UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO
RUIZ GALLO
ESCUELA DE POST GRADO
MAESTRÍA EN CIENCIAS

# Aplicación del Método de Diferencias Finitas para el Flujo de un Contaminante en un Acuífero Confinado Homogéneo e Isotrópico

**TESIS**

**Presentada para optar el Grado Académico de Maestro en Ciencias con mención en Matemática Aplicada**

**PRESENTADA POR**

**Br. Joel Núñez Mejía**

**LAMBAYEQUE - PERÚ**

2018

# Aplicación del Método de Diferencias Finitas para el Flujo de un Contaminante en un Acuífero Confinado Homogéneo e Isotrópico


Br. Joel Núñez Mejia
**AUTOR**

Mg. Dolores Sánchez Garcia
**ASESOR**


Presentada a la Escuela de Postgrado de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. Para optar el Grado de: MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMATICA APLICADA

APROBADO POR:

M.Sc. Enrique Samillan Ayala
**PRESIDENTE DEL JURADO**

M.Sc. Hipolito Macalopu Inga
**SECRETARIO DEL JURADO**

M.Sc. Oscar Santamaria Santisteban
**VOCAL DEL JURADO**

Marzo, 2018

.

## DEDICATORIA

El presente trabajo va dedicado en primer lugar a Dios
quien me ilumina cada día y me da las fuerzas
para lograr mis metas, a mis padres Atilano y María,
quienes me apoyaron en todo momento, mis hermanos
Leonela, Josué y Raquel quienes con su apoyo logré
llegar a mi meta trazada de ser un buen profesional.
A mi esposa Verónica y mis hijas Estrella Jocabed
y Débora Luana por su amor, apoyo y cariño.

*JOEL*

.


## AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios, quien me ha dirigido cada día y me ha dado la sabiduría para realizar la presente investigación. A mis Profesores de la Escuela de Postgrado, en especial al Dr. Luis Lara Romero a quien expreso mi gratitud por su invalorable colaboración, sus valiosas ideas y alcances. A mis amigos y colegas que me motivaron a terminar este trabajo.

Mi profundo agradecimiento a mi asesor Mg. Dolores Sánchez García por su apoyo, orientación , exhortación y sugerencias.

*EL AUTOR*

# Índice general

# Índice de figuras

# Índice de cuadros

# Resumen

En el presente trabajo, planteamos un modelo para el flujo de aguas subterráneas, que implícitamente modeliza el flujo de contaminantes móviles disueltos; es por ello que nuestro análisis del flujo de un contaminante en un acuífero confinado homogéneo e isotrópico, quedará representado en el estudio del flujo del agua subterránea en un acuífero confinado homogéneo e isotrópico. Sin embargo para contaminantes con otros comportamientos, el tratamiento corresponde al tema: transporte de contaminantes, lo cual difiere del presente estudio.

Considerando un volumen de control, el cual es un paralelepípedo cuyas dimensiones de sus lados son $\Delta x, \Delta y, \Delta z$; y haciendo uso de la Ley de Darcy, que es la más apropiada para el flujo subterráneo, y el principio fundamental de la conservación de la masa de un fluido, es posible determinar la ecuación que gobierna el flujo de aguas subterráneas, que inicialmente lo determinaremos para cualquier acuífero y luego lo restringimos para un acuífero confinado homogéneo e isotrópico. Cabe indicar que esta ecuación obtenida determina el flujo transitorio y si el flujo no depende del tiempo, tan solo anulamos la variable temporal para obtener la ecuación del flujo permanente.

El método de solución usado para resolver la ecuación del flujo del agua subterránea en un acuífero confinado homogéneo e isotrópico, es el método de diferencias finitas, que determina la fórmula para determinar los niveles piezométricos.

Los niveles piezométricos, nos permiten determinar la superficie piezométrica del acuífero y las isopiezas, los cuales nos dan información de: la profundidad del agua subterránea, dirección del flujo, permeabilidad de las formaciones, etc. y así nos dan estrategias de cómo descontaminar el agua subterránea, que es fundamental para el consumo humano.

# Abstract

In the present work, we raise a model for the flux of groundwater, which implicitly modelling the flux of dissolved mobile pollutants; it is for it that our analysis of the flux of a pollutant in a homogeneous confined aquifer and isotropic, will remain represented in the study of the flow of the groundwater in a homogeneous confined aquifer and isotropic. Nevertheless for pollutants with other behaviors, the treatment corresponds to the topic: transport of pollutants, which differs from the present study.

Considering a control volume, which one is a parallelepiped which dimensions of its sides are $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ ; and making use of Darcy's Law, which is most adapted for underground flux, and the fundamental beginning of the conservation of the mass of one flux, it is possible to determine the equation that governs the water flux underground, that initially we will determine it for any aquifer and then we restrict it for a homogeneous confined aquifer and isotropic. Dig to indicate that this obtained equation determines the transitory flux and if flux does not depend on the time, only we annul the temporary variable to obtain the equation of the flux perm.

The solution method used to solve the equation of the groundwater flux in a homogeneous and isotropic confined aquifer is the finite difference method, which determines the formula for determining piezometric levels. The piezometric levels, allow us to determine the piezometric surface of the aquifer and isopiezas, which give us information of: the depth of the groundwater, direction of the flux, permeability of the formations, etc. and so they give us strategies on how to decontaminate groundwater, which is fundamental for human consumption.

# INTRODUCCIÓN

La matemática es la ciencia más rigurosa y perfecta, que afines del presente siglo las ideas se consolidan, pero a la vez surgen nuevas y sorprendentes ideas.

El flujo de contaminantes en aguas subterráneas tiene un enorme impacto en las condiciones medio ambientales y ecológicas, pues la concentración de contaminantes en los acuíferos es un problema con poco interés, sin embargo muchos de los acuíferos sirven de abastecimiento para el consumo humano. Muchos de los problemas de tierras y medio ambientales son provocados por el flujo de contaminantes provenientes de otros lugares donde se ha tenido filtracíon de deshechos químicos, biológicos y radioactivos producto de las actividades urbanas, agrícolas, industriales, aguas salinas, mineras, etc., como podemos mencionar rellenos sanitarios, basureros, pozas o lagunas de almacenamiento, desechos mineros, estanques de almacenamiento bajo el suelo, contenedores, pozos de inyección, aplicación de pesticidas,fertilizantes, residuos animales, aplicación de sales, drenaje urbano, drenaje de minas,etc. Por ello es necesario realizar un modelamiento matemático del flujo de contaminantes para dar soluciones aproximadas a problemas de la realidad y mejorar la calidad de vida.

Las aguas subterráneas están más protegidas de la contaminación que las superficiales. Así se ha considerado tradicionalmente y no han recibido tanta atención en el pasado, pero en muchos casos los problemas que plantean son mucho más relevantes.

Un contaminante atraviesa la zona del suelo no saturada sobre la capa freática antes de alcanzar el agua subterranea. En algunos casos, el agua subterránea puede estar en el contacto directo con los deshechos, como en el caso de una mina subterránea inundada.

Después de que los contaminantes han entrado en el agua subterránea, estos reciben la influencia de varios procesos. El principal causante del movimiento del contaminante es el propio movimiento del agua subterránea. Así, una "pluma"de contaminantes se formará en el agua subterránea.

El contaminante tarda en llegar a los acuíferos, se propaga con lentitud tanto en la zona no saturada como en la saturada. Aunque la complejación y la presencia de coloides hace posible que se removilicen algunos contaminantes, y que incluso se muevan a mayor velocidad que la media del flujo subterráneo. Pero no se ve, y puede ser peligrosa aun en cantidades pequeñas de algunos contaminantes. Cuando

aparece en un pozo de abastecimiento, conducto subterráneo, manantial, río, lago, o zona húmeda puede haber adquirido dimensiones grandes. Todo esto hace que algunos contaminantes puedan permanecer durante siglos o milenios en un acuífero y que incluso una contaminación actual pueda ser ocasionada por actividades que ya han desaparecido y pueden afectar a la calidad del agua subterránea dentro de muchos años. También algunos cambios hidrológicos como por ejemplo la subida del nivel freático debido a un aumento de la recarga o a una disminución de bombeos o a inundaciones pueden afectar a la movilización de contaminantes y por ende a la salud humana.

En el primer capítulo veremos algunas nociones de matemática, de hidrología y de hidráulica, también la ley de Darcy, asi como nociones del flujo de contaminantes en aguas subterráneas . En el segundo capítulo vemos el modelamiento matemático del flujo de un contaminante en un acuífero confinado homogéneo e isotrópico y finalmente en el tercer capítulo veremos la solución del modelo matemático aplicando el método de diferencias finitas, obteniendo así las alturas piezométricas.

# Capítulo 1

# PRELIMINARES

**NOCIONES DE MATEMÁTICA**

## 1.1. Ecuaciones diferenciales

**Definición 1.1.** *Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto de una o mas variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial(ED).*

### 1.1.1. Clasificación de las Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican:

1. **Por el tipo:** Ecuaciones diferenciales ordinaria y Ecuaciones diferenciales parciales.

2. **Por el orden:** primero, segundo,...,$n$ orden; siendo $n$ el orden superior de las derivadas parciales que figuran en la ecuación.

3. **Por el grado:** Lineales(grado 1) y no lineales(grado mayor e igual que 2).

**Definición 1.2** (Ecuación diferencial ordinaria(EDO))**.** *Una ecuación que contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente es llamada* ***Ecuación diferencial ordinaria*** *y es de la forma*

$$f(x(t), x'(t), ..., x^n(t)) = 0$$

*donde $t$ es la variable independiente y $x(t)$ es la función desconocida (dependiente). La función $f$ representa la relación que liga las derivadas de $x$.*

**Ejemplo 1.1.** $\frac{d^2f}{dx^2} + 3\frac{df}{dx} = 0$ *es una EDO de* $2^{do}$ *orden*

**Definición 1.3** (Ecuación diferencial parcial(EDP))**.** *Una ecuación que contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto a dos o mas variables independientes es llamada* ***Ecuación diferencial parcial*** *y es de la forma*

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 ... \partial^{k_n} x_n}\right) = 0 \tag{1.1}$$

*donde* $x_i, i = \overline{1,n}$ *son las variables independientes y* $k_i, i = \overline{1,n}$ *son enteros no negativos tales que* $k_1 + k_2 + ... + k_n = m$.
*La función* $F$ *es la función prefijada de sus argumentos.*

**Ejemplo 1.2.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ *Es una EDP de* $2^{do}$ *orden*

**Definición 1.4** (Solución de una EDP)**.** *Llamamos solución de a ecuación* (1,1) *en cierta región* $D$ *de variación de las* $x_i, i = \overline{1,n}$ *a cualquier función* $u = u(x_1, x_2, ..., x_n) \in C^m(D)$*(conjunto de funciones continuas en* $D$*, tal que al sustituir* $u$ *y sus derivadas en* (1,1)*, se cumple la igualdad.*

### 1.1.2. Clasificación de las EDP'S de segundo orden

**Definición 1.5** (EDP de segundo orden de dos variables independientes)**.** *Sea la EDP de segundo orden*

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} +$$

$$a(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + c(x,y)u(x,y) = f(x,y)$$

*en una cierta región* $D \subset R^2$*. Se llama*

1. ***Hiperbólica*** *en* $D$*, si* $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ *en* $D$.
2. ***Elíptica*** *en* $D$*, si* $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ *en* $D$.
3. ***Parabólica*** *en* $D$*, si* $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ *en* $D$.

**Las EDP de segundo orden de tres variables independientes**, en su forma canónica más simple son:

$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial z^2} = 0$(Tipo hiperbólico)

$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial z^2} = 0$(Tipo elíptico)

$\frac{\partial u(x,y)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial z^2} = 0$(Tipo parabólico)

donde $u = u(x, y, z, t)$.

## 1.2. Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas es un método aproximado para calcular la solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Este método utiliza la matemática convencional y sustituye las derivadas por diferencias finitas hasta llegar a obtener un sistema de ecuaciones algebraicas para toda una zona de estudio y cuya solución se obtendrá por métodos directos e iterativos.

### 1.2.1. Serie de Taylor

Supongamos que $f \in C^{(n+1)}[a, b]$ y sea $x_0 \in [a, b]$. Entonces, para cada $x \in (a, b)$ existe un número $c = c(x)$(el valor de c depende de x) que está entre $x_0$ y $x$ y verifica que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0)$$
$$+ \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c) \tag{1.2}$$

la cual es llamada "Serie de Taylor" de $f$ alrededor del punto $x_i$.

### 1.2.2. Aproximación de la Derivada en una dimensión

**A) Diferencias progresivas(hacia adelante)**

Considerando la ecuación (1,1) con k=2 y $x = x_0 + \triangle x$, se tiene

$$f(x_0 + \triangle x) = f(x_0) + \triangle x f'(x_0) + \frac{(\triangle x)^2}{2!} f''(c) \tag{1.3}$$

luego

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) - \frac{(\triangle x)^2}{2!} f''(c) = \triangle x f'(x_0)$$

pasando a dividir $\triangle x$ y despejando la primera derivada, se tiene que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} - \frac{\triangle x}{2!} f''(c)$$

El término $E_{Trunc} = -\frac{\triangle x}{2!} f''(c)$ es llamado Error de truncamiento, cuyo orden $O(\triangle x)$ está definido por la potencia de $\triangle x$ que lo multiplica. En nuestro caso $O(\triangle x) = 1$, es decir, es de primer orden.

Ahora, si eliminamos el término $E_{Trunc}$, obtenemos en forma aproximada la

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \tag{1.4}$$

**B) Diferencias regresivas(hacia atrás)**

Considerando la ecuación (1,1) con k=2 y $x = x_i - \triangle x$, se tiene

$$f(x_0 - \triangle x) = f(x_0) - \triangle x f'(x_0) + \frac{(\triangle x)^2}{2!} f''(c)$$

luego

$$\triangle x f'(x_0) = f(x_0) - f(x_0 - \triangle x) + \frac{(\triangle x)^2}{2!} f''(c)$$

pasando a dividir $\triangle x$ y despejando la primera derivada, se tiene que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - f(x_0 - \triangle x))}{\triangle x} + \frac{\triangle x}{2!} f''(c)$$

El término $E_{Trunc} = \frac{\triangle x}{2!} f''(c)$ es el Error de truncamiento, cuyo orden $O(\triangle x) = 1$, es decir, es de primer orden.

Ahora, si eliminamos el término $E_{Trunc}$, obtenemos en forma aproximada la

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \triangle x)}{\triangle x} \tag{1.5}$$

**C) Diferencias centradas(primera derivada)**

Considerando la ecuación (1,1) con k=3 y $x = x_0 + \triangle x$, se tiene

$$f(x_0 + \triangle x) = f(x_0) + \triangle x f'(x_0) + \frac{(\triangle x)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(\triangle x)^3}{3!} f'''(c_1)$$

Considerando la ecuación (1,1) con k=3 y $x = x_0 - \triangle x$, se tiene

$$f(x_0 - \triangle x) = f(x_0) - \triangle x f'(x_0) + \frac{(\triangle x)^2}{2!} f''(x_0) - \frac{(\triangle x)^3}{3!} f'''(c_2)$$

restando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos que

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0-\triangle x)=2\triangle x f'(x_0)+\frac{(\triangle x)^3}{3!}(f'''(c_1)+f'''(c_2))$$

luego

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0-\triangle x)-\frac{(\triangle x)^3}{3!}(f'''(c_1)+f'''(c_2))=2\triangle x f'(x_0)$$

pasando a dividir $2\triangle x$ y despejando la primera derivada, se tiene que

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0-\triangle x)}{2\triangle x}-\frac{(\triangle x)^2}{2(3!)}(f'''(c_1)+f'''(c_2))$$

El término $E_{Trunc}=-\frac{(\triangle x)^2}{2(3!)}(f'''(c_1)+f'''(c_2))$ es el Error de truncamiento, cuyo orden $O(\triangle x)^2=2$, es decir, de segundo orden.

Ahora, si eliminamos el término $E_{Trunc}$, obtenemos en forma aproximada

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0-\triangle x)}{2\triangle x} \tag{1.6}$$

**Diferencias centradas(segunda derivada)**

Considerando la ecuación (1,1) con k=4 y $x=x_0+\triangle x$, se tiene

$$f(x_0+\triangle x)=f(x_0)+\triangle x f'(x_0)+\frac{(\triangle x)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(\triangle x)^3}{3!}f'''(x_0)+\frac{(\triangle x)^4}{4!}f'''(c_1)$$

Considerando la ecuación (1,1) con k=4 y $x=x_0-\triangle x$, se tiene

$$f(x_0-\triangle x)=f(x_0)-\triangle x f'(x_0)+\frac{(\triangle x)^2}{2!}f''(x_0)-\frac{(\triangle x)^3}{3!}f'''(x_0)+\frac{(\triangle x)^4}{4!}f'''(c_2)$$

sumando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos que

$$f(x_0+\triangle x)+f(x_0-\triangle x)=2f(x_0)+2\frac{(\triangle x)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(\triangle x)^4}{4!}(f'''(c_1)+f'''(c_2))$$

luego

$$f(x_0+\triangle x)-2f(x_0)+f(x_0-\triangle x)-\frac{(\triangle x)^4}{4!}(f'''(c_1)+f'''(c_2))=(\triangle x)^2 f''(x_0)$$

pasando a dividir $(\triangle x)^2$ y despejando la segunda derivada, se tiene que

$$\frac{f(x_0+\triangle x)-2f(x_0)+f(x_0-\triangle x)}{(\triangle x)^2}-\frac{(\triangle x)^2}{4!}(f'''(c_1)+f'''(c_2))=f''(x_0)$$

El término $E_{Trunc} = -\frac{(\triangle x)^2}{4!}(f'''(c_1) + f'''(c_2))$ es el Error de truncamiento, cuyo orden $O(\triangle x)^2 = 2$, es decir, de segundo orden.

Ahora, si eliminamos el término $E_{Trunc}$, obtenemos en forma aproximada

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + \triangle x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \triangle x)}{(\triangle x)^2} \tag{1.7}$$

### 1.2.3. Aproximación de la derivada en dos dimensiones

**A) Derivada de primer orden**

Sea $f$ una función que depende de dos variables $x$ e $y$ tal que $f(x, y) \in C^1$. Si mantenemos fija la variable $y$ y usamos la ecuación (1.4), podemos aproximar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x - \triangle x, y)}{2\triangle x}$$

y si mantenemos fija la variable $x$, podemos aproximar

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y - \triangle y)}{2\triangle y}$$

**B) Derivada de segundo orden**

Sea $f$ una función que depende de dos variables $x$ e $y$ tal que $f(x, y) \in C^2$. Si mantenemos fija la variable $y$ y usamos la ecuación (1.5), podemos aproximar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \triangle x, y) - 2f(x, y) + f(x - \triangle x, y)}{(\triangle x)^2}$$

y si mantenemos fija la variable $x$, podemos aproximar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(x, y + \triangle y) - 2f(x, y) + f(x, y - \triangle y)}{(\triangle y)^2}$$

### 1.2.4. Diferencias finitas en una malla

Para establecer un esquema para la solución de una EDP a través de diferencias finitas, es necesario discretizar el recinto del plano, que por conveniencia se considera una malla cuadrada de puntos discretos, tal como se muestra en la figura (1,1), logrando que una EDP se transforma en una ecuación algebraica en diferencias.

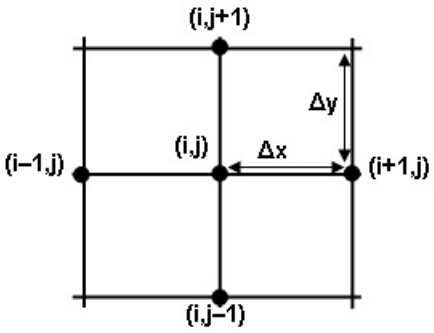


Figura 1.1: Malla en dos dimensiones

Realizando las siguientes notaciones

$$f_{i,j} = f(x_0, y_0)$$

$$f_{i-1,j} = f(x_0 - \triangle x, y_0)$$

$$f_{i+1,j} = f(x_0 + \triangle x, y_0)$$

$$f_{i,j-1} = f(x_0, y_0 - \triangle y)$$

$$f_{i,j+1} = f(x_0, y_0 + \triangle y)$$

Las derivadas en diferencias finitas en dos dimensiones, quedan expresadas como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\triangle x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\triangle y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\triangle x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\triangle y)^2}$$

## 1.3. Agua subterránea

Es el agua que ocupa todos los vacios dentro del estrato geológico, comprende todo el agua que se encuentra por debajo del nivel freático.

**Cómo se genera el agua subterránea ?**
Las aguas subterráneas provienen de la infiltración directa en el terreno de las lluvias o nieves, o indirecta de rios, lagos o el mar, penetrando en las capas superiores del suelo. No confundir la infiltración con la percolación, pues esta última es el movimiento de agua en las capas del subsuelo.

**Corriente influente y efluente**
Llamamos corriente influente cuando el nivel del agua superficial está por encima del nivel freático, produciéndose un aporte al agua subterránea. cuando el nivel del agua superficial está por debajo del nivel freático, se llama efluente, produciéndose un aporte a las aguas superficiales.

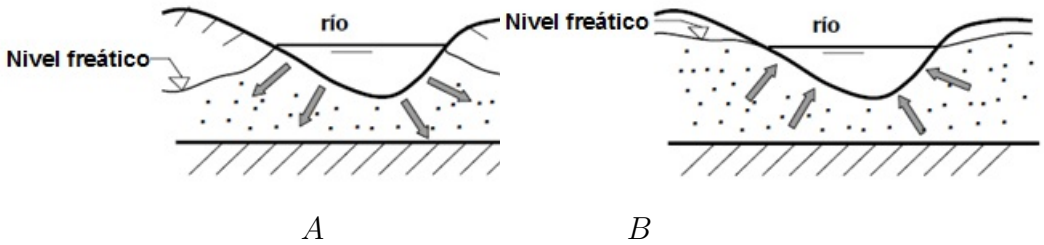


Figura 1.2: A) Corriente influente, B) Corriente efluente
Fuente: Hidrología superficial y subterránea[15]

La corriente influente es la mas interesante para nuestro estudio por su gran aporte de agua al agua subterránea.

**Medio no saturado**
Se presenta inmediatamente bajo la superficie terrestre y contiene en sus poros agua y aire en proporciones variables.

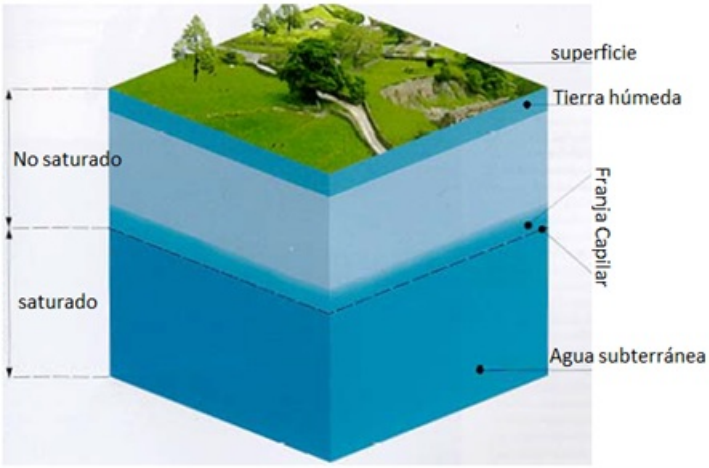


Figura 1.3: Agua subterránea
Fuente: Hidráulica de aguas subterráneas y su aprovechamiento[5]

**Medio saturado**
Es aquel medio, donde los poros están totalmente ocupados de agua. La recarga de la zona saturada ocurre por infiltración y posterior percolación del agua desde la superficie terrestre, a través de la zona no saturada.

## 1.4. Acuíferos

- **Acuífero(llevar agua)**.- Un acuífero es aquella formación geológica, constituida por una o más capas de rocas (gravas, arenas, caliza, etc.) capaz de almacenar y transmitir el agua a través poros o grietas, proporcionando cantidades apreciables de agua para su explotación de una manera fácil y económica.

- **Acuicludo(encerrar agua).-** Formación geológica que almacena agua, pero no lo transmite(no permite que el agua circule a través de ella). Ejemplos: Limo, arcilla, etc. $1m^3$ de arcilla contiene mas agua que $1m^3$ de arena, pero el agua está atrapada, no puede circular ni salir por gravedad.

- **Acuitardo(retarda).-** Formación geológica que almacena agua, pero lo transmite(o circula a través de el) con dificultad. Ejemplos: arenas arcillosas, areniscas, rocas compactas con fracturación moderada.

- **Acuifugo(rechaza).-** Formación geológica que no almacena ni lo transmite (o no circula el agua a través de el). Ejemplos: granito o esquisto no fracturado.

| **Formación geológica** | **Capacidad de almacenar agua** | **Posibilidad de transmitir agua** |
|---|---|---|
| Acuifero | si | si |
| Acuicludo | si | no |
| Acuitardo | si | si |
| Acuifugo | no | no |

*Cuadro 1.1.* Formaciones geológicas

### 1.4.1. Propiedades de los acuíferos

**Porosidad.-** Es la capacidad de un medio o formación geológica de almacenar agua. La porosidad o porosidad total(volumen de huecos o grietas) es la parte o porcentaje del volumen total de poros de un acuífero y se define como la relación entre el volumen total de huecos(vacíos) al volumen total del terreno que los contiene, es decir

$$m_t = \frac{V_A}{V_R}$$

donde $m_t$ : porosidad en %

$V_A$ : volumen agua$[m^3]$

$V_R$ : volumen total de terreno o roca $[m^3]$

**Porosidad efectiva(drenable o rendimiento especifico).-** Es la cantidad de agua drenada de un volumen de suelo saturado por efecto de la gravedad cuando la tabla de agua o superficie freática es deprimida, es decir

$$m_e = \frac{V_D}{V_T}$$

donde $m_e$ : porosidad efectiva en %

$V_D$ : volumen agua drenada$[m^3]$

$V_T$ : volumen total de terreno o roca $[m^3]$

La porosidad eficaz es la mas utilizada en la Hidrología, es por ello que en adelante cuando nos refiramos a porosidad, nos referimos a esta, que tan solo lo denotaremos por $m$.

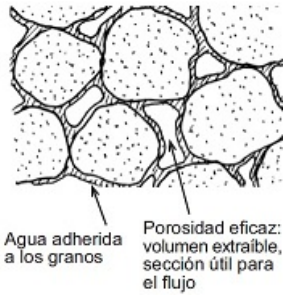


Figura 1.4: Porosidad efectiva
Fuente: Hidrogeología[14]

**Retención específica.-** Es la diferencia entre la porosidad total y la porosidad efectiva, es decir

$$R_e = m_t - m_e$$

o equivalentemete podemos decir que

$$m_t = m_e + R_e$$

| **Material** | **Porosidad** $m_t(\%)$ | **Porosidad efectiva** $m_e(\%)$ | **Retención específica** $R_e(\%)$ |
|---|---|---|---|
| Arcillas | 50 | 2 | 48 |
| Gravas | 20 | 19 | 1 |
| Arenas | 25 | 22 | 3 |
| Basalto | 11 | 8 | 3 |
| Granito | 0.1 | 0.09 | 0.01 |
| Caliza | 20 | 18 | 2 |
| Arenisca | 11 | 6 | 5 |

*Cuadro 1.2.* Porcentaje aprox. de la Porosidad y la retención
Fuente: Hidrología superficial y subterránea[5]

**Ejemplo 1.3.** *Se tiene una cubeta con* $1m^3$ *de arena seca, le introducimos agua hasta que esté completamente saturado. Suponga que para ello hemos necesitado 250 litros de agua, luego dejamos que dicha agua vertida escurra libremente.Suponga que recogiéramos 220 litros(30 litros es obvio han quedado mojando los granos de arena). Determine:*
*a)la porosidad total.*
*b)la porosidad efectiva.*
*c)la retención específica.*

**Solución**

$1m^3 = 1000dm^3 \approx 1000$ litros

a) $\eta = \frac{250}{1000} = 0{,}25 = 25\,\%$ porosidad total

b) $S = \frac{220}{1000} = 0{,}22 = 22\,\%$ Porosidad efectiva

c) $S_e = 0{,}25 - 0{,}22 = 0{,}03 = 3\,\%$ retención específica

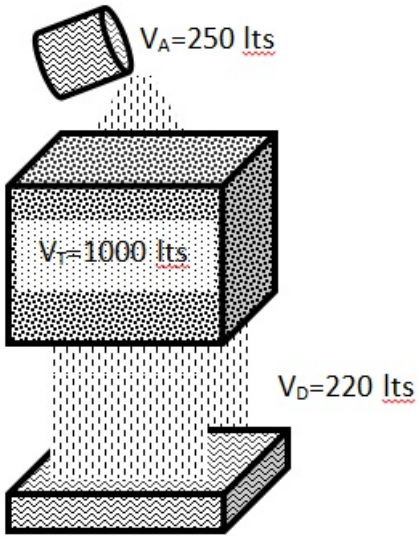


Figura 1.5: Ejemplo de Porosidad

**Cuál es a diferencia entre porosidad y permeabilidad?**

La porosidad es la capacidad de un acuífero de almacenar agua, mientras que la permeabilidad es la capacidad de un acuífero de conducir agua. Es decir no existe una relación directa, pues algunos acuíferos de permeabilidad alta tienen porosidades elevadas y otros de porosidad alta tienen permeabilidad muy baja(las arcillas).

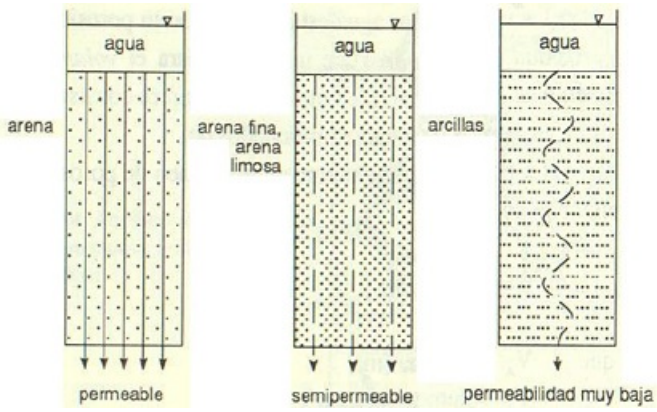


Figura 1.6: Rocas permeables
Fuente: Introducción a la hidrogeología[17]

**Nivel Freático.-** Es el nivel que alcanza la superficie del agua en un pozo que se encuentran en comunicación libre con los huecos del suelo y la presión es igual a la atmosférica. La superficie hasta donde llega el agua se denomina superficie freática.

**Nivel Piezométrico(en griego: piezo = presión).-** Al tubo que penetra en un acuífero confinado o semiconfinado y que permite determinar la altura de la columna de fluido se le denomina piezómetro. Al nivel o altura h que alcanza el agua en cada tubo se le denomina nivel piezométrico.

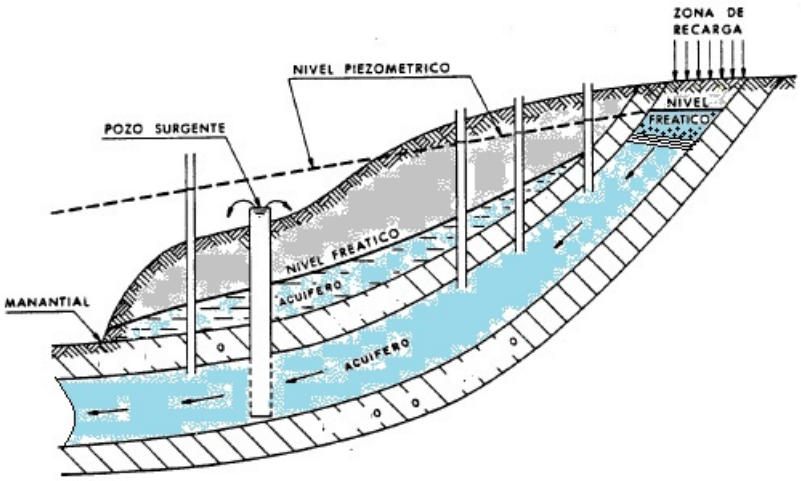


Figura 1.7: Nivel freático y piezométrico
Fuente: Hidrogeología como técnica de apoyo en la Ingeniería Civil[9]

**Superficie Piezométrica.-** La superficie virtual formada por los puntos que alcanzaría el agua si se hicieran infinitas perforaciones en el acuífero, se denomina superficie piezométrica. En un punto concreto en un pozo, se habla de nivel piezométrico.

**Curvas Isopiezas(Lineas equipotenciales).-** Según [13], las curvas isopiezas son líneas de igual altura piezométrica y se les denomina también líneas equipotenciales.

Estas curvas son las que resultarían si se cortara la superficie piezométrica por planos horizontales igualmente espaciados.

En la práctica los mapas de isopiezas, se obtienen trazando las curvas por diferentes métodos a partir de la determinación del nivel piezométrico en algunos puntos del acuífero.

Las isopiezas deben trazarse de acuerdo con las condiciones de borde del acuífero. Así por ejemplo, dichas curvas son normales a los límites impermeables.

Una gran cantidad de información útil para estudios hidrogeológicos, se puede extraer de los mapas de isopiezas. Generalmente los planos de isopiezas se referencia a los planos topográficos, lo que permite determinar:

-Profundidad del agua subterránea,

- dirección del flujo,

- hacer inferencias sobre la permeabilidad de las formaciones, etc..

**Línea de flujo**.- Son líneas que son normales a las isopiezas.

**Red de flujo**.- Una red de flujo es el conjunto de curvas formadas por las líneas de flujo y las equipotenciales en un momento determinado.

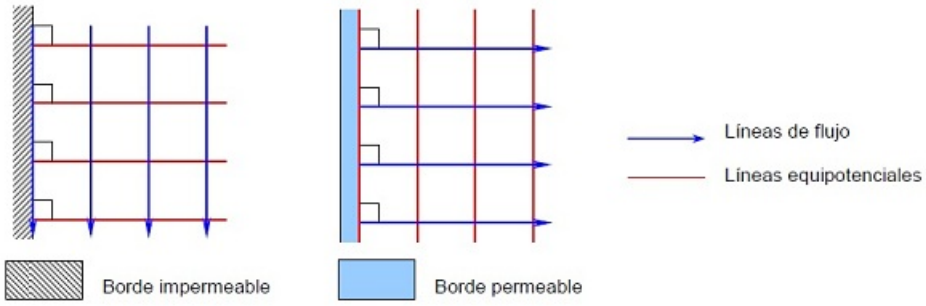


Figura 1.8: Red de flujo en un medio de borde permeable o impermeable.
Fuente: Hidrología subterránea[4]

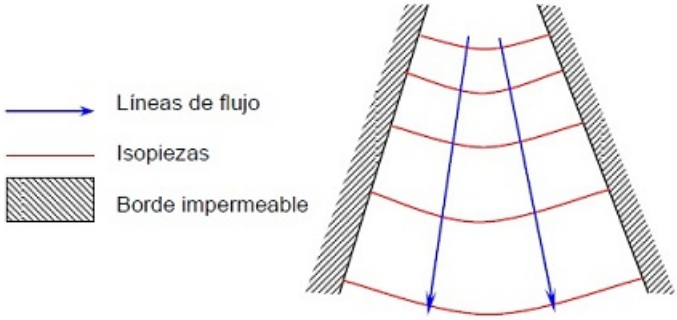


Figura 1.9: Flujo divergente.
Las isopiezas se espacian a medida que los bordes impermeables se separan.
Fuente: Hidrología :

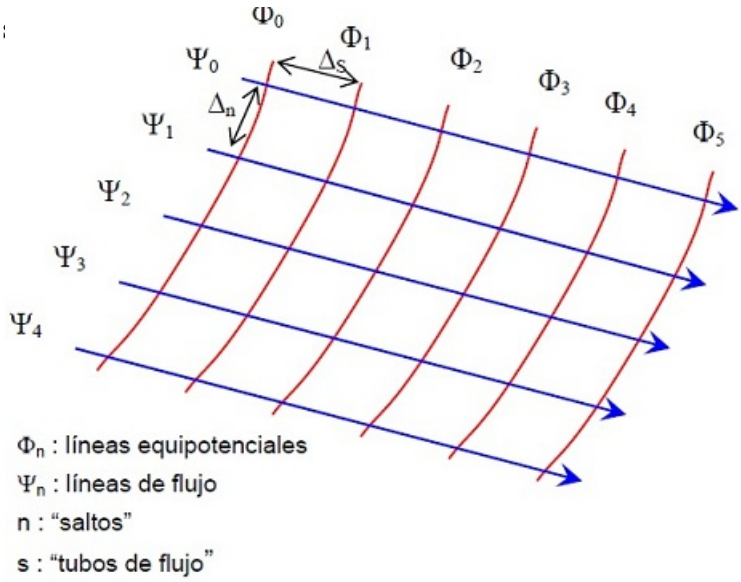


Figura 1.10: Red de flujo en medios homogéneos e isótropicoss.
Fuente: Hidrología subterránea[4]

### 1.4.2. Clasificación de los acuíferos

**A)Por su litologia:**

- **Acuíferos porosos.-** Esta formado en su mayor parte por sedimentos sueltos(poros o intersticios). Ejemplo: gravas, arenas, arcosas, etc.

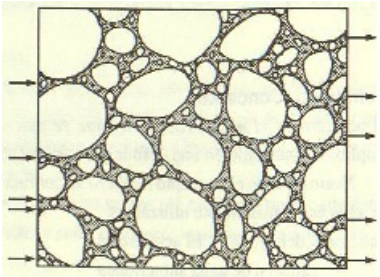

Figura 1.11: Acuífero poroso
El agua se mueve en los intersticios(poros o espacios)
Fuente: Introducción a la hidrogeología[17]

- **Acuíferos de grietas .-** Está formado por rocas consolidadas como por ejemplo: areniscas, calizas no carstificadas, basaltos, granitos, etc.

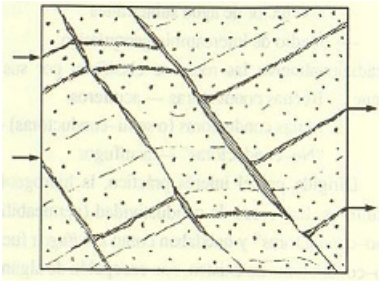

Figura 1.12: Acuífero de grietas
El agua se mueve en las fracturas abiertas de origen tectónico
(movimiento de la corteza terrestre)
Fuente: Introducción a la hidrogeología[17]

- **Acuíferos cársticos.-** Está formado por rocas carstificadas. Ejemplo: calizas, dolomías, yeso, etc.

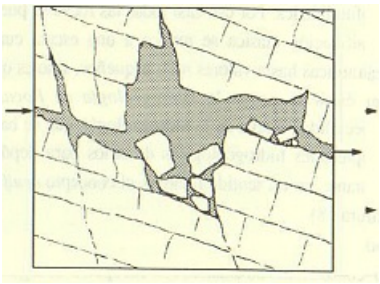

Figura 1.13: Acuífero cárstico
El agua se mueve en los huecos cársticos(acción erosiva) de diámetros variables
Fuente: Introducción a la hidrogeología[17]

**B) Por su permeabilidad:**

- **Acuífero libre(freático o no confinado)**.- Es aquel acuífero cuyo techo se encuentra a presión atmosférica. Por encima presenta una superficie libre de agua(llamada también superficie freática o tabla de agua). La recarga de estos acuíferos es directa y se realiza por infiltración del agua de lluvia a través de la zona no saturada o por infiltración de ríos o lagos. Son los mas afectados en caso de sequia, ya que el nivel freático oscila con los cambios climáticos. A veces se secan, cuando el nivel freático desciende hasta por debajo de la profundidad total del pozo.

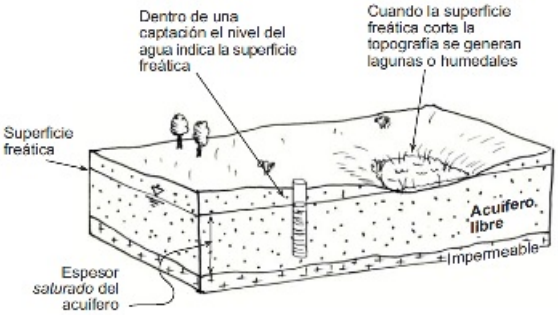


Figura 1.14: Acuífero libre
Fuente: Hidrogeología[14]

- **Acuífero semiconfinado**.- Es aquel acuífero que se encuentra completamente saturado de agua y que tiene el techo (parte superior), el piso(parte inferior) o ambos están sellados por materiales semipermeables, es decir, un material que permite una filtración vertical que alimenta muy lentamente al acuífero principal. Estos acuíferos se recargan y descargan a través de unidades de baja permeablidad denominados *acuitardo*.

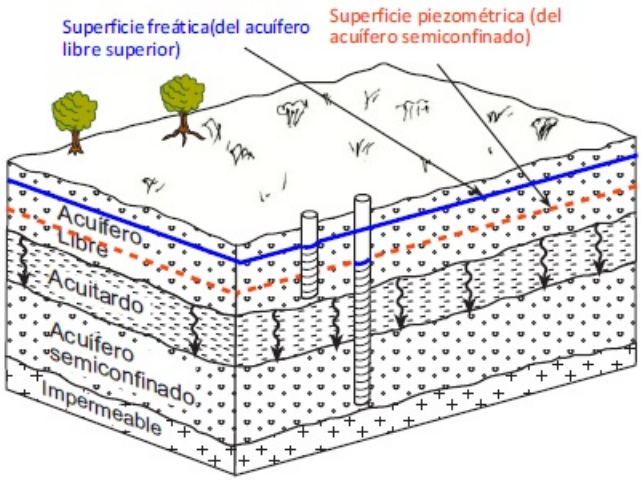


Figura 1.15: Acuífero semiconfinado
Fuente: Hidrogeología[14]

| | | |
|---|---|---|
| Mayor carga piezométrica | $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$ $\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ $Sentido \quad de \quad flujo$ | Menor carga piezométrica |

- **Acuífero confinado(artesiano, cautivo o a presión** .- Es aquel acuífero que se encuentra completamente saturado de agua, que esta limitado superior e inferiormente por capas impermeables y el agua que contiene está sometida a una presión que es mayor que la atmosférica. La recarga de estos acuíferos es lateral.

  Cuando se realiza un pozo en este tipo de acuíferos, el agua asciende rápidamente por su interior, cuyo nivel alcanzado es el Nivel piezométrico. Si el agua de dicho pozo alcanza la superficie, se llama pozo surgente.

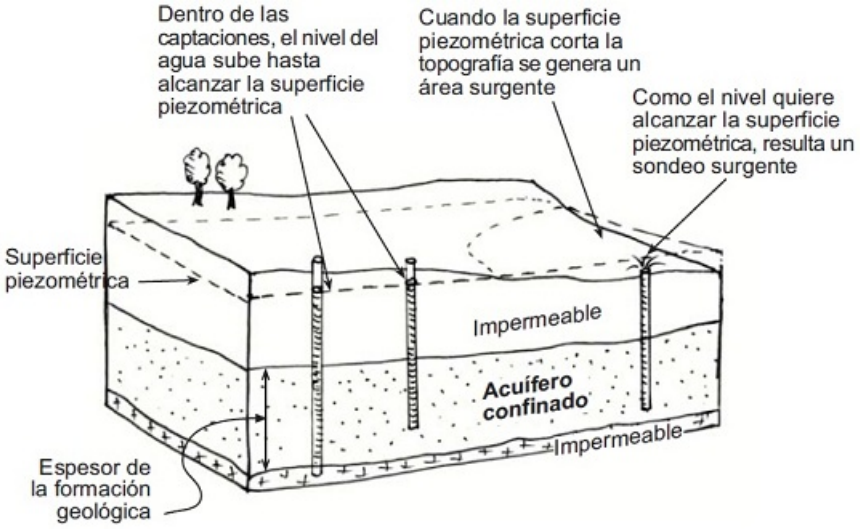


Figura 1.16: Acuífero confinado
Fuente: Hidrogeología[14]

## NOCIONES DE HIDRAULICA

### 1.4.3. Características Hidráulicas de los acuíferos

**Conductividad Hidráulica(K).-** Es una caraterística que indica la menor o mayor resistencia que ofrece el terreno a la circulación del agua. Mide la facilidad con que el medio poroso deja pasar el agua a través de él, teniendo en cuenta las propiedades físicas del fluido, es decir, no solo está condicionado por las características del medio poroso, sino también por ciertas características propias del fluido como son su peso específico y su viscocidad. La conductividad hidráulica se mide en m/día o cm/hora y tiene dimensiones de velocidad $[L/T]$. y está dado por

$$K = \frac{k_0 \gamma}{\mu}$$

o equivalentemente

$$K = \frac{k_0 \rho g}{\mu}$$

En donde:

$k_0$ : es la permeabilidad intrínseca, el cual es un parámetro que solo depende del medio poroso(tamaño,forma y disposición de los granos)$[m^2]$.

$\gamma = \rho g$ : es el peso específico$[N/m^3]$.

$g$ : es la aceleración de gravedad[$m/s^2$].
$\rho$ : es la densidad del fluido[$g/cm^3$].
$\mu$ : viscosidad(resistencia interna de un líquido al fluir) dinámica del fluido[cP].

| **Rocas** | $K$ **(m/dia)** | **Grado de permeabilidad** | **Tipo de formación** |
|---|---|---|---|
| Grava limpia | 1000 | Buena | Permeable |
| Arena gruesa limpia | 10-1000 | Buena | Permeable |
| Mezcla de arena | 5-10 | Mala | Semi permeable |
| Arena fina | 1-5 | Mala | Semi permeable |
| Arena limosa | 0.1-2 | Mala | Semi permeable |
| Limo | 0.001-0.5 | Mala | Semi permeable |
| Arcilla | 0.001 | Nula | Impermeable |

*Cuadro 1.3.* Valores de la conductividad hidráulica
Fuente: Hidráulica de aguas subterráneas[13]

**Transmisibidad**.- Es una medida de la cantidad de fluido que puede ser transmitida horizontalmente a través de una sección de acuífero de ancho unitario, que involucre todo el espesor saturado, bajo un gradiente hidráulico igual a la unidad. Se obtiene como el producto entre el espesor saturado del acuífero, b, y su conductividad hidráulica, $K$. Tiene las dimensiones $[L^2T^{-1}]$ y se define como

$$T = b.K$$

donde: $T$ : transmisibidad($m^2$/día o $cm^2$/hora.)
$b$ : espesor del acuífero(m o cm).
$K$ : conductividad hidráulica( m/día o cm/hora).

Cuando se perfora un pozo en un acuífero, la transmisividad es un parámetro que da una idea de la productividad del acuífero, es decir de su capacidad del mismo para permitir la extracción del agua en el pozo.

Hemos visto que el volumen de agua que proporciona un acuífero libre se puede calcular mediante la porosidad eficaz. Pero este parámetro no nos sirve en el caso de los acuíferos confinados: cuando proporcionan agua, todos sus poros continúan

saturados, sólo disminuye la presión, de modo que el dato de la porosidad eficaz no indica nada. Necesitamos un parámetro que indique el agua liberada al disminuir la presión en el acuífero.

**Coeficiente de almacenamiento específico**.- Es la cantidad de agua cedida o absorbida **por unidad de volumen** de acuífero, al variar el nivel piezométrico en un metro. Este coeficiente nunca puede ser 0 y está dado por

$$S_e = \rho g(\alpha + \beta m)$$

En donde: $\rho$ : densidad, $g$ : aceleración de la gravedad, $\alpha$ : comprensibilidad del acuífero, $\beta$ : comprensibilidad del agua, $m$ : porosidad.

**Coeficiente de almacenamiento**.- Es la cantidad de agua cedida o absorbida **por unidad de área** de un acuífero al variar el nivel piezométrico en un metro. Está dado por

$$S = b.S_e$$

donde: $S_e$ : Coeficiente de almacenamiento específico, $b$ : espesor del acuífero.

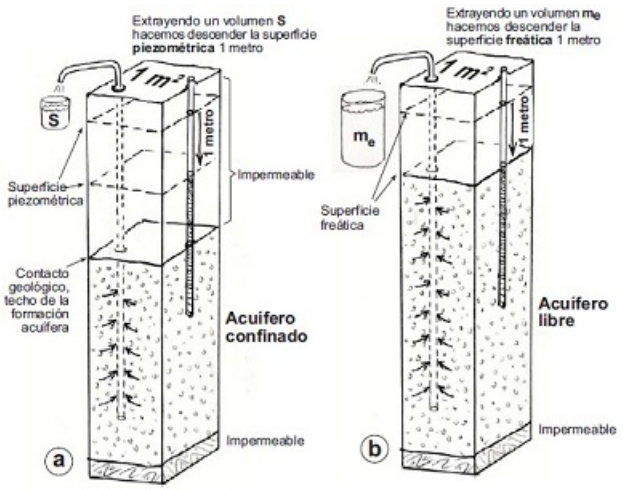


Figura 1.17: a) Coeficiente de almacenamiento en un acuífero confinado. b)Coeficiente de almacenamiento = Porosidad efectiva en un acuífero libre.

Fuente: Hidrogeología[14]

El coeficiente de almacenamiento es un número adimensional y es mucho mayor en los acuíferos libres que en los acuíferos confinados, ya que para los primeros está

entre 0.02 y 0.3 y para los últimos entre 0.0001 y 0.001.

### 1.4.4. Tipos de acuíferos por sus caraterísticas hidráulicas(según [10]

**Acuífero homogéneo**.- Es aquel que presenta las mismas características físicas especialmente en textura y estructura, dentro de los 10 m de profundidad.

**Acuífero heterogéneo**.- Es aquel que varia sus características físicas, estando estratificado dentro de los 10 m de profundidad.

**Acuífero isotrópico**.- Es aquel cuya conductividad hidráulica es la misma(constante) para cualquier dirección del flujo, es decir, la conductividad hidráulica vertical y horizontal son las mismas.

$$K_x = K_y = K_z$$

**Acuífero anisotrópico**.- Es aquel cuya conductividad hidráulica cambia según la dirección del flujo, es decir, la conductividad hidráulica vertical y horizontal son las mismas.

**Acuífero isotrópico homogéneo**.- Es aquel cuya conductividad hidráulica tiene el mismo valor en cualquier punto del acuífero y es independiente de la dirección de flujo.

**Acuífero anisotrópico homogéneo**.- Es aquel cuya conductividad hidráulica en una cierta dirección tiene el mismo valor en cualquier punto del acuífero.

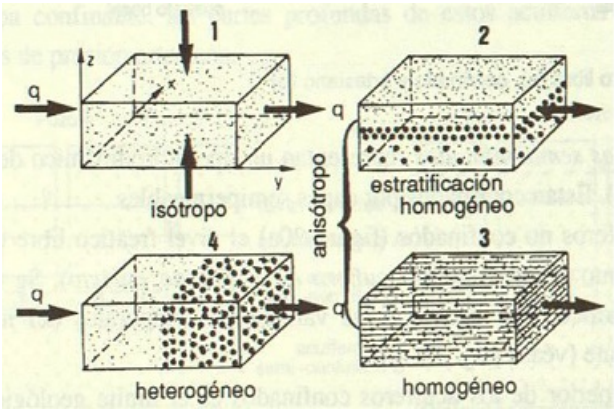


Figura 1.18: Medio isotrópico y homogéneo
Fuente: Introducción a la hidrogeología[17]

## 1.5. Ecuación de Bernoulli.

El principio de Bernoulli, también denominado ecuación de Bernoulli, describe el comportamiento de un fluido moviéndose a lo largo de una línea de corriente y expresa que la energia que posee un fluido ideal (sin viscosidad ni rozamiento) circulando por un conducto cerrado, permanece constante a lo largo de su recorrido.

La energía de un fluido en cualquier momento consta de tres componentes:
1.- Cinética, es la energía debida a la velocidad que posee el fluido.
2.- Potencial gravitacional, es la energía debido a la altitud que un fluido posee.
3.- Energía de flujo, es la energía que un fluido contiene debido a la presión que posee.

La Ecuación de Bernoulli está dada por

$$\overbrace{\frac{V^2}{2}}^{\text{Energia cinética}} + \overbrace{\frac{P}{\rho}}^{\text{Energía de flujo}} + \overbrace{gz}^{\text{Energía potencial}} = constante$$

donde V = velocidad del fluido en la sección considerada, g = aceleración de la gravitatoria, z = altura en la dirección de la gravedad desde una cota de referencia(nivel respecto de una línea de referencia), P = presión a lo largo de la línea de corriente, $\rho$ = densidad del fluido.

Si dividimos a la expresión anterior por $g$ y denotando por $\gamma = \rho g$ , se tiene *la ecuación de Bernoulli para el flujo de aguas subterráneas*

$$h = \overbrace{z}^{\text{carga de elevación}} + \overbrace{\frac{P}{\gamma}}^{\text{carga de presión}} + \overbrace{\frac{V^2}{2g}}^{\text{carga de velocidad}}$$

donde $h$ es, *la altura piezométrica*(carga hidráulica) y lo denotamos por

$$h = h_e + h_p + h_v$$

donde $h_e = z$(altura de elevación), $h_p = \frac{P}{\gamma}$(altura de presión), $h_v = \frac{V^2}{2g}$(altura de velocidad).

y despreciando la velocidad, pues esta es de menos de 1 metro/día, se tiene

$$h = z + \frac{P}{\gamma}$$

## 1.6. Ley de Darcy

### 1.6.1. Experimento de Darcy.

Desde aproximadamente el año 1830, en la ciudad francesa de Dijon, el ingeniero francés, Henry Darcy, fue encargado por muchos años del abastecimiento de agua a la ciudad de Dijon y al parecer, debía diseñar filtros de arena para purificar el agua. Darcy se interesó en el estudio del flujo del agua a través de los medios porosos(en especial de los que estaban constituidos por materiales arenosos) y por la observación de pozos que contribuían al abastecimiento de agua de la ciudad. En 1856, Darcy presentó el resultado de sus trabajos como un apéndice a su informe de la red de distribución, en el cual describió sus experimentos y la obtención de la ley. A través de ese pequeño apéndice, nace la hidrología como ciencia y se considera la base de todos los estudios físico-matemáticos posteriores sobre el flujo del agua subterránea.

La ley de Darcy, según[13], se basa en las siguientes hipótesis que condicionan la validez de su ley.

- Medio continuo, es decir que los poros vacíos esten intercomunicados. En este sentido, los medios cársticos no se pueden considerar como continuos.
- Medio isotrópico.
- Medio homogéneo.
- Flujo del agua en régimen laminar.

### 1.6.2. Ley de Darcy.

Darcy encontró que la cantidad de agua que fluye a través de un medio poroso( muestra de arena) por unidad de tiempo, es decir el caudal o descarga $Q$, es proporcional a la sección transversal $A$ y a la pérdida de carga(diferencia entre las alturas del agua de los piezómetros $\Delta h = h_1 - h_2$) , e inversamente proporcional a la longitud $L$(distancia entre C y B) de la muestra de arena. Es decir

$$\frac{Q}{A.\Delta h.L} = K$$

o en su forma equivalente

$$Q = K.A.\frac{\Delta h}{L} \tag{1.8}$$

donde: $K$ es la constante de proporcionalidad, llamada conductividad hidráulica o permeabilidad del medio, la cual es una característica de cada arena o material que se llena el permeámetro.

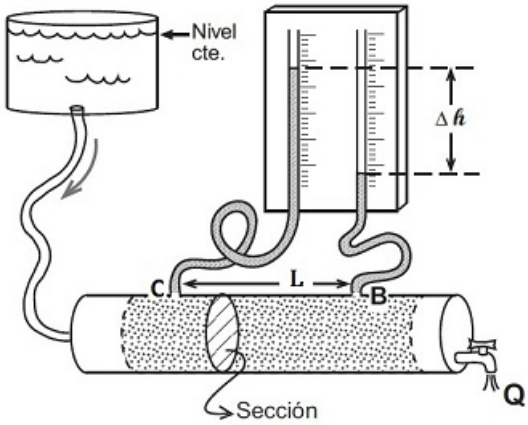


Figura 1.19: Permeámetro de carga constante
Fuente: Hidrogeologia[14]

La Figura (1,19), muestra una tubería horizontal llena con arena, en la cual se aplica agua mediante presión a través del extremo C, la cual fluye y se descarga a través del extremo B. La presión observada en cada extremo de la tubería (o en alguna posición intermedia) pueden ser medidos mediante tubos verticales de pequeños diámetros llamados piezómetros.

**Ejemplo 1.4.** *(Permeámetro vertical).- Se tiene el Permeámetro cilíndrico de la figura* (1,20)*,cuyo diámetro es 6 cm, conductividad hidráulica 0.6 m/día, teniendo en cuenta que la carga de agua sobre el suelo es constante. Determine la cantidad de agua que recoge el vaso en una hora.*

**Solución**

De la ley de Darcy: $Q = K.A.\frac{\Delta h}{L}$, donde

$\Delta h = h_1 - h_2 = 7 - 0 = 7$

$L = 5cm$, si el diámetro es $6cm$, el radio será $3cm$

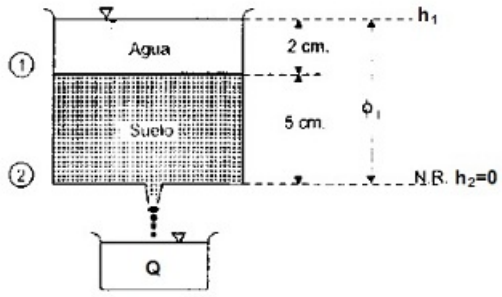


Figura 1.20: Ejemplo permeámetro vertical.
Fuente: Hidrología[16]

$A = \pi r^2 = \pi(3)^2 = 28{,}27cm^2$
$K = 0{,}6$ m/día=$\frac{60}{24}$cm/h=2.5 cm/h

Luego:

$$Q = K.A.\frac{\Delta h}{L} = (2{,}5cm/h)(28{,}27cm^2)\frac{7cm}{5cm}$$

$\therefore Q = 98{,}945cm^3/h$

Ahora si consideramos la tubería con una cierta inclinación, se tiene que

$$h_1 = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \qquad h_2 = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \qquad \Delta h = h_1 - h_2$$

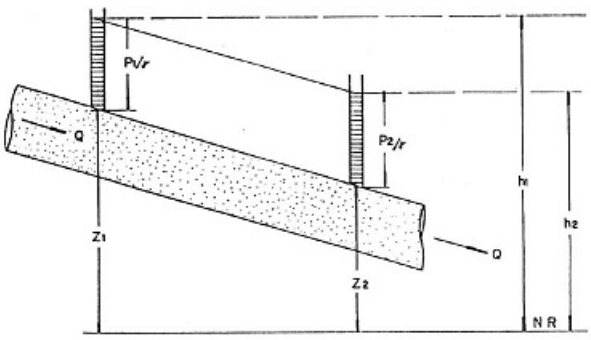


Figura 1.21: Flujo a través de un medio poroso en un tubo inclinado
Fuente: Hidráulica de aguas subterráneas[15]

Para este caso se sigue cumpliendo la Ley de Darcy, pero la ecuación (1,7) se expresa como

$$Q = -K.A.\frac{\Delta h}{L} \tag{1.9}$$

El signo negativo(-) aparece dado que el flujo va de mayor potencial hidráulico a menor potencial (desde el depósito de mayor nivel al de nivel más bajo) y este signo(-) hace que el caudal se positivo.

**Gradiente hidráulico**.- Es la pendiente de la línea de carga, es decir, es la pérdida de carga (altura piezométrica) por unidad de longitud L y está dado por

$$i = \frac{\Delta h}{L} \tag{1.10}$$

donde $\Delta h = h_1 - h_2$ es la pérdida de carga, L : Longitud recorrida por el agua en el tubo de arena, limitado por los dos piezómetros.

Si reemplazamos la ecuación (1,9) en la (1,8), obtenemos:

$$Q = -K.A.i \tag{1.11}$$

**Observación 1.1.** *Como $Q$ representa el caudal por unidad de tiempo, $Q/A$ representa el caudal(descarga, cantidad de flujo o flujo específico) por unidad de sección, lo cual lo denotamos por $q = \frac{Q}{A} = -K.i$, es decir*

$$q = -K.i \tag{1.12}$$

*y como $q$ tiene unidades $m/s$, también es considerado como "Velocidad de flujo".*

**Velocidad de Darcy(velocidad de flujo o aparente)**.- Es la velocidad del agua que circula por toda la sección(unidad de sección total) del medio poroso. Se define como

$$V = -K.i$$

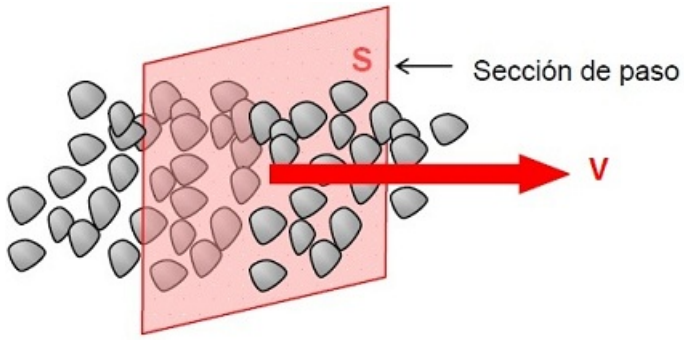


Figura 1.22: Velocidad de Darcy
Fuente: Hidrología subterránea[4]

**Velocidad real de flujo**.- Es la velocidad del agua que circula sólo a través de los intersticios o poros. Lo denotamos por $V^*$.

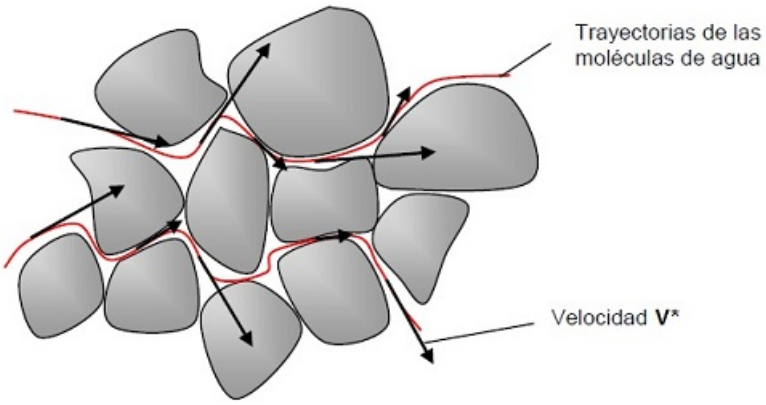


Figura 1.23: Velocidad real
Fuente: Hidrología subterránea[4]

**Relación entre la velocidad de Darcy y la velocidad real.-** La velocidad de Darcy refleja el flujo por toda la sección del medio poroso, mientras que la velocidad real solo por los poros. Dado que los poros representan sólo una parte pequeña de esa sección total es evidente que la velocidad real de flujo es mucho mayor que la velocidad de Darcy ($V^* > V$).

La relación entre ambas superficies, la sección total del terreno considerada S y aquella por donde circula realmente el agua (los poros), es igual a la porosidad eficaz. Dado que el caudal es único, tendremos que la sección de paso real multiplicado por velocidad real $V*$ es igual a la sección total multiplicada por velocidad de Darcy $V$, y por tanto, si las secciones se relacionan por la porosidad se tendría que la velocidad real de flujo multiplicada por la porosidad eficaz será igual a la velocidad de Darcy,

es decir

$$\frac{V}{V^*} = m_e$$

o equivalentemente

$$V = V^*.m_e$$

| **Material** | **Diámetro de granos(mm)** | **Velocidad de Darcy(cm/s)** | **Velocidad real(cm/s)** |
|---|---|---|---|
| Limos | 0.01 | 0.0000183 | 0.000058 |
| | 0.04 | 0.0000183 | 0.000058 |
| | 0.06 | 0.0006600 | 0.00208 |
| Arenas | 0.1 | 0.00183 | 0.00576 |
| finas | 0.2 | 0.00732 | 0.02310 |
| Arenas | 0.4 | 0.0293 | 0.0922 |
| medias | 0.5 | 0.0438 | 0.1441 |
| Arenas | 0.6 | 0.0659 | 0.208 |
| gruesas | 0.8 | 0.1170 | 0.369 |
| Arenas muy | 1 | 0.183 | 0.576 |
| gruesas | 2 | 0.732 | 2.307 |
| Gravas | 5 | 4.58 | 14.41 |

*Cuadro 1.4.* Velocidades aparentes(Darcy) y reales
Fuente: Hidráulica de aguas subterráneas[13]

**Ejemplo 1.5.** *Sea un acuífero cuya porosidad eficaz es 0.1. Se desea bombear agua a través de un pozo a una tasa de* $2m^3/s$. *Si el área total de flujo es* $20000m^2$, *determine los valores de:*
*a) La velocidad de Darcy*
*b) La velocidad real*

**solución**

$$a) \qquad V = \frac{Q}{A} = \frac{2m^3/s}{20000m^2} = 10^{-4}m/s$$

$b)$ $\quad V^* = \frac{V}{m_e} = \frac{10^{-4} m/s}{0{,}1} = 10^{-3} m/s$

Podemos observar claramente que $V^* > V$.

**Observación 1.2.** *La velocidad de Darcy, es la mas utilizada en Hidrología subterránea, por recorrer exactamente la longitud horizontal(L) del acuífero y porque la velocidad del agua subterránea es lenta, mientras que la velocidad real es mayor y recorre distancias mayores, por la tortuosidad del recorrido. Así que cuando se habla de velocidad de flujo de agua subterránea, se refiere a la velocidad de Darcy.*

### 1.6.3. Validez de la Ley de Darcy.

- **La ley de Darcy es válida para**:

  - Régimen de flujo laminar(las lineas de flujo no se cruzan)

  - Medio isotrópico y homogéneo

  - Estudiar el **desplazamiento de una masa de fluido**, pero no lo es cuando se estudia el desplazamiento de las partículas, lo cual constituye un fenómeno mucho más complejo.

- En la generalidad de los casos, el flujo del agua subterránea cumple con esta ley, pues su velocidad es muy lenta y prácticamente siempre la relación es lineal.

- **La ley de Darcy deja de ser válida** para condiciones extremas de flujo:

  - Para régimen de flujo turbulento(las lineas de flujo se cruzan y se retuercen).

  - Para **altas velocidades que presentan el flujo** de agua en terrenos kársticos y las formaciones rocosas fracturadas e igualmente en las cercanías de los pozos de bombeo.

  - Para valores altos del gradiente hidráulico y para valores bajos del gradiente hidráulico(arcillas compactas).

- En el estudio hidrodinámico del flujo en un medio poroso, se ha definido un número de Reynolds $Re$, que expresa una relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de viscosidad que actúan en el flujo.

- Para determinar si el régimen es laminar o turbulento, se aplica el número de Reynolds(creado para canales abiertos y tuberías) y es dado por

$$R = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu}$$

Donde: $\rho$ = densidad del fluido($Kg/m^3$)
$V$ = velocidad de Darcy($m/s$)
$d$ = diámetro medio de los granos($m$)
$\mu$ = viscosidad dinámica($Kg/(m^2.s)$)
$\nu = \mu/\rho$ viscosidad cinemática($m^2/s$).

| **R** | **Regimen** | **Velocidad de darcy** |
|---|---|---|
| $R < 1$ | laminar | si se cumple |
| $1 \leq R \leq 10$ | laminar o turbulento | puede o no cumplirse |
| $R > 10$ | turbulento | no se cumple |

*Cuadro 1.5.* Variación del número de Reynolds

**Ejemplo 1.6.** *Se tiene una columna vertical llena de arena, cuya longitud L=120 cm, área transversal $A = 200cm^2$ y el diámetro medio de las partículas de arena es de 1 mm. El agua fluye a través de ella con una Viscosidad cinemática de 0.01310 $cm^2/s$ y conductividad hidráulica de 20 m/día.*
*a) Analizar si es aplicable la Ley de Darcy.*
*b) Cuál es el caudal total Q ?*

**Solución**

a) $i = \frac{\Delta h}{L} = \frac{120}{120} = 1$
$K$ = 20 m/día $=\frac{20m}{86400s} \approx 2{,}3148x10^{-4}$ m/s, pues 1día=24h=24(3600 s)=86400 s
$V = K.i = (2{,}3148x10^{-4})(1) = 2{,}3148x10^{-4}$m/s
d= 1mm=0.001 m
$\nu = 0{,}0131cm^2/s = \frac{0{,}0131}{100^2}m^2/s = 0{,}0131x10^{-4}m^2/s$

Luego el número de Reynols es

$$R = \frac{(2{,}3148x10^{-4}m/s)(0{,}001m)}{0{,}0131x10^{-4}m^2/s} = 0{,}01767$$

Lo cual demuestra que el flujo es laminar y por tanto aplica la Ley de Darcy.

b) Como $A = 200cm^2 = 200/(100)^2 = 0{,}02m^2$, luego el caudal es

$$Q = k.A.i = (20\text{m/día})(0{,}02m^2)(1)$$

$\therefore Q = 0{,}4m^3/\text{día}$

**1.6.4. Generalización de la Ley de Darcy.** De la observaón (1,11) se sabe que

$$q = -K.i$$

En una dirección cualquiera del flujo, el gradiente se puede expresar como

$$i = \frac{dh}{dL}$$

donde: $h$ es la carga total(nivel piezométrico) y $dh$ es la pérdida de carga en la dirección del flujo.
En una dirección dada, el caudal(o flujo específico) será

$$q = -K.\frac{dh}{dL}$$

Ahora, si consideramos el caudal(o flujo específico) en tres dimensiones, se tiene que en dirección del eje $X$, $Y$ y $Z$ respectivamente

$$q_x = -K_x.\frac{\partial h}{\partial x}$$
$$q_y = -K_y.\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$q_z = -K_z.\frac{\partial h}{\partial z} \tag{1.13}$$

## 1.7. Flujo de un contaminante en aguas subterráneas

### 1.7.1. Calidad del agua subterránea.

En hidrogeología la calidad del agua subterránea es tan importante como la cantidad explotable. Actualmente, en la mayoría de los casos, no se trata ya de encontrar agua, sino de estudiar cómo la calidad del agua subterránea está afectada por actividades humanas, predecir la evolución del problema,o, simplemente adoptar las medidas oportunas para que estos problemas no lleguen a producirse.
La mala calidad del agua subterránea puede ser debida a:

- Causas naturales
- La actividad humana(esta es la que mas afecta la calidad del agua).

La calidad del agua se clasifica de acuerdo con los límites establecidos y los usos para la que es apta (humano, agrícola, industrial, o abrevadero de ganado).


Figura 1.24: Contaminantes según los usos
Fuente: Manual de aguas subterránea[3]

### 1.7.2. Contaminación del agua subterránea.

La contaminación es la alteración de las propiedades físicas, químicas y/o biológicas del agua por la acción de procesos naturales o artificiales que producen resultados indeseables.

La contaminación del agua subterránea es más difícil de detectar que la del agua superficial debido a que no está visible, provocando mayor duración del contaminante en el medio, una vez detectada es posible que haya afectado a una gran proporción del acuífero. Una vez que se determina la contaminación del agua, se debe identi-

ficar la fuente de contaminación y por lo tanto el contaminante, su movilidad, su toxicidad y su persistencia.

**Diferencias entre la contaminación de las aguas superficiales y de las aguas subterráneas**

**(1) En la detección:** En la superficie, la contaminación es perceptible de inmediato, con lo que las posibles medidas de corrección pueden ponerse en marcha inmediatamente. En las aguas subterráneas, cuando se detecta el problema, pueden haber transcurrido meses o años.

**(2) En la solución:** Las aguas de un río se renuevan con la rapidez de su flujo, de modo que, anulado el origen de la polución, en un plazo breve el cauce vuelve a la normalidad. En los acuíferos, como su flujo es tan lento y los volúmenes tan grandes, se necesita mucho tiempo para que se renueve varias veces todo el agua contenida en él, e incluso entonces el problema persiste por las sustancias que quedaron adsorbidas en el acuífero.

**Modos de contaminación**

Hay diferentes vías por las cuales los contaminantes alcanzan la superficie freática más superficial, y posteriormente llegan a los acuíferos, contaminando así el agua subterránea. La contaminación puede ser natural ó artificial y ésta última directa o inducida.

**A) Contaminación natural.-** Es cuando el agua subterránea está en contacto con formaciones sedimentarias marinas y salinas, yacimientos metalíferos o petrolíferos.

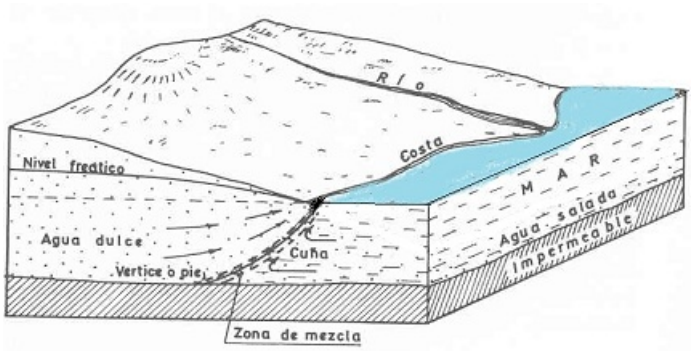


Figura 1.25: Intrusión salina
Fuente: Hidrilogía superficial y subterránea[3]

**B) Contaminación artificial.-** Es la más común y se la puede clasificar de acuerdo al sitio donde se produce (urbana y rural) o a la actividad que la genera (doméstica, industrial, agropecuaria).

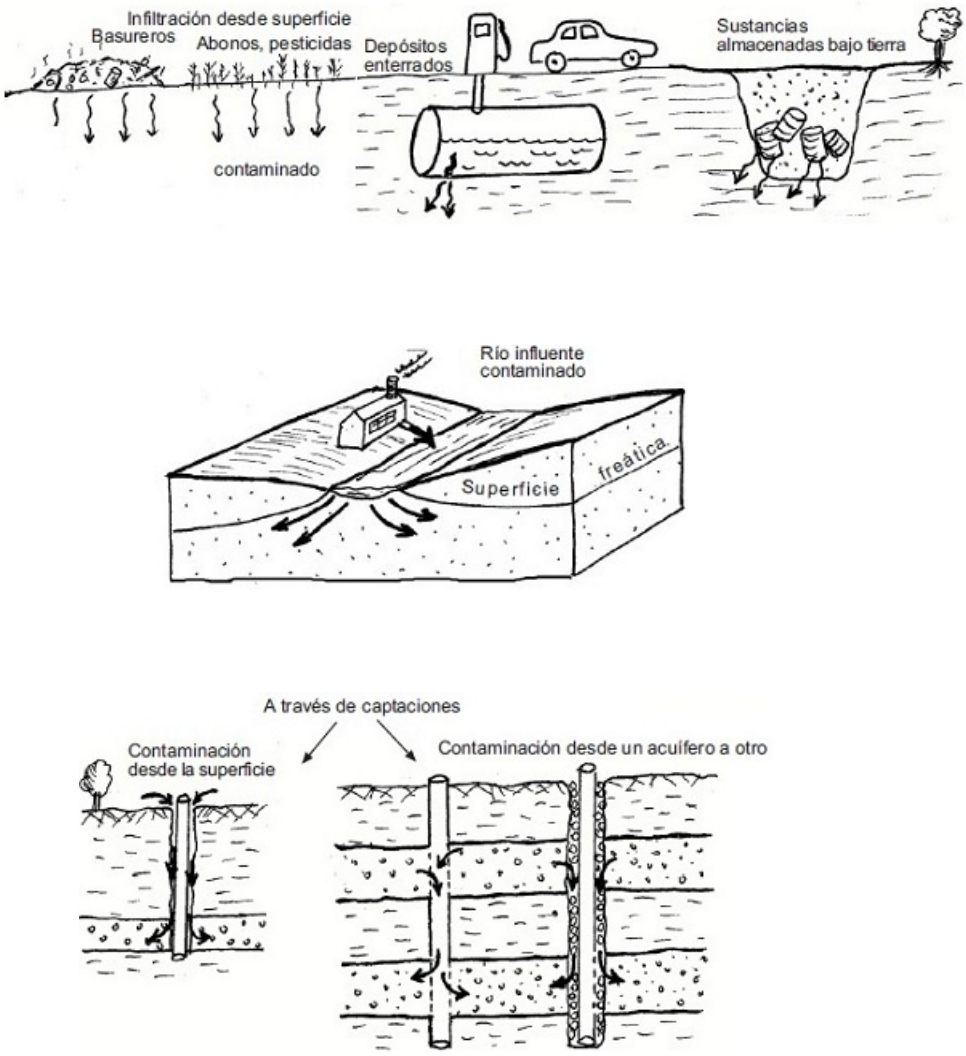


Figura 1.26: Modos de contaminación
Fuente: Hidrogeoloía[14]

La contaminación artificial, a su vez puede ser:

- **Artificial urbana.-** Se genera por vertidos domésticos, lixiviados de vertederos, lixiviados de la industria, depósitos o sustancias almacenadas bajo tierra(ejemplo: gasolineras), etc.

Las aguas residuales de los núcleos urbanos se vierten a cauces superficiales o en fosas sépticas, filtrando en el suelo y aportando diversas sustancias contaminantes: detergentes, nitratos, bacterias y virus, materia orgánica disuelta.

- **Artificial rural.-** Se genera a causa de efluentes no tratados de tambos, corrales, desagües que desembocan en el río, basureros. También debido a:

  **a. Actividades agrícolas.-** Se usa demasiados agroquímicos como:
  - *Fertilizantes:* Aportan al agua compuestos, que en algunos casos, se ha calculado que hasta el 50 % de los nitratos usados como fertilizantes llega al acuífero por infiltración.

  - *Plaguicidas:* Bajo esta denominación genérica se incluyen Insecticidas, Fungicidas, Acaricidas, Nematocidas, Rodenticidas, Bactericidas, Molusquicidas, Herbicidas. La persistencia oscila de una semana a varios años .

  **b. Ganadería.-** De los residuos de los animales proceden compuestos nitrogenados, fosfatos, bacterias, cloruros, y, en algunos casos, metales pesados. No ocasionan problemas graves, salvo las granjas porcinas (los residuoslíquidos se denominan purines).

- **Artificial inducida.-** Se genera por captaciones de pozos abandonados o mal construídos sin un debido estudio técnico, salinización de un acuífero, debido a una sobreexplotación de pozos en áreas costeras, .

### 1.7.3. Protección del agua subterránea frente a la contaminación.

Algunas medidas que debemos tener en cuenta son:

- **Uso controlado y responsable de agroquímicos:** En la actividad agropecuaria, se debe usar en forma racional los fertilizantes y plaguicidas.

  Hoy en día, la tierra ya no tiene los nutrientes suficientes para producir, es por ello que se le tiene que ayudar con el uso de abonos y fertilizantes. Los productores, siembran constantemente y no dejan descansar la tierra, seria importante aplicar lo que indica la Biblia en Levítico 25:3-4, donde indica: seis años sembrarás la tierra ...Pero el séptimo año tendrá descanso.

- **Cementación en los pozos:** Nunca debe faltar durante la construcción de la obra, aislando posibles niveles contaminados y evitando la entrada de aguas

superficiales hacia el interior del pozo por el espacio anular que se origina entre la perforación y la tubería.

- **No utilizar pozos brocales:** como pozo negro o basurero.
- **Basureros o escombreras:** Buscar lugares impermeables, o recoger los efluentes con sondeos o drenes.
- **Aguas residuales urbanas:** Depuración previa a los vertidos; precaución con la utlización de los lodos de depuración. Correcta construcción y vigilancia de conducciones y fosas sépticas.
- **En actividades industriales de todo tipo:** Estudio hidrogeológico previo de las permeabilidades y del sistema regional del flujo subterráneo. Especial precaución en el almacenamiento bajo tierra de residuos peligrosos.

### 1.7.4. Flujo de un contaminante en agua subterránea.

Cuando un contaminante entra en el agua subterránea, normalmente en disolución, se producen varios procesos complejos. Dos posibles situaciones, que suponen dos grupos de procesos son:

- **No existe ningún tipo de interacción con el medio geológico**.
  El contaminante se mueve arrastrado por el flujo de agua subterránea, si existe. En este supuesto hablamos de contaminantes(o solutos) no reactivos o conservativos. Ejemplo: El cloruro.
- **Se producen interacciones entre las sustancias contenidas en el agua y el medio geológico.**
  El contaminante produce diversas reacciones químicas, es decir son solutos reactivos

En este trabajo solo trataremos el caso del flujo de contaminantes móviles disueltos, cuyo contaminante es arrastrado por el agua subterránea y viaja a la misma velocidad del agua.

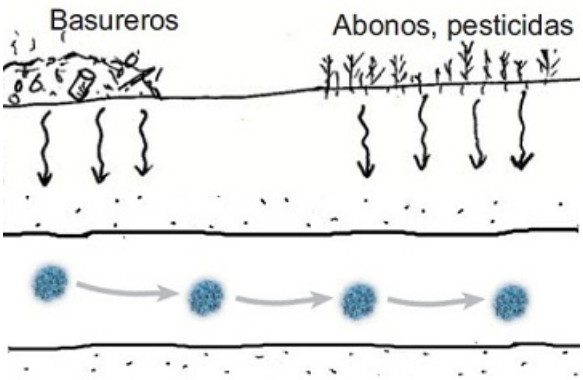


Figura 1.27: Contaminante que viaja a la misma velocidad del agua
Fuente: Hidrogeoloía[14]

Es por ello que nuestro análisis del flujo de un contaminante en un acuífero confinado homogéneo e isotrópico, quedará representado en el estudio del flujo del agua subterránea en un acuífero confinado homogéneo e isotrópico. Sin embargo para contaminantes con otros comportamientos, el tratamiento corresponde al tema: transporte de contaminantes, lo cual difiere del presente estudio.

En el próximo capítulo determinaremos la ecuación que gobierna el flujo de aguas subterráneas, que inicialmente lo determinaremos para cualquier acuífero y luego lo condicionamos para un acuífero confinado homogéneo e isotrópico.

# Capítulo 2

# Modelamiento matemático del flujo de aguas subterráneas

## 2.1. Balance de masas en un volumen de control

La ecuación fundamental que corresponde al flujo de agua subterránea, se deriva de la ecuación del balance de masas y de la Ley de Darcy.

### 2.1.1. Ecuación general del balance de masas en un volumen de control

La ecuación general del balance de masas involucra consideraciones de entrada y salida de flujos y cambios en el almacenamiento, es decir

**Entradas - Salidas = Variación de almacenamiento**

Esta ecuación se puede aplicar a un volumen de control constante arbitrario. En nuestro caso consideraremos un volumen de control definido en un sistema de coordenadas cartesianas de ejes $X, Y$ y $Z$. Consideremos un paralelepípedo cuyas dimensiones de sus lados $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, tal como lo mostramos en la figura (2,1).

Ahora aplicaremos el balance de masas al volumen de control de la figura (2,1), es decir, determinaremos la cantidad de masa de fluido que entra y la cantidad que sale, y como varía la cantidad de agua almacenada.

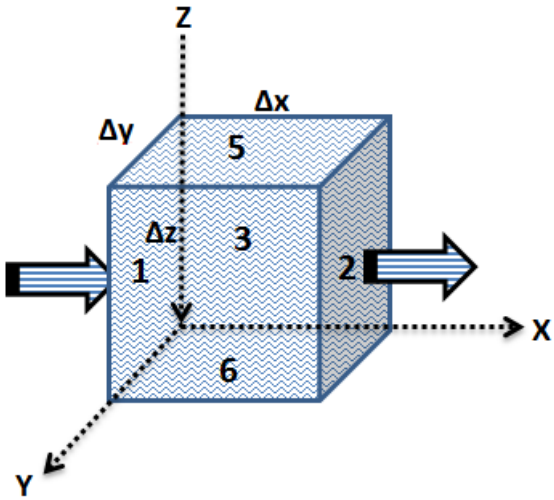


Figura 2.1: Volumen de control de dimensiones $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

### 2.1.2. Análisis de las entradas y salidas del flujo de agua

Puesto que el volumen de control considerado es un paralelepípedo, estudiaremos el flujo de masa a través de sus seis caras, tomando de dos en dos según la dirección de los ejes coordenados $X, Y$ y $Z$.

La masa de fluido que entra por una cara es igual a la densidad por el caudal especifico por el área de paso, es decir:

$$M = \rho q A$$

**Masa del fluido que entra por la cara 1 y sale por la cara 2.**

Para empezar, consideremos el eje X y las dos caras que le son perpendiculares. Si $q_x$ es el caudal o flujo especifico en la dirección de X en el punto de coordenada x, la masa del fluido que entra por la cara 1 es:

$$M_1 = \rho q_x \Delta y \Delta z$$

Asimismo la masa del fluido sale por la cara 2(opuesta a la cara 1), es:

$$M_2 = \rho q_{(x+\Delta x)} \Delta y \Delta z$$

donde: $q_{(x+\Delta x)}$ es el caudal o flujo especifico en la dirección de X en el punto de coordenada $(x + \Delta x)$.

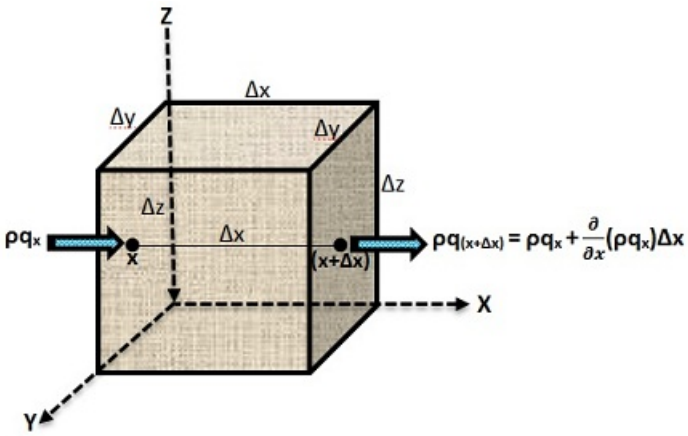


Figura 2.2: Masa entrante y saliente en dirección del eje X.

Aplicando el teorema de Taylor(ecuación(1.3)) y despreciando los términos para $n > 1$,

$$\rho q_{(x+\Delta x)} = \rho q_x + (\Delta x)\frac{\partial}{\partial x}(\rho q_x)$$

luego

$$M_2 = (\rho q_x + (\Delta x)\frac{\partial}{\partial x}(\rho q_x))\Delta y \Delta z$$

$$M_2 = \rho q_x \Delta y \Delta z + \frac{\partial}{\partial x}(\rho q_x)\Delta x \Delta y \Delta z$$

**Diferencia de la masa que entra por la cara 1 y sale por la cara 2.**
Ahora realizando el balance de masas: Masa que entra menos Masa que sale

$$M_1 - M_2 = \rho q_x \Delta y \Delta z - (\rho q_x \Delta y \Delta z + \frac{\partial}{\partial x}(\rho q_x)\Delta x \Delta y \Delta z)$$

$$M_1 - M_2 = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho q_x)\Delta x \Delta y \Delta z$$

Si determinamos en forma análoga para los ejes Y y Z, obtenemos

$$M_3 - M_4 = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho q_y)\Delta y \Delta x \Delta z$$

$$M_5 - M_6 = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho q_z)\Delta z \Delta x \Delta y$$

Sumando las expresiones, obtenemos las entradas menos las salidas para las seis caras del volumen de control:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho q_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho q_z)\right)\Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.1}$$

### 2.1.3. Variación del almacenamiento de agua.

La masa de agua en el volumen de control está dada por el producto del volumen por la densidad

$$M = \rho V,$$

pero el volumen de agua es el producto del volumen total por la porosidad, por lo que

$$M = m\rho\Delta x\Delta y\Delta z,$$

sin embargo, el volumen del material sólido dentro de nuestro volumen de control está dado por

$$\Delta x\Delta y\Delta z - m\Delta x\Delta y\Delta z$$

o equivalentemente

$$(1-m)\Delta x\Delta y\Delta z$$

La variación temporal de la masa M respecto al tiempo seria

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho\Delta x\Delta y\Delta z\right) \tag{2.2}$$

**Que parámetros pueden provocar variaciones de la masa contenida en el volumen de control?**

La respuesta es la variación de la presión en la vertical, estos cambios inducen:
- Variaciones de la densidad del agua y
- Variaciones de la porosidad del terreno.

Estos dos resultados pueden cuantificarse mediante dos parámetros:

A) La comprensibilidad del agua

B) La comprensibilidad del terreno

De acuerdo a [4], estos parámetros se definen como sigue:

**A) La comprensibilidad del agua**

$$\beta = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dP}$$

lo cual es equivalente a

$$d\rho = \beta\rho dP \tag{2.3}$$

**B) La comprensibilidad del terreno**

$$\alpha = \frac{1}{\Delta z}\frac{d(\Delta z)}{dP}$$

lo cual es equivalente a

$$d(\Delta z) = \alpha\Delta z dP \tag{2.4}$$

**Variación de la porosidad del terreno con la presión.**
Si despreciamos la comprensibilidad del terreno, el volumen de material sólido dentro de nuestro volumen de control permanece constante, es decir

$$d(V_{solido}) = d\left[(1-m)\Delta x\Delta y\Delta z\right] = 0$$

Aplicando la derivada de un producto se obtiene

$$-d\left(m\right)\Delta x\Delta y\Delta z + (1-m)\Delta x\Delta y d\left(\Delta z\right) = 0$$

Puesto que la variación es vertical, $\Delta x, \Delta y$ permanecen constantes, por lo que despejando $d\left(m\right)$ y simplificando los $\Delta x, \Delta y$, obtenemos

$$d\left(m\right) = (1-m)\frac{d\left(\Delta z\right)}{\Delta z} \tag{2.5}$$

lo cual muestra la relación de la variación de la porosidad con las variaciones de la dimensión vertical $\Delta z$.

**Variación de la densidad del agua al variar la presión**

La presión para fluidos móviles en cualquier punto está dado por

$$P = P_0 + \rho gh$$

Donde, P es la presión hidrostática (en pascales); $\rho$ es la densidad del líquido ($kg/m^3$); g es la aceleración de la gravedad ($m/s^2$); h es la altura o profundidad

del fluido (en metros)respecto al nivel de referencia donde la presion es $P_0$, Po es la Presión atmosférica (en pascales).

Derivando ambos miembros se obtiene

$$dP = \rho g d(h) \tag{2.6}$$

Si reemplazamos (2,6) en (2,3) obtenemos

$$d\rho = \beta\rho(\rho g d(h)) \tag{2.7}$$

lo cual muestra la relación entre las variaciones de la densidad y las variaciones de h.

Si reemplazamos (2,6) en (2,4)) obtenemos

$$d(\Delta z) = \alpha\Delta z(\rho g d(h)) \tag{2.8}$$

lo cual muestra la relación entre las variaciones de $\Delta z$ y las variaciones de h.

Si reemplazamos en (2,8) en (2,5) obtenemos

$$d\,[m] = (1-m)\alpha\rho g d(h) \tag{2.9}$$

lo cual muestra la relación entre las variaciones de la porosidad con la altura(o potencial piezométrico) h.

Estas últimas tres expresiones relacionan las variaciones de presión, densidad y porosidad con las variaciones del potencial piezométrico h. Esto nos permitirá relacionar los flujos y almacenamientos.

Ahora retornamos a la expresión (2,2), que determina la variación temporal de la masa M respecto al tiempo, la cual lo vamos a derivar aplicando la derivada de un producto y a la vez sustituiremos las ecuaciones(2,7), (2,8) y (2,9)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial M} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho\Delta x\Delta y\Delta z\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho\Delta z\right)\Delta x\Delta y \\
&= \left(\rho m\frac{\partial(\Delta z)}{\partial t} + \rho\Delta z\frac{\partial m}{\partial t} + m\Delta z\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\Delta x\Delta y \\
&= \left(\rho m\alpha\Delta z\rho g\frac{\partial h}{\partial t} + \rho\Delta z(1-m)\alpha\rho g\frac{\partial h}{\partial t} + m\Delta z\rho\beta\rho g\frac{\partial h}{\partial t}\right)\Delta x\Delta y \\
&= \left((\rho m\alpha\Delta z\rho g + \rho\Delta z(1-m)\alpha\rho g + m\Delta z\rho\beta\rho g)\frac{\partial h}{\partial t}\right)\Delta x\Delta y \\
&= \left((m\alpha\rho g + (1-m)\alpha\rho g + m\beta\rho g)\rho(\Delta z)\frac{\partial h}{\partial t}\right)\Delta x\Delta y \\
&= \left((m\alpha\rho g + \alpha\rho g - m\alpha\rho g + m\beta\rho g)\rho(\Delta z)\frac{\partial h}{\partial t}\right)\Delta x\Delta y \\
&= \left(\alpha\rho g + m\beta\rho g\right)\rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial h}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Juntando extremos obtenemos que

$$
\frac{\partial}{\partial M} = \left(\alpha\rho g + m\beta\rho g\right)\rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.10}
$$

## 2.2. Ecuación general del flujo de agua subterránea

### 2.2.1. Ecuación general del flujo de agua subterránea en 3D.

Reemplazando las ecuaciones (2,1) y (2,10) en el balance general de masas

**Entradas - Salidas = Variación de almacenamiento**

$$
-\left(\frac{\partial}{\partial x}(q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z)\right)\rho\Delta x\Delta y\Delta z = \left(\alpha\rho g + m\beta\rho g\right)\rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.11}
$$

y simplificando tenemos que

$$
-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) = \rho g\left(\alpha + m\beta\right)\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.12}
$$

Recordando las ecuaciones (1,13), la Ley de Darcy nos define el flujo específico q de acuerdo a las tres direcciones de los ejes $X, Y$ y $Z$

$$q_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$q_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$q_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

y sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \rho g\left(\alpha + \beta m\right)\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.13}$$

Ahora si llamamos $S_s = \rho g\left(\alpha + \beta m\right)$, el cual es el " coeficiente de almacenamiento específico", obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.14}$$

la cual es llamada **" Ecuación general del flujo de agua subterránea".**

### 2.2.1. Ecuación general del flujo de agua subterránea en 2D.

Si el flujo es horizontal, este no depende de z,por consiguiente, la Ecuación general del flujo de agua subterránea estaria dado por

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

Ahora si nuestro volumen de control corresponde a un acuífero isotrópico,las conductividades hidráulicas son constantes($K_x = K_y = K_z = K$), por lo que la expresión anterior quedará así

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial h}{\partial y}\right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

o equivalentemente a

$$K\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)=S_s\frac{\partial h}{\partial t}$$

Considerando que el acuífero es homogéneo y que es constante su espesor($b \neq 0$), la expresión anterior multiplicada por b, quedará así

$$Kb\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)=S_s b\frac{\partial h}{\partial t}$$

Puesto que la transmisibidad esta dado por $T = K.b$ y el coeficiente de almacenamiento $S = S_s.b$, reemplazando en la expresión anterior, se obtiene

$$T\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)=S\frac{\partial h}{\partial t}$$

Por tanto, **"la ecuación general del flujo de agua subterránea, para el caso bidimensional "** de un acuífero isotrópico y homogéneo, está dado por ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.15}$$

# Capítulo 3

# Solución del modelo matemático

Aplicando el método de diferencias finitas, determinamos las derivadas dobles y simples respectivamente para la función $h$ , además utilizando la notación n para la variable temporal t, el cual colocaremos en la parte superior de la variable incógnita h, y los índices i,j para las variables espaciales x,y respectivamente, los cuales irán como subíndice de la variable h,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \equiv [h_{xx}]^n_{i,j} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}[h^n_{i+1,j} - 2h^n_{i,j} + h^n_{i-1,j}]$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \equiv [h_{yy}]^n_{i,j} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2}[h^n_{i,j+1} - 2h^n_{i,j} + h^n_{i,j-1}]$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \equiv [h_t]^n_{i,j} \approx \frac{1}{2\Delta t}[h^{n+1}_{i,j} - h^{n-1}_{i,j}]$$

Reemplazando estas tres últimas ecuaciones en la ecuación (2,15) se tiene

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}[h^n_{i+1,j} - 2h^n_{i,j} + h^n_{i-1,j}] + \frac{1}{(\Delta y)^2}[h^n_{i,j+1} - 2h^n_{i,j} + h^n_{i,j-1}] = \frac{S}{2T\Delta t}[h^{n+1}_{i,j} - h^{n-1}_{i,j}] \quad (3.1)$$

Para resolver la ecuación (3,1), consideramos inicialmente un análisis unidimensional en el eje X, por lo que la parte correspondiente al eje Y, queda anulada, quedando la ecuación (3,1) expresada de la siguiente forma:

$$\frac{Tx}{(\Delta x)^2}[h^n_{i+1,j} - 2h^n_{i,j} + h^n_{i-1,j}] = \frac{S}{2\Delta t}[h^{n+1}_{i,j} - h^{n-1}_{i,j}] \tag{3.2}$$

Como podemos observar en el análisis unidimensional los valores correspondientes a la variable espacial j, permanecen constantes, por lo que la ecuación anterior, se puede expresar como:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}[h^n_{i+1} - 2h^n_i + h^n_{i-1}] = \frac{S}{2T\Delta t}[h^{n+1}_i - h^{n-1}_i] \tag{3.3}$$

Luego nuestro objetivo es despejar $h^{n+1}_i$, que será la fórmula o la función solución aproximada

$$\frac{2\Delta t.T}{S(\Delta x)^2}[h^n_{i+1} - 2h^n_i + h^n_{i-1}] = [h^{n+1}_i - h^{n-1}_i]$$

Haciendo

$$B = \frac{2\Delta tT}{S(\Delta x)^2},$$

Entonces la expresión queda como:

$$h^{n+1}_i = h^{n-1}_i + b[h^n_{i+1} - 2h^n_i + h^n_{i-1}] \tag{3.4}$$

La ecuación (3.4) es el algoritmo que da la solución al problema planteado. Es decir determina la evolución de las alturas piezométricas, teniendo como datos $\Delta x, \Delta t, S, T$.

**Ejemplo 3.1.** *Consideremos un acuífero confinado, homogéneo e isotrópico, cuya extensión es de 10 km y además teniendo en cuenta los siguientes datos:*
***Datos de entrada.-*** *Consideraremos 10 datos que representan variaciones iniciales de h respecto al tiempo*

*0.8, 1.0, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.5, 0.4, 0.3*

*Variación de la variable x,* $\Delta x = 1000m$
*Coeficiente específico de almacenamiento:* $S = 0{,}0001m^{-1}$
*Coeficiente de transmisividad:* $T = 0{,}0125m^2/dia$
*Variación del tiempo:* $\Delta t = 360dias.$
*Determine la variación de los niveles piezométricos.*

Teniendo los datos y consideraciones anteriores, elaboraremos un programa en MATLAB, el cual llamaremos $programa - hidro2.m$

```
clear all, close all, clc, warning off
clear all, close all, clc, warning off
clear all, close all, clc, warning off
% Lectura de datos de archivos txt
HX = load('hx.txt');
HT = load('ht.txt');
tmax = 12;
xmax = 12;
hx = HX(1:xmax);
ht = HT(1:tmax);
% Inicialización de variables
x = 0;
l = 0;
k = 0;
nn = 0;
ii = 0;
i = 0;
m = 0;
tiempo = 0;
deltax = 1000;
deltat = 360;
S = 0.0001;
T = 0.0125;
b = 0.0;
AA = 0.0;
BB = 0.0;
CC = 0.0;
% Inicialización de vector de operación hc (i,n)
for p = 1:2
for q = 1:xmax
if (p == 1)
```

```
hc(q,p) = hx(q);
end
if (p == 2)
hc(q,p) = ht(q);
end
end
end

% c Loop de iteraciones matriciales
for n = 1:tmax - 1
tiempo=tiempo+deltat;
for i =2:xmax
x = x+deltax;
b = (2 * tiempo * T)/(x^2) * S;
B(i,n+1) = b;
if n == 1
AA = hx(i-1);
Aux2(i-1) = hx(i-1);
else
AA = hc(i,n-1);
Aux2(i-1) = hc(i,n-1);
end
if i ==2
CC = ht(i-1);
else
CC = hc(i-1,n);
end
if i == xmax
BB = hc(i,n);
else
BB = hc(i+1,n);
end
hp(i,n+1) = AA + b*(BB - 2*hc(i,n) + CC);
Aux1(i-1) = hp(i,n+1);
```

```
end

x = 1000;
k = n+1;
l = k+1;
for m = k:l
for p =1:xmax-1
if (m == k)
hc(p,m) = hx(p);
end
if (m == l)
hc(p,m) = Aux2(p);
end
end
end
end

close all
dist = 0:1000:(xmax-1)*1000;
hp(hp ¡= 0.6) = nan;

t = 360;
for n = 2:11
x = 1000;
for i = 2:11
fprintf(' %d   %d   %d   %e   %f',n - 1,x,t,B(i,n),hp(i,n))
x = x + 1000;
end
t = t + 360;
end
```

**Resultados:**

$>> hp =$

| Num | Distancia | Tiempo | B | Hp |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1000 | 360 | 9.00E-10 | 1.1 |
| 1 | 2000 | 360 | 2.25E-10 | 1.2 |
| 1 | 3000 | 360 | 1.00E-10 | 1.4 |
| 1 | 4000 | 360 | 5.63E-11 | 1.5 |
| 1 | 5000 | 360 | 3.60E-11 | 1 |
| 1 | 6000 | 360 | 2.50E-11 | 1.2 |
| 1 | 7000 | 360 | 1.84E-11 | 1.3 |
| 1 | 8000 | 360 | 1.41E-11 | 1.4 |
| 1 | 9000 | 360 | 1.11E-11 | 1.5 |
| 1 | 10000 | 360 | 9.00E-12 | 1.6 |
| 2 | 1000 | 720 | 4.50E-10 | 1.2 |
| 2 | 2000 | 720 | 2.00E-10 | 1.4 |
| 2 | 3000 | 720 | 1.13E-10 | 1.5 |
| 2 | 4000 | 720 | 7.20E-11 | 1 |
| 2 | 5000 | 720 | 5.00E-11 | 1.2 |
| 2 | 6000 | 720 | 3.67E-11 | 1.3 |
| 2 | 7000 | 720 | 2.81E-11 | 1.4 |
| 2 | 8000 | 720 | 2.22E-11 | 1.5 |
| 2 | 9000 | 720 | 1.80E-11 | 1.6 |
| 2 | 10000 | 720 | 1.49E-11 | 1.1 |
| 3 | 1000 | 1080 | 6.75E-10 | 1.2 |
| 3 | 2000 | 1080 | 3.00E-10 | 1.4 |
| 3 | 3000 | 1080 | 1.69E-10 | 1.5 |
| 3 | 4000 | 1080 | 1.08E-10 | 1 |
| 3 | 5000 | 1080 | 7,50E-11 | 1.2 |
| 3 | 6000 | 1080 | 5.51E-11 | 1.3 |
| 3 | 7000 | 1080 | 4.22E-11 | 1.4 |
| 3 | 8000 | 1080 | 3.33E-11 | 1.5 |
| 3 | 9000 | 1080 | 2.70E-11 | 1.6 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 10000 | 1080 | 2.23E-11 | 1.1 |
| 4 | 1000 | 1440 | 9.00E-10 | 1.2 |
| 4 | 2000 | 1440 | 4.00E-10 | 1.4 |
| 4 | 3000 | 1440 | 2.25E-10 | 1.5 |
| 4 | 4000 | 1440 | 1.44E-10 | 1 |
| 4 | 5000 | 1440 | 1.00E-10 | 1.2 |
| 4 | 6000 | 1440 | 7.35E-11 | 1.3 |
| 4 | 7000 | 1440 | 5.63E-11 | 1.4 |
| 4 | 8000 | 1440 | 4.44E-11 | 1.5 |
| 4 | 9000 | 1440 | 3.60E-11 | 1.6 |
| 4 | 10000 | 1440 | 2.98E-11 | 1.1 |
| 5 | 1000 | 1800 | 1.13E-09 | 1.2 |
| 5 | 2000 | 1800 | 5.00E-10 | 1.4 |
| 5 | 3000 | 1800 | 2.81E-10 | 1.5 |
| 5 | 4000 | 1800 | 1.80E-10 | 1 |
| 5 | 5000 | 1800 | 1.25E-10 | 1.2 |
| 5 | 6000 | 1800 | 9.18E-11 | 1.3 |
| 5 | 7000 | 1800 | 7.03E-11 | 1.4 |
| 5 | 8000 | 1800 | 5.56E-11 | 1.5 |
| 5 | 9000 | 1800 | 4.50E-11 | 1.6 |
| 5 | 10000 | 1800 | 3.72E-11 | 1.1 |
| 6 | 1000 | 2160 | 1.35E-09 | 1.2 |
| 6 | 2000 | 2160 | 6.00E-10 | 1.4 |
| 6 | 3000 | 2160 | 3.38E-10 | 1.5 |
| 6 | 4000 | 2160 | 2.16E-10 | 1 |
| 6 | 5000 | 2160 | 1.50E-10 | 1.2 |
| 6 | 6000 | 2160 | 1.10E-10 | 1.3 |
| 6 | 7000 | 2160 | 8.44E-11 | 1.4 |
| 6 | 8000 | 2160 | 6.67E-11 | 1.5 |
| 6 | 9000 | 2160 | 5.40E-11 | 1.6 |
| 6 | 10000 | 2160 | 4.46E-11 | 1.1 |
| 7 | 1000 | 2520 | 1.58E-09 | 1.2 |
| 7 | 2000 | 2520 | 7.00E-10 | 1.4 |
| 7 | 3000 | 2520 | 3.94E-10 | 1.5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 4000 | 2520 | 2.52E-10 | 1 |
| 7 | 5000 | 2520 | 1.75E-10 | 1.2 |
| 7 | 6000 | 2520 | 1.29E-10 | 1.3 |
| 7 | 7000 | 2520 | 9,84E-11 | 1.4 |
| 7 | 8000 | 2520 | 7.78E-11 | 1.5 |
| 7 | 9000 | 2520 | 6.30E-11 | 1.6 |
| 7 | 10000 | 2520 | 5.21E-11 | 1.1 |
| 8 | 1000 | 2880 | 1.80E-09 | 1.2 |
| 8 | 2000 | 2880 | 8.00E-10 | 1.4 |
| 8 | 3000 | 2880 | 4.50E-10 | 1.5 |
| 8 | 4000 | 2880 | 2.88E-10 | 1 |
| 8 | 5000 | 2880 | 2.00E-10 | 1.2 |
| 8 | 6000 | 2880 | 1.47E-10 | 1.3 |
| 8 | 7000 | 2880 | 1.13E-10 | 1.4 |
| 8 | 8000 | 2880 | 8.89E-11 | 1.5 |
| 8 | 9000 | 2880 | 7.20E-11 | 1.6 |
| 8 | 10000 | 2880 | 5.95E-11 | 1.1 |
| 9 | 1000 | 3240 | 2.03E-09 | 1.2 |
| 9 | 2000 | 3240 | 9.00E-10 | 1.4 |
| 9 | 3000 | 3240 | 5.06E-10 | 1.5 |
| 9 | 4000 | 3240 | 3.24E-10 | 1 |
| 9 | 5000 | 3240 | 2.25E-10 | 1.2 |
| 9 | 6000 | 3240 | 1.65E-10 | 1.3 |
| 9 | 7000 | 3240 | 1.27E-10 | 1.4 |
| 9 | 8000 | 3240 | 1.00E-10 | 1.5 |
| 9 | 9000 | 3240 | 8.10E-11 | 1.6 |
| 9 | 10000 | 3240 | 6.69E-11 | 1.1 |
| 10 | 1000 | 3600 | 2.25E-09 | 1.2 |
| 10 | 2000 | 3600 | 1.00E-09 | 1.4 |
| 10 | 3000 | 3600 | 5.63E-10 | 1.5 |
| 10 | 4000 | 3600 | 3.60E-10 | 1 |
| 10 | 5000 | 3600 | 2.50E-10 | 1.2 |
| 10 | 6000 | 3600 | 1.84E-10 | 1.3 |
| 10 | 7000 | 3600 | 1.41E-10 | 1.4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 8000 | 3600 | 1.11E-10 | 1.5 |
| 10 | 9000 | 3600 | 9.00E-11 | 1.6 |
| 10 | 10000 | 3600 | 7.44E-11 | 1.1 |

Los resultados obtenidos muestran que los niveles piezométricos casi no varían significativamente, lo cual se debe a que el valor de B es casi cero.

# Conclusiones

Al terminar la presente investigación, se llega a las siguientes conclusiones:

1. La Ley de Darcy ha sido de gran ayuda para determinar la ecuación general que determina el flujo del agua subterránea en un acuífero confinado, homogéneo e isotrópico.

2. El modelo matemático estudiado en este trabajo, es capaz de determinar el flujo de un contaminante en un acuífero confinado, homogéneo e isotrópico.

3. Aplicando el método de diferencias finitas, ha sido posible determinar la solución de la ecuación diferencial que modela el flujo del agua subterránea en un acuífero confinado, homogéneo e isotrópico y por ende el flujo de los contaminantes que son conducidos por el agua subterránea.

4. La solución del modelo matemático estudiado en este trabajo, ha determinado la fórmula que determina los niveles piezometricós.

5. Se ha elaborado el programa $programa - hidro2.m$ para el ejemplo (3,1), donde observamos que los niveles piezométricos casi no varian significativamente.

6. Los niveles piezométricos, nos permiten determinar la superficie piezométrica y las isopiezas. Generalmente los planos de isopiezas se referencia a los planos topográficos, lo que permite determinar:
-Profundidad del agua subterránea,
- Dirección del flujo,
- Hacer inferencias sobre la permeabilidad de las formaciones, etc..

7. El estudio del flujo de un contaminante en un acuífero confinado, homogéneo e isotrópico, permite dar estrategias de como descontaminar el agua subterránea, logrando hacer el agua, apta para el consumo humano.

# Recomendaciones

Espero que la presente investigación sirva como base para futuros estudios que incluya tópicos más avanzados como:

1. Transporte de contaminantes en aguas subterráneas, aplicando diferencias finitas.

2. Transporte de contaminantes en aguas subterráneas, aplicando elementos finitos.

3. Descontaminación de acuíferos de la zona costera de la región, teniendo en cuenta que en la mayoría de ellos, el agua es un poco salada.

# Bibliografía


[1] Celis B.(2009). Contaminación de aguas subterráneas. Ciencia Ahora Nº 22, Universidad de Concepción, Chile.

[2] CI51J (2011). Hidráulica de aguas subterráneas y su aprovechamiento. Departamento de Ingeniería Civil-Universidad de Chile.

[3] Collazo M. y Montaño J.(2012). Manual de agua subterránea. Montevideo-Uruguay.

[4] Escuder Roser, Fernandez Daniel, et. al.(2013). Curso internacional de Hidrología subterránea. Barcelona-España.

[5] E.T.S. (1999). Hidrología superficial y subterránea. Ingenieria de caminos, canales y puentes.

[6] Lara L., Rubio O. y Gutierrez N.(2008). Solución numérica de las ecuaciones de aguas poco profundas bidimensional utilizando un esquema de diferencias finitas explícito, *In Press Revista Ciencia y Tecnología*, ISSN $1810-6781$, Escuela de Postgrado, UNT, Vol. **11**.

[7] Mathews J., Fink k.(2000). Métodos Numéricos con MATLAB ($2^a$ ed.). Madrid: Prentice Hall.

[8] Mendoza O.(2016). Resolución de Ecuaciones Diferenciales Parciales mediante el método de diferencias finitas y su paralelización. Tesis para el título de Matemático, Universidad Nacional Autónoma de México.

[9] Navarro A., Alfageme F., Eraso A., Laguna L.(2001). Hidrogeología como técnica de apoyo en la Ingeniería Civil. Instituto Tecnológico GeoMinero España.

[10] Ordoñez J.(2011). Aguas subterráneas-Acuíferos. SENAMHI, Lima-Perú.

[11] Oyarzún R.(2007). Transporte de contaminantes en aguas subterráneas. *CEAZA*-Chile.

[12] Romero A. y Lovera D.(2005). Aplicación de diferencias finitas para el flujo de contaminantes en el acuífero de Ayamonte. *Revista del Instituto de Investigación FIGMMG,UNMSM* . ISSN 1561-0888 (impreso) / 1628-8097 (electrónico)

[13] Romero S., Moreno F. y Rodriguez I.(2001). Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Universidad de Huelva.

[14] Sanchez, J.(2004). Hidrogeología . Universidad de Salamanca-España

[15] Velez, M.(1999). Hidráulica de aguas subterráneas($2^a$ ed.). Medellin-Universidad Nacional de Colombia.

[16] Villón, M(2002). Hidrología ($2^a$ ed.). Lima: editorial Villón.

[17] Werner, J.(1996). Introducción a la hidrogeología . Universidad Autónoma de Nuevo León-México.