix} -3{,}7417 & -1{,}0691 & -0{,}2673 \\ 0 & -3{,}1395 & -1{,}8201 \\ 0 & 0 & -1{,}6174 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6{,}6815 \\ 1{,}3195 \\ -1{,}6174 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Sustituyendo regresivamente:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{solución del sistema}$$

2. Resolver el siguiente sistema: $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Sea: $a_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ donde: $\|a_1^t\|_2 = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{39} =$ 6,2450.

Entonces $\gamma_{11} = \sqrt{39} = 6{,}2450$.

Definimos:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -5 - \gamma_{11} \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11{,}2450 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \frac{\|u_1\|_2^2}{2} = \frac{140{,}4500}{2} = 70{,}2250$$

Construimos la matriz:

$$H_1 = I_5 - \frac{u_1 u_1^T}{\beta}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{70{,}2250}\right) \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} -0{,}8006 & 0{,}3203 & -0{,}1601 & 0{,}4804 & 0 \\ 0{,}3203 & 0{,}9430 & -0{,}0285 & -0{,}0854 & 0 \\ -0{,}1601 & 0{,}0285 & 0{,}9858 & 0{,}0427 & 0 \\ 0{,}4804 & -0{,}0854 & 0{,}0427 & 0{,}8718 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Aplicamos $A^{(2)} = H_1 A$

$$A^{(2)} = H_1 A = \begin{pmatrix} -0{,}8006 & 0{,}3203 & -0{,}1601 & 0{,}4804 & 0 \\ 0{,}3203 & 0{,}9430 & -0{,}0285 & -0{,}0854 & 0 \\ -0{,}1601 & 0{,}0285 & 0{,}9858 & 0{,}0427 & 0 \\ 0{,}4804 & -0{,}0854 & 0{,}0427 & 0{,}8718 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = H_1 A = \begin{pmatrix} 6{,}2450 & -3{,}0424 & -3{,}6829 & 1{,}9215 & -0{,}9608 \\ 0 & -0{,}1032 & -0{,}9892 & 3{,}4804 & 3{,}8823 \\ 0 & -2{,}4484 & -0{,}5054 & 4{,}2598 & 0{,}5588 \\ 0 & -1{,}6548 & -1{,}4839 & 0{,}2206 & 4{,}3235 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Construimos la segunda transformación de Householder:

Sea: $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}1032 \\ -2{,}4484 \\ -1{,}6548 \\ -3 \end{pmatrix}$, donde: $\|a_2^t\|_2 = 4{,}2123$, entonces: $\gamma_{22} = 4{,}2123$.

Definimos: $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}1032 - \gamma_{22} \\ -2{,}4484 \\ -1{,}6548 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}3155 \\ -2{,}4484 \\ -1{,}6548 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\beta_2 = \dfrac{\|u_2\|_2^2}{2} = \dfrac{36{,}3568}{2} = 18{,}1784.$

Construimos la matriz

$$H_2 = I_5 - \frac{u_2 u_2^T}{\beta}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{70{,}2250}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}3155 \\ -2{,}4484 \\ -1{,}6548 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4{,}3155 & -2{,}4484 & -1{,}6548 & -3 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0245 & -0{,}5812 & -0{,}3928 & -0{,}7122 \\ 0 & -0{,}5812 & 0{,}6702 & -0{,}2229 & -0{,}4041 \\ 0 & -0{,}3928 & -0{,}2229 & 0{,}8494 & -0{,}2731 \\ 0 & -0{,}7122 & -0{,}4041 & -0{,}2731 & 0{,}5049 \end{pmatrix}$$

d) Aplicamos $A^{(3)} = H_2 A^{(2)}$

$$A^{(3)} = H_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0245 & -0{,}5812 & -0{,}3928 & -0{,}7122 \\ 0 & -0{,}5812 & 0{,}6702 & -0{,}2229 & -0{,}4041 \\ 0 & -0{,}3928 & -0{,}2229 & 0{,}8494 & -0{,}2731 \\ 0 & -0{,}7122 & -0{,}4041 & -0{,}2731 & 0{,}5049 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6{,}2450 & -3{,}0424 & -3{,}6829 & 1{,}9215 & -0{,}9608 \\ 0 & -0{,}1032 & -0{,}9892 & 3{,}4804 & 3{,}8823 \\ 0 & -2{,}4484 & -0{,}5054 & 4{,}2598 & 0{,}5588 \\ 0 & -1{,}6548 & -1{,}4839 & 0{,}2206 & 4{,}3235 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = H_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6{,}2450 & -3{,}0424 & -3{,}6829 & 1{,}9215 & -0{,}9608 \\ 0 & 4{,}2123 & -0{,}5235 & -2{,}6479 & -3{,}5428 \\ 0 & 0 & -0{,}2411 & 0{,}7829 & -3{,}6538 \\ 0 & 0 & -1{,}3053 & -2{,}1293 & 1{,}4763 \\ 0 & 0 & 2{,}3238 & -4{,}2602 & -3{,}1617 \end{pmatrix}$$

e) Construimos la tercera transformación de Householder:

Sea: $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}2411 \\ -1{,}3053 \\ 2{,}3238 \end{pmatrix}$, donde $\|a_3^t\|_2 = 2{,}6762$, entonces $\gamma_{33} = 2{,}6762$

Definimos: $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}2411 - \gamma_{33} \\ -1{,}3053 \\ 2{,}3238 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2{,}9173 \\ -1{,}3053 \\ 2{,}3238 \end{pmatrix}$,

$$\beta_3 = \frac{\|u_3\|_2^2}{2} = \frac{15{,}6144}{2} = 7{,}8072$$

Construimos la matriz:

$$H_3 = I_5 - \frac{u_3 u_3^t}{\beta}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{7{,}8072}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2{,}9173 \\ -1{,}3053 \\ 2{,}3238 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2{,}9173 & -1{,}3053 & 2{,}3238 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}0901 & -0{,}4877 & 0{,}8683 \\ 0 & 0 & -0{,}4877 & 0{,}7818 & 0{,}3885 \\ 0 & 0 & 0{,}8683 & 0{,}3885 & 0{,}3085 \end{pmatrix}$$

f) Aplicamos $A^{(4)} = H_3 A^{(3)}$

$$A^{(4)} = H_3 A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}0901 & -0{,}4877 & 0{,}8683 \\ 0 & 0 & -0{,}4877 & 0{,}7818 & 0{,}3885 \\ 0 & 0 & 0{,}8683 & 0{,}3885 & 0{,}3083 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6{,}2450 & -3{,}0424 & -3{,}6829 & 1{,}9215 & -0{,}9608 \\ 0 & 4{,}2123 & -0{,}5235 & -2{,}6479 & -3{,}5428 \\ 0 & 0 & -0{,}2411 & 0{,}7829 & -3{,}6538 \\ 0 & 0 & -1{,}3053 & -2{,}1293 & 1{,}4763 \\ 0 & 0 & 2{,}3238 & -4{,}2602 & -3{,}1617 \end{pmatrix}$$

$$A^{(4)} = H_3 A^{(3)} = \begin{pmatrix} 6{,}2450 & -3{,}0424 & -3{,}6829 & 1{,}9215 & -0{,}9608 \\ 0 & 4{,}2123 & -0{,}5235 & -2{,}6479 & -3{,}5428 \\ 0 & 0 & 2{,}6762 & -2{,}7312 & -3{,}1362 \\ 0 & 0 & 0 & -3{,}7017 & 1{,}7078 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}4610 & -3{,}5739 \end{pmatrix}$$

g) Construimos la cuarta transformación de Householder:

Sea: $a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3{,}7017 \\ -1{,}4610 \end{pmatrix}$, donde: $\|a_4^t\|_2 = 3{,}9796$, entonces: $\gamma_{44} = 3{,}9796$.

Definimos: $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 - \gamma_{44} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7{,}6813 \\ -1{,}4610 \end{pmatrix}$,

$$\beta_4 = \frac{\|u_4\|_2^2}{2} = \frac{61{,}1367}{2} = 30{,}5683.$$

Construimos la matriz

$$H_4 = I_5 - \frac{u_4 u_4^T}{\beta}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{30{,}5683}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7{,}6813 \\ -1{,}4610 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -7{,}6813 & -1{,}4610 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}9302 & -0{,}3671 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}3671 & 0{,}9302 \end{pmatrix}$$

h) Finalmente hallamos "Q"

$$Q = H_1 H_2 H_3 H_4$$

$$Q = \begin{pmatrix} -0{,}8006 & 0{,}3203 & -0{,}1601 & 0{,}4804 & 0 \\ 0{,}3203 & 0{,}9430 & -0{,}0285 & -0{,}0854 & 0 \\ -0{,}1601 & 0{,}0285 & 0{,}9858 & 0{,}0427 & 0 \\ 0{,}4804 & -0{,}0854 & 0{,}0427 & 0{,}8718 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0245 & -0{,}5812 & -0{,}3928 & -0{,}7122 \\ 0 & -0{,}5812 & 0{,}6702 & -0{,}2229 & -0{,}4041 \\ 0 & -0{,}3928 & -0{,}2229 & 0{,}8494 & -0{,}2731 \\ 0 & -0{,}7122 & -0{,}4041 & -0{,}2731 & 0{,}5049 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}0901 & -0{,}4877 & 0{,}8683 \\ 0 & 0 & -0{,}4877 & 0{,}7818 & 0{,}3885 \\ 0 & 0 & 0{,}8683 & 0{,}3885 & 0{,}3085 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}9302 & -0{,}3671 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}3671 & 0{,}9302 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -0{,}8006 & -0{,}1035 & -0{,}3748 & -0{,}1907 & -0{,}4141 \\ 0{,}3203 & -0{,}0061 & -0{,}3078 & 0{,}6352 & -0{,}6318 \\ -0{,}1601 & -0{,}5904 & -0{,}3359 & 0{,}4591 & 0{,}5497 \\ 0{,}4804 & -0{,}3652 & -0{,}5313 & -0{,}5884 & -0{,}0857 \\ 0 & -0{,}7122 & 0{,}6080 & -0{,}0566 & -0{,}3462 \end{pmatrix}$$

i) Luego hallamos "R"

$$R =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}9302 & -0{,}3671 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}3671 & 0{,}9302 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6{,}2450 & -3{,}0424 & -3{,}6829 & 1{,}9215 & -0{,}9608 \\ 0 & 4{,}2123 & -0{,}5235 & -2{,}6479 & -3{,}5428 \\ 0 & 0 & 2{,}6762 & -2{,}7312 & -3{,}1362 \\ 0 & 0 & 0 & -3{,}7017 & 1{,}7078 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}4610 & -3{,}5739 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 6{,}2450 & -3{,}0424 & -3{,}6829 & 1{,}9215 & -0{,}9608 \\ 0 & 4{,}2123 & -0{,}5235 & -2{,}6479 & -3{,}5428 \\ 0 & 0 & 2{,}6762 & -2{,}7312 & -3{,}1362 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}9796 & -0{,}2765 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3{,}9513 \end{pmatrix}$$

Luego se tiene la descomposición: $A = QR$.
Entonces

$$Q^T b = \begin{pmatrix} -0{,}8006 & 0{,}3203 & -0{,}1601 & 0{,}4804 & 0 \\ -0{,}1035 & -0{,}0061 & -0{,}5904 & -0{,}3652 & -0{,}7122 \\ -0{,}3748 & -0{,}3078 & -0{,}3359 & -0{,}5313 & 0{,}6080 \\ -0{,}1907 & 0{,}6352 & 0{,}4591 & -0{,}5884 & -0{,}0566 \\ -0{,}4141 & -0{,}6318 & 0{,}5497 & -0{,}0857 & -0{,}3462 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Q^T b = \begin{pmatrix} 0 \\ -10{,}9205 \\ -8{,}4885 \\ -0{,}2764 \\ -3{,}9512 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$Rx = Q^T b$$

$$\begin{pmatrix} 6{,}2450 & -3{,}0424 & -3{,}6829 & 1{,}9215 & -0{,}9608 \\ 0 & 4{,}2123 & -0{,}5235 & -2{,}6479 & -3{,}5428 \\ 0 & 0 & 2{,}6762 & -2{,}7312 & -3{,}1362 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}9796 & -0{,}2765 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3{,}9513 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10{,}9205 \\ -8{,}4885 \\ -0{,}2764 \\ -3{,}9512 \end{pmatrix}$$

sustituyendo regresivamente:

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{solución del sistema}$$

Conclusiones

1. Las transformaciones de Householder, nos permiten encontrar matrices simétricas y ortogonales que facilitan la resolución de sistemas lineales generales.

2. Las matrices de Householder, conservan el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$, por eso son muy estables en su aplicación numérica.

3. La construcción de la matriz Householder, depende sólo de la dirección de un vector .

4. La importancia de las matrices Householder es que ellas pueden ser usadas para crear ceros en un vector y por lo tanto pueden dar lugar a matrices triangulares, con la finalidad de resolver sistemas de ecuaciones por medio de sustituciones sucesivas, sin la necesidad de invertir la matriz .

5. En un sistema $Ax = b$, se pueden construir transformaciones de Householder que anulen los coeficientes que se deseen de cada vector columna de A, dejando los demás como estaban.

6. La descomposición QR mediante transformaciones de Householder, nos permite resolver sistemas de ecuaciones lineales generales:

$$Ax = b \tag{1}$$

como: $A = QR$, entonces: $QRx = b$

$$Rx = Q^T b \tag{2}$$

Resolver el sistema (1) es equivalente a resolver el sistema (2).

Sugerencias

1. Se sugiere comparar el método de Householder con otros métodos para resolver sistemas de la forma $Ax = b$.

2. Sugerimos utilizar el método de Householder para encontrar soluciones de sistemas $Ax = b$ pero con dimensiones superiores.

3. Sugerimos que el método de Householder, sea de conocimiento en los estudiantes de pregrado, pues en la actualidad casi todo el trabajo de cálculo con matrices de gran tamaño se realiza en computadoras.

Anexos

Podemos recurrir a las siguientes funciones en MATLAB, para descomponer la matriz de coeficientes A en QR:

1. Función fac_QR_householder(A)

```
function [ Q, R] = fac_QR_householder(A)
%***[Q, R]=fac_QR_householder(A)***
%Calcula los factores Q y R de la
%factorización A=QR por el
%método de factorización QR de
%Householder.
  n= length(A);
  B=A(:,1);
  H1=householder1(B);
  R1=H1*A; Q1=H1;
  for j=1:n-2
      B=R1(:,j+1);
      B(1:j)=[];
      H2=householder1(B);
      H=matriz_hh(H2,n);
      R1=H*R1;
      Q1=Q1*H;
  end
  Q=Q1;
  R=R1;
```

2. Función z=householder1(b)

```
function z=householder1(b)
% ***householder1(b)****
%Calcula la matriz de Householder H
% tal que Hb=(alpha,0,...,0)
%donde alpha=-sign(b1)*||b||.
n=length(b);
I=eye(n);
x1=b(1);
alpha=-signo(b(1))*norm(b);
beta=alpha*(alpha-x1);
if beta==0
   z=I;
else
   v=b-alpha*I(:,1)
   z=I-(1/beta)*v*v';
end
```


3. Función L=matriz_hh

```
function matriz_HH( H,n )
r=length(H);
u=eye(n-r,n);
M1=[zeros(r,n-r) H];
L=[u;M1];
function z=signo(a)
if a>=0
   z=1;
else
   z=-1;
end
```

Procedimiento para obtener Q y R, en MATLAB, utilizando Householder y luego resolvemos el sistema $Ax = b$.

1. Se define la matriz A y b.

2. Se ejecuta la función 1. Función fac_QR_householder(A)

   [Q R]=fac_QR_householder(A)

3. Se obtienen Q y R.

4. Se ejecuta el comando:

   X= inv(R)*(Q'*b)

5. Se obtiene la respuesta.

Bibliografía

[1] Álgebra Lineal Para Estudiantes de Ingeniería y Ciencias.
Juan Carlos Del Valle Sotelo.
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Estado de México.
Link: http://eva.sepyc.gob.mx:8383/greenstone3/sites/localsite/collect/ciencia1/index/assoc/HASH7db0.dir/12010001.pdf;jsessionid=5EA070034AABFF150F3ABE680FDA3E63

[2] Mínimos Cuadrados Lineales.
Métodos Matemáticos de Especialidad Ingeniería Eléctrica.
José Luis de la Fuente O'Connor.
Link: http://www.jldelafuenteoconnor.es/Clase_mincua_lineal_2015.pdf

[3] Álgebra lineal numérica con Matlab.
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.
Universidad Politécnica de Madrid Javier García de Jalón de la Fuente -Septiembre 2004.
Link: http://mat21.etsii.upm.es/matesp/docs/tutoriales/AlgebraLinealNumericaConMatlab.pdf

[4] Análisis Numérico.
L. Héctor Juárez V.
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana.
hect@xanum.uam.mx - 3 de septiembre de 2008.
Link: http://docencia.izt.uam.mx/psb/ananum/material_adicional/analisisnum.pdf

[5] El Problema Lineal de Mínimos Cuadrados. Descomposición QR.
Antonio M. Vidal Murcia, Diciembre 2007.
Link: http://dis.um.es/ domingo/apuntes/CAP/0708/QRPar.pdf

[6] Algebra lineal numérica
Pablo Alberca Bjerregaard y Dolores Martín Barquero.
Matemática Aplicada - Universidad de Málaga.
Curso 2010-2011.
Link: http://www.matap.uma.es/ alberca/algebranumericaversion6dic2010_1_.pdf

[7] Métodos Numéricos.
Lino Alvarez - Aurea Martínez.
Link: http://www.dma.uvigo.es/ lino/Tema3.pdf

[8] Curso de Métodos Numéricos.
Virginia Muto Foresi.
Link: http://www.ehu.eus/ mepmufov/html/docencia-mn-esp.html

[9] Apuntes de Álgebra Numérica.
Autor Francisco Javier Cobos Gavala.
Link: http://www.imac.unavarra.es/web_imac/pages/docencia/asignaturas/tm/libros/teoria_algebra_lineal/Teoria_Algebra_Lineal.pdf