UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
ESCUELA DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN CIENCIAS

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS DE UN MODELO EPIDÉMICO SIR REACCIÓN - DIFUSIÓN MEDIANTE CONTROL ÓPTIMO

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

AUTORA

Lic. Mat. EVA SIESQUÉN SANDOVAL

ASESOR

M. Sc OSCAR ANTONIO SANTAMARÍA SANTISTEBAN

LAMBAYEQUE – PERÚ

2019

"SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS DE UN MODELO EPIDÉMICO SIR REACCIÓN - DIFUSIÓN MEDIANTE CONTROL ÓPTIMO".

Lic Mat. Eva Siesquén Sandoval	M. Sc Oscar A. Santamaría Santisteban
Autora	Asesor

Tesis Presentada a la Escuela de Postgrado de la Universidad Nacional "Pedro Ruiz Gallo" para optar el Grado Académico de Maestro en Ciencias con Mención en Matemática Aplicada

Aprobado Por:

Dra. Olinda Vigo Vargas
Presidenta del Jurado

M.Sc. Betty Rimarachin López
Secretaria del Jurado

M. Sc. Elmer Lluen Cumpa
Vocal del Jurado

Lambayeque – Perú
2019

DEDICATORIA

A Dios por ser mi creador, el amigo que nunca falla y la luz que guía mi camino.

A mi padre Demetrio por su ejemplo, consejos, comprensión, apoyo económico y moral que en todo momento me brindó para la culminación de la presente tesis, también no puedo dejar de mencionar a mi querida madre María a pesar de haberla perdido, siento que ha estado siempre cuidándome, guiándome desde el cielo y sé que este momento hubiera sido tan especial para ella como lo es ahora para mí.

A mis hermanos Melchor,Nélida y Sara por todo el apoyo brindado y quienes han sido mi inspiración para ser mejor cada día.

A mis sobrinos Melissa, Fiorella y Alexander a quienes adoro y llenan mi vida de alegrías.

EVA

AGRADECIMIENTO

A Dios por ser el guía de mi vida y por haberme puesto en mi camino a personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudios de la presente tesis.

A mi padre y hermanos, de los cuales siempre recibí su apoyo.

Al Mg.Oscar A. Santamaria Santisteban por el asesoramiento de la presente tesis.

A mi amigo Mg. Mat. Fernando Huancas Suarez por sus enseñanzas, ayuda incondicional y a pesar de la distancia me ayudó en todo momento a culminar la presente tesis.

A mis grandes amigos Jessica,Martín y Darío, por acompañarme todo este tiempo de estudio.

EVA

Índice general

Resumen

En este trabajo, se estudia el problema inverso de la identificación de los coeficientes para el modelo de reacción–difusión tipo SIR, presentado por C.J. Ducan et.al, el cual modela la transmisión de una enfermedad de tipo SIR.

Para lo cual se propone lo siguiente: Usando el problema directo juntamente con los datos observados de la enfermedad se define el problema inverso. Usando la solución del problema directo juntamente con una apropida funcional de costo, se transforma el problema inverso en un problema de optimización. Luego a este problema se le aplica las técnicas de la teoría de control óptimo, para así deducir una condición necesaria de optimalidad. Este resultado, se reescribe en términos de cotas apropiadas que relacionan la solución del problema de optimización con los gradientes de los parámetros del problema inverso. Finalmente usando esta acotación se logra obtener la estabilidad local y la unicidad local de la solución del problema en estudio.

Es importante notar que la misma técnica se puede aplicar para modelos tipo SIS, SI, lo cual permite implementar un método numérico para la simulación numérica del problema en estudio.

Es relevante su aplicación de la solución del problema estudiado, ya que permite intervenir de manera indirecta sobre enfermedades infecciosas, como el dengue, cólera, tuberculosis entre otras, para implementar estrategias que permiten combatirlas de modo efectivo.
Palabras claves: Modelo de reacción-difusión tipo SIR, problema inverso, problema de optimización.

Abstract

In this paper, the inverse problem of the identification of the coefficients is studied for the reaction-diffusion model type SIR, presented by C.J. Ducan et.al, which models the transmission of an SIR-type disease.

For which the following is proposed: Using the direct problem together with the observed data of the disease, the inverse problem is defined. Using the solution of the direct problem together with a suitable functional cost, the inverse problem is transformed into an optimization problem. Then to this problem is applied the techniques of the theory of optimal control, in order to deduce a necessary condition of optimality. This result is rewritten in terms of appropriate bounded that relate the solution of the optimization problem with the gradients of the parameters of the direct problem. Finally, using this boundary, it is possible to obtain the local stability and the local uniqueness of the solution of the problem under study.

It is important to note that the same technique can be applied for SIS, SI models, which allows the implementation of a numerical method for the numerical simulation of the problem under study.

Its application of the solution of the studied problem is relevant, since it allows to intervene indirectly on infectious diseases, such as dengue, cholera, tuberculosis, among others, to implement strategies that allow to fight them in an effective way.

Keywords: Reaction-diffusion model type SIR, inverse problem, optimization problem.

Introducción

Hoy en día los problemas inversos aparecen en muchos campos, tales como, electromagnetismo, acústica, elasticidad, mecánica cuántica, electrodinámica, dinámica poblacional, imágenes médicas ópticas, etc. Es decir, desde su aparición han tenido un rol muy importante en el desarrollo de la tecnología, por ejemplo en el diseño de estrategias para el control de enfermedades infecciosas, análisis de imágenes médicas, diseño de prótesis, etc. Por otra parte, la teoría de control es ampliamente usada en el control de la propagación de enfermedades, tales como en los modelos matemáticos tipo SIR,y debido a la movilidad de la población mundial es que ha originado el contagio de enfermedades entre poblaciones y de allí la necesidad de incorporar la variable espacial en dicho modelo. Muchos de los problemas inversos son problemas "mal puestos", por lo que el objetivo de esta investigación es transformarlo a un problema de optimización, el que será resuelto usando métodos de la teoría del control.
Iniciamos este trabajo de investigación con una descripción y análisis de los problemas inversos para modelos tipo SIR, así como un estudio de los espacios Lp, espacios de Sobolev y espacios de funciones Holderianas,determinando la existencia del minimizador , la unicidad y estabilidad de la identificación de los parámetros β, μ, ν para dicho modelo epidémico.

LA AUTORA

Capítulo 1

Preliminares para abordar el estudio del modelo epidémico Tipo SIR

SECCIÓN 1.1

Problemas bien planteados y Problemas mal planteados

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales parciales cualesquiera, con ciertas condiciones adicionales ya sean condiciones de borde y/o condiciones iniciales.
Este se considera Bien Planteado en el sentido de Hadamard, si posee las siguientes propiedades:

- Existencia de solución
- Unicidad de solución.
- Estabilidad (El problema depende continuamente de los datos)

Caso contrario el problema se considerará mal planteado.
Dentro de los problemas mal planteados se ubican los llamados problemas inversos, y esto es motivado porque en la mayoria de los casos estos problemas tienen muchos datos. Es decir los datos superan al número de ecuaciones que relacionan las variables involucradas en el problema inverso. En este tabajo se estudia este tipo de problemas, cuyo desarrollo histórico se revisa a continuación.

1.1.1 Reseña Histórica de los Problemas Inversos

Históricamente la teoría de los problemas inversos, se inicia en la década de los setenta con los trabajos de Tijonov (1977), en los cuales introdujo los métodos de regularización para problemas mal puestos, abriendo así una línea de investigación que hoy tiene gran aceptación en la comunidad académica. A raíz de estos trabajos hay quien considera los Problemas Inversos como rama de las Matemáticas, bajo el argumento básico de que sus ideas permitieron a la comunidad científica romper con lo que ahora se considera un prejuicio histórico y que tiene su origen en un concepto que, por otro lado, ha hecho avanzar grandemente las Ecuaciones en Derivadas Parciales: el concepto de “problema bien plantedos”(“well posed”).

Este tipo de problemas quedaron relegados a la categoria de curiosidad académica, debido a que según Hadamard “los problemas de interes físico son aquellos que tienen una solución única que depende continuamente de los datos”. Durante la segunda guerra mundial, el éxito del radar y del sonar hizo a la comunidad científica preguntarse si era posible determinar, a partir de las mediciones hechas, mas información que exclusivamente la posición del objeto; aparecio asi un problema mal planteado, que se dio en llamar “problemas mal planteados”(“ill posed”): el problema inverso de scattering. Hay sin embargo otros antecedentes históricos de problemas inversos en los trabajos de Von Neumann y de Faddeev en el estudio de la teoría de Scattering cuántico.

Los problemas inversos aparecen en muchos campos, tales como: electromagnetismo, acústica, elasticidad, mecánica cuántica, electrodinámica, dinámica poblacional, imágenes médicas ópticas, etc. Donde su aparición han jugado un rol muy importante en el desarrollo de la tecnología, por ejemplo en el diseño de estrategias para el control de enfermedades infecciosas, análisis de imágenes médicas, diseño de prótesis, etc. Una dificultad en la solución de problemas inversos lo constituye el hecho, que en la mayoría de los casos son problemas “mal plantedos”, por ello, es en los últimos años que se ha implementado una técnica, que consiste en transformar el problema inverso en un problema de optimización, para luego ser resuelto aplicando métodos de la teoría del control. Este camino es el que se propone en el presente estudio.

1.1.2 Problema Inverso

Es aquel problema en donde los valores de algunos parámetros del modelo en estudio deben ser obtenidos de los datos observados.
Puede ser formulado como sigue:
Datos Observados$\Rightarrow$ Identificación de parámetros del modelo en estudio.
Por ejemplo:
Problema directo : El producto de dos números.
El problema inverso : la factorización de un número.
Este problema inverso no tiene una solución única; de allí que determinaremos condiciones adicionales que dan la unicidad y en nuestro ejemplo sería la descomposición en factores primos.

SECCIÓN 1.2

Problema Inverso para Modelo Tipo SIR

En la actualidad los modelos matemáticos que describen la dinámica de las enfermedades infecciosas juegan un importante papel en el control de enfermedades en epidemiología, muchos de estos modelos son interesantes, ya que describen el modo de transmisión de la enfermedad. Muchos investigadores sugieren tasas de incidencias no lineales de las enfermedades para modelar los procesos de transmision de dichas enfermedades. Los estudios cualitativos de estos modelos son importante, ya que proporcionan herramientas para el control o predcción de enfermedades.
La difusón de una epidemia causa la muerte de millones de personas alrededor del mundo así como también demanda el gasto de gran cantidad de recursos por parte del estado para una adecuada atención de la población afectada. Por lo tanto, es esencial prestarle una adecuada a este problema para detener la propagación de tales enfermedades.
Dentro de los modelos epidémicos, se puede señalar a los del tipo SI, SIS y SIR, los cuales se describen a continuación.

- **Modelo** SI

  El modelo SI es uno de los modelos epidemiológicos más simples, cuyo nombre proviene de las iniciales S (poblacion susceptible) e I (poblacion infectada). Este modelo consiste de dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\lambda I S\left(t\right)}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\lambda I\left(t\right) S\left(t\right)}{N}\end{aligned}$$

  En donde S e I representa a los individuos de la población total N susceptibles de ser infectados e individuos infectados, respectivamente, aquí: $N = I + S$ y λ es la tasa de contacto entre los individuos susceptibles y los individuos infectados.

- **Modelo** SIS

  Si en el modelo anterior SI, se considera la tasa de recuperación de la población infectada, tenemos otro modelo elemental que describe la dinámica de la infección. Este modelo se le llama SIS y se formula también como un sistema de dos ecuaciones diferenciales, el cual se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\lambda I\left(t\right) S\left(t\right)}{N} + \mu I\left(t\right) \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\lambda I\left(t\right) S\left(t\right)}{N} - \mu I\left(t\right)\end{aligned}$$

  aquí μ representa la tasa de recuperación de los infectados.

- **Modelo** SIR

  El modelo SIR es uno de los modelos epidemiológicos más simples capaces de capturar muchas de las características típicas de los brotes epidémicos. El nombre del modelo proviene de las iniciales S (población susceptible), I (población infectada) y R (población recuperada).

  Dicho modelo explica la evolución de una enfermedad infecciosa creada por un virus o una bacteria, un modelo básico de este tipo se formula como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\lambda I\left(t\right) S\left(t\right)}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\lambda I\left(t\right) S\left(t\right)}{N} - \mu I\left(t\right) \\ \frac{dR}{dt} &= \mu I\left(t\right)\end{aligned}$$

En donde λ es la tasa de contacto entre los individuos susceptibles y los individuos infectados y μ representa la tasa de recuperación de los infectados.

La movilidad de la población mundial origina que el contagio de una enfermedad entre poblaciones que se encuentran geográficamente muy distantes sea ahora muy factible, de allí la necesidad de incorporar la variable espacial en los modelos tipo SIR. Es decir que el modelo a estudiar ya no son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sino sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, los cuales sí incorporan la variable espacial ausente en los modelos vía sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.
De allí que en esta investigación nos interesa el problema inverso de la identificación de parámetros en el modelo SIR reacción - difusión (1.1), dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\left.\begin{array}{rcccc} \partial_t S - \alpha\Delta S & = & \mu(x)N - \mu(x)S - \beta(x)SI & , & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t I - \alpha\Delta I & = & -(\mu(x) + \nu(x))I + \beta(x)SI & , & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_t R - \alpha\Delta R & = & \nu(x)I - \mu(x)R & , & x \in \Omega, t > 0 \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

con condiciones de borde homogéneas de Neumann

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0, x \in \Omega, t > 0 \tag{1.2}$$

y con las siguientes condiciones iniciales

$$S(x,0) = S_0(x) \geq 0, I(x,0) = I_0(x) \geq 0, R(x,0) = R_0(x) \geq 0, x \in \overline{\Omega} \tag{1.3}$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un subconjunto acotado, $S(x,t), I(x,t), R(x,t)$, denotan el número de susceptibles, infectados y recuperados de una población en la posición x y en el instante t , los parámetros α, β, μ, ν, denotan, el coeficiente de difusión de la enfermedad (el cual supondremos constante e igual a 1), el coeficiente de transmisión de la enfermedad, la tasa de muerte y la tasa de recuperación, respectivamente.

Cabe resaltar, que en este modelo, el lado izquierdo del sistema (1,1) describe la propagacion de la enfermedad sobre las poblaciones de susceptibles, infectados y recuperados, mientras que el lado derecho de dicho sistema (1,1) describe la fuentes de las que se nutre dicha enfermedad.

Asimismo, la ecuación (1,2), describe que la población total no tiene contacto con el exterior, es decir no hay propagación de la enfermedad fuera de la frontera de Ω.

Finalmente, la ecuación (1,3), dice que se cuenta con población suceptible, infectada y recuperados al inicio del contagio de la enfermedad.

Capítulo 2

Espacios L^p, espacios de Sobolev y de funciones Holderianas

SECCIÓN 2.1

Espacios L^p

2.1.1 Definición de Espacios L^p y Normas en L^p

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible en el sentido de Lebesgue con interior no vacío.
Si f es una función sobre Ω con valores complejos y Lebesgue medible, se denotará por $\int\limits_{\Omega} f(x)\, dx$ la integral de Lebesgue de f, donde dx denota la medida de Lebesgue.
El espacio de las funciones integrales según Lebesgue es evidentemente un espacio vectorial complejo, con las clásicas operaciones de suma de funciones y producto de un escalar por una función.
Definimos sobre este espacio vectorial las Normas.

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{para } p \in [1, \infty[\\ \operatorname{supess}\{|f(x) : x \in \Omega|\} & \text{para } p = \infty \end{cases}$$

donde: "supess" denota el supremo esencial, se obtiene los espacios normados conocidos como L^p- espacios, espacios de Lebesgue o simplemente espacios L^P.

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \text{ Lebesgue medible: } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \, \text{c.t.p en} \, \Omega \right\}$$

Para la sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ se define el criterio de convergencia inducido por la norma $\|\|_{L_p(\Omega)}$, del modo siguiente:

$$\lim_{j\to\infty} f_j = f \text{ en } L^p(\Omega) \Leftrightarrow \lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_{L^p(\Omega)} = 0 \text{ en } \mathbb{R}$$

Dentro de las propiedades importantes que satisfacen los elementos de $L^p(\Omega)$, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, están la desigualdad de Minkowski y la desigualdad de Hölder o de Cauchy para $p = 2$.
Haciendo uso de ellas se puede derivar resultados muy importantes, por ejemplo que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Bananch.
Además los espacios $L^p(\Omega)$ son reflexivos para $1 < p < \infty$ y separables para $1 \leqslant p \leqslant \infty$. ver Brézis [2] para ver los detalles de todas estas pruebas.

Definición 2.1. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, se dice que el subconjunto Ω_0 de Ω está compactamente incluído en Ω, si se cumple que $\overline{\Omega}_0$ es un conjunto compacto y además $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, en tal caso, se denota por $\Omega_0 \subset\subset \Omega$.

Definición 2.2. Sean $(E, \|\|_E), (F, \|\|_F)$ dos espacios de Banach. Si existe $j : E \to F$ lineal y una contante positiva L tal que $\|j(x)\|_F \leq L\|x\|_E, \forall x \in E$, se dice que j es una inclusión. En tal caso, se tiene que $(E, \|\|_E)$ está incluído en $(F, \|\|_F)$, lo que se denota por $E \hookrightarrow F$. Si $j(E) \subset\subset F$, se dice que $(E, \|\|_E)$ está compactamente incluído en $(F, \|\|_F)$ o se dice simplemente que la inclusión j es compacta.

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, se satisface la siguiente cadena de inclusiones

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

Ejemplo 2.1. Dado $0 < \varepsilon < 1$, definamos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, como sigue

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < x < 1; \varepsilon < y < 1 - x\}$$

Sea $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1+x_2}$. A continuación se prueba que $f \in L^2(\Omega)$
En efecto:

$$\int_\Omega |f(x_1, x_2)|^2 dx_2 dx_1 = \int_\varepsilon^1 \int_\varepsilon^{1-x_1} \frac{1}{(x_1+x_2)^2} dx_2 dx_1$$

Integrando con respecto a la variable x_2 se tiene

$$\int_\Omega |f(x_1,x_2)|^2 dx_2 dx_1 = \int_\varepsilon^1 -[\frac{1}{(x_1+x_2)^{-1}} \}_\varepsilon^{1-x_1}] dx_1$$

Evaluando la integral anterior se obtiene

$$\int_\Omega |f(x_1,x_2)|^2 dx_2 dx_1 = \int_\varepsilon^1 [\frac{1}{x_1+\varepsilon} - 1] dx_1$$

Integrando con respecto a la variable x_2 se tiene

$$\int_\Omega |f(x_1,x_2)|^2 dx_2 dx_1 = [\ln|x_1+\varepsilon| - x_1 \}_\varepsilon^1]$$

Finalmente evaluando la integral anterior se obtiene

$$\int_\Omega |f(x_1,x_2)|^2 dx_2 dx_1 = \ln|1+\varepsilon| + \varepsilon - \ln 2\varepsilon - 1 < \infty$$

Por lo tanto $f \in L^2(\Omega)$.

2.1.2 Teorema y Resultados Importantes

Teorema 2.1 (Desigualdad de Hölder)**.** Sea $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Entonces $f.g \in L^1$ y

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \tag{2.1}$$

Demostración. .

- Si $p = 1$ (se cumple)
- Si $p = \infty$

  Supongamos entonces que $1 < p < \infty$

  Recordemos la desigualdad de Young

  $$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'},\ \forall a \geqslant 0,\ \forall b \geqslant 0 \tag{2.2}$$

  La desigualdad (2.2) es verdadero por ser la función log cóncava sobre $]0,\infty[$ se tiene:

  $$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'} = \log ab$$

entonces:

$$|f(x)|\,|g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g|^{p'} \;\; c.t.p.\; x \in \Omega$$

de donde resulta que $f.g \in L^1$ y que

$$\int |fg| \leqslant \frac{1}{p}\,\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{p'}\,\|g\|_{L^p}^{p'} \tag{2.3}$$

Sustituyendo en (2.3) f por λf $(\lambda > 0)$ resulta:

$$\int |fg| \leqslant \frac{\lambda^{p-1}}{p}\,\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda p'}\,\|g\|_{L^{p'}}^{p'} \tag{2.4}$$

Eligiendo $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\,\|g\|_{L^p}^{p'/p}$ para minimizar el término de la derecha en (2.4) se obtiene

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$$

□

Teorema 2.2. $(L^p, \|\|_p)$ es un espacio Vectorial normado para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Teorema 2.3. $(L^p, \|\|_p)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Demostración. .

- Supongamos primero $p = \infty$

  Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en L^∞. Dado un entero $k \geqslant 1$ existe N_k tal que:

  $$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{k} \text{ para } m, n \geqslant N_k \tag{2.5}$$

  y así existe E_k de medida cero tal que:

  $$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leqslant \frac{1}{k} \;\; \forall x \in \Omega\backslash E_k, \forall m, n \geqslant N_k \tag{2.6}$$

  Sustituyendo $E = \underset{k}{\cup} E_k$ (E es de medida cero), se observa que para todo $x \in \Omega\backslash E$ la sucesión $f_n(x)$ es de Cauchy (en $\mathbb{R}$).

  Sea $f_n(x) \to f(x)$ para $x \in \Omega\backslash E$.

  Al pasar al limite en (2.6) cuando $n \to \infty$ se obtiene:

  $$\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant \frac{1}{k} \;\; \forall x \in \Omega\backslash E, \forall n \geqslant N_k$$

  Así $f \in L^\infty$ y $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{k} \;\; \forall n \geqslant N_k$

  por consiguiente $\|f - f_n\|_{L^\infty} \to 0$

- Supongamos ahora que $1 \leqslant p < \infty$

  Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en L^p. Para concluir la demostración es suficiente probar que una subsucesión es convergente en L^p.

  Se extrae una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que:

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^k} \ , \forall k \geqslant 1$$

  [Se procede como sigue: existe n_1 tal que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2}$, $m, n \geq n_1$, se toma después $n_2 \geq n_1$, tal que

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^2}$$

  para $m, n \geq n_2$, etc.]

  Demostremos que f_{n_k} converge en L^p

  Para simplificar la notación escribimos f_k en lugar de f_{n_k}, de forma que se tiene:

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^k} \ , \forall k \geqslant 1 \tag{2.7}$$

  Siendo

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left|f_{k+1}(x)' - f_k(x)\right|$$

  resulta

$$\|g_n\|_{L^p} \leqslant 1$$

  Del Teorema de la Convergencia monótona se deduce que c.t.p en Ω, $g_n(x)$ Converge a un limite, que se denota $g(x)$, con $g \in L^p$. Por otra parte, para cada $m \geqslant n \geqslant 2$ se verifica:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant g(x) - g_{n-1}(x)$$

  y resulta de esto que c.t.p. en $\Omega\,\{f_n(x)\}$ es de Cauchy y Converge a un limite, designado por $f(x)$

  se tiene c.t.p. en Ω

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant g(x) \ \text{ para } \ n \geqslant 2$$

  De donde resulta que $f \in L^p$. Por último $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$; en efecto, se tiene $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ c.t.p. y $|f_n(x) - f(x)|^p \leqslant g^p(x)$ una mayorante integrable y se concluye además por el teorema de Lebesgue que L^p es un espacio de Banach $\forall 1 \leqslant p \leqslant \infty$

$\square$

Teorema 2.4. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en L^p y $f \in L^p$, tales que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que:

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ c.t.p. en Ω

b) $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ $\forall k$ y c.t.p. en Ω, con $h \in L^p$

Identidades de Green

Las siguientes definiciones y resultados pueden verse en [3]. Denotando por $x' = (x_1, \cdot, \cdot, \cdot, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, se suele escribir $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$. Usando estas notaciones, se tienen las siguientes definiciones

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1, |x_n| < 1\}$$

$$Q_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1, 0 < x_n < 1\}$$

$$Q_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1, x_n = 0\}$$

necesarias para la presentación de la siguiente definición

Definición 2.3. Sea $k \in \mathbb{N}$. Se dice que un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es de clase de C^k si para $x \in \partial\Omega$ existe un abierto $\{x\} \in U$ en $\mathbb{R}^n$ y una aplicación $T : Q \to U$ tal que

1. T es biyectiva,

2. $T \in C^k(\bar{Q}), T^{-1} \in C^k(\bar{U})$,

3. $T(Q_+) = U \cap \Omega, T(Q_0) = U \cap \partial\Omega$.

   Se dice que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es de clase C^∞ si es de clase C^k para todo $k \in \mathbb{R}^n$

Para $\alpha \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, Denotese por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, y definase la derivada distribucional de f como sigue:

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Teorema 2.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de clase C^1 y $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ Entonces:

$$\int\limits_{\Omega} D^{\alpha} f(x)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, V^{\alpha}(x)\, dS,\ \forall \alpha \in N_0^n : |\alpha| = 1$$

donde $V(x) = (V_1(x), \ldots, V_n(x))$ denota el vector normal unitaria exterior $\partial\Omega$ en x y dS su medida de Lebesgue $(n-1)-$dimensional.

Teorema 2.6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 y $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ Entonces

$$\int\limits_{\Omega} D^{\alpha} f(x)\, g(x)\, dx = -\int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, D^{\alpha} g(x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, g(x)\, V^{\alpha} g(x)\, dS,\ \forall \alpha \in N_0^n : |\alpha| = 1$$

Teorema 2.7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 y $f, g \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Entonces:

I) $\int\limits_{\Omega} \Delta f(x)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial V} dS$

II) $\int\limits_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\, dx = -\int\limits_{\Omega} f(x)\, \Delta g(x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x)}{\partial V} f(x)\, dS$

III) $\int\limits_{\Omega} \{f(x)\, \Delta g(x) - g(x)\, \Delta f(x)\}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ f(x)\, \frac{\partial g(x)}{\partial V} - g(x)\, \frac{\partial f(x)}{\partial V} \right\} dS$

donde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ y $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$ son los operadores gradiente y de Laplace, respectivamente y el símbolo "$\cdot$" en (II) denota el producto interno Canónico de $\mathbb{R}^n$

$$x \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Demostración. .

I) En efecto:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \Delta f(x)\, dx &= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) f(x)\, dx \\ &= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x)\, dx + \cdots + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(x)\, dx\end{aligned}$$

Como por hipótesis $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right),\ \forall i = 1, \ldots, n$; entonces al aplicar el teorema 2.5 se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i})dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot V_i dS$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \Delta f(x)\, dx &= \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} V_1(x)\, dS + \cdots + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} V_n(x)\, dS \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) \cdot (V_1(x), \ldots, V_n(x))\, dS \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \nabla f(x) \cdot V(x)\, dS \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial V} dS
\end{aligned}$$

donde $\nabla f(x) \cdot V(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial V}$

II) Utilizando los teoremas 2.6 y 2.7(I) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\, dx &= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right) dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right) dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx + \cdots + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} dx \\
&= -\int\limits_{\Omega} f(x) \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_1^2} dx + \int\limits_{\partial\Omega} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} V_1(x)\, dS + \cdots - \\
&\quad \int\limits_{\Omega} f(x) \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_n^2} dx + \int\limits_{\partial\Omega} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} V_n(x)\, dS \\
&= -\int\limits_{\Omega} f(x) \left(\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_n^2} \right) dx + \\
&\quad + \int\limits_{\partial\Omega} f(x) \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right) (V_1(x), \ldots, V_n(x))\, dS \\
&= -\int\limits_{\Omega} f(x)\, \Delta g(x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, \nabla g(x)\, V(x)\, dS \\
&= -\int\limits_{\Omega} f(x)\, \Delta g(x)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial V} dS
\end{aligned}$$

III) Por el teorema 2.7(II) se tiene

$$\int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\, dx = -\int_{\Omega} f(x)\, \Delta g(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x)}{\partial V} f(x)\, dS$$

y

$$\int_{\Omega} \nabla g(x) \cdot \nabla f(x)\, dx = -\int_{\Omega} g(x)\, \Delta f(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial V} g(x)\, dS$$

restando miembro a miembro estas dos igualdades y aprovechando la conmutatividad del producto interno se obtiene:

$$0 = -\int_{\Omega} f(x)\, \Delta g(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x)}{\partial V} f(x)\, dS + \int_{\Omega} g(x)\, \Delta f(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial V} g(x)\, dS$$

lo cual implica la igualdad dada en (III)

□

SECCIÓN 2.2

Espacios de Sobolev

2.2.1 Espacios de Sobolev y Normas en los espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev son conjuntos de funciones que juegan un rol absolutamente fundamental en el análisis de ecuaciones en derivadas parciales. Principalmente cuando se estudia las soluciones generalizadas.

En esta sección se definirán los Espacios de Sobolev, Normas, Teoremas y Resultados Importantes.

Definición 2.4. Sea $m \in N_0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, El subconjunto $W^{m,p}(\Omega)$ de $L^p(\Omega)$ es definido como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{T \in L^p(\Omega) : D^\alpha T \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in N_0^n, |\alpha| \leqslant m\}$$

La notación $D^\alpha T$ corresponde a la derivada distribucional de orden $|\alpha|$ de T. Note que $L^p(\Omega)$ es identificado con $W^{0,p}(\Omega)$. En otras palabras $W^{m,p}(\Omega)$ contiene a las distribuciones regulares que pueden ser identificadas (de manera única con elementos de $L^p(\Omega)$) y cuyas derivadas distribucionales hasta el orden m, inclusive, están en $L^p(\Omega)$.

Ejemplo 2.2. Sean ε, Ω y f como en el ejemplo (2.1) , entonces $f \in W^{1,2}(\Omega) = H^2(\Omega)$
En efecto, se tiene que por definición

$$H^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \in L^2(\Omega) \quad \text{c.t.p} \quad \text{en} \quad \Omega\}$$

Notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2) = -\frac{1}{(x_1 + x_2)^2}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, x_2) = \frac{2}{(x_1 + x_2)^3}, \tag{2.9}$$

Puesto que ya se probó que $f \in L^2(\Omega)$, por (2.8) y (2.9) solo nos resta probar que $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega)$
Procediendo en forma análoga al ejemplo (2.1) se tiene

$$\int_\Omega |\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2)|^2 dx_2 dx_1 = \int_\varepsilon^1 \int_\varepsilon^{1-x_1} \frac{1}{(x_1 + x_2)^4} dx_2 dx_1$$

Integrando con respecto a la variable x_2 se sigue

$$\int_\Omega |\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2)|^2 dx_2 dx_1 = \int_\varepsilon^1 -[\frac{1}{3(x_1 + x_2)^3} \}_\varepsilon^{1-x_1}] dx_1$$

Evaluando la integral anterior se tiene

$$\int_\Omega |\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2)|^2 dx_2 dx_1 = \frac{1}{3} \int_\varepsilon^1 [\frac{1}{(x_1 + \varepsilon)^3} - 1] dx_1$$

Ahora integrando con respecto a la variable x_1 y evaluando se obtiene

$$\int_\Omega |\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2)|^2 dx_2 dx_1 = \frac{1}{3}[\frac{1}{8\varepsilon^2} + \varepsilon - \frac{1}{2(1 + \varepsilon)^2} - 1] < \infty \tag{2.10}$$

Por otra parte, se tiene

$$\int_\Omega |\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, x_2)|^2 dx_2 dx_1 = 4 \int_\varepsilon^1 \int_\varepsilon^{1-x_1} \frac{1}{(x_1 + x_2)^6} dx_2 dx_1$$

Integrando con respecto a la variable x_2 se sigue

$$\int_\Omega |\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, x_2)|^2 dx_2 dx_1 = 4 \int_\varepsilon^1 -\frac{1}{5}[\frac{1}{(x_1 + x_2)^5} \}_\varepsilon^{1-x_1}] dx_1$$

Evaluando la integral anterior se tiene

$$\int_\Omega |\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1,x_2)|^2 dx_2 dx_1 = \frac{4}{5}\int_\varepsilon^1 [\frac{1}{(x_1+\varepsilon)^5} - 1]dx_1$$

Ahora integrando con respecto a la variable x_1 y evaluando se obtiene

$$\int_\Omega |\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1,x_2)|^2 dx_2 dx_1 = \frac{4}{5}[\frac{1}{64\varepsilon^4} + \varepsilon - \frac{1}{4(1+\varepsilon)^4} - 1] < \infty \tag{2.11}$$

De (2.10),(2.11) y como $f \in L^2(\Omega)$ se sigue que $f \in W^{1,2}(\Omega) = H^2(\Omega)$.

2.2.2 Teoremas y Resultados Importantes

Proposición 2.1. $W^{m,p}(\Omega)$ es un Espacio Vectorial Real

Proposición 2.2. El Espacio Vectorial $W^{m,p}(\Omega)$ es un Espacio Normado con la siguiente norma

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \|D^\alpha f\|_{L^p}$$

Proposición 2.3. El Espacio Vectorial Normado $W^{m,p}(\Omega)$ es un Espacio de Banach.

Demostración. Se demuestra en primer lugar el caso $m = 1$ y posteriormente el caso general

Caso $m = 1$.

Sea $\{f_j\}_{j\in N}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces por definicion de $W^{1,p}(\Omega)$, se sigue que $\{f_j\}_{j\in N} \subset L^p(\Omega)$ y $\left\{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right\}_{j\in N} \subset L^p(\Omega)$ $\forall i = 1,\ldots,n$, son sucesiones de Cauchy en $L^p(\Omega)$, el cual por ser completo implica la existencia de $f, g_i \in L^p(\Omega)$ tal que
$\lim\limits_{j\to\infty} f_j = f$ y $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = g_i$ $\forall i = 1,\ldots,n$ en $L^p(\Omega)$.
Se demuestra ahora que $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Para esto se prueba que $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} = g_i$ $\forall i = 1,\ldots,n$
Sea $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, utilizando el hecho que $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = g_i$ $\forall i = 1,\ldots,n$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_i(x)\,\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega \lim_{j\to\infty}\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx\\ &= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx\end{aligned} \tag{2.12}$$

Ahora, utilizando el hecho que $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ se anula en $\partial\Omega$, por lo que al integrar por partes la expresión anterior se obtiene:

$$\int_\Omega g_i(x)\,\varphi(x)\,dx = -\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_j(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx \tag{2.13}$$

Puesto que$f_j \in L^p(\Omega)$ y $C^\infty(\Omega)$ son densas en cualquier espacio de Lebesgue L^q, se sigue que $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ puede ser considerado en cualquier espacio $L^q(\Omega)$, por lo que de manera particular para $q = {}^{p}\!/_{(p-1)}$, se aplica la desigualdad de Hölder y se conmuta la integral con el límite en la última expresión, es decir

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f_j(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx - \int_\Omega f(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx\right| &\leqslant \int_\Omega |f_j(x)-f(x)|\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right|dx\\ &\leqslant \|f_j - f\|_{L^p(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^q(\Omega)}\end{aligned}$$

y como el miembro derecho converge a cero cuando $j\to\infty$, se tiene que:

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_j(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx = \int_\Omega f(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx$$

entonces de (2.13)

$$\int_\Omega g_i(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx$$

Puesto que $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, las cuales son de soporte compacto, es decir se anulan sobre la frontera de Ω, al integrar por partes se obtiene:

$$\int_\Omega g_i(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx$$

Así en el sentido de las distribuciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i\ \forall i = 1,\ldots,n$$

Por lo tanto como $g_i \in L^p(\Omega), \forall i = 1, \ldots, n$, sumándolo al hecho de que $f \in L^p(\Omega)$ se concluye que $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

Caso $m > 1$. Por argumentos similares al caso anterior, si $\{f_j\}_{j\in N} \subset W^{m,p}(\Omega)$ es una sucesión de Cauchy se tiene en primera instancia que:

$$\{f_j\}_{j\in N} \subset L^p(\Omega) \text{ y } \{D^\alpha f_j\}_{j\in N} \subset L^p(\Omega), \ \forall\alpha \in N_0^n : |\alpha| \leqslant m$$

y además ambas son sucesiones de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Por la completitud de este espacio se sigue que existen $f, g_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que:

$$\lim_{j\to\infty} f_j = f \text{ y } \lim_{j\to\infty} D^\alpha f_j = g_\alpha, \ \forall\alpha \in N_0^n : |\alpha| \leqslant m, \text{ en } L^p(\Omega)$$

Luego, para cada $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_\alpha(x)\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega \lim_{j\to\infty} D^\alpha f_j(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega D^\alpha f_j(x)\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

Ahora, utilizando el hecho que $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ se anula en $\partial\Omega$, por lo que al integrar por partes la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_\alpha(x)\varphi(x)\,dx =&(-1)^{|\alpha|}\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_j(x)D^\alpha\varphi(x)\,dx \\ =&(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \lim_{j\to\infty} f_j(x)D^\alpha\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

Puesto que $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, las cuales son de soporte compacto, es decir se anulan sobre la frontera de Ω, al integrar por partes se obtiene:

$$\int_\Omega g_\alpha(x)\varphi(x)\,dx =(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)\,dx, \ \forall\alpha \in N_0^n : |\alpha| \leqslant m$$

Entonces, en el sentido distribucional se deduce que

$$D^\alpha f = g_\alpha, \ \forall\alpha \in N_0^n : |\alpha| \leqslant m$$

lo cual implica que $f \in W^{m,p}(\Omega)$ □

Teoremas de Inclusión

El objetivo de esta sección es exponer algunas de las inclusiones continuas entre espacios de Sobolev. Por ejemplo debido a la inclusión continua $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, para Ω acotado y $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ es posible el siguiente Teorema:

Teorema 2.8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $m \in N$ y $1 \leqslant p \leqslant q$ entonces $W^{m,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$ continuamente

En general estas inclusiones estén expresadas en términos del exponente de Sobolev, el cual se define a continuación.

Definición 2.5. El número p^*, llamado exponente de Sobolev, se define por

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$$

Teorema 2.9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase C^1, $m \in N$ y $p \in [1, \infty[$, las siguientes inclusiones son continuas

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & m < \left({}^{n}\!/_{p}\right) \\ L^q(\Omega) & m = \left({}^{n}\!/_{p}\right) \qquad q \in [1, \infty[\\ L^{\infty}(\Omega) & m > \left({}^{n}\!/_{p}\right) \end{cases}$$

en tanto que las inclusiones

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{q}(\Omega) & m < \left({}^{n}\!/_{p}\right) \qquad p \in [1, p^*[\\ L^q(\Omega) & m = \left({}^{n}\!/_{p}\right) \qquad q \in [1, \infty[\\ C^{0}\left(\overline{\Omega}\right) & m > \left({}^{n}\!/_{p}\right) \end{cases}$$

Son compactas

Observación 2.1. Un tipo de inclusiones continuas no menos importante que las enunciadas en el teorema anterior es el siguiente:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k\left(\overline{\Omega}\right)$$

para $m > \left({}^{n}\!/_{p}\right)$, $k = m - \left({}^{n}\!/_{p}\right)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado de clase C^1

Los siguientes resultados serán de utilidad en el siguiente capítulo y su prueba puede revisarse en [8]

Teorema 2.10. (Desigualdad de Poincaré) Sea p, tal que $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de clase C^k, donde $k = \{1, 2, ...\}$. Entonces existe una constante $M = M(\Omega, p)$, tal que para cada función u del espacio de Sóbolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene: $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq M\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$

Teorema 2.11. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de clase C^k, donde $k = \{1, 2, ...\}$. Asuma que $p > 1, k - \frac{n}{p} > 0$ y $k - \frac{n}{p}$ no es entero. Entonces $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\frac{n}{p}}(\Omega)$.

SECCIÓN 2.3

Espacios de Funciones Holderianas

2.3.1 Definición y Normas en los espacios de funciones Holderianas

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$. Para $k = 0, 1, 2, \ldots$ se denota $C_{loc}^k(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones $u = u(x)$ cuyas derivadas $D^\alpha u$ para $|\alpha| \leqslant k$ son continuas en Ω.
sea

$$|u|_{0;\Omega} = [u]_{0;\Omega} = \sup_{\Omega} |u| \, ; [u]_{k;\Omega} = \max_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|_{0;\Omega} \tag{2.14}$$

Definición 2.6. Para $k = 0, 1, 2, \ldots$ el espacio $C^k(\Omega)$ es el espacio de Banach de todas las funciones $u \in C_{loc}^k(\Omega)$ para la cual la siguiente norma

$$|u|_{k;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} [u]_{j;\Omega} \tag{2.15}$$

es finita.
Si $0 < \delta < 1$, u es llamado continuo Holderiano con exponente δ en Ω si la seminorma

$$[u]_{\delta;\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\delta} \text{ es finito} \tag{2.16}$$

Esta semi norma es llamada constante Holderiana de u de orden δ. Si el segundo miembro de la ecuación (2.16) es finito para $\delta = 1$, la función u es llamada continua Lipsschitz en Ω, dado por

$$[u]_{k+\delta;\Omega} = \max_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{\delta;\Omega} \tag{2.17}$$

Definición 2.7. Para $0 < \delta < 1$ y $k = 0, 1, 2, \ldots$ el espacio Holderiano $C^{k+\delta}(\Omega)$ es el Espacio de Banach de todas las funciones $u \in C^{k}(\Omega)$ para lo cual la norma

$$[u]_{k+\delta;\Omega} = [u]_{k;\Omega} + [u]_{k+\delta;\Omega} \tag{2.18}$$

es finita

Observación 2.2. Probaremos que $C^{k+\delta}(\Omega)$ es un Espacio de Banach

Demostración. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $C^{k+\delta}(\Omega)$. Estas Funciones son equiacotadas y equicontinuas en algún subdominio compacto en Ω
Por lo tanto existe una subsecuencia $\{u_{n_1}\}$ la cual converge uniformemente a una función u en algún subdominio compacto de Ω. Obviamente u es acotada y continua en Ω. El mismo argumento puede ser repetido para alguna derivada de $\{u_n\}$ de orden superior e incluyendo k.
Además las subsucesiones correspondientes pueden ser las mismas y luego del cálculo se tiene que u tiene k derivadas las cuales son limitadas y continuas en Ω.
$\forall\alpha$ con $|\alpha| = k$ y $\forall x, y \in \Omega$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&|[D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)] - [D^{\alpha}u_n(x) - D^{\alpha}u_n(y)]| \\
\leqslant &\lim_{m\to\infty} \sup |[D^{\alpha}u_m(x) - D^{\alpha}u_m(y)] - [D^{\alpha}u_n(x) - D^{\alpha}u_n(y)]| \\
\leqslant &|x-y|^{\delta} \lim_{m\to\infty} \sup [D^{\alpha}u_m - D^{\alpha}u_n]_{\delta;\Omega}
\end{aligned}$$

Del mismo modo podemos considerar $D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u_n(x)$ para $|\alpha| \leqslant k$ se tiene que

$$|u - u_n|_{k+\delta;\Omega} \leqslant \lim_{m\to\infty} \sup [u_m - u_n]_{k+\delta;\Omega}$$

y que la última expresión va a cero cuando $n \to \infty$
Por lo tanto la sucesión de Cauchy $\{u_n\}$ converge hacia la función u, en la norma de $C^{k+\delta}(\Omega)$. □

Ejemplo 2.3. Dado $r > 0$, considerese la circunferencia con centro en el origen y radio r, denotada por $B((0, r)$. Definamos el conjunto

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in B((0, r) : x_1 + x_2 > r\}$$

y la función f sobre Ω, con valores reales, dada por la siguiente regla de correspondencia, $f(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1+z_2}$

A continuación se prueba que $f \in C^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

En efecto:

$$\frac{|f(x_1,x_2)-f(y_1,y_2)|}{\|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\|^{\frac{1}{2}}} = \frac{|(y_1-x_1)+(y_2-x_2)|}{(\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|y_1-x_1|+|y_2-x_2|}{A(\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})^{\frac{1}{2}}}$$

, con $A = |(x_1+x_2)(y_1+y_2)|$

Tomando extremos se obtiene

$$\frac{|f(x_1,x_2)-f(y_1,y_2)|}{\|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|y_1-x_1|+|y_2-x_2|}{(\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})^{\frac{1}{2}}|(x_1+x_2)(y_1+y_2)|}$$

Asimismo, se sabe que

$$|y_1-x_1| \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \tag{2.19}$$

e

$$|y_2-x_2| \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \tag{2.20}$$

Usando (2.19) y (2.20), se deduce que

$$\frac{|f(x_1,x_2)-f(y_1,y_2)|}{\|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}{[\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}]^{\frac{1}{2}}[|(x_1+x_2)(y_1+y_2)|]}$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene

$$\frac{|f(x_1,x_2)-f(y_1,y_2)|}{\|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2[\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}]^{\frac{1}{2}}}{|(x_1+x_2)(y_1+y_2)|}$$

Puesto que $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \Omega$, entonces

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} = 2r\,\mathrm{sen}(\frac{\theta}{2}) \tag{2.21}$$

y

$$x_1+x_2 > r, y_1+y_2 > r \Rightarrow |(x_1+x_2)(y_1+y_2)| > r^2 \tag{2.22}$$

donde θ es el ángulo formado por los vectores (x_1,x_2) e (y_1,y_2)

De (2.22) se sigue que

$$\frac{1}{|(x_1+x_2)(y_1+y_2)|} < \frac{1}{r^2} \tag{2.23}$$

De (2.21) y De (2.23) se deduce que

$$\frac{|f(x_1,x_2)-f(y_1,y_2)|}{\|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2\sqrt{2r\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}}{r^2} \tag{2.24}$$

Simplificando se obtiene

$$\frac{|f(x_1,x_2)-f(y_1,y_2)|}{\|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2\sqrt{2\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}}{r^{\frac{1}{2}}} \tag{2.25}$$

Haciendo $\alpha = \frac{2\sqrt{2\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}}{r^{\frac{1}{2}}} > 0$, se tiene que

$$\frac{|f(x_1,x_2)-f(y_1,y_2)|}{\|(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\|^{\frac{1}{2}}} \leq \alpha \tag{2.26}$$

Por lo tanto $f \in C^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

2.3.2 Espacios de Hölder Parabólico

En $\mathbb{R}^{n+1}$ se define la distancia Parabólica entre los puntos $z_1 = (t_1; x_1)$; $z_2 = (t_2; x_2)$ como:

$$\rho\,(z_1,z_2) = |x_1-x_2| + |t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}$$

Observación 2.3. Sea u una función definida sobre un dominio $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, entonces denotaremos

$$[u]_{\frac{\delta}{2},\delta,Q} = \sup_{\substack{z_1\neq z_2\\ z\in Q}} \frac{|u\,(z_1)-u\,(z_2)|}{\rho^{\delta}\,(z_1,z_2)},\, [u]_{\frac{\delta}{2},\delta,Q} = [u]_{0,Q} + [u]_{\frac{\delta}{2},\delta,Q}$$

Así $C^{\frac{\delta}{2},\delta}\,(Q)$ denota al espacio de todas las funciones u tal que $[u]_{\frac{\delta}{2},\delta,Q} < \infty$. Mientras que, el conjunto $C^{1+\frac{\delta}{2},2+\delta}\,(Q)$, llamado espacio de Hölder Parabólico, denota al conjunto de todas las funciones reales $u\,(z)$ definidas sobre Q, las cuales satisfacen las siguientes desigualdades:

$$[u]_{1+\frac{\delta}{2},2+\delta,Q} := [u_t]_{\frac{\delta}{2},\delta,Q} + \sum_{i,j=1}^{n} [u_{x^ix^j}]_{\frac{\delta}{2},\delta,Q} < \infty$$

$$|u|_{1+\frac{\delta}{2},2+\delta,Q} := |u|_{0,Q} + |u_x|_{0,Q} + |u_t|_{0,Q} + \sum_{i,j=1}^{n} |u_{x^i x^j}|_{0,Q} + [u]_{1+\frac{\delta}{2},2+\delta,Q} < \infty$$

De manera análoga a la observación (2.2) se prueba que $C^{\frac{\delta}{2},\delta}(Q)$ y $C^{1+\frac{\delta}{2},2+\delta}(Q)$ son espacios de Banach.

Si el dominio Q no es convexo, entonces cualquier función $u \in C^{1+\frac{\delta}{2},2+\delta}(Q)$ es una función uniformemente continua sobre Q y admite una única extensión continua en $\overline{Q}$. Por lo tanto podemos hablar sin ambiguedad acerca de los valores de la función $u \in C^{1+\frac{\delta}{2},2+\delta}(Q)$ sobre ∂Q. También note que a partir de la desigualdad elemental

$$|u(z_1)v(z_1) - u(z_2)v(z_2)| \leqslant |u(z_1)| \cdot |v(z_1) - v(z_2)| + |v(z_2)| \cdot |u(z_1) - u(z_2)|$$

Obtenemos la siguiente desigualdad:

$$[uv]_{\frac{\delta}{2},\delta,Q} \leqslant |u|_{0,Q} \cdot [v]_{\frac{\delta}{2},\delta,Q} + |v|_{0,Q} \cdot [u]_{\frac{\delta}{2},\delta,Q} \quad \forall u, v \in C^{\frac{\delta}{2},\delta}(Q)$$

Observación 2.4. Supongase que $u_n \in C^{1+\frac{\delta}{2},2+\delta}(Q)$ es una sucesión tal que $|u_n|_{1+\frac{\delta}{2},2+\delta,Q}$ es acotada, entonces existe una subsucesión $\{v_n\}$ de $\{u_n\}$ y una función $u \in C^{1+\frac{\delta}{2},2+\delta}(Q)$ tal que $v_n, v_{nx}, v_{nt}, v_{nxx}$ converge a u, u_x, u_t, u_{xx} en $C(\Gamma)$ siempre que $\Gamma \subset Q$ sea compacto y $|u_n|_{1+\frac{\delta}{2},2+\delta,Q} \leqslant \liminf |v_n|_{1+\frac{\delta}{2},2+\delta,Q}$

Capítulo 3

Solución del problema Inverso de Identificación de Parámetros de un modelo Epidémico SIR reacción - difusión mediante control óptimo

En este capitulo es un principio daremos a conocer:

- **Problema Directo**

  El problema directo para el sistema (1.1)-(1.3), consiste en determinar una terna (S, I, R) que satisfaga dicho sistema.

- **Solución del Problema Directo**

  La terna (S, I, R) se dice que es solución del sistema (1.1)-(1.3), si satisface dicho sistema.

- **Problema Inverso**

  En nuestro caso, el problema inverso consiste en lo siguiente: Determinar los parámetros β, μ, v tal que en el tiempo final $t = T$ la solución del sistema (1.1)-(1.3) es cercana a los datos en el tiempo $t = T$:

$$(S, I, R)(x, T) = (S^{obs}, I^{obs}, R^{obs}) \tag{3.1}$$

- **Modelo** SI

  Este modelo consiste de dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} =& \frac{\lambda I S\left(t\right)}{N}\\ \frac{dI}{dt} =& \frac{\lambda I\left(t\right)S\left(t\right)}{N}\end{aligned}$$

  En donde S e I representa a los individuos de la población total N susceptibles de ser infectados e individuos infectados, respectivamente, aquí: $N = I + S$ y λ es la tasa de contacto entre los individuos susceptibles y los individuos infectados.

- **Modelo** SIS

  Este modelo se formula también como un sistema de dos ecuaciones diferenciales, el cual se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} =& -\frac{\lambda I\left(t\right)S\left(t\right)}{N} + \mu I\left(t\right)\\ \frac{dI}{dt} =& \frac{\lambda I\left(t\right)S\left(t\right)}{N} - \mu I\left(t\right)\end{aligned}$$

  aquí μ representa la tasa de recuperación de los infectados.

- **Modelo** SIR

  Este modelo en su forma más simple puede formularse como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} =& -\frac{\lambda I\left(t\right)S\left(t\right)}{N}\\ \frac{dI}{dt} =& \frac{\lambda I\left(t\right)S\left(t\right)}{N} - \mu I\left(t\right)\\ \frac{dR}{dt} =& \mu I\left(t\right)\end{aligned}$$

  En donde R representa a los individuos recuperados de la infección. En lo que sigue estudiaremos el problema (1.1)-(1.3) desde el punto de vista de los problemas inversos es decir estudiaremos el problema inverso de la identificación de los coeficientes para el modelo de reacción - difusión tipo SIR (1.1)-(1.3) el cual modela la trasmisión de una enfermedad de tipo SIR, aplicando los técnicas de la teoría de control óptimo con el fin de deducir una condición necesaria de optimalidad, estabilidad y unicidad local de la solución del sistema (1.1)-(1.3)

SECCIÓN 3.1

Existencia del Minimizador para el Modelo Epidémico SIR Reacción - Difusión

3.1.1 Presentación del Problema de Control para el Modelo Epidémico SIR Reacción - Difusión

Históricamente la teoría de los problemas inversos, se inicia en la década de los sesenta con los trabajos de Tijonov, en los cuales introdujo los métodos de regularización para problemas mal puestos, abriendo así una línea de investigación que hoy tiene gran aceptación en la comunidad académica. Los problemas inversos aparecen en muchos campos, tales como, electromagnetismo, acústica, elasticidad, mecánica cuántica, electrodinámica, dinámica poblacional, imágenes médicas ópticas, etc. Y desde su aparición han jugado un rol muy importante en el desarrollo de la tecnología, por ejemplo en el diseño de estrategias para el control de enfermedades infecciosas, análisis de imágenes médicas, diseño de prótesis, etc. Por otra parte, la teoría de control es ampliamente usada en el control de la propagación de enfermedades, tales como en los modelos matemáticos tipo SIS, SIR, con tratamiento y vacunación. La movilidad de la población mundial origina que el contagio de una enfermedad entre poblaciones que se encuentran geográficamente muy distantes sea ahora muy factible, de allí la necesidad de incorporar la variable espacial en los modelos tipo SIS, SIR, etc. Es decir que los modelos a estudiar ya no son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sino sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, los cuales sí incorporan la variable espacial ausente en los modelos vía sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una dificultad en la solución de problemas inversos lo constituye el hecho, que en la mayoría de los casos son problemas "mal puestos", por ello, es que en los últimos años se ha implementado una técnica alaternativa, la cual consiste en transformar el problema inverso en un problema de optimización, y luego resolver este problema usando métodos de la teoría del control. Esta técnica es la que proponemos en este trabajo. Específicamente en este trabajo, nosotros estamos interesados en la solución del problema inverso de identificación de los coeficientes de un modelo epidémico SIR reacción-difusión para la transmisión de una enfermedad, mediante control óptimo , dado por el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (1.1)-(1.3), derivado del artículo [6] (ver también [5])

Por otro lado, notemos que si sumamos las tres ecuaciones del sistema (1.1) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(S+I+R) - \alpha\Delta(S+I+R) = 0 \tag{3.2}$$

Integrando sobre Ω obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}(S+I+R)dx = \alpha\int_{\Omega}\Delta(S+I+R)dx$$

Usando la primera identidad de Green, se deduce que

$$\int_{\Omega}\chi_{\Omega}\Delta(S+I+R)dx = \int_{\partial\Omega}\chi_{\Omega}\frac{\partial}{\partial\eta}(S+I+R)dS - \int_{\Omega}\nabla(S+I+R)\nabla\chi_{\Omega}dx$$

Puesto que $\nabla\chi_{\Omega} = 0$, y que por (1.2) $\frac{\partial}{\partial\eta}((S+I+R)) = 0$, entonces

$$\int_{\Omega}\Delta(S+I+R)dx = \int_{\Omega}\chi_{\Omega}\Delta(S+I+R)dx = 0$$

de donde se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}(S+I+R)dx = 0$$

Lo cual implica que el tamaño total de la población es constante

$$\int_{\Omega}(S+I+R)dx = N, \forall t \geq 0 \tag{3.3}$$

A lo largo de este trabajo, la población total, N, es una constante positiva fija, y puesto que también suponemos que $\alpha = 1$, entonces el sistema (1.1), podemos reducirlo al siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcll} \partial_t S - \Delta S &=& \mu(x)N - \mu(x)S - \beta(x)SI &, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t I - \Delta I &=& -(\mu(x)+\nu(x))I + \beta(x)SI &, \quad x \in \Omega, t > 0 \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

junto con las condiciones de borde homogéneas de Neumann

$$\frac{\partial S}{\partial\eta} = \frac{\partial I}{\partial\eta} = 0, x \in \Omega, t > 0 \tag{3.5}$$

y con las siguientes condiciones iniciales

$$S(x,0) = S_0 \geq 0, I(x,0) = I_0 \geq 0, x \in \overline{\Omega} \tag{3.6}$$

Notemos que se puede determinar $R(x,t)$ de la ecuación $R(x,t) = N - S(x,t) - I(x,t)$ o de la tercera ecuación del sistema (1.1).
De lo anterior, si hacemos $Z = S + I$, sumando las ecuaciones de 3.4 y considerando condiciones de borde homogéneas de Neumann 3.5, se obtiene el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcccc} \partial_t Z - \Delta Z & = & 0 & , & (x,t) \in Q, \\ Z(x,0) & = & S_0 + I_0 & , & x \in \Omega \\ \frac{\partial Z(x,t)}{\partial \eta} & = & 0 & , & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

Cuya única solución queda garantizada usando la llamada teoría de Schauder para ecuaciones parábolicas, la cual consiste en aplicar el principio del máximo al sistema 3.7, junto con resultados clásicos de DiBenedetto, para así determinar que esta solución $Z \in (C^{2+\theta,1+\frac{\theta}{2}}(\overline{\Omega \times (0,T]})$. De lo anterior, para el sistema (1.1)-(1.3), se deduce el siguiente resultado

Teorema 3.1. Sea $0 < \theta < 1$. Entonces para cualquier coeficiente $\beta(x), \mu(x), \nu(x) \in C^{\theta}(\overline{\Omega})$ y para las condiciones iniciales $S_0(x), I_0(x), R_0(x) \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$ y $S_0(x) + I_0(x) + R_0(x) \geq L_0 > 0$, el sistema (1.1)-(1.3), con $\alpha = 1$, admite una única solución, denotada por $(S(x,t), I(x,t), R(x,t)$. Además para cualquier $T \in (0, +\infty)$, $(S(x,t), I(x,t), R(x,t)) \in (C^{2+\theta,1+\frac{\theta}{2}}(\overline{\Omega \times (0,T]})^3$ y $(S(x,t), I(x,t), R(x,t))$ son acotadas en $\overline{\Omega} \times [0,T]$.

Demostración. (Ver [7]) □

Para el caso del problema inverso, asumimos que tenemos mediciones de las variables S, I, R en el tiempo final T (ver 3.1) Así el problema inverso se formula como sigue: "Hallar los coeficientes $\beta(x), \mu(x), \nu(x)$ tal que en el tiempo $t = T$ la solución del sistema (1.1)-(1.3) está muy cerca de los datos observados 3.1". Para conseguir este objetivo, se estudia el funcional cuadrático

$$J : [L^2(\Omega)]^3 \times [H^2(\Omega)]^3 \to \mathbb{R}$$

llamado funcional de costo, definido por

$$J\left(y, \sum\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left\| y_i\left(x, T; \sum\right) - y_i^{obs}\left(x, T; \sum\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{3}\left\|\nabla \sum{}_i\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{3.8}$$

donde $y = (S, I, R)\,, \sum = \{\beta\,(x)\,, \mu\,(x)\,, v\,(x)\}$. Por lo cual el problema inverso se formaliza como el siguiente problema optimización
Hallar $(\overline{y}, \overline{\Sigma}) = (\overline{S}, \overline{I}, \overline{R}, \overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu})$ tal que

$$J(\overline{y}, \overline{\mathbf{\Sigma}}) = \inf_{(\mathbf{y}, \mathbf{\Sigma}) \in U_{ad}} J(\mathbf{y}, \mathbf{\Sigma})$$

sujeto a

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x, t, \mathbf{\Sigma}) \tag{3.9}$$

solución de (1.1)-(1.3)
donde $\mathbf{y} = (S, I, R), \mathbf{\Sigma} = \{\beta(x), \mu(x), \nu(x)\}, \theta \in (0, 1)$ y U_{ad} es el conjunto admisible definido como sigue
$U_{ad} = \{(S, I, R, \beta, \mu, \nu) : (\beta, \mu, \nu) \in \mathcal{A}, J(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu) < \infty\}$ con

$$\mathcal{A} = \{\Sigma = \{\beta(x), \mu(x), \nu(x)\} : 0 < \Sigma_i < 1, \forall x \in \Omega, \nabla\Sigma_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, 3}\}$$

3.1.2 Existencia del Minimizador

En esta y la subsección siguiente, se siguen las ideas de [4]-[7]

Teorema 3.2. Asuma que (y_1, y_2, y_3) es la solución del sistema (3.4)-(3.6). Entonces existe un minimizador $\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu}\right)$ tal que:
$J\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu}\right) = \underset{(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu) \in U_{ad}}{Inf} J\left(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu\right)$

Demostración. La prueba se hace en dos etapas.
En la primera etapa se prueba que $U_{ad} \neq \emptyset$
En la segunda etapa se prueba la existencia del minimizador $\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu}\right)$.
$\boxed{\text{1era Etapa}}$ Dq $U_{ad} \neq \emptyset$

Supóngase que $\beta(x), \mu(x), \nu(x) \in H^2(\Omega)$, luego para $0 < \theta < \frac{1}{2}$, de acuerdo con el teorema de Krylov 2.11, considerando $k = 2, n = 3, p = 2$, se deduce la siguiente inclusión: $\forall\theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right] : H^2\,(\Omega) \hookrightarrow C^\theta\,(\Omega)$, de donde se sigue que $\beta(x), \mu(x), \nu(x) \in C^\theta\,(\Omega)$. Además asuma que S_0, I_0, R_0 satisfacen las condiciones que se les exije en el Teorema 3.1. Por lo tanto existe una única terna (S, I, R) que es solución del problema directo (3.4)-(3.6).

Supóngase, que $\beta(x), \mu(x), \nu(x) > 1, \forall x \in \Omega$, en tal caso definamos

i) $\beta_1(x) = \frac{1}{\beta(x)}$

ii) $\mu_1(x) = \frac{1}{\mu(x)}$

iii) $\nu_1(x) = \frac{1}{\nu(x)}$

Es claro que

$$0 < \beta_1(x), \mu_1(x), \nu_1(x) < 1, \quad \forall x \in \Omega \tag{3.10}$$

y además que $\beta_1(x), \mu_1(x), \nu_1(x) \in H^2(\Omega)$, de donde se sigue que

$$\nabla\beta_1, \nabla\mu_1, \nabla\nu_1 \in L^2(\Omega) \tag{3.11}$$

De (3.10) y (3.11), obtenemos que

$$\beta_1, \mu_1, \nu_1 \in \mathcal{A} \tag{3.12}$$

Además del hecho que $\beta_1(x), \mu_1(x), \nu_1(x) \in H^2(\Omega)$, se deduce que $\beta_1(x), \mu_1(x), \nu_1(x) \in C^\theta(\Omega)$, entonces $(S, I, R, \beta_1, \mu_1, \nu_1)$ satisfacen el problema directo (3.4)-(3.6).
De donde se sigue que

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left\|y_i\left(x, T, \sum\right) - y_i^{obs}\left(x, T, \sum\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty \tag{3.13}$$

y

$$\frac{C}{2}\sum_{i=1}^{3}\left\|\nabla\sum\nolimits_i\right\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty \tag{3.14}$$

Entonces de (3.13) y (3.14) obtenemos que

$$J\left(S, I, R, \beta_1, \mu_1, \nu_1\right) < \infty \tag{3.15}$$

Luego de (3.12) y (3.15), deducimos que $(S, I, R, \beta_1, \mu_1, \nu_1) \in U_{ad}$
por lo tanto $U_{ad} \neq \Phi$

$\boxed{\text{2da Etapa}}$ Consideramos una sucesión $(y_1^n, y_2^n, y_3^n, \beta_n, \mu_n, \nu_n) \subset U_{ad} \neq \Phi$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} J\left(y_1^n, y_2^n, y_3^n, \beta_n, \mu_n, \nu_n\right) = \underset{(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu) \in U_{ad}}{Inf} J\left(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu\right).$

Puesto que la sucesión $(y_1^n, y_2^n, y_3^n, \beta_n, \mu_n, \nu_n) \subset U_{ad}$, entonces por definición de J, se sigue que

$$J\left(y_1^n, y_2^n, y_3^n, \beta_n, \mu_n, \nu_n\right) < \infty$$

, luego $\exists K_0 > 0$ tq

$$J\left(y_1^n, y_2^n, y_3^n, \beta_n, \mu_n, \nu_n\right) \leqslant K_0 \tag{3.16}$$

De acuerdo con el teorema de Krylov 2.11, considerando $k = 2, n = 3, p = 2$, se obtiene que: $\forall \theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right] : H^2(\Omega) \hookrightarrow C^\theta(\Omega)$ De donde podemos elegir subsucesión $(\beta_{nk}), (\mu_{nk}), (\nu_{nk})$ de $(\beta_n), (\mu_n), (\nu_n)$ respectivamente, tal que

$$\sum_{i,j=1}^{3} \|D_{ij}\beta_{nk}\|^2_{L^2(\Omega)}; \sum_{i,j=1}^{3} \|D_{ij}\mu_{nk}\|^2_{L^2(\Omega)}; \sum_{i,j=1}^{3} \|D_{ij}\nu_{nk}\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty \tag{3.17}$$

Sin perdida de generalidad, denotamos a estas subsucesiones como $(\beta_n), (\mu_n), (\nu_n)$ usando (3.16) y (3.17), se deduce

$$\|\beta_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \|\mu_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \|\nu_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(\Omega)} < \infty$$

De donde se sigue que $\beta_n \to \overline{\beta}; \mu_n \to \overline{\mu}; \nu_n \to \overline{\nu}$ en $C^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, por lo cual tenemos que $\overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu} \in \mathcal{A}$ (ya que la convergencia es uniforme).
Por otra parte como para cualquier $0 \leqslant s < r$ tenemos que $C^r(\Omega) \hookrightarrow C^s(\Omega)$ de forma compacta, se sigue que

$$(\beta_n, \mu_n, \nu_n) \to \left(\bar{\beta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}\right) \in C^{\frac{1}{2}}(\Omega) \cap \mathcal{A}$$

, Uniformemente en $C^\theta(\Omega), \theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.
En forma análoga, deducimos que existen subsucesiones de $(y_1^n), (y_2^n)$ e (y_3^n) , que denotaremos de igual manera tal que

$$\|y_1^n\|_{C^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(Q)} + \|y_2^n\|_{C^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(Q)} + \|y_3^n\|_{C^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(Q)} < \infty$$

De donde se sigue que:

$$\|y_1^n\|_{C^{2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{4}}(Q_0)} + \|y_2^n\|_{C^{2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{4}}(Q_0)} + \|y_3^n\|_{C^{2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{4}}(Q_0)} < \infty \ \ \forall Q_0 \subset\subset Q$$

Ahora usando la inclusion Compacta $C^r \hookrightarrow C^s,\ 0 \leqslant s < r$, deducimos que

$$\sum_{i=1}^{3} \|y_i^n\|_{C^{2+\frac{\theta}{2},1+\frac{\theta}{2}}(Q_0)} < \infty,\ \forall Q_0 \subset\subset Q$$

Entonces de la observación (2.4), se obtiene que

$$(y_1^n, y_2^n, y_3^n) \to (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3})\, \text{en} \Big[C^{2+\frac{\theta}{2},1+\frac{\theta}{2}}\left(\overline{Q}\right)\Big]^3$$

Así, tenemos que

$$\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu}\right) \text{ es tal que } \left(\overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu}\right) \in \mathcal{A} \text{ y } J\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu}\right) < \infty \tag{3.18}$$

Solo nos resta probar que $(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3})$ es solución de (1.1) - (1.3), con $\alpha = 1$

P.D. $(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3})$ es solución de (1.1) - (1.3), con $\alpha = 1$

En efecto, de la 1era ecuación de (1.1), tenemos

$$\frac{\partial y_1^n}{\partial t} - \Delta y_1^n = \mu_n(x) N - \mu_n(x) y_1^n - \beta_n(x) y_1^n y_2^n$$

Multiplicando la igualdad anterior por una función test adecuada V_1 e integrando sobre Ω

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial y_1^n}{\partial t} V_1 dx - \int\limits_{\Omega} \Delta y_1^n V_1 dx = \int\limits_{\Omega} [\mu_n(x) N - \mu_n(x) y_1^n - \beta_n(x) y_1^n y_2^n] V_1 dx$$

Integrando por partes obtenemos

$$-\int\limits_{\Omega} y_1^n \frac{\partial V_1}{\partial t} dx + \int\limits_{\Omega} \Delta V_1 y_1^n dx = \int\limits_{\Omega} [\mu_n(x) N - \mu_n(x) y_1^n - \beta_n(x) y_1^n y_2^n] V_1 dx \tag{3.19}$$

Por otra parte notamos que:

$$y_1^n y_2^n - \overline{y_1 y_2} = (y_1^n - \overline{y_1})\, y_2^n + \overline{y_1}\,(y_2^n - \overline{y_2})$$

Y como $y_1^n \to \overline{y_1}; y_2^n \to \overline{y_2}$, se sigue $y_1^n y_2^n \to \overline{y}_1 \overline{y}_2$

Usando el hecho que convergencia fuerte implica convergencia débil, obtenemos:

$$-\int\limits_{\Omega} \overline{y_1} \frac{\partial V_1}{\partial t} dx - \int\limits_{\Omega} \Delta V_1 \overline{y_1} dx = \int\limits_{\Omega} \left[\overline{\mu}(x) N - \overline{\mu}(x) \overline{y_1} - \overline{\beta}(x) \overline{y_1}\ \overline{y_2}\right] V_1 dx$$

Usando nuevamente integración por partes obtenemos

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \overline{y_1}}{\partial t} V_1 dx - \int\limits_{\Omega} \Delta \overline{y_1} V_1 dx = \int\limits_{\Omega} \left[\overline{\mu}(x) N - \overline{\mu}(x) \overline{y_1} - \overline{\beta}(x) \overline{y_1}\ \overline{y_2}\right] V_1 dx$$

De donde obtenemos

$$\int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial \overline{y_1}}{\partial t} - \Delta \overline{y_1} - \overline{\mu}(x) N + \overline{\mu}(x) \overline{y_1} + \overline{\beta}(x) \overline{y_1}\ \overline{y_2}\right] V_1 dx = 0$$

Así, deducimos que

$$\frac{\partial \overline{y_1}}{\partial t} - \Delta \overline{y_1} - \overline{\mu}(x) N + \overline{\mu}(x) \overline{y_1} + \overline{\beta}(x) \overline{y_1}\ \overline{y_2} = 0 \quad \text{C.t.p. en } \Omega$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \overline{y_1}}{\partial t} - \Delta \overline{y_1} = \overline{\mu}(x) N - \overline{\mu}(x) \overline{y_1} - \overline{\beta}(x) \overline{y_1}\ \overline{y_2} \quad \text{C.t.p. en } \Omega$$

Procediendo en forma análoga con la segunda ecuación de (1.1), obtenemos

$$-\int_{\Omega} \overline{y_2} V_1 dx + \int_{\Omega} \Delta V_1 \overline{y_2} dx = \int_{\Omega} \left\{ -\left[\overline{\mu}(x) + \overline{\nu}(x)\right] \overline{y_2} + \overline{\beta}(x) \overline{y_1}\ \overline{y_2} \right\} V_1 dx$$

De donde integrando por parte se obtiene

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \overline{y_2}}{\partial t} - \Delta \overline{y_2} \right] V_1 dx = \int_{\Omega} \left\{ -\left[\overline{\mu}(x) + \overline{\nu}(x)\right] \overline{y_2} + \overline{\beta}(x) \overline{y_1}\ \overline{y_2} \right\} V_1 dx$$

Por lo tanto deducimos que se cumple:

$$\frac{\partial \overline{y_2}}{\partial t} - \Delta \overline{y_2} = \left[-\overline{\mu}(x) + \overline{\nu}(x)\right] \overline{y_2} + \overline{\beta}(x) \overline{y_1}\ \overline{y_2} \quad \text{C.t.p. en } \Omega$$

Así, si multiplicamos por V_1 la 3ra ecuación de (1.1) y procedemos como en los casos previos, podemos probar que se cumple:

$$\frac{\partial \overline{y_3}}{\partial t} - \Delta \overline{y_3} = \overline{\nu}(x) \overline{y_2} - \overline{\mu}(x) \overline{y_3} \quad \text{C.t.p. en } \Omega$$

Por lo tanto $(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3})$ es solución de (1.1) - (1.3)
Así se prueba que $\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu}\right) \in U_{ad}$, por lo que se cumple:

$$\underset{(y_1,y_2,y_3,\beta,\mu,\nu)\in U_{ad}}{Inf} J(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu) \leqslant J\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \bar{\beta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}\right) \tag{3.20}$$

Por otra parte, de la semicontinuidad débil de la norma L^2, se deduce que

$$J\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \bar{\beta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} J\left(y_1^n, y_2^n, y_3^n, \beta_n, \mu_n, \nu_n\right) = \underset{(y_1,y_2,y_3,\beta,\mu,\nu)\in U_{ad}}{Inf} J(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu)$$

$$\Rightarrow J\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \bar{\beta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}\right) \leqslant \underset{(y_1,y_2,y_3,\beta,\mu,\nu)\in U_{ad}}{Inf} J(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu) \tag{3.21}$$

De 3.20 y 3.21, se deduce que

$$\underset{(y_1,y_2,y_3,\beta,\mu,\nu)}{Inf} J(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu) = J\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \bar{\beta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}\right)$$

Por lo tanto $\left(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \bar{\beta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}\right)$ es la solución optima buscada. □

Sistema adjunto para el problema inverso

Denotemos por $F(\boldsymbol{y}) = y_1 y_2, F_{y_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, j = 1, 2, 3.$ y también

$$\begin{array}{rcl} F_1(x,t) &=& -\mu(x)N + \mu(x)y_1 + \beta(x)y_1y_2 \quad , \quad (x,t) \in Q, \\ F_2(x,t) &=& [\mu(x) + \nu(x)]y_2 - \beta(x)y_1y_2 \quad , \quad (x,t) \in Q, \\ F_3(x,t) &=& -\nu(x)y_2 + \mu(x)y_3 \quad , \quad (x,t) \in Q, \end{array} \tag{3.22}$$

siendo $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ la solución del sistema (1.1)-(1.3) y $Q = \Omega \times (0, T]$. Entonces el sistema adjunto para el problema inverso, viene dado por

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t p_1 &=& -\Delta p_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}p_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}p_2 + \frac{\partial F_3}{\partial y_1}p_3, (x,t) \in Q \\ \partial_t p_2 &=& -\Delta p_2 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}p_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}p_2 + \frac{\partial F_3}{\partial y_2}p_3, (x,t) \in Q \\ \partial_t p_3 &=& -\Delta p_3 + \frac{\partial F_1}{\partial y_3}p_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_3}p_2 + \frac{\partial F_3}{\partial y_3}p_3, (x,t) \in Q \end{array}\right\} \tag{3.23}$$

Ahora calculando las respectivas derivadas parciales de (3.22) y sustituyendola en (3.23) obtenemos que el sistema adjunto viene dado por

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t p_1 &=& -\Delta p_1 + [\overline{\mu}(x) + \overline{\beta}(x)\overline{y}_2]p_1 - \overline{\beta}(x)\overline{y}_2 p_2, (x,t) \in Q \\ \partial_t p_2 &=& -\Delta p_2 + \overline{\beta}(x)\overline{y}_1 p_1 + [\overline{\mu}(x) + \overline{\nu}(x) - \overline{\beta}(x)\overline{y}_1]p_2 - \overline{\nu}(x)p_3, (x,t) \in Q \\ \partial_t p_3 &=& -\Delta p_3 + \overline{\mu}(x)p_3, (x,t) \in Q \end{array}\right\} \tag{3.24}$$

junto con las condiciones

$$\left.\begin{array}{c} p_1(x,T) = \overline{y}_1(x,T,\overline{\boldsymbol{\Sigma}}) - \overline{y}_1^{obs}(x,T,\overline{\boldsymbol{\Sigma}}), x \in \Omega \\ p_2(x,T) = \overline{y}_2(x,T,\overline{\boldsymbol{\Sigma}}) - \overline{y}_2^{obs}(x,T,\overline{\boldsymbol{\Sigma}}), x \in \Omega \\ p_3(x,T) = \overline{y}_3(x,T,\overline{\boldsymbol{\Sigma}}) - \overline{y}_3^{obs}(x,T,\overline{\boldsymbol{\Sigma}}), x \in \Omega \\ \nabla p_1(x,t).\eta = 0, (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ \nabla p_2(x,t).\eta = 0, (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ \nabla p_3(x,t).\eta = 0, (x,t) \in \Omega \times [0,T] \end{array}\right\} \tag{3.25}$$

donde $\overline{\boldsymbol{y}} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3})$ es la solución del sistema (1.1)-(1.3) con $\boldsymbol{\Sigma}$ remplazado por $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$. Si usamos el cambio de variable $s = T - t$ y para $(x, s) \in Q$, el cambio de funciones $w_i(x, s) = p_i(x, T - s), i = \overline{1, 3}$ e $y_j^*(x, s) = \overline{y}_j(x, T - s), j = \overline{1, 3}$, se tiene que

$$\partial_t w_i = -\partial_t p_i, \Delta w_i = \Delta w_i$$

por lo cual el sistema (3.24)-(3.25) se puede reescribir como sigue

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_s w_1 &=& \Delta w_1 - [\overline{\mu}(x) + \overline{\beta}(x)y_2^*]w_1 + \overline{\beta}(x)y_2^* w_2, (x,s) \in Q \\ \partial_s w_2 &=& \Delta w_2 - \overline{\beta}(x)y_1^* w_1 - [\overline{\mu}(x) + \overline{\nu}(x) - \overline{\beta}(x)y_1^*]w_2 + \overline{\nu}(x)w_3, (x,s) \in Q \\ \partial_s w_3 &=& \Delta w_3 + \overline{\mu}(x)w_3, (x,s) \in Q \end{array}\right\} \tag{3.26}$$

con

$$
\left.\begin{aligned}
w_1(x,0) = \overline{y}_1(x,T,\overline{\mathbf{\Sigma}}) - \overline{y}_1^{obs}(x,T,\overline{\mathbf{\Sigma}}), x \in \Omega \\
w_2(x,0) = \overline{y}_2(x,T,\overline{\mathbf{\Sigma}}) - \overline{y}_2^{obs}(x,T,\overline{\mathbf{\Sigma}}), x \in \Omega \\
w_3(x,0) = \overline{y}_3(x,T,\overline{\mathbf{\Sigma}}) - \overline{y}_3^{obs}(x,T,\overline{\mathbf{\Sigma}}), x \in \Omega \\
\nabla w_1(x,s).\eta_1 = 0, (x,s) \in \Omega \times [0,T] \\
\nabla w_2(x,s).\eta_1 = 0, (x,s) \in \Omega \times [0,T] \\
\nabla w_3(x,s).\eta_1 = 0, (x,s) \in \Omega \times [0,T]
\end{aligned}\right\} \tag{3.27}
$$

Para obtener condiciones, bajo las cuales se garantice la unicidad y estabilidad de la identificación de parámetros del problema inverso (1.1)-(1.3) y (3.1), se hace necesario caracterizar la existencia de la solución del problema de optimización (3.9). Esta caracterización es la que se estudia en la siguiente subsección.

3.1.3 Condición Necesaria Optima del Minimizador

El siguiente resultado garantiza la acotabilidad de la solución del sistema (3.24)-(3.25).

Teorema 3.3. Sea (p_1, p_2, p_3) solución del sistema (3.24)-(3.25) . Entonces $\|p_i\|_{L^2(\Omega)}, i = 1, 2, 3$ es acotada sobre $[0, T]$

Demostración. Sea $F(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2 \Rightarrow F_{u_1} = u_2 \wedge F u_2 = u_1$, luego podemos reescribir (3.26), como sigue

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial s} - \Delta w_1 + \left[\overline{\mu} + \overline{\beta} F u_1 (y_1^*, y_2^*, y_3^*)\right] w_1 - \overline{\beta} F u_1 (y_1^*, y_2^*, y_3^*) w_2 = 0 \\
&\frac{\partial w_2}{\partial s} - \Delta w_2 + \overline{\beta} F u_2 (y_1^*, y_2^*, y_3^*) w_1 + \left[\overline{\mu} + \overline{\nu} - \overline{\beta} F u_2 (y_1^*, y_2^*, y_3^*)\right] w_2 = 0 \\
&\frac{\partial w_3}{\partial s} - \Delta w_3 - \overline{\mu} w_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

Multiplicando la primera ecuación de (3.28) por w_1 e integrando sobre Ω

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial w_1}{\partial s} w_1 dx - \int_\Omega \Delta w_1 w_1 dx + \int_\Omega \left[\overline{\mu} + \overline{\beta} F u_1 (y_1^*, y_2^*, y_3^*)\right] w_1^2 dx \\
- \int_\Omega \overline{\beta} F u_1 (y_1^*, y_2^*, y_3^*) w_1 w_2 dx = 0
\end{aligned}
$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial s} w_1 dx - \int_{\Omega} w_1 \Delta w_1 dx = \int_{\Omega} \overline{\beta} F u_1 \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right) w_1 w_2 dx$$
$$- \int_{\Omega} \left[\overline{\mu} + \overline{\beta} F u_1 \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)\right] w_1^2 dx$$

Entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial s} w_1 dx - \int_{\Omega} w_1 \Delta w_1 dx \leqslant \int_{\Omega} \left|\overline{\beta}\right| \left|F u_1 \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)\right| |w_1| \, |w_2| \, dx$$
$$- \int_{\Omega} \left|\overline{\mu} + \overline{\beta} F u_1 \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)\right| |w_1|^2 dx$$

Puesto que $\Omega \subset Q = \Omega \times [0, T] \subset \overline{Q}$, sea

$$f_i = \underset{(x,t)\in Q}{Max} \left|y_i^* \left(x, t\right)\right| \qquad i = 1, 2, 3$$

y $\overline{b_0}, \overline{r_0}, \overline{q_0}$ las cotas superiores de $\beta(x), \mu(x), \nu(x)$ sobre Ω respectivamente. Notemos que $f_i < \infty$, ya que y_1^*, y_2^*, y_3^* son soluciones de (1,1) - (1,3), de donde se sigue que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial s} w_1 dx - \int_{\Omega} w_1 \Delta w_1 dx \leqslant \overline{b_0} f_2 \int_{\Omega} |w_1| \, |w_2| \, dx - \left(\overline{r_0} + \overline{b_0} f_2\right) \int_{\Omega} |w_1|^2 dx$$

Usando la desigualdad de Young [ver ecuación (2.2)] en el primer sumando del lado derecho obtenemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial s} w_1 dx - \int_{\Omega} w_1 \Delta w_1 dx \leqslant \overline{b_0} f_2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_2|^2 dx \right\}$$
$$+ \left(\overline{r_0} + \overline{b_0} f_2\right) \int_{\Omega} |w_1|^2 dx$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial s} w_1 dx - \int_{\Omega} w_1 \Delta w_1 dx \leqslant \left(\frac{3}{2} \overline{b_0} f_2 + \overline{r_0}\right) \int_{\Omega} |w_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_2|^2 dx \tag{3.29}$$

por otra parte, usando la segunda identidad de Green se tiene que

$$\int_{\Omega} \left(w_1 \Delta w_1 + |\nabla w_1|^2\right) dx = \int_{\partial\Omega} w_1 \cancelto{0}{\frac{\partial w_1}{\partial n}} dx$$

$$\Rightarrow - \int_{\Omega} w_1 \Delta w_1 dx = \int_{\partial\Omega} |\nabla w_1|^2 dx \tag{3.30}$$

usando (3.30)en (3.29) obtenemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial x} w_1 dx + \int_{\Omega} |w_1|^2 dx \leq \left(\frac{3}{2}\overline{b_0} f_2 + \overline{r_0}\right) \int_{\Omega} |w_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_2|^2 dx$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \int_{\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial x} w_1 dx + \int_{\Omega} |\nabla w_1|^2 dx \leq \left(\frac{3}{2}\overline{b_0} f_2 + \overline{r_0}\right) \int_{\Omega} |w_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_2|^2 dx$$

Luego obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \left(\frac{3}{2}\overline{b_0} f_2 + \overline{r_0}\right) \int_{\Omega} |w_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_2|^2 dx \tag{3.31}$$

En forma análoga multiplicamos la segunda ecuación de (3.28) por w_2 e integramos sobre Ω obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial w_2}{\partial s} w_2 dx - \int_{\Omega} w_2 \Delta w_2 dx + \int_{\Omega} \overline{\beta} F u_2 \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right) w_1 w_2 dx \\ + \int_{\Omega} \left[\overline{\mu} + \overline{\nu} - \overline{\beta}\right] F u_2 \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right) w_2^2 dx = 0\end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial w_2}{\partial s} w_2 dx - \int_{\Omega} w_2 \Delta w_2 dx \leq \int_{\Omega} \left|\overline{\beta}\right| \left|F u_2 \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)\right| |w_1| \, |w_2| \, dx \\ + \int_{\Omega} \left[\overline{\mu} + \overline{\nu} + \overline{\beta}\right] \left|F u_2 \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)\right| |w_2|^2 dx\end{aligned}$$

Usando la segunda identidad de Green en el lado izquierdo y la desigualdad de Young [ver ecuación (2.2)] en el primer sumando del lado derecho obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial w_2}{\partial s} w_2 dx + \int_{\Omega} |\nabla w_2|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left|\overline{\beta}\right|^2 |F\mu_2 \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)|^2 |w_1|^2 dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_2|^2 + \left(\overline{b_0} + \overline{r_0} + \overline{q_0}\right) f_1 \int_{\Omega} |w_2|^2 dx\end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_2}{\partial s} w_2 dx + \int_{\Omega} |\nabla w_2|^2 dx \leq \frac{\overline{b_0}^2 {f_1}^2}{2} \int_{\Omega} |w_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_2|^2 + \left(\overline{b_0} + \overline{r_0} + \overline{q_0}\right) f_1 \int_{\Omega} |w_2|^2 dx$$

De donde se sigue

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\|w_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \left(\frac{\overline{b_0}^2 f_1^2}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|w_1|^2dx + \left(\frac{1+2\left(\overline{b_0}+\overline{r_0}+\overline{q_0}\right)f_1}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|w_2|^2dx \quad (3.32)$$

Ahora multipliquemos por w_3 la tercera ecuación de (3.28) e integramos sobre Ω

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial w_3}{\partial s}w_3dx - \int\limits_{\Omega}w_3\Delta w_3dx - \int\limits_{\Omega}\overline{\mu}w_3^2dx = 0$$

De donde se sigue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\|w_3\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq F_0\int\limits_{\Omega}|w_3|^2dx \quad (3.33)$$

Entonces obtenemos que

i) $\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \left(\frac{3}{2}\overline{b_0}f_2+\overline{r_0}\right)\int\limits_{\Omega}|w_1|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|w_2|^2dx$

ii) $\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \left(\frac{\overline{b_0}^2{f_1}^2}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|w_1|^2dx + \left(\frac{1+2\left(\overline{b_0}+\overline{r_0}+\overline{q_0}\right)f_1}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|w_2|^2dx$

iii) $\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \overline{r_0}\int\limits_{\Omega}|w_3|^2dx$

Sumando (i) - (iii), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\sum_{i=1}^{3}\|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq & \left(\frac{3\overline{b_0}f_2+2\overline{r_0}+\overline{b_0}^2{f_1}^2}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|w_1|^2dx \\ & + \left(\frac{2+2\left(\overline{b_0}+\overline{r_0}+\overline{q_0}\right)f_1}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|w_2|^2dx + \overline{r_0}\int\limits_{\Omega}|w_3|^2dx\end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\sum_{i=1}^{3}\|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq & \left(3\overline{b_0}f_2+2\overline{r_0}+\overline{b_0}^2{f_1}^2\right)\int\limits_{\Omega}|w_1|^2dx \\ & + 2\left(1+\left(\overline{b_0}+\overline{r_0}+\overline{q_0}\right)f_1\right)\int\limits_{\Omega}|w_2|^2dx + 2\overline{r_0}\int\limits_{\Omega}|w_3|^2dx\end{aligned}$$

Sea $L = Max\left\{3\overline{b_0}f_2+2\overline{r_0}+\overline{b_0}^2{f_1}^2; 2+2\left(\overline{b_0}+\overline{r_0}+\overline{q_0}\right)f_1; 2\overline{r_0}\right\}$, entonces

$$\frac{d}{ds}\left[\sum_{i=1}^{3}\|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq L\left[\sum_{i=1}^{3}\|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right]$$

Lo cual implica que

$$\frac{d}{ds}\left[(\exp(-L_s))\left(\sum_{i=1}^{3}\|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\right]\leq 0$$

Integrando sobre $[0,s]$, obtenemos

$$(\exp(-L_s))\left(\sum_{i=1}^{3}\|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)-\left[\sum_{i=1}^{3}\|\widetilde{w}_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\leq 0,\quad \text{con } \widetilde{w}_i=w_i(x,0)=y_i-y_i^{obs}$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned} e^{-L_s}\left[\sum_{i=1}^{3}\|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq & \left\|y_1\left(x,T,\overline{\beta},\overline{\mu},\overline{\nu}\right)-y_1^{obs}(x)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|y_2\left(x,T,\overline{\beta},\overline{\mu},\overline{\nu}\right)-y_2^{obs}(x)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & +\left\|y_3\left(x,T,\overline{\beta},\overline{\mu},\overline{\nu}\right)-y_3^{obs}(x)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{3}\|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\leq e^{L_s}\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|y_i\left(x,T,\overline{\beta},\overline{\mu},\overline{\nu}\right)-y_i^{obs}(x)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \tag{3.34}$$

De donde deducimos que

$$\underset{s\in[0,T]}{Max}\left[\sum_{i=1}^{3}\|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\leq e^{L_T}\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|y_i\left(x,T,\overline{\beta},\overline{\mu},\overline{\nu}\right)-y_i^{obs}(x)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]$$

Lo cual implica que $\|p_i\|_{L^2(\Omega)}=\|w_i\|_{L^2(\Omega)},\ \ i=1,2,3$ es también acotado en $[0,T]$ □

El siguiente resultado proporciona una condición necesaria para la existencia del mínimo del funcional de costo (3.8)

Teorema 3.4. Sea $(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\overline{y}_3,\overline{\beta},\overline{\mu}_1,\overline{\nu})$ solución del problema 3.9 y sea $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,p_3)$ la solución del sistema adjunto (3.24)-(3.25). Entonces para cualquier $\hat{\beta},\hat{\mu},\hat{\nu}\in\mathcal{A}$, se cumple

$$\int_Q\left\{(\hat{\mu}-\overline{\mu})[(N-\overline{y}_1)p_1-\overline{y}_2p_2-\overline{y}_3p_3]+\overline{y}_1\overline{y}_2(\hat{\beta}-\overline{\beta})(p_2-p_1)+\overline{y}_2(\hat{\nu}-\overline{\nu})(p_3-p_2)\right\}dxdt$$

$$+C\int_\Omega\left\{|\nabla\overline{\beta}\nabla(\hat{\beta}-\overline{\beta})|+|\nabla\overline{\mu}\nabla(\hat{\mu}-\overline{\mu})|+|\nabla\overline{\nu}\nabla(\hat{\nu}-\overline{\nu})|\right\}dx\geq 0 \tag{3.35}$$

Demostración. Para cualquier $\hat{\beta},\hat{\mu},\hat{\nu}\in\mathcal{A},\varepsilon\in[0,1]$, definamos

$$\begin{aligned}\beta^\varepsilon &= (1-\varepsilon)\overline{\beta}+\varepsilon\hat{\beta},\in\mathcal{A}\\ \mu^\varepsilon &= (1-\varepsilon)\overline{\mu}+\varepsilon\hat{\mu},\in\mathcal{A}\\ \nu^\varepsilon &= (1-\varepsilon)\overline{\nu}+\varepsilon\hat{\nu},\in\mathcal{A}\end{aligned} \tag{3.36}$$

Asimismo, definamos el funcional J_ε como sigue

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon =& J(\mathbf{y}^\varepsilon, \mu^\varepsilon, \mu^\varepsilon, \nu^\varepsilon) \\
=& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \|\mathbf{y}_i^\varepsilon(x,T;\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon) - (\mathbf{y}_i^\varepsilon)^{obs}(x,T;\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon)\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{C}{2}\sum_{i=1}^{3}\|\nabla\boldsymbol{\Sigma}_i^\varepsilon\|_{L^2(Q)}^2
\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}_1^\varepsilon = \beta^\varepsilon, \boldsymbol{\Sigma}_2^\varepsilon = \mu^\varepsilon, \boldsymbol{\Sigma}_3^\varepsilon = \nu^\varepsilon$, e $\mathbf{y}^\varepsilon = (y_1^\varepsilon, y_2^\varepsilon, y_3^\varepsilon)$ es la solución del sistema (1.1) - (1.3) con β, μ, ν reemplazado por $\beta^\varepsilon, \mu^\varepsilon, \nu^\varepsilon$. Tomando la derivada de Fréchet de J_ε, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{J_\varepsilon}{d\varepsilon}\mid_{\varepsilon=0} =& \sum_{i=1}^{7} \|[\mathbf{y}_i^\varepsilon(x,T;\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon) - (\mathbf{y}_i^\varepsilon)^{obs}(x,T;\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon)]\frac{\partial \mathbf{y}_i^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\mid_{\varepsilon=0}\|_{L^1(Q)} \\
&+ C\sum_{i=1}^{9}\|(\nabla\boldsymbol{\Sigma}_i^\varepsilon)(\frac{\partial\nabla\boldsymbol{\Sigma}_i^\varepsilon}{\partial\varepsilon})\|_{L^1(Q)}
\end{aligned}$$

De 3.36, deducimos que $\nabla\boldsymbol{\Sigma}_i^\varepsilon = (1-\varepsilon)\nabla\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_i + \varepsilon\nabla\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i$ y $\frac{\partial\nabla\boldsymbol{\Sigma}_i^\varepsilon}{\partial\varepsilon} = \nabla(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i - \overline{\boldsymbol{\Sigma}}_i), i = 1,\cdots,3,$ y de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{J_\varepsilon}{d\varepsilon}\mid_{\varepsilon=0} =& \sum_{i=1}^{3} \|[\mathbf{y}_i^\varepsilon(x,T;\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon) - (\mathbf{y}_i^\varepsilon)^{obs}(x,T;\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon)]\frac{\partial \mathbf{y}_i^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\mid_{\varepsilon=0}\|_{L^1(Q)} \\
&+ C\sum_{i=1}^{3}\|(\nabla\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_i)(\nabla(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i - \overline{\boldsymbol{\Sigma}}_i))\|_{L^1(Q)} \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Como $(\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}) = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3, \overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu})$ es solución del control optimal 3.9, deducimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\|(\mathbf{y}_i^\varepsilon(.) - (\mathbf{y}_i^\varepsilon)^{obs}(.))(\frac{\partial\mathbf{y}_i^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\mid_{\varepsilon=0})\|_{L^1(Q)} + C\sum_{i=1}^{3}\|(\nabla\boldsymbol{\Sigma}_i^\varepsilon)(\nabla(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i - \overline{\boldsymbol{\Sigma}}_i))\|_{L^1(Q)} \\
= \frac{J_\varepsilon}{d\varepsilon}\mid_{\varepsilon=0} \geq 0 \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Nuestro siguiente objetivo es calcular

$$\frac{\partial\mathbf{y}_i^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\mid_{\varepsilon=0}$$

Motivo por el cual definimos las variables auxiliares

$$(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon, z_3^\varepsilon) = (\frac{y_1^\varepsilon - \overline{y}_1}{\varepsilon}, \frac{y_2^\varepsilon - \overline{y}_2}{\varepsilon}, \frac{y_3^\varepsilon - \overline{y}_3}{\varepsilon}), z_i = z_i^\varepsilon, \quad \text{para} \quad \varepsilon = 0$$

donde $y_i^\varepsilon, \overline{y}_i, i = \overline{1,3}$ son soluciones del sistema (1.1)-(1.3). Entonces tomando $(\overline{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{\Sigma}) = (\boldsymbol{y}^\varepsilon, \boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon)$ en 3.9, obtenemos

$$\left.\begin{aligned}\partial_t y_1^\varepsilon - \Delta y_1^\varepsilon &= \mu^\varepsilon N - \mu^\varepsilon y_1^\varepsilon - \beta^\varepsilon y_1^\varepsilon y_2^\varepsilon,\\ \partial_t y_2^\varepsilon - \Delta y_2^\varepsilon &= -[\mu^\varepsilon - \nu^\varepsilon] y_2^\varepsilon + \beta^\varepsilon y_1^\varepsilon y_2^\varepsilon,\\ \partial_t y_3^\varepsilon - \Delta y_3^\varepsilon &= -\mu^\varepsilon y_3^\varepsilon,\end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

en $Q = \Omega \times (0, T]$ con

$$\frac{\partial y_1^\varepsilon}{\partial \eta} = \frac{\partial y_2^\varepsilon}{\partial \eta} = \frac{\partial y_3^\varepsilon}{\partial \eta} = 0, y_i^\varepsilon(x,0) = (y_i)_0(x), i = 1,2,3. \tag{3.40}$$

sobre $\partial\Omega_1 \times (0, T]$

Tomando $(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu) = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3, \overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu})$ en 3.9, tenemos que

$$\left.\begin{aligned}\partial_t \overline{y}_1 - \Delta \overline{y}_1 &= \overline{\mu} N - \overline{\mu y}_1 - \overline{\beta}\overline{y}_1\overline{y}_2,\\ \partial_t \overline{y}_2 - \Delta \overline{y}_2 &= -[\overline{\mu} + \overline{\nu}]\overline{y}_2 + \overline{\beta}\overline{y}_1\overline{y}_2,\\ \partial_t \overline{y}_3 - \Delta \overline{y}_3 &= -\overline{\mu y}_3,\end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

$Q = \Omega \times (0, T]$ con

$$\frac{\partial \overline{y}_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \overline{y}_2}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \overline{y}_3}{\partial \eta_1} = 0, \overline{y}_i(x,0) = (\overline{y}_i)_0(x), i = 1,2,3. \tag{3.42}$$

sobre $\partial\Omega_1 \times (0, T]$.

notemos que

$$y_i^\varepsilon y_j^\varepsilon - \overline{y}_i\overline{y}_j = (y_i^\varepsilon - \overline{y}_i)y_j^\varepsilon + \overline{y}_i(y_j^\varepsilon - \overline{y}_j), i,j = \overline{1,3} \tag{3.43}$$

Restando(3.41) de (3.39), y dividiendo ambos lados por ε, y usando (3.36), (3.43), y después de arreglos algebraicos, podemos mostrar que

$$\left.\begin{aligned}\partial_t z_1^\varepsilon - \Delta z_1^\varepsilon &= N(\hat{\mu} - \overline{\mu}) - \overline{\mu} z_1^\varepsilon - y_1^\varepsilon(\hat{\mu} - \overline{\mu}) - \overline{\beta}[z_1^\varepsilon y_2^\varepsilon + \overline{y}_1 z_2^\varepsilon] - y_1^\varepsilon y_2^\varepsilon(\hat{\beta} - \overline{\beta}),\\ \partial_t z_2^\varepsilon - \Delta z_2^\varepsilon &= -\hat{\mu} z_2^\varepsilon - (\hat{\mu} - \overline{\mu})y_2^\varepsilon - \overline{\nu} z_2^\varepsilon - y_2^\varepsilon(\hat{\nu} - \overline{\nu}) + \overline{\beta}[z_1^\varepsilon y_2^\varepsilon + \overline{y}_1 z_2^\varepsilon] + y_1^\varepsilon y_2^\varepsilon(\hat{\beta} - \overline{\beta}),\\ \partial_t z_3^\varepsilon - \Delta z_3^\varepsilon &= -\hat{\mu} z_3^\varepsilon - (\hat{\mu} - \overline{\mu})y_3^\varepsilon + \overline{\nu} z_2^\varepsilon + y_2^\varepsilon(\hat{\nu} - \overline{\nu}),\end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

con

$$\begin{gathered} z_i^\varepsilon(x,0) = 0, x \in \Omega, i = \overline{1,3}\\ \frac{\partial z_1^\varepsilon}{\partial \eta} = \frac{\partial z_2^\varepsilon}{\partial \eta} = \frac{\partial z_3^\varepsilon}{\partial \eta} = 0 \end{gathered} \tag{3.45}$$

sobre $\partial\Omega \times (0, T]$

Haciendo $z_i = z_i^\varepsilon \mid_{\varepsilon=0}, i = \overline{1,3}$. Entonces (3.45) se reescribe como sigue

$$\left.\begin{aligned} \partial_t z_1 - \Delta z_1 &= (\hat{\mu} - \overline{\mu})N - \overline{\mu} z_1 - (\hat{\mu} - \overline{\mu})\overline{y}_1 - \overline{\beta}[z_1\overline{y}_2 + \overline{y}_1 z_2] - \overline{y}_1\overline{y}_2(\hat{\beta} - \overline{\beta}), \\ \partial_t z_2 - \Delta z_2 &= -\overline{\mu} z_2 - (\hat{\mu} - \overline{\mu})\overline{y}_2 - \overline{\nu} z_2 - \overline{y}_2(\hat{\nu} - \overline{\nu}) + \overline{\beta}[z_1\overline{y}_2 + \overline{y}_1 z_2] + \overline{y}_1\overline{y}_2(\hat{\beta} - \overline{\beta}), \\ \partial_t z_3 - \Delta z_3 &= -\overline{\mu} z_3 - (\hat{\mu} - \overline{\mu})\overline{y}_3 + \overline{\nu} z_2 + \overline{y}_2(\hat{\nu} - \overline{\nu}), \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

con

$$\begin{aligned} z_i(x,0) = 0, x \in \Omega, i = \overline{1,3} \\ \frac{\partial z_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial z_2}{\partial \eta_1} = \frac{\partial z_3}{\partial \eta_1} = 0 \end{aligned} \tag{3.47}$$

sobre $\partial\Omega \times (0,T]$ De la definición de z_i^ε, deducimos que

$$\frac{\partial \mathbf{y}_i^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \mid_{\varepsilon=0} = z_i, i = \overline{1,3} \tag{3.48}$$

Luego, sustituyendo (3.48) en (3.37), se obtiene

$$\sum_{i=1}^{3} \|[\mathbf{y}_i(x,T,\mathbf{\Sigma}) - \mathbf{y}_i^{obs}(x,T,\mathbf{\Sigma})]z_i(x,T)\|_{L^1(Q)} + C\sum_{i=1}^{3} \|\nabla\mathbf{\Sigma}_i\nabla(\hat{\mathbf{\Sigma}}_i - \overline{\mathbf{\Sigma}}_i)\|_{L^1(Q)} \geq 0 \tag{3.49}$$

De la ecuación (3.37), se sigue que

$$\sum_{i=1}^{3} \|[\mathbf{y}_i(x,T,\mathbf{\Sigma}) - \mathbf{y}_i^{obs}(x,T,\mathbf{\Sigma})]z_i(x,T)\|_{L^1(Q)} = \sum_{i=1}^{3} \|p_i z_i\|_{L^1(\Omega)} \tag{3.50}$$

Por otra parte, notemos que

$$\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(p_i z_i)(x,t)dxdt = \int_\Omega \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(p_i z_i)(x,t)\right] dxdt = \int_\Omega p_i z_i(x,T)dx, i = 1,2,3, \tag{3.51}$$

y que también se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{i=1}^{3} p_i z_i\right] = \sum_{i=1}^{3}[p_i\partial_t z_i + z_i\partial_t p_i] \tag{3.52}$$

Ahora, usando (3.51) y (3.52) en (3.50), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{3} \|[\mathbf{y}_i(x,T,\mathbf{\Sigma}) - \mathbf{y}_i^{obs}(x,T,\mathbf{\Sigma})]z_i(x,T)\|_{L^1(Q)} = \sum_{i=1}^{3}[p_i\partial_t z_i + z_i\partial_t p_i]$$

De donde, sustituyendo (3.51), (3.24) y (3.1.3) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \|[\mathbf{y}_i(x,T,\mathbf{\Sigma}) - \mathbf{y}_i^{obs}(x,T,\mathbf{\Sigma})]z_i(x,T)\|_{L^1(Q)} = \\
&= \int_Q z_1\left[-\Delta p_1 + \{\overline{\mu}(x) + \overline{\beta}(x)\overline{y}_2\}p_1 - \overline{\beta}(x)\overline{y}_2 p_2\right]dxdt \\
&+ \int_Q p_1\left[\Delta z_1 + (\hat{\mu} - \overline{\mu})N - \overline{\mu}z_1 - (\hat{\mu} - \overline{\mu})\overline{y}_1 - \overline{\beta}[z_1\overline{y}_2 + \overline{y}_1 z_2] - \overline{y}_1\overline{y}_2(\hat{\beta} - \overline{\beta})\right]dxdt \\
&+ \int_Q p_2\left[\Delta z_2 - \overline{\mu}z_2 - (\hat{\mu} - \overline{\mu})\overline{y}_2 - \overline{\nu}z_2 - \overline{y}_2(\hat{\nu} - \overline{\nu}) + \overline{\beta}[z_1\overline{y}_2 + \overline{y}_1 z_2] + \overline{y}_1\overline{y}_2(\hat{\beta} - \overline{\beta})\right]dxdt \\
&+ \int_Q z_2\left[-\Delta p_2 + \overline{\beta}(x)\overline{y}_1 p_1 + [\overline{\mu}(x) + \overline{\nu}(x) - \overline{\beta}(x)\overline{y}_1]p_2 - \overline{\nu}(x)p_3\right]dxdt \\
&+ \int_Q \{p_3\left[\Delta z_3 - \overline{\mu}z_3 - (\hat{\mu} - \overline{\mu})\overline{y}_3 + \overline{\nu}z_2 + \overline{y}_2(\hat{\nu} - \overline{\nu})\right] + z_3[-\Delta p_3 + \overline{\mu}(x)p_3]\}\,dxdt
\end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes,se deduce que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \|[\mathbf{y}_i(x,T,\mathbf{\Sigma}) - \mathbf{y}_i^{obs}(x,T,\mathbf{\Sigma})]z_i(x,T)\|_{L^1(Q)} = \\
&= \int_Q [p_1\Delta z_1 + p_2\Delta z_2 + p_3\Delta z_3 - z_1\Delta p_1 - z_2\Delta p_2 - z_3\Delta p_3]\,dxdt + \\
&+ \int_Q \left[(\hat{\mu} - \overline{\mu})[(N - \overline{y}_1)p_1 - \overline{y}_2 p_2 - \overline{y}_3 p_3] + \overline{y}_1\overline{y}_2(\hat{\beta} - \overline{\beta})(p_2 - p_1) + \overline{y}_2(\hat{\nu} - \overline{\nu})(p_3 - p_2)\right]dxdt
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Usando la fórmula de Green, podemos mostrar que

$$\int_Q \sum_{i=1}^{3} p_i\Delta z_i\,dxdt = \int_Q \sum_{i=1}^{3} z_i\Delta p_i\,dxdt \tag{3.54}$$

Sustituyendo la ecuación (3.54)en (3.53) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{3} \|[\mathbf{y}_i(x,T,\mathbf{\Sigma}) - \mathbf{y}_i^{obs}(x,T,\mathbf{\Sigma})]z_i(x,T)\|_{L^1(Q)} =$$

$$\int_Q \left[(\hat{\mu} - \overline{\mu})[(N - \overline{y}_1)p_1 - \overline{y}_2 p_2 - \overline{y}_3 p_3] + \overline{y}_1\overline{y}_2(\hat{\beta} - \overline{\beta})(p_2 - p_1) + \overline{y}_2(\hat{\nu} - \overline{\nu})(p_3 - p_2)\right]dxdt \tag{3.55}$$

Ahora, completamos la prueba del teorema (3.4) por sustitución de (3.55) en (3.49). □

SECCIÓN 3.2

Unicidad y Estabilidad de la Identificación de los parámetros β, μ, v para el Modelo Epidémico SIR Reacción - Difusión

El Objetivo central de esta Sección es probar la Unicidad local y la estabilidad de la identificación de parámetros del problema inverso (1.1)-(1.3) y (3.1)
En ese sentido, sean $(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, v)$; $\left(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\mu}, \widetilde{v}\right)$ dos minimizadores para el problema de optimización (3.9). Denotando por :

$$Y_i = \widetilde{y_i} - y_i; P_i = \widetilde{p_i} - p_i; i = 1, 2, 3; \mathcal{B} = \widetilde{\beta} - \beta; U = \widetilde{\mu} - \mu; V = \widetilde{v} - v \tag{3.56}$$

Del sistema (1.1)-(1.3), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_1}{\partial t} - \Delta Y_1 =& NU - \mathcal{B}F\left(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}\right) + \beta\left[F\left(y_1, y_2, y_3\right) - F\left(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}\right)\right] - \mu Y_1 - \widetilde{y_1}U \\
\frac{\partial Y_2}{\partial t} - \Delta Y_2 =& -\left(\mu + v\right)Y_2 - \left(\mu + v\right)\widetilde{y_2} - \mathcal{B}F\left(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}\right) \\
&+ \beta\left[F\left(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}\right) - F\left(y_1, y_2, y_3\right)\right] \\
\frac{\partial Y_3}{\partial t} - \Delta Y_3 =& \widetilde{v}Y_2 + y_2 V - \mu Y_3 - U y_3
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Con

$$\begin{gathered}
Y_1\left(x, 0\right) = Y_2\left(x, 0\right) = Y_3\left(x, 0\right); x \in \Omega \\
\frac{\partial Y_1}{\partial \eta} = \frac{\partial Y_2}{\partial \eta} = \frac{\partial Y_3}{\partial \eta} = 0; x \in \Omega; t > 0
\end{gathered} \tag{3.58}$$

Notemos que

I) $F\left(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}\right) = \widetilde{y_1}\widetilde{y_2}$

II) $F\left(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}\right) - F\left(y_1, y_2, y_3\right) = y_2 Y_1 + y_1 Y_2$

III) $\widetilde{b_i} = \underset{(x,t)\in Q}{Max}\, \widetilde{y_i}\left(x, t\right); b_i = \underset{(x,t)\in Q}{Max}\, y_i\left(x, t\right); i = 1, 2, 3$
y denotemos por $B = Max\left\{\widetilde{b_i}; b_i\right\}, i = 1, 2, 3$

IV) Denotemos por $b_0 = \underset{x\in\Omega}{Max}\{\beta(x), \widetilde{\beta}(x)\}, r_0 = \underset{x\in\Omega}{Max}\{\mu(x), \widetilde{\mu}(x)\}, q_0 = \underset{x\in\Omega}{Max}\{\nu(x), \widetilde{\nu}(x)\}$

De (II), se sigue que: $[F(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}) - F(y_1, y_2, y_3)]^2 = y_2^2 Y_1^2 + 2y_1 y_2 Y_1 Y_2 + y_1^2 Y_2^2$, de donde usando la desigualdad de Young [ver (2.2)] obtenemos

$$(iv) \int_\Omega |F(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}) - F(y_1, y_2, y_3)|^2 dx \leqslant \int_\Omega |y_2|^2 |Y_1|^2 dx + \\ + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left[\int_\Omega |y_2|^2|Y_1|^2 dx + \int_\Omega |y_1|^2 |Y_2|^2 dx\right] + \\ + \int_\Omega y_1^2 Y_2^2 dx$$

$$\int_\Omega |F(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}) - F(y_1, y_2, y_3)|^2 dx \leqslant 2\left[\int_\Omega |y_2|^2|Y_1|^2 dx + \int_\Omega |y_1|^2 |Y_2|^2 dx\right]$$

Asimismo, usando (3.56), deducimos que $P_i, = 1, \cdots, 3$ satisface el siguiente sistema

$$\partial_t P_1 + \Delta P_1 = U\hat{p}_1 + \mu P_1 + \mathcal{B}\hat{y}_2 p_1 - \mathcal{B} y_2 p_2 - \hat{\beta} Y_2 p_2 + \beta Y_2 \hat{p}_1 + \beta y_2 P_1,$$

$$\partial_t P_2 + \Delta P_2 = U\hat{p}_2 + \mu P_2 + \mathcal{B}\hat{y}_1 p_1 + V\hat{p}_2 + \nu P_2 - V p_3 - \nu P_3 + \beta Y_1 \hat{p}_1 + \beta y_1 P_1 - \beta y_1 P_2 - y_1 \hat{p}_2 \mathcal{B},$$

$$\partial_t P_3 + \Delta P_3 = U\hat{p}_3 - \mu P_3, \tag{3.59}$$

con

$$\begin{array}{c} P_i(x,T) = Y_i(x,T) - (\widehat{y_i}^{obs}(x) - y_i^{obs}(x)), x \in \Omega, i = 1, \cdots, 3 \\ \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = \frac{\partial P_2}{\partial \eta} = \frac{\partial P_3}{\partial \eta} = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times]0, T[\end{array} \tag{3.60}$$

Tanto la unicidad local como la estabilidad de la identificación de parámetros del problema inverso (1.1)-(1.3) y (3.1), depende de la caracterizacion de la solucion del problema de optimización, es decir de la ecuación (3.72) y como esta puede ser acotada en términos de los $Y_i, P_i, i = 1, 2, 3$, se hace necesario obtener cotas para estos $Y_i, P_i, i = 1, 2, 3$, lo cual se estudia en la siguiente subsección.

3.2.1 Teoremas Preliminares

El siguiente resultado proporciona una cota superior para los $Y_i, i = 1, 2, 3$ en términos de los parámetros β, μ, ν, lo cual ayudará de gran manera para alcanzar el objetivo de esta sección.

Teorema 3.5. Asuma que $(Y_1; Y_2; Y_3)$

es solución de (3.57) - (3.58). Entonces se cumple:

$$\underset{t\in[0,T]}{Max}\left[\sum_{i=1}^{3}\|Y_i\|_{L^2(\Omega)}^2\right] \leqslant [6Tm(\Omega)]\left[\exp(kT)\right]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right]$$

donde:

$k = \{|N|^2 + 8B^2 + 2r_0 + b_0^2; 3B^2 + 2(1+B)(r_0+q_0) + \ q_0{}^2; 2B^2 + r_0{}^2 + 1\}$

y B, b_0, r_0, q_0 son como en (III)

Prueba, Multiplicando la primera ecuación de (3.57) por Y_1 e integrando sobre Ω obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial Y_1}{\partial t}Y_1dx - \int_\Omega Y_1\Delta Y_1 dx = &\int_\Omega NUY_1dx - \int_\Omega \mathcal{B}F(\widetilde{y_1},\widetilde{y_2},\widetilde{y_3})Y_1dx\\ &- \int_\Omega \beta\left[F(\widetilde{y_1},\widetilde{y_2},\widetilde{y_3}) - F(y_1,y_2,y_3)\right]Y_1dx\\ &- \int_\Omega \mu Y_1^2dx - \int_\Omega \widetilde{y_1}UY_1dx\end{aligned}$$

Aplicando la segunda identidad de Green se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|Y_1\|_{L^2(\Omega)}^2\right] + \int_\Omega |\nabla Y_1|^2dx \leqslant &\int_\Omega |N||U||Y_1|dx + \int_\Omega |\mathcal{B}||F(\widetilde{y_1},\widetilde{y_2},\widetilde{y_3})||Y_1|dx\\ &+ \int_\Omega |\beta||F(\widetilde{y_1},\widetilde{y_2},\widetilde{y_3}) - F(y_1,y_2,y_3)||Y_1|dx\\ &+ \int_\Omega |\mu||Y_1|^2dx + \int_\Omega |\widetilde{y_1}||U||Y_1|dx\end{aligned}$$

Usando desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|Y_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] + \int_\Omega |\nabla Y_1|^2 dx \leqslant & \frac{1}{2}\int_\Omega |N|^2|Y_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |U|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathcal{B}|^2 dx \\ & + \frac{1}{2}\int_\Omega |\widetilde{y_1}|^2|\widetilde{y_2}|^2|Y_1|^2 dx + \int_\Omega |\mu|\,|Y_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |U|^2 dx \\ & + \int_\Omega |\widetilde{y_1}|^2|Y_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |F(\widetilde{y_1},\widetilde{y_2},\widetilde{y_3}) - F(y_1,y_2,y_3)|^2 dx \\ & + \frac{1}{2}\int_\Omega |\beta|^2|Y_1|^2 dx\end{aligned}$$

usando (II) - (IV), obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|Y_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leqslant & \frac{|N|^2}{2}\int_\Omega |Y_1|^2 dx + \left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right]\left[\frac{m(\Omega)}{2} + \frac{m(\Omega)}{2} + \frac{m(\Omega)}{2}\right] \\ & + \frac{B^2}{2}\int_\Omega |Y_1|^2 dx + r_0\int_\Omega |Y_1|^2 dx + B^2\int_\Omega |Y_1|^2 dx + \frac{b_0^2}{2}\int_\Omega |Y_1|^2 dx \\ & + \left[B^2\int_\Omega |Y_1|^2 dx + B^2\int_\Omega |Y_2|^2 dx\right]\end{aligned}$$

Simplificando términos obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|Y_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leqslant & \frac{1}{2}\left[|N|^2 + 5B^2 + 2r_0 + b_0^2\right]\int_\Omega |Y_1|^2 dx + \frac{(2B^2)}{2}\int_\Omega |Y_2|^2 dx \\ & + \left[\frac{3m(\Omega)}{2}\right]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right] \qquad (3.61)\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación segunda de (3.57) y procediendo de manera análoga obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|Y_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leqslant & [r_0+q_0]\int_\Omega |Y_2|^2 dx + \int_\Omega (r_0+q_0)\,B\,|Y_2|\,dx \\ & + \frac{m(\Omega)}{2}\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right] + \frac{B^2}{2}\int_\Omega |Y_1|^2 dx \\ & + \frac{m(\Omega)}{2}\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right] + B^2\left[\int_\Omega \left(|Y_1|^2 + |Y_2|^2\right) dx\right]\end{aligned}$$

simplificando términos obtenemos [Usando el hecho que $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|Y_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leqslant & \left[\frac{3B^2}{2}\right]\int_\Omega |Y_1|^2 dx + \left[\frac{2(r_0+q_0)[1+B] + B^2}{2}\right]\int_\Omega |Y_2|^2 dx \\ & + \frac{2m(\Omega)}{2}\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right] \qquad (3.62)\end{aligned}$$

Finalmente multiplicando la tercera ecuación por Y_3 e integrando sobre Ω y procediendo de forma análoga a los casos previos obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|Y_3\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leqslant & \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |V|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |Y_2|^2|Y_3|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\overline{v}|^2|Y_2|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |Y_3|^2dx \\ & + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\mu|\,|Y_3|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |U|^2dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |y_3|^2|Y_3|^2dx\end{aligned}$$

Simplificando términos obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|Y_3\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leqslant & \frac{2m(\Omega)}{2}\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right] \\ & + \left(\frac{q_0^2}{2}\right)\int\limits_\Omega |Y_2|^2dx + \left[\frac{2B^2+r_0^2+1}{2}\right]\int\limits_\Omega |Y_3|^2dx \qquad (3.63)\end{aligned}$$

Sumando (3.61) - (3.63), obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3}\|Y_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leqslant & \frac{1}{2}\left[|N|^2 + 5B^2 + 2r_0 + b_0^2 + 3B^2\right]\int\limits_\Omega |Y_1|^2dx \\ & + \frac{1}{2}\left[2B^2 + 2(r_0+q_0)(1+B) + B^2 + q_0^2\right]\int\limits_\Omega |Y_2|^2dx \\ & + \left[\frac{2B^2+r_0^2+1}{2}\right]\int\limits_\Omega |Y_3|^2dx + \left[\frac{6m(\Omega)}{2}\right]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right]\end{aligned}$$

Sea $k = Max\left\{|N|^2 + 8B^2 + 2r_0 + b_0^2; 3B^2 + 2(1+B)(r_0+q_0) + q_0^2; 2B^2 + r_0^2 + 1\right\}$, entonces

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3}\|Y_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leqslant k\left[\sum_{i=1}^{3}\|Y_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] + 6m(\Omega)\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right]$$

de donde se sigue que:

$$\frac{d}{dt}\left[(\exp(-kt))\left(\sum_{i=1}^{3}\|Y_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\right] \leqslant 6m(\Omega)(\exp(-kt))\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right]$$

Ahora integrando sobre $[0,T]$ obtenemos:

$$\begin{aligned}(\exp(-kt))\left(\sum_{i=1}^{3}\|Y_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right) & - \cancelto{0}{\|Y_1(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)}} - \cancelto{0}{\|Y_2(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)}} - \cancelto{0}{\|Y_3(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)}} \leq \\ & \leq 6m(\Omega)\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right]\int\limits_0^T e^{-ks}ds\end{aligned}$$

Puesto que para $S > 0$, $e^{-ks} \leq 1 \Rightarrow \int_0^T e^{-ks} ds \leq \int_0^T ds = T$; así obtenemos:

$$(\exp(-kt)) \left(\sum_{i=1}^{3} \|Y_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \leq 6Tm(\Omega) \left[\underset{x\in\Omega}{Max} |\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max} |U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max} |V|^2 \right]$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{3} \|Y_i\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (\exp(kt)) \, 6Tm(\Omega) \left[\underset{x\in\Omega}{Max} |\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max} |U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max} |V|^2 \right]$$

Para la solución del sistema (3.56) -(3.57) se tiene el siguiente resultado, mediante el cual se obtiene una acotación para esta solución, en términos de los parámetros β, μ, ν así como también en terminos de los datos observados, lo cual vaticina que la unicidad de la identificacion de parámetros esta intimamente ligada con la estabilidad de los datos observados.

Teorema 3.6. Asuma que (P_1, P_2, P_3) es solución del sistema (3.56) -(3.57). Entonces se cumple

$$\underset{x\in[0,T]}{Max} \left[\sum_{i=1}^{3} \|P_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right] \leq$$
$$\exp(M_1 T) \left[12Tm(\Omega) \exp(k_1 T) + M_1 M_2 \right] \left[\underset{x\in\Omega}{Max} |\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max} |U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max} |V|^2 \right] +$$
$$+ 2\exp(M_1 T) \left[\sum_{i=1}^{n} \left\| \widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right]$$

donde $k_1 = k$, siendo k la constante del teorema (3.5) y
$M_1 = Max\{2 + r_0 + f_0^2 + 2f_0 b_0 + b_0^2 f_0^2, 8 + f_0^2 + 2r_0 + 2q_0, 1 + 2r_0\}$,
$M_2 = Max\{3g_0^2 m(\Omega), b_0^2 g_0^2 [3Tm(\Omega)] [\exp(k_1 T)]\}$
con $b_0 = Max\left\{|\beta(x)|; \left|\widetilde{\beta}(x)\right|\right\}$, $r_0 = Max\{|\mu(x)|; |\widetilde{\mu}(x)|\}$, $q_0 = Max\{|\nu(x)|; |\widetilde{\nu}(x)|\}$,
$x \in \Omega$
$f_0 = Max\{|y_i(x,t)|; |\widetilde{y}_i(x,t)|\}$, $g_0 = Max\{|p_i(x,t)|; |\widetilde{p}_i(x,t)|\}$, $(x,t) \in Q = \Omega \times [0,T]$

Demostración. Multiplicando por P_1 a la primera ecuación de (3.56), luego integrando sobre Ω y haciendo de la segunda identidad de Green obtenemos:

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] + \int_\Omega |\nabla P_1|^2 dx + \int_\Omega |\mathcal{B}| |y_2| |p_2| |P_1| dx + \int_\Omega \left|\widetilde{\beta}\right| |y_2| |p_2| |P_1| dx \leq \int_\Omega |U| |\widetilde{p}_1| |P_1| dx$$
$$+ \int_\Omega |\mu| |P_1|^2 dx + \int_\Omega |\mathcal{B}| |\widetilde{y}_2| |p_1| |P_1| dx + \int_\Omega |\beta| |y_2| |\widetilde{p}_1| |P_1| dx + \int_\Omega |\beta| |y_2| |P_1|^2 dx$$

de donde se sigue que

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \int\limits_{\Omega} |U|\,|\widetilde{p}_1|\,|P_1|\,dx + \int\limits_{\Omega} |\mu|\,|P_1|^2 dx + \int\limits_{\Omega} |\mathcal{B}|\,|\widetilde{y}_2|\,|p_1|\,|P_1|\,dx$$
$$+ \int\limits_{\Omega} |\beta|\,|y_2||P_1|^2 dx + \int\limits_{\Omega} |\beta|\,|y_2|\,|\widetilde{p}_1|\,|P_1|\,dx$$

Usando la desigualdad de Young [ver (2.2)], obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |U|^2|\widetilde{p}_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |P_1|^2 dx + \int\limits_{\Omega} |\mu|\,|P_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\mathcal{B}|^2|p_1|^2 dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\widetilde{y}_2|^2|P_1|^2 dx + \int\limits_{\Omega} |\beta|\,|y_2||P_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\beta|^2\,|y_2|^2\,|\widetilde{p}_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |P_1|^2 dx$$

Puesto que, $\beta, \widetilde{\beta}, \mu, \widetilde{\mu}, \nu, \widetilde{\nu}, y_1, \widetilde{y}_1, i = 1, 2, 3$ son acotados, denotemos sus cotas como sigue

$$\begin{aligned} b_0 &= \underset{x\in\Omega}{Max} \left\{|\beta(x)|\,;\left|\widetilde{\beta}(x)\right|\right\} \\ r_0 &= \underset{x\in\Omega}{Max} \left\{|\mu(x)|\,;|\widetilde{\mu}(x)|\right\} \\ q_0 &= \underset{x\in\Omega}{Max} \left\{|\nu(x)|\,;|\widetilde{\nu}(x)|\right\} \\ f_0 &= \underset{(x,t)\in Q}{Max} \left\{|y_i(x,t)|\,;|\widetilde{y}_i(x,t)|\right\} \end{aligned} \tag{3.64}$$

Note que $|y_2| = |\widetilde{y}_2 - y_2| \leq 2f_0$

Luego usando (3.64) obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \frac{1}{2}\left\{\underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2\right\}\left(\int\limits_{\Omega} |\widetilde{p}_1|^2 dx\right) + \left[1 + r_0 + \frac{{f_0}^2}{2} + b_0 f_0\right]\left[\int\limits_{\Omega} |P_1|^2 dx\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\underset{x\in\Omega}{Max}\,|\mathcal{B}|^2\right\}\left(\int\limits_{\Omega} |p_1|^2 dx\right) + \frac{{b_0}^2}{2}\int\limits_{\Omega} |y_2|^2|\widetilde{p}_1|^2 dx$$

consideremos $g_0 = \underset{(x,t)\in Q}{Max} \left\{|p_i(x,t)|\,;|\widetilde{p}_i(x,t)|\right\}$, entonces se deduce que

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \left(\frac{g_0^2}{2}\right)\left(\underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2\right) m(\Omega) + \left[\frac{2 + r_0 + {f_0}^2 + 2b_0 f_0}{2}\right]\left[\int\limits_{\Omega} |P_1|^2 dx\right]$$
$$+ \left(\frac{g_0^2}{2} m(\Omega)\right)\left(\underset{x\in\Omega}{Max}\,|\mathcal{B}|^2\right) + \frac{(b_0 g_0)^2}{2}\int\limits_{\Omega} |y_2|^2 dx$$

Usando el teorema (3.5), obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \left(\frac{g_0^2 m(\Omega)}{2}\right)\left[\underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|\mathcal{B}|^2\right] + \left[\frac{2 + r_0 + {f_0}^2 + 2b_0 f_0}{2}\right]\left[\int\limits_{\Omega} |P_1|^2 dx\right]$$
$$+ \left[\frac{(b_0 g_0)^2}{2}\right][6Tm(\Omega)]\,[\exp(kT)]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}\,|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|V|^2\right] \tag{3.65}$$

Multiplicando por P_2, la segunda ecuación de(3.56), integrando sobre Ω y usando la segunda identidad de Green, obtenemos.

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right]+\int_\Omega |\nabla P_2|^2 dx+\int_\Omega |V|^2\,|p_3|\,|P_2|\,dx+$$
$$\int_\Omega |\nu|\,|P_3|\,|p_2|\,dx+\int_\Omega |\beta|\,|y_1|\,|P_2|^2 dx+\int_\Omega |y_1|\,|\widetilde{p}_2|\,|\mathcal{B}|\,|P_2|\,dx\leq\boxtimes$$

donde

$$\boxtimes=\int_\Omega |\mathcal{B}|\,|\widetilde{y}_1|\,|\widetilde{p}_1|\,|P_2|\,dx+\int_\Omega |U|\,|\widetilde{p}_2|\,|P_2|\,dx+\int_\Omega |\mu|\,|P_2|^2 dx+\int_\Omega |V|\,|\widetilde{p}_2|\,|P_2|\,dx$$
$$+\int_\Omega |\nu|\,|P_2|^2 dx+\int_\Omega |\beta|\,|Y_1|\,|\widetilde{p}_1|\,|P_2|\,dx+\int_\Omega |\beta|\,|y_1|\,|P_1|\,|P_2|\,dx$$

Usando desigualdad de Young[ver (2.2)], Obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\leq\frac{1}{2}\int_\Omega |\mathcal{B}|^2|\widetilde{p}_1|^2 dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |P_2|^2|\widetilde{y}_1|^2 dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |U|^2|\widetilde{p}_2|^2 dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |P_2|^2 dx$$
$$+\int_\Omega |\mu|\,|P_2|^2 dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |V|^2|\widetilde{p}_2|^2 dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |P_2|^2 dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nu|\,|P_2|^2 dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega |\beta|^2|Y_1|^2|\widetilde{p}_1|^2 dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |P_2|^2 dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |\beta|^2|y_1|^2|P_1|^2 dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |P_2|^2 dx$$

Usando (3.64), obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\leq\left[\frac{g_0^2 m(\Omega)}{2}\right]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2\right]+\left[\frac{g_0^2 m(\Omega)}{2}\right]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2\right]+\left[\frac{g_0^2 m(\Omega)}{2}\right]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right]$$
$$+\left(\frac{b_0^2 f_0^2}{2}\right)\left(\int_\Omega |P_1|^2 dx\right)+\left[4+\frac{f_0^2}{2}+r_0+q_0\right]\left(\int_\Omega |P_1|^2 dx\right)+\left(\frac{b_0^2 g_0^2}{2}\right)\left(\int_\Omega |Y_1|^2 dx\right)$$

Usando el teorema (3.5), obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\leq\left[\frac{g_0^2 m(\Omega)}{2}\right]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2+\underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2+\underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right]$$
$$+\left(\frac{b_0^2 f_0^2}{2}\right)\left(\int_\Omega |P_1|^2 dx\right)+\left[\frac{8+f_0^2+2r_0+2q_0}{2}\right]\left(\int_\Omega |P_2|^2 dx\right)$$
$$+\left(\frac{b_0^2 g_0^2}{2}\right)[6Tm(\Omega)]\,[\exp(kT)]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2+\underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2+\underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right] \tag{3.66}$$

Multiplicando la tercera ecuación por P_3, integrando sobre Ω y usando la segunda identidad de Green, obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_3\|^2_{L^2(\Omega)}\right]+\int_\Omega |\nabla P_3|^2 dx\leq\int_\Omega |U|\,|\widetilde{p}_3|\,|P_3|\,dx+\int_\Omega |\mu|\,|P_3|^2 dx$$

Usando la desigualdad de Young [ver (2.2)], obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_3\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |U|^2\,|\widetilde{p}_3|\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |P_3|^2 dx + \int\limits_\Omega |\mu|\,|P_3|^2 dx$$

Usando (3.64), obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|P_3\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \left[\frac{g_0^2 m\,(\Omega)}{2}\right]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2\right] + \left(\frac{1+2r_0}{2}\right)\left(\int\limits_\Omega |P_3|^2 dx\right) \tag{3.67}$$

Sumando (3.65), (3.66) y (3.67), obtenemos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3}\|P_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq{}& \left[\frac{g_0^2 m\,(\Omega)}{2}\right]\left[3\underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2 + 3\underset{x\in\Omega}{Max}\,|V|^2 + 3\underset{x\in\Omega}{Max}\,|\mathcal{B}|^2\right]\\ &+\left(\frac{2+r_0+f_0^2+2f_0b_0+b_0^2f_0^2}{2}\right)\left(\int\limits_\Omega |P_1|^2 dx\right)\\ &+\left[\frac{8+f_0^2+2r_0+2q_0}{2}\right]\left(\int\limits_\Omega |P_2|^2 dx\right) + \left(\frac{1+2r_0}{2}\right)\left[\int\limits_\Omega |P_3|^2 dx\right]\\ &+\left[\frac{(b_0g_0)^2}{2}\right][6Tm\,(\Omega)]\,[\exp\,(kT)]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}\,|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|V|^2\right]\end{aligned}$$

Sean

$$\frac{M_1}{2} = Max\left\{\frac{2+r_0+f_0^2+2f_0b_0+b_0^2f_0^2}{2};\frac{8+f_0^2+2r_0+2q_0}{2};\frac{1+2r_0}{2}\right\}$$

$$\frac{M_2}{2} = Max\left\{\frac{3g_0^2 m\,(\Omega)}{2};(b_0g_0)^2\,[3Tm(\Omega)]\,[\exp\,(k_1T)]\right\}$$

Entonces obtenemos que

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3}\|P_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \frac{M_1}{2}\left[\sum_{i=1}^{3}\|P_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] + \frac{M_2}{2}\left[\underset{x\in\Omega}{Max}\,|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|V|^2\right]$$

Así obtenemos que

$$-\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3}\|P_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq M_1\left[\sum_{i=1}^{3}\|P_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] + M_2\left[\underset{x\in\Omega}{Max}\,|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|V|^2\right]$$

De donde se sigue que

$$-\frac{d}{dt}\left[(\exp\,(M_1t))\sum_{i=1}^{3}\|P_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \exp\,(M_1t)\,M_2\left[\underset{x\in\Omega}{Max}\,|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|V|^2\right]$$

Ahora integrando sobre $[t,T]$, obtenemos

$$\begin{aligned}&-\exp\,(M_1T)\left[\sum_{i=1}^{3}\|P_i\,(x,T)\|^2_{L^2(\Omega)}\right]+\\ &+\exp\,(M_1t)\left[\sum_{i=1}^{3}\|P_i\,(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \int_t^T \exp\,(M_1s)\,M_2\left[\underset{x\in\Omega}{Max}\,|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\,|V|^2\right]ds\end{aligned}$$

Luego se tiene

$$\exp\left(M_1 t\right)\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|P_i\left(x,t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right] \leq$$
$$\leq \exp\left(M_1 T\right)\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|P_i\left(x,T\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right] + \int_t^T \exp\left(M_1 s\right) M_2 \left[\underset{x\in\Omega}{Max}\left|\mathcal{B}\right|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\left|U\right|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\left|V\right|^2\right] ds \tag{3.68}$$

Usando las condiciones (3.57)tenemos que

$$\left\|P_i\left(x,T\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 =$$
$$= \int_\Omega \left|Y_i\left(x,T\right) - \left[\widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\right]\right|^2 dx = \int_\Omega \left|Y_i^2\left(x,T\right) - 2Y_i\left[\widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\right] + \left[\widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\right]^2\right| dx$$

Usando la desigualdad triangular conjuntamente con la desigualdad de Young [ver (2.2)], obtenemos que

$$\left\|P_i\left(x,T\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\left[\int_\Omega \left|Y_i\right|^2 dx + 2\int_\Omega \left|\widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\right|^2 dx\right];\ i = 1,2,3$$

De donde obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{3}\left\|P_i\left(x,T\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|Y_i\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{3}\left\|\widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right] \tag{3.69}$$

Usando el teorema (3.5)en (3.69), deducimos que

$$\sum_{i=1}^{3}\left\|P_i\left(x,T\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tag{3.70}$$
$$\leq 2\left[\left(6Tm\left(\Omega\right)\right)\exp\left(kT\right)\left(\underset{x\in\Omega}{Max}\left|\mathcal{B}\right|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\left|U\right|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\left|V\right|^2\right) + \sum_{i=1}^{3}\left\|\widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right] \tag{3.71}$$

Usando (3.70) en la desigualdad (3.68), obtenemos

$$\exp\left(M_1 t\right)\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|P_i\left(x,T\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right] \leq$$
$$\left[12Tm\left(\Omega\right)\exp\left(\left(k+M_1\right)T\right) + \int_t^T M_2 \exp\left(M_1 s\right) ds\right]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}\left|\mathcal{B}\right|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\left|U\right|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}\left|V\right|^2\right]$$
$$+ \left[2\exp\left(M_1 t\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|\widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right]$$

Puesto que $\int_t^T e^{M_1 s} ds = M_1 \left(e^{M_1 T} - e^{M_1 t} \right) \leq M_1 e^{M_1 T}$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\exp(M_1 t)\left[\sum_{i=1}^{3} \|P_i(x,T)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \\
&[12Tm(\Omega)\exp((k_1+M_1)T) + M_1M_2\exp(M_1T)]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right] \\
&+ 2\exp(M_1 t)\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|\widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]
\end{aligned}
$$

Así, obtenemos (ya que $e^{-M_1 T} \leq 1 \ \forall t \geq 0$)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \|P_i(x,T)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\exp(M_1T)[12Tm(\Omega)\exp(k_1T) + M_1M_2]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right] \\
&+ 2\exp(M_1 t)\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|\widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\underset{t\in[0,T]}{Max}\left[\sum_{i=1}^{3} \|P_i(x,T)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq \\
&\exp(M_1T)[12Tm(\Omega)\exp(k_1T) + M_1M_2]\left[\underset{x\in\Omega}{Max}|\mathcal{B}|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|U|^2 + \underset{x\in\Omega}{Max}|V|^2\right] \\
&+ 2\exp(M_1 t)\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|\widetilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]
\end{aligned}
$$

□

El siguiente lema, sirve para probar el teorema principal de esta sección.

Lema 3.1. Sea $\theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, Ω un conjunto abierto, conexo y acotado de $\mathbb{R}^3$ supongamos que $f \in C^\theta(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ y $\forall \varepsilon > 0$ se cumple que $\|D^2 f\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$. Entonces existe una constante $C = C(3,\Omega) > 0$ tal que

$$\underset{x\in\Omega}{Max}\ |f(x)| \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$$

Demostración. [Ver Huancas, Coronel et al] Puesto que $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ y Para $\theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ se cumple que $C^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow C^\theta(\Omega)$

Así tenemos la cadena de inclusiones de Sobolev

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow C^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow C^\theta(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$$

De donde $\exists C_1 > 0$ tal que $\|f\|_{C^0(\Omega)} \le C_1 \|f\|_{H^2(\Omega)}$

$$\Rightarrow \|f\| \le C_1 \left[\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|D^2 f\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \|f\|^2 \le C_1^2 \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|D^2 f\right\|_{L^2(\Omega)} \right]$$

Usando la Hipótesis, $\forall \varepsilon > 0 : \quad \|D^2 f\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon$, deducimos que

$$\|f\|^2_{C^0(\Omega)} \le C_1^2 \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + C_1^2 \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Puesto que $f \in W_0^1(\Omega)$, entonces por la desigualdad de Poincaré (teorema 2.10) existe una constante $M = M(2, \Omega)$ tal que

$$\|f\|^2_{C^0(\Omega)} \le C_1^2 M^2 \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)} + C_1^2 \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\|f\|^2_{C^0(\Omega)} \le C_1^2 \left(M^2 + 1\right) \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{C^0(\Omega)} \le \left[C_1 \sqrt{M^2 + 1} \right] \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$$

Sea $C = C_1 \sqrt{M^2 + 1} > 0$, entonces

$$\|f\|_{C^0(\Omega)} \le C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$$

□

3.2.2 Unicidad y Estabilidad de la Identificación de parámetros

El siguiente resultado, es de gran importancia, ya que nos permite determinar, cuando dos soluciones del problema de optimización (3.9) son estables respecto a los datos observados y como consecuencia de ello, también permite decidir la unicidad de dicha solución, y por lo tanto resuelve nuestro problema de existencia y estabilidad de los parámetros para el problema inverso (1.1)-(1.3) y (3.1).

Teorema 3.7. Asuma que $(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu)$ e $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{\beta}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ son minimizadores para el problema (3.9), correspondientes a los datos $(y_1^{obs}, y_2^{obs}, y_3^{obs})$ e $(\tilde{y}_1^{obs}, \tilde{y}_2^{obs}, \tilde{y}_3^{obs})$ respectivamente. Asuma además que se cumplen las hipótesis del lema(3.1) , y que existe $x_0 \in \Omega$

tal que $\tilde{\beta}(x_0) = \beta(x_0); \tilde{\mu}(x_0) = \mu(x_0); \tilde{\nu}(x_0) = \nu(x_0)$. Entonces existe una constante $\overline{T}$, tal que para cualquier $T \geq \overline{T}$ se cumple

$$\max_{x\in\Omega} |\mathcal{B}|^2 + \max_{x\in\Omega} |U|^2 + \max_{x\in\Omega} |V|^2 \leq \frac{\psi_0}{\phi_0} \left[\sum_{i=1}^{3} \|\tilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\|^2_{L^2(\Omega)} \right] \tag{3.72}$$

donde

$$\psi_0 = 1 - \Gamma; \phi_0 = [\frac{(L + 2f_0^2 + f_0^4)C_1}{C}]\{\exp(M_1 T)$$

con

$$L = \max\{|N|^2, f_0^2\}$$

$$\Gamma = \frac{C_1}{C}\left([\frac{(L + 2f_0^2 + f_0^4)}{2}]\{\exp(M_1T)[12Tm(\Omega)\exp(k_1T) + M_1M_2]\}\right)$$

$$+\frac{C_1}{C}\left(7m(\Omega) + g_0^2(1 + f_0^2)[6Tm(\Omega)\exp(kT)]\right)$$

y f_0, g_0, k, M_1, M_2 y C, C_1, son las constantes de los teoremas (3.5),(3.6) y del lema (3.1)

Demostración. Supongamos que $(y_1, y_2, y_3, \beta, \mu, \nu)$ es solución del problema (3.9) y que (p_1, p_2, p_3) es solución del sistema (3.23) con $(\overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu})$ reemplazado por (β, μ, ν)

Ahora, tomando $(\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\nu}) = (\tilde{\beta}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ en (3.35), obtenemos que

$$\int_Q \Big\{(\tilde{\mu} - \mu)[(N - y_1)p_1 - y_2p_2 - y_3p_3] + y_1y_2(\tilde{\beta} - \beta)(p_2 - p_1) + y_2(\tilde{\nu} - \nu)(p_3 - p_2)\Big\}\, dxdt$$

$$+C\int_\Omega \Big\{|\nabla\beta\nabla(\tilde{\beta} - \beta)| + |\nabla\mu\nabla(\tilde{\mu} - \mu)| + |\nabla\nu\nabla(\tilde{\nu} - \nu)|\Big\}\, dx \geq 0 \tag{3.73}$$

En forma análoga, si suponemos que $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{\beta}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ es solución del problema (3.9) y que $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ es solución del sistema (3.23) con $(\overline{\beta}, \overline{\mu}, \overline{\nu})$ reemplazado por $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$

Ahora, tomando $(\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\nu}) = (\beta, \mu, \nu)$ en (3.35), obtenemos que

$$\int_Q \Big\{(\mu - \tilde{\mu})[(N - \tilde{y}_1)\tilde{p}_1 - \tilde{y}_2\tilde{p}_2 - \tilde{y}_3\tilde{p}_3] + \tilde{y}_1\tilde{y}_2(\beta - \tilde{\beta})(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1) + \tilde{y}_2(\nu - \tilde{\nu})(\tilde{p}_3 - \tilde{p}_2)\Big\}\, dxdt$$

$$+C\int_\Omega \left\{|\nabla\tilde{\beta}\nabla(\beta-\tilde{\beta})| + |\nabla\tilde{\mu}\nabla(\mu-\tilde{\mu})| + |\nabla\tilde{\nu}\nabla(\nu-\tilde{\nu})|\right\} dx \geq 0 \tag{3.74}$$

Notemos que

$$|\nabla\beta\nabla(\tilde{\beta}-\beta)| + |\nabla\tilde{\beta}\nabla(\beta-\tilde{\beta})| = \nabla|\beta-\tilde{\beta}|^2 \tag{3.75}$$

$$|\nabla\mu\nabla(\tilde{\mu}-\mu)| + |\nabla\tilde{\mu}\nabla(\mu-\tilde{\mu})| = \nabla|\mu-\tilde{\mu}|^2 \tag{3.76}$$

$$|\nabla\nu\nabla(\tilde{\nu}-\nu)| + |\nabla\tilde{\nu}\nabla(\nu-\tilde{\nu})| = \nabla|\nu-\tilde{\nu}|^2 \tag{3.77}$$

$$(\tilde{\mu}-\mu)[(N-y_1)p_1 - y_2p_2 - y_3p_3 - (N-\tilde{y}_1)\tilde{p}_1 + \tilde{y}_2\tilde{p}_2 + \tilde{y}_3\tilde{p}_3] = (\tilde{\mu}-\mu)[-NP_1$$

$$+\tilde{p}_1Y_1 + y_1P_1 + \tilde{p}_2Y_2 + y_2P_2 + \tilde{p}_3Y_3 + y_3P_3] \tag{3.78}$$

$$y_1y_2(\tilde{\beta}-\beta)(p_2-p_1) + \tilde{y}_1\tilde{y}_2(\beta-\tilde{\beta})(\tilde{p}_2-\tilde{p}_1) = -(\beta-\tilde{\beta})[\tilde{y}_1\tilde{y}_2P_2$$

$$-\tilde{y}_1\tilde{y}_2P_1 + Y_1\tilde{y}_2p_2 + y_1Y_2p_2 - Y_1\tilde{y}_2p_1 - y_1Y_2p_1] \tag{3.79}$$

$$y_2(\tilde{\nu}-\nu)(p_3-p_2) + \tilde{y}_2(\nu-\tilde{\nu})(\tilde{p}_3-\tilde{p}_2 = -(\tilde{\nu}-\nu)[Y_2\tilde{p}_3 + y_2P_3 - \tilde{p}_2Y_2 - y_2P_2] \tag{3.80}$$

Si sumamos (3.73) con (3.74), agrupamos adecuadamente los términos, y usando las relaciones (3.75)- (3.80), obtenemos

$$C\int_\Omega \left\{\nabla|\beta-\tilde{\beta}|^2 + \nabla|\mu-\tilde{\mu}|^2 + \nabla|\nu-\tilde{\nu}|^2\right\} dx \leq \int_\Omega \{|\tilde{\mu}-\mu|[|N||P_1| + |\tilde{p}_1||Y_1| + |y_1||P_1|$$

$$+|\tilde{p}_2||Y_2|+|y_2||P_2|+|\tilde{p}_3||Y_3|+|y_3||P_3|]\}dx$$

$$+\int_\Omega \left\{|\tilde{\beta}-\beta|[|\tilde{y}_1||\tilde{y}_2||P_2|+|\tilde{y}_1||\tilde{y}_2||P_1|+|\tilde{y}_2||p_2||Y_1|+|y_1||p_2||Y_2|+|\tilde{y}_2||p_1||Y_1|+|y_1||p_1||Y_2|]\right\}dx$$

$$+\int_\Omega \{(\tilde{\nu}-\nu)[|\tilde{p}_3||Y_2|+|y_2||P_3|+|\tilde{p}_2||Y_2|+|y_2||P_2|]\}\,dx \tag{3.81}$$

Aplicando, al primer sumando del lado derecho de la ecuación (3.81), la desigualdad de Young, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\{|\tilde{\mu}-\mu|[|N||P_1|+|\tilde{p}_1||Y_1|+|y_1||P_1|+|\tilde{p}_2||Y_2|+|y_2||P_2|+|\tilde{p}_3||Y_3|+|y_3||P_3|]\}dx\leq\\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega|\tilde{\mu}-\mu|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|N|^2|P_1|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\tilde{\mu}-\mu|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\tilde{p}_1|^2|Y_1|^2dx+\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega|\tilde{\mu}-\mu|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|y_1|^2|P_1|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\tilde{\mu}-\mu|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\tilde{p}_2|^2|Y_2|^2dx+\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega|\tilde{\mu}-\mu|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|y_2|^2|P_2|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\tilde{\mu}-\mu|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\tilde{p}_3|^2|Y_3|^2dx+\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega|\tilde{\mu}-\mu|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|y_3|^2|P_3|^2dx
\end{aligned}\tag{3.82}$$

Definiendo f_0, g_0 como en el teorema (3.6), deducimos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\{|\tilde{\mu}-\mu|[|N||P_1|+|\tilde{p}_1||Y_1|+|y_1||P_1|+|\tilde{p}_2||Y_2|+|y_2||P_2|+|\tilde{p}_3||Y_3|+|y_3||P_3|]\}dx\leq\\
&\leq[\frac{7m(\Omega)}{2}][\max_{x\in\Omega}|\mathcal{U}|^2]+[\frac{|N|^2+f_0^2}{2}]\int_\Omega|P_1|^2dx+[\frac{f_0^2}{2}]\int_\Omega[|P_2|^2+|P_3|^2]dx+\\
&+[\frac{g_0^2}{2}]\int_\Omega[\sum_{i=1}^{3}|Y_i|^2]dx
\end{aligned}\tag{3.83}$$

Procediendo de manera análoga con el segundo de la ecuación (3.81), obtenemos

$$\int_\Omega \left\{|\tilde{\beta}-\beta|[|\tilde{y}_1||\tilde{y}_2||P_2|+|\tilde{y}_1||\tilde{y}_2||P_1|+|\tilde{y}_2||p_2||Y_1|+|y_1||p_2||Y_2|+|\tilde{y}_2||p_1||Y_1|+|y_1||p_1||Y_2|]\right\}dx$$

$$\leq[3m(\Omega)][\max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|^2]+[\frac{f_0^4}{2}][\int_\Omega|(P_1|^2+|P_2|^2)dx]+[(f_0g_0)^2]\int_\Omega[|Y_1|^2+|Y_2|^2]dx \tag{3.84}$$

Mientras que para tercer sumando de la ecuación (3.81), obtenemos

$$\int_\Omega \{(\tilde{\nu}-\nu)[|\tilde{p}_3||Y_2|+|y_2||P_3|+|\tilde{p}_2||Y_2|+|y_2||P_2|]\}\,dx$$

$$\leq [2m(\Omega)][\max_{x\in\Omega}|V|^2]+[\frac{g_0^2}{2}][\int_\Omega |Y_2|^2dx]+[f_0^2]\int_\Omega[|P_2|^2+|P_3|^2]dx \tag{3.85}$$

Sustituyendo las relaciones (3.83),(3.84) y (3.85) en (3.81), obtenemos

$$C\left[\int_\Omega[(\nabla\mathcal{B})^2+(\nabla U)^2+(\nabla V)^2]dx\right]\leq\frac{7m(\Omega)}{2}\left[\max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|^2+\max_{x\in\Omega}|U|^2+\max_{x\in\Omega}|V|^2\right]$$

$$+\left[\frac{g_0^2+2(f_0g_0)^2}{2}\right]\int_\Omega|Y_1|^2dx+\left[g_0^2+(f_0g_0)^2\right]\int_\Omega|Y_2|^2dx+\left[\frac{g_0^2}{2}\right]\int_\Omega|Y_3|^2dx$$

$$+\left[\frac{|N|^2+f_0^2+f_0^4}{2}\right]\int_\Omega|P_1|^2dx+\left[\frac{2f_0^2+f_0^4}{2}\right]\int_\Omega|P_2|^2dx+\left[\frac{2f_0^2+f_0^4}{2}\right]\int_\Omega|P_3|^2dx$$

Haciendo $L=\max\{|N|^2;f_0^2\}$, deducimos

$$C\left[\int_\Omega[(\nabla\mathcal{B})^2+(\nabla U)^2+(\nabla V)^2]dx\right]\leq 7m(\Omega)\left[\max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|^2+\max_{x\in\Omega}|U|^2+\max_{x\in\Omega}|V|^2\right]$$

$$+\left[\frac{L+2f_0^2+f_0^4}{2}\right]\left[\int_\Omega[\sum_{i=1}^3|P_i|^2]dx\right]+\left[g_0^2(1+f_0^2)\right]\left[\int_\Omega[\sum_{i=1}^3|Y_i|^2]dx\right] \tag{3.86}$$

Por otra parte, de la definición de $\mathcal{B},U,V$, se obtiene que

$$0<|\mathcal{B}|<1, 0<|U|<1, 0<|V|<1$$

De donde se deduce que

$$\max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|^2]+\max_{x\in\Omega}|U|^2+\max_{x\in\Omega}|V|^2\leq\max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|+\max_{x\in\Omega}|U|+\max_{x\in\Omega}|V| \tag{3.87}$$

Del lema (3.1), existe $C_1>0$ tal que

$$C\left[\max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|+\max_{x\in\Omega}|U|+\max_{x\in\Omega}|V|\right]\leq CC_1^2\left[\|\nabla\mathcal{B}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla U\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla V\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \tag{3.88}$$

Usando la ecuación (3.88) en (3.87), deducimos

$$\max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|^2] + \max_{x\in\Omega}|U|^2 + \max_{x\in\Omega}|V|^2 \leq C_1^2\left[\|\nabla\mathcal{B}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla V\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \quad (3.89)$$

Ahora, usando la ecuación (3.89) en (3.86), obtenemos

$$\max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|^2] + \max_{x\in\Omega}|U|^2 + \max_{x\in\Omega}|V|^2 \leq \frac{7m(\Omega)C_1}{C}[\max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|^2] + \max_{x\in\Omega}|U|^2 + \max_{x\in\Omega}|V|^2]$$

$$+[\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{2C}]\int_\Omega[\sum_{i=1}^{3}|P_i|^2]dx + \frac{g_0^2C_1(1+f_0^2)}{C}\int_\Omega[\sum_{i=1}^{3}|Y_i|^2]dx \quad (3.90)$$

denotando $\Lambda = \max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|^2] + \max_{x\in\Omega}|U|^2 + \max_{x\in\Omega}|V|^2$, podemos reescribir la ecuación (3.90), como sigue

$$\Lambda \leq \frac{7m(\Omega)C_1}{C}\Lambda + [\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{2C}]\int_\Omega[\sum_{i=1}^{3}|P_i|^2]dx + \frac{g_0^2C_1(1+f_0^2)}{C}\int_\Omega[\sum_{i=1}^{3}|Y_i|^2]dx \quad (3.91)$$

Aplicando el teorema (3.6), se obtiene

$$\Lambda \leq \frac{7m(\Omega)C_1}{C}\Lambda + [\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{2C}]\int_\Omega[\sum_{i=1}^{3}|P_i|^2]dx + \frac{g_0^2C_1(1+f_0^2)}{C}[6Tm(\Omega)\exp(kT)]\Lambda \quad (3.92)$$

Ahora, aplicando el teorema (3.6) en (3.92), se obtiene

$$\Lambda \leq \frac{7m(\Omega)C_1}{C}\Lambda + \frac{g_0^2C_1(1+f_0^2)}{C}[6Tm(\Omega)\exp(kT)]\Lambda$$

$$+[\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{2C}]\{\exp(M_1T)[12Tm(\Omega)\exp(k_1T) + M_1M_2]\Lambda\}$$

$$+[\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{2C}]\{2\exp(M_1T)[\sum_{i=1}^{3}\|\tilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\|^2_{L^2(\Omega)}]\} \quad (3.93)$$

De (3.93), se sigue que

$$\Lambda \leq (\frac{7m(\Omega)C_1}{C} + \frac{g_0^2C_1(1+f_0^2)}{C}[6Tm(\Omega)\exp(kT)]$$

$$+[\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{2C}]\{\exp(M_1T)[12Tm(\Omega)\exp(k_1T)+M_1M_2]\})\Lambda$$

$$+[\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{2C}]\{2\exp(M_1T)[\sum_{i=1}^{3}\|\tilde{y}_i^{obs}-y_i^{obs}\|^2_{L^2(\Omega)}]\} \tag{3.94}$$

Hagamos

$$\Gamma=\frac{C_1}{C}\left([\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)}{2}]\{\exp(M_1T)[12Tm(\Omega)\exp(k_1T)+M_1M_2]\}\right)$$

$$+\frac{C_1}{C}\left(7m(\Omega)+g_0^2(1+f_0^2)[6Tm(\Omega)\exp(kT)]\right) \tag{3.95}$$

Así podemos reescribir la ecuación (3.95), como sigue

$$\Lambda\leq\Gamma\Lambda+[\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{C}]\{\exp(M_1T)[\sum_{i=1}^{3}\|\tilde{y}_i^{obs}-y_i^{obs}\|^2_{L^2(\Omega)}]\}$$

Luego

$$\Lambda-\Gamma\Lambda\leq[\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{C}]\{\exp(M_1T)[\sum_{i=1}^{3}\|\tilde{y}_i^{obs}-y_i^{obs}\|^2_{L^2(\Omega)}]\}$$

De donde, obtenemos

$$(1-\Gamma)\Lambda\leq[\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{C}]\{\exp(M_1T)[\sum_{i=1}^{3}\|\tilde{y}_i^{obs}-y_i^{obs}\|^2_{L^2(\Omega)}]\}$$

Sea

$$\phi_0=1-\Gamma;\psi_0=[\frac{(L+2f_0^2+f_0^4)C_1}{C}]\exp(M_1T)$$

Entonces, se sigue que

$$\Lambda\leq\frac{\psi_0}{\phi_0})[\sum_{i=1}^{3}\|\tilde{y}_i^{obs}-y_i^{obs}\|^2_{L^2(\Omega)}]$$

Por lo tanto

$$\max_{x\in\Omega}|\mathcal{B}|^2+\max_{x\in\Omega}|U|^2+\max_{x\in\Omega}|V|^2\leq\frac{\psi_0}{\phi_0}\left[\sum_{i=1}^{3}\|\tilde{y}_i^{obs}-y_i^{obs}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]$$

$\square$

Observemos que si $y_i = \tilde{y}_i, i = 1, 2, 3,$ entonces se obtiene que $\tilde{y}_i^{obs} = y_i^{obs}, i = 1, 2, 3,$ entonces de la desigualdad anterior se sigue que:

$$|\mathcal{B}| = |U| = |V| = 0$$

Por lo tanto se obtiene que $\beta = \tilde{\beta}; \mu = \tilde{\mu}; \nu = \tilde{\nu}$
Además si

$$\|\tilde{y}_i^{obs} - y_i^{obs}\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$$

entonces de la desigualdad del teorema (3.7) se deduce que

$$|\mathcal{B}| < \varepsilon; |U| < \varepsilon; |V| < \varepsilon$$

Es decir los parámetros son estables respecto a los datos observados.

Conclusiones

1. Si el problema directo admite una única solución, entonces se puede definir un funcional de costo, que junto con los datos observados definen un problema inverso el cual es transformado en un problema de optimización.

2. Si el problema inverso tiene solución entonces el problema de optimización admite solución.

3. Si el problema de optimización tiene solución y si el sistema adjunto admite solución entonces una condición necesaria para la existencia del minimizador viene dada por la inecuación(3.35).

4. Si el problema de optimización admite única solución y además se cumplan las hipótesis del lema (3.1), entonces se obtiene unicidad para la identificación de parámetros del problema inverso, lo cual se deriva de la inecuación(3.72).

5. Si dos soluciones del problema de optimización son estables respecto a los datos observados y además se cumplan las hipótesis del lema (3.1), entonces se obtiene que los parámetros del problema inverso también son estables respecto a los datos observados, lo cual se deriva de la inecuación(3.72).

Recomendaciones

1. El presente trabajo de investigación se desarrolló considerando el modelo tipo SIR, sin embargo, es posible implementar esta misma técnica a los modelos tipo SI y SIS, lo que evidencia la importancia de dicha técnicas en la resolución de problemas inversos.

2. Esta investigación es de tipo cualitativo, recomendamos usar este estudio como base para implementar un método numérico para la simulación numérica del modelo en estudio.

3. Usar la simulación numérica para identificar el avance de enfermedades endémicas en nuestra región como por ejemplo el dengue,el cólera,Tuberculosis.

Bibliografía

[1] **Bakare E.A, A.Nwagwo, and Danso-Addo E.**(2014). *Optimal control analysis of an SIR epidemic model with constant recruitment*, International Journal of Applied Mathematical Research 119, 273 – 285.

[2] **Brézis H.**(1984). *Análisis Fucional Teoría y Aplicaciones*,Madrid.Alianza editorial.

[3] **Coronel A.**(2000). *Enfoque Variacional para problemas de ecuaciones diferenciales parciales*(Tesis)U.N.P.R.G,Lambayeque.

[4] **Coronel A., Huancas F., Rojas–Médar M.**, Un problema de control óptimo en un sistema ecológico, *COMCA–ARICA*,(2017)

[5] **Chinviriyasit S., Chinviriyasit W.**(2010). *Numerical modelling of an SIR epidemic model with diffusion*,Applied Mathematics and Computation 216(2010), 395 – 409.

[6] **Ducan C.J., Ducan S.R., Scott S.**, Whooping cough epidemics in London, 1701 – 1812: infection dynamics, seasonal forcing and the effects of malnutrition, *Proc. R. Soc. Lond.***B(263)** (1996), 445 – 450.

[7] **Huancas F.** , Doctoral Thesis The study of two problems:The Poincaré problem in differential equations with almost periodic type coefficients and an inverse problem for a model of indirectly transmitted diseases, *Universidad del Bio–Bio, Chile*,(in redaction)

[8] **Krylov N.V.**, *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces.* American Mathematical Society.,Providence, Rhode Island, 2008.

[9] **Lashari A.A**; *Optimal Control of an SIR Epidemic Model with a Saturated Treatment*, Applied Mathematics Information Sciences, 10(1) (2016), 185 – 191.

[10] **Lee E.B., and Markus L.**; *Foundations of optimal control theory.*The SIAM Series in Applied Mathematics, John Willey and Sons, 1967.

[11] **Tajudeen T., and Benyah F.**. *Optimal control of vaccination and treatment for an SIR epidemiological model*, World Journal of Modelling and Simulation, 8(3) (2012), 194 – 204.

[12] **Xiang H., Bin Liu B.** *Solving the inverse problem of an SIS Epidemic reaction diffusion model by optimal control methods*,Computers and Mathematical with Applications 70(2015), 805 – 819.