UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

ESCUELA DE POSTGRADO

Sección de Postgrado en Ciencias Físicas y Matemáticas

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY - DIRICHLET PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS EN UN DOMINIO CON FRONTERA LIBRE Y PUNTOS SINGULARES.

Tesis para optar el Grado Académico de:

MAESTRO EN MATEMÁTICA APLICADA

Autor : Br. EVER ROJAS HUAMÁN

Asesor : Dr. LUIS LARA ROMERO

Lambayeque - Perú

2013

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

ESCUELA DE POSTGRADO

Sección de Postgrado en Ciencias Físicas y Matemáticas

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY - DIRICHLET PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS EN UN DOMINIO CON FRONTERA LIBRE Y PUNTOS SINGULARES.

Tesis para optar el Grado Académico de:

MAESTRO EN MATEMÁTICA APLICADA

Autor : Br. EVER ROJAS HUAMÁN

Asesor : Dr. LUIS LARA ROMERO

Lambayeque - Perú

2013

Aspectos Informativos

1. **Titulo** : Existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy-Dirichlet para problemas parabólicos en un dominio con frontera libre y puntos singulares.

2. **Personal Investigador**

   2.1. **Autor:** Ever Rojas Huamán.

   2.2. **Asesor:** Luis Lara Romero.

3. **Tipo de investigación**

   3.1 De acuerdo a la orientación : Básica.

   3.2 De acuerdo a la técnica de contrastación : Descriptiva.

4. **Maestría con Mención en:** Matemática Aplicada.

5. **Localidad e Institución donde se desarrollará el Proyecto:**

   a. Localidad : Lambayeque - Lambayeque - Perú.

   b. Institución : Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

6. **Duración Estimada del Proyecto:** Un año.

7. **Fecha de Inicio:** Setiembre de 2008.

8. **Presentado por:**

AUTOR(FIRMA) ASESOR(FIRMA)

Jurado Calificador

Dr. Obidio Rubio Mercedes

Presidente

Dr. Jaime Collantes Santisteban

Secretario

Dr. Camilo Quintos Chuquicahua

Vocal

Dr. Luis Lara Romero

Asesor

Ever Rojas Huamán

e-mail: ever_ fmath2000@yahoo.es

Teléfono: 949-771332

Dedicatoria

A OCTAVIO E INA

mis padres,

a quienes les tengo gratitud y amor infinitos.

A ELIANA, ANGGIE Y NATALY

mi esposa e hijas.

con quienes comparto mi vida entera.

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a todos los profesores de la presente maestría, quienes supieron transmitir enseñanzas de inmenso valor que coadyuvaron al fortalecimiento de mis conocimientos en este camino fascinante e interminable del aprendizaje y el perfeccionamiento continuo; en especial a mi asesor y amigo Luis Lara Romero; lo mismo que al Dr. Obidio Rubio Mercedes, Dr. Jaime Collantes Santisteban y Dr. Camilo Quintos Chuquicahua, miembros de mi Jurado, por sus valiosas recomendaciones en el mejoramiento de la redacción del presente informe.

Índice general

Resumen

El presente trabajo de investigación intitulado: *Existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy-Dirichlet para problemas parabólicos en un dominio con frontera libre y puntos singulares*, tiene como propósito responder al problema de investigación: *¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes de existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy-Dirichlet para problemas parabólicos en un dominio con frontera libre y puntos singulares?*; a través de la hipótesis que los problemas parabólicos definidos en dominios con frontera móvil, bajo condiciones de regularidad, siempre poseen solución, y que, la unicidad de la solución se garantiza, exigiendo cierto grado de aproximación de la tangente horizontal con la curva del contorno del dominio en los puntos singulares de contacto o garantizando la condición de Lipschitz en una vecindad del punto singular.

Para este tipo de problemas, son conocidos algunos resultados, que van desde el establecimiento de condiciones que garantizan la existencia y unicidad de la solución, el análisis de dependencia que tiene la solución ante las variaciones del contorno del dominio, etc. hasta la búsqueda de métodos eficientes de solución tanto analíticos como numéricos. Todos estos resultados, son conocidos para espacios funcionales específicos.

En el presente trabajo de investigación, se utilizó el tipo de investigación básico descriptivo, con una metodología de trabajo consistente en utilizar el Teorema de Lax Mi-

ligram en la demostración de la existencia de la solución débil de problemas parabólicos con condiciones tipo Dirichlet sobre la frontera libre y puntos singulares, en un espacio de Sóbolev previamente definido. Con respecto a la unicidad, ésta fue probada de manera clásica, buscando una solución idénticamente nula de la ecuación homogénea correspondiente de tipo parabólico, con la particularidad de considerar primeramente subdominios que no contienen puntos singulares, y luego utilizando propiedades de continuidad, tomar límites y abarcar subdominios que contienen en su frontera puntos singulares.

Los resultados más importantes a los cuales se han llegado en esta investigación, fueron:

- Prueba, que la continuidad de las funciones que representan al contorno móvil del dominio, constituye una condición suficiente de existencia de la solución del problema de Cauchy-Dirichlet de tipo parabólico, en un dominio con frontera libre y puntos singulares, de un espacio de Sóbolev predefinido.

- Prueba, que las condiciones de Lipschitz constituyen condiciones suficientes, que deberán cumplir las curvas del contorno móvil del dominio en las vecindades de los puntos singulares, para garantizar la unicidad de la solución débil del problema de Cauchy-Dirichlet en problemas parabólicos definidos sobre un dominio con frontera libre y puntos singulares, de un espacio de Sóbolev predefinido.

- Comprobación, que en el espacio de Hilbert $L_2(Q)$, las condiciones de Lipschitz impuestas en las vecindades de los puntos singulares, no son suficientes para garantizar la unicidad de la solución del problema de Cauchy-Dirichlet de tipo parabólico sobre un dominio con frontera libre y puntos singulares.

Abstract

The present work of investigation entitled: *Existence and uniqueness of the solution of the Cauchy-Dirichlet problem for parabolic problems in one domain with free boundary and singular points*, has as intention answer to the problem of investigation: *What are the necessary and sufficient conditions of existence and uniqueness of the solution of the Cauchy-Dirichlet problem for parabolic problems in a domain with free boundary and singular points?*, across the hypothesis that for these problems, under conditions of regularity, always exists solution, and that, to guarantee the uniqueness has from him to demand certain degree of approximation of the tangent horizontal with the curve of the contour of the domain in the singular points of contact or to guarantee Lipschitz's condition in a vicinity of the singular point.

For such problems, some results are known, ranging from the establishment of conditions that guarantee the existence and uniqueness of the solution, the analysis of dependence of the solution to variations of the boundary of the domain, etc., to finding efficient methods of analytical and numerical solution. All these results are known for specific functional spaces.

The basic descriptive type of investigation was in use, with a methodology of consistent work in Lax Miligram's Theorem used for the proof of the existence of the weak solution

of parabolic problems with conditions type Dirichlet on the free border and singular points, in a previously defined Sobolev spaces. With regard to the uniqueness, this one was proved in a classic way, looking for an identically void solution for the homogeneous corresponding equation of parabolic type, but with the particularity of considering first sub-domains that do not contain singular points, for then using properties of continuity, to take limits and to include sub-domains that contain in his border singular points.

The most important result which was reached in this study was to:

- Proof, that the continuity of the functions representing the moving boundary of the domain, a sufficient condition of existence of the solution of the Cauchy-Dirichlet problem of parabolic type in a domain with free boundary and singular points of a Sobolev space predefined.

- Proof, that the Lipschitz conditions are sufficient conditions to be complied with moving boundary curves of the domain, in the vicinity of the singular points, to ensure uniqueness of the weak solution of the Cauchy-Dirichlet problem for parabolic problems defined on a domain with free boundary and singular points of a predefined Sobolev space.

- Check, that in the Hilbert space $L_2(Q)$, the Lipschitz conditions imposed in the neighborhood of singular points, are not sufficient to ensure the uniqueness of the solution of the Cauchy-Dirichlet parabolic problem on a domain with free boundary and singular points.

Introducción

Los problemas parabólicos definidos en dominios no clásicos que presentan algún tipo de singularidad[1], fueron y son objeto de investigación de muchos matemáticos. I. G. Petrovsky (1935) [10] y B. P. Mijailov (1961) [8], (1967) [9], tratan problemas de existencia y unicidad de la solución de problemas de difusión definidos en dominios con singularidades en diferentes espacios funcionales. Una particularidad de tales problemas lo constituye, por ejemplo, el hecho que los contornos laterales del dominio, en el cual se busca la solución, tienen en el momento inicial de tiempo, un punto singular. Este hecho, dificulta tanto el uso de métodos conocidos, como por ejemplo la representación de los problemas de contorno en forma de ecuaciones integrales, así como la aplicación de métodos numéricos de solución. O. T. Embergenobich (1978) [4], por ejemplo, utiliza el método del potencial térmico, para solucionar ciertos problemas de difusión en dominios móviles con singularidades, obteniendo para tales problemas un

[1]En el contexto del presente trabajo de investigación, la singularidad de un dominio está dada por puntos del contorno del dominio, cuya presencia, por un lado pueden convertir al problema en un problema mal planteado, o que, simplemente pueden dificultar la aplicación de métodos conocidos de solución.

sistema de ecuaciones integrales, pero con operadores integrales singulares[2] [3]. Métodos analíticos de solución de problemas de difusión en dominios con frontera libre $\alpha(t)$ en la actualidad son conocidos sólo para algunos casos particulares de funciones $\alpha(t)$, como por ejemplo, para aquellas funciones de la forma $c\sqrt{t}$, ct.

L. I. Kamuinin (1961) [6], menciona que los resultados sobre problemas con ecuaciones de tipo parabólico en dominios con frontera libre se dificulta, dado a que el dominio en el que se determina la solución se reduce a un punto en el momento inicial de tiempo ($t = 0$). Como consecuencia de ello, no se logra demostrar la convergencia uniforme en el método de aproximación sucesiva para ecuaciones integrales a las cuales se reduce la solución de problemas semejantes. Además, estudia la solución del problema mixto para la ecuación parabólica lineal con dos variables independientes x y t que satisface en el contorno lateral del dominio a una de las tres condiciones estándar de contorno y analiza la dependencia de la solución ante las variaciones de las curvas que determinan el contorno lateral. Resulta que si las curvas del contorno satisfacen la condición de Hölder[4] con exponente mayor que $\frac{1}{2}$, son rectificables, y las condiciones

[2]Operadores integrales que bajo la acción sobre una constante y la tendencia del límite superior de la integral hacia el inferior, éstos no tienden a cero

[3]Los métodos de solución para tales ecuaciones debido a la singularidad de los operadores integrales, no son comunes para la teoría de ecuaciones de Volterra; por ese motivo son llamados ecuaciones integrales singulares de Volterra de segundo orden. La solución se suele buscar en forma de suma de potenciales térmicos. [4]

[4]Si para cualesquier puntos x y x' del segmento $[a, b]$, el incremento de la función satisface a la desigualdad $|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^{\alpha}$, en donde $0 < \alpha \leq 1$ y M - cierta constante, entonces se dice que la función $f(x)$ satisface a la condición de Lipschitz de orden α en el segmento $[a, b]$. Históricamente sólo se relaciona con el nombre de Lipschitz el caso más importante $\alpha = 1$ y para $\alpha < 1$ se dice condición de Hölder.[11]

de contorno sobre cada una de las curvas admisibles no cambian, entonces la solución junto con su derivada respecto a x depende continuamente del cambio de la curva de contorno (en la métrica de Hölder[5]). En este caso, los coeficientes de la ecuación parabólica pueden presentar discontinuidades de primer tipo sobre un número finito de curvas, siendo la solución junto con su primera derivada respecto a x dependiente continuamente inclusive de las líneas de discontinuidad.

En los últimos años se han obtenido una serie de resultados interesantes sobre la solución de problemas generales de contorno para ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico y elíptico. La mayoría de estos resultados se refieren a problemas en los que en cada punto de la frontera del dominio considerado, se cumple cierta condición de conformidad entre la acción del operador de frontera y los valores límite del operador diferencial que actúa en el interior del dominio. Sin embargo representa interés examinar aquellos problemas de contorno en los cuales tal condición de conformidad se cumple en todo lugar, excepto, puede ser, en cierta variedad de menor dimensión (dimensión $n-1$ en $\mathbb{R}^n$).

[5]Se denomina clase H_α al conjunto de todas las curvas continuas $x = h(t)$ $(0 \leq t \leq T)$, para las cuales $|h(t)| \leq M$ y $|h(t_1) - h(t_2)| \leq K |t_1 - t_2|^{\frac{1+\alpha}{2}}$, t_1, $t_2 \in [0, T]$ en donde M, K y α - constantes $(0 < \alpha \leq 1)$. Con V se denota al conjunto de todas las curvas rectificables de H_α; entonces se define la métrica de Hölder: $\|h\|_t = |h|_t + \sup_{0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq t} \frac{|h(\tau_1) - h(\tau_2)|}{|\tau_1 - \tau_2|^{\frac{1+\alpha}{2}}}$, donde $|h|_t = \sup_{0 \leq \tau \leq t} |h(\tau)|$.[6]

Capítulo 1

Análisis del objeto de estudio.

En el caso específico del problema de Cauchy-Dirichlet para ecuaciones de tipo parabólico, la pregunta sobre la existencia y unicidad de la solución, está directamente relacionada con la estructura del contorno de su dominio en las cercanías de aquellos puntos con tangente horizontal. B. Mijailov (1961) [9].

Desde el punto de vista matemático, el problema que generan los puntos de contorno con tangente horizontal, para problemas parabólicos, está estrechamente relacionado con el concepto de variedad característica ($t = \kappa$). En [11] (1988), se define a la característica de una ecuación diferencial de tipo parabólico, como el conjunto M de puntos (curva, superficie, etc.) tal que el problema de Cauchy con condiciones iniciales sobre M resulta indeterminado.

Desde el punto de vista físico, [5] (1964), el problema que generan los puntos de contorno con tangente horizontal, para problemas parabólicos, está relacionado con la imposición de una condición complementaria sobre la frontera libre $x = s(t)$; es decir, la imposición del cumplimiento de la ley de conservación de la energía, dada por la fórmula:

$$\frac{ds\left(t\right)}{dt}=-ku_x\left(s\left(t\right),t\right) \tag{1.1}$$

aquí, k es una constante positiva.

Visiblemente, en la ecuación (1.1), para aquellos puntos del contorno con tangente horizontal, la derivada $\frac{ds(t)}{dt}$ es indeterminada, si consideramos el plano t, x.

Se demuestra que para estos problemas, bajo condiciones de regularidad siempre existe solución. Para garantizar la unicidad se tiene que exigir cierto grado de aproximación de la tangente horizontal con la curva en los puntos singulares[1] de contacto o garantizar la condición de Lipschitz[2] en una vecindad del punto singular.

Considerando como variable independiente al dominio con frontera libre y puntos singulares; y como variable dependiente a la existencia y unicidad de la solución débil del problema de Cauchy-Dirichlet; se planteó el problema: ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes de existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy-Dirichlet para problemas parabólicos en un dominio con frontera libre y puntos singulares?.

En las aplicaciones matemáticas, los tratados sobre existencia, unicidad y estabilidad de la solución de problemas con frontera libre, son de primordial importancia, dado a que anteceden necesariamente a los posteriores estudios de implementación

[1]En el contexto del presente trabajo, denominamos puntos singulares a aquellos puntos en los que la tangente a la curva de contorno del dominio es paralela al eje Ox.

[2]El contorno Γ del dominio acotado Ω se denomina lipschitziano si cualquiera que sea el punto $x^0 \in \Gamma$, se encuentra un sistema coordenado rectangular $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ con origen en este punto, y el rectángulo $\Delta = \{\xi : |\xi_j| < \delta,\ j = 1, \ldots, n-1, |\xi_n| < \delta\}$ tal que la intersección $\Gamma\Delta$ se describe por la función $\xi_n = \psi\left(\xi'\right)$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \Delta' = \{\xi' : |\xi_j| < \delta\ j = 1, \ldots, n-1\}$, satisfaciendo en Δ' la condición de Lipschitz.[12]

computacional de los diversos métodos de solución. La propuesta de condiciones suficientes y necesarias para el buen planteamiento de los problemas con frontera libre se torna importante en el quehacer matemático ya que por un lado son conocidos pocos resultados al respecto y por otro lado este tipo de problemas está logrando una notoria presencia en el campo aplicativo; así, los problemas con frontera libre, aparecen inclusive en fenómenos físicos muy simples; como por ejemplo si se examina un pedazo delgado de hielo que ocupa el intervalo $a \leq x < \infty$ bajo la suposición de que la temperatura del hielo es nula en todas partes y que en el punto $x = a$ la temperatura se mantiene igual a $T\,^{o}C$ para $T > 0$; entonces el hielo empieza a derretirse y en cada momento de tiempo $t > 0$ el agua va a ocupar el intervalo $a \leq x < s(t)$. Hoy en día son tratados problemas de frontera libre referidos a procesos de reacción-difusión, sólido-gas, determinación de coeficientes térmicos de materiales a través de procesos con cambio de fase; agroindustria, etc.

Para la realización del presente trabajo de investigación, se utilizó el tipo de investigación básico descriptivo, con una metodología de trabajo consistente en utilizar el Teorema de Lax Miligram para la demostración de la existencia de la solución débil de problemas parabólicos con condiciones tipo Dirichlet sobre la frontera libre y puntos singulares, en un espacio de Sóbolev previamente definido. Con respecto a la unicidad, ésta fue probada de manera clásica, buscando una solución idénticamente nula para la ecuación homogénea correspondiente de tipo parabólico, con la particularidad de considerar primeramente subdominios que no contienen puntos singulares, para luego utilizando propiedades de continuidad, tomar límites y abarcar subdominios que contienen en su frontera puntos singulares.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Conceptos matemáticos básicos.

2.1.1. Problema de Cauchy.

Sea dado el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales respecto a las variables independientes $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$ con funciones desconocidas $u_1, u_2, \ldots, u_N$:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x, u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^{\alpha} u_j}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \ldots\right) \tag{2.1}$$

en donde $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha \leq n_j$, $\alpha_0 \leq n_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$ (el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas).

En las ecuaciones presentes en el sistema, se observa que cada una de las funciones desconocidas u_i tiene su derivada de orden mayor n_i respecto a t. La variable independiente t juega un rol importante respecto a las demás variables independientes, ya que:

a) entre las derivadas de mayor orden n_i de cada función presente en el sistema, debe estar la derivada $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}}$.

b) el sistema es resuelto (despejado) respecto a estas derivadas de mayor orden.

Por lo general, la viariable t es una variable temporal y las variables $x_1, \ldots, x_n$ son variables espaciales.

El sistema (2.1) junto con las condiciones a) y b), se denomina sistema de Kovalevskaya.

Sobre cierto hiperplano $t = t^0$ damos los valores iniciales de las funciones desconocidas $u_i(t, x)$ y sus derivadas respecto a t hasta de orden $n_i - 1$:

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right|_{t=t^0} = \varphi_i^k(x), \qquad k = 0, 1, \ldots, n_i - 1 \tag{2.2}$$

aquí $\varphi_i^k(x)$ son dadas en el dominio $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ sobre el hiperplano $t = t^0$.

El problema (2.1), (2.2) se denomina problema de Cauchy.[1]

2.1.2. Problema de Cauchy con condiciones iniciales dadas sobre una superficie arbitraria.

Veamos la siguiente ecuación diferencial lineal genérica de orden m:

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^{|\alpha|} u = f(x), \qquad x = x_0, x_1, ..., x_n \tag{2.3}$$

[1] **Teorema de Kovalevskaya.-** Si todas las funciones $\varphi_i^k(x)$ de (2.2) son analíticas en una vecindad del punto $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$, y las funciones F_i de (2.1) son definidas y analíticas en una vecindad del punto $\left(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \ldots, \varphi_{j,\alpha}^k, \left(x^0\right) \ldots\right)$, entonces el problema de Cauchy (2.1), (2.2) tiene solución analítica en cierta vecindad del punto $\left(t^0, x^0\right) = \left(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ siendo además única en la clase de funciones analíticas. [7]

en donde, $D^{|\alpha|}$ denota a la derivada parcial de orden $|\alpha|$ respecto a las variables $x_0, x_1..., x_n$; es decir,

$$D^{|\alpha|} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

La sumatoria se toma para todos los valores enteros no negativos α_n comenzando desde 0 hasta m; además α es el multi-índice $\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n$ y $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 \ldots + \alpha_n$. Se suele omitir el signo de módulo en la notación del orden de la derivada, de modo que, en (2.3) escribiremos $D^{\alpha}u$ en lugar de $D^{|\alpha|}u$:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u = f(x), \qquad x = x_0, x_1, ..., x_n \tag{2.4}$$

Consideremos que en la vecindad Ω del punto P se tiene una superficie S n-dimensional y suave de clase C^m [2] con ecuación $F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Sea $\vec{n}$ - vector normal a S y $|\nabla F| \neq 0$. Consideremos además, que sobre la superficie S se dan las condiciones:

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial \vec{n}^k} \right|_S = \varphi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.5}$$

(en lugar del vector normal $\vec{n}$ en las condiciones (2.5) se puede considerar cualquier vector $\vec{\nu}$ con dirección no tangente a la superficie S).

Se plantea el problema general de Cauchy:

Encontrar la función $u(x)$, que satisface a (2.4), (2.5) en cierta vecindad Ω del punto P.

Surge la pregunta: ¿Para qué ecuaciones de las superficies S y condiciones iniciales $\varphi_k, \quad k = 0, \ldots, m-1$, este problema tiene solución en cierta vecindad del punto P?.

[2] Se dice que la superficie S pertenece a la clase C^p, $p \geq 1$ si en cierta vecindad de cada punto $x_0 \in S$ puede ser representada por la ecuación $\omega_{x_0}(x) = 0$, con $grad\, \omega_{x_0}(x) \neq 0$ y la función $\omega_{x_0}(x)$ es continua junto con todas sus derivadas hasta de orden p inclusive en la vecindad considerada. [2]

Para dar respuesta a la pregunta planteada, en [7] se lleva a cabo el siguiente razonamiento:

Se realiza un cambio de variables independientes, de tal modo que la superficie $F = 0$ se traslade a uno de los hiperplanos coordenados. Tal cambio de variables se puede hacer en la forma:

$$y_0 = F\left(x_0, x_1 \ldots, x_n\right),$$

$$y_j = x_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

el cual es no singular, ya que el jacobiano de la transformación es diferente de cero:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_0} & \frac{\partial F}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

en base a que, sin limitar generalidad, se puede considerar que $\frac{\partial F}{\partial x_0} \neq 0$. En las nuevas variables, la superficie S tiene ecuación $y_0 = 0$. Luego del cambio de las variables independientes, la ecuación (2.4) se transforma en:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha\left(y\right) D^\alpha \tilde{u} = \tilde{f}\left(y\right). \tag{2.6}$$

Para que esta ecuación pueda escribirse en la forma:

$$D_0^m \tilde{u} = \sum_{|\alpha| \leq m,\ \alpha_0 \leq m-1} \tilde{b}_\alpha\left(y\right) D^\alpha \tilde{u}\left(y\right) + f_1\left(y\right), \tag{2.7}$$

es necesario que el coeficiente $b_\alpha\left(y\right)$ correspondiente a $\alpha = (m, 0, \ldots, 0)$ sea no nulo en la vecindad del punto P. Si calculamos el coeficiente $b_\alpha\left(y\right)$, $\forall\, \alpha = \alpha_0 \ldots \alpha_n$ tal que

$|\alpha| = m$ (es decir, para la derivada de orden mayor), notamos que resulta igual a:

$$b_{\alpha}(y) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\right)^{\alpha_0} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \equiv \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha} (grad\, F)^{\alpha} \tag{2.8}$$

Mostremos lo indicado, para el caso de una ecuación de segundo orden con dos variables independientes. En este caso (2.4) se escribe así:

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} a_{\alpha}(x_1, x_2)\, D^{\alpha} u = f(x_1, x_2)$$

o, utilizando una notación más conocida, haciendo $x_1 = x$, $x_2 = y$:

$$a_{20}u_{xx} + 2a_{11}u_{xy} + a_{02}u_{yy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = f(x, y) \tag{2.9}$$

Las condiciones iniciales son dadas sobre la curva L:

$$u|_L = \varphi_0, \qquad \left.\frac{\partial\, u}{\partial \vec{n}}\right|_L = \varphi_1 \tag{2.10}$$

Consideremos que la curva L tiene ecuación $F(x, y) = 0$ y carece de puntos singulares, es decir, $|grad\, F| \neq 0$ sobre L. Si hacemos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} \xi &= F(x, y) \\ \eta &= \Phi(x, y) \end{cases}$$

en donde $\Phi(x, y)$ es una función arbitraria y suave, para la cual sobre la curva L, el jacobiano respectivo de la transformación es distinto de cero:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} \neq 0$$

(se puede hacer $\Phi(x, y) \equiv y$, es decir, $\eta = y$, entonces el jacobiano tiene la forma:

$$\left. J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

entonces, como se dice, la transformación endereza a la curva L, convirtiéndola de esta manera en una parte de recta coordenada $\xi = 0$. Se puede mostrar que las condiciones iniciales, en este caso, se escriben del siguiente modo:

$$u|_{\xi=0} = \tilde{\varphi}_0(0,\eta), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \tilde{\varphi}_1(0,\eta). \tag{2.11}$$

Ahora veamos cómo se transforma la ecuación (2.9). Tenemos:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_y\xi_x + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}
\end{aligned}$$

Reemplazando estas derivadas en la ecuación (2.7), obtenemos la siguiente ecuación:

$$b_{20}u_{\xi\xi} + 2b_{11}u_{\xi\eta} + b_{02}u_{\eta\eta} = \tilde{f} \tag{2.12}$$

en donde $\tilde{f}$ contiene tanto a términos lineales de las primeras derivadas de u respecto a ξ y η, a la misma función $u(\xi,\eta)$, así como a un término independiente. Aquí, se utilizaron las notaciones:

$$\begin{aligned}
b_{20} &= a_{20}\xi_x^2 + 2a_{11}\xi_x\xi_y + a_{02}\xi_y^2 \\
b_{11} &= a_{20}\xi_x\eta_x + a_{11}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{02}\xi_y\eta_y \\
b_{02} &= a_{20}\eta_x^2 + 2a_{11}\eta_x\eta_y + a_{02}\eta_y^2
\end{aligned}$$

Para que la ecuación obtenida sea de tipo Kovalevskaya con las condiciones iniciales (2.11), es necesario que:

$$b_{20} \equiv a_{20}\xi_x^2 + 2a_{11}\xi_x\xi_y + a_{02}\xi_y^2 \neq 0$$

y esto corresponde a la expresión (2.8) para el caso de la ecuación genérica de orden m con n variables independientes.

Se demuestra fácilmente que si sobre la superficie S son dadas la función $u\,(x)$ y sus derivadas en la dirección de la normal hasta de orden $m-1$ inclusive (o derivadas según cualquier dirección no tangencial), entonces al mismo tiempo son dadas todas las derivadas de $u\,(x)$ hasta de orden $m-1$ respecto a cada x_i.

En efecto, para $m=2$, $n=2$, es decir para la ecuación (2.9), tenemos:

$$\begin{aligned} \left.\tfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_L &= \left.\tfrac{\partial u}{\partial x}\cos\left(\vec{n},x\right)+\tfrac{\partial u}{\partial y}\cos\left(\vec{n},y\right)\right|_L=\varphi_1 \\ \left.\tfrac{\partial u}{\partial \vec{\tau}}\right|_L &= \left.\tfrac{\partial u}{\partial x}\cos\left(\vec{\tau},x\right)+\tfrac{\partial u}{\partial y}\cos\left(\vec{\tau},y\right)\right|_L=\tfrac{\partial \varphi_0}{\partial \vec{\tau}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

en donde $\vec{\tau}$ - versor dirigido en la dirección de la tangente a la curva L en el punto (x,y).

Denotamos las componentes (cosenos directores) de los versores $\vec{n}$ y $\vec{\tau}$ con n_1, n_2 y τ_1, τ_2 respectivamente.

El sistema (2.13) tiene solución única $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ya que su determinante es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix} = \left|[\vec{n},\vec{\tau}]\right| = |\vec{n}|\cdot|\vec{\tau}|\sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$$

(notemos que si en lugar del vector $\vec{n}$ se toma cualquier versor con dirección no tangencial, entonces el determinante también es distinto de cero).

2.1.3. Superficies características para una ecuación en derivadas parciales.

Veamos el problema de Cauchy para la ecuación:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f(x) \tag{2.14}$$

con condiciones iniciales sobre una superficie S arbitraria y suave, dada por la ecuación $F(x) = 0$:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \vec{n}^k}\right|_S = \varphi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.15}$$

Llevamos el problema (2.14), (2.15) a un problema de tipo Kovalevskaya, para lo cual de las variables x pasamos a las nuevas variables independientes:

$$y_k = F_k(x), \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.16}$$

Además proponemos que la transformación (2.16) sea no singular en cierta vecindad del punto P, es decir:

$$det \left\| \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right\| \neq 0$$

y que $F_0 = F$, es decir, en las nuevas coordenadas, la ecuación $y_0 = 0$ en la vecindad del punto P, representa a la superficie S. Fue mostrado[3], que a partir de las condiciones iniciales dadas sobre S, se pueden determinar todas las derivadas hasta de orden $m-1$ inclusive, de la función $u(x)$ sobre la superficie S, respecto a las variables x, lo que significa que también respecto a las variables y. Estas derivadas en las variables y determinan las condiciones de Cauchy en la vecindad del punto P del hiperplano $y_0 = 0$.

[3] ver página 13.

Se desea aplicar el teorema de Kovalevskaya[4] a la nueva ecuación, por ello, nos interesa en ella, el coeficiente de su derivada de mayor orden respecto a y_0. Este coeficiente para $D_{y_0}^m u$ es:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(D_0F)^{\alpha_0}(D_1F)^{\alpha_1}\dots(D_nF)^{\alpha_n},$$

en donde $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Sea la superficie S, dada por la ecuación $F(x) = 0$, tal que en la vecindad del punto P, se cumpla:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(D_0F)^{\alpha_0}(D_1F)^{\alpha_1}\dots(D_nF)^{\alpha_n} \neq 0.$$

entonces, dividiendo por tal coeficiente, a la ecuación (2.14), en las nuevas variables, se la puede escribir en la forma:

$$\frac{\partial^m u}{\partial y_0^m} = \sum_{|\alpha|\leq m,\, \alpha_0\leq m-1} b_\alpha(y)\, D^\alpha u + \tilde{f}(y)$$

A esta ecuación se le puede aplicar el teorema de Kovalevskaya en el caso en que la función $F(x)$, que define a la superficie S, los coeficientes de la ecuación y las condiciones iniciales, son funciones analíticas[5].

Definición 2.1.1 *La superficie S para la cual se cumple la igualdad:*

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(D_0F)^{\alpha_0}\dots(D_nF)^{\alpha_n} \equiv \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(grad\, F)^\alpha = 0 \tag{2.17}$$

[4]Ver pie de página 1 de la página 8.

[5]La función compleja $F(x)$, definida en cierto dominio Ω, se denomina analítica en una vecindad del punto $P = \left(x_1^0, \dots, x_m^0\right)$, si ella se descompone en una serie exponencial: $F(x) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}\dots\sum_{\alpha_m=0}^{\infty} A_{\alpha_1\dots\alpha_m}\left(x_1-x_1^0\right)^{\alpha_1}\left(x_2-x_2^0\right)^{\alpha_2}\dots\left(x_m-x_m^0\right)^{\alpha_m} \equiv \sum_\alpha A_\alpha\left(x-x^0\right)^\alpha$, convergente en módulo para $|x-x_0|$ suficientemente pequeños.[7]

se denomina superficie característica o característica de la ecuación (2.14).

Así, para la ecuación de segundo orden (2.9) ($m = 2$, $n = 2$), la ecuación de la curva característica es:

$$a_{20}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + 2a_{11}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + a_{02}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 0$$

Notamos que, la ecuación de la curva característica queda determinada por los coeficientes de las derivadas de orden mayor. Mostremos el siguiente ejemplo, relacionado con la ecuación de conducción del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^4 \tag{2.18}$$

en donde se observa que la ecuación de la curva característica se deberá obtener a partir de la expresión:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^2 = 0 \tag{2.19}$$

La función $F \equiv x_0 - c = 0$ satisface a (2.19), por ello $x_0 = const$ es curva caracterísitica para la ecuación de conducción del calor.

2.1.4. Particularidades del problema de Cauchy con condiciones iniciales sobre la característica.

Supongamos que la superficie S resulta ser característica. Entonces el coeficiente de $\frac{\partial^m u}{\partial y_0^m}$ es igual a cero y la ecuación (2.14) se transforma sobre S en una expresión en la que participan las derivadas de u respecto a $y_0, \ldots, y_n$ de la forma $D^\alpha u$, en donde $\alpha_0 \leq m - 1$.

Debido a que las condiciones de Cauchy son dadas sobre S:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial y_o^k}\right|_{y_0=0} = \varphi_k\,(y')^{\,6}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1$$

entonces la ecuación sobre la superficie característica se ha convertido en una expresión entre condiciones iniciales. De este modo, las condiciones iniciales sobre la superficie característica no pueden ser dadas arbitrariamente.

Veamos el caso, relacionado con el problema de Cauchy para la ecuación de conducción del calor (2.18) con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u|_{x_0=0} &= \varphi_0\,(x) \\ \left.\tfrac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} &= \varphi_1\,(x) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Si la solución del problema de Cauchy (2.18), (2.20) existe, entonces las funciones iniciales dadas deberán satisfacer la relación:

$$\varphi_1 = \Delta\varphi_0 \qquad para \quad x_0 = 0. \tag{2.21}$$

Puede suceder que la solución del problema de Cauchy con condiciones iniciales (2.15) sobre la característica, exista y no sea única. En [7] se examina el siguiente ejemplo para el caso de la ecuación de ondas.

Sea la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \tag{2.22}$$

La expresión (2.17) para ella es:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 = 0$$

[6] $y' = (y_1, \ldots, y_n)$

por lo tanto las rectas $x_1 - ax_0 = const$*,* $x_1 + ax_0 = const$ *constituyen características para la ecuación (2.22). El cambio de variables independientes:*

$$x_1 - ax_0 = y_0, \quad x_1 + ax_0 = y_1$$

lleva la ecuación (2.22) a la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0 \, \partial y_1} = 0. \tag{2.23}$$

Se dan para (2.23) las siguientes condiciones iniciales sobre la característica:

$$\begin{aligned} u|_{y_0=0} &= \varphi_0 (y_1) \\ \left.\tfrac{\partial u}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} &= \varphi_1 (y_1) \end{aligned} \tag{2.24}$$

La solución del problema (2.23), (2.24) existe sólamente si son impuestas sobre φ_0 *y* φ_1 *ciertas restricciones; pero dicha solución no es única. En efecto, todas las soluciones de la ecuación (2.23) se expresan en la forma:*

$$u (y_0, y_1) = \Phi_1 (y_0) + \Phi_2 (y_1) \tag{2.25}$$

en donde, las funciones Φ_1 *y* Φ_2 *son definidas de (2.24). Tenemos:*

$$\varphi_0 (y_1) = \Phi_1 (0) + \Phi_2 (y_1)$$

de donde:

$$\Phi_2 (y_1) = \varphi_0 (y_1) - \Phi_1 (0)$$

y la solución (2.25) adquiere la forma:

$$u (y_0, y_1) = \Phi_1 (y_0) + \varphi_0 (y_1) - \Phi_1 (0)$$

Ahora se utiliza la segunda de las condiciones iniciales de (2.24) para definir $\Phi_1 (y_0)$*. Tenemos:*

$$\left.\frac{\partial u\left(y_0,y_1\right)}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = \left.\frac{\partial \Phi_1\left(y_0\right)}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = \varphi_1\left(y_1\right) \equiv const \tag{2.26}$$

es decir, la función inicial $\varphi_1\left(y_1\right)$ debe ser constante.

Se muestra fácilmente que con estas condiciones iniciales, el problema (2.23), (2.24) posee un conjunto infinito de soluciones. En efecto, la función $\Phi_1\left(y_0\right)$ es una función arbitraria de clase $C^2\left(\mathbb{R}^1\right)$ que satisface sólo a la condición (2.26). Tal función se puede expresar en la forma:

$$\Phi_1\left(y_0\right) = f\left(y_0\right) - f\left(0\right) + y_0\left[\varphi_1\left(0\right) - f'\left(0\right)\right] \tag{2.27}$$

en donde $f\left(y_0\right)$ es una función arbitraria de clase $C^2\left(\mathbb{R}^1\right)$. Se verifica que (2.27) satisface a la condición (2.26):

$$\left.\frac{\partial \Phi_1\left(y_0\right)}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = \left.f'\left(y_0\right)\right|_{y_0=0} + \varphi_1\left(0\right) - f'\left(0\right) = \varphi_1\left(0\right)$$

La solución del problema (2.23), (2.24) con $\varphi_0\left(y_1\right) \in C^2\left(\mathbb{R}^1\right)$ se expresa ahora en la forma:

$$u\left(y_0,y_1\right) = \varphi_0\left(y_1\right) + f\left(y_0\right) - f\left(0\right) + y_0\left[\varphi_1\left(0\right) - f'\left(0\right)\right]$$

2.1.5. Problema de Cauchy - Dirichlet.

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un dominio en donde sucede un proceso de difusión y S su contorno al cual consideramos una superficie suave por tramos. Como dominio de definición de la ecuación de difusión siguiente:

$$\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(p\ grad\ u\right) - qu + F\left(x,t\right) \tag{2.28}$$

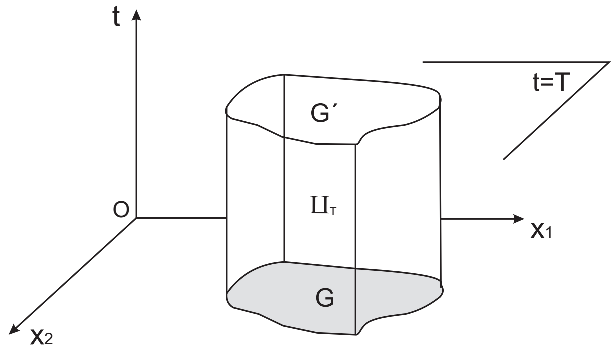

Figura 2.1: Cilindro $\text{Ц}_T = G \times (0, T)$ de altura T y base G, considerado como dominio de definición de la ecuación (2.28).

vamos a considerar al cilindro $\text{Ц}_T = G \times (0, T)$ *de altura* T *y base* G*, Figura 2.1. Su contorno está conformado por la superficie lateral* $S \times [0, T]$ *y las dos bases: inferior* $\bar{G} \times \{0\}$ *y superior* $\bar{G} \times \{T\}$*.*

Se propone que los coeficientes ρ*,* p *y* q *de la ecuación (2.28) no dependen del tiempo; además en correspondencia con su significado físico vamos a considerar que* $\rho(x) > 0$*,* $p(x) > 0$*,* $q(x) \geq 0$*,* $x \in \bar{G}$*; también, en correspondencia con el significado matemático de la ecuación (2.28) es necesario considerar que* $\rho \in C\left(\bar{G}\right)$*,* $p \in C^1\left(\bar{G}\right)$ *y* $q \in C\left(\bar{G}\right)$*.*

Como es sabido, para describir completamente uno u otro proceso físico, es necesario además de la propia ecuación que describe el proceso, establecer el estado inicial de este proceso (condiciones iniciales) y el régimen en el contorno del dominio en el cual se desarrolla el proceso (condiciones de contorno). Desde el punto de vista matemático esto está relacionado con la no unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales. En efecto, incluso para las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n *la solución general depende de* n *parámetros arbitrarios. Para las ecuaciones en derivadas parciales, la solución generalmente depende de funciones arbitrarias; por ejemplo, la solución general de la ecuación* $u_x = 0$ *en la clase de funciones dependientes de las* *variables x e y, tiene la forma $u(x,y) = f(y)$, en donde f es una función arbitraria de clase C^1. Por este motivo, para resaltar la solución que describe un proceso físico real es necesario considerar condiciones complementarias.*

Para la ecuación de difusión (2.28), el problema de Cauchy - Dirichlet, se plantea del siguiente modo:[2]

Encontrar la función $u(x,t)$ de clase $C^2(\Pi_T) \cap C\left(\bar{\Pi}_T\right)$, $grad_x u \in C\left(\bar{\Pi}_T\right)$ que satisface a la ecuación (2.28) en Π_T, a la condición inicial:

$$u|_{t=0} = u_0(x)$$

y a la condición de contorno:

$$u|_S = v.$$

2.1.6. Problemas de contorno para regiones con frontera móvil

Para la ecuación de conducción del calor, se pueden plantear problemas de contorno sobre dominios con fronteras que se desplazan con el transcurrir del tiempo.

Veamos la ecuación de conducción del calor con una variable espacial:

$$L(u) = a^2 u_{xx} - u_t = 0 \tag{2.29}$$

(el análisis se puede generalizar al caso de varias variables).

Consideremos la región $BAEF$, Figura 2.2, delimitada por las características AB y EF ($t = const$) y lateralmente, por las curvas determinadas por las ecuaciones:

$$x = \chi_1(t) \qquad para \quad AE$$

y

$$x = \chi_2(t) \qquad para \quad BF.$$

El problema de Cauchy-Dirichlet para esta región consiste en determinar la solución de la ecuación de conducción del calor (2.29) que satisfaga a las condiciones inicial y de frontera:

$$\left.\begin{array}{c} u = \varphi(x) \ \ en \ \ AB, \\ u|_{x=\chi_1(t)} = \mu_1(t), \qquad u|_{x=\chi_2(t)} = \mu_2(t) \end{array}\right\} \tag{2.30}$$

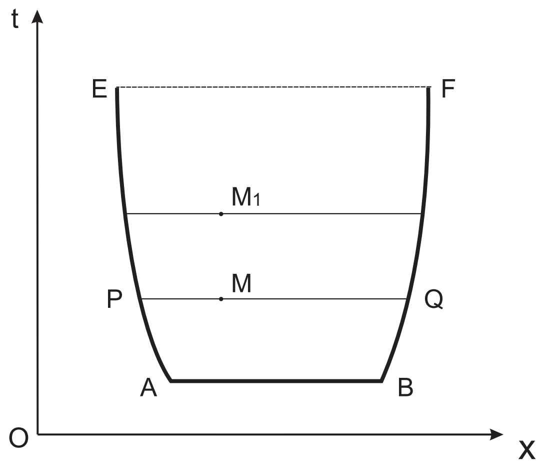

Figura 2.2: Región $BAEF$, delimitada por las características AB y EF (t=const) y por las curvas laterales determinadas por las ecuaciones: $x = \chi_1(t)$ y $x = \chi_2(t)$.

Del principio del valor máximo[7] *se deduce directamente que este problema no puede tener más de una solución continua.*

En [14] (1980), se establece la fórmula de Green para la ecuación (2.29) y la respectiva representación integral de las soluciones de este problema:

Considerando el operador

$$M(v) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{2.31}$$

[7]**Teorema.-** (Principio del valor máximo para una región acotada) Cada solución $u(t,x)$ de la ecuación de conducción del calor, continua en el dominio cerrado de definición, alcanza sus valores máximo y mínimo o bien en el momento inicial o bien en los puntos de la frontera.[7]

e integrando la expresión:

$$\psi L(\varphi) - \varphi M(\psi) = a^2 (\psi\varphi_x - \varphi\psi_x)_x - (\varphi\psi)_t$$

en cierta región $PABQ$, Figura 2.2, donde $\varphi(x,t)$ y $\psi(x,t)$ son funciones arbitrarias, derivables un número suficiente de veces, y aplicando el teorema de Green[8], *se obtiene:*

$$\int\int [\psi L(\varphi) - \varphi M(\psi)]\, dxdt = \oint \left[\varphi\psi dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right]$$

en donde la segunda integral se toma por el contorno cerrado $PABQ$. Si $L(\varphi) = 0$ y $M(\psi) = 0$, entonces, escribiendo con más detalle el segundo miembro, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{PQ} \varphi\psi dx = \int_{AB} \varphi\psi dx + \int_{BQ} \left[\varphi\psi dx + a^2 \left(\psi \tfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \tfrac{\partial \phi}{\partial x}\right) dt\right] - \\ - \int_{AP} \left[\varphi\psi dx + a^2 \left(\psi \tfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \tfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right] \end{aligned} \tag{2.32}$$

Sea $\varphi(x,t) = u(x,t)$ alguna solución de la ecuación de conducción del calor, es decir, $L(u) = 0$, y $\psi = G_0(x,t,\xi,\tau)$, la función de la fuente[9] *para esta ecuación en la recta infinita:*

$$G_0(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \tag{2.33}$$

[8]**Teorema de Green**.- Sea G un dominio con contorno lipschitziano, y sean $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$ y $g(x_1, \ldots, x_N)$ funciones continuas junto con sus derivadas parciales $\partial f/\partial x_i$, $\partial g/\partial x_i$ (en donde i toma los valores $1, \ldots, N$) en $\bar{G} = G + \Gamma$. Entonces se cumple la relación: $\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int_\Gamma f g \nu_i ds - \int_G f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx$ en donde, ν_i es la componente i del vector unitario en la dirección de la normal exterior.[12]

[9]La solución acotada definida en la región $-\infty < x < \infty, t \geq 0$, que satisfaga a la ecuación de conducción del calor: $u_t = a^2 u_{xx}, \quad$ para $\; -\infty < x < \infty, \quad t > 0$ y a la condición inicial $u(x,0) = \varphi(x), \quad$ para $\; -\infty < x < \infty$ tiene la siguiente representación integral: $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;t)\, \varphi(\xi) d\xi$ donde $G(x,\xi;t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$, se llama función de la fuente puntual.[14]

que se llama con frecuencia: solución fundamental de la ecuación de conducción del calor. La función $G_0(x,t,\xi,\tau)$ satisface a la ecuación $L(G_0)=0$ con respecto a las variables x,t y a la ecuación conjugada $M(G_0)=0$ con respecto a las variables ξ, τ.

Sea $M(x,t)$ cierto punto fijo dentro de la región $BAEF$, en la cual se quiere hallar el valor de la función $u(x,t)$, y M_1, el punto de coordenadas $(x,t+h)$, donde $h>0$. Trazando por el punto M la característica PQ, sustituyendo luego en la fórmula (2.32) x por ξ, t por τ y aplicándola después a la región $ABQP$, Figura 2.2 y a las funciones:

$$\varphi = u(\xi,\tau) \quad y \quad \psi(\xi,\tau) = G_0(x,t+h,\xi,\tau) \tag{2.34}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi,t)\,d\xi = \\ &= \textstyle\int_{PABQ} u(\xi,\tau)\,G_0(x,t+h,\xi,\tau)\,d\xi + a^2\left(G_0\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial G_0}{\partial \xi}\right)d\tau \end{aligned} \tag{2.35}$$

Pasando al límite cuando $h\to 0$ y teniendo en cuenta la continuidad, con respecto a h, de las funciones $G_0(x,t+h,\xi,\tau)$ y $\frac{\partial G_0}{\partial \xi}$ en $PABQ$, así como también la igualdad:

$$\lim_{h\to 0}\int_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi,t)\,d\xi = u(x,t)\,^{10} \tag{2.36}$$

si (x,t) se halla en el segmento PQ, se obtiene la fórmula integral fundamental

[10] En [14] se demuestra que la fórmula:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\varphi(\xi)d\xi,$$

llamada integral de Poisson, representa, para cualquier función acotada $|\varphi(\xi)|<M$, a la solución acotada de la ecuación de conducción del calor, para $t>0$, que tiende en forma continua hacia $\varphi(x)$ cuando $t\to 0$, en todos los puntos de continuidad de esta función.

$$u(x,t)=\int_{PABQ}u(\xi,\tau)\,G_0(x,t,\xi,\tau)\,d\xi+\int_{BQ+PA}a^2\left(G_0\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial G_0}{\partial\xi}\right)d\tau \qquad (2.37)$$

que da la representación de soluciones arbitrarias de la ecuación de conducción del calor. Escribiéndola una vez más en forma detallada:

$$\begin{aligned}u(x,t)=\textstyle\int_{PABQ}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}u(\xi,\tau)d\xi+a^2\int_{BQ+PA}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\frac{\partial u}{\partial\xi}d\tau-\\ -a^2\textstyle\int_{BQ+PA}u(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\pi a^2(t-\tau)}\right)d\tau\end{aligned} \qquad (2.38)$$

Esta fórmula no da las soluciones de los problemas de contorno, puesto que para calcular el segundo miembro hay que conocer los valores no sólo de u, sino también de $\frac{\partial u}{\partial\xi}$ a lo largo de los arcos AE y BF.

Mediante una transformación se puede excluir a $\frac{\partial u}{\partial\xi}$ de esta fórmula, en efecto, sea v alguna solución de la ecuación conjugada $M(v)=0$ que se anule en PQ, y u, la solución de la ecuación de conducción del calor $L(u)=0$. Aplicando la fórmula (2.32) a las funciones v y u para la región $PABQ$, se obtiene:

$$0=\int_{PABQ}\left[u(\xi,\tau)\,v(\xi,\tau)\,d\xi+a^2\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)d\tau\right] \qquad (2.39)$$

restando luego, de (2.37) la igualdad (2.39), tendremos:

$$u(x,t)=\int_{PABQ}\left[u(\xi,\tau)\,G(x,t,\xi,\tau)\,d\xi+a^2\left(G\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)d\tau\right], \qquad (2.40)$$

en donde

$$G(x,t,\xi,\tau)=G_0(x,t,\xi,\tau)-v \qquad (2.41)$$

Si se escoge la función v de modo que sea

$$G = 0 \quad en \ PA \ y \ BQ$$

se obtiene la representación integral para $u(x,t)$ en la forma:

$$u(x,t) = \int_{AB} u(\xi,\tau)\, G(x,t,\xi,\tau) d\xi + a^2 \int_{AP} u \frac{\partial G}{\partial \xi} d\tau - a^2 \int_{BQ} u \frac{\partial G}{\partial \xi} d\tau \qquad (2.42)$$

La fórmula (2.42) da la solución del problema de contorno (2.29), (2.30), en cuyas condiciones se dan los valores de la función u en AP y BQ, así como también en la recta AB.

En la literatura científica también se encuentran otros métodos teóricos para encontrar la solución de problemas de contorno en regiones con frontera móvil. Entre éllos, destaca el método de potenciales térmicos[11] *que se encarga de llevar el problema planteado a uno de ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie.*

2.2. Espacios de Funciones.

2.2.1. Espacios L_p.

Definición 2.2.1 *Sea $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. Se denomina espacio $L_p(G)$, al espacio de funciones $f(x)$ medibles*[12] *sobre G, para las cuales la función $|f(x)|^p$ es integrable*

[11] Para mayor referencias ver [14].

[12] Sea $f(x)$ una función real, definida sobre un conjunto acotado y medible M. Si el conjunto de todos los $x \in M$, para los cuales $f(x) < C$ es medible con cualquier número C, entonces la función $f(x)$ es medible (según Lebesgue) sobre el conjunto M.[12]

según Lebesgue sobre G. El número

$$\|f\|_{L_p(G)} = \left(\int_G |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \qquad (2.43)$$

se denomina norma del elemento $f \in L_p(G)$.

Se introduce también el espacio $L_\infty(G)$, *denominado espacio de funciones medibles y esencialmente acotadas*[13], *con norma definida por*

$$\|f\|_{L_\infty(G)} = ess\, sup_{x \in G} |f(x)| = min \{ M \geq 0 : |f| \leq M, \, c.p.d. \} . \qquad (2.44)$$

donde c.p.d. significa: para casi todo $x \in G$.

De este modo el espacio $L_p(G)$ *ha sido definido para todos los valores reales p, para los cuales* $1 \leq p \leq \infty$. *Con la definición dada de norma, el espacio* $L_p(G)$ *es un espacio funcional de Banach. Esto significa que tienen lugar las siguientes propiedades:*

1) $\|f\|_{L_p(G)} = 0$ *es equivalente a* $f(x) = 0$ *casi para todos los* $x \in G$;

2) $\|cf\|_{L_p(G)} = |c| \, \|f\|_{L_p(G)}$;

3) $\|f_1 + f_2\|_{L_p(G)} \leq \|f_1\|_{L_p(G)} + \|f_2\|_{L_p(G)}$

4) *El espacio* $L_p(G)$ *es completo, es decir, del hecho que* $f_k \in L_p(G)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\|f_k - f_l\|_{L_p(G)} \to 0$ $(k, l \to \infty)$, *sigue la existencia de la función* $f \in L_p(G)$, *para la cual* $\|f_k - f\|_{L_p(G)} \to 0$ $(k \to \infty)$.

Las propiedades 1) y 2) se prueban directamente a partir de la definición de norma dada en (2.43) y (2.44). La desigualdad 3) lleva el nombre de desigualdad de Minkowski y su

[13]Sea G un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ con medida positiva. Decimos que una función $f : G \to \mathbb{K}$ está esencialmente acotada cuando existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para casi todo $x \in G$.

demostración está basada en la aplicación de la desigualdad de Hölder[14]*[1]. La prueba de la propiedad de completitud del espacio $L_p(G)$ está dada por el teorema de Riesz-Fisher[13]. Para efectos del presente trabajo de investigación, se ha considerado un caso particular del espacio $L_p(G)$, con $p = 2$, el espacio $L_2(G)$.*

2.2.2. Espacio de Sóbolev $W_2^1(\Omega)$.

Veamos el conjunto de todas las funciones $u(x)$, para las cuales se cumplen las siguientes condiciones:

1) $u(x) \in L_2(\Omega)$*;*

2) $\forall i = 1, 2, \ldots n$, $\exists \frac{\partial u}{\partial x_i}$ *en el sentido de Sóbolev*[15]*, además* $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$

Definimos en este conjunto la norma

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2(x) \right] dx \right\}^{1/2} \tag{2.45}$$

De 1) y 2) sigue que la norma (2.45) es siempre finita para todos los elementos $u(x)$.

Definición 2.2.2 *Se denomina espacio de Sóbolev $W_2^1(\Omega)$, con norma dada por la expresión (2.45), al conjunto de funciones $u(x)$ para las cuales se cumplen las condiciones 1) y 2).*

[14] Para el caso de integrales, es la desigualdad $\left|\int f(x)\, g(x) dx\right| \leq \left[\int |f(x)|^p\, dx\right]^{1/p} \left[\int |g(x)|^q\, dx\right]^{1/q}$, en donde $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

[15] Sea $f \in C^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces para todos los α, $|\alpha| \leq p$ y $\varphi \in \mathcal{D}$ tiene lugar la fórmula de integración por partes $(\partial^\alpha f, \varphi) = \int \partial^\alpha f(x)\, \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int f(x)\, \partial^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$. Esta igualdad se toma por definición de derivada (generalizada) $\partial^\alpha f$ de la función generalizada $f \in \mathcal{D}'$: $(\partial^\alpha, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$. [2]

En el espacio $W_2^1(\Omega)$ se puede definir un producto escalar, es decir una estructura hilbertiana: A dos funciones cualesquiera $u, v \in W_2^1(\Omega)$, les hacemos corresponder el número:

$$\{u, v\} = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right] dx \qquad (2.46)$$

Entonces el espacio $W_2^1(\Omega)$ resulta ser un espacio real de Hilbert.

Una de las propiedades importantes que posee el espacio $W_2^1(\Omega)$, lo constituye el hecho que es un espacio de Banach, es decir, métrico y completo respecto de la norma (2.45).[7]

2.2.3. Espacio de Sóbolev $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$.

Definición 2.2.3 *Se denomina espacio $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ a la clausura del conjunto $\mathring{C}^{\infty}(\Omega)$ en la norma de $W_2^1(\Omega)$.*

Aquí, el cerito de la parte superior en la notación, no se refiere a la finitud[16] *de las funciones de $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, sino que, con la clausura del conjunto $\mathring{C}^{\infty}(\Omega)$ en la norma de $W_2^1(\Omega)$, se mantienen las condiciones de contorno homogéneas en media (es decir en L_2) para $u(x)$.[7]*

El espacio $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ es subespacio propio del espacio $W_2^1(\Omega)$. De su definición, sigue que para cualquier función $u(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, existe una sucesión de funciones $\{v_k(x)\}$, en donde $v_k \in \mathring{C}^{\infty}(\Omega)$, tal que,

$$\|u - v_k\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial (u - v_k)}{\partial x_i} \right|^2 + |u - v_k|^2 \right] dx \to 0 \qquad (2.47)$$

para $k \to \infty$.

[16]Una función continua por partes se denomina finita si es nula fuera de cierta bola. Es decir, la función $\varphi(x)$ es finita sí y sólo si $supp\,\varphi$ es acotado; en donde: $supp\,\varphi = \overline{[x : x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) \neq 0]}$. [2]

2.3. Teoremas fundamentales.

2.3.1. Teorema de Riesz.

Teorema 2.1 *Cualquier funcional lineal*[17] *y acotado F en un espacio de Hilbert H, puede ser representado en la siguiente forma:*

$$Fu = (u, v) \tag{2.48}$$

en donde v es cierto elemento de H, determinado de manera única por el funcional F. Además, $\|v\| = \|F\|$.[12]

Notemos que este teorema garantiza la existencia de cierto elemento $v \in H$, tal que para todos los $u \in H$ tiene lugar (2.48). Sin embargo en el caso general no es simple encontrar tal elemento a partir del funcional F dado.

Prueba

La idea de demostración del teorema de Riesz, consiste en lo siguiente: si para todos los $u \in H$, $Fu = 0$, entonces es suficiente hacer $v = 0$. Sea Fu un funcional no nulo. Denotemos con L a cierto lineal[18] *con métrica del espacio H, y constituido por todos los elementos $z \in H$, para los cuales $Fz = 0$. Ya que F es acotado, entonces L es un subespacio de H. Denotemos con K a su complemento ortogonal en H, $H = L \oplus K$;*

[17] Sean E_1 y E_2 dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo campo K. Se denomina operador lineal de E_1 en E_2 a la aplicación aditiva y homogénea del espacio E_1 en E_2: $T(x+y) = Tx + Ty$; $T(\lambda x) = \lambda T(x)$; $x, y \in E_1$. Un caso particular de este concepto lo constituye el funcional lineal u operador lineal de E_1 en K.[12]

[18] Se denomina lineal, al conjunto M cuyos elementos son funciones definidas sobre cierto conjunto definido S, si junto con las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$ de M, la función $a_1u_1(x) + a_2u_2(x)$, en donde a_1, a_2 son constantes reales arbitrarias, también pertenece a M.[12]

es decir, K consta de todos los elementos $z \in H$ ortogonales a todos los elementos de L. Luego, dado que F es un funcional no nulo, existe un $x \in K$ tal que $Fx = \alpha \neq 0$. Entonces, para el elemento $y = x/\alpha$, se cumple que $y \in K$ y $Fy = 1$.

Sea u un elemento arbitrario de H. Denotemos $Fu = \beta$. Entonces $u = (u - \beta y) + \beta y$, en donde $u - \beta y \in L$ y $\beta y \in K$. Consecuentemente,

$$(u, y) = ((u - \beta y) + \beta y, y) = \beta \|y\|^2 = \|y\|^2 \cdot Fu \tag{2.49}$$

aquí, se consideró el hecho que $(u - \beta y) \perp y$; de este modo

$$Fu = \left(u, \frac{y}{\|y\|^2}\right). \tag{2.50}$$

Luego, en el enunciado del Teorema 2.1 es suficiente hacer $v = y/\|y\|^2$.

Si v' es algún otro elemento, tal que $Fu = (u, v')$ para cualquier $u \in H$, entonces $(u, v' - v) = 0$. Luego, haciendo $u = v' - v$, obtenemos que $v' - v = 0$. De este modo el elemento v del enunciado del teorema, es único. Finalmente, de $|Fu| = |(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ sigue que $\|F\| \leq \|v\|$; sin embargo, no es posible que sea $\|F\| < \|v\|$, dado que, $Fv = (v, v) = \|v\|^2$, por lo que concluimos que $\|F\| = \|v\|$.

Fin

2.3.2. Teorema de Lax-Miligram.

Teorema 2.2 *Sea H un espacio de Hilbert con producto interno (v, u). Además, sea $B(v, u)$ una forma bilineal (es decir, una forma lineal respecto a v y a u), definida para $v \in H$, $u \in H$ y tal que existen las constantes $K > 0$ y $\alpha > 0$, independientes de v y de u, tales que para todos los v, $u \in H$, se cumplen las relaciones:*

$$|B(v, u)| \leq K \|v\| \|u\| \tag{2.51}$$

y

$$B\left(v,v\right)\geq\alpha\left\|v\right\|^{2} \tag{2.52}$$

entonces cada funcional lineal F, acotado en H se puede expresar en la forma:

$$Fv=B\left(v,z\right),\qquad v\in H \tag{2.53}$$

en donde z es un elemento del espacio H determinado de manera única por el funcional F, cumpliéndose además la desigualdad:

$$\left\|z\right\|\leq\alpha^{-1}\left\|F\right\| \tag{2.54}$$

en donde $\|F\|$ - norma del funcional F.[12]

Prueba

La prueba del Teorema 2.2 de Lax Miligram, está basado en el Teorema 2.1 de Riesz. De acuerdo con el Teorema 2.1, cada funcional lineal y acotado Fv de H, se puede expresar en la forma,

$$Fv=\left(v,t\right),\qquad v\in H, \tag{2.55}$$

en donde el elemento $t\in H$ es determinado de manera única por el funcional F y además

$$\left\|t\right\|=\left\|F\right\|. \tag{2.56}$$

Consecuentemente, si nosotros verificamos que a cada $t\in H$ le corresponde un único elemento $z\in H$, tal que para cualquier $v\in H$ tiene lugar la relación,

$$\left(v,t\right)=B\left(v,z\right) \tag{2.57}$$

y, además

$$\|z\| \leq \alpha^{-1} \|t\| \tag{2.58}$$

entonces la demostración del Teorema 2.2 será lograda, dado que (2.53) sigue de (2.55) y (2.57), además (2.54), sigue de (2.56) y (2.58).

Así, demostremos (2.57). Como primer paso, demostremos, en cierto sentido, el enunciado inverso: si $z \in H$ es fijado, entonces la forma $B(v,z)$ es un funcional lineal en el espacio H (ya que por hipótesis $B(v,z)$ es lineal con respecto a la variable v). Este funcional lineal es acotado, ya que, de acuerdo con (2.51),

$$|B(v,z)| \leq K \|v\| \|z\| . \tag{2.59}$$

Entonces, por el Teorema 2.1, existe un único elemento $t \in H$, tal que para cualquier $v \in H$ se cumple la relación,

$$B(v,z) = (v,t) , \tag{2.60}$$

y, como consecuencia de (2.59),

$$\|t\| \leq K \|z\| . \tag{2.61}$$

De acuerdo con (2.60), a cada elemento $z \in H$ de manera única le corresponde un elemento $t \in H$. Esta correspondencia determina un operador C, $t = Cz$, en el espacio H; el cual es lineal, ya que,

$$B(v,z_1) = (v,t_1) , \; B(v,z_2) = (v,t_2) \Rightarrow B(v, c_1 z_1 + c_2 z_2) = (v, c_1 t_1 + c_2 t_2)$$

De acuerdo con (2.61), el operador C es acotado. El campo de valores de este operador (es decir, el conjunto de todos los elementos t que corresponden a elementos arbitrarios z del espacio H), es cierto lineal en H; denotémoslo con L. Entonces L es un espacio *métrico, con elementos, los elementos del lineal; y con métrica, la métrica del espacio H.*

Demostremos que la aplicación C de H en L es biunívoca. Para ello es suficiente demostrar[19]*, que al elemento nulo del espacio L le corresponde el elemento nulo del espacio H. Así, sea $t = Cz$, es decir se cumple la relación (2.60), y sea $t = 0$. Entonces de (2.60) tenemos:*

$$B(v, z) = 0, \quad \forall v \in H \tag{2.62}$$

Para $v = z$, por ejemplo, (2.62) da

$$B(z, z) = 0. \tag{2.63}$$

Como consecuencia de la condición (2.52) tenemos $\|z\|^2 = 0$ de donde sigue que $z = 0$ en H. De este modo, si $t = 0$ entonces $z = 0$, por lo tanto nuestra hipótesis sobre la correspondencia biunívoca entre H y L tiene lugar. Esto significa que el operador C tiene operador inverso C^{-1} aplicando biunívocamente el espacio L en el espacio H de acuerdo con la relación:

$$z = C^{-1}t. \tag{2.64}$$

El operador C^{-1} es lineal ya que es un operador inverso de un operador lineal; y acotado, ya que $\alpha \|z\|^2 \leq |B(z, z)| = |(z, t)| \leq \|z\| \|t\|$, de donde

$$\|z\| \leq \alpha^{-1} \|t\| \tag{2.65}$$

y, consecuentemente, $\|C^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$.

[19]**Teorema**.- Sea A un operador lineal sobre el lineal D_A, y sea R_A el conjunto de sus valores. Entonces el operador inverso A^{-1} existe en tal y sólo tal caso si, $Au = 0 \quad \text{en} \quad R_A \Rightarrow u = 0 \quad \text{en} \quad D_A$.[12]

Ahora demostremos que L es subespacio del espacio H, es decir, que L es un espacio completo. Sea $\{t_n\}$ una sucesión fundamental[20] *en L (consecuentemente también en H). Dado que H es un espacio completo, esta sucesión tiene límite, es decir,* $\lim_{n\to\infty}\{t_n\} = t$ *en H. Se requiere demostrar que $t \in L$, es decir, que existe tal $z \in H$, para el cual*

$$t = Cz. \tag{2.66}$$

De (2.64) y de la acotación del operador C^{-1} sigue que $\|z_m - z_n\| \leq \|C^{-1}\| \, \|t_m - t_n\|$. Por este motivo, si $\{t_n\}$ es una sucesión fundamental en H, entonces la sucesión z_n también es una sucesión fundamental en H. De este modo $\{z_n\}$ tiene límite en el espacio H, al cual lo denotaremos con z. Así, $\lim_{n\to\infty}\{z_n\} = z$ *en H y consecuentemente* $Cz = \lim_{n\to\infty} Cz_n$*, ya que C es lineal y acotado, y por lo tanto continuo. De aquí, considerando que* $t = \lim_{n\to\infty}\{t_n\} = \lim_{n\to\infty} Cz_n = Cz$*, fácilmente obtenemos la relación (2.66). Luego, L es subespacio del espacio H. Incluso podemos demostrar que $L = H$. La demostración se la realiza por reducción al absurdo. Supongamos que $L \neq H$, entonces existe tal elemento $\omega \neq 0$ en H, ortogonal al subespacio L, tal que para cada $t \in L$ se cumple la relación*

$$(\omega, t) = 0. \tag{2.67}$$

Dado que $\omega \in H$ entonces sobre la base de (2.60), existe tal elemento único $t_0 \in L$, que para cada $v \in H$ se cumple que $B(v,\omega) = (v, t_o)$. En particular, para $v = \omega$, $B(\omega,\omega) = (\omega, t_0)$. Pero de (2.52) y de (2.67) sigue que $\alpha \|\omega\|^2 \leq |B(\omega,\omega)| = |(\omega, t_0)| = 0$, de donde $\omega = 0$ en H, lo que contradice a la hipótesis que $\omega \neq 0$. Luego $L = H$. Esto demuestra que el operador C es una aplicación biunívoca del espacio H sobre todo el

[20] La sucesión $\{u_n\}$ de elementos del espacio métrico P se denomina sucesión fundamental (ó sucesión de Cauchy) en P, si $\lim_{m\to\infty, n\to\infty} \rho(u_m, u_n) = 0$.[12]

espacio H. De aquí sigue que no sólamente a cada $z \in H$ le corresponde un único elemento $t = Cz$, para el cual tiene lugar la relación (2.60), sino que al contrario, a cada elemento $t \in H$ le corresponde un único elemento z para el cual se cumple (2.60). Así, la expresión (2.57) ha sido demostrada. El cumplimiento de (2.58) se indica en (2.65). Como se indicó al principio de la demostración, de (2.57) y (2.58) sigue el cumplimiento del enunciado del Teorema 2.2.

Fin

Capítulo 3

Resultados

3.1. Teoremas de existencia y unicidad.

Sea Q un dominio en el plano (x,t), Figura 3.1, acotado inferior y superiormente por las rectas $t=0$ y $t=T$ para cierto $T>0$; y por los costados, con las curvas $\Gamma_1 : x=\varphi_1(t)$ y $\Gamma_2 : x=\varphi_2(t)$, en donde las funciones φ_1 y φ_2 son continuas en el segmento $[0,T]$, y $\varphi_1(t)\leq\varphi_2(t)$ para todos los $t\in[0,T]$. La igualdad $\varphi_1(t_0)=\varphi_2(t_0)$ puede tener lugar sólo para $t_0=0$ ó $t_0=T$. Denotemos con Γ_0 el segmento $[\varphi_1(0),\varphi_2(0)]$ del eje Ox intersecado por las curvas Γ_1 y Γ_2 sobre la recta $t=0$ (en el caso en que $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$, el segmento Γ_0 se reduce a un punto sobre el eje Ox).

Examinemos en Q la ecuación lineal parabólica de orden $2m$:

$$L(u)\equiv\frac{\partial u}{\partial t}+(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(a(x,t)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)=f(x,t) \tag{3.1}$$

en donde:

$$a(x,t)\geq a_0>0 \qquad con \quad (x,t)\in\bar{Q}$$

El coeficiente $a(x,t)$ es una función suficientemente suave en $\bar{Q}$. La función $f(x,t) \in L_2(Q)$.

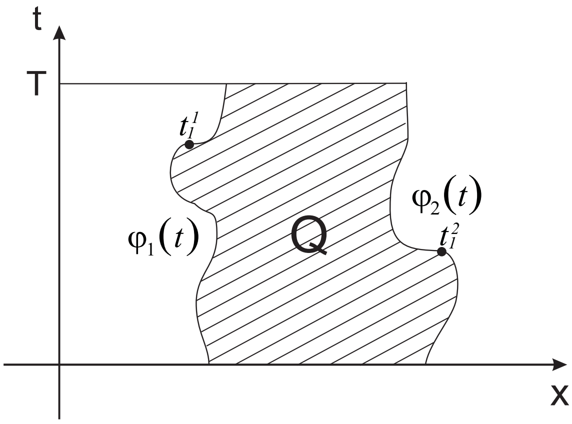

Figura 3.1: Dominio Q de definición de la ecuación (3.1), localizado en el plano (x,t), acotado inferior y superiormente por las rectas $t = 0$ y $t = T$ para cierto $T > 0$; y por los costados, por las curvas $\Gamma_1 : x = \varphi_1(t)$ y $\Gamma_2 : x = \varphi_2(t)$, y con presencia de dos puntos singulares sobre los contornos laterales: t_1^i $(i = 1, 2)$.

Nos interesa la obtención de la solución única del problema de Cauchy - Dirichlet sobre Q, para la ecuación (3.1); es decir, la pregunta sobre la existencia y unicidad de la solución $u(x,t)$ de la ecuación (3.1), que satisface para $t = 0$ y sobre las curvas Γ_i, $i = 1, 2$, las siguientes condiciones homogéneas:

$$u\,|_{\Gamma_0} = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\,|_{\Gamma_1} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\,|_{\Gamma_2} = 0 \qquad i = 0, ..., m-1 \tag{3.3}$$

Es conocido [8], que la existencia y unicidad de la solución del problema (3.1)-(3.3), exige que se impongan sobre las curvas de contorno Γ_1 y Γ_2 otras condiciones, además de la continuidad. Por ese motivo, se ha supuesto que las funciones φ_i,

$i = 1, 2$, son funciones suficientemente suaves en $[0, T]$, con excepción, posiblemente de ciertos puntos $t_1^i, \ldots, t_{N_i}^i \in [0, T]$, $i = 1, 2$. Las curvas φ_i en alguna vecindad de los puntos t_s^i, $s = 1, \ldots, N_i$, $i = 1, 2$ deben ser tales que:

$$\int_{t_s^i}^{t_s^i+\epsilon} \frac{dt}{\left[\varphi_i(t) - \varphi_i(t_s^i)\right]^{2m}} = \infty \tag{3.4}$$

y

$$\int_{t_s^i-\epsilon}^{t_s^i} \frac{dt}{\left[\varphi_i(t) - \varphi_i(t_s^i)\right]^{2m}} = \infty \tag{3.5}$$

para cada $\epsilon \in \left(0, min_{s\neq j}\left|t_s^i - t_j^i\right|\right)$, si el punto t_s^i no coincide con $t = 0$ o $t = T$. Si $t_s^i = 0$ entonces se supone el cumplimiento sólo de la condición (3.4); y si, $t_s^i = T$, entonces se supone el cumplimiento de la condición (3.5)[1].

Convenimos en denominar al punto $A_s^i = (\varphi_i(t_s^i), t_s^i)$, punto singular del contorno Γ_i, $s = 1, \ldots, N_i$, $i = 1, 2$.

Entonces se podría decir que permitimos que en los puntos singulares A_s^i, la tangente al contorno Γ sea paralela al eje Ox, es decir, permitimos que en el contorno existan puntos, en los cuales las características de la ecuación (3.1) tocan al contorno en un orden no muy grande.

El objetivo principal es la demostración de la existencia y unicidad, con cualquier miembro derecho $f(x,t) \in L_2(Q)$, de cierta solución débil del problema de contorno (3.1)-(3.3), si el contorno Γ satisface la condición formulada (3.4) y/o (3.5).

Para definir la solución débil del problema (3.1)-(3.3) precisamos los siguientes espacios de Sóbolev $\overset{\circ}{W}{}_{(t,x)}^{(0,m)}(Q)$ y $\overset{\circ}{W}{}_{(t,x)}^{(1,m)}(Q)$ que serán utilizados[2].

[1] Las condiciones (3.4) y (3.5) provienen de la condición de Lipschitz; en efecto, de: $|\varphi(t) - \varphi(a)| \leq M|t-a|^{\alpha}$, sigue que: $|\varphi(t) - \varphi(a)|^2 \leq M^2|t-a|^{2\alpha}$, $\frac{1}{|\varphi(t)-\varphi(a)|^2} \geq \frac{1}{M^2|t-a|^{2\alpha}}$, $\int_a^b \frac{dt}{|\varphi(t)-\varphi(a)|^2} \geq \int_a^b \frac{dt}{M^2|t-a|^{2\alpha}} = M' \int_a^b \frac{dt}{|t-a|^{2\alpha}} = \infty$ para $\alpha > \frac{1}{2}$

[2] Denotamos por $\mathrm{W}_{(t,x)}^{(s,k)}(Q)$ al espacio de funciones $u(x,t)$ con derivada generalizada (en el sentido

Por $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$*, denotamos al espacio de funciones, obtenido por medio de la clausura del conjunto* $C_0^\infty\left(\bar{Q}\right)$ *de funciones infinitamente diferenciables en* $\bar{Q}$*, nulas en cierta vecindad del contorno del dominio* Q*; con norma inducida por el producto interno:*

$$[u,v] = \int_Q \sum_{i=0}^{m} \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\frac{\partial^i v}{\partial x^i} dxdt \tag{3.6}$$

Por $\overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q)$*, denotamos al espacio de funciones, obtenido por medio de la clausura del conjunto de funciones infinitamente diferenciables en* $\bar{Q}$*, nulas en todo lugar del contorno de* Q *excepto en el segmento* Γ_0 *(si éste no se reduce a un punto); con norma inducida por el producto interno:*

$$\{u,v\} = [u,v] + \int_Q \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} dxdt \tag{3.7}$$

Definición 3.1 *La función* $u\left(x,t\right) \in \overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}\left(Q\right)$ *se denomina solución débil*[3] *del problema (3.1)-(3.3), si para cualquier función* $v\left(x,t\right) \in \overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q) \cap C^\infty\left(\bar{Q}\right)$ *tiene lugar la siguiente igualdad:*

$$\int_Q \left(-u\frac{\partial v}{\partial t} + a\left(x,t\right)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\frac{\partial^m v}{\partial x^m}\right) dxdt = \int_Q fvdxdt \tag{3.8}$$

de Sóbolev), hasta el orden k respecto a x y hasta el orden s respecto a t, y de cuadrados integrables sobre Q.

[3]En el planteamiento de problemas de contorno, encontramos aquellos, en los que sus soluciones se suponen suficientemente regulares y satisfacen a la ecuación en cada punto de su campo de definición. Tales soluciones son denominadas clásicas. De este modo, el planteamiento clásico de estos problemas, presuponen una suficiente regularidad de los datos del problema. Sin embargo, en los problemas más interesantes, estos datos pueden tener fuertes singularidades. Por este motivo, para tales problemas un planteamiento clásico resulta insuficiente. Por lo que, para plantear tales problemas se requiere desistir (parcial o completamente) de la exigencia de regularidad de la solución en su dominio e introducir las denominadas soluciones débiles. [2]

Denotemos con $B(u,v)$, a la forma bilineal que se encuentra en el miembro izquierdo de la ecuación (3.8) con $u \in \overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ y $v \in \overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q) \cap C^{\infty}\left(\bar{Q}\right)$, es decir:

$$B(u,v) = \int_Q \left(-u\frac{\partial v}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\frac{\partial^m v}{\partial x^m}\right) dxdt \tag{3.9}$$

por lo tanto (3.8) puede ser expresado como:

$$B(u,v) = \int_Q fvdxdt \tag{3.10}$$

Ahora es posible formular el resultado principal del presente trabajo:

Teorema 3.1 *Si el contorno Γ del dominio cumple con las condiciones expresadas en (3.4) y/o (3.5), entonces para cualquier función $f(x,t) \in L_2(Q)$ existe en $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ solución[4] única del problema (3.1)-(3.3).*

Prueba

Empezamos con la prueba de la existencia de la solución para el problema planteado. Ya que la forma bilineal $B(u,v)$ (3.9) es acotada para cualesquier $v \in \overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q)$ y $u \in \overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$, entonces de acuerdo con el teorema de Lax-Miligram existe en $\overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q)$ un operador A lineal y acotado tal que:

$$B(u,v) = [u, Av] \tag{3.11}$$

en donde, los corchetes denotan el producto interno en $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$. El operador A en el espacio $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ es no acotado, pero su dominio de definición $\overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q)$ es denso en $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$. Ya que $f(x,t) \in L_2(Q)$, entonces el funcional $\int fvdxdt$ también es acotado

[4]Aquí, se entiende por solución a la dada por la definición 3.1.

en $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$*; por ello, de acuerdo con el mismo teorema de Lax - Miligram existe un elemento único* $F \in \overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ *tal que:*

$$\int_Q fvdxdt = [F, v] \tag{3.12}$$

para cualesquier $v \in \overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q)$.

De las expresiones (3.10), (3.11) y (3.12), sigue que la solución débil $u(x,t)$ *de nuestro problema, debe satisfacer la identidad:*

$$[u, Av] = [F, v] \tag{3.13}$$

para cualesquier función $v \in \overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q)$.

Establezcamos ante todo, que el operador A, definido de $\overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q)$ *en* $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ *tiene inverso acotado* A^{-1}*, definido de* $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ *en* $\overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q)$*. Para esto, veamos, con cualquier* $v \in \overset{\circ}{W}{}^{(1,m)}_{(t,x)}(Q)$*, la forma cuadrática:*

$$[v, Av] = \int_Q \left[-v\frac{\partial v}{\partial t} + a(x,t)\left(\frac{\partial^m v}{\partial x^m}\right)^2\right] dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} v^2 dx + \int_Q a(x,t)\left(\frac{\partial^m v}{\partial x^m}\right)^2 dxdt \geq a_0 [v, v] \tag{3.14}$$

donde $a_0 = inf\, a(x,t)$.

Aquí, la integral respecto a Γ_0 *no está presente si el segmento* Γ_0 *se reduce a un punto. De (3.14) sigue que* $\|A^{-1}\| \leq a_0^{-1}$.

Así, el operador A tiene dominio de definición denso en todo lugar en $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$*, y tiene inverso acotado. Entonces, tiene además operador conjugado* A^**, cuyo campo de valores coincide con todo el espacio* $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ [5]*. Esto significa que en el dominio*

[5]**Lema**.- Sea A un operador lineal que actúa sobre el espacio de Hilbert H. Si el campo de su definición Ω_A es denso en H y el operador A tiene operador inverso A^{-1} acotado, entonces el campo de valores R_{A^*} de su operador conjugado A^* coincide con todo H. [9]

de definición $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ *del operador* A^**, se encuentra por lo menos un elemento* u*, para el cual* $A^*u = F$*. Es claro que este elemento constituye la solución de la ecuación (3.13), y además, la solución débil del problema planteado.*

A continuación probaremos la unicidad de la solución del problema planteado. Sea la función $u\,(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ *solución débil de la ecuación:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(a\,(x,t)\,\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right) = 0; \tag{3.15}$$

es necesario demostrar que $u\,(x,t) \equiv 0$ *en* Q*.*

Ante todo, notemos que $u\,(x,t)$ *es solución clásica*[6] *de la ecuación (3.15) en* Q *y satisface las condiciones (3.2) y (3.3) en el sentido clásico en los puntos no singulares del contorno del dominio* Q*. Sean* $t_1, \ldots, t_N$ *- ordenadas de los puntos singulares del contorno, dispuestos en orden no decreciente:* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_N \leq T$*, y sea para empezar* $t_1 = 0$*,* $t_2 > 0$*,* $\varphi_1\,(0) \neq \varphi_2\,(0)$ *y el punto singular correspondiente a la ordenada* $t = t_1 = 0$*, se encuentra en el origen de coordenadas, en la parte derecha del contorno:* $\Gamma_2 : x = \varphi_2\,(t)$*,* $\varphi_2\,(0) = 0$*. Además supongamos que para pequeños* $t > 0$ *la curva* Γ_2 *va del origen de coordenadas hacia la derecha, al primer cuadrante. Sea* $\epsilon > 0$ *- tal número* $\epsilon < t_2$*, que para* $t \in (0,\epsilon]$ *la derivada* $\varphi_2'\,(t) \geq 0$ *y* $\varphi_1'\,(t)$ *no cambia de signo (tal número siempre es posible encontrar), Figura 3.2.*

Veamos el trapecio curvilíneo $R = Q \cap (0 < t < \epsilon)$*, Figura 3.3. El único punto singular de sus lados laterales es el origen de coordenadas, por ello en todo lugar fuera del origen de coordenadas la solución* u *en* R *de la ecuación (3.15), satisface a esta ecuación y a las condiciones de contorno (3.2), (3.3) en el sentido clásico.*

[6] Ver pie de página N$^{\text{o}}$ 3 en la página 40.

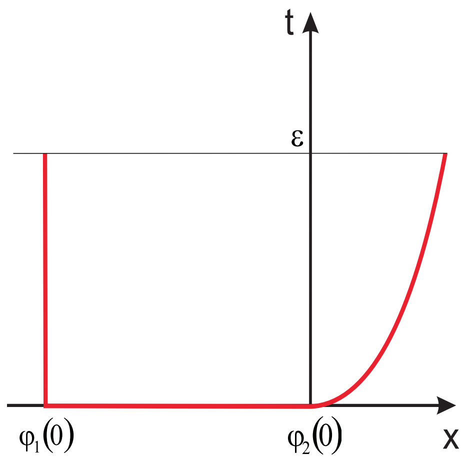

Figura 3.2: Dominio con el punto singular ubicado en el origen de coordenadas, en la parte derecha del contorno: $\Gamma_2 : x = \varphi_2(t)$, $\varphi_2(0) = 0$; correspondiente a la ordenada $t = t_1 = 0$.

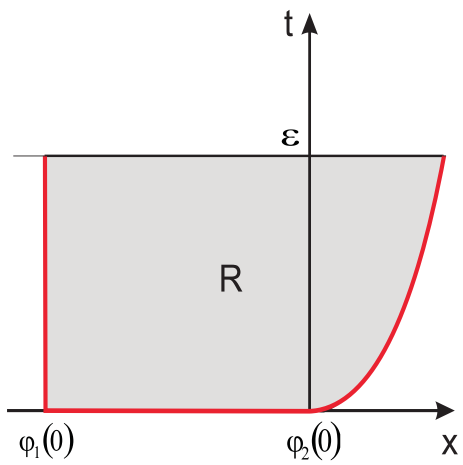

Figura 3.3: Trapecio curvilíneo $R = Q \cap (0 < t < \epsilon)$ con único punto singular de sus lados laterales en el origen de coordenadas.

Tomemos el número $\mu > 0$ suficientemente pequeño de tal modo que se cumpla la desigualdad $\varphi_1(0) < -\mu$ (tal número es posible encontrar ya que se supuso que $\varphi_1(0) \neq 0$). Denotemos con R_μ, Figura 3.4, la intersección del trapecio R con el semiplano $x < -\mu$. Si el punto $(x,t) \in R_\mu$, entonces:

$$u^2(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} u^2 dt = 2\int_0^t u u_t dt =$$

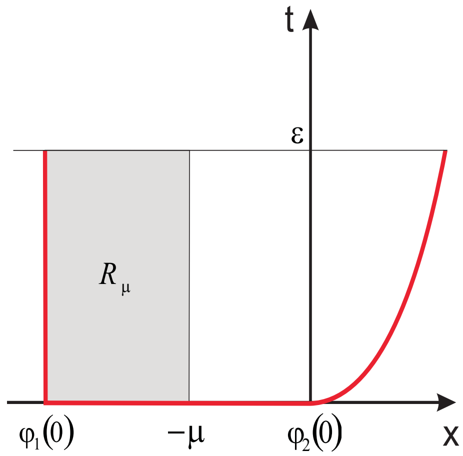

Figura 3.4: Intersección del trapecio curvilíneo R, con el semiplano $x < -\mu$.

$$= 2(-1)^{m+1}\int_0^t u\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(a(x,t)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)dt, \tag{3.16}$$

con $x \geq \varphi_1(0)$, *y*

$$u^2(x,t) = \int_{\psi_1(x)}^t \frac{\partial}{\partial t}u^2 dt = 2(-1)^{m+1}\int_{\psi_1(x)}^t u\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(a(x,t)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)dt \tag{3.17}$$

con $x \leq \varphi_1(0)$.

Aquí, por función $t = \psi_1(x)$ *se entiende, la función inversa de* $x = \varphi_1(t)$ *en las partes de monotonía estricta de la función* $\varphi_1(t)$ *y que toma todos los valores* $t \in [t_0, t_1]$ *en aquellos puntos* $x = x_0$ *para los que* $\varphi_1(t) = x_0$ *con* $t \in [t_0, t_1]$, *(de manera análoga se define la función* $t = \psi_2(x)$ *respecto de la función* $x = \varphi_2(t)$*).*

Integrando cada una de las fórmulas obtenidas respecto a $x \in (\varphi_1(t), -\mu)$ *con* $t = \epsilon$, *obtenemos luego de la integración por partes:*

$$\int_{\varphi_1(\epsilon)}^{-\mu} u^2(x,\epsilon)\,dx = 2(-1)^{m+1}\int\int_{R_\mu} u\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(a(x,t)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)dxdt =$$

$$= -2\int\int_{R_\mu} a(x,t)\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dxdt +$$

$$+2\int_0^{\epsilon}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m+i+1}\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\frac{\partial^{m-i-1}}{\partial x^{m-i-1}}\left(a\left(x,t\right)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)|_{x=-\mu}\,dt \tag{3.18}$$

Denotamos con $F\left(t\right)$ la función:

$$\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m+i+1}\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\frac{\partial^{m-i-1}}{\partial x^{m-i-1}}\left(a\left(x,t\right)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)$$

para $x = 0$. Antes de continuar con nuestro razonamiento, demostremos el siguiente lema:

Lema 3.1 *La función $F\left(t\right)$ es continua para $t \in (0,\epsilon)$ y $F\left(t\right) \in L_1\left(0,\epsilon\right)$.*

Prueba

La primera aseveración del lema sigue de la suficiente regularidad de la solución u fuera del punto singular $(0,0)$; la segunda, del hecho que la forma cuadrática $\int_0^{\epsilon} F\left(t\right)dt$ es acotada para $u \in \overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(R)$, ya que el orden sumario de diferenciación de la función $u\left(x,t\right)$ respecto a x en cada miembro de la expresión subintegral no sobrepasa $2m-1$.

Fin

Con ayuda de este lema se puede hacer tender al límite en la igualdad (3.18) con $\mu \to 0$:

$$\int_{\varphi_1(\epsilon)}^{0} u^2\left(x,\epsilon\right)dx = -2\int\int_{R_0} a\left(x,t\right)\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dxdt + 2\int_0^{\epsilon} F\left(t\right)dt \tag{3.19}$$

En la igualdad (3.19) con R_0 se ha denotado al conjunto $R \cap (x<0)$, Figura 3.5.

Sea ahora $(x,t) \in R \cap (x>0) \equiv R_1$, Figura 3.6.

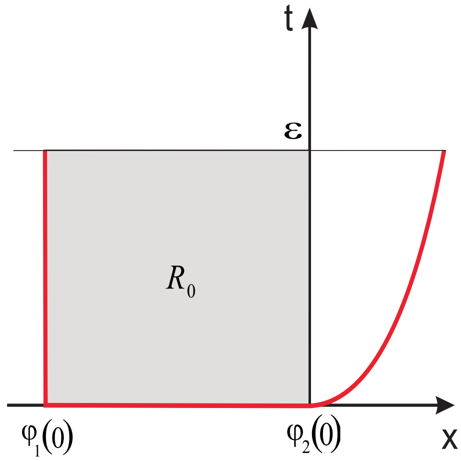

Figura 3.5: Conjunto $R_0 = R \cap (x < 0)$

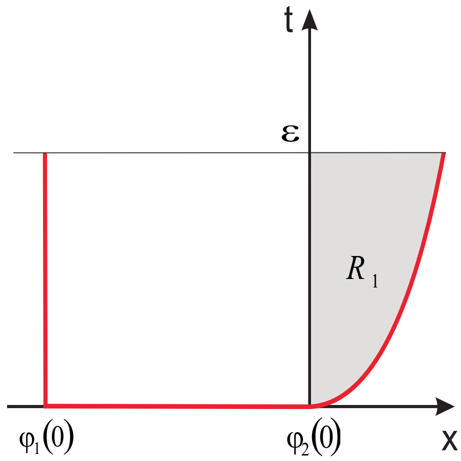

Figura 3.6: Conjunto $R_1 = R \cap (x > 0)$

Denotemos con $\zeta(t)$ una función tal que para $0 < t < \epsilon/2$ es igual a $exp\left(-\int_t^{\epsilon/2} \frac{d\tau}{(\varphi_2(\tau))^{2m}}\right)$, para $t \leq 0$ igual a cero, y para $t \geq \epsilon/2$ igual a uno. La función $\zeta(t)$ así definida, es continua (su continuidad en $t = 0$ sigue de la divergencia de la integral [7] $\int_0^{\epsilon/2} \frac{d\tau}{(\varphi_2(\tau))^{2m}}$*), su derivada es integrable en valor absoluto ya que para $t < 0$ y $t > \epsilon/2$, $\zeta'(t) \equiv 0$, y para $t \in (0, \epsilon/2)$*

[7] Aquí, por primera vez se utiliza una de las condiciones (3.4) y/o (3.5) impuestas sobre las curvas Γ_1, Γ_2 del contorno del dominio.

$$\zeta'(t) = \frac{1}{(\varphi_2(t))^{2m}} exp\left(-\int_t^{\epsilon/2} \frac{d\tau}{(\varphi_2(\tau))^{2m}}\right) \geq 0$$

$$\int_0^{\epsilon/2} |\zeta'(t)|\, dt = \int_0^{\epsilon/2} \zeta'(t)\, dt = \zeta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) - \zeta(0) = 1.$$

Junto con la función $\zeta(t)$ para cualquier $\delta \in (0, \epsilon/2)$ veamos también la funcion $\zeta_\delta(t) = \zeta(t-\delta)$. Es claro que $\zeta_\delta(t) \equiv 0$ para $t \leq \delta$, $\zeta_\delta(t) \equiv 1$ para $t \geq \epsilon/2 + \delta$. Multipliquemos ahora la identidad (3.15), para $(x,t) \in R_1$, por $u(x,t)(\zeta_\delta(t))^s$ con cierto $s \in (0,1]$ e integremos la igualdad obtenida respecto al dominio R_1 (en realidad, debido a las propiedades de la función $\zeta_\delta(t)$, la integración se lleva a cabo sólo respecto al dominio $R_1 \cap (t > \delta)$, es decir, en el dominio de integración no participa el punto singular $(0,0)$)

$$0 = \int\int_{R_1 \cap (t>\delta)} u(\zeta_\delta)^s \left(u_t + (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(a(x,t)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)\right) dxdt =$$

$$= -\frac{s}{2}\int\int_{R_1 \cap (t>\delta)} u^2 \zeta'_\delta (\zeta_\delta)^{s-1}\, dxdt + \int_0^\epsilon F(t)(\zeta_\delta)^s\, dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\varphi_2(\epsilon)} u^2(x,\epsilon)(\zeta_\delta)^s\, dx + \int\int_{R_1 \cap (t>\delta)} (\zeta_\delta)^s a(x,t)\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dxdt.$$

Para la obtención de esta igualdad, se han utilizado las condiciones de contorno (3.3) sobre Γ_2 y el hecho que $\zeta_\delta = 0$ para $t = \delta$; (la función $F(t)$, es la misma que la del Lema 3.1 y que en la igualdad (3.19)).

Tomando límite en la última igualdad con $\delta \to 0$, obtenemos:

$$0=-\frac{s}{2}\int\int_{R_1}u^2\zeta'(\zeta)^{s-1}\,dxdt+\int_0^{\epsilon}F(t)(\zeta)^s\,dt+$$

$$+\int\int_{R_1}(\zeta)^s a(x,t)\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^{\varphi_2(\epsilon)}(\zeta)^s u^2(x,\epsilon)\,dx \tag{3.20}$$

(el paso al límite es posible de acuerdo con las propiedades de $u(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(R)$*; las propiedades resaltadas de la función* $\zeta(t)$*; el Lema 3.1 para la función* $F(t)$ *y la igualdad* $\zeta_\delta(\epsilon)\equiv 1$ *para todo* $\delta\in\left[0,\frac{\epsilon}{2}\right]$*).*

Acotemos ahora: $\int\int_{R_1}u^2\zeta'\zeta^{s-1}dxdt$.

Para $(x,t)\in R_1$ *de acuerdo con las condiciones de contorno (3.3), tenemos:*

$$u(x,t)=\int_{\varphi_2(t)}^{x}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial\xi}d\xi,$$

de donde, por la desigualdad de Cauchy-Shwarz:

$$u^2(x,t)\le\left|\varphi_2(t)\int_0^{\varphi_2(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2 d\xi\right|.$$

Integrando esta última desigualdad respecto a $x\in(0,\varphi_2(t))$*, obtenemos la desigualdad:*

$$\int_0^{\varphi_2(t)}u^2(x,t)\,dx\le(\varphi_2(t))^2\int_0^{\varphi_2(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3.21}$$

de manera similar obtenemos la acotación:

$$\int_0^{\varphi_2(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\le(\varphi_2(t))^2\int_0^{\varphi_2(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{3.22}$$

y así sucesivamente, la acotación:

$$\int_0^{\varphi_2(t)} \left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}\right)^2 dx \leq (\varphi_2(t))^2 \int_0^{\varphi_2(t)} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dx \tag{3.23}$$

reemplazando la desigualdad (3.23) en la que la derivada del miembro izquierdo es de orden $m-1$*, en una desigualdad previa con derivada de orden* $m-2$ *y así sucesivamente hasta llegar a (3.21), obtenemos finalmente:*

$$\int_0^{\varphi_2(t)} u^2(x,t)\, dx \leq (\varphi_2(t))^{2m} \int_0^{\varphi_2(t)} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dx \tag{3.24}$$

para todo $t \in (0, \epsilon]$.

Multiplicamos ahora la expresión (3.24) por la función no negativa $\zeta^{s-1}\zeta'$ *e integramos la desigualdad obtenida respecto a* $t \in (0, \epsilon)$*:*

$$\int\int_{R_1} u^2 \zeta^{s-1}\zeta' dxdt \leq \int_0^{\epsilon} (\varphi_2(t))^{2m} \zeta^{s-1}\zeta' dt \int_0^{\varphi_2(t)} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dx =$$

$$= \int_0^{\epsilon} \int_0^{\varphi_2(t)} \zeta^s \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dxdt = \int\int_{R_1} \zeta^s \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dxdt.$$

por ello, uniformemente para $s \in [0,1]$*, tenemos:*

$$0 \leq \int\int_{R_1} u^2 \zeta^{s-1}\zeta' dxdt \leq \int\int_{R_1} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dxdt = const. \tag{3.25}$$

De la desigualdad (3.25) sigue que $\lim_{s\to+0} \frac{s}{2} \int\int_{R_1} \zeta^{s-1}\zeta' u^2 dxdt = 0$*, por ello en la igualdad (3.20) se puede tender al límite con* $s \to +0$*. Con lo cual obtenemos:*

$$2\int\int_{R_1} a(x,t) \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dxdt + \int_0^{\varphi_2(\epsilon)} u^2(x,\epsilon)\, dx = -2\int_0^{\epsilon} F(t)\, dt$$

sumando esta última igualdad con la igualdad (3.19), obtenemos finalmente:

$$2\int\int_R a\,(x,t)\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 dxdt + \int_{R\cap(t=\epsilon)} u^2\,(x,\epsilon)\,dx = 0,$$

de donde sigue que $u \equiv 0$ *en* R.

<u>Fin</u>

3.2. Aplicación del teorema demostrado.

Veamos en el plano (x, t) *la curva* Γ *con ecuación* $x^2 = -2t \ln t$, *Figura 3.7. Visiblemente es una curva cerrada homeomorfa a la circunferencia, y pasa por los puntos* $H = (0, 0)$ *y* $B = (0, 1)$ *simétricamente al eje* Ot. *Esta curva presenta dos puntos,* H *y* B, *con tangentes horizontales.*

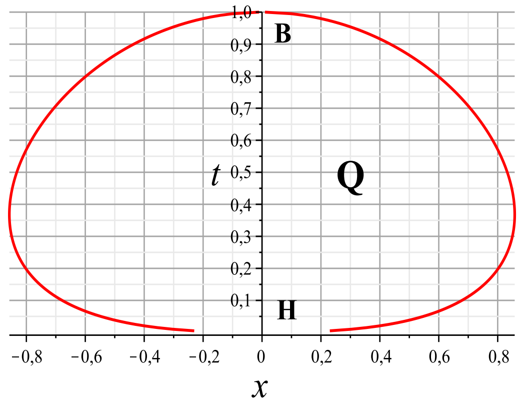

Figura 3.7: Dominio Q acotado, con contorno homeomorfo a la circunferencia y dos puntos singulares: B y H.

El orden de contacto de la tangente con la curva Γ *en los puntos* H *y* B *es tal que:*

$$\int_0^{\epsilon} \frac{dt}{-2t \ln t} = \infty \qquad y \qquad \int_{1-\epsilon}^{1} \frac{dt}{-2t \ln t} = \infty \qquad \forall \epsilon > 0$$

de este modo, el dominio Q *limitado por la curva* Γ *satisface todas las condiciones del teorema demostrado; por ello, la solución en el espacio* $\mathring{W}^{(0,1)}_{(t,x)}(Q)$ *de la ecuación de difusión:*

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{3.26}$$

con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas:

$$u \mid_{\Gamma} = 0 \tag{3.27}$$

es idénticamente nula.

Cabe notar que el teorema demostrado deja de tener validez en el espacio de Hilbert $L_2(Q)$*, pues en este caso, es posible mostrar que se irrumpe el teorema de unicidad; dado que, en el espacio* $L_2(Q)$ *existe además de la solución nula, la siguiente solución no trivial del problema (3.26)-(3.27):*

$$u(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - 1$$

En efecto, la función $u(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - 1$ *es en* Q *solución del problema (3.26)-(3.27) y pertenece a* $L_2(Q)$*, ya que:*

$$\int\int_Q \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{2t}} dxdt = 2\int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^{\sqrt{-2t\ln t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx =$$

$$= 4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \int_0^{\sqrt{-\frac{\ln t}{2}}} e^{-2x^2} dx < \infty$$

Discusión

En lo referente a la prueba de la existencia de la solución de $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ *en ninguna parte se utilizaron las condiciones (3.4), (3.5) impuestas complementariamente a la continuidad de las funciones* φ_i, $i = 1, 2$ *que definen los contornos* Γ_1, Γ_2 *del dominio* Q. *De este modo, el teorema de existencia de la solución débil de* $\overset{\circ}{W}{}^{(0,m)}_{(t,x)}(Q)$ *del problema de contorno tratado, tiene lugar sólo con la proposición de continuidad de las funciones* φ_1 *y* φ_2 *en el segmento* $[0, T]$.

Para el caso de la prueba de la unicidad, ésta ha sido tratada para el trapecio R, *cuya definición ha sido dada en el inicio de la prueba. Ahora, si el punto singular nuevamente se encuentra sobre la curva* Γ_2 *y la curva* Γ_2 *ingresa al segundo cuadrante; es decir, para números* t *suficientemente pequeños (con* $\varphi_2'(t) \leq 0$*); entonces, la prueba repectiva de que* $u \equiv 0$ *en* R, *sigue utilizando el mismo método desarrollado en la demostración.*

El caso cuando el punto singular se encuentra en el lado izquierdo del contorno Γ_1 *(con* $t = 0$*), así como el caso de presencia de dos puntos singulares sobre* Γ_1 *y* Γ_2 *(con* $t = 0$*), se examina también de manera similar.*

Conclusiones

Podemos mencionar las siguientes conclusiones:

- *La continuidad de las funciones que representan al contorno móvil del dominio, constituye una condición suficiente de existencia de la solución del problema de Cauchy-Dirichlet de tipo parabólico, en un dominio con frontera libre y puntos singulares, de un espacio de Sóbolev predefinido.*

- *Las condiciones de Lipschitz constituyen condiciones suficientes, que deberán cumplir las curvas del contorno móvil del dominio en las vecindades de los puntos singulares, para garantizar la unicidad de la solución débil del problema de Cauchy-Dirichlet para problemas parabólicos definidos en un dominio con frontera libre y puntos singulares, en un espacio de Sóbolev predefinido.*

- *En el espacio de Hilbert* $L_2(Q)$*, las condiciones de Lipschitz impuestas en las vecindades de los puntos singulares, no son suficientes para garantizar la unicidad de la solución del problema de Cauchy-Dirichlet de tipo parabólico sobre un dominio con frontera libre y puntos singulares.*

Bibliografía

[1] O. Besov, B. P. Ilyin, C. M. Nikolsky. *Representación Integral de Funciones y Teoremas de Inmersión. Edit. Nauka. Moscú, 1996.*

[2] B. C. Bladimirov. *Ecuaciones de la Física Matemática. Edit. Nauka. Moscú, 1988.*

[3] Yu. Egorov.. *Ecuaciones Diferenciales Lineales de Tipo Principal, Edit. Nauka. Moscú, 1984.*

[4] O. Embergenovich. *Sobre problemas de contorno de conducción del calor en dominios degenerados y la subsiguiente generación de clases de ecuaciones integrales singulares tipo Volterra. Edit. AH Kaz CCP, Alma Ata, 1978.*

[5] A. Friedman. *Partial diferential equations of parabolic type. Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, N. J. 1964.*

[6] L. Kamuinin. *Sobre la dependencia de la solución del problema mixto para la ecuación parabólica, del contorno. Edit. Manuscrito de la Academia de Ciencias URSS. Tomo 140. Nº 6, 1961.*

[7] B. N. Maslennikova. *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Edit. Universidad de la Amistad de los Pueblos. Moscú, 1988.*

[8] B. Mijailov. *Sobre el problema de Dirichlet y el primer problema mixto para la ecuación parabólica. DAN CCCP, T. 140, Nº 2,* (1961), $303 - 306$.

[9] B. Mijailov. *Problemas de contorno para ecuaciones diferenciales. DAN CCCP, T. 61, Nº 91,* (1967), $47 - 58$.

[10] I. Petrowsky. *Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung. Compositio math., 1 Moskau,* (1935).

[11] A. Projorov y otros. *Diccionario enciclopédico matemático. Moscú. Enciclopedia soviética* (1988).

[12] K. Rektoris. *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Boston - USA. Dr. Reidel Publishing Company. SNTL - Publishers of Technical Literature* (1980).

[13] C. L. Sóbolev. *Ecuaciones de la Física Matemática. Edit. Nauka. Moscú, 1992.*

[14] A. Tijonov. A. Samarsky. *Ecuaciones de la Física Matemática. Editorial Mir Moscú* (1983).