



**UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
ESCUELA DE POSTGRADO**



MAESTRÍA EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

**USO DE ELEMENTOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL EN
EL MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE LA
DEFORMACIÓN DE UNA MEMBRANA BAJO LA
ACCIÓN DE UNA FUERZA**

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN MATEMÁTICA APLICADA

AUTOR:

Bach. DIANA MERCEDES CASTRO CÁRDENAS

ASESOR:

M.Sc. Dolores Sánchez García

LAMBAYEQUE - PERÚ:

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"

ESCUELA DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA



USO DE ELEMENTOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL EN EL MODELAMIENTO Y
SIMULACIÓN DE LA DEFORMACIÓN DE UNA MEMBRANA BAJO LA ACCIÓN
DE UNA FUERZA

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
MATEMÁTICA APLICADA**

AUTOR:

Bach. Diana Mercedes Castro Cárdenas

ASESOR:

M.Sc. Dolores Sánchez García

LAMBAYEQUE - PERÚ:

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
ESCUELA DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

TÍTULO DE LA TESIS

USO DE ELEMENTOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL EN EL MODELAMIENTO Y
SIMULACIÓN DE LA DEFORMACIÓN DE UNA MEMBRANA BAJO LA ACCIÓN
DE UNA FUERZA

Como requisito para optar el grado académico de maestro en Matemática
Aplicada

Aceptada por la Escuela de Posgrado

M.Sc. Enrique Carpena Velásquez
PRESIDENTE

M.Sc. Camilos Quintos Chulquicahua
SECRETARIO

M.Sc. Raul Cuti Gutierrez
VOCAL

LAMBAYEQUE - PERÚ:

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
ESCUELA DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

TÍTULO DE LA TESIS

USO DE ELEMENTOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL EN EL MODELAMIENTO Y
SIMULACIÓN DE LA DEFORMACIÓN DE UNA MEMBRANA BAJO LA ACCIÓN
DE UNA FUERZA

Como requisito para optar el grado académico de maestro en Matemática
Aplicada

Sustentada por:

Br.Diana Mercedes Castro Cárdenas
Tesisista

Asesorado por:

Msc. Dolores Sánchez García
Asesor

LAMBAYEQUE - PERÚ:

2017

Agradecimientos

A Dios por haberme bendecido y guiado a lo largo del desarrollo de mi carrera, por acompañarme y ser luz en aquellos momentos de inestabilidad, por permitirme gozar de experiencias gratificantes en mi vida universitaria.

A mi amado esposo, por brindarme su comprensión, cariño, amor y su apoyo incondicional, además de brindándome consejos valiosos, dándome la libertad que necesitaba para tomar decisiones, gracias por permitirme lograr uno de mis sueños.

A mis hijos por ser mi fuente e inspiración para poder superarme cada día más y así poder luchar para que la vida nos depare un futuro mejor.

A mis profesores por impartir conocimientos que me permitieron desenvolverme en el mundo profesional, por su tiempo y su valiosa amistad.

A mi asesor por brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y conocimiento científico, así como guiarme durante el desarrollo de la tesis.

Gracias por todo.

Resumen

En la presente tesis se da a conocer el uso de elementos del análisis funcional en el modelamiento y simulación de la deformación de la membrana elástica bajo la acción de una fuerza, con determinadas condiciones.

Para Modelar y Simular, inicialmente se tiene en cuenta las fuerzas tangenciales en una determinada área en la superficie de una membrana elástica en equilibrio y utilizando las Leyes de Newton sobre esta, se establece una ecuación diferencial parcial conocida como la Ecuación Diferencial de Poisson sujeta a ciertas condiciones de frontera; luego se establece la existencia y unicidad de la solución de la ecuación por medio del análisis funcional a través de formas variacionales, para después hallar su solución mediante la aplicación de elementos finitos, el cual permite hallar la solución mediante un sistema de ecuaciones lineales cuyo orden depende del mallado que se halla considerado inicialmente en el área donde se encuentra la membrana elástica.

Es necesario detallar que cuanto mas divisiones se consideren en el mallado, se tendrá un sistema de ecuaciones lineales mas amplio y por tanto, utilizando formas numéricas. Se obtiene una mejor aproximación a la solución deseada.

Para realizar este proceso numérico y la simulación de la solución hallada se utilizó herramientas computacionales que permiten observar mediante gráficas en 3D la deformación de la membrana elástica.

Abstract

In the present thesis it is given to know the use of elements of functional analysis in the modeling and simulation of elastic membrane deformation under the action of a force, with certain conditions.

To Model and Simulate, initially the tangential forces are taken into account in a given area on the surface of an elastic membrane in equilibrium and using Newton's Laws on this one, a partial differential equation is established known as the Poisson Differential Equation subject to certain boundary conditions; then the existence and uniqueness of the solution of the equation is established by means of functional analysis through a variety of forms, to later find its solution. by means of the application of finite elements, which makes it possible to find the solution by means of a system of linear equations whose order depends on the mesh that is initially considered in the area where the elastic membrane is located.

It is necessary to detail that the more divisions are considered in the grid, a system of linear equations will have a broader and therefore, using numerical forms. A better approximation to the desired solution is obtained.

In order to carry out this numerical process and the simulation of the solution found, computational tools are used that allow the deformation of the elastic membrane to be observed by means of 3D graphs.

-translation by DeepL-

Introducción

El uso de elementos del Análisis Funcional en muchos campos de investigación en las Ciencias e Ingeniería es muy importante, especialmente en la Telecomunicaciones y Física Cuántica.

En las curriculas de Ingeniería y Física, los conceptos abstractos del análisis funcional son raramente incorporados, y en la especialidad de Matemática Pura y Aplicada se trata en los ciclos superiores, por consiguiente los estudiantes y profesionales involucrados en esta área encuentran una perspectiva de conocimiento en los textos tradicionales de análisis funcional, los cuales tienden a incluir teoremas y pruebas abstractas. Para superar en parte esta situación se presenta el presente trabajo de aplicabilidad de los elementos de análisis funcional, cuyo objetivo es proporcionar una comprensión simple pero a fondo de este campo de estudio a través del uso de estos elementos en el modelamiento y simulación de la deformación de la membrana elástica bajo la acción de una fuerza sujeta a ciertas condiciones de frontera., lo cual nos sirve de base teórica para un mejor entendimiento de los capítulos posteriores.

En el primer capítulo se hace una revisión de los elementos del análisis funcional.

En el segundo capítulo se hace la revisión de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas y los métodos de solución que se apoyan en la formulación de las mismas, los que al final nos permite aplicar técnicas numéricas que determinan una solución aproximada de estas ecuaciones. Una de estas técnicas aproximadas mas usadas son los elementos finitos de Ritz y Galerkin, los cuales descomponen el área o dominio de trabajo en regiones finitas,

llamados elementos, conectados por nodos conocidos como elemento triangular lineal de tal forma que se obtenga la solución aproximada mediante una función que interpola los nodos. Un punto importante de elementos finitos es la exactitud de la solución aproximada obtenida, que depende fundamentalmente de la cantidad de elementos considerados, que cuando son en un numero grande, es necesario utilizar herramientas computacionales para llegar a una mayor exactitud en la solución del problema planteado.

En el tercer capitulo, con toda la información obtenida anteriormente, se resuelve la ecuación diferencial de la deformación de una membrana elástica sometida a la acción de una fuerza, sujeta a ciertas condiciones de frontera. Así después de obtener el modelo, que es la ecuación diferencial parcial, se usa la formulación variacional para determinar la existencia y unicidad; posteriormente se aplica el método de elementos finitos, que nos permite obtener una solución aproximada mas optima del problema. Se presenta también, algunos resultados y sus respectivos gráficos asistidos por herramientas computacionales en este caso el software de Matlab que permiten observar mediante gráficos en 3D la deformación de la membrana elástica. Se incluyen en la tesis las principales conclusiones y recomendaciones que derivan de la investigación, también se presenta la bibliografía consultada en el ámbito nacional e internacional, así como el programa computacional en Matlab utilizado para hallar una mejor solución.

Lambayeque, 2017

Índice

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Introducción</i>	VII
1. Preliminares	1
1.1. Elementos del Análisis Funcional	1
1.1.1. Espacios de Hilbert	1
Funciones Lineales	2
Teorema de la Traza	2
Fórmula de Green para funciones de $H_0^1(\Omega)$	3
1.1.2. Fórmula de Green clásica a las funciones de $D(\Omega)$	3
Funciones localmente integrables	3
1.1.3. Espacios de Sobolev	4
Desigualdades en los Espacios de Sobolev	6
Dualidad en los Espacios de Sobolev	7
1.1.4. Forma Bilineal y Teorema de Lax-Milgram	9
2. El Método Variacional	11
2.1. Ecuación Diferencial Parcial Elíptica	11
2.2. Formulación Variacional	11
2.3. Técnicas de Aproximación	15

2.3.1. Método de residuos ponderados	15
2.4. Aproximación del Problema Variacional	17
2.4.1. Aplicación del Método de Ritz	18
2.4.2. Aplicación del Método de Galerkin	20
2.4.3. Dizcretización: Elemento Triangular Lineal	22
2.5. Transformación de la región	32
3. Modelamiento	37
3.1. La Membrana Elástica	37
3.2. Solución de la Ecuación Diferencial Parcial(Ecuacion de Poisson)	45
3.3. Solución Numérica	50
3.3.1. Solución para 5 vértices y 4 triángulos	50
3.3.2. Solución para 10 vértices y 10 triángulos	57
3.4. Gráfica de la Solución Numérica para mayor cantidad de triángulos	60
3.4.1. Desarrollando una malla en el dominio	60
3.4.2. Determinando la solución aproximada	61
3.4.3. Estimación del error	64
Apéndice A.Código de Simulación	73
<i>Índice de Figuras</i>	75
<i>Índice de Tablas</i>	77
<i>Bibliografía</i>	79

1 Preliminares

En la medida en que las leyes de las matemáticas se refieren a la realidad, no son exactas, y en tanto son exactas, no se refieren a la realidad.

ALBERT EINSTEIN

1.1 Elementos del Análisis Funcional

1.1.1 Espacios de Hilbert

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno.[Rudin., 1973]

El espacio H es de Hilbert con $\|\cdot\|$ si:

1. H es de Banach con $\|\cdot\|$.
2. $\|\cdot\|$ provenga del producto interno

Ejemplo 1.1.1 \mathbb{R}^n con $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$

Ejemplo 1.1.2 $l^2 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{i=1}^n |x_i|^2 < \infty \right\}$, con $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$

Funciones Lineales

Sea V un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $\|\cdot\|_V$

Definición 1.1.1 (Función Lineal) Una función lineal V es una función:

$$L : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto L(u)$$

tal que $L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Teorema de la Traza

Teorema 1.1.1 (De la Traza) Supongamos que Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^n de frontera $\partial\Omega$ "suficientemente regular". Entonces $D(\overline{\Omega})$ es denso en $H_1(\Omega)$ y la aplicación: $\gamma_0 : V \mapsto \gamma_0 V = V|_{\partial\Omega}$ de $D(\overline{\Omega})$ en $C^0(\partial\Omega)$ se prolonga por continuidad en una aplicación lineal continua de $H_1(\Omega)$ en $L^2(\partial\Omega)$, también denotada por γ_0 .

La aplicación γ_0 así definida se llama **aplicación traza**, y su valor $\gamma_0 V$ para una función V de $H^1(\Omega)$ se le llama **traza de V sobre $\partial\Omega$** . Es importante hacer notar que la imagen $\gamma_0(H^1(\Omega))$ es un subespacio propio de $L^2(\partial\Omega)$, es decir, la aplicación γ_0 no es sobreyectiva de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\partial\Omega)$

Teorema 1.1.2 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n de frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 a trozos. Entonces H_0^1 es el núcleo de la aplicación traza γ_0 de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\partial\Omega)$, es decir

$$H_0^1(\Omega) = \{V \in H^1(\Omega) : V|_{\partial\Omega} = 0\}$$

es decir, γ_0 sobre funciones de clase C^1 , es su restricción sobre $\partial\Omega$.

Nota: En realidad, $\text{Rango}(\gamma_0) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ es denso $L^2(\partial\Omega)$.

Fórmula de Green para funciones de $H_0^1(\Omega)$

$\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx; \forall i = \overline{1, n}$$

1.1.2 Fórmula de Green clásica a las funciones de $D(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u_i v dx = - \int_{\Omega} u v_i dx + \int_{\partial\Omega} u v \gamma^i ds$$

donde $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n)$ vector normal y γ^i es la i -ésima componente del vector normal.

Demostraremos que:

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \forall v \in C_o^\infty$$

En efecto:

Hacemos $u = u_{x_i}$

Reemplazando en el Teorema de Green clásica o Teorema de divergencia:

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = \int_{\Omega} u_{x_i} \cdot v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u_{x_i} v \gamma^i ds$$

Funciones localmente integrables

Definición 1.1.2 Dado un dominio Ω , el conjunto de funciones localmente integrables se define por [Brézis, 1984] $L_{loc}^1(\Omega) = \{f : f \in L^1(K), \forall \text{ compacto } K \subset \text{int } \Omega\}$

$$L_{loc}^1(\Omega) = \{f \in L^1(K), \forall \text{ compacto } K \subset \Omega(\text{int } \Omega, \text{ si } \Omega \text{ es arbitrario})\}$$

Recordemos que $L^1(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} / \int_K |f| < \infty\}$

Así, se puede decir que una funcional lineal $T_f : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi \rightarrow \langle T f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi d\Omega = \int_{\text{supp } \varphi} f \varphi d\Omega$$

Así, se puede decir que $L_{loc}^1 \subset D'(\Omega)$

Usaremos también la siguiente notación para cada $T \in D'(\Omega)$, por $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} T \varphi d\Omega$

De acuerdo a la notación dada se tiene que el conjunto $C^0(\Omega)$ está contenida en $L_{loc}^1(\Omega)$.

Usando este espacio podemos presentar el nuevo concepto de derivada.

Definición 1.1.3 (Derivada generalizada) Dada una función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, decimos que f tiene derivada débil o generalizada, $D^\alpha f$, si y solo si existe una función $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ talque $\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)D^\alpha \varphi(x)dx, \forall \varphi \in D(\Omega)$ Si tal g existe, se define $D^\alpha f = g$ en el sentido generalizado.[Ciarlet, 1978]

1.1.3 Espacios de Sobolev

Definición 1.1.4 Sea $1 \leq p < \infty$ y $m \in \mathbb{Z}_0^+$ un entero no negativo, se define

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para } |\alpha| \leq m\}$$

dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 < p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha u| & \text{si } p = \infty \end{cases} \quad (1.1)$$

Aquí siempre tratamos a las derivadas en sentido de las distribuciones.

Si $p = 2$, se denota por $H^m(\Omega) = W^{m,2}$ al espacio de Sobolev que se define por

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / D^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ para } |\alpha| \leq m\}$$

el cual es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v); u, v \in H^m(\Omega)$$

donde (u, v) es el producto interno ordinario en L^2 , también se denota por $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$

Sea $D(\Omega)$ el espacio de funciones C^∞ con soporte compacto contenido en Ω . El cerrado de $D(\Omega)$ en la topología de $H^m = W^{m,2}$, sera denotado por $W_0^{m,2}$ ó H_0^m cuando $p = 2$ el cual también es un espacio de Hilbert.

Para $m = 1$ y $p = 2$ Para con el producto, definimos al espacio $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ $H^1(\omega) =$ La clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.

Ellos son ambos espacios de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v) = \int_{\Omega} uv + \sum_{i=1}^n D_i u D_i v dx$$

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

En $H_0^1(\Omega)$ se define el producto escalar (\cdot, \cdot) por

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

El espacio $H^1(\Omega)$ es separable cuando es limitado, o al menos limitado en una dirección, tenemos la desigualada de Poincaré.

$$\|u\|_{L^2} \leq k \left(\sum_{i=1}^n |D_i u|^2 \right)^{1/2}, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{L^2} \leq k \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

donde k es una constante.

Teorema 1.1.3 *El espacio $W_p^k(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Consideremos una sucesión de Cauchy v_j , respecto a la norma $\|\cdot\|_{k,p,(\Omega)}$. Teniendo en cuenta que justo esta norma es una combinación de normas de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ de derivadas generalizadas, se cumple que para cada $|\alpha| \leq k$, la sucesión $\{D^\alpha v_j\}$ es de nuevo una sucesión de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Por el Teorema 1 (Riesz-Fischer) para $1 \leq p < \infty$, se dice que existe $v^n \in L^p(\Omega)$ tal que $\|D^\alpha v_j - v^\alpha\|_{L^p} \rightarrow 0$, cuando $j \rightarrow \infty$. En particular $v_j \rightarrow v^{0,\dots,0} = v$ en L^p . Ahora solo falta verificar que $D^\alpha v$ existe y es igual a v^α . Para ello, observe que si $w_i \rightarrow w$ en L^p , entonces para todo $\varphi \in D(\Omega)$, se cumple

$$\int_{\Omega} w_j(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx$$

Esto se sigue de la desigualdad de Hölder

$$\|w_j \varphi - w \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \|w_j - w\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ cuando } j \rightarrow \infty$$

Para mostrar que $D^\alpha = v^\alpha$, debemos verificar la identidad en el sentido distribucional

$$\int_{\Omega} v^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi^{(\alpha)} dx, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^\alpha \varphi dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (D^\alpha v_j) \varphi dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_j \varphi^{(\alpha)} dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi^{(\alpha)} dx \end{aligned}$$

Existe otra definición de Espacios de Sobolev que podría haberse hecho por $H_p^k(\Omega)$ = clausura de $C^k(\Omega)$ con la norma de Sobolev.

En el caso de $p = \infty$ se tiene que H_∞^k , el cual no es el espacio W_∞^k . Sin embargo para $1 \leq p < \infty$, se cumple que $H_p^k(\Omega) = W_p^k(\Omega)$ ■

Desigualdades en los Espacios de Sobolev

En los espacios de Sobolev existen relaciones de inclusión que usan muy a menudo, cuando las inclusiones de un espacio en otro son continuas.[Daners., 2008]

Propiedad 1.1.1 Sea Ω cualquier dominio $k, m \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $k \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces $W_p^m(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$ inclusión continua y completa.

Observemos que

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^p}^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^p}^p \right)^{1/p} \leq \|u\|_{m,p,\Omega}$$

Por tanto, tomando la inclusión:

$$i : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W \rightarrow W^{k,p}(\Omega)$$

$$u \mapsto i(u) = u$$

la desigualdad anterior significa que:

$$\|i(u)\|_{k,p,\Omega} \leq \|u\|_{k,p,\Omega}, \forall u \in W^{k,p}(\Omega)$$

Propiedad 1.1.2 Sea Ω dominio acotado, $k \in \mathbb{Z}_0^+$, $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $W^{m,q}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.

Observe que para $k = 0$ se tiene la siguiente cadena[Erwin., 1978]

$$L^\infty(\Omega) \subset \dots \subset L^q(\Omega) \subset \dots \subset L^p(\Omega) \subset \dots \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega), 2 \leq p \leq q \leq \infty$$

Dualidad en los Espacios de Sobolev

Sabemos que si V es un espacio de Banach, V' es el espacio dual de V , y la norma en V' se define por

$$\|T\|_{V'} = \sup_{\|x\|_V} |Tx| = \sup_{\|x\| \leq 1} |Tx| = \sup_{x \in V, x \neq 0} \frac{|Tx|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \langle T, x \rangle$$

Ejemplo 1.1.3 Para $1 \leq p < \infty$

$$(L^p(\Omega))' = \{T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}; T \text{ lineal y continua}\}$$

$$T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \langle T, v \rangle = \int_{\Omega} T v$$

Si $f \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ por la desigualdad de Hölder se cumple

$$|\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_{L^q} \|v\|_{L^p}$$

Entonces se cumple que $f \in (L^p(\Omega))'$.

Por otro lado si:

$T \in (L^p(\Omega))'$ entonces $\exists c > 0$ tal que:

$$|\langle T, v \rangle| \leq c \|v\|_{L^p}, \forall v \in L^p(\Omega)$$

Usando el Teorema de Riesz se tiene que existe $f_T \in L^q(\Omega)$ tal que $\langle T, v \rangle = \int_{\Omega} f_T v$ y de ello se tiene que

$$L^q(\Omega) = (L^p(\Omega))', \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Definición 1.1.5 Sea $1 \leq p \leq \infty, k \in \mathbb{Z}^+, q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se define el espacio dual de $W^{k,q}$ por

$$W_q^{-k} = (W_p^k(\Omega))'$$

su norma

$$\|v\|_{-k,q,\Omega} = \sup_{u \in W^{k,p}(\Omega)} \frac{|\langle v, u \rangle|}{\|u\|_{k,p,\Omega}}$$

Definición 1.1.6 (Desigualdad de Poincaré-Friedrich) Si Ω es un dominio acotado en al menos una dirección, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists c_k$ talque

$$\|u\|_{k,\Omega} \leq c_k \|u\|_{k,\Omega}, \forall u \in H_0^k(\Omega)$$

Desigualdad de Poincaré Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, entonces

$$\exists C = C(\Omega, p) : \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 < p < \infty \quad (1.2)$$

1.1.4 Forma Bilineal y Teorema de Lax-Milgram

Definición 1.1.7 Sea H un espacio de Hilbert. Se dice que la forma bilineal

$$a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto a(u, v)$$

es continua si existe una constante $C > 0$ tal que

$$a(u, v) \leq C \|u\|_H \|v\|_H, \forall u, v \in H,$$

y coersiva si existe una constante $\alpha > 0$ talque

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2, \forall u \in H.$$

En caso de existir, C y α son llamadas constantes de continuidad y coersividad, respectivamente.

Teorema 1.1.4 (Teorema de Lax- Milgram) *Sea H un espacio de Hilbert y a una forma bilineal, continua y coersiva. Entonces para cada $f \in H^1$ (f lineal y continua) existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H$$

ademas, si a es simétrica, entonces u es caracterizado por la propiedad

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle \right\}$$

Nota Este teorema es uno de los teoremas mas importantes para el estudio de la existencia y unicidad de la solución de problemas elípticos.

2 El Método Variacional

*La matemática es la ciencia del orden y la medida,
de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos
y fáciles.*

RENÉ DESCARTES

2.1 Ecuación Diferencial Parcial Elíptica

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

2.2 Formulación Variacional

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado de clase C^1 . Dado $f \in L^2(\Omega)$.

El problema homogéneo consiste en encontrar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que satisfice 2.1.

Se precisa lo que se entiende por solución clásica y solución débil:

- Una solución clásica de 2.1 es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface puntualmente sobre Ω .

- Una solución débil de 2.1 es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\Omega} (fv) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.2)$$

Ahora, suponiendo que u es la solución clásica de 2.1, se demuestra que u es una solución débil. Para tal efecto se multiplica la primera igualdad de 2.1 por $\varphi \in D(\Omega)$, y al integrar por partes sobre Ω se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} u \cdot \varphi ds = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx \quad (2.3)$$

Utilizando la condición de borde de u o que $v = 0$ sobre Ω , la integral de frontera se anula y nos resulta

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.4)$$

La ecuación 2.2 recibe el nombre de formulación variacional o débil.

Como $D(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, por continuidad se sigue que u es solución débil de 2.1.

Para demostrar la existencia y unicidad de la solución débil se hace uso del teorema (Lax-Milgram).

En este caso: Dada $f \in L^2(\Omega)$ hallar un $u \in H_0^1$ tal que, se toma el espacio de Hilbert H como el espacio de Sobolev H_0 . La función $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ definida explícitamente por $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$ es bilineal, continua, coerciva y simétrica.

En efecto

Bilinealidad

Mostraremos la linealidad:

$$a(\alpha u + \beta v, w) = a(u, w) + a(v, w)$$

En efecto: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y u, v y $w \in H_0^1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 a(\alpha u + \beta v, w) &= \int_{\Omega} \nabla(\alpha u + \beta v) \nabla w dx \\
 &= \int_{\Omega} \nabla(\alpha u + \beta v) \nabla w dx \\
 &= \int_{\Omega} (\alpha \nabla u + \beta \nabla v) \nabla w dx \\
 &= \int_{\Omega} (\alpha \nabla u \nabla w + \beta \nabla v \nabla w) dx \\
 &= \alpha \int_{\Omega} \nabla u \nabla w + \beta \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx \\
 &= a(u, w) + a(v, w)
 \end{aligned}$$

Para la linealidad de la otra componente se demuestra en forma análoga. Por lo tanto $a(u, v)$ es bilineal.

Continuidad (Por la desigualdad de Cauchy):

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |\nabla v| dx \\
 &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)
 \end{aligned}$$

La constante de continuidad es $C = 1$

Coerciva

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \quad (2.5)$$

$$= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad (2.6)$$

$$= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.7)$$

$$= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1 \quad (2.8)$$

La constante de coercividad es $\alpha = 1$

El funcional $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ viene dado por

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad (2.9)$$

el cual esta en H' , pues es lineal y continua

Continuidad: Utilizando la desigualdad de Poincaré se tiene

$$\begin{aligned} |\langle f, v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} f \cdot v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f| \cdot |v| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

En consecuencia, como la hipótesis del Teorema de (Lax-Milgram) se verifican.

Se tiene el problema variacional de la ecuación 2.2 tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.
ademas, debido a que a es simétrica, u es caracterizado como el mínimo sobre $H_0^1(\Omega)$ del funcional de energía

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - 2f \cdot v) dx \quad (2.10)$$

la regularidad de la solución es dada en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1 (Teorema de Lax- Milgram) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^2 , $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$, que verifican la ecuación 2.2. Entonces

$$u \in H^2(\Omega) \text{ y } \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2},$$

donde C es una constante que depende sólo de Ω .

Se supone que la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ de la ecuación 2.1 es de clase $C^2(\Omega)$. Entonces, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Por otro lado, al integrar por partes la ecuación 2.2 se tiene

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega) \quad (2.11)$$

entonces

$$\int_{\Omega} \{\Delta u + f\} \cdot \varphi dx = 0, \forall \varphi \in D(\Omega) \quad (2.12)$$

de donde, por la regularidad supuesta para u , se obtiene

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega \quad (2.13)$$

y por lo tanto u es la solución clásica de la ecuación 2.1

2.3 Técnicas de Aproximación

Ahora se realizara una rápida revisión de las técnicas de aproximación que nos permiten obtener soluciones de manera sistemática que hace posible su automatización usando programas.

2.3.1 Método de residuos ponderados

Este método es útil para obtener soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales con funciones de entrada definidas. Desarrollaremos este método, considerando el problema de muestra:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x & \text{si } 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

En este método se asume una función de tanteo que contiene coeficientes desconocidos a determinarse posteriormente. Así, podemos usar como función de tanteo $\tilde{u} = ax(1-x)$

La función de tanteo es elegida de tal manera que satisfaga las condiciones de frontera (es decir $\tilde{u}(0) = 0$ y $\tilde{u}(1) = 0$) y tiene un coeficiente desconocido a que debe ser determinado.

En general, la exactitud de la solución aproximada depende de la selección de la función de tanteo. Una vez seleccionada la función el residuo es calculado por sustituir la función de tanteo en la ecuación diferencial. Así, el residuo se hace:

$$R = \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x = -2a - ax(1-x) + x \quad (2.15)$$

Puesto que \tilde{u} es diferente de la solución exacta, el residuo no desaparece para todos los valores de x dentro del dominio. Lo que sigue es determinar la constante desconocida a , tal que la función de tanteo elegida sea la mejor aproximación a la solución exacta. Con este fin una función de prueba (o ponderación) w es seleccionada y el promedio ponderado de los residuos sobre el dominio del problema es fijado a cero. Esto es;

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \omega R dx = \int_0^1 \omega \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx \\ &= \int_0^1 \omega \{ -2a - ax(1-x) + x \} dx = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

El siguiente paso es determinar la función de prueba. La solución aproximada resultante difiere dependiendo de la función de prueba. Los métodos de residuos ponderados pueden ser clasificados basados en como la función de prueba es determinado. Algunos de los métodos de residuos ponderados se detallaran ahora:

- 1. Método de Colocación:** La función delta de Dirac, $\delta(x - x_i)$, es usada como una función de prueba, donde el punto de muestreo x_i deberá pertenecer al dominio $0 < x_i < 1$, así,

$$\omega = \delta(x - x_i) \quad (2.17)$$

Sea $x_i = 0.5$ y sustituyendo la función de prueba , en la ecuación de promedio ponderados de residuo (ecuación 2.16) se determina que $a = 0.22222$. Tenemos, entonces que la solución aproximada es $\tilde{u} = 0.2222x(1 - x)$

2. Método de mínimos cuadrados: La función de prueba es determinada desde el residuo, tal que

$$\omega = \frac{dR}{da} \quad (2.18)$$

Aplicando la ecuación 2.18 a la ecuación 2.15, obtenemos $\omega = -2 - x(1 - x)$. Sustituyendo la función de prueba en la ecuación 2.16 resulta en $a = 0.2305$. Entonces $\tilde{u} = 0.2305x(1 - x)$

3. Método de Galerkin: Acá, la función de prueba se elige desde la función de tanteo. Esto es,

$$\omega = \frac{d\tilde{u}}{da} \quad (2.19)$$

En este caso la función de prueba es, $\omega = x(1 - x)$. Aplicando esta función de prueba a ecuación 2.16 da $a = 0.2272$ así que $\tilde{u} = 0.2305x(1 - x)$

En la tabla 2.1 se compara las soluciones aproximadas a la solución exacta en $x = 0.5$

Tabla 2.1 Comparación de soluciones de la ecuación 2.14 en $x = 0.5$.

Solución Exacta	Colocación	Mínimos Cuadrados	Galerkin
0.0566	0.0556	0.0576	0.0568

2.4 Aproximación del Problema Variacional

Dado el problema problema variacional:

$$\begin{cases} \text{Hallar : } \hat{u} \in V \text{ tal que} \\ a(\hat{u}, v) = l(v) \end{cases} \quad \forall v \in V \quad (2.20)$$

donde V es un espacio de Hilbert, y V_n una sucesión de subespacios de dimensión finita de V , entonces planteamos el problema aproximado por:

$$\begin{cases} \text{Hallar : } \hat{u}_n \in V_n \text{ tal que} \\ a(\hat{u}, v) = l(v) \quad \forall v \in V_n \end{cases} \quad (2.21)$$

Si la forma bilineal a es simétrica, el problema 2.21 es equivalente a:

$$\begin{cases} \text{Hallar : } \hat{u}_n \in V_n \text{ tal que} \\ q(\hat{u}_n) = \min_{u \in V_n} q(u) \quad \forall u \in V_n \end{cases} \quad (2.22)$$

2.4.1 Aplicación del Método de Ritz

Sea n la dimensión de $V_n \subset V$, $\{\varphi_n\}$ una base de V_n , para cada $u \in V_n$, existen n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$u_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j$$

entonces:

$$\begin{aligned} q(u_n) &= \frac{1}{2} a(u, u) - l(u) \\ &= \frac{1}{2} a\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j\right) - l\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot a\left(\varphi_j, \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i\right) - l\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot a(\varphi_j, \varphi_i) - l\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_j \alpha_i \cdot a(\varphi_j, \varphi_i) - l\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j\right) \end{aligned}$$

Sea $k_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $b_j = l(\varphi_j)$,

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$q(u_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_j \alpha_i a(\varphi_j, \varphi_i) k_{ij} - l\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j\right)$$

$K = (k_{ij})$ y $B = (b_j)$ Expresando en forma matricial:

$$Q(U) = \frac{1}{2} U^T K U - B^T U \quad (2.23)$$

Observamos que la funcional cuadrática de la ecuación 2.23 está definida en \mathbb{R}^n , luego el problema se puede escribir como:

$$\begin{cases} \text{Hallar : } \hat{U}_n \in \mathbb{R}^n \text{ tal que} \\ Q(\hat{U}_n) = \min_{U \in \mathbb{R}^n} Q(U) \quad \forall u \in V_n \end{cases} \quad (2.24)$$

donde $Q(U) = \frac{1}{2} U^T K U - B^T U$. Para minimizar $Q(U) = 0$ es necesario hallar el punto estacionario que satisfaga

$$\nabla Q(U)$$

luego

$$\nabla Q(U) = KU - B$$

entonces

$$KU = B \quad (2.25)$$

por ser a coersiva tenemos

$$\gamma \|u\|^2 \geq a(u, u) = U^T K U$$

pero $\gamma \|u\|^2 \geq 0$, entonces $U^T K U \geq 0$. Así es definida positiva y la 2.25 tiene solución única. El único punto estacionario, es el minimizador \hat{U} que es solución de la ecuación 2.25 tal que $Q(\hat{U}) = \min_{U \in \mathbb{R}^n} Q(U)$. Por lo tanto el minimizador $\hat{u} \in V_n$ tiene la forma:

$$\hat{u}_n = \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j N_j$$

$$U = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

2.4.2 Aplicación del Método de Galerkin

El Método de Galerkin proporciona una forma sistemática de obtener aproximaciones finito dimensionales convergente de problemas variacionales. Para ello consideremos una familia V_n de subespacios de dimensión finita de V . Supongamos que para todo $v \in V$ existe una sucesión $v_n \in V_n$ tal que: $v_n \rightarrow v$ en V , cuando $n \rightarrow \infty$.

La aproximación por el método de Galerkin es:

$$\begin{cases} \text{Hallar : } u_n \in V_n \text{ tal que} \\ a(u_n, v) = l(v) \quad \forall v \in V_n \end{cases} \quad (2.26)$$

A continuación mostraremos que la ecuación 2.26 puede reescribirse en forma matricial. En efecto, sea $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ una base de V_n ; entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$u_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \quad (2.27)$$

Luego la ecuación 2.27 se puede reescribir como:

$$a\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j, v\right) = l(v)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j a(\varphi_j, v) = l(v), \forall v \in V_n \quad (2.28)$$

En el método de Galerkin se elige como función base $v = \varphi_j$, luego en la ecuación 2.28 se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{i=1}^n l(\varphi_i) \quad (2.29)$$

Esto se puede escribir como:

$$K\alpha = B \quad (2.30)$$

donde K es una matriz simétrica de componentes $k_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ y $b_i = l(\varphi_i)$, α es el vector de componentes α_j .

El hecho que la forma bilineal a es definida positiva y coersiva, garantiza la unicidad de la solución de la ecuación 2.30. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 \leq \gamma \|v\|^2 \leq a(v, v) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j \alpha_i a(\varphi_j, \varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j \alpha_i k_{ij} \\ &= \alpha^T K \alpha \end{aligned}$$

Entonces K es definida positiva. Por lo tanto el sistema 2.30 tiene solución única.

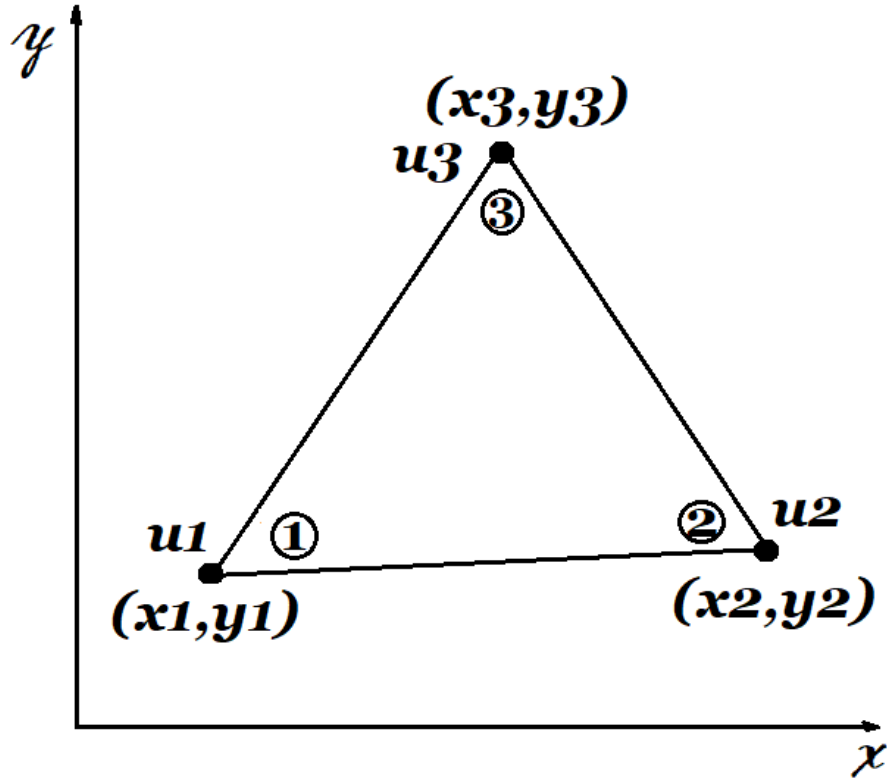


Figura 2.1 Elemento Triangular Lineal.

2.4.3 Dizcretización: Elemento Triangular Lineal

Dada la ecuacion diferencial parcial

$$-\Delta u = f(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y) = 0$$

$$I = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y) \right) d\Omega$$

$$I = \int_{\Omega} w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y) \right) d\Omega - \int_{\Gamma_e} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

$$I = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} w f(x,y) d\Omega - \int_{\Gamma_e} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

$$I = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} w f(x,y) d\Omega$$

$$[K^e] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega$$

y

$$[F^e] = \int_{\Omega} w f(x,y) d\Omega$$

La Discretización del dominio de la ecuación: Se realiza usando elementos finitos de dos dimensiones, uno de los elementos más simples de dos dimensiones es el elemento triangular de tres nodos como lo muestra la figura 2.1, esto es conocido como elemento triangular lineal, el elemento es tomar tres nodos en los vértices de los triángulos y la variable de interpolación dentro los elementos lo cual es lineal en x e y es decir la ecuación:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.31)$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Donde los a_i son constantes ha determinar. La función interpolación, ecuación 2.31 debe representar las variables nodales en los tres puntos nodales. Por lo tanto, sustituyendo los

valores x e y en cada punto nodal se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Aquí, x_i y y_i son los valores de coordenadas en el nodo. u_i es la variable nodal como se ve en la figura 2.1. Determinando la inversa de la matriz de la ecuación 2.34 resulta:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Donde:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

La magnitud de A es igual al área del elemento triangular lineal. Sin embargo, su valor es positivo si la numeración del nodo del elemento es la dirección en sentido contrario a las agujas del reloj y negativa en caso contrario. Para el cálculo de elementos finitos, la secuencia nodal del elemento debe estar en la misma dirección para todos los elementos del dominio. Sustituyendo la ecuación 2.35 en la ecuación 2.32 se tiene:

$$u = N_1(x,y)u_1 + N_2(x,y)u_2 + N_3(x,y)u_3 \quad (2.37)$$

en la que $H_i(x,y)$ es la función de forma para el elemento triangular lineal y se define:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (2.38)$$

$$N_2(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (2.39)$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (2.40)$$

Estas funciones también satisfacen las condiciones:

$$N_i(x_i, y_i) = \delta_{ij}$$

y

$$\sum_{i=1}^3 N_i(x_i, y_i) = 1$$

Aquí, δ_{ij} is *Kronecker delta*. Es decir:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.41)$$

para un elemento lineal triangular mostrado en la figura 2.1, la matriz del elemento se calcula de la siguiente manera:

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} \left(\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \right\} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial y} \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} \right\} \right) d\Omega \quad (2.42)$$

De

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

se tiene:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial N_1(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2A} (y_2 - y_3)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2A} (x_3 - x_2)$$

De

$$N_2(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

se tiene:

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{\partial N_2(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2A} (y_3 - y_1)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{\partial N_2(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2A} (x_1 - x_3)$$

De

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

se tiene:

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{\partial N_3(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2A} (y_1 - y_2)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{\partial N_3(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2A} (x_2 - x_1)$$

Reemplazando en la ecuación 2.42

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2A} (y_2 - y_3) \\ \frac{1}{2A} (y_3 - y_1) \\ \frac{1}{2A} (y_1 - y_2) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2A} (y_2 - y_3) & \frac{1}{2A} (y_3 - y_1) & \frac{1}{2A} (y_1 - y_2) \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2A} (y_2 - y_3) \frac{1}{2A} (y_2 - y_3) & \frac{1}{2A} (y_2 - y_3) \frac{1}{2A} (y_3 - y_1) & \frac{1}{2A} (y_2 - y_3) \frac{1}{2A} (y_1 - y_2) \\ \frac{1}{2A} (y_3 - y_1) \frac{1}{2A} (y_2 - y_3) & \frac{1}{2A} (y_3 - y_1) \frac{1}{2A} (y_3 - y_1) & \frac{1}{2A} (y_3 - y_1) \frac{1}{2A} (y_1 - y_2) \\ \frac{1}{2A} (y_1 - y_2) \frac{1}{2A} (y_2 - y_3) & \frac{1}{2A} (y_1 - y_2) \frac{1}{2A} (y_3 - y_1) & \frac{1}{2A} (y_1 - y_2) \frac{1}{2A} (y_1 - y_2) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \\ (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) & (y_3 - y_1)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \\ (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) & (y_1 - y_2)^2 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \right\} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \\ (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) & (y_3 - y_1)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \\ (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) & (y_1 - y_2)^2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial y} \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A}(x_3 - x_2) \\ \frac{1}{2A}(x_1 - x_3) \\ \frac{1}{2A}(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2A}(x_3 - x_2) & \frac{1}{2A}(x_1 - x_3) & \frac{1}{2A}(x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2A}(x_3 - x_2) \frac{1}{2A}(x_3 - x_2) & \frac{1}{2A}(x_3 - x_2) \frac{1}{2A}(x_1 - x_3) & \frac{1}{2A}(x_3 - x_2) \frac{1}{2A}(x_2 - x_1) \\ \frac{1}{2A}(x_1 - x_3) \frac{1}{2A}(x_3 - x_2) & \frac{1}{2A}(x_1 - x_3) \frac{1}{2A}(x_1 - x_3) & \frac{1}{2A}(x_1 - x_3) \frac{1}{2A}(x_2 - x_1) \\ \frac{1}{2A}(x_2 - x_1) \frac{1}{2A}(x_3 - x_2) & \frac{1}{2A}(x_2 - x_1) \frac{1}{2A}(x_1 - x_3) & \frac{1}{2A}(x_2 - x_1) \frac{1}{2A}(x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} (x_3 - x_2)^2 & (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) & (x_1 - x_3)^2 & (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) & (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) & (x_2 - x_1)^2 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{array} \right\} = \frac{1}{4A^2} \left[\begin{array}{ccc} (x_3 - x_2)^2 & (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) & (x_1 - x_3)^2 & (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) & (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) & (x_2 - x_1)^2 \end{array} \right]$$

Ahora se tiene

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int_{\Omega^e} \left(\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{array} \right\} \right) d\Omega \\ [K^e] &= \int_{\Omega^e} \left\{ \frac{1}{4A^2} \left[\begin{array}{ccc} (y_2 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \\ (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) & (y_3 - y_1)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \\ (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) & (y_1 - y_2)^2 \end{array} \right] \right\} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega^e} \left\{ \frac{1}{4A^2} \left[\begin{array}{ccc} (x_3 - x_2)^2 & (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) & (x_1 - x_3)^2 & (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) & (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) & (x_2 - x_1)^2 \end{array} \right] \right\} d\Omega \\ [K^e] &= \left\{ \frac{1}{4A^2} \left[\begin{array}{ccc} (y_2 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \\ (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) & (y_3 - y_1)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \\ (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) & (y_1 - y_2)^2 \end{array} \right] \right\} \int_{\Omega^e} d\Omega \\ &+ \left\{ \frac{1}{4A^2} \left[\begin{array}{ccc} (x_3 - x_2)^2 & (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) & (x_1 - x_3)^2 & (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) & (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) & (x_2 - x_1)^2 \end{array} \right] \right\} \int_{\Omega^e} d\Omega \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega^e} d\Omega = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (2A) = A$$

$$[K^e] = \left\{ \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \\ (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) & (y_3 - y_1)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \\ (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) & (y_1 - y_2)^2 \end{bmatrix} \right\} A$$

$$+ \left\{ \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} (x_3 - x_2)^2 & (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) & (x_1 - x_3)^2 & (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) & (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) & (x_2 - x_1)^2 \end{bmatrix} \right\} A$$

$$[K^e] = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \\ (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) & (y_3 - y_1)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) \\ (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) & (y_1 - y_2)^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} (x_3 - x_2)^2 & (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) & (x_1 - x_3)^2 & (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) & (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) & (x_2 - x_1)^2 \end{bmatrix}$$

Se obtiene los elementos de la matriz rigidez K^e los cuales están dados por:

$$k_{11}^e = \frac{1}{4A} [(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2] \quad (2.43)$$

$$k_{12}^e = \frac{1}{4A} [(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)] \quad (2.44)$$

$$k_{13}^e = \frac{1}{4A} [(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_2)] \quad (2.45)$$

$$k_{21}^e = k_{12}^e \quad (2.46)$$

$$k_{22}^e = \frac{1}{4A} [(x_1 - x_3)^2 + (y_3 - y_1)^2] \quad (2.47)$$

$$k_{23}^e = \frac{1}{4A} [(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_1 - y_2)] \quad (2.48)$$

$$k_{31}^e = k_{13}^e \quad (2.49)$$

$$k_{32}^e = k_{23}^e \quad (2.50)$$

$$k_{33}^e = \frac{1}{4A} [(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2] \quad (2.51)$$

La matriz rigidez se representa por:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Ahora se determina la matriz vector global de cargas:

$$[F^e] = \int_{\Omega} w f(x,y) d\Omega$$

$$[F^e] = \int_{\Omega^e} \begin{Bmatrix} N_1^e(x,y) \\ N_2^e(x,y) \\ N_3^e(x,y) \end{Bmatrix} \cdot f(x,y) d\Omega \quad (2.53)$$

2.5 Transformación de la región

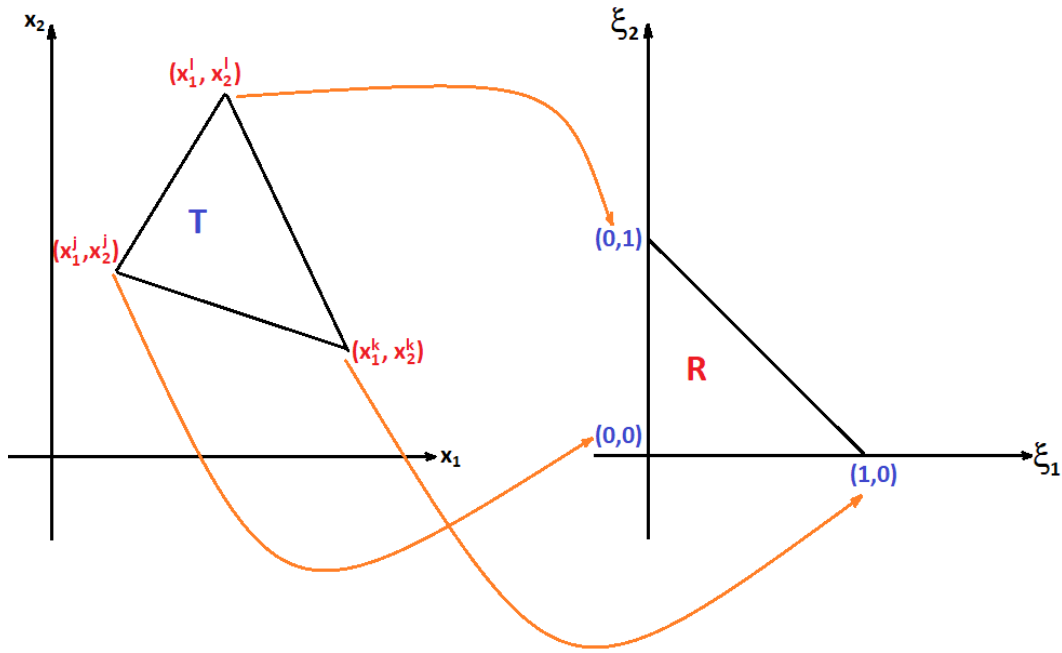


Figura 2.2 Transformación de T a R.

Supóngase que tenemos \$N\$ nodos interiores \$p_j = (x_j, y_j)\$. En \$p_j\$ el \$u_j\$ desconocido se aproxima a \$u(x_j, y_j)\$. Si \$\varphi_j\$ es la función sombrero correspondiente al nodo \$p_j\$ entonces \$u(x, y)\$ se aproxima a:

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x, y)$$

Se sabe que:

$$\varphi_j N_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ahora se busca el vector columna $v = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ talque $Av = b$ donde las entradas de A y b son dadas por:

$$a_{jk} = \int_D \nabla \varphi_j \nabla \varphi_k$$

$$b_j = \int_D f \varphi_j$$

De hecho, se construye la matriz A , pasando por los triángulos a través de un orden, tal orden es dada se puede observar en la figura 3.5. Escribimos $J \in T$ si el nodo p_j es una esquina del triángulo T . Para cada triángulo T se puede calcular la contribución a_{jk} ; b_j por que:

$$a_{jk} = \sum_{\{T/j, k \in T\}} \int_T \nabla \varphi_j \nabla \varphi_k$$

similarmente:

$$b_j = \sum_{\{T/j \in T\}} \int_T f \varphi_j$$

La contribución de A asociada a un T dado puede pensarse como la matriz de 3×3 , la matriz rigidez del elemento de T que es:

$$\begin{bmatrix} a_k(\varphi_i, \varphi_i) & a_k(\varphi_i, \varphi_j) & a_k(\varphi_i, \varphi_k) \\ a_k(\varphi_j, \varphi_i) & a_k(\varphi_j, \varphi_j) & a_k(\varphi_j, \varphi_k) \\ a_k(\varphi_k, \varphi_i) & a_k(\varphi_k, \varphi_j) & a_k(\varphi_k, \varphi_k) \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz de rigidez del elemento e , es útil aunque no esencial, referir todo problema a un triángulo de referencia estándar. De hecho si el triángulo original T se encuentra en el plano (x_1, x_2) entonces nuestro triángulo de referencia será:

$$R = \{(\xi_1, \xi_2); \xi_1 + \xi_2 \leq 1; \xi_1, \xi_2 \geq 0\}$$

En un nuevo plano (ξ_1, ξ_2) , se denotan a $x = (x_1, x_2)$ y $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Supóngase que:

$$x^j = (x_1^j, x_2^j)$$

$$x^k = (x_1^k, x_2^k)$$

$$x^l = (x_1^l, x_2^l)$$

son los vértices de T .

El mapeo afín sera:

$$\phi(\xi) = \left((x_1^k - x_1^j) \xi_1 + (x_1^l - x_1^j) \xi_2 + x_1^j, (x_2^k - x_2^j) \xi_1 + (x_2^l - x_2^j) \xi_2 + x_2^j \right)$$

el cual envía a de R a T .

Note que ϕ envía:

$$(0,0) \rightarrow (x_1^j, x_2^j) = x^j$$

$$(1,0) \rightarrow (x_1^k, x_2^k) = x^k$$

$$(0,1) \rightarrow (x_1^l, x_2^l) = x^l$$

Integramos sobre T para cambiar variables a una integral sobre R es decir:

$$\int_T f(x) \varphi_j(x) dx = \int_R f(\xi) |J| d\xi$$

donde $J = d\phi$ es el diferencial del cambio de variables, a una matriz de 2×2 y $|J| = |\det(J)|$ que es el determinante de la matriz J , llamado Jacobiano.

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1^k - x_1^j & x_1^l - x_1^j \\ x_2^k - x_2^j & x_2^l - x_2^j \end{pmatrix} \right|$$

$$|J| = \left| (x_1^k - x_1^j)(x_2^l - x_2^j) - (x_1^l - x_1^j)(x_2^k - x_2^j) \right|$$

Para hacer la mencionada integral numéricamente se escoge también aproximar f a una función lineal en T , es decir:

$$f \approx (x^j) \varphi_j + (x^k) \varphi_k + (x^l) \varphi_l$$

y también en T se tiene:

$$b = \int_T f(x) \varphi_j(x) dx \approx |J| \begin{bmatrix} f(x^j) & f(x^j) & f(x^j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_R \varphi_j^2 d\xi \\ \int_R \varphi_k \varphi_j d\xi \\ \int_R \varphi_l \varphi_j d\xi \end{bmatrix}$$

porque:

$$\varphi_j(\xi) = 1 - \xi_1 - \xi_2$$

$$\varphi_k(\xi) = \xi_1$$

$$\varphi_l(\xi) = \xi_2$$

se completa el trabajo por realizar las siguientes integrales:

$$\int_R \varphi_j^2 d\xi = \int_R \varphi_k^2 \xi = \int_R \varphi_l^2 \xi = \frac{1}{12}$$

$$\int_R \varphi_j \varphi_k d\xi = \int_R \varphi_k \varphi_l \xi = \int_R \varphi_l \varphi_j \xi = \frac{1}{24}$$

Por otro lado es necesario calcular las contribuciones a la matriz de rigidez usando las sumas convenientes:

$$\int_T \nabla \varphi_j \nabla \varphi_k dx = \int_T \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = \int_R \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_p} \frac{\partial \xi_p}{\partial \xi_s} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_q} \frac{\partial \xi_q}{\partial \xi_s} |J| d\xi$$

pero

$$\frac{\partial \xi_p}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_q}{\partial \xi_s} = \left[J^{-1} (J^{-1})^T \right]_{pq} = \left[(J^T J)^{-1} \right]_{pq}$$

y

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_p} = (-1, -1)$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_p} = (1, 0)$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_p} = (0, 1)$$

luego

$$Q = (J^T J)^{-1}$$

note que el área de R es $1/2$, tenemos que para la contribución a_{jk} :

$$\int_T \nabla \phi_j \nabla \phi_k dx = \frac{1}{2} |J| \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_p} Q \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_p} \right)^T$$

Esto es, Q es una matriz de orden 2×2 que es mas útil.

3 Modelamiento

Algún matemático dijo que el verdadero placer no reside en el descubrimiento de la verdad, sino en su búsqueda.

LEÓN TOLSTÓI

3.1 La Membrana Elástica

Para tener una idea de lo que es una membrana elástica, piense en envoltura de plástico adecuado para el contacto con los alimentos que se pueden encontrar en su supermercado favorito. Estira el plástico hasta los lados de algún recipiente para sellarlo antes de guardarlo en la refrigeradora. Al principio, la parte estirada del plástico es plana. Entonces, a medida que disminuye la temperatura del aire dentro del contenedor, la presión del aire interior disminuye. Al mismo tiempo, la presión atmosférica dentro de la nevera permanece más o menos constante (se está obligado a abrir la puerta de vez en cuando). El diferencial de presión así creado empuja el plástico que se inclina hacia dentro como resultado (Ver figura 3.1 se nota ligeramente la deformación del plástico después de algún tiempo en el refrigeradora).

Debido a que la deformación en la prueba anterior es muy pequeña, se ha optado por realizar otro experimento, donde se ha colocado un recipiente metálico, cubierto con



Figura 3.1 Deformación conseguida en la Refrigeradora.

una membrana plástico en un baño de maría, consiguiendo así una mayor diferencia de temperatura y por consiguiente una mayor diferencia de presión, que se hace evidente al observar la deformación de la membrana de plástico(Ver figura 3.1)



Figura 3.2 Deformación conseguida mediante calentamiento del aire de recipiente metálico.

Queremos determinar la forma final del plástico en el espacio tridimensional.

Este ejemplo de cocina arriba no es por mucho el único. Hay muchos casos de membranas elásticas alrededor: la piel de un tambor, una membrana celular biológica, las velas de un barco, un balón de fiesta, y así sucesivamente.

Para modelar esta situación, se nos da un conjunto abierto Ω de \mathfrak{R}^2 , cuya frontera $\partial\Omega$ representa el borde de la abertura del contenedor. Cada punto x del cierre $\overline{\Omega}$ de Ω representa un punto material de la membrana cuando se estira sin ninguna otra fuerza aplicada. Nuevamente, identificamos una relación de aspecto pequeño, objeto tridimensional con un objeto bidimensional que rellena $\overline{\Omega}$.

Ahora sometemos la membrana a una densidad de fuerza dada, tal como el diferencial de presión anterior, que es ortogonal a su plano, y está representado por una función dada $f : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$. Este tiempo, f es una densidad de fuerza superficial y la fuerza resultante Aplicada a una parte ω de Ω es dada por la integral $\int_{\omega} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

Hacemos la hipótesis razonable, aunque aproximativa, de que el punto x está desplazado por una cantidad $u(x)$ perpendicular a la membrana. El desplazamiento u es ahora una función en dos variables $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}$, y la forma de la membrana en equilibrio es una superficie paramétrica en \mathfrak{R}^3 dado por $f : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, u(x_1, x_2))$.

Dado que asumimos que la membrana se adhiere a la abertura del recipiente, obtenemos a la vez una condición de frontera de Dirichlet homogénea para ser satisfecha por el desplazamiento u de la membrana.

$$u(x) = 0 \text{ en } \partial\Omega \quad (3.1)$$

Luego necesitamos obtener una ecuación que determine la función u en Ω , y basándonos en nuestra experiencia unidimensional previa, podemos esperar que las ecuaciones diferenciales parciales desempeñen el papel principal aquí.

La figura 3.3 representa la gráfica de la función $u(x_1, x_2)$ sobre el cuadrado es decir un círculo centrado en $(0,0)$ y radio 1, que es la deformación de la membrana elástica cuando la fuerza aplicada es $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ y condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas.

Los dos vectores

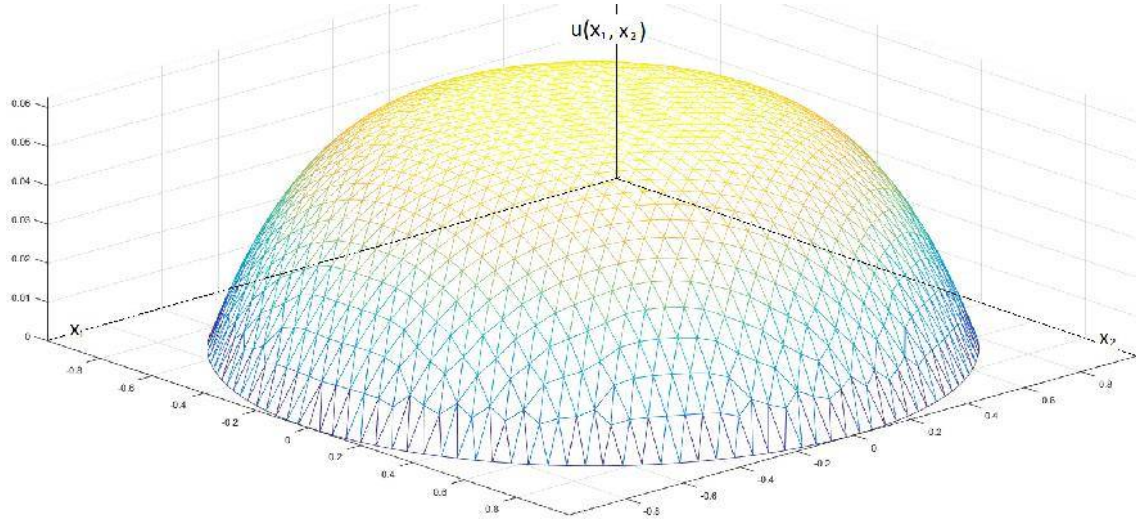


Figura 3.3 Membrana Elástica.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Forman una base del plano tangente a la superficie en el punto $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$.

Sólo consideraremos situaciones en las que $\|\nabla\| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2}$ sea pequeña. Esta hipótesis nos lleva a despreciar todas las cantidades que son al menos cuadráticas en las derivadas parciales de u . En particular, cuando normalizamos los vectores de base tangente anteriores obtenemos la aproximación[Le Dret and Lucquin, 2016]

$$\frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2}} \mathbf{a}_i \approx \mathbf{a}_i$$

Explicemos ahora qué significa la palabra tensión en el caso de una membrana. Debido a que estamos en un entorno de dos dimensiones, la situación es un poco complicada.

Consideremos una parte A de la membrana y aislamos esta parte como si fuera cortada de la membrana. Lo que mantiene la parte A en su lugar deben ser fuerzas ejercidas por el resto de la membrana. Parece razonable suponer que estas fuerzas se ejerzan exactamente en el límite γA de A con relación a la membrana, ya que la membrana no puede actuar a distancia. Ahora el contorno de interés es una curva, de modo que la fuerza en cuestión debe ser dada por una densidad lineal distribuida en γA , siendo la fuerza resultante la integral de la densidad en γA . Esto es general para todos los modelos de dos dimensiones de la mecánica del continuo.[Le Dret and Lucquin, 2016]

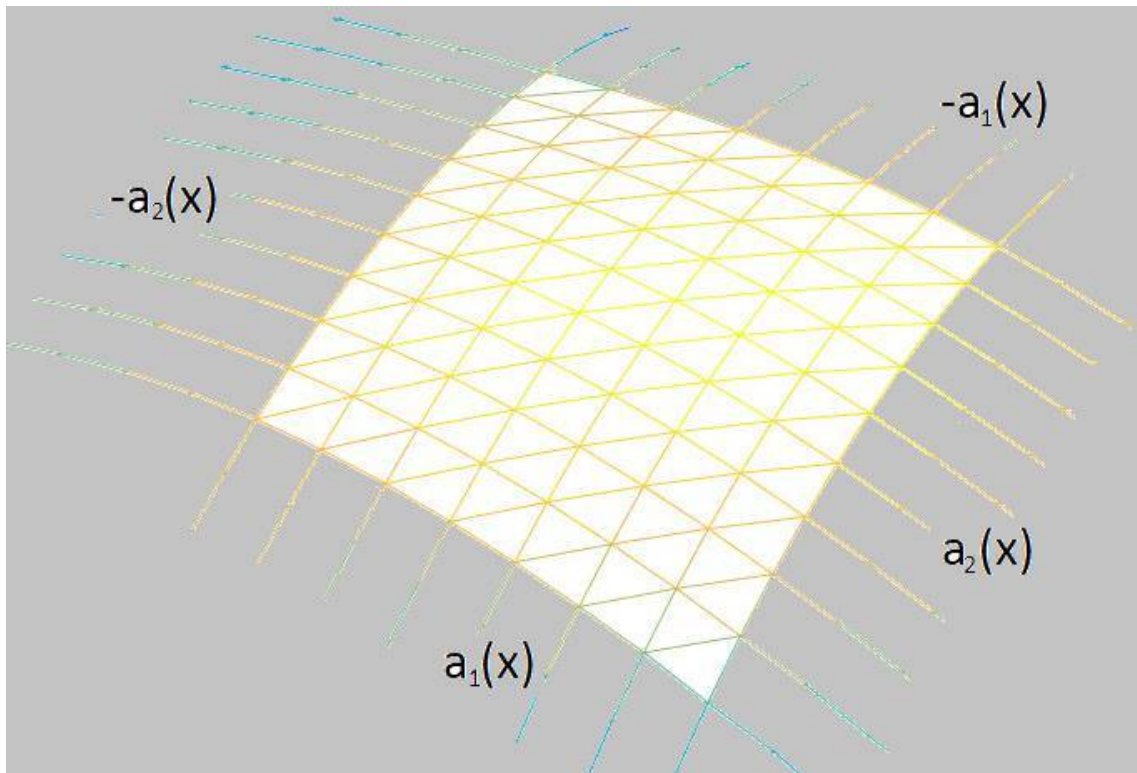


Figura 3.4 Ampliación de un pequeño cuadrado de la membrana. Se muestran algunos vectores normales..

En el caso de la membrana elástica, se asume que la densidad de fuerza se encuentra en el plano tangente a la superficie deformada, y además, que es normal a γA en el plano tangente y apuntando hacia fuera, ver figura 3.4. En realidad, esta suposición puede verse como la definición misma de una membrana elástica.

La tensión $T > 0$ es la norma de esta densidad de fuerza –hay que admitir aquí, por simplicidad, que esta norma es una constante, independiente del punto– que mide la tensión

de la membrana. La unidad física T es el Newton por metro (N/m)

Tenemos entonces un pequeño cuadrado alrededor de un punto arbitrario $(\bar{x}, u(\bar{x}))$ con $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Más precisamente, consideramos el cuadrado.

$$C_{\bar{x}, \delta x} =]\bar{x}_1 - \delta x, \bar{x}_1 + \delta x[\times]\bar{x}_2 - \delta x, \bar{x}_2 + \delta x[$$

En \mathfrak{R}^2 , con $\delta x > 0$, y recortar su imagen por el mapeo $x \mapsto (x, u(x))$ en \mathfrak{R}^3 , ver figura 3.4. Tampoco hacemos distinción entre el límite de la imagen de $C_{\bar{x}, \delta x}$ en \mathfrak{R}^3 y su contorno como un subconjunto de \mathfrak{R}^2 en el cálculo de las integrales. Esto se debe a que se supone que $\|\nabla\|$ es pequeño.

Para calcular la integral, se numeran los cuatro lados del cuadrado en sentido antihorario

$$\gamma_{\bar{x}}^1 =]\bar{x}_1 - \delta x, \bar{x}_1 + \delta x[\times \{\bar{x}_2 - \delta x\}$$

,

$$\gamma_{\bar{x}}^2 = \{\bar{x}_1 + \delta x\} \times]\bar{x}_2 - \delta x, \bar{x}_2 + \delta x[$$

y así sucesivamente para $\gamma_{\bar{x}}^3$ y $\gamma_{\bar{x}}^4$. De acuerdo con los vectores normales representados en la figura 3.4 la ley de Newton de movimiento para la componente de fuerza vertical es entonces:

$$\begin{aligned} T \int_{\gamma_{\bar{x}}^1, \delta x} -[a_2(x)]_3 d\gamma + T \int_{\gamma_{\bar{x}}^2, \delta x} [a_1(x)]_3 d\gamma \\ + T \int_{\gamma_{\bar{x}}^3, \delta x} [a_2(x)]_3 d\gamma + T \int_{\gamma_{\bar{x}}^4, \delta x} -[a_1(x)]_3 d\gamma \\ + \int_{C_{\bar{x}, \delta x}} f(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde $[z]_3$ denota la componente vertical del vector z . Es un simple ejercicio verificar que las componentes verticales satisfacen la ley de Newton. Podemos escribir las ecuaciones de cada integral separadamente. Se tiene [Le Dret and Lucquin, 2016]

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_{\bar{x}}^1, \delta x} [a_2(x)]_3 d\gamma &= \int_{\bar{x}_1 - \delta x}^{\bar{x}_1 + \delta x} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2 - \delta x) dx_1 \\
 \int_{\gamma_{\bar{x}}^2, \delta x} [a_1(x)]_3 d\gamma &= \int_{\bar{x}_2 - \delta x}^{\bar{x}_2 + \delta x} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1 + \delta x, x_2) dx_2 \\
 \int_{\gamma_{\bar{x}}^3, \delta x} [a_2(x)]_3 d\gamma &= \int_{\bar{x}_1 - \delta x}^{\bar{x}_1 + \delta x} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2 + \delta x) dx_1 \\
 \int_{\gamma_{\bar{x}}^4, \delta x} [a_1(x)]_3 d\gamma &= \int_{\bar{x}_2 - \delta x}^{\bar{x}_2 + \delta x} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1 - \delta x, x_2) dx_2
 \end{aligned}$$

La formula 3.2 puede ser reescrita como[Le Dret and Lucquin, 2016]

$$\begin{aligned}
 T \int_{\bar{x}_1 - \delta x}^{\bar{x}_1 + \delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2 + \delta x) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2 - \delta x) \right) dx_1 \\
 + T \int_{\bar{x}_2 - \delta x}^{\bar{x}_2 + \delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1 + \delta x, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1 - \delta x, x_2) \right) dx_2 \\
 + \int_{C_{\bar{x}, \delta x}} f(x) dx = 0
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si ahora dividimos por $4(\delta x)^2$, nos queda

$$\begin{aligned}
 T \frac{1}{2\delta x} \int_{\bar{x}_1 - \delta x}^{\bar{x}_1 + \delta x} \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2 + \delta x) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2 - \delta x)}{2\delta x} dx_1 \\
 + T \frac{1}{2\delta x} \int_{\bar{x}_2 - \delta x}^{\bar{x}_2 + \delta x} \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1 + \delta x, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1 - \delta x, x_2)}{2\delta x} dx_2 \\
 + \frac{1}{4(\delta x)^2} \int_{C_{\bar{x}, \delta x}} f(x) dx = 0
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ahora la longitud de cada segmento en la que los cocientes diferenciales de las derivadas parciales $\partial u / \partial x_i$ son integrados es exactamente $2\delta x$, y el área del cuadrado es exactamente $4(\delta x)^2$. Podemos entonces, decir que todas las cantidades mas arriba son promedios sobre pequeños segmentos o cuadrados, aun mas cuando δx tienda a 0.[Le Dret and Lucquin, 2016]

Asumamos que u es de clase C^2 . Podemos escribir la expansión de Taylor-Lagrange en \bar{x} .

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\bar{x})(x_2 - \bar{x}_2) + r(x)$$

donde $r(x)/\|x - \bar{x}\| \rightarrow 0$ cuando $\|x - \bar{x}\| \rightarrow 0$. Por consiguiente

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2 + \delta x) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2 - \delta x)}{2\delta x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\bar{x}) + r_1(x_1, \delta x)$$

Donde $r_1(x_1, \delta x) \rightarrow 0$ cuando $\|x_1 - \bar{x}_1\| \leq \delta x$ y $\delta x \rightarrow 0$. Integrando con respecto a x_1 , podemos obtener

$$\frac{1}{2\delta x} \int_{\bar{x}_1 - \delta x}^{\bar{x}_1 + \delta x} \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2 + \delta x) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2 - \delta x)}{2\delta x} dx_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\bar{x}) + r_2(\delta x)$$

donde $r_2(\delta x) \rightarrow 0$ cuando $\delta x \rightarrow 0$

Tratamos las demas integrales en el contorno de la misma manera y obtenemos

$$\frac{1}{2\delta x} \int_{\bar{x}_2 - \delta x}^{\bar{x}_2 + \delta x} \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1 + \delta x, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1 - \delta x, x_2)}{2\delta x} dx_2 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\bar{x})$$

cuando $\delta x \rightarrow 0$. Finalmente, asumiendo que f es continua, tenemos

$$\frac{1}{4(\delta x)^2} \int_{C_{\bar{x}, \delta x}} f(x) dx \rightarrow f(\bar{x})$$

cuando $\delta x \rightarrow 0$. Puesto que el lado izquierdo es el promedio de f sobre el cuadrado.

Se ha obtenido entonces en el limite $\delta x \rightarrow 0$

$$\forall \in \Omega, \quad \Delta u(\bar{x}) = \frac{1}{T} f(\bar{x}) \quad (3.5)$$

El operador diferencial $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ es llamado *Laplaciano* u *Operador de Laplace*. La ecuación 3.5 es llamada la *Ecuación de la Membrana Elástica*. Esta es una ecuación de segundo orden puesto que involucra derivadas de segundo orden, el orden de la ecuación diferencial sera el orden de la derivada mas alta que aparece en la ecuación. La ecuación deberá

ser naturalmente complementada por las condiciones de contorno, tales como las condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas (Ecuación 3.1).[Le Dret and Lucquin, 2016]

3.2 Solución de la Ecuación Diferencial Parcial(Ecuacion de Poisson)

Dada la ecuación diferencial parcial:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y); (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u(x,y) = 0; (x,y) \in \partial\Omega = \Gamma \end{cases} \quad (3.6)$$

equivalentemente

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y); (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u(x,y) = 0; (x,y) \in \partial\Omega = \Gamma \end{cases} \quad (3.7)$$

Se toma la función

$$f(x,y) = 2\pi^2 \sin \pi x \cos \pi y \quad (3.8)$$

que satisface las condiciones de contorno

$$u(x,y) = 0; (x,y) \in \partial\Omega = \Gamma$$

Solución

Pasos:

1. Se deduce la formulación variacional al problema dado.

Sea: $U = \{u/u \in H^1, u = \tilde{u} \text{ en } \Gamma_u\}$

Tomando una función: $U_0 = \{v/v \in H^1, v = 0 \text{ en } \Gamma_u\}$ que cumple las condiciones de Dirichlet homogénea ($v = 0 \text{ en } \Gamma_u$) y multiplicando por v a la ecuación parcial e

integramos sobre Ω , se tiene:

$$-\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = \iint_{\Omega} f(x,y) v dx dy$$

Por la primera identidad de Green:

$$-\iint_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = \iint_{\Omega} f(x,y) v dx dy$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ y n es el vector normal exterior al contorno Ω . Como $v = 0$ en Γ_D y $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en Γ_N se obtiene:

$$\iint_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy = - \iint_{\Omega} f(x,y) v dx dy$$

donde:

$$a(u,v) = \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy$$

$$l(v) = \iint_{\Omega} f(x,y) v dx dy$$

2. Se toma el espacio de funciones de aproximación

$$V_h = \{N_i \in C(\bar{\Omega}) : N_i(x,y) = a_i^e + b_i^e x + c_i^e y, i = 1, \dots, n\}$$

3. Se discretiza el dominio tomando el elemento triangular para cada nodal, en este caso tomaremos para $n = 5$ como lo muestra la figura 3.5

Para ello se toma las ecuaciones:

$$N_i^e(x,y) = \begin{cases} N_1^e(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ N_2^e(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ N_3^e(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{cases}$$

Donde se obtiene la matriz de rigidez y el vector global de fuerzas para cada elemento e .

$$[K^e] = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$[F^e] = \int_{\Omega^e} \begin{Bmatrix} N_1^e(x,y) \\ N_2^e(x,y) \\ N_3^e(x,y) \end{Bmatrix} 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y d\Omega \quad (3.10)$$

$$F_1^e = \int_{\Omega^e} N_1(x,y) 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y dy dx$$

$$F_2^e = \int_{\Omega^e} N_2(x,y) 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y dy dx$$

$$F_3^e = \int_{\Omega^e} N_3(x,y) 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y dy dx$$

4. Construcción de la matriz de rigidez K^e y del vector global de cargas F^e , tomando cuatro elementos.

Elemento 1:

$$[K^1] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & 0 & k_{13}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & 0 & k_{33}^1 & k_{32}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & 0 & k_{23}^1 & k_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[F^1] = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ 0 \\ F_3^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$[K^2] = \begin{bmatrix} k_{33}^2 & k_{32}^2 & k_{31}^2 & 0 & 0 \\ k_{23}^2 & k_{22}^2 & k_{21}^2 & 0 & 0 \\ k_{13}^2 & k_{12}^2 & k_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[F^2] = \begin{bmatrix} F_3^2 \\ F_2^2 \\ F_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 3:

$$[K^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{21}^3 \\ 0 & 0 & k_{32}^3 & k_{33}^3 & k_{31}^3 \\ 0 & 0 & k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{11}^3 \end{bmatrix}$$

$$[F^3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_2^3 \\ F_3^3 \\ F_1^3 \end{bmatrix}$$

Elemento 4:

$$[K^4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^4 & k_{12}^4 & 0 & k_{13}^4 \\ 0 & k_{21}^4 & k_{22}^4 & 0 & k_{23}^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{31}^4 & k_{32}^4 & 0 & k_{33}^4 \end{bmatrix}$$

$$[F^4] = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^4 \\ 0 \\ F_2^4 \\ F_3^4 \end{bmatrix}$$

- 5.** Se ensambla la matriz de rigidez y el vector global de cargas: Como tenemos cinco nodales la matriz de rigidez es de orden 5x5 y la matriz vector global de cargas es de

orden 5x1:

$$[K] = K^1 + K^2 + K^3 + K^4$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 + k_{33}^2 & k_{32}^2 & k_{13}^1 + k_{31}^2 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{23}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^4 & k_{21}^2 + k_{12}^4 & 0 & k_{13}^4 \\ k_{31}^1 + k_{13}^2 & k_{12}^2 + k_{21}^4 & k_{33}^1 + k_{11}^2 + k_{22}^3 + k_{22}^4 & k_{32}^1 + k_{23}^3 & k_{21}^3 + k_{23}^4 \\ k_{21}^1 & 0 & k_{23}^1 + k_{32}^3 & k_{22}^1 + k_{33}^3 & k_{31}^3 \\ 0 & k_{31}^4 & k_{12}^3 + k_{32}^4 & k_{13}^3 & k_{11}^3 + k_{33}^4 \end{bmatrix}$$

$$[F] = F^1 + F^2 + F^3 + F^4$$

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1^1 + F_3^2 \\ F_2^2 + F_1^4 \\ F_3^1 + F_1^2 + F_2^3 + F_2^4 \\ F_2^1 + F_3^3 \\ F_1^3 + F_3^4 \end{bmatrix}$$

6. Se utiliza la transformación de la región para que el calculo de la matriz rigidez y la matriz carga.

3.3 Solución Numérica

3.3.1 Solución para 5 vértices y 4 triángulos

En la figura 3.5 se muestra el mallado realizado para 04 triángulos, ahí mismo se observa como se ha numerado los vértices y también como se ha considerado los diferentes

elementos.

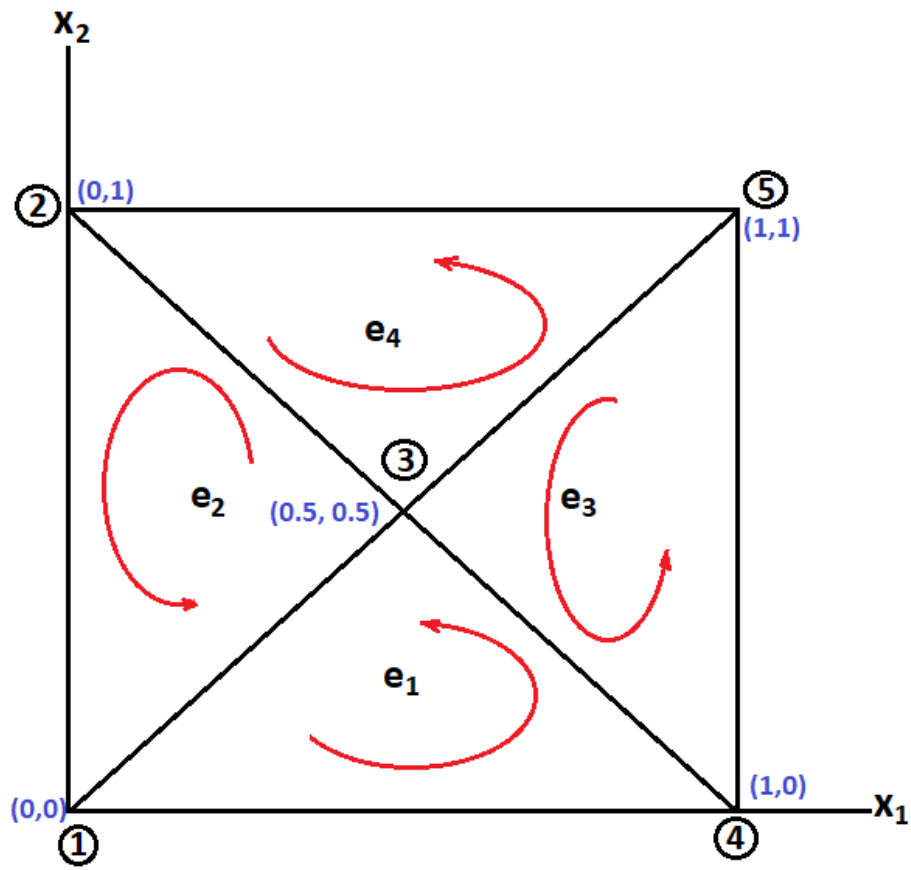


Figura 3.5 Mallado del dominio con 4 triángulos.

La solución numérica requiere que tengamos la información de los vértices y la forma que se recorrería los mismos, entonces en la figura 3.6 se observa las matrices generadas en la parte derecha tenemos a \mathbf{p} que es una matriz (5,2) y tiene las coordenadas de los 05 vértices y la matriz \mathbf{t} de orden (4,3), que tiene la información de como se recorrerá los vértices para cada elemento o triángulos en este caso.

```

p =
      0      0
      0  1.0000
  0.5000  0.5015
  1.0000      0
  1.0000  1.0000

t =
      1      4      3
      3      2      1
      5      3      4
      2      3      5

```

Figura 3.6 Información de matriz de coordenadas de vértices y vertices de elementos triangulares.

La primera fila de **t** indica, por ejemplo, que el primer elemento esta conformado por el triangulo con vértices 1, 4, y 3 (Ver figura 3.5) que es justamente el elemento **e1**. Un punto importante a notar es que debido a las condiciones de contorno, la solución será cero, excepto para el punto interior. Esto lo indicamos mediante una matriz **ind**, que sera uno solamente en los puntos interiores (es decir, diferente de cero. En este caso es en el vértice **3**). Ademas la función de densidad de fuerza también es evaluada en todos los vértices, pero al aplicar las condiciones de contorno solo se evalúa en los puntos interiores, donde es diferente de cero. Esta salida se muestra en la figura 3.7

```

>> [ind'; ff]
ans =
      0      0  1.0000      0      0
      0      0 19.7390      0  0.0000

```

Figura 3.7 Información nodos interiores y evaluación de densidad de fuerza en punto interior.

Ahora deberemos determinar la contribución de cada elemento a los nodos interiores, para esto es necesario recorrer cada elemento con la información de coordenadas en **p** y la información de los vértices que forman el elemento en **t**(Ver figura 3.6). Esto se realiza mediante un lazo que se repetirá 4 veces, recorriendo lo elementos desde **e1** al **e4**, como sigue:

1. Para elemento **e1**

- a) Se recuperan las coordenadas de los vértices: En la figura 3.8 vemos que los vértices son **1, 4 y 3** y solo el vértice **3** es diferente de 0.

```
>> [[j k l]' [vj vk vl]']
ans =
     1     0
     4     0
     3     1
```

Figura 3.8 Información de coordenadas y vértices de elemento **e1**.

- b) Se determina el jacobiano de la transformación al triangulo de referencia(Ver figura 3.9)

```
>> J
J =
     1.0000     0.5000
           0     0.5015
```

Figura 3.9 Jacobiano de la transformación.

- c) Luego se determina el valor de la contribución a la matriz de rigidez de elementos de los vértices y/o combinación de vértices que sean diferentes de cero (en este caso solo la contribución del elemento **e1** al vértice 3, que es diferente de cero). El resultado se muestra en la figura 3.10

```
A =
      (1,1)      0.9970
>> b
b =
      0.8249
```

Figura 3.10 Contribución del elemento **e1** a la matriz de rigidez A y a la matriz de fuerza.

2. Para el elemento **e2**

- a) Se recuperan las coordenadas de los vértices: En la figura 3.11 vemos que los vértices son **3, 2 y 1** y solo el vértice **3** es diferente de 0.

```
>> [[j k l]' [vj vk vl]']
ans =
     3     1
     2     0
     1     0
```

Figura 3.11 Información de coordenadas y vértices de elemento **e2**.

- b) Se determina el jacobiano de la transformación al triangulo de referencia(Ver figura 3.12)

```
>> J
J =
    -0.5000    -0.5000
     0.4985    -0.5015
```

Figura 3.12 Jacobiano de la transformación.

- c) Luego se determina el valor de la contribución a la matriz de rigidez de elementos de los vértices y/o combinación de vértices que sean diferentes de cero (en este caso solo la contribución del elemento **e2** al vértice 3, que es diferente de cero). El resultado se muestra en la figura 3.13. Acá es importante indicar que esta contribución debe sumarse a la hallada para el elemento **e1**

<pre>A1 = (1,1) 1 >> b1 b1 = 0.8225</pre>		<pre>A = (1,1) 2 >> b b = 1.6449</pre>
--	--	---

Figura 3.13 Contribución del elemento **e2** a la matriz de rigidez A y a la matriz de fuerza.

3. Para el elemento **e3**

- a) Se recuperan las coordenadas de los vértices: En la figura 3.14 vemos que los vértices son **3, 2 y 1** y solo el vértice **3** es diferente de 0.

```
>> [[j k l]' [vj vk vl]']
ans =
     5     0
     3     1
     4     0
```

Figura 3.14 Información de coordenadas y vértices de elemento **e3**.

- b) Se determina el jacobiano de la transformación al triangulo de referencia(Ver figura 3.15)

```
>> J
J =
    -0.5000         0
    -0.4985    -1.0000
```

Figura 3.15 Jacobiano de la transformación.

- c) Luego se determina el valor de la contribución a la matriz de rigidez de elementos de los vértices y/o combinación de vértices que sean diferentes de cero (en este caso solo la contribución del elemento **e3** al vértice 3, que es diferente de cero). El resultado se muestra en la figura 3.16. Acá es importante indicar que esta contribución debe sumarse a la hallada para el elemento **e2**

<pre>A = (1,1) 1.9970 >> b b = 1.6474</pre>	<pre>A3 = (1,1) 2.9970 >> b3 b3 = 2.4699</pre>
--	---

Figura 3.16 Contribución del elemento **e3** a la matriz de rigidez A y a la matriz de fuerza.

4. Para el elemento **e4**

- a) Se recuperan las coordenadas de los vértices: En la figura 3.17 vemos que los vértices son **2, 3 y 5** y solo el vértice **3** es diferente de 0.

```
>> [[j k l]' [vj vk vl]']
ans =
     2     0
     3     1
     5     0
```

Figura 3.17 Información de coordenadas y vértices de elemento **e3**.

- b) Se determina el jacobiano de la transformación al triangulo de referencia(Ver figura 3.18)

```
>> J
J =
     0.5000     1.0000
    -0.4985         0
```

Figura 3.18 Jacobiano de la transformación.

- c) Luego se determina el valor de la contribución a la matriz de rigidez de elementos de los vértices y/o combinación de vértices que sean diferentes de cero (en este caso solo la contribución del elemento **e3** al vértice 3, que es diferente de cero). El resultado se muestra en la figura 3.19. Acá es importante indicar que esta contribución debe sumarse a la hallada para el elemento **e3**

<pre>A3 = (1,1) 2.9970 >> b3 b3 = 2.4699</pre>	<pre>A = (1,1) 4.0000 >> b b = 3.2898</pre>
---	--

Figura 3.19 Contribución del elemento **e3** a la matriz de rigidez A y a la matriz de fuerza.

5. Finalmente se obtiene el resultado mostrado en la figura 3.20, donde se observa el valor de A y b, ademas de la solución de la ecuación lineal que permite hallar u_h , donde claramente se observa que se ha resuelto para los 05 vértices en cuatro de los cuales es cero debido a las condiciones de contorno. Podemos entonces ahora graficar

el resultado de la solución numérica de la ecuación para este mallado y observar la deformación de la membrana, en este caso(Ver figura 3.21)

<pre>>> A A = (1, 1) 4.0000 >> b b = 3.2898</pre>	<pre>>> uh uh = 0 0 0.8225 0 0</pre>
--	--

Figura 3.20 Valor de A, b y u_h para un mallado de 5 vértices y 4 triángulos.

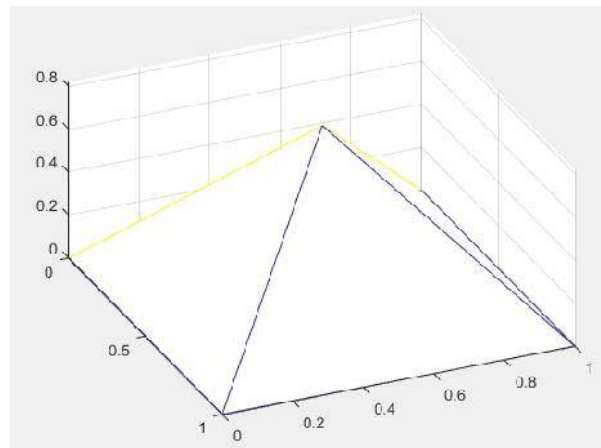


Figura 3.21 Gráfica de Solución Numérica para un mallado de 5 vértices y 4 triángulos .

3.3.2 Solución para 10 vértices y 10 triángulos

Se muestra la figura 3.22 para este caso, con los vértices y elementos triangulares y la forma de recorrerlos, además en la figura 3.23 están las coordenadas de los vértices y la combinación de vértices para cada elemento.

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.3.1 se determina los valores de la matriz de rigidez A y de la densidad de fuerza b y se halla la solución u_h , como se ve en la figura 3.24, en este caso solo existen dos nodos interiores para los cuales existe solución diferente de cero (los vértices 4 y 7 en la figura 3.22).

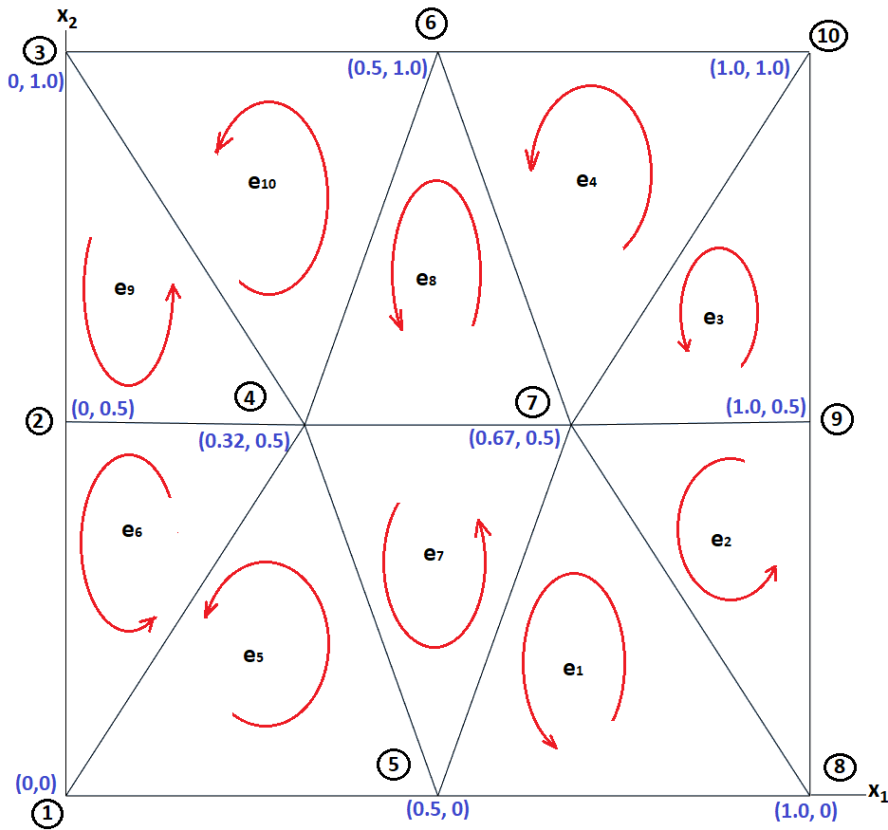


Figura 3.22 Mallado del dominio con 10 triángulos.

>> p			>> t		
p =			t =		
0	0		8	7	5
0	0.5028		9	7	8
0	1.0000		9	10	7
0.3210	0.4985		7	10	6
0.5000	0		1	5	4
0.5000	1.0000		4	2	1
0.6790	0.4985		4	5	7
1.0000	0		7	6	4
1.0000	0.5028		3	2	4
1.0000	1.0000		4	6	3

Figura 3.23 Información de coordenadas y vértices de elementos.

Finalmente podemos también graficar el resultado de la solución numérica de la ecuación para este mallado y observar la deformación de la membrana. (Ver figura 3.25)


```

>> A
A =
    (1,1)    4.1333
    (2,1)   -1.2175
    (1,2)   -1.2175
    (2,2)    4.1333
>> b
b =
    1.8898
    1.8898
uh =
    0
    0
    0
    0.6481
    0
    0
    0.6481
    0
    0
    0

```

Figura 3.24 Valor de A , b y u_h para un mallado de 10 vértices y 10 triángulos.

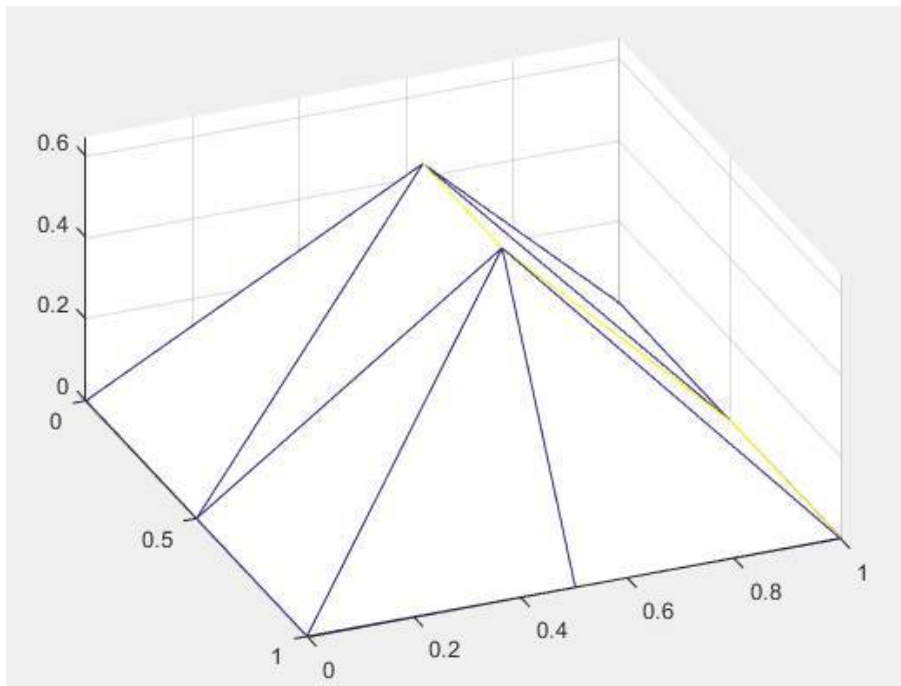


Figura 3.25 Gráfica de Solución Numérica para un mallado de 10 vértices y 10 triángulos .

3.4 Gráfica de la Solución Numérica para mayor cantidad de triángulos

Sea

$$\Omega =]0,1[\times]0,1[$$

y

$$f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

Trataremos de determinar la solución numérica de ecuación 3.5, que reproducimos para mayor claridad.

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

Podemos observar que Ω es un cuadrado de $]0,1[\times]0,1[$ y la función f , la fuerza en este caso, depende de las variables independientes x y y ; particularmente esta fuerza toma el valor 0 cuando $x = 0$ y también cuando $y = 0$, además si $x = 1$ o $y = 1$ la fuerza toma de nuevo el valor 0, lo que significa que la fuerza se aplica solo al interior del cuadrado. Nuestra preocupación es determinar la forma que toma la membrana bajo la acción de la fuerza.[Baker, 2012]

Se ha demostrado que esta ecuación tiene una solución única, además que modela una membrana elástica, lo que haremos en lo que sigue será determinar una aproximación numérica usando programas y obviamente computadoras.

3.4.1 Desarrollando una malla en el dominio

Se desarrolla el mallado del dominio[Agbezuge, 2006] Ω con triángulos. En las figuras 3.26, 3.27, se muestra el resultado de obtener la triangulación de Ω para diferentes resoluciones.[Persson and Strang, 2004]

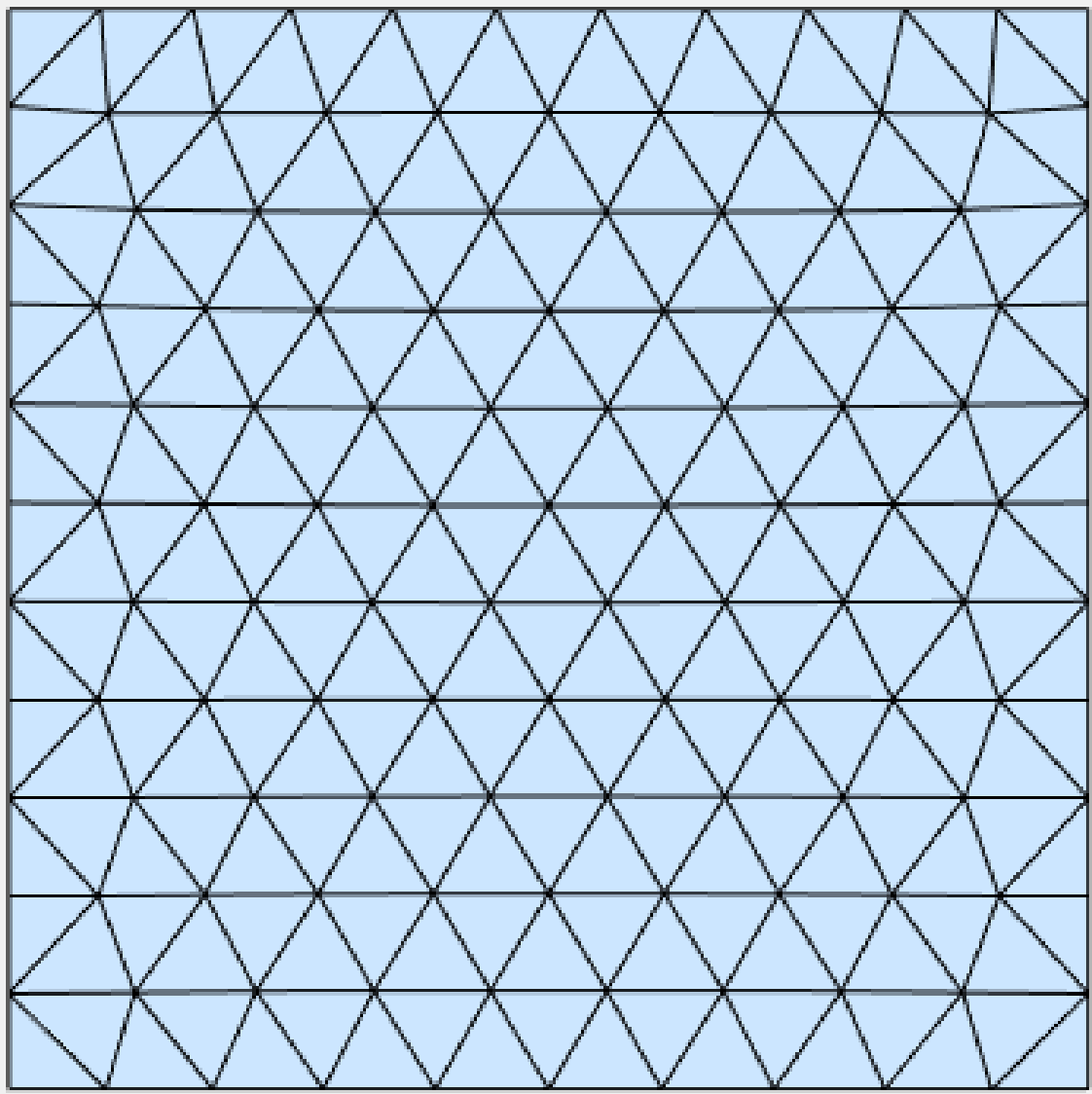


Figura 3.26 Mallado del dominio con triángulos 21x21..

Con mas triángulos, la exactitud de la solución sera mejor, pero el tiempo de cálculo y la memoria necesaria se incrementa rápidamente. En la figura 3.28 se puede observar como se incrementa el tiempo de calculo de la malla(mallado), a medida que se incrementa el número de triángulos considerados.

3.4.2 Determinando la solución aproximada

Se utiliza una función, que soluciona la ecuación 3.5, usando el mallado determinando en la sección anterior. Acá de nuevo podemos observar en las figuras 3.29, 3.30, 3.31,

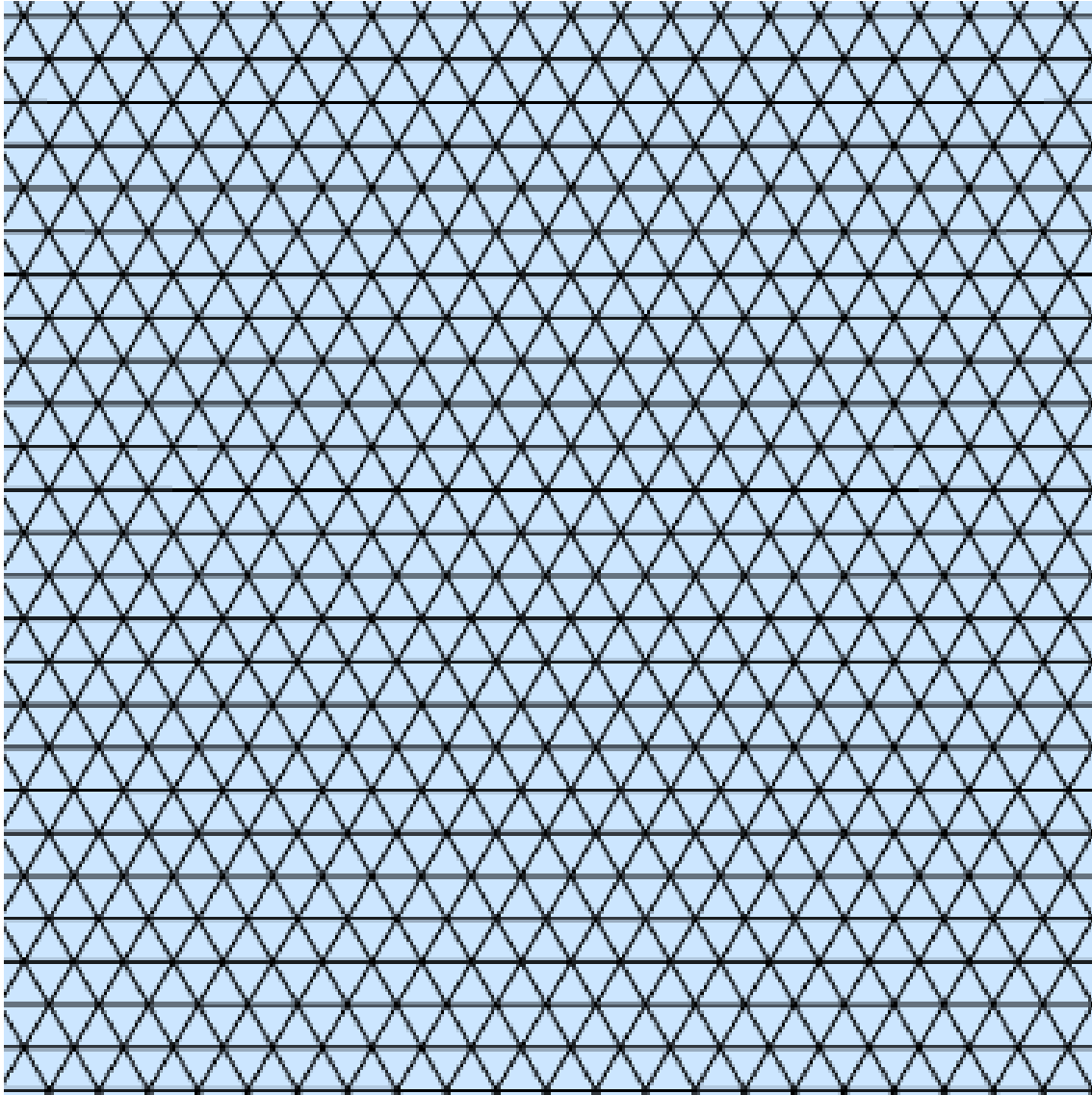


Figura 3.27 Mallado del dominio con triángulos 100x100.

3.32, la solución aproximada con diferentes cantidades de triángulos en el mallado, se ve claramente como la solución es mejor definida y se parece a la solución exacta que se ha calculado para esta ecuación y que se muestra en la figura 3.33, posiblemente no se puede notar ninguna diferencia, y es que el error realmente es pequeño como veremos posteriormente.[Kwon and Bang, 2000]

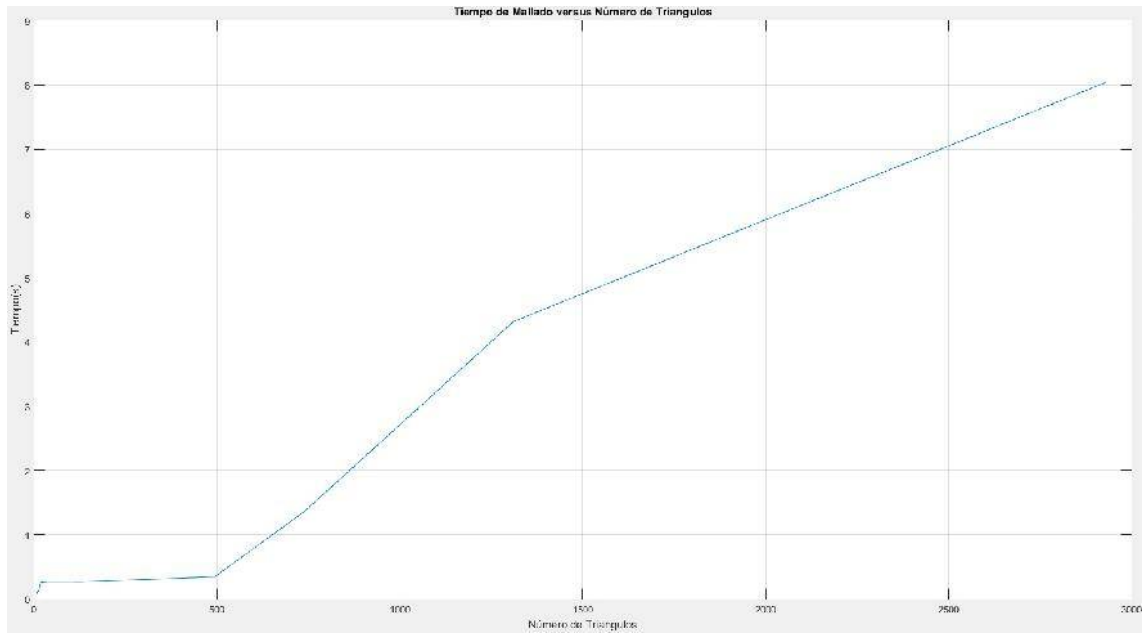


Figura 3.28 A mayor cantidad de triángulos mayor es el tiempo.

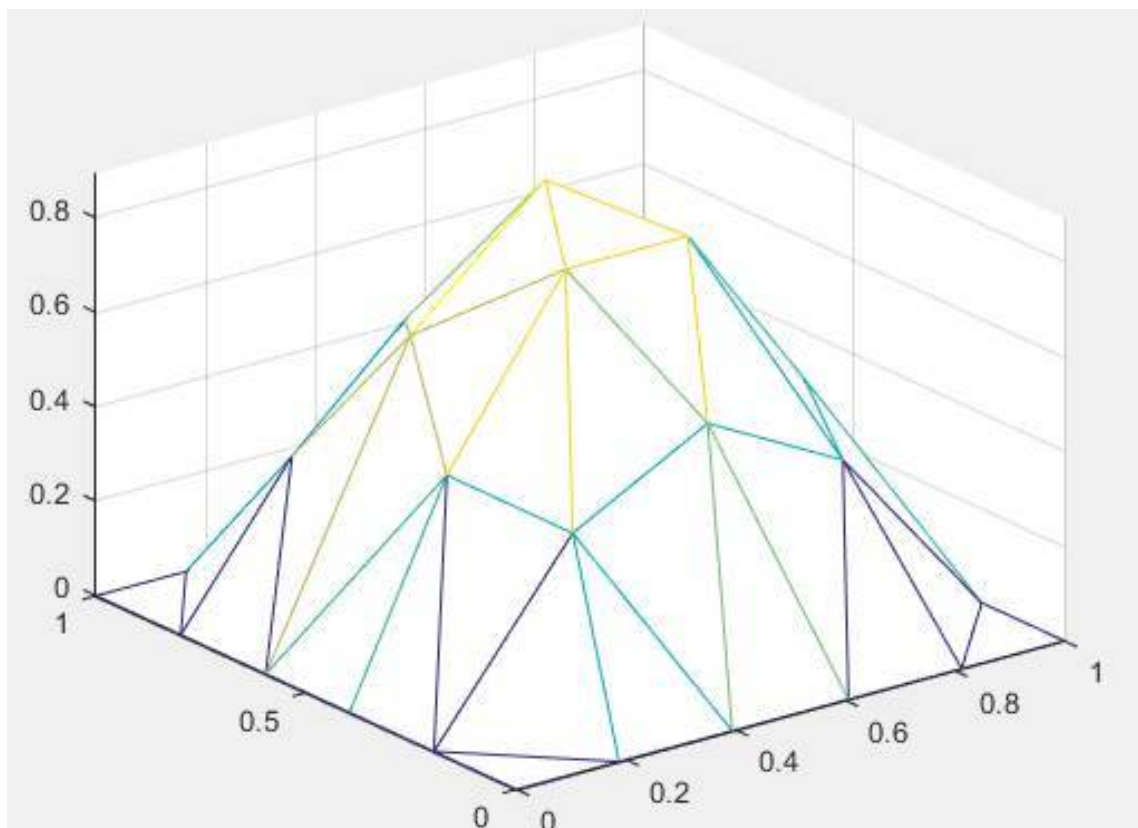


Figura 3.29 Solución Aproximada con solo 35 triángulos en el mallado.

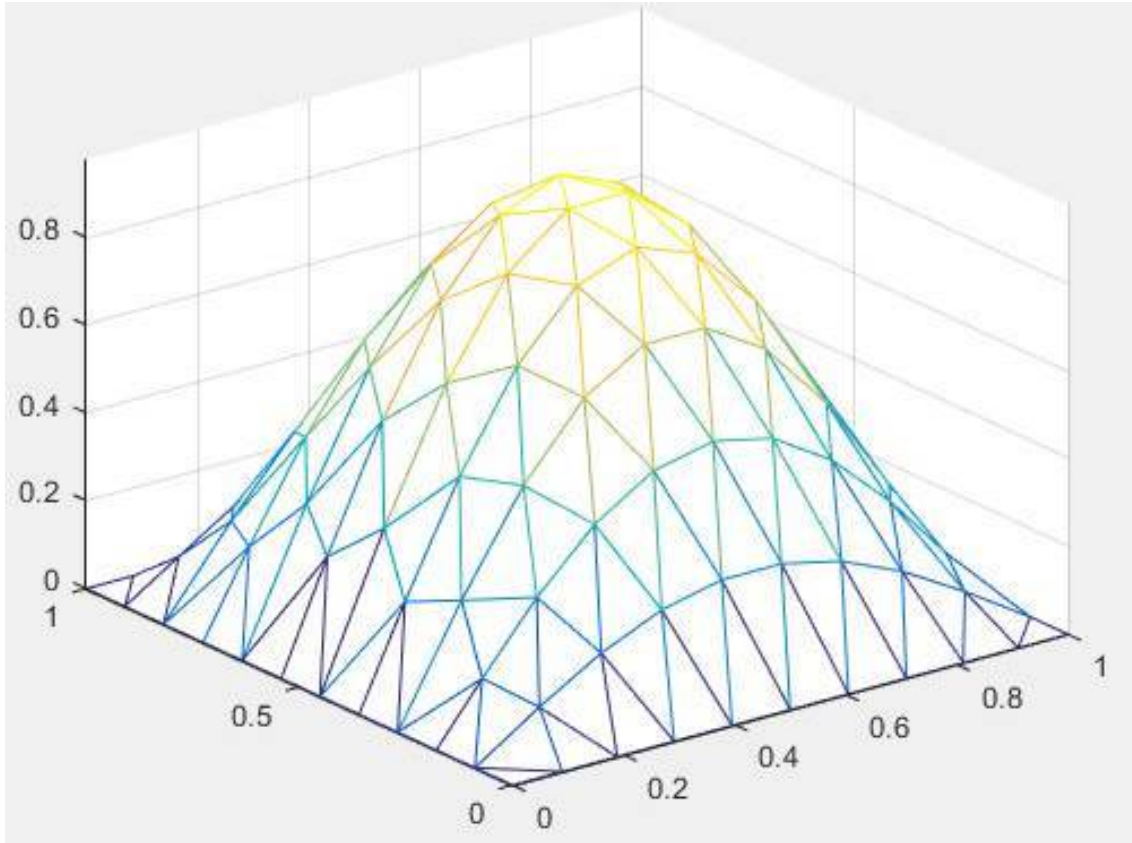


Figura 3.30 Solución Aproximada con 128 triángulos en el mallado.

3.4.3 Estimación del error

Se ha estimado el error cuadrático medio, definido por

$$\sum_{i=1}^N \|u_{exacta}^N - u_{aprox}^N\|^2$$

Donde N es la cantidad de punto donde ambas soluciones son evaluadas.

La figura 3.34 se puede observar como el error disminuye a medida que se incrementa el número de triángulos, así para 128 triángulos se tiene un error de 0.006, con 494 triángulos el error es de 0.001, con 7489 triángulos el error a caído ya 7.17^{-5} e incluso con 46318 triángulos el error es 1.11^{-5} (resultado que no se muestra), lo que indica la tendencia a la reducción del error con el aumento del número de triángulos.

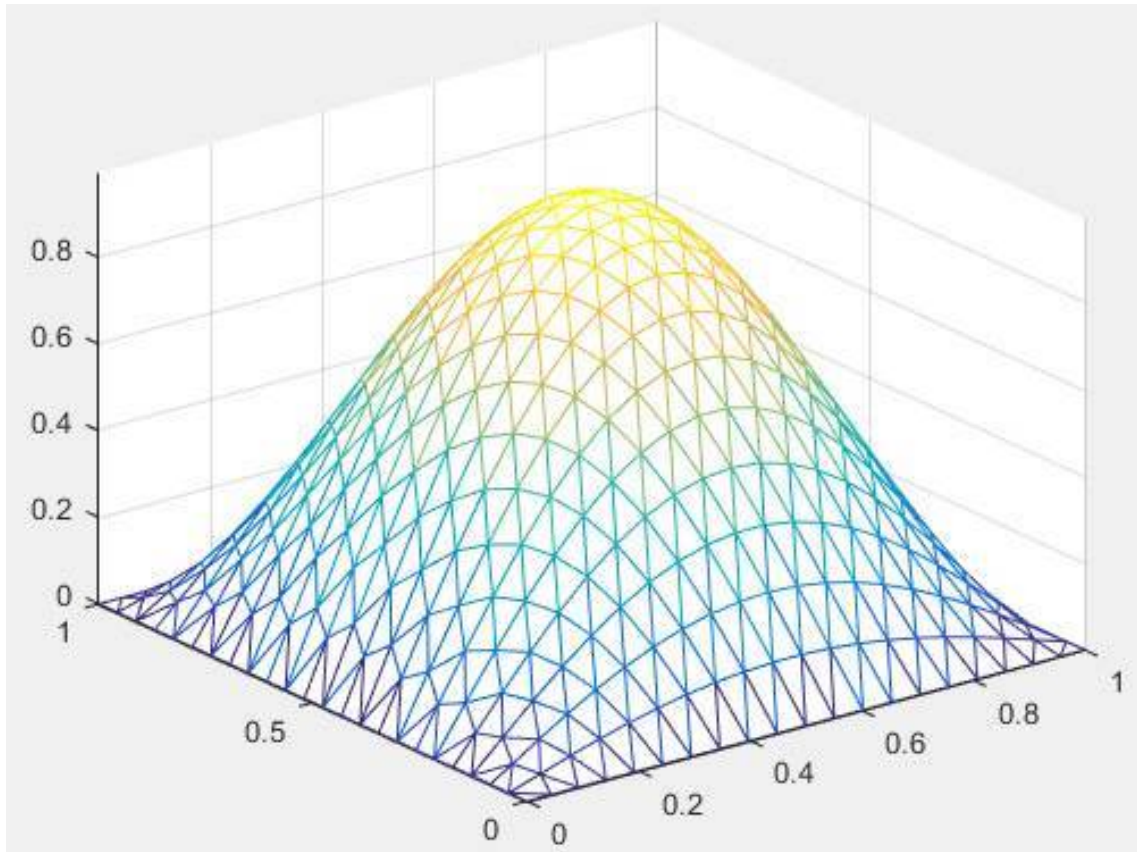


Figura 3.31 Solución Aproximada con 494 triángulos en el mallado.

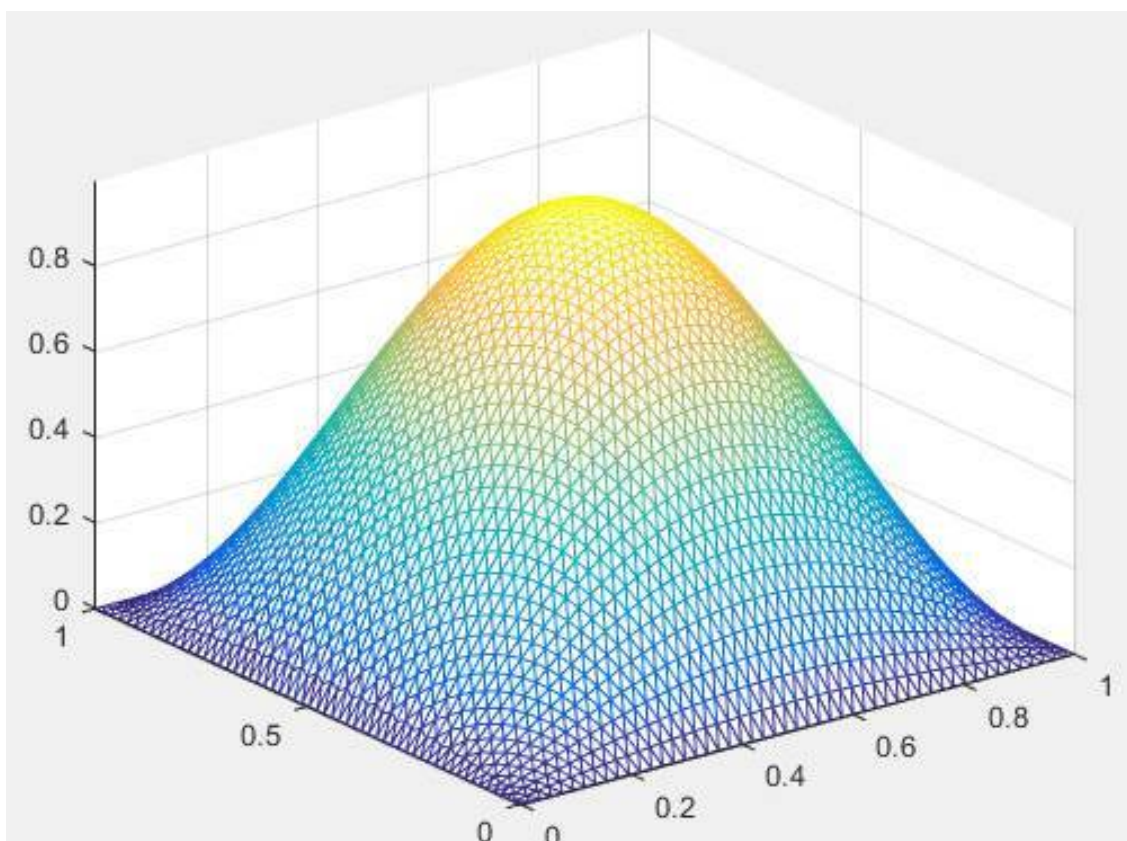


Figura 3.32 Solución Aproximada con 2931 triángulos en el mallado.

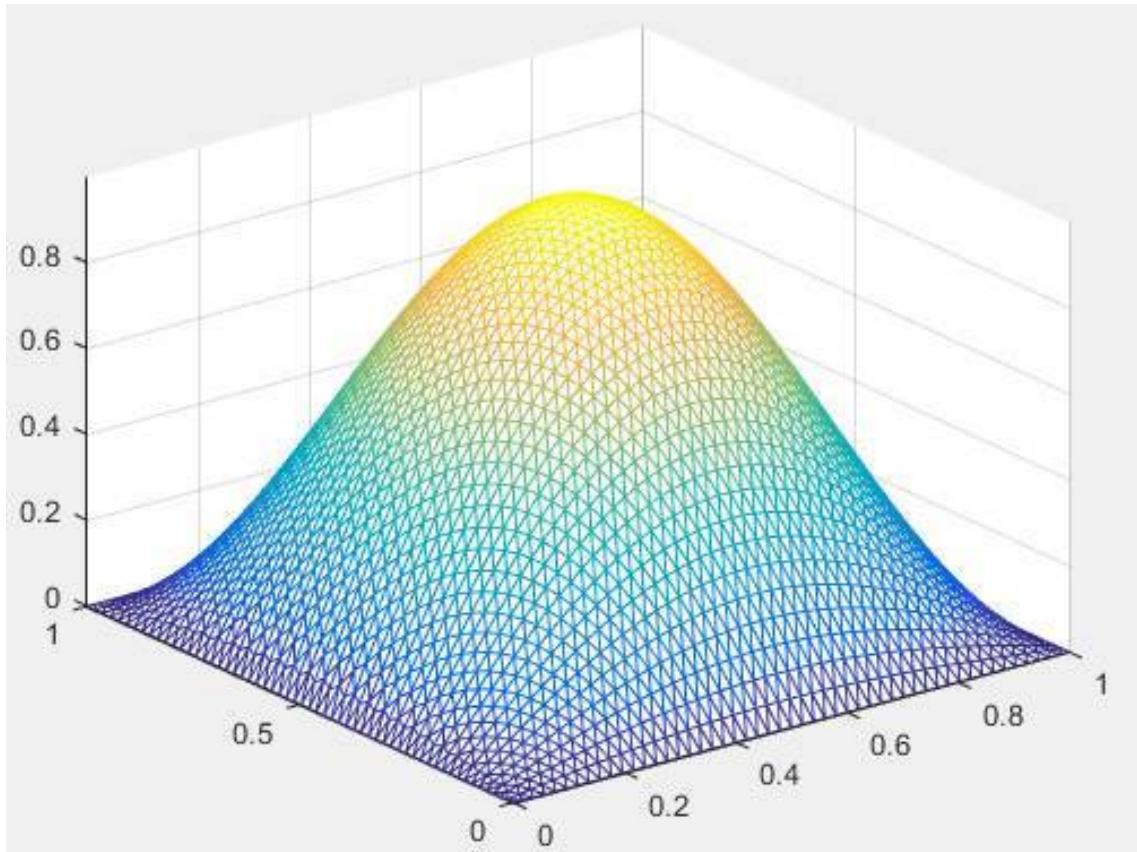


Figura 3.33 Solución exacta, determinada en el mismo dominio de la solución aproximada.

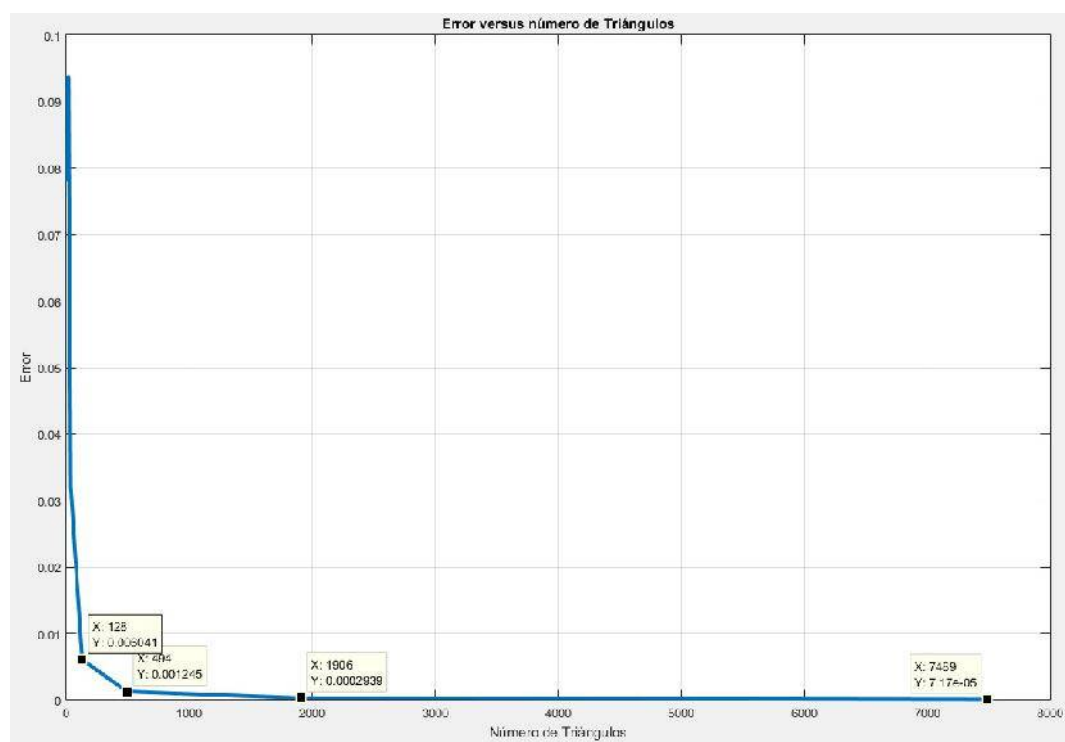


Figura 3.34 Error versus número de triángulos.

Conclusiones

1. El uso del análisis funcional determina la existencia y unicidad de la ecuación de Poisson utilizando el método variacional.
2. Los elementos finitos, tomando las funciones bases adecuadas, han permitido encontrar un sistema lineal de ecuaciones dadas por la matriz rigidez y las funciones cargas, lo que ha permitido encontrar la solución aproximada de la ecuación diferencial parcial.
3. El uso del programa computacional Mathlab, permite visualizar la membrana, junto con cantidades de puntos y triángulos que se divide el mallado, además da a conocer la mejor solución aproximada.
4. El programa computacional, permite comprobar inicialmente los resultados obtenidos manualmente y además garantizar la solución en sistemas más amplios.

Recomendaciones

1. Se recomienda dar a conocer a los estudiantes de Ciencias e Ingeniería sobre los temas tratados en la presente tesis, de tal forma que les sirva para reforzar sus conocimientos respecto a los temas de referencia.
2. Ampliar estos conocimientos y que sirvan de base para hallar la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.
3. Utilizar programas computacionales simbólicos para comprobar los resultados hallados manualmente, para después utilizarlos en la solución de problemas más amplios y complejos.

Apéndice A

Código de Simulación

Código A.1 Desarrollando una malla en el dominio Ω .

```
fd=inline('drectangle(p,0,1,0,1)','p');  
%Define el Omega o el area de la membrana  
%Este código permite obtener el tiempo de ejecución del  
%mallado  
lado=[1 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0.05 0.025 0.0125 0.005];  
%Este es el tamaño de los lados  
tri=zeros(size(lado)); %Vector donde se almacene el nro de  
triangulos  
tiempo=zeros(size(lado));%Vector donde se almacena los tiempos de  
ejecución  
for i=1:length(lado)  
tic %indica el inicio  
[p,t]=distmesh2d(fd,@huniform,lado(i),[0,0;1,1],[0,0; 0,1;  
1,0;1,1]);  
%Se realiza el mallado
```

```

tiempo(i)=toc; %Se almacena el tiempo que tomo este calculo
tri(i)=size(p,1);%Se almacena el número de triangulos obtenidos
clear p,t; %Se realiza esto para iniciar desde cero cada lazo
end
plot(tri,tiempo) %Se grafica el tiempo versus número de triangulos

```

Código A.2 Determinación de la Solución y Cálculo de Error.

```

lado=[0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0.05 0.025 0.0125 0.005];
%Tamaño de los lados
error2T=zeros(size(lado)); %Vector que almacena el error
tri=zeros(size(lado)); %Vector que almacena número de triangulos
for i=1:length(lado)
[p,t]=distmesh2d(fd,@huniform,lado(i),[0,0;1,1],[0,0; 0,1;
    1,0;1,1]);
[uh,in]=poissonv2(f,fd,0.1,p,t);
exacta=sin(pi*p(:,1)).*sin(pi*p(:,2));
error2T(i)=sum([abs(uh-exacta)].^2);%*(1/(2*length(p)));
tri(i)=size(p,1);
end

plot(tri,error2T) %Se grafica el error versus número de triangulos

```


Índice de Figuras

2.1.	Elemento Triangular Lineal	22
2.2.	Transformación de T a R	32
3.1.	Deformación conseguida en la Refrigeradora	38
3.2.	Deformación conseguida mediante calentamiento del aire de recipiente metálico	38
3.3.	Membrana Elástica	40
3.4.	Ampliación de un pequeño cuadrado de la membrana. Se muestran algunos vectores normales.	41
3.5.	Mallado del dominio con 4 triángulos	51
3.6.	Información de matriz de coordenadas de vértices y vertices de elementos triangulares	52
3.7.	Información nodos interiores y evaluación de densidad de fuerza en punto interior	52
3.8.	Información de coordenadas y vértices de elemento e1	53
3.9.	Jacobiano de la transformación	53
3.10.	Contribución del elemento e1 a la matriz de rigidez A y a la matriz de fuerza	53
3.11.	Información de coordenadas y vértices de elemento e2	54
3.12.	Jacobiano de la transformación	54
3.13.	Contribución del elemento e2 a la matriz de rigidez A y a la matriz de fuerza	54
3.14.	Información de coordenadas y vértices de elemento e3	55
3.15.	Jacobiano de la transformación	55
3.16.	Contribución del elemento e3 a la matriz de rigidez A y a la matriz de fuerza	55

3.17.	Información de coordenadas y vértices de elemento e3	56
3.18.	Jacobiano de la transformación	56
3.19.	Contribución del elemento e3 a la matriz de rigidez A y a la matriz de fuerza	56
3.20.	Valor de A, b y u_h para un mallado de 5 vértices y 4 triángulos	57
3.21.	Gráfica de Solución Numérica para un mallado de 5 vértices y 4 triángulos	57
3.22.	Mallado del dominio con 10 triángulos	58
3.23.	Información de coordenadas y vértices de elementos	58
3.24.	Valor de A, b y u_h para un mallado de 10 vértices y 10 triángulos	59
3.25.	Gráfica de Solución Numérica para un mallado de 10 vértices y 10 triángulos	59
3.26.	Mallado del dominio con triángulos 21x21.	61
3.27.	Mallado del dominio con triángulos 100x100	62
3.28.	A mayor cantidad de triángulos mayor es el tiempo	63
3.29.	Solución Aproximada con solo 35 triángulos en el mallado	63
3.30.	Solución Aproximada con 128 triángulos en el mallado	64
3.31.	Solución Aproximada con 494 triángulos en el mallado	65
3.32.	Solución Aproximada con 2931 triángulos en el mallado	66
3.33.	Solución exacta, determinada en el mismo dominio de la solución aproximada	67
3.34.	Error versus número de triángulos	68

Índice de Tablas

2.1.	Comparación de soluciones de la ecuación 2.14 en $x = 0.5$	17
------	--	----

Bibliografía

- [Agbezuge, 2006] Agbezuge, L. (2006). Finite element solution of the poisson equation with dirichlet boundary conditions in a rectangular domain. *no. c.*
- [Baker, 2012] Baker, A. J. (2012). *Finite Elements. Computational Engineering Sciences*. John Wiley y Sons Inc.
- [Brézis, 1984] Brézis, H. (1984). *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial.
- [Ciarlet, 1978] Ciarlet, P. (1978). The finite element method for elliptic problems, north-holland, amsterdam. *Finite difference cshemes for boundary value problems*, 57.
- [Daners., 2008] Daners., D. (2008). *Introducction to Functional Analysis*. The University of Sidney.
- [Erwin., 1978] Erwin., K. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley y Sons Inc.
- [Kwon and Bang, 2000] Kwon, Y. W. and Bang, H. (2000). *The finite element method using MATLAB*. CRC press.
- [Le Dret and Lucquin, 2016] Le Dret, H. and Lucquin, B. (2016). *Partial differential equations: modeling, analysis and numerical approximation*, volume 168. Springer.

[Persson and Strang, 2004] Persson, P.-O. and Strang, G. (2004). A simple mesh generator in matlab. *SIAM review*, 46(2):329–345.

[Rudin., 1973] Rudin., W. (1973). *Functional Analysis*. McGraw Hill Inc.