



**UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS HISTÓRICO SOCIALES Y EDUCACIÓN**  
**UNIDAD DE POSGRADO**

**TESIS**

**ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS SUSTENTADAS EN LA TEORÍA  
DE VAN HIELE PARA MEJORAR EL NIVEL DE PENSAMIENTO  
GEOMÉTRICO DE LOS ESTUDIANTES DEL 4° "B" DE LA  
INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULIO RAMÓN RIBEYRO, LA PACCHA  
DISTRITO Y PROVINCIA DE CAJAMARCA EN EL PERIODO 2015.**

**Presentada para obtener el grado académico de Maestro en Ciencias  
de la Educación con mención en Psicopedagogía Cognitiva**

**Por:**

**Bach. Oliver Christian Plasencia Núñez**

**LAMBAYEQUE, PERÚ 2019**

**ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS SUSTENTADO EN LA TEORÍA DE  
VAN HIELE PARA MEJORAR EL NIVEL DE PENSAMIENTO  
GEOMÉTRICO DE LOS ESTUDIANTES DEL 4° “B” DE LA  
INSTITUCIÓN EDUCATIVA JULIO RAMÓN RIBEYRO, LA PACCHA  
DISTRITO Y PROVINCIA DE CAJAMARCA EN EL PERIODO 2015.**

.....

Oliver Plasencia Núñez

Autor

.....

Rafael García Caballero

Asesor

**Presentado a la unidad de posgrado de la Facultad de Ciencias  
Histórico Sociales y Educación de la Universidad Nacional Pedro  
Ruiz Gallo para obtener el grado de Maestro en Ciencias de la  
Educación con mención en Psicopedagogía Cognitiva**

**Aprobado por:**

.....

Jorge Castro Kikuchi

Presidente Jurado

.....

Carlos Horna Santacruz

Secretario Jurado

.....

Manuel Bances Acosta

Vocal Jurado

## **DEDICATORIA**

A Luis, Soledad, Miluska, Kevin y Nathaly, seres queridos, que de manera incondicional me apoyaron en la culminación de mi posgrado y en la elaboración de esta tesis.

## **AGRADECIMIENTO**

A Dios por darme vida y salud y al  
Dr. Rafael Cristóbal García  
Caballero cuyos conocimientos,  
habilidades y valiosos aportes  
materializaron el presente trabajo.

## **RESUMEN**

La presente investigación denominada “Estrategias Metodológicas sustentadas en la Teoría de Van Hiele para mejorar el Nivel de Pensamiento Geométrico de los estudiantes del 4° “B” de la Institución Educativa Julio Ramón Ribeyro, La Paccha distrito y provincia de Cajamarca en el periodo 2015”, surge del análisis de la problemática detectada en el aula donde dichos discentes manifestaron carencias al identificar figuras geométricas, analizar propiedades, elaborar conceptos, realizar deducciones y demostraciones.

Los fundamentos que ayudaron a la comprensión, análisis y propuesta de esta indagación, devienen de la teoría constructivista de Van Hiele, quien plantea el aprendizaje de la geometría por niveles.

La muestra constituida por 32 estudiantes, tuvo como objetivo general incrementar en ellos el nivel de pensamiento geométrico, mediante la efectiva aplicación de Estrategias Metodológicas basadas en la Teoría de Van Hiele, tal como quedó demostrado en los cuadros y gráficos estadísticos derivados del Pre y Postest.

**Palabras Claves: Geometría, Niveles de Pensamiento, Fases de Aprendizaje, Estrategias Metodológicas**

## **ABSTRACT**

This research called "Methodological Strategies based on the Van Hiele Theory to improve the level of Geometric Thinking of the students of the 4th" B "of the Julio Ramón Ribeyro Educational Institution, La Paccha district and province of Cajamarca in the 2015 period" , arises from the analysis of the problems detected in the classroom where said students manifested deficiencies when identifying geometric figures, analyzing properties, elaborating concepts, making deductions and demonstrations.

The foundations that helped the understanding, analysis and proposal of this inquiry, come from the constructivist theory of Van Hiele, who proposes the learning of geometry by levels.

The sample constituted by 32 students, had as general objective to increase in them the level of geometric thought, through the effective application of Methodological Strategies based on the Theory of Van Hiele, as it was demonstrated in the tables and statistical graphs derived from the Pre and Posttest.

**Key Words: Geometry, Thought Levels, Learning Phases, Methodological Strategies.**

## INTRODUCCIÓN

Uno de los propósitos más significativos del actual Sistema Educativo, es lograr estudiantes con aprendizajes estratégicos y competentes, vale decir capaces de conseguir su propio desarrollo personal, académico, social y valorativo, lo según el informe Delors, implica aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a convivir y aprender a ser.

Por esto la investigación denominada “Estrategias Metodológicas sustentadas en la Teoría de Van Hiele para mejorar el Nivel de Pensamiento Geométrico de los estudiantes del 4° “B” de la Institución Educativa Julio Ramón Ribeyro, La Paccha distrito y provincia de Cajamarca en el periodo 2015”, se origina al observar en dichos discentes, deficiencias al identificar figuras, analizar propiedades, elaborar conceptos, realizar deducciones y demostraciones de geometría, o sea exhibir, un bajo nivel de pensamiento geométrico que trae como consecuencia bajo rendimiento académico en el área de matemática.

El objeto de estudio de esta indagación es el proceso enseñanza aprendizaje en el área de matemática y su campo de acción, el desarrollo de Estrategias Metodológicas basadas en la teoría de Van Hiele para mejorar el nivel de pensamiento geométrico de los estudiantes de cuarto grado “B”.

Desde la perspectiva de la educación y la psicopedagogía, siempre se ha buscado teorizar el proceso de enseñanza aprendizaje de la

matemática. La teoría de Van Hiele, hace comprender que el pensamiento geométrico ideal se desarrolla en cinco niveles, conviene recalcar que en la educación básica solo puede alcanzarse el cuarto nivel, siendo el quinto exclusivo de la educación superior.

En este trabajo, la hipótesis quedó formulada así: “Si se diseña y aplica estrategias metodológicas sustentadas en la teoría de Van Hiele, entonces se incrementará el nivel de pensamiento geométrico en los estudiantes del 4° “B” de la Institución Educativa Estatal Julio Ramón Ribeyro del centro poblado La Paccha, distrito y provincia de Cajamarca”.

Metodológicamente esta investigación descriptiva, cuasi experimental, propositiva, que tuvo una población de 64 discentes, y una muestra de 32 educandos de cuarto grado, utilizó el pretest y postest, a fin de conocer las deficiencias y el posterior mejoramiento del nivel de pensamiento geométrico de dichos estudiantes, a través de estrategias metodológicas que coadyuve en ellos para que participen de manera activa desarrollen capacidades de identificación de figuras, análisis de propiedades, demostración de teoremas, deducción de corolarios.

La teoría de Van Hiele, no es reciente, pues data de final de los cincuenta, pero, no ha perdido ninguna vigencia y sus ideas principales, niveles de aprendizaje y fases para una didáctica adecuada que facilite el paso de un nivel a otro, tienen gran interés para la elaboración de currículos abiertos de Geometría. Los niveles ayudan a secuenciar contenidos y las fases organizan actividades que podemos diseñar en las



unidades didácticas. El trabajo se debe al matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele aunque, la prematura muerte de Dina provocó que fuese su marido el encargado de su mayor difusión. El libro original donde se desarrolla la teoría se titula “Structure and Insight”. La idea básica de partida, dicho de forma sencilla y rápida, es que “el aprendizaje de la Geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento”, “que no van asociados a la edad” y “que solo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente”. Es más, se señala que cualquier persona, y ante un nuevo contenido geométrico a aprender, “pasa por todos esos niveles y, su mayor o menor dominio de la Geometría, influirá en que lo haga más o menos rápidamente”. Van Hiele señala que “no hay un método panacea para alcanzar un nivel nuevo pero, mediante unas actividades y enseñanza adecuadas se puede predisponer a los estudiantes a su adquisición”.

El trabajo de investigación, está estructurado de la siguiente manera:

El capítulo I, denominado “Análisis del objetivo de estudio”, presenta detalladamente la ubicación, la evolución histórica tendencial del objeto de estudio, la situación histórica contextual del objeto de estudio y la metodología empleada.

El capítulo II, titulado Marco Teórico Conceptual, consideró los elementos teóricos que permiten sustentar la investigación. Aquí hay una descripción del proceso enseñanza aprendizaje de la geometría y los

cinco niveles de pensamiento de acuerdo a la teoría de Van Hiele, hasta culminar con la definición conceptual de términos básicos.

El capítulo III, muestra tablas estadísticas, análisis e interpretación de los instrumentos de recolección de datos del pretest y posttest aplicados a los estudiantes de cuarto grado “B”, lo cual ha de permitir dilucidar los efectos de las estrategias aludidas. Además en este capítulo se anotan Conclusiones y Recomendaciones a las que se llegó luego de aplicar la propuesta anteriormente explicada.

Finalmente se consigna la lista de referencias bibliográficas consultadas para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

El autor.

## ÍNDICE

Pág

RESUMEN

ABSTRACT

INTRODUCCIÓN.....9

### CAPÍTULO I: ANÁLISIS DEL OBJETO DE ESTUDIO

1.1. Ubicación.....13

1.2. Evolución Histórica Tendencial del Objeto de Estudio.....15

1.3. Situación Histórica Contextual del Objeto de Estudio.....22

1.4. Metodología empleada.....23

### CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1. Educación.....25

2.2. Psicología.....31

2.3. Pedagogía.....33

2.4. Psicopedagogía.....35

2.5. Psicología educacional.....38

2.6. Psicología educacional y psicopedagogía.....39

2.7. Conocimiento matemático.....44

2.8. Didáctica.....59

### CAPÍTULO III: RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Análisis e Interpretación de los Datos.....84

3.2. Propuesta Teórica.....88

Conclusiones.....134

Recomendaciones.....135

Referencias Bibliográficas.....136

Anexos.....140

**CAPÍTULO I**  
**ANÁLISIS DEL OBJETO DE ESTUDIO**

## 1.1. UBICACIÓN

La Institución Educativa “Julio Ramón Ribeyro”, se encuentra ubicada en Prolongación Avenida San Martín de Porras s/n, del centro poblado La Paccha, distrito de Cajamarca, provincia y región Cajamarca.

### 1.1.1. Breve reseña Histórica del centro poblado La Paccha

El centro poblado de la Paccha se encuentra ubicado a 4,0 km. de la Plaza de Armas de la ciudad de Cajamarca, con una extensión territorial una altitud de 2667 m.s.n.m., con una población aproximada de 4500 habitantes.

La Paccha tiene una importante producción de maíz, papa, trigo, cebada, verduras, las cuales abastecen el mercado local de Cajamarca.

La población de este centro poblado se dedica mayormente a la construcción, comercio de animales mayores en la plaza pecuaria de Iscocongá y de animales menores en la parada Santa Rosa.

### 1.1.2. Breve reseña Histórica de la I.E.E. “Julio Ramón Ribeyro”

Los pobladores del Centro Poblado La Paccha representados por sus autoridades: municipales, políticas, judiciales y comunales el año 1999 gestionan ante la Dirección Regional de Educación de Cajamarca para solicitar el funcionamiento de una Institución

Educativa de nivel secundario en el mencionado centro poblado; los pobladores en asamblea acuerdan que para acelerar los trámites matricular a los alumnos interesados, trabajando ad honoren cuatro profesores. A partir del mes de junio de 1999 funciona como Institución Educativa de Gestión Comunal – IEGECOM- en la casa comunal, desde el mes de marzo del 2000 funcionó en la I.E. N° 82031 de nivel primario. Mediante R.D.R. N° 0619 del 12 de abril del 2000 se crea la Institución Educativa.

#### INFRAESTRUCTURA

Área total: 3000 m<sup>2</sup>

Área construida: 2000 m<sup>2</sup>

Auditórium: 1

Huertos: 2

Número de aulas: 17

Biblioteca: 1

Losa deportiva: 2

Laboratorio: 1

Aula de innovación pedagógica: 1

Almacén: 2

Servicios higiénicos: 4

Cerco perimétrico: construcción parcial

Cuadro N° 01: Docentes

Sección	Cantidad
1° A, B, C y D	6
2° A, B y C	5
3° A, B y C	5
4° A y B	4
5° A, B y C	5
<b>Total</b>	<b>25</b>

Fuente: CAP 2015

Cuadro N° 02: Estudiantes

Grado y sección	Cantidad			
	A	B	C	D
1°	31	32	31	30
2°	30	28	28	
3°	28	29	26	
4°	32	32		
5°	26	26	27	
<b>Total: 436</b>	<b>147</b>	<b>147</b>	<b>112</b>	<b>30</b>

Fuente: Nóminas de matrículas

## 1.2. EVOLUCIÓN HISTÓRICA TENDENCIAL DEL PROCESO ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA

### Aprendizaje matemático y constructivismo

Dentro del enfoque psicológico, un problema esencial es la identificación de teorías acerca del aprendizaje matemático que aporten un fundamento sobre la enseñanza.

Romberg y Carpenter (1986) afirman que la instrucción basada en principios conductistas tiende a fragmentar el currículum en un número de partes aisladas que podrían aprenderse a través de un refuerzo apropiado. Pero la instrucción efectiva de las matemáticas

necesita sustentarse en la comprensión de los conceptos matemáticos básicos.

En el caso de teorías del aprendizaje derivadas de la epistemología genética de Piaget, si bien la ejecución de tareas piagetianas está correlacionada con logros aritméticos, las operaciones lógicas no han suministrado una ayuda adecuada para explicar la capacidad del niño para aprender los conceptos y destrezas matemáticas más básicas.

De los estudios cognitivos se deduce uno de los supuestos básicos subyacentes de la investigación actual sobre aprendizaje. Consiste en aceptar que el niño construye, de un modo activo, el conocimiento a través de la interacción con el medio y la organización de sus propios constructos mentales. Aunque la instrucción afecta claramente a lo que el niño aprende, no determina tal aprendizaje. El niño no es un receptor pasivo del conocimiento; lo interpreta, lo estructura y lo asimila a la luz de sus propios esquemas mentales.

Según Kilpatrick (1987), el punto de vista constructivista implica dos principios:

1. El conocimiento es construido activamente por el sujeto que conoce, no es recibido pasivamente del entorno.



2. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el propio mundo experiencial; no se descubre un mundo independiente, preexistente, exterior a la mente del sujeto.

#### Aprendizaje matemático y procesamiento de la información

No existe ninguna teoría del aprendizaje de las matemáticas que incorpore todos los detalles que cabría esperar y que tenga una aceptación general. Según este autor se identifican en la actualidad dos corrientes de investigación sobre este campo: el enfoque constructivista, considerado anteriormente, y el enfoque de ciencia cognitiva - procesamiento de la información, de fuerte impacto en las investigaciones sobre el aprendizaje matemático.

Una hipótesis básica subyacente de los trabajos en ciencia cognitiva es que las estructuras mentales y los procesos cognitivos son extremadamente ricos y complejos, pero que tales estructuras pueden ser comprendidas y que esta comprensión ayudará a conocer mejor los modos en los que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar. El centro de interés es explicar aquello que produce el "pensamiento productivo", es decir, las capacidades de resolver problemas significativos.

El campo de la ciencia cognitiva intenta capitalizar el potencial de la metáfora que asemeja el funcionamiento de la mente a un

ordenador para comprender el funcionamiento de la cognición como procesamiento de la información, y como consecuencia comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se considera que el cerebro y la mente están vinculados como el ordenador y el programa.

Desde el punto de vista metodológico, los científicos cognitivos hacen observaciones detalladas de los procesos de resolución de problemas por los individuos, buscan regularidades en sus conductas de resolución e intentan caracterizar dichas regularidades con suficiente precisión y detalle para que los estudiantes puedan tomar esas caracterizaciones como guías para la resolución de los problemas. Tratan de construir "modelos de proceso" de la comprensión de los estudiantes que serán puestos a prueba mediante programas de ordenador que simulan el comportamiento del resolutor.

#### Aprendizaje matemático y visiones socio culturales

La etiqueta sociocultural se usa para denotar epistemologías que ven al individuo como situado dentro de culturas y situaciones sociales de tal modo que no tiene sentido hablar del individuo o de conocimiento a menos que sea visto a través del contexto o de la actividad. Conocimiento es conocimiento cultural considerado como

socialmente producido, siempre potencialmente cambiante, trabado con valores sociales y regulado socialmente.

Una característica de las tendencias cambiantes en la investigación en educación matemática durante los años recientes ha sido el interés creciente y la focalización sobre el contexto social de la clase de matemáticas. El papel jugado por el contexto social en el desarrollo de los individuos o de los grupos ha sido teorizado implícita o explícitamente, de muchas maneras; lo que caracteriza los intereses actuales es un desplazamiento desde la identificación de factores sociales sobre el dominio de lo afectivo a una preocupación con la parte que el entorno social y cultural juega como un todo en el desarrollo del niño.

Una característica importante de la aproximación de Vygotsky es el sentido en que el mundo, y los individuos dentro de él, son productos de su tiempo y lugar. En particular, la psicología del individuo, expresada como consciencia, se forma mediante la mediación de herramientas, que son expresiones de la situación social, histórica y cultural. Esto lleva a considerar al sujeto y al objeto, juntos, superando la dualidad cartesiana. Esto implica que no hay fundamentos para afirmar que existe un paralelismo entre los obstáculos epistemológicos en matemáticas, y los obstáculos cognitivos en el aprendizaje.

## El punto de vista sociocrítico

Como describe Godino (2010), una corriente importante en la investigación en Educación Matemática es la que considera que la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje debe tener por objetivo la emancipación de las personas y la transformación social. Para ello, se deben potenciar estrategias de reflexión sobre la práctica por parte de los propios actores que promuevan el cambio en esta dirección.

Un ejemplo de programa de investigación en Educación Matemática de este tipo es la llamada Educación Matemática Crítica (Skovsmose, 1999 citado en Godino 2010). Este enfoque propone una agenda de investigación para el estudio de la relación entre educación matemática y democracia. Los aspectos que preocupan a la teoría crítica son, entre otros:

- Preparar a los estudiantes para ser ciudadanos.
- Introducir las matemáticas como una herramienta para analizar de manera crítica los hechos socialmente relevantes.
- Tener en cuenta los intereses de los estudiantes.
- Considerar los conflictos culturales en los que se desarrolla el proceso de instrucción.

- Contemplar los aspectos anteriores sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas para que el conocimiento matemático se convierta en una herramienta crítica.
- Dar importancia a la comunicación en el aula, entendida como el conjunto de relaciones interpersonales que son la base de la vida democrática.

Otro de los aspectos que más preocupa a la educación matemática crítica son las relaciones entre las matemáticas y la tecnología, la cual, al mismo tiempo que soluciona problemas, genera otros nuevos.

En la perspectiva sociocrítica el profesor debe modificar su rol, pasando de ser reproductor a constructor de conocimiento. Se considera que los docentes pueden, y deben, dedicarse a elaborar teoría pedagógica a partir de la investigación educativa, eliminando la disociación que tradicionalmente se ha planteado entre teoría y práctica, que deja la primera a los investigadores y la segunda a los profesores cuando se enfrentan a las tareas cotidianas de su labor. El investigador es un sujeto más, comprometido con el cambio. La metodología de investigación suele ser la investigación acción participativa.

### 1.3. SITUACIÓN HISTÓRICA CONTEXTUAL DEL PROCESO ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA

La Institución Educativa Estatal “Julio Ramón Ribeyro” cuenta con cuatro docentes del área de matemática, tres de ellos en condición de nombrados y uno contratado. El área curricular de matemática está organizado cuatro competencias: actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad; actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio; actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización; actúa y piensa matemáticamente en situaciones de gestión datos e incertidumbre.

Para el desarrollo de mi tesis, he trabajado en la competencia actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización.

El proceso de enseñanza aprendizaje del área de matemática en la Institución Educativa, desde sus inicios (en el año 1999) se desarrolló de una manera tradicional; el profesor dictaba los conceptos, resolvía ejercicios tipo, y proporcionaba prácticas con ejercicios repetitivos las cuales tenían que ser presentadas como requisito para rendir el examen final. En los últimos años los docentes realizan esfuerzos por cambiar esta situación, trabajan con textos proporcionados por el Ministerio de Educación, de acuerdo con el modelo constructivista, pero aún hay deficiencias que tienen raíces en la formación profesional de los maestros.

#### 1.4. METODOLOGÍA EMPLEADA

El diseño de investigación es aplicada con propuesta. La población está constituida por los estudiantes del cuarto grado “A” y “B”, con un total de 64, la muestra está constituida por los 32 estudiantes de la sección “B”

Los métodos utilizados son:

- Método Histórico lógico.
- Método Inductivo deductivo.
- Método Empírico.
- Método Socrático.

**CAPÍTULO II**  
**MARCO TEÓRICO - CIENTÍFICO**



## 2.1. EDUCACIÓN

La educación ha sido objeto, a través del tiempo, de múltiples enfoques críticos formulados en función de distintos puntos de vista filosóficos y bajo la influencia de las condiciones socioculturales de cada época. Su análisis puede encargarse desde las perspectivas sociológica, biológica, psicológica. Los criterios dominantes en nuestros días son el sociológico y el biopsicológico.

Si se observa desde el ángulo sociológico, la educación es el proceso que aspira a preparar las generaciones nuevas para reemplazar a las adultas que, naturalmente, se van retirando de las funciones activas de la vida social. La educación realiza la conservación y transmisión de la cultura a fin de asegurar su continuidad. Lo que se procura transmitir es el acervo funcional de la cultura, esto es, los valores y formas de comportamiento social de comprobada eficacia en la vida de una sociedad.

Desde el punto de vista biopsicológico, la educación tiene por finalidad llevar al individuo a realizar su personalidad, teniendo presente sus posibilidades intrínsecas. Luego la educación para ser el proceso que tiene por consistente en extraer desde adentro del propio individuo lo que hereditariamente trae consigo.

El criterio que ahora vamos a presentar tal vez pueda fundarse en el doble punto de vista sociológico y biopsicológico. Podemos decir que educar es conducir lo que es hacia una plenitud

de actualización y expansión, orientada en un sentido de aceptación social.

Aclarando todavía más este concepto, puede decirse que la educación es un proceso de tiende a capacitar al individuo para actuar conscientemente frente a nuevas situaciones de la vida aprovechando la experiencia anterior y teniendo en cuenta la integración, la continuidad y el progreso sociales. Todo ello de acuerdo con la realidad de cada uno, de modo que sean atendidas las necesidades individuales y colectivas.

Este criterio ofrece aspectos que necesitan aclarecimiento para su mejor comprensión:

Actuar conscientemente frente a nuevas situaciones de vida. Este aspecto procura mostrar el carácter dinámico de la educación, y, así mismo, evidenciar que ella es mucho más que un simple adiestramiento. Educar no es preparar para repetir, sino para tomar conciencia se situaciones nuevas que exigen soluciones originales, teniendo en cuenta que los hechos de la vida no se repiten. Esta presenta al individuo situaciones diferentes y problemáticas. Quien pretenda actuar según “recetas” estará condenado al fracaso. La vida social, la ciencia, la filosofía, están en continua transformación. Lo necesario, pues, es una toma de conciencia de la problemática presente, que es siempre una situación nueva,

para resolverla con eficiencia y de manera satisfactoria, tanto para el individuo como para la colectividad. La solución eficiente requiere, no obstante, el aprovechamiento de la experiencia anterior.

Aprovechamiento de la experiencia anterior. Esto equivale a decir que el pasado no muere. La educación es, además, acumulativa. Los esfuerzos del pasado un pueden perderse. Deben contribuir a resolver las dificultades presentes. El aprovechamiento de la experiencia anterior se comprende en el sentido de hacer más eficientes las respuestas a las dificultades presentes, aplicando el comportamiento que se manifestó útil en experiencias anteriores, y modificándolo de acuerdo con las peculiaridades de la nueva situación. El aprovechamiento de la experiencia anterior puede serlo tanto de la colectividad, ajena, como del propio individuo. Aprovechar la experiencia ajena y la de generaciones pasadas es aprovecharse de su propia experiencia para resolver nuevas situaciones de la vida.

Integración. Este es uno de los aspectos más importantes, pues se refiere a la inclusión espiritual del individuo en la sociedad, no como un numero o cosa, sino como persona que comprende y ama a su medio y a sus semejantes. Entre él y los demás miembros de la comunidad

existe un ámbito común de ideales, aspiraciones y esfuerzos, la integración social, cuando se realiza, lleva al individuo:

- A identificarse con las preocupaciones y aspiraciones de su grupo.
- A sentir y a querer lo que el grupo siente y quiere.
- A tomar conciencia de los problemas de su comunidad
- A querer asumir responsabilidades dentro del grupo; esto implica querer ejercer funciones que no sean meramente lucrativas, sino que configuren un papel de importancia para la vida en común dentro de la colectividad;
- A querer, en suma, participar de manera responsable en la vida del grupo.

Continuidad. Este aspecto indica otra finalidad de la educación, que es la de transmisión de cultura. Si no se diese esta continuidad, cada generación tendría que iniciar su propio proceso de cultura, que, por añadidura, moriría con ella. Gracias a la continuidad, los elementos validos de la experiencia de las generaciones pasadas son transmitidos a las nuevas, y estas los utilizan en el proceso de sus actividades. Merced a esa continuidad social se puede escribir la historia de la humanidad.

Progreso. El progreso social es otro aspecto de los objetivos de la educación que se caracteriza, asimismo, por su dinamismo. Las nuevas generaciones no reciben pasivamente el legado cultural de las que les antecedieron. Por el contrario, lo depuran de los elementos ineficientes y lo enriquecen en profundidad y en extensión, de modo que sean atendidas las nuevas necesidades sociales, surgidas de las modificaciones que en forma interrumpida sufre la sociedad en un proceso de evolución. Tenemos, entonces, progreso en el sentido de ampliación de la herencia cultural para atender las nuevas exigencias sociales, y de su profundización, para tornarla más eficiente.

Realidad de cada uno. Este aspecto exalta la necesidad de la educación de ajustarse a las peculiaridades de educando, de modo que se lo pueda encaminar para que ocupe, dentro de la sociedad, el lugar que mejor armonice con sus posibilidades biopsicológicas. De dicha actitud surge el reconocimiento de las diferencias individuales y el respeto que ellas merecen. La educación no debe empeñarse en que todos produzcan la misma cosa, sino en que produzcan lo máximo según las aptitudes y posibilidades de cada uno. Solamente así podrá empeñarse en la formación de la personalidad del educando, llevándolo a ser lo es en el más alto grado y sin perder de vista su aprovechamiento social.

Las necesidades individuales y colectivas. No se trata de acordar la razón al individualismo o al colectivismo. Conviene destacar que ninguna educación tendrá valor si no proporciona satisfacción al individuo y si no armoniza con la sociedad; del mismo modo carece de sentido la educación que conduce a una satisfacción individual dentro de una línea egoísta, dejando de lado las necesidades colectivas, toda vez que no se puede separar al individuo del grupo. Ambos forman un binomio, tan interdependiente que puede ser considerado equivalente a una unidad. El problema es, pues, formar al hombre no divorciado de la sociedad ni en función de ella, sino en perfecta armonía con la sociedad.

De manera más amplia puede formularse el siguiente concepto: “La educación es el proceso que tiene como finalidad realizar en forma concomitante las potencialidades del individuo y llevarlo a encontrarse y responsabilidad, con miras, en primer lugar, a la satisfacción de necesidades y aspiraciones personales y colectivas y, en segundo lugar, al desarrollo espiritual de la criatura humana, adoptando, para ello, la actitud menos directiva posible, y enfatizando la vivencia, la reflexión, la creatividad, la cooperación y el respeto por el prójimo”.

## 2.2. PSICOLOGÍA

La psicología de la educación es la rama de la psicología y de la pedagogía que estudia científicamente los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como de los problemas que en el contexto de los mismos puedan presentarse. Como afirma (Sacristán, 1986, citado en Godino 2010), son numerosas las posturas que consideran que la enseñanza es una técnica directamente derivada de una teoría psicológica del aprendizaje. "Esta situación de dependencia es claramente perjudicial para perfilar un campo teórico propio tanto para la Didáctica General como para las Didácticas Especiales, ya que las sitúa en un estado de colonización esterilizante en cuanto a la propia creación teórica"

La psicología de la educación amenaza con acaparar el estudio de la conducta humana en las situaciones de enseñanza, reduciendo al máximo el ámbito de la Didáctica. Dentro de ella, una rama es la psicología de la instrucción, definida por Genovard y Gotzens (1990, citado por Godino 2010, como la "disciplina científica y aplicada desarrollada a partir de la psicología de la educación, que estudia las variables psicológicas y su interacción con los componentes de los procesos de enseñanza - aprendizaje que imparten unos sujetos específicos que pretenden enseñar unos contenidos o destrezas concretas a otros individuos igualmente específicos y en un contexto determinado".

Estos autores analizan y clasifican diferentes teorías y modelos instruccionales desde una perspectiva interaccionista en tres tipos: interacción cognitiva, social y contextual. La interacción cognitiva, en la que sitúan las teorías de Piaget, Bruner y Ausubel, designa las teorías instruccionales que subrayan el hecho de que la instrucción es básicamente un intercambio de información, en su acepción más amplia, que se produce entre profesores y estudiantes y que debe ejercerse en condiciones lo más óptimas posibles para que el objetivo principal, que el estudiante consiga una asimilación de la información correcta, se realice. También se incluyen dentro del significado de este término las propuestas que destacan la interacción entre los contenidos instruccionales y los procesos y habilidades cognitivas del estudiante y cuyo fin coincide igualmente con el que se acaba de citar. La perspectiva de interacción social, que da prioridad al papel de los sujetos que intervienen en la instrucción como facilitadores de los aprendizajes que deben desarrollarse tiene como representantes a Vygotsky y Bandura. Por último, Skinner, Gagné y Cronbach, entre otros, han propugnado teorías que pueden encuadrarse en la interacción contextual por la cual la instrucción es ante todo el producto de la interacción entre los sujetos y algunas de las variables del contexto.



### 2.3. PEDAGOGÍA

La pedagogía, del griego παιδιον (paidos - niño) y γωγος (gogos – conducir) es la ciencia que tiene como objeto de estudio a la educación. Es una ciencia perteneciente al campo de las Ciencias Sociales y Humanas, y tiene como fundamento principal los estudios de Kant y Herbart. Usualmente se logra apreciar, en textos académicos y documentos universitarios oficiales, la presencia ya sea de Ciencias Sociales y Humanidades.

El objeto de estudio de la pedagogía es la educación, tomada ésta en el sentido general que le han atribuido diversas legislaciones internacionales, como lo referido en documentos de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura (UNESCO), la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) y los propios de cada país (como las leyes generales o nacionales sobre educación). También es posible encontrar la palabra formación como objeto de estudio de la Pedagogía, siendo educación y formación vocablos sinónimos en tal contexto.

La Pedagogía estudia a la educación como fenómeno complejo y multireferencial, lo que indica que existen conocimientos provenientes de otras ciencias y disciplinas que le pueden ayudar a comprender lo que es la educación; ejemplos de ello son la historia, la sociología, la psicología y la política, entre otras. En este contexto,

la educación tiene como propósito incorporar a los sujetos a una sociedad determinada que posee pautas culturales propias y características; es decir, la educación es una acción que lleva implícita la intencionalidad del mejoramiento social progresivo que permita que el ser humano desarrolle todas sus potencialidades. Para una mejor comprensión de la historia de la conformación de la Pedagogía y su relación con la educación, Kant y Durkheim aportan elementos importantes. Kant propone la confección de una disciplina que sea científica, teórica y práctica que se base en principios y en la experimentación y que además reflexione sobre prácticas concretas. Durkheim al referirse a la educación expresa que es materia de la Pedagogía y es indispensable construir un saber por medio de la implementación de reglas metodológicas.

Ciencia multidisciplinaria, que pertenece al campo de las ciencias sociales y humanidades, tiene por objeto analizar y comprender el fenómeno de la educación, intrínseco a la especie humana, basado en procesos sistemáticos de aprendizaje, conocimiento, desarrollo de capacidades y habilidades, que facilitan la toma de decisiones.

Orienta las acciones educativas y de formación, basada en pilares como: principios, métodos, prácticas, técnicas, aportaciones y posturas de pensamiento, presentes en los procesos de enseñanza aprendizaje.

La pedagogía como la ciencia que se ocupa de la educación y la enseñanza. Tiene como objetivo proporcionar guías para planificar, ejecutar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, aprovechando las aportaciones e influencias de diversas ciencias, como la psicología (del desarrollo, personalidad, superdotación, educativa, social), la sociología, la antropología, la filosofía, la historia y la medicina, entre otras. Por lo tanto, el pedagogo es el profesional que ayuda a organizar mejores sistemas y programas educativos, con el objeto de favorecer al máximo el desarrollo de las personas y las sociedades. Estudia la educación en todas sus vertientes: escolar, familiar, laboral, social y cultural.

#### 2.4. PSICOPEDAGÍA

Es la ciencia que nos ayuda a comprender a las demás personas y razonar los problemas por los que está pasando el individuo, así como también ayudar y orientar a quienes lo necesitan.

Es una ciencia aplicada, que surge de la fusión de la psicología y la pedagogía, cuyo campo de aplicación es la educación, a la cual le proporciona métodos, técnicas y procedimientos para lograr un proceso de enseñanza aprendizaje más adecuado a las necesidades del educando. (González) citado por Bravo 2009

Otros autores como (Patricia y Mónica) citado por Bravo 2009 afirman que la psicopedagogía es un servicio que se presta con el fin de desarrollar óptimamente los procesos pedagógicos, psicológicos, académicos y de aprendizaje en el individuo, por lo tanto se debe desarrollar a lo largo de la vida, también se pretende acompañar y orientar a la persona para que autoconozca sus aptitudes, intereses, habilidades, y capacidades al igual que sus deficiencias para lograr un desarrollo idóneo a lo largo de la vida.

En cambio Marisa Gordillo, citado por Bravo 2009 se refiere a la psicopedagogía como la ciencia que permite estudiar a la persona y su entorno en las distintas etapas de aprendizaje que abarca su vida. A través de sus métodos propios estudia el problema presente vislumbrando las potencialidades cognoscitivas, afectivas y sociales para un mejor y sano desenvolvimiento en las actividades que desempeña la persona. La psicopedagogía es lo que permite descubrir la esperanza ante dificultades del aprender. Es el aliento fresco para los padres e hijos en la difícil tarea de crecer.

El Diccionario de la Real Academia Española define la psicopedagogía como rama de la psicología que se ocupa de los fenómenos de orden psicológico para llegar a una formulación más adecuada de los métodos didácticos y pedagógicos.

De estas definiciones y descripciones se desprende que el término psicopedagogía se refiere a una especialización psicológica

y pedagógica, cuya acción concreta consiste, principalmente, en la aplicación de los conocimientos derivados de ambas ciencias a problemas concretos que surgen en el campo de la educación.

Por su parte Coll (1991), estima que el término psicopedagogía designa los aspectos aplicados y profesionales de la psicología de la educación, sin delimitar su esfera de acción.

Desde otra perspectiva, la psicopedagogía ha sido definida como la disciplina que estudia la naturaleza y los procesos del aprendizaje humano, formal y contextualizado, y sus alteraciones (Careaga 1995). Esta definición destaca como primer objetivo el estudio del aprendizaje formal y contextualizado que se realiza en un medio social determinado y también sus alteraciones, o deficiencias por déficits en los procesos que sustentan el aprendizaje, sean cognitivos, afectivo sociales y/o del entorno educativo.

La psicopedagogía como un quehacer profesional empezó en la década de los años cincuenta con la creación de algunas clínicas psicopedagógicas destinadas a atender a escolares con diferentes déficits en su desarrollo. Como hemos visto, su actividad profesional no derivó de la psicología educacional, sino del trabajo escolar con niños que requerían ayuda psicopedagógica especializada para mejorar su aprendizaje. En este sentido, la psicopedagogía aparece desde su origen estrechamente ligada al proceso del aprendizaje

escolar y a las dificultades que presentan algunos niños que tienen un desarrollo atípico para seguir la escolaridad común.

## 2.5. PSICOLOGÍA EDUCACIONAL

Esta construcción de la identidad de la Psicología Educacional, se deriva de diferencias históricas. La psicología educacional emergió con el siglo XX de manera paralela al desarrollo de la psicología, como ciencia autónoma, derivada de la psicología general, y su objetivo fue aportar a la educación los avances que aparecían en el campo de la experimentación de los procesos del aprendizaje, los conocimientos sobre el desarrollo infantil y los estudios diferenciales y posteriormente sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje escolar.

A comienzos del siglo XX era una disciplina que intentaba aportar conocimientos y estrategias a la educación sin participar del currículum educativo ni de la formación de los maestros. Este aporte tenía por objetivo exigir a la pedagogía que adoptara bases más científicas para su quehacer educacional. Ausubel considera que es una disciplina aplicada a los problemas educativos, con una elaboración diferente de la psicología general, pues tiene un nivel menor de generalidad (Ausubel, 1969, en Coll, 1991).

## 2.6. PSICOLOGÍA EDUCACIONAL Y PSICOPEDAGOGÍA

En algunas partes ambas disciplinas han tenido un desarrollo paralelo, a veces ignorándose mutuamente. La psicología educacional se ha desarrollado principalmente en las escuelas de psicología, se ha planteado como objetivo principal enriquecer el quehacer pedagógico con investigaciones y nuevos aportes científicos derivados de metodologías propias. Un ejemplo de esta afirmación fue que años atrás un tema principal que abordaba la psicología educacional eran los descubrimientos de Piaget. De ellos derivó una epistemología que explicaba la génesis del conocimiento y daba pautas a la educación sobre el desarrollo cognitivo normal de los niños. Posteriormente, el conocimiento del trabajo y de la publicaciones de Vigotsky modificó ese concepto de desarrollo cognitivo espontáneo, asociándolo al de interacción entre el niño y el medio, lo cual motivó a la psicología educacional para que se interesara por el medio educacional y luego por el sistema escolar. La psicología psicoanalítica, por su parte, mostró la importancia del desarrollo emocional temprano y de las figuras parentales de identificación. De ahí que la psicología educacional se interesara por la familia como factor determinante del desarrollo afectivo. Otro ejemplo fue la influencia de las corrientes conductistas, cuyos aportes se aplicaron a las metodologías de enseñanza como un proceso unilateral, que iba desde el profesor hacia el niño. Posteriormente, los aportes sistémicos han modificado esta

orientación unilateral abordando el proceso de interacción entre aprendizaje activo de los niños y su medio pedagógico. Actualmente el mayor aporte de la psicología es la investigación de los procesos cognitivos, tales como el lenguaje, la memoria, la conciencia fonológica, que han permitido descubrir los aportes que tienen al aprendizaje del lenguaje escrito y a las dificultades para aprenderlo (Bravo, 2009).

La psicopedagogía, por su parte, formó parte desde el comienzo del currículum que imparten las escuelas de educación y pedagogía para el trabajo con niños que tienen dificultades para aprender. En los cursos de psicopedagogía se seguían preferentemente las corrientes europeas (francesas, belgas, suizas, alemanas y españolas) de la psicología pedagógica y su desarrollo tuvo un origen algo diferente que la psicología educacional. Partió del fenómeno educativo mismo de sus necesidades en el aula, considerándose una disciplina aplicada que utiliza los aportes de la psicología para enriquecer el quehacer educacional. Para la psicopedagogía, tal como se imparte hasta hoy día en las escuelas pedagógicas, la educación es su objetivo central y su intercambio con ella, su fuente de sustentación, sea en el trabajo con los niños, sea en el trabajo en el aula, o con los maestros. De este modo, por ejemplo, un enfoque psicológico piagetano o vigotskiano son utilizados en la medida en que su aplicación derive de una



necesidad escolar y sea una contribución importante para mejorar el aprendizaje.

## 2.7. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Sobre el conocimiento matemático escolar existen varias posturas teóricas de filósofos que han sido desarrolladas a través de la historia. Estas posturas pueden ser extrapoladas al momento actual y para generar variedad de implicaciones didácticas, convertirlas en elementos de apoyo y de esta manera materializar y validar sus concepciones teóricas. Entre dichas posturas teóricas y sus concepciones se pueden destacar las siguientes:

El platonismo: considera que las matemáticas existen y han existido como un acaumulado de verdades independientes de la actividad creadora del ser humano y de sus conocimientos previos.

El logicismo: asume a las matemáticas como una vertiente de la lógica, e igualmente que “la lógica matemática es una ciencia que es anterior a las demás”, coincidiendo con el pensamiento Aristotélico. Considera además que existen dos lógicas diferentes: la deductiva (de los postulados generales a los específicos) y la inductiva (de las informaciones específicas al postulado general).

El formalismo: considera las matemáticas como una creación de la mente humana, la cual se encarga de relacionar postulados, axiomas y teoremas: respetando unas reglas simbólicas preestablecidas. En la medida que se es coherente con las reglas, más cerca se está de una premisa formalizada.

El intuicionismo: Los sentidos se convierten en elementos fundamentales de recepción primaria, a partir de los cuales la mente realiza sus elaboraciones. Concidera que las matemáticas se pueden construir desde la intuición, sin ocuparse de la manera como puede estructurarse en la mente dicha construcción.

El constructivismo: considera, como el intucionismo, que las matemáticas son una contrucción de la mente, y que solo tienen existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden ser contruidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos. Es importante para esta teoría, la manera como el individuo aprende y organiza la información en su mente, y la manera como el maestro lo moviliza para que se convierta en un ser activo.

Hoy se puede contar con una nueva visión del conocimiento matemático escolar que clama por la promoción de condiciones apropiadas, que permita generar la construcción de conceptos

matemáticos como un asunto social lleno de sentidos y significados simbólicos y que responda a las necesidades e intereses de los educandos del mundo actual; para lo cual es indispensable la organización de un acumulado de prácticas que involucren el contexto con un sentido lógico, y que se construyan con un esfuerzo individual y colectivo.

Ahora las experiencias que conllevan a manipulación, observación, experimentación y confrontación de argumentos desde lo práctico, se han ganado suficiente respeto como procesos de construcción de conocimiento; siendo hoy un apoyo fundamental para la comprensión y la reflexión teórica que afianza a los educandos de una manera más efectiva en la formalización de conceptos y procedimientos matemáticos.

Lo anterior redefine la didáctica de las matemáticas sin desviarse de asumirlas como un legado cultural, pero concediéndole un papel activo de protagonismo al sujeto de la educación, en el que es importante tanto el objeto de enseñanza como el de aprendizaje. Es la dimensión social del proceso educativo la que replantea la didáctica de las matemáticas, alejándola de la cerrada consideración de un aprendizaje orientado únicamente hacia lo conceptual riguroso, y lo transforma hacia la relectura del contexto, creando situaciones problemáticas que permitan al estudiante y al maestro explorar problemas, construir

estructuras, plantear preguntas, reflexionar sobre modelos y estimular representaciones informales y múltiples, hasta llegar a desplegar periódicamente niveles de formalización y de abstracción que busquen dar respuestas humanizantes a problemáticas reales de la vida diaria.

La generación de situaciones problemáticas propuestas a los estudiantes desde las matemáticas, deben movilizarlos tanto afectiva como cognitivamente, y desde su planteamiento, se debe crear un ambiente de búsqueda de solución que no se desligue de los objetivos del aprendizaje; aunque tales situaciones provengan de la vida cotidiana, de las matemáticas mismas o de otras ciencias.

### 2.7.1. GEOMETRÍA

“La geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas, sociales culturales, científicas y tecnológicas. Ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, cambia y evoluciona permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o teoremas. En ese sentido, el conocimiento geométrico no existe únicamente en

los enunciados formales ni puede considerarse como algo absoluto e impersonal. Por el contrario, se convierte en algo relativo a las experiencias individuales y grupales que, mediadas por diversas herramientas materiales o simbólicas, producen diversos niveles de sofisticación del conocimiento, útiles para resolver problemas, interpretar hechos o dar explicaciones, entre otras cosas” (Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta, 2004).

Según Melchor Gómez (2010), la primera idea que se tiene de geometría es exploración del espacio. El espacio es lo que nos rodea, por donde nos movemos. Pero una definición rigurosa de espacio es: medio continuo, tridimensional, de límites indefinidos que contiene todos los objetos y donde se desarrollan todas las actividades. Y una idea más rigurosa de Geometría es la de Ciencia que tiene por objeto analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales.

Las relaciones espaciales son las distintas conexiones que podemos hacer entre los elementos que se encuentran en el espacio. Estas relaciones y elementos se agrupan en tres grandes bloques, que según Piaget, determinan el orden en que son adquiridos por los niños:

Relaciones topológicas: Son aquellas relaciones que no varían por una deformación bicontinua (ni por estirar ni por girar). Hay una serie de elementos y relaciones geométricas que no varían ante determinados cambios (estiramientos y giros), y que precisamente por esa invarianza son más asequibles al conocimiento del niño.

Relaciones proyectivas: Son las relaciones que varían al cambiar el punto de vista desde donde se miran. El espacio se ordena en tres dimensiones que se corresponden con los tres ejes de nuestro sistema de referencia habitual (sistema cartesiano). El movimiento del espacio dispone servirse de puntos de referencia por los cuales se puede localizar la posición y la dirección de los objetos. El desarrollo de la apreciación espacial está relacionado directamente con la capacidad de usar estos puntos de referencia.

Relaciones métricas: Son todas las relaciones que dependen de las medidas. El círculo, el cuadrado, el triángulo, y el rectángulo son las formas planas que inicialmente deben distinguir, reconocer y reproducir a temprana edad. Estas capacidades de reconocimiento, distinción y reproducción necesitan,

en gran parte, del manejo adecuado del concepto de medida (de lados o ángulos) por lo que se consideran actividades métricas.

#### 2.7.1.1. GEOMETRÍA EN LA HISTORIA Y LA COTIDIANIDAD.

La geometría como área de estudio posee una historia entrelazada con la cotidianidad del ser humano, que la destaca como una disciplina en plena evolución y que sobrepasa los límites formales de definiciones, conceptos, teoremas y axiomas. Hoy se presenta como una ciencia que permea lo cultural y sus dimensiones, en los campos social, científico y tecnológico. Por lo tanto, esa variada dimensionalidad de la geometría, hace señalar a través de la historia cómo ha contribuido para crecer en los aspectos visuales, conceptuales y abstractos en relación con las actividades humanas.

En la prehistoria se reproducían situaciones de la realidad y se creaban algunos símbolos para comunicar ideas mediante dibujos, se hacían adornos simétricos y construcciones con forma geométrica. La geometría hizo su aporte desde las

necesidades creadas de medición de tierras, longitudes, áreas y volúmenes.

Con Grecia la geometría pasó de resolver asuntos prácticos a convertirse en disciplina científica. Euclides en su obra “Los Elementos” (300 a.C.), planteó una sistematización de lo desarrollado hasta el momento, contrastando elementos conceptuales con un sistema axiomático de carácter deductivo. Ésta geometría de Euclides se enseñó aproximadamente durante 2000 años.

En el siglo XV, algunos artistas del renacimiento como Leonardo da Vinci, hicieron su aporte a la geometría desde su dimensión estética. Posteriormente, ya en el siglo XVII, esos métodos artísticos se combinaron con el álgebra para dar como resultado la Geometría Analítica. Para finales del siglo XVIII, de esa combinación de aspectos visuales y conceptuales, los métodos de representación de objetos tridimensionales a través de dibujos, generaron la Geometría Descriptiva.

Para el siglo XIX, estudiosos de la geometría como Bolyai – Lobachevsky y Riemann, plantearon las geometrías no euclidianas, cambiando la



concepción de los axiomas como verdades evidentes y pasando a ser consideradas como puntos de partida, para sistemas matemáticos. De esta forma los estudios en geometría, dieron un salto fundamental en su historia, puesto que pusieron su acento más en asuntos matemáticos – conceptuales de orden abstracto, que en los asuntos intuitivos – visuales, los cuales buscaban dar respuesta a problemas de la vida cotidiana. Fueron publicados entonces, en 1899, los “Fundamentos de la Geometría Hilbert”, los cuales se convirtieron en un llamado hacia la búsqueda de la plataforma algebraica de la geometría.

El siglo XX se inició con el desarrollo de la teoría de los espacios vectoriales y, en sus últimas décadas, el desarrollo tecnológico permitió llegar a la geometría fractal, como consecuencia de la sincronía entre el análisis numérico y el aspecto visual, apoyados por el computador.

Para el siglo XXI, es necesario destacar los avances en biología con el apoyo de la teoría de los nudos, en realidad virtual con la geometría proyectiva, en el diseño de unidades de CD con la

teoría de los códigos y el renacer de la geometría euclidiana con el apoyo de los diferentes software.

La anterior reseña histórica, donde se señalan solo algunos aspectos importantes, sirve como referencia para afirmar que siendo la geometría una disciplina científica, no proviene solo de la ciencia matemática, sino también de la cotidianidad del ser humano, lo que hace definir como una ciencia viva; puesto que es alimentada por las artes, las técnicas, la naturaleza, las otras ciencias y la tecnología. Esta situación, permite tejer con ella una entramado de relaciones que revalidan permanentemente su aprendizaje.

#### 2.7.1.2. MODELO DE VAN HIELE.

El modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1957), describe cómo se lleva a cabo el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes y como se les puede acompañar para hacer que avancen de un nivel de pensamiento a otro. El modelo divide el conocimiento en cinco niveles de razonamiento; en cada uno de los cuales se plantean diferentes fases de aprendizaje de contenidos y habilidades, que permiten a los estudiantes pasar de un nivel de

pensamiento a otro más avanzado. Es decir, en un nivel primario pueden ser estudiados ciertos planteamientos emanados por algunos aspectos básicos geométricos, mientras que en un nivel secundario se asumen conocidos los aspectos del nivel primario y se explican las relaciones pertenecientes a él pero que estaban implícitas y no habían podido ser descubiertas. De esta manera se presenta avance en el proceso de pensamiento geométrico y aumenta el grado de comprensión de los conceptos.

Los siguientes son los niveles de pensamiento con las respectivas denominaciones y caracterizaciones:

Nivel 1: Básico, reconocimiento o visualización. Los individuos perciben las figuras como un todo global, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades; están conscientes del espacio solo como algo que existe alrededor de ellos. No reconocen las partes y componentes de las figuras. No explicitan las propiedades determinantes de las figuras. Una persona que funciona a este

nivel puede aprender un vocabulario geométrico, identificar formas especificadas y, dada una figura, reproducirla.

Nivel 2: Análisis. Los individuos comienzan un análisis de los conceptos geométricos; pueden analizar las partes y propiedades particulares de las figuras. A través de la observación y la experimentación, los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras pero no explican relaciones entre propiedades de distintas familias de estas, ni entienden las definiciones.

Nivel 3: Deducción informal. Los individuos pueden establecer las interrelaciones en las figuras y entre figuras; identifican las figuras por sus propiedades pero son incapaces de organizar una secuencia de razonamientos que justifiquen sus observaciones puesto que no comprenden el significado de la deducción como un todo ni el rol de los axiomas. Se pueden seguir pruebas formales; pero los

estudiantes no ven cómo el orden lógico podía ser alterado ni perciben tampoco cómo articular una demostración a partir de premisas diferentes o no familiares. En este nivel se pueden comprender las primeras definiciones que describen las interrelaciones con sus partes constituyentes.

Nivel 4: Deducción formal. Los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad desde otra. De esta manera entienden el significado de la deducción como un procedimiento válido para establecer una teoría geométrica utilizando un sistema de axiomas, postulados, definiciones y teoremas. Pueden construir demostraciones, verificar la validez en el desarrollo de una prueba de varias maneras, entender la interacción de condiciones necesarias y suficientes y distinguir entre una afirmación y una contra = afirmación.

Nivel 5: Rigor. Los individuos están capacitados para analizar el grado de rigor de

varios sistemas deductivos (axiomáticos), pueden estudiar geometrías no euclidianas y compararlas y apreciar la consistencia, la independencia y la interrelación de los axiomas que conforman los fundamentos de la geometría. Este último nivel, en el que la geometría se puede captar en forma abstracta, debe ser considerado como una categoría aparte.

Van Hiele propuso cinco fases de enseñanza que guían al docente en el diseño de experiencias de aprendizaje de la geometría. Él afirma que la institución desarrollada de acuerdo con esa secuencia, promueve la adquisición de un nivel. La descripción de las fases es la siguiente:

#### Fase 1: Discernimiento (interrogación).

En esta fase se presentan a los estudiantes situaciones y preguntas de trabajo, dando el vocabulario y las observaciones necesarias para desarrollarlo. El maestro y los estudiantes llevan a cabo conversaciones y actividades acerca de los objetivos de estudio para ese nivel. Los propósitos de esa

actividad son que el maestro reconozca qué saberes previos poseen los estudiantes acerca del tema y a su vez, los estudiantes reconozcan en qué dirección se dará el estudio posterior del mismo.

Fase 2: Orientación dirigida. En esta fase se propone a los estudiantes una secuencia de actividades graduadas a realizar y explorar. Los estudiantes exploran el tema de estudio mediante materiales que el maestro ha ordenado cuidadosamente. Esas actividades podrían revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel desde el tema tratado. Se proponen aquí actividades breves, diseñadas para lograr respuestas específicas.

Fase 3: Explicitación (explicación). Los estudiantes, una vez realizadas las experiencias, expresan sus resultados e intercambian comentarios acerca de las estructuras que han estado observando. Durante esta fase el estudiante estructura el sistema de relaciones exploradas. El maestro

orienta su acompañamiento en el uso de un lenguaje cuidadoso y apropiado, sin dar explicaciones a profundidad. Es durante esa fase que el sistema de relaciones del nivel desde el tema tratado comienza a hacerse claro.

Fase 4: Orientación libre. Con los conocimientos adquiridos, los estudiantes aplican sus conocimientos de forma significativa a otras situaciones distintas y más complejas a las presentadas previamente, pero con una estructura comparable. Se plantean a los estudiantes tareas que pueden ser completadas de varias maneras y tareas de final abierto, lo que permite darles libertad para que se encuentren con sus propias maneras de resolver los problemas.

Fase 5: Integración. Los estudiantes repasan y sintetizan lo que han aprendido con el objetivo de unificar e interiorizar las nuevas redes de objetos y relaciones. El maestro puede apoyarse en estas síntesis. Al final de



la quinta fase, los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de pensamiento. El nuevo dominio de pensamiento reemplaza al viejo y están listos para repetir las fases de aprendizaje en el siguiente nivel.

Algunas generalidades que caracterizan al modelo Van Hiele y que se convierten en propiedades significativas para los educadores son las siguientes:

= Secuencial. El estudiante avanza en orden a lo largo de los cinco niveles planteados. Se asume que un desempeño exitoso de una persona en un nivel específico, depende de la apropiación que tuvo al vivenciar las estrategias de los niveles anteriores.

= Ascendente. Los métodos de instrucción compartidos por el maestro y los contenidos recibidos por el estudiante, generan el paso o no, de un nivel a otro nivel. No existen métodos obstruccionales que permitan saltarse por encima de un nivel para llegar a otro; métodos incrementan los progresos, mientras que otros retardan un movimiento entre niveles. En geometría, existen situaciones

en las que se instruye para la memorización de una formula, con la cual los estudiantes no están preparados para interiorizar; en este caso lo que sucede es que el objeto de conocimiento se reduce a un nivel básico más bajo y la comprensión no ha ocurrido.

= intrínseco y extrínseco. Las características y propiedades pertenecientes a un nivel, se convierten en objetos de estudio en el siguiente.

= Lingüístico. En un nivel se presentan los propios símbolos y sistemas de relaciones que permiten su interconexión. Una relación que puede ser la apropiada en un nivel, puede modificarse en el o en los siguientes.

= Concordante. Si un estudiante está en un nivel y la instrucción que recibe está en otro, el aprendizaje y el progreso deseado pueden no ocurrir. Si el maestro, materiales obstruccionales, contenido, vocabulario y demás, están actuando en un nivel más alto al que le debe corresponder al estudiante, no le

será posible avanzar en el proceso de pensamiento.

## 2.8. DIDÁCTICA

Interesa, en primer lugar, realizar una clarificación terminológica. El término educación es más amplio que didáctica, por lo que se puede distinguir entre educación matemática y didáctica de la matemática. Esta es la opción tomada por Rico, Sierra y Castro (2000) quienes consideran la educación matemática como todo el sistema de conocimientos, instituciones, planes de formación y finalidades formativas que conforman una actividad social compleja y diversificada relativa a la enseñanza y aprendizaje de la matemática. La didáctica de la matemática la describen estos autores como la disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación.

Sin embargo, en el mundo anglosajón se emplea la expresión "Mathematics Education" para referirse al área de conocimiento que en Francia, Alemania, España, etc. se denomina didáctica de la matemática. También, las identifica Steiner (1985), citado en Godino 2010 para quien la educación matemática admite, además, una interpretación global dialéctica como disciplina científica y como

sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica.

Otro modelo de las relaciones de la educación matemática con otras disciplinas es propuesto por Higginson (1980), citado en Godino 2010 quien considera a la matemática, psicología, sociología y filosofía como las cuatro disciplinas fundacionales de ésta. Visualiza la educación matemática en términos de las interacciones entre los distintos elementos del tetraedro cuyas caras son dichas cuatro disciplinas.

Estas distintas dimensiones de la educación matemática asumen las preguntas básicas que se plantean en nuestro campo: qué enseñar (matemática); por qué (filosofía); a quién y donde (sociología); cuándo y cómo (psicología).

En el trabajo Higginson describe, asimismo, las aplicaciones del modelo para clarificar aspectos fundamentales como:

- La causas que han producido los cambios curriculares en el pasado y la previsión de los cambios futuros;
- El cambio de concepciones sobre la investigación y sobre la preparación de profesores.

### 2.8.1. DIDÁCTICA DEL ÁREA DE MATEMÁTICA

Por las palabras que la componen la didáctica de la matemática parece que es una especie de la didáctica general pero aplicada correctamente al campo de la matemática. Y buscando en su origen etimológico griego, la didáctica no es otra cosa que “el arte de enseñar, y todas las palabra con la misma raíz tienen que ver con el término enseñanza” (Brousseau, 1990), citado en Godino 2010. Mas concretamente, “la didáctica es está en camino de ser una ciencia y tecnología que se construye, desde la teoría y la práctica, en ambientes organizados de relación y comunicación intencional, donde se desrrollan procesos de enseñanza y aprendizaje para la formación de alumnos” (Benedito, 1987) citado en Godino 2010.

La Didáctica de la matemática es la disciplina científica y el campo de investigación cuyo objetivo es identificar, caracterizar y comprender los fenómenos y los procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. La educación matemática es el sistema social complejo y heterogéneo que incluye teoría, desarrollo y práctica relativa a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática e incluye a la didáctica de la matemática como subsistema (Godino y Batanero, 1994).

En un intento de síntesis D'Amore (2005) es claro al afirmar que la didáctica de la matemática ha constituido hoy por hoy, sus paradigmas científicos ampliamente compartidos constituyéndose como ciencia teórico práctica autónoma.

#### 2.8.1.1. LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA

Gascón (1998), al referirse a la evolución de la didáctica de la matemática como disciplina científica, señala estar determinada por sucesivas ampliaciones de su problemática, que comporta cambios en su objeto de estudio y su naturaleza. Una primera ampliación de la problemática didáctica, se da a inicios de la década de los 70 con la inclusión del conocimiento matemático al interior del sistema didáctico: estudiante conocimiento y matemático profesor, como objeto primario de investigación, que abre paso a una didáctica fundamental sustentada en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986). Posteriormente, un giro antropológico, de la visión del hombre haciendo matemática, el estudio de la actividad matemática, daría paso a un enfoque antropológico (Chevallard, 1991), citado en Godino

2002, como una nueva ampliación de la problemática en este campo científico, que sugiere categorías y fenómenos didácticos propios, como el de la transposición didáctica, el contrato didáctico, praxeología matemática, fenomenología didáctica, entre otros, que hoy por hoy exigen de un análisis más fino desde la teoría de funciones semióticas (Godino, 2003), las comunidades de práctica y las competencias matemáticas (D'Amore, 2005).

“Esta evolución del problema de la didáctica de la matemática, ha puesto de manifiesto que posee un componente irreductiblemente matemático; es decir, lo matemático se ha hecho denso en lo didáctico y por lo tanto la comunidad de matemáticos y educadores matemáticos, tiene la función científica y el deber social de asumir una importante responsabilidad en la investigación de esta problemática” (Gascón, 1998).

El carácter inter y transdisciplinario de la didáctica de la matemática, ha llevado a considerar la noción de sistema, en sus consideraciones teóricas.

Es decir, además del sistema social y de enseñanza de la matemática, hay que considerar también los sistemas didácticos materializados en una

clase, cuyos subsistemas principales son: Profesor, estudiantes, saber matemático enseñado. Artigüe (1984) citado en Godino (2003), señala que una aproximación sistémica a los problemas didácticos es fundamental por cuanto evidencia que el objeto de estudio en didáctica de la matemática se encuentra en el centro de una red compleja de múltiples interacciones y muestra además, en el seno de su problemática de interés, lo que la liga entre sí, junto a diversas disciplinas, pero al mismo tiempo sus diferencias.

En este sentido, la Educación Matemática es el sistema social, heterogéneo y complejo en el que deben distinguirse por lo menos tres componentes:

1) La praxis, acción práctica y reflexiva sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática.

2) La tecnología didáctica, que como tecnología se propone desarrollar dispositivos, materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles.

3) La investigación científica, que intenta comprender el funcionamiento de la enseñanza



de la Matemática en su conjunto, así como el de los sistemas didácticos específicos (Godino, 2002).

Estos tres componentes se interesan en general por el funcionamiento de los sistemas didácticos y su finalidad en esencia, es la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Sin embargo, la perspectiva de lo temporal, reglas de funcionamiento y condicionamientos sociohistóricos los hace intrínsecamente diferentes. Los componentes 1 y 2 pueden ser comprendidos como investigación para la acción (práctica) mientras que el componente 3 equivale a la investigación para el conocimiento (teoría) (Godino y Batanero, 1994).

Desde este análisis, la Didáctica de la matemática es la disciplina científica y el campo de investigación cuyo objetivo es identificar, caracterizar y comprender los fenómenos y los procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. La educación matemática es el sistema social complejo y heterogéneo que incluye teoría, desarrollo y práctica relativa a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática e incluye a la didáctica

de la matemática como subsistema (Godino y Batanero, 1994).

#### 2.8.1.2. ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

La geometría es una herramienta para comprender e interactuar en el espacio que nos rodea, pero es a su vez una disciplina científica que está que nos rodea.

Los docentes que acompañan a sus estudiantes en el aprendizaje de la geometría, deben generar un ambiente de aprendizaje diversificado que busque potencializar sus distintas dimensiones. Entre las dimensiones que abarca la geometría según Castiblanco y otros (2004); han planteado las siguientes, tratando de ubicarla en relación con las matemáticas, las ciencias y la vida cotidiana:

Es una ciencia del espacio y de la forma.

Desde sus raíces como herramienta para describir y medir figuras, se han ido constituyendo teorías, ideas y métodos, mediante los cuales podemos construir y estudiar modelos idealizados del mundo físico

o de fenómenos que acontecen en el mundo real.

Es un método para representar visualmente conceptos y procesos de otras áreas como las matemáticas, las ciencias naturales y las ciencias sociales.

Es un punto de encuentro entre la matemática vista como una teoría abstracta y la matemática vista como un recurso de modelación.

Es una fuente para el desarrollo del pensamiento hasta llegar a construir una teoría formal.

Es una oportunidad para la enseñanza del razonamiento deductivo.

Al ser vista la matemática hoy como una actividad propia de la cotidianidad humana, la geometría ha comenzado a verse igualmente como parte de esa cotidianidad, con un acumulado de dimensiones desde las cuales se puede generar un aprendizaje activo que trascienda lo curricular, permitiendo un acercamiento afín entre las matemáticas, las ciencias sociales y las ciencias naturales.

Se debe aceptar que la geometría es una ciencia cambiante de evolución continua que supera las proposiciones formales constituidas por ese entremado complejo de teorías, axiomas y teoremas; la cual se va construyendo mediante procesos cognitivos que relacionan los análisis geométricos con la comunicación de dichos análisis. Dichos análisis se realizan de manera individual o grupal y utilizan como mediadores, cuerpos concretos o simbólicos que a su vez van generando un avance en el conocimiento y van permitiendo interpretar, plantear y resolver situaciones problema.

La enseñanza de la geometría desde una perspectiva multifacética, permite al estudiante avizorar un conocimiento geométrico útil para su vida cotidiana. Toda situación geométrica ofrece la posibilidad de explorar, formular, experimentar y demostrar; igualmente, permite modelar matemáticamente situaciones para resolver problemas de las ciencias sociales y las actividades humanas.

De acuerdo con el nivel escolar, y respetando la etapa evolutiva de los estudiantes, se debe hacer

énfasis en una u otra dimensión de la geometría. Autores como Niss (1998) y Van Hiele, citados por Wilson Alfonso 2009, sugieren primero profundizar en la dimensión empírica de la geometría que acerque al estudiante a la representación del espacio en el cual convive.

Posteriormente, en las siguientes etapas, es necesario entrar a comprender las relaciones entre los objetos tridimensionales y sus representaciones bidimensionales; para finalmente, en los niveles superiores de educación básica y media, profundizar en conocimientos geométricos más amplios y formales, que permitan en los estudiantes experimentar, validar y trasladar a diferentes contextos, los conocimientos adquiridos desde la geometría.

Durante el cubrimiento de las anteriores etapas, Niss y Van Hiele han sugerido, para las primeras etapas, una serie de actividades orientadas a fortalecer los tres tipos de relaciones espaciales (topológicas, proyectivas y métricas); actividades orientadas a la exploración, la descripción, la clasificación y la representación de objetos concretos

del plano y del espacio, movimientos en el plano, identificación de trayectorias y la ubicación espacial y nociones de regularidades evidenciadas físicamente y orientadas a fortalecer pruebas sencillas y a identificar reglas propias de la aritmética.

En las etapas subsiguientes se sugieren una serie de actividades encaminadas a buscar un sistema de identificación de patrones de seguridad para llegar, desde las hipótesis informales, hasta las generalizaciones formales. De esta manera, se permitirá ir evidenciando un avance en la competencia argumentativa para llegar a la producción, mediante un enfoque deductivo, de las teorías axiomáticas. Cobran importancia aquí la construcción de definiciones teóricas, la identificación de propiedades geométricas, las estrategias demostrativas, la formulación y resolución de problemas de aplicación y la interrelación de teorías geométricas.

#### 2.8.1.3. ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Las estrategias metodológicas (MED 2012) para la enseñanza son secuencias integradas de

procedimientos y recursos utilizados por el formador con el propósito de desarrollar en los estudiantes capacidades para la adquisición, interpretación y procesamiento de la información; y la utilización de estas en la generación de nuevos conocimientos, su aplicación en las diversas áreas en las que se desempeñan la vida diaria para, de este modo, promover aprendizajes significativos. Las estrategias deben ser diseñadas de modo que estimulen a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular hipótesis, buscar soluciones y descubrir el conocimiento por sí mismos.

Existen varias estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática. En la guía desarrollamos algunas, como resolución de problemas, actividades lúdicas y modelaje. Las cuales están desarrolladas con la preocupación de proponer el uso de recursos variados que permitan atender a las necesidades y habilidades de los diferentes estudiantes, además de incidir en aspectos tales como:

- Potenciar una actitud activa.

- Despertar la curiosidad del estudiante por el tema.
- Debatir con los colegas.
- Compartir el conocimiento con el grupo.
- Fomentar la iniciativa y la toma de decisión.
- Trabajo en equipo

Para resolver problemas, necesitamos desarrollar determinadas estrategias que, en general, se aplican a un gran número de situaciones. Este mecanismo ayuda en el análisis y en la solución de situaciones donde uno o más elementos desconocidos son buscados.

Es importante que los estudiantes perciban que no existe una única estrategia, ideal e infalible de resolución de problemas. Asimismo, que cada problema amerita una determinada estrategia y muchos de ellos pueden ser resueltos utilizando varias estrategias.

Algunas de las que se pueden utilizar son:



-TANTEO Y ERROR organizados (métodos de ensayo y error): Consiste en elegir soluciones u operaciones al azar y aplicar las condiciones del problema a esos resultados u operaciones hasta encontrar el objetivo o hasta comprobar que eso no es posible. Después de los primeros ensayos ya no se eligen opciones al azar sino tomando en consideración los ensayos ya realizados.

- RESOLVER UN PROBLEMA SIMILAR MÁS SIMPLE: Para obtener la solución de un problema muchas veces es útil resolver primero el mismo problema con datos más sencillos y, a continuación, aplicar el mismo método en la solución del problema planteado, más complejo.

- HACER UNA FIGURA, UN ESQUEMA, UN DIAGRAMA, UNA TABLA: En otros problemas se puede llegar fácilmente a la solución si se realiza un dibujo, esquema o diagrama; es decir, si se halla la representación

adecuada. Esto ocurre porque se piensa mucho mejor con el apoyo de imágenes que con el de palabras, números o símbolos.

- **BUSCAR REGULARIDADES O UN PATRÓN:** Esta estrategia empieza por considerar algunos casos particulares o iniciales y, a partir de ellos, buscar una solución general que sirva para todos los casos. Es muy útil cuando el problema presenta secuencias de números o figuras. Lo que se hace, en estos casos, es usar el razonamiento inductivo para llegar a una generalización.

- **TRABAJAR HACIA ATRÁS:** Esta es una estrategia muy interesante cuando el problema implica un juego con números. Se empieza a resolverlo con sus datos finales, realizando las operaciones que deshacen las originales.

- IMAGINAR EL PROBLEMA

RESUELTO: En los problemas de construcciones geométricas es muy útil suponer el problema resuelto. Para ello se traza una figura aproximada a la que se desea. De las relaciones observadas en esta figura se debe desprender el procedimiento para resolver el problema.

- UTILIZAR EL ÁLGEBRA PARA

EXPRESAR RELACIONES: Para relacionar algebraicamente los datos con las condiciones del problema primero hay que nombrar con letras cada uno de los números desconocidos y en seguida expresar las condiciones enunciadas en el problema mediante operaciones, las que deben conducir a escribir la expresión algebraica que se desea.

- ROMPECABEZAS GEOMÉTRICOS:

Rompecabezas de la T, de la H, de la casita o la cruz griega, Rompecabezas de las cuatro T, Rompecabezas de piezas idénticas, Cubos y

policubos, Demostraciones dinámicas, Rompecabezas de mosaicos de Van Hiele, Rompecabezas por cuadratura.

- LOS POLICUBOS: son cuerpos geométricos formados por cubos iguales encajados o pegados por medio de sus caras. Se pueden considerar diferentes colecciones de agrupaciones de cubos, entre ellas una de las más conocidas es el cubo Soma, formado por siete agrupaciones diseñado por el danés Piet Hein (1905 – 1997) en el año 1936. El objetivo de este rompecabezas es colocarlos de manera que todos juntos formen un cubo 3x3x3.

- TANGRAM: Chino, de Fletcher, Cardiotangram, Hexagonal, Pentagonal, Triangular, de Lloyd, Pitagórico, de Brügner, Stomachion, Ovoide, Espacial.

- ORIGAMI O PAPIROFLEXIA: Modelos sin corte de papel, Con cortes de papel, Con apoyo de materiales adicionales, Multicapas, Multihoja, Desarrollados partir de módulos, Decorados, Con técnica de encorvado.

## DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

La educación (del latín educere “sacar, extraer” o educare “formar, instruir”) puede definirse como: El proceso multidireccional mediante el cual se transmiten conocimientos, valores, costumbres y formas de actuar. La educación no solo se produce a través de la palabra, pues está presente en todas nuestras acciones, sentimientos y actitudes.

El proceso de vinculación y concienciación cultural, moral y conductual. Así, a través de la educación, las nuevas generaciones asimilan y aprenden los conocimientos, normas de conducta, modos de ser y formas de ver el mundo de generaciones anteriores, creando además otros nuevos.

La pedagogía (del griego paidos - niño y gogos - conducir) es la ciencia que tiene como objeto de estudio a la educación, (en pocas palabras, «enseñar a los que enseñan»). Es una ciencia perteneciente al campo de las Ciencias Sociales y Humanas; el objeto de estudio de la pedagogía es «la educación», tomada esta en el sentido general, que le han atribuido diversas legislaciones internacionales, como lo referido en documentos de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura (UNESCO), la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) y los propios de cada país (como las leyes generales o nacionales sobre educación).

La psicología (literalmente “estudio o tratado del alma”; del griego psique, alma, actividad mental, y logía, tratado o estudio) es la ciencia que trata la conducta y los procesos mentales de los individuos.

La psicología explora conceptos como la percepción, la atención, la motivación, la emoción, el funcionamiento del cerebro, la inteligencia, el pensamiento, la personalidad, las relaciones personales, la consciencia y la inconsciencia. La psicología emplea métodos empíricos cuantitativos de investigación para analizar el comportamiento.

La psicopedagogía es la disciplina aplicada que estudia los comportamientos humanos en situación de aprendizaje, como son: problemas en el aprendizaje y orientación vocacional. En ella se interrelacionan la psicología evolutiva, la psicología del aprendizaje la sociología, la didáctica, la epistemología, la psicolingüística, la psicología cognitiva, entre otras. Son relevantes sus aportaciones en los campos de la pedagogía y en los campos de la educación especial, terapias educativas, diseño curricular, diseño de programas educativos y política educativa, también es una ayuda para niños en su proceso de enseñanza y aprendizaje.

La didáctica de la matemática o matemática educativa estudia las actividades didácticas, o sea las actividades que tienen por objeto la

enseñanza, en lo que ellas tienen de específico de la matemática. La educación matemática se refiere tanto al aprendizaje, como a la práctica y enseñanza de las matemáticas, así como a un campo de la investigación académica sobre esta práctica. Los investigadores en educación matemática en primera instancia cuestionan las herramientas, métodos y enfoques que faciliten la práctica y/o el estudio de la práctica.

La enseñanza es una actividad realizada conjuntamente mediante la interacción de cuatro elementos: uno o varios profesores o docentes o facilitadores, uno o varios alumnos o discentes, el objeto de conocimiento, y el entorno educativo o mundo educativo que pone en contacto a profesores y estudiantes. La enseñanza es el proceso de transmisión de una serie de conocimientos, técnicas, normas, y/o habilidades, basado en diversos métodos, realizado a través de una serie de instituciones, y con el apoyo de una serie de materiales.

El aprendizaje es el proceso a través del cual se adquieren o modifican habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación. El aprendizaje es el proceso mediante el cual se adquiere una determinada habilidad, se asimila una información o se adopta una nueva estrategia de conocimiento y acción. Este proceso puede ser analizado desde distintas perspectivas, por lo que existen



distintas teorías del aprendizaje. El aprendizaje es una de las funciones mentales más importantes en humanos, animales y sistemas artificiales.

Las estrategias metodológicas para la enseñanza son secuencias integradas de procedimientos y recursos utilizados por el formador con el propósito de desarrollar en los estudiantes capacidades para la adquisición, interpretación y procesamiento de la información; y la utilización de estas en la generación de nuevos conocimientos, su aplicación en las diversas áreas en las que se desempeñan la vida diaria para, de este modo, promover aprendizajes significativos. Las estrategias deben ser diseñadas de modo que estimulen a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular hipótesis, buscar soluciones y descubrir el conocimiento por sí mismos.

Los niveles de pensamiento se definen como estadios del desarrollo de las capacidades intelectuales del estudiante y no están directamente ligados con el crecimiento o la edad. Estos niveles se repasan sucesivamente en cada ocasión en que el estudiante se encuentra con un nuevo contenido matemático y, a medida que se va avanzando en su conocimiento, los primeros niveles son superados de una manera más rápida que en ocasiones anteriores.

La geometría (del griego geo, “tierra” y metría, “medida”) es una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio, incluyendo: puntos, rectas, planos, polítopos (que incluyen paralelas, perpendiculares, curvas, superficies, polígonos, poliedros, etc.).

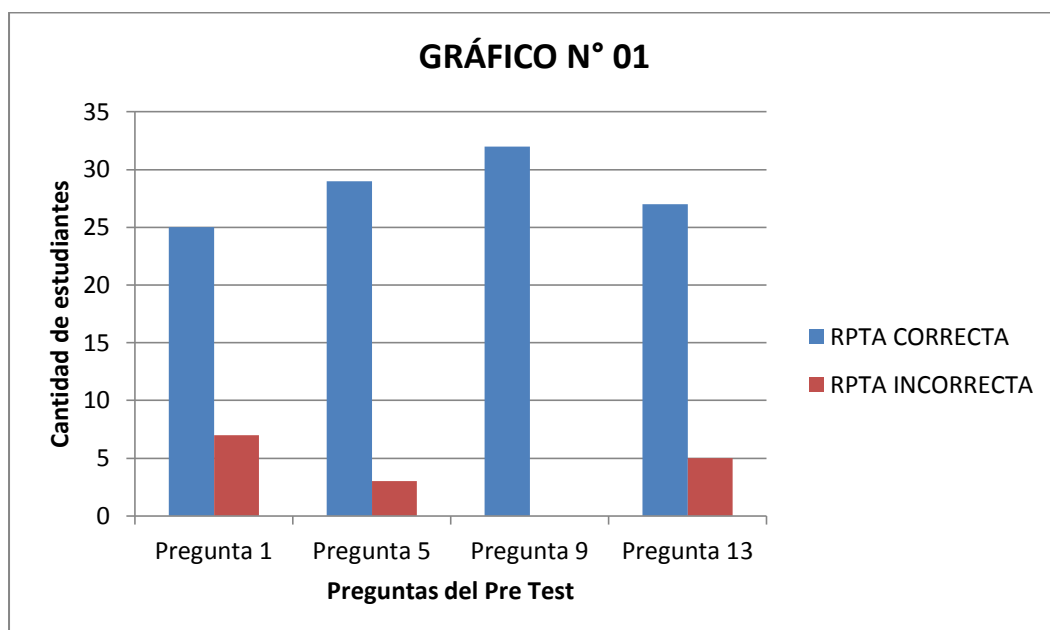
Sus orígenes se remontan a la solución de problemas concretos relativos a medidas. Tiene su aplicación práctica en física aplicada, mecánica, arquitectura, geografía, cartografía, astronomía, náutica, topografía, balística, etc. Y es útil en la preparación de diseños e incluso en la elaboración de artesanía.

**CAPÍTULO III**  
**RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN**

### 3.1. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS

TABLA N° 01: NIVEL I (RECONOCIMIENTO DE FIGURAS)

Preguntas	RPTA CORRECTA		RPTA INCORRECTA	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Pregunta 1	25	78.0	7	22.0
Pregunta 5	29	90.6	3	9.4
Pregunta 9	32	100.0	0	0.0
Pregunta 13	27	84.4	5	15.6
Promedio		88.3		11.7

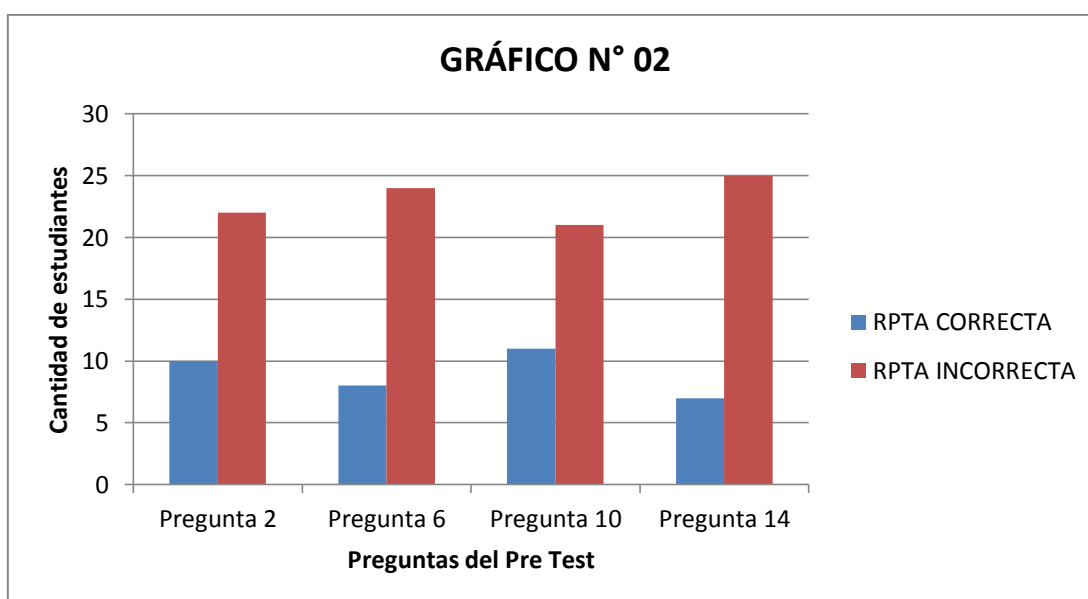


Del pre test aplicado a los 32 estudiantes, se puede apreciar que el 88.3 % de los evaluados responden correctamente y el 11,7 % de los estudiantes no contestan correctamente las preguntas, es necesario resaltar que todos los estudiantes acertaron en la pregunta 9.

De acuerdo con la información presentada en la tabla anterior se observa que la mayoría de los estudiantes se ubica en el primer nivel de pensamiento geométrico; es decir, son capaces de identificar figuras y reproducir figuras.

TABLA N° 02: NIVEL II (ANÁLISIS DE OBJETOS GEOMÉTRICOS)

Preguntas	RPTA CORRECTA		RPTA INCORRECTA	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Pregunta 2	10	31.3	22	68.8
Pregunta 6	8	25.0	24	75.0
Pregunta 10	11	34.4	21	65.6
Pregunta 14	7	21.9	25	78.1
Promedio		28.1		71.9

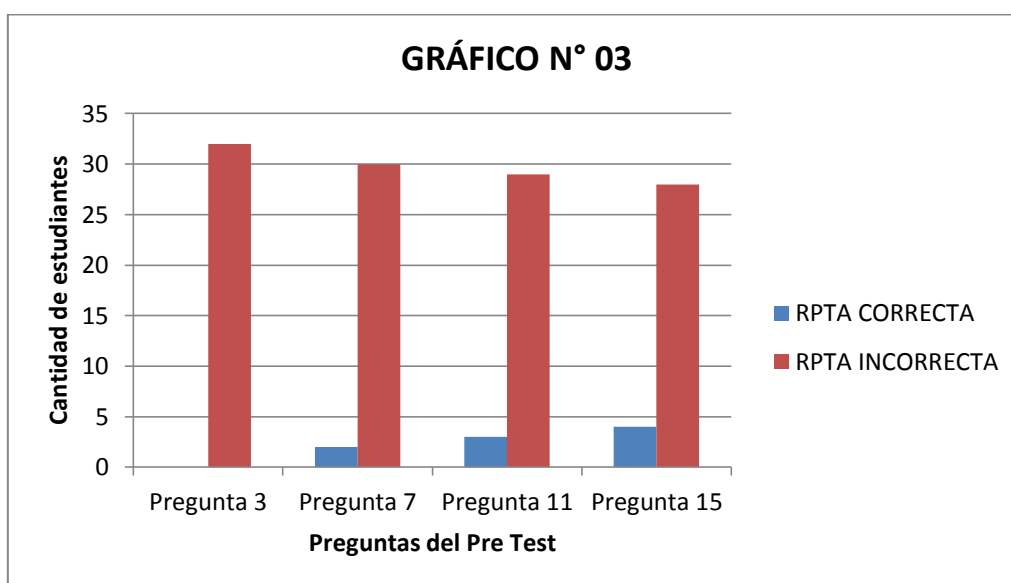


Del pre test aplicado a los 32 estudiantes, se puede apreciar que el 28.1 % de los evaluados responden correctamente y el 71,9 % de los estudiantes no contestan correctamente las preguntas.

De acuerdo con la información presentada en la tabla anterior se observa que solamente la tercera parte de los estudiantes están en la capacidad de analizar los diferentes objetos geométricos.

TABLA N° 03: NIVEL III (CLASIFICACIÓN DE OBJETOS GEOMÉTRICOS)

Preguntas	RPTA CORRECTA		RPTA INCORRECTA	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Pregunta 3	0	0.0	32	100.0
Pregunta 7	2	6.3	30	93.8
Pregunta 11	3	9.4	29	90.6
Pregunta 15	4	12.5	28	87.5
Promedio		7.0		93.0

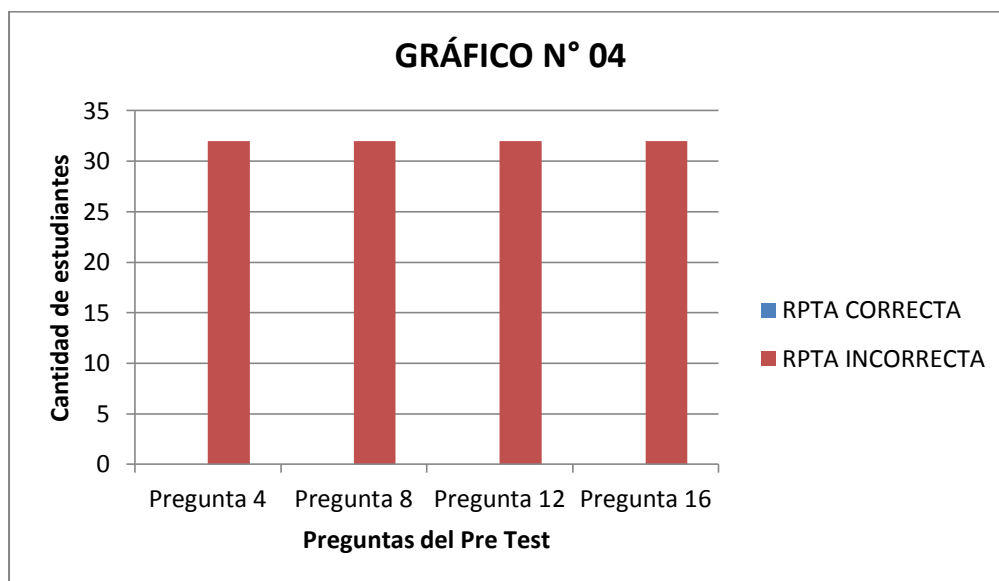


Del pre test aplicado a los 32 estudiantes, se puede apreciar que el 7,0 % de los evaluados responden correctamente y el 93,0 % de los estudiantes no contestan correctamente las preguntas.

De acuerdo con la información presentada en la tabla anterior se observa que la menor parte de los estudiantes están en la capacidad de clasificar los diferentes objetos geométricos.

TABLA N° 04: NIVEL IV (DEDUCCIÓN FORMAL)

Preguntas	RPTA CORRECTA		RPTA INCORRECTA	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Pregunta 4	0	0.0	32	100.0
Pregunta 8	0	0.0	32	100.0
Pregunta 12	0	0.0	32	100.0
Pregunta 16	0	0.0	32	100.0
Promedio		0.0		100.0



Del pre test aplicado a los 32 estudiantes, se puede apreciar que el 100,0 % de los estudiantes no contestan correctamente las preguntas.

De acuerdo con la información presentada en la tabla anterior se observa que ningún estudiante está en el cuarto nivel, conocido como la esencia de la matemática

### 3.2. PROPUESTA TEÓRICA

TÍTULO: ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA MEJORAR NIVEL DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO DE LOS ESTUDIANTES.

#### INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la geometría en cualquier nivel educativo, se construye pasando por niveles de pensamiento, de acuerdo a la teoría de Van de Hiele, los cuales son cinco: visualización, análisis, ordenación, deducción formal y rigor; en la educación básica solamente se logra desarrollar los cuatro primeros niveles y el último nivel es exclusivo de la educación superior.

Luego de aplicar el pretest, de analizar e interpretar los resultados se concluyó que la mayoría de los estudiantes se ubican en el nivel 1 o nivel de reconocimiento

Para ello las estrategias buscan mejorar el nivel de pensamiento geométrico de los estudiantes de cuarto grado “B” de la institución educativa estatal “Julio Ramón Ribeyro”

OBJETIVO: Mejorar nivel de pensamiento geométrico de los estudiantes del 4° “B” de la Institución Educativa Julio Ramón Ribeyro.



DIRIGIDO A: Los 32 estudiantes del 4° “B” de la Institución Educativa Julio Ramón Ribeyro, del centro poblado La Paccha, distrito y provincia de Cajamarca.

#### SUSTENTO TEÓRICO:

La teoría, modelo o niveles de Van Hiele es una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la geometría, diseñado por el matrimonio holandés van Hiele.

El modelo tiene su origen en 1957, en las disertaciones doctorales de Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele en la Universidad de Utrecht, Holanda. El libro original donde se desarrolla la teoría se denomina *Structure and Insight: A theory of mathematics education*.

La teoría forma parte de la didáctica de la matemática y específicamente en la didáctica de la Geometría.

Ideas básicas de la teoría

La idea básica del modelo, expresado en forma sencilla es:

- El aprendizaje de la geometría se construye pasando por niveles de pensamiento. Según este modelo, se requiere una adecuada instrucción para que los alumnos puedan pasar a través de los distintos niveles. En relación a esto, Van Hiele proponen cinco fases secuenciales de aprendizaje: información, orientación guiada o dirigida, explicitación, orientación libre e integración. Ellos afirman

que al desarrollar la instrucción de acuerdo a esta secuencia, se puede promover al alumno al nivel siguiente del que se encuentra. Estos niveles no van asociados a la edad, y cumplen las siguientes características:

- No se puede alcanzar el nivel  $n$  sin haber pasado por el nivel anterior  $n-1$ , o sea, el progreso de los alumnos a través de los niveles es secuencial e invariante.
- Lo que es implícito en un nivel de pensamiento, en el nivel siguiente se vuelve explícito.
- Cada nivel tiene su lenguaje utilizado (símbolos lingüísticos) y su significatividad de los contenidos (conexión de estos símbolos dotándolos de significado).
- Dos estudiantes con distinto nivel no pueden entenderse.

## Niveles

Los niveles van Hiele son cinco, suele nombrarse con números del 1 a 5

### Nivel 1: Visualización o Reconocimiento

En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades. Las descripciones son visuales y tendientes a semejarlas con elementos familiares.

*Ejemplo:* identifica paralelogramos en un conjunto de figuras.  
Identifica ángulos y triángulos en diferentes posiciones en imágenes.

## Nivel 2: Análisis

Se perciben propiedades de los objetos geométricos. Pueden describir objetos a través de sus propiedades (no solo visualmente). Pero no puede relacionar las propiedades unas con otras.

*Ejemplo:* un cuadrado tiene lados iguales. Un cuadrado tiene ángulos iguales

## Nivel 3: Ordenación o clasificación

Describen los objetos y figuras de manera formal. Entienden los significados de las definiciones. Reconocen como algunas propiedades derivan de otras. Establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias.

Los estudiantes son capaces de seguir demostraciones. Aunque no las entienden como un todo, ya que, con su razonamiento lógico solo son capaces de seguir pasos individuales.

*Ejemplo:* en un paralelogramo, lados opuestos iguales implican lados opuestos paralelos. Lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales.

## Nivel 4: Deducción Formal

En este nivel se realizan deducciones y demostraciones. Se entiende la naturaleza axiomática y se comprende las propiedades y se formaliza en sistemas axiomáticos. Van Hiele llama a este nivel la esencia de la matemática.

*Ejemplo:* demuestra de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

#### Nivel 5: Rigor

Se trabaja la geometría sin necesidad de objetos geométricos concretos. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se puede analizar y comparar. Se aceptará una demostración contraria a la intuición y al sentido común si el argumento es válido. Dado que el nivel 4 se piensa que es inalcanzable para los estudiantes y muchas veces se prescinde de él, además, trabajos realizados señalan que los estudiantes no universitarios, como mucho, alcanzan los tres primeros niveles.

#### CRONOGRAMA

ACTIVIDADES	TIEMPO	RESPONSABLE
• Administración de un pretest.	1 sesión	Docente
• Aplicación del programa de estrategias.	10 sesiones	Docente
• Administración de un postest.	1 sesión	Docente

## SESIÓN N° 01

I. TÍTULO: Reconociendo figuras

II. DURACIÓN: 90 min

III. OBJETIVO DE LA SESIÓN

- Identifica cuadrados, rectángulos, rombos y otras formas geométricas de su entorno.

IV. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	TIEMPO
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente inicia la sesión dando la bienvenida a los estudiantes. Presenta los aprendizajes esperados.</li><li>• El docente organiza grupos de trabajo.</li><li>• Los estudiantes salen del aula de clases, para observar formas geométricas presentes en la I.E.</li></ul>	15 min
<ul style="list-style-type: none"><li>• Se inicia con la fase de interrogación a fin de recoger saberes de los estudiantes partiendo de la observación, en esta fase se interroga:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Qué objetos observas?</li><li>➤ ¿Qué formas tienen?</li><li>➤ ¿Qué objetos tienen forma cóncava?</li></ul></li><li>• Luego, se pasa a la fase de orientación dirigida, en esta fase el docente explica las actividades propuestas con la finalidad de que el estudiante logre identificar cuadrados, rectángulos, rombos y otras formas geométricas presentes en los objetos</li></ul>	65 min

<p>de su institución.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Los estudiantes observan las figuras del entorno educativo, luego las representan en una hoja teniendo en cuenta el número de lados que poseen y su concavidad.</li> <li>• En esta fase de orientación dirigida, el docente acompaña y guía los aprendizajes de los estudiantes, está atento a las llamadas de los grupos de trabajo.</li> <li>• Los estudiantes, mediante trabajos en grupos, pasan a la fase de explicitación donde intercambiarán experiencias con la finalidad de realizar argumentaciones y conclusiones sobre las propiedades encontradas.</li> <li>• El docente invita a los estudiantes a pasar a la fase de orientación libre, propone que apliquen lo aprendido al resolver ejercicios planteados en una ficha de trabajo, clasificando las figuras de la naturaleza.</li> <li>• En la fase de integración, se sistematiza toda la información en un organizador visual, teniendo en cuenta figuras cóncavas y convexas.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente promueve la reflexión de los estudiantes sobre la experiencia realizada.</li> </ul>	10 min

<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendimos? ¿Cómo lo aprendimos? ¿Nos sirve lo que aprendimos? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos?</li> <li>• Finalización (agradecimiento y despedida)</li> </ul>	
--	--

## V. RECURSOS

Humanos	Materiales	Servicios
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Profesor de área.</li> <li>• Estudiantes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Papelotes.</li> <li>• Plumones.</li> <li>• Lapiceros.</li> <li>• Hojas impresas.</li> <li>• Reglas.</li> <li>• Cuaderno.</li> <li>• Texto escolar.</li> <li>• Registro de asistencia</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fotocopiado.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Otros.</li> </ul>

## SESIÓN N° 02

I. TÍTULO: Identificando ángulos

II. DURACIÓN: 90 min

III. OBJETIVO DE LA SESIÓN

- Identifica ángulos congruentes en un paralelogramo.

IV. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	TIEMPO
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente inicia la sesión dando la bienvenida a los estudiantes. Presenta los aprendizajes esperados.</li><li>• El docente indica que se va a trabajar en forma individual y en parejas.</li></ul>	10 min
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente da la siguiente indicación:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ Vamos a graficar en la pizarra un paralelogramo ABCD</li></ul></li><li>• Se inicia con la fase de interrogación a fin de recoger saberes de los estudiantes partiendo de la observación, un estudiante sale a la pizarra y realiza la gráfica.</li><li>• El docente pregunta:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Qué elementos tiene esa figura?</li><li>➤ ¿Cuántos lados y ángulos tiene?</li><li>➤ ¿Podemos medir sus lados, sus ángulos?</li><li>➤ ¿Con qué instrumentos los podemos medir?</li></ul></li><li>• Luego, se pasa a la fase de orientación dirigida, en</li></ul>	70 min



<p>esta fase el docente explica las actividades propuestas (medir los cuatro ángulos internos del paralelogramo graficado, utilizando transportador),</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Los estudiantes en sus cuadernos, grafican tres o cuatro paralelogramos, realizan las mediciones y las anotan con la finalidad de que el estudiante logre determinar que los ángulos opuestos en un paralelogramo, son congruentes (de igual medida).</li> <li>• El docente realiza con los estudiantes diversos problemas sobre ángulos en el paralelogramo.</li> <li>• En esta fase de orientación dirigida, el docente acompaña y guía los aprendizajes de los estudiantes.</li> <li>• Los estudiantes, en parejas, pasan a la fase de explicitación donde intercambiarán experiencias con la finalidad de realizar argumentaciones y conclusiones sobre las medidas encontradas.</li> <li>• El docente invita a los estudiantes a pasar a la fase de orientación libre, propone que apliquen lo aprendido al resolver ejercicios y problemas planteados en el texto escolar.</li> <li>• En la fase de integración Se sistematiza toda la información en un organizador visual, que le permitirá recordar fácilmente lo aprendido.</li> </ul>	
---	--

<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente promueve la reflexión de los estudiantes sobre la experiencia.</li> <li>• El docente plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendimos? ¿Cómo lo aprendimos? ¿Nos sirve lo que aprendimos? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos?</li> <li>• Finalización (agradecimiento y despedida)</li> </ul>	10 min
---	--------

## V. RECURSOS

Humanos	Materiales	Servicios
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Profesor de área.</li> <li>• Estudiantes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Plumones.</li> <li>• Lapiceros.</li> <li>• Hojas impresas.</li> <li>• Reglas.</li> <li>• Cuaderno.</li> <li>• Texto escolar.</li> <li>• Registro de asistencia</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fotocopiado.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Otros.</li> </ul>

### SESIÓN N° 03

I. TÍTULO: Las características del rombo

II. DURACIÓN: 90 min

III. OBJETIVO DE LA SESIÓN

- Infiere el valor de la medida del ángulo formado por las diagonales de un rombo

IV. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	TIEMPO
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente inicia la sesión dando la bienvenida a los estudiantes. Presenta los aprendizajes esperados.</li><li>• El docente organiza las parejas de trabajo.</li></ul>	15 min
<ul style="list-style-type: none"><li>• Se inicia con la fase de interrogación a fin de recoger saberes de los estudiantes, en esta fase se interroga:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Qué es un rombo? ¿Es un cuadrado? ¿Es un paralelogramo?</li><li>➤ ¿Qué tiene en común un rombo con un cuadrado?</li><li>➤ ¿Qué diferencias hay entre un cuadrado y un rombo?</li></ul></li><li>• Luego, se pasa a la fase de orientación dirigida, en esta fase el docente explica las actividades propuestas con la finalidad de que el estudiante logre aprendizajes. En la ficha se proponen</li></ul>	65 min

<p>interrogantes para la figura, de modo que logren inferir la medida del ángulo formado por las diagonales de un rombo.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Dobra una hoja de papel a la mitad.</li> <li>➤ Haz un segundo dobléz a la mitad.</li> <li>➤ Trata de imaginar qué figura se obtendría si cortas una de las esquinas.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Los estudiantes, en parejas, pasan a la fase de explicitación donde hacen conjeturas y justifican antes de cortar. Responden a las interrogantes: <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ ¿Qué tipo de figuras obtiene si hace un corte en la esquina con un ángulo de <math>30^\circ</math>?</li> <li>➤ ¿Y si lo haces con uno de <math>45^\circ</math>?</li> </ul> </li> <li>• Describen los ángulos y el punto de intersección de las diagonales.</li> <li>• Intercambiarán experiencias con la finalidad de realizar argumentaciones y conclusiones sobre las propiedades encontradas.</li> <li>• El docente acompaña y guía los aprendizajes de los estudiantes, está atento a las llamadas de las parejas de trabajo.</li> <li>• El docente invita a los estudiantes a pasar a la fase de orientación libre, propone que apliquen lo aprendido al resolver ejercicios y problemas</li> </ul>	
--	--

<p>propuestos en el texto escolar.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En la fase de integración, se pegan las figuras dobladas y cortadas en el cuaderno, además se realiza un pequeño organizador visual.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente promueve la reflexión de los estudiantes sobre la experiencia realizada.</li> <li>• El docente plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendimos? ¿Cómo lo aprendimos? ¿Nos sirve lo que aprendimos? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos?</li> <li>• Finalización (agradecimiento y despedida)</li> </ul>	10 min

## V. RECURSOS

Humanos	Materiales	Servicios
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Profesor de área.</li> <li>• Estudiantes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Plumones.</li> <li>• Lapiceros.</li> <li>• Hojas impresas.</li> <li>• Hojas de colores.</li> <li>• Reglas.</li> <li>• Cuaderno.</li> <li>• Texto escolar.</li> <li>• Registro de asistencia</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fotocopiado.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Otros.</li> </ul>

## SESIÓN N° 04

I. TÍTULO: Ángulo entre diagonales

II. DURACIÓN: 90 min

III. OBJETIVO DE LA SESIÓN

- Demuestra que el ángulo formado por las diagonales de un rombo mide  $90^\circ$

IV. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	TIEMPO
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente inicia la sesión dando la bienvenida a los estudiantes. Presenta los aprendizajes esperados.</li><li>• El trabajo a realizarse es individual.</li></ul>	10 min
<ul style="list-style-type: none"><li>• Se inicia con la fase de interrogación a fin de recoger saberes de los estudiantes preguntando:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Qué son las diagonales?</li><li>➤ ¿Dónde se cortan las diagonales de un rombo?</li></ul></li><li>• Luego, se pasa a la fase de orientación dirigida, en esta fase el docente explica las actividades propuestas con la finalidad de que el estudiante logre demostrar que el ángulo formado por las diagonales de un rombo mide <math>90^\circ</math>.</li><li>• El docente plantea ejercicios que involucren el teorema de Pitágoras, que son resueltos con la participación de los estudiantes.</li><li>• En esta fase de orientación dirigida, el docente</li></ul>	70 min

<p>acompaña y guía los aprendizajes de los estudiantes.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Los estudiantes, en la fase de explicitación, realizan argumentaciones y conclusiones sobre el teorema demostrado.</li> <li>• El docente invita a los estudiantes a pasar a la fase de orientación libre, propone que apliquen lo aprendido en ejercicios y problemas planteados en el texto escolar y una práctica proporcionada por el docente.</li> <li>• En la fase de integración, se sistematiza toda la información en un bítico que será presentado por los estudiantes en forma individual para la siguiente sesión.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente promueve la reflexión de los estudiantes sobre la experiencia realizada.</li> <li>• El docente plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendimos? ¿Cómo lo aprendimos? ¿Nos sirve lo que aprendimos? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos?</li> <li>• Finalización (agradecimiento y despedida)</li> </ul>	10 min

## V. RECURSOS

Humanos	Materiales	Servicios
<ul style="list-style-type: none"><li>• Profesor de área.</li><li>• Estudiantes.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Plumones.</li><li>• Lapiceros.</li><li>• Hojas impresas.</li><li>• Reglas.</li><li>• Cuaderno.</li><li>• Texto escolar.</li><li>• Registro de asistencia</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Fotocopiado.</li><li>• Internet.</li><li>• Otros.</li></ul>



## SESIÓN N° 05

I. TÍTULO: La circunferencia

II. DURACIÓN: 90 min

III. OBJETIVO DE LA SESIÓN

- Define líneas en la circunferencia.

IV. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	TIEMPO
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente inicia la sesión dando la bienvenida a los estudiantes. Presenta los aprendizajes esperados.</li><li>• El trabajo a realizarse es individual.</li></ul>	10 min
<ul style="list-style-type: none"><li>• Se inicia con la fase de interrogación a fin de recoger saberes, para ello se pide a un estudiante que grafique un circunferencia y se pregunta:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Qué que figura es?</li><li>➤ ¿Cómo se reconoce una circunferencia?</li><li>➤ ¿Es igual decir circunferencia que decir círculo?</li><li>➤ ¿Qué es un segmento, y una recta?</li></ul></li><li>• Luego, se pasa a la fase de orientación dirigida, en esta fase el docente explica las actividades propuestas para esta sesión, con la finalidad de que el estudiante logre definir diferentes líneas que se pueden trazar en una circunferencia.</li><li>• Se traza en el cuaderno una circunferencia con la ayuda de un compás, se ubica su centro, se mide</li></ul>	70 min

<p>con una regla la distancia que hay entre el centro y cualquier punto de la circunferencia (radio), se ubica un punto exterior y se traza una recta que pase por un punto de la circunferencia (tangente), se traza un segmento que pase por dos puntos (cuerda), la mayor de la cuerdas (diámetro).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente plantea ejercicios que son resueltos con la participación de los estudiantes.</li> <li>• En esta fase de orientación dirigida, el docente acompaña y guía los aprendizajes de los estudiantes.</li> <li>• Los estudiantes, en la fase de explicitación, realizan argumentaciones y conclusiones sobre las líneas trazadas.</li> <li>• El docente invita a los estudiantes a pasar a la fase de orientación libre, propone que apliquen lo aprendido en ejercicios y problemas planteados en el texto escolar y una práctica proporcionada por el docente.</li> <li>• En la fase de integración, se sistematiza toda la información en cuadro sinóptico, considerando todas líneas que se pueden trazar en una circunferencia.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente promueve la reflexión de los estudiantes</li> </ul>	10 min

<p>sobre la experiencia realizada.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendimos? ¿Cómo lo aprendimos? ¿Nos sirve lo que aprendimos? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos?</li> <li>• Finalización (agradecimiento y despedida)</li> </ul>	
---	--

## V. RECURSOS

Humanos	Materiales	Servicios
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Profesor de área.</li> <li>• Estudiantes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Plumones.</li> <li>• Lapiceros.</li> <li>• Hojas impresas.</li> <li>• Reglas.</li> <li>• Compás.</li> <li>• Cuaderno.</li> <li>• Texto escolar.</li> <li>• Registro de asistencia</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fotocopiado.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Otros.</li> </ul>

## SESIÓN N° 06

I. TÍTULO: Congruencia de triángulos

II. DURACIÓN: 90 min

III. OBJETIVO DE LA SESIÓN

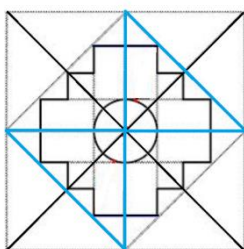
Identificamos Congruencia de triángulos en la Chacana

IV. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	TIEMPO
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente inicia la sesión dando la bienvenida a los estudiantes. Presenta los aprendizajes esperados.</li><li>• El docente organiza grupos de trabajo. Luego, presenta dos videos titulados: “La Chacana”, los cuales se encuentran en el siguiente enlace: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=nPUovcVX3F4">https://www.youtube.com/watch?v=nPUovcVX3F4</a></li><li>• Finalizado el video, los estudiantes dialogan sobre él de manera indistinta.</li><li>• El docente plantea las siguientes interrogantes:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Qué es la Chacana?</li><li>➤ ¿Qué significó para los incas?</li></ul></li></ul>	15 min

- El docente entrega la ficha de trabajo para que los estudiantes desarrollen la actividad, a partir de la siguiente situación:

La Chacana es una representación ancestral. Su origen está relacionado con la Cruz del Sur. Suponiendo que se han encontrado diversas representaciones de la Chacana, como se muestra en la figura, responde:

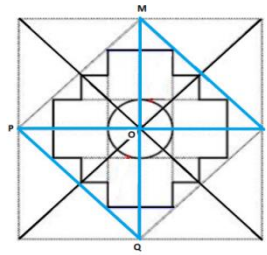


- ¿Qué propiedades guardan los triángulos formados en la figura?
- ¿Qué relación hay entre los lados de los triángulos de la figura?
- Para facilitar el aprendizaje el docente proporciona a cada grupo de trabajo la figura, en tamaño ampliado.
- Los estudiantes inician el desarrollo de la actividad. Se inicia con la fase de interrogación a fin de recoger saberes de los estudiantes partiendo de la observación, en esta fase se interroga:
  - ¿Qué tipo de triángulos están marcados en

65 min

la figura?

- Define un triángulo rectángulo.



- Luego, se pasa a la fase de orientación dirigida, en esta fase el docente explica las actividades propuestas con la finalidad de que el estudiante logre aprendizajes. En la ficha se proponen interrogantes para la figura, de modo que logren determinar que los triángulos MON y POQ, son congruentes.
- En esta fase de orientación dirigida, el docente acompaña y guía los aprendizajes de los estudiantes, está atento a las llamadas de los grupos de trabajo.
- Para determinar la congruencia, se proponen actividades detalladas:
  - Suponiendo que  $MO = x$ , complete los valores de los lados de los triángulos MON y POQ
  - ¿Qué relación hay entre los lados: PO y NO; QO Y MO; PQ Y MN?
  - Veamos con los ángulos:
  - ¿Los ángulos POQ y MON son iguales?
  - ¿Suced lo mismo para los ángulos OPQ

<p>Y ONM?</p> <p>➤ ¿Y cómo es para los ángulos PQO Y NMO?</p> <p>➤ Por tanto: ¿Cómo son los triángulos MON y POQ? Son congruentes.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Los estudiantes, mediante trabajos en grupos, pasan a la fase de explicitación donde intercambiarán experiencias con la finalidad de identificar otro par de triángulos congruentes. Realizan argumentaciones y conclusiones sobre las propiedades encontradas.</li><li>• El docente invita a los estudiantes a pasar a la fase de orientación libre, propone que apliquen lo aprendido al resolver la situación problemática, tomada del texto de Matemática 3, p. 147.</li><li>• En la fase de integración Se sistematiza toda la información en el siguiente cuadro:</li></ul> <p><b>Congruencia de triángulos</b></p> <table><tr><th>CASO 1</th><th>CASO 2</th><th>CASO 3</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	CASO 1	CASO 2	CASO 3				
CASO 1	CASO 2	CASO 3					
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente promueve la reflexión de los estudiantes sobre la experiencia vivida y da énfasis a la</li></ul>	10 min						

<p>importancia de reconocer la relación que guardan la medida de los lados de dos triángulos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendimos? ¿Cómo lo aprendimos? ¿Nos sirve lo que aprendimos? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos?</li> <li>• Finalización (agradecimiento y despedida)</li> </ul>	
--	--

## V. RECURSOS

Humanos	Materiales	Servicios
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Profesor de área.</li> <li>• Estudiantes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Plumones.</li> <li>• Lapiceros.</li> <li>• Hojas impresas.</li> <li>• Reglas.</li> <li>• Cuaderno.</li> <li>• Texto escolar.</li> <li>• Registro de asistencia</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fotocopiado.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Otros.</li> </ul>



## SESIÓN N° 07

I. TÍTULO: Semejanza de triángulos

II. DURACIÓN: 90 min

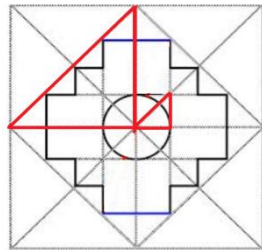
III. OBJETIVO DE LA SESIÓN

Identificamos semejanza de triángulos en la Chacana

IV. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	TIEMPO
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente inicia la sesión dando la bienvenida a los estudiantes. Presenta los aprendizajes esperados.</li><li>• El docente organiza grupos de trabajo. Luego, presenta dos videos titulados: “La Chacana”, los cuales se encuentran en el siguiente enlace: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=nPUovcVX3F4">https://www.youtube.com/watch?v=nPUovcVX3F4</a></li><li>• Finalizado el video, los estudiantes dialogan sobre él de manera indistinta.</li><li>• El docente plantea las siguientes interrogantes:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Qué es la Chacana?</li><li>➤ ¿Qué significó para los incas?</li></ul></li></ul>	15 min
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente entrega la ficha de trabajo para que los estudiantes desarrollen la actividad, a partir de la siguiente situación:  La Chacana es una representación ancestral. Su origen está relacionado con la Cruz del Sur. Suponiendo que se han encontrado diversas</li></ul>	65 min

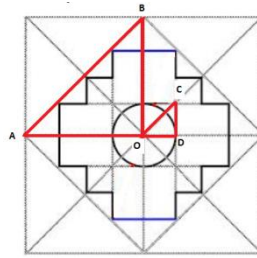
representaciones de la Chacana, como se muestra en las figuras, responde:



- ¿Cómo son los lados de los triángulos de la figura?
- ¿Qué relación hay entre los lados de los triángulos de la figura?
- Para facilitar el aprendizaje el docente proporciona a cada grupo de trabajo la figura, en tamaño ampliado.
- Los estudiantes inician el desarrollo de la actividad. Se inicia con la fase de interrogación a fin de recoger saberes de los estudiantes partiendo de la observación, en esta fase se interroga:
  - ¿Qué tipo de triángulos están marcados en la figura?
  - Define un triángulo rectángulo.
- Luego, se pasa a la fase de orientación dirigida, en esta fase el docente explica las actividades propuestas con la finalidad de que el estudiante logre aprendizajes. En la ficha se proponen

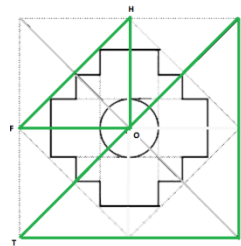
<p>interrogantes para la figura, de modo que logren determinar que los triángulos AOB y COD, son semejantes.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En esta fase de orientación dirigida, el docente acompaña y guía los aprendizajes de los estudiantes, está atento a las llamadas de los grupos de trabajo.</li> <li>• Para determinar la semejanza, se proponen actividades detalladas: <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Suponiendo que <math>MO = x</math>, complete los valores de los lados de los triángulos MON y POQ</li> <li>➤ ¿Qué relación hay entre los lados: PO y NO; QO Y MO; PQ Y MN?</li> <li>➤ Veamos con los ángulos:</li> <li>➤ ¿Los ángulos POQ y MON son iguales? ¿Sucede lo mismo para los ángulos OPQ Y ONM?</li> <li>➤ ¿Y cómo es para los ángulos BAO Y NMO?</li> <li>➤ Por tanto: ¿Cómo son los triángulos AOB y COD? Son semejantes.</li> </ul> </li> </ul>	
---	--

- Luego, el docente invita a los estudiantes a resolver actividades para la figura, cuyo objetivo es establecer relaciones de proporcionalidad entre dos triángulos para determinar semejanza entre ellos. Se proponen las interrogantes:



- ¿Cuánto miden los ángulos interiores de triángulo AOB Y el triángulo COD? ¿Son iguales o diferentes?
- ¿Qué relación hay entre las medidas de los lados de ambos triángulos?

- Observan la figura 3 y determinan la proporcionalidad entre sus lados a fin de determinar el caso LLL. El docente siempre está atento orientando los aprendizajes, pues dependerá de ello su logro. Concluyen identificando proporcionalidad entre los lados de los triángulos FHO Y TRS.



- Los estudiantes, mediante trabajos en grupos, pasan a la fase de explicitación donde intercambiarán experiencias con la finalidad de identificar otro par de triángulos semejantes.

<p>Realizan argumentaciones y conclusiones sobre las propiedades encontradas.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• El docente invita a los estudiantes a pasar a la fase de orientación libre, propone que apliquen lo aprendido al resolver la situación problemática, tomada del texto de Matemática 3, p. 147.</li><li>• En la fase de integración, se sistematiza toda la información en el siguiente cuadro:</li></ul> <p><b>Semejanza de triángulos</b></p> <table><tr><th>CASO 1</th><th>CASO 2</th><th>CASO 3</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	CASO 1	CASO 2	CASO 3				
CASO 1	CASO 2	CASO 3					
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente promueve la reflexión de los estudiantes sobre la experiencia vivida y da énfasis a la importancia de reconocer la relación que guardan la medida de los lados de dos triángulos</li><li>• El docente plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendimos? ¿Cómo lo aprendimos? ¿Nos sirve lo que aprendimos? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos?</li><li>• Finalización (agradecimiento y despedida)</li></ul>	10 min						

## V. RECURSOS

Humanos	Materiales	Servicios
<ul style="list-style-type: none"><li>• Profesor de área.</li><li>• Estudiantes.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Plumones.</li><li>• Lapiceros.</li><li>• Hojas impresas.</li><li>• Reglas.</li><li>• Cuaderno.</li><li>• Texto escolar.</li><li>• Registro de asistencia</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Fotocopiado.</li><li>• Internet.</li><li>• Otros.</li></ul>

## SESIÓN N° 08

I. TÍTULO: Teorema de Pitágoras

II. DURACIÓN: 90 min

III. OBJETIVO DE LA SESIÓN

- Demuestra el teorema de Pitágoras

IV. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	TIEMPO
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente inicia la sesión dando la bienvenida a los estudiantes. Presenta los aprendizajes esperados.</li><li>• El trabajo a realizarse es individual.</li></ul>	10 min
<ul style="list-style-type: none"><li>• Se inicia con la fase de interrogación a fin de recoger saberes de los estudiantes preguntando:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Cuándo dos triángulos son semejantes?</li><li>➤ ¿Cuáles son los casos de semejanza de triángulos?</li></ul></li></ul> <p>El docente pide a un estudiante que grafique en la pizarra un triángulo rectángulo, a partir de la figura, pregunta:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Cuáles son los elementos de un triángulo rectángulo?</li><li>➤ ¿Cuánto miden los ángulos internos de un triángulo?</li></ul> <ul style="list-style-type: none"><li>• Luego, se pasa a la fase de orientación dirigida, en esta fase el docente explica las actividades</li></ul>	70 min

<p>propuestas con la finalidad de que el estudiante logre demostrar que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La demostración del teorema de Pitágoras se realiza teniendo en cuenta los casos de semejanza de triángulos.</li> <li>• El docente plantea ejercicios que involucran el teorema de Pitágoras, que son resueltos con la participación de los estudiantes.</li> <li>• En esta fase de orientación dirigida, el docente acompaña y guía los aprendizajes de los estudiantes.</li> <li>• Los estudiantes, en la fase de explicitación, realizan argumentaciones y conclusiones sobre el teorema de Pitágoras.</li> <li>• El docente invita a los estudiantes a pasar a la fase de orientación libre, propone que apliquen lo aprendido en ejercicios y problemas planteados en el texto escolar y una práctica proporcionada por el docente.</li> <li>• En la fase de integración, se sistematiza toda la información en papelote, que será presentado en forma grupal para la siguiente sesión.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente promueve la reflexión de los estudiantes</li> </ul>	10 min



<p>sobre la experiencia realizada.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendimos? ¿Cómo lo aprendimos? ¿Nos sirve lo que aprendimos? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos?</li> <li>• Finalización (agradecimiento y despedida)</li> </ul>	
---	--

## V. RECURSOS

Humanos	Materiales	Servicios
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Profesor de área.</li> <li>• Estudiantes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Papelotes.</li> <li>• Plumones.</li> <li>• Lapiceros.</li> <li>• Hojas impresas.</li> <li>• Reglas.</li> <li>• Cuaderno.</li> <li>• Texto escolar.</li> <li>• Registro de asistencia</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fotocopiado.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Otros.</li> </ul>

## SESIÓN N° 09

I. TÍTULO: Teorema de Thales

II. DURACIÓN: 90 min

III. OBJETIVO DE LA SESIÓN

- Demuestra el teorema de Thales

IV. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	TIEMPO
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente inicia la sesión dando la bienvenida a los estudiantes. Presenta los aprendizajes esperados.</li><li>• El trabajo a realizarse es en parejas.</li></ul>	10 min
<ul style="list-style-type: none"><li>• Se inicia con la fase de interrogación a fin de recoger saberes de los estudiantes preguntando:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Qué es un teorema?</li><li>➤ ¿Quién fue Tales de Mileto?</li><li>➤ ¿Qué es proporcionalidad?</li><li>➤ ¿Cuándo dos rectas son paralelas?</li></ul></li><li>• El docente pide a un estudiante que grafique en la pizarra tres rectas paralelas cortadas por dos rectas secantes.</li><li>• Luego, se pasa a la fase de orientación dirigida, en esta fase el docente explica las actividades propuestas con la finalidad de que el estudiante logre demostrar que los segmentos determinados por rectas paralelas en dos rectas secantes, son</li></ul>	70 min

<p>proporcionales.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La demostración del teorema de Tales se realiza teniendo en cuenta trazos de rectas paralelas.</li> <li>• El docente plantea ejercicios que involucran el teorema de Tales, que son resueltos con la participación de los estudiantes.</li> <li>• En esta fase de orientación dirigida, el docente acompaña y guía los aprendizajes de los estudiantes.</li> <li>• Los estudiantes, en la fase de explicitación, realizan argumentaciones y conclusiones sobre el teorema de Pitágoras.</li> <li>• El docente invita a los estudiantes a pasar a la fase de orientación libre, propone que apliquen lo aprendido en ejercicios y problemas planteados en el texto escolar y una práctica proporcionada por el docente.</li> <li>• En la fase de integración, se sistematiza toda la información en papelote, que será presentado en forma grupal para la siguiente sesión.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente promueve la reflexión de los estudiantes sobre la experiencia realizada.</li> <li>• El docente plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendimos? ¿Cómo lo aprendimos? ¿Nos</li> </ul>	10 min

sirve lo que aprendimos? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos?  • Finalización (agradecimiento y despedida)	
--	--

## V. RECURSOS

Humanos	Materiales	Servicios
• Profesor de área.  • Estudiantes.	• Papelotes.  • Plumones.  • Lapiceros.  • Hojas impresas.  • Reglas.  • Cuaderno.  • Texto escolar.  • Registro de asistencia	• Fotocopiado.  • Internet.  • Otros.

## SESIÓN N° 10

I. TÍTULO: Regiones poligonales

II. DURACIÓN: 90 min

III. OBJETIVO DE LA SESIÓN

- Expresa la medida del área de un polígono regular inscrito.
- Aplica las fórmulas de la medida del área de un polígono regular inscrito.

IV. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	TIEMPO
<ul style="list-style-type: none"><li>• El docente inicia la sesión dando la bienvenida a los estudiantes. Presenta los aprendizajes esperados.</li><li>• El trabajo a realizarse es en grupos.</li></ul>	15 min
<ul style="list-style-type: none"><li>• Se inicia con la fase de interrogación a fin de recoger saberes de los estudiantes preguntando:<ul style="list-style-type: none"><li>➤ ¿Qué es el área?</li><li>➤ ¿Qué es un polígono?</li><li>➤ ¿Qué es una circunferencia?</li><li>➤ ¿Cuándo un polígono es regular?</li><li>➤ ¿Qué es una apotema?</li></ul></li><li>• El docente pide a un estudiante graficar en la pizarra un polígono regular.</li><li>• Luego, se pasa a la fase de orientación dirigida, en esta fase el docente explica las actividades propuestas con la finalidad de que el estudiante</li></ul>	65 min

<p>logre expresar la medida del área de un polígono regular inscrito.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente pregunta: <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ ¿Cómo podemos expresar el área de un polígono regular inscrito en función del radio?</li> </ul> </li> <li>• Se grafica un triángulo equilátero y una circunferencia que la circunscribe luego se expresa la medida del su área, utilizando el triángulo notable de <math>30^\circ</math> y <math>60^\circ</math>, y relacionarla con el radio de la circunferencia.</li> <li>• El docente plantea ejercicios que involucran el cálculo de áreas, que son resueltos con la participación de los estudiantes.</li> <li>• En esta fase de orientación dirigida, el docente acompaña y guía los aprendizajes de los estudiantes.</li> <li>• Los estudiantes, en la fase de explicitación, realizan argumentaciones y conclusiones sobre el área de un triángulo equilátero.</li> <li>• El docente invita a los estudiantes a pasar a la fase de orientación libre, propone que realicen el mismo proceso para hallar el área de un cuadrado y/o de un hexágono regular inscrito, y apliquen lo</li> </ul>	
--	--

<p>aprendido en ejercicios y problemas planteados en el texto escolar y una práctica proporcionada por el docente.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En la fase de integración, se sistematiza toda la información en un báltico considerando los diferentes casos de áreas de polígonos inscritos y circunscritos.</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente promueve la reflexión de los estudiantes sobre la experiencia realizada.</li> <li>• El docente plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendimos? ¿Cómo lo aprendimos? ¿Nos sirve lo que aprendimos? ¿Dónde podemos utilizar lo que aprendimos?</li> <li>• Finalización (agradecimiento y despedida)</li> </ul>	10 min

## V. RECURSOS

Humanos	Materiales	Servicios
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Profesor de área.</li> <li>• Estudiantes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Papelotes.</li> <li>• Plumones.</li> <li>• Lapiceros.</li> <li>• Hojas impresas.</li> <li>• Compás.</li> <li>• Reglas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fotocopiado.</li> <li>• Internet.</li> <li>• Otros.</li> </ul>

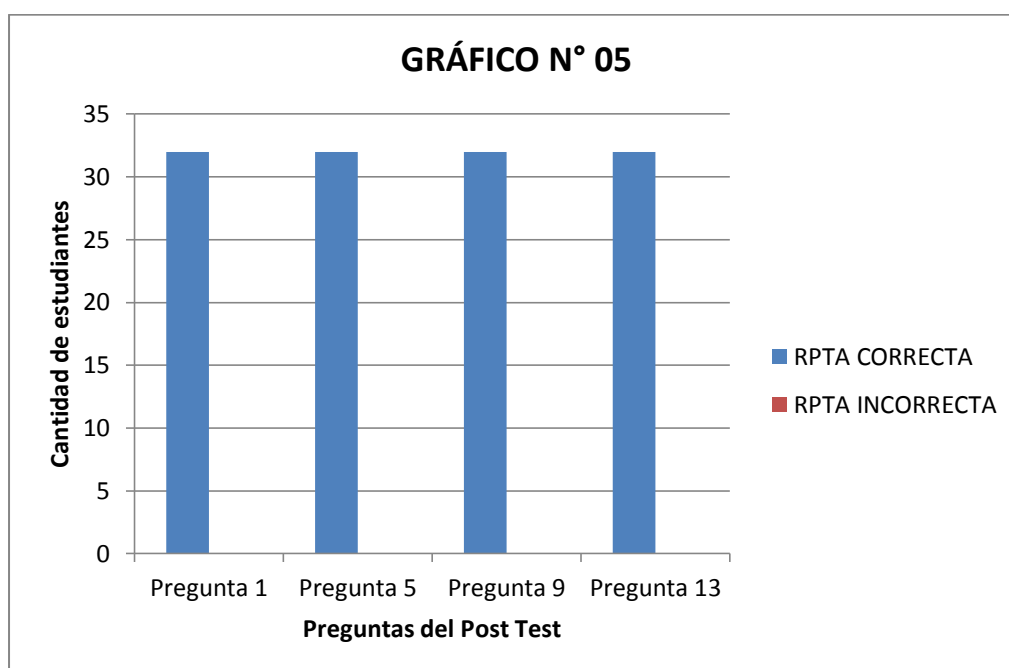
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cuaderno.</li> <li>• Texto escolar.</li> <li>• Registro de asistencia</li> </ul>	
--	---	--



## ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS DEL POSTEST

TABLA N° 05: NIVEL I (RECONOCIMIENTO DE FIGURAS)

Preguntas	RPTA CORRECTA		RPTA INCORRECTA	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Pregunta 1	32	100.0	0	0.0
Pregunta 5	32	100.0	0	0.0
Pregunta 9	32	100.0	0	0.0
Pregunta 13	32	100.0	0	0.0
Promedio		100.0		0.0

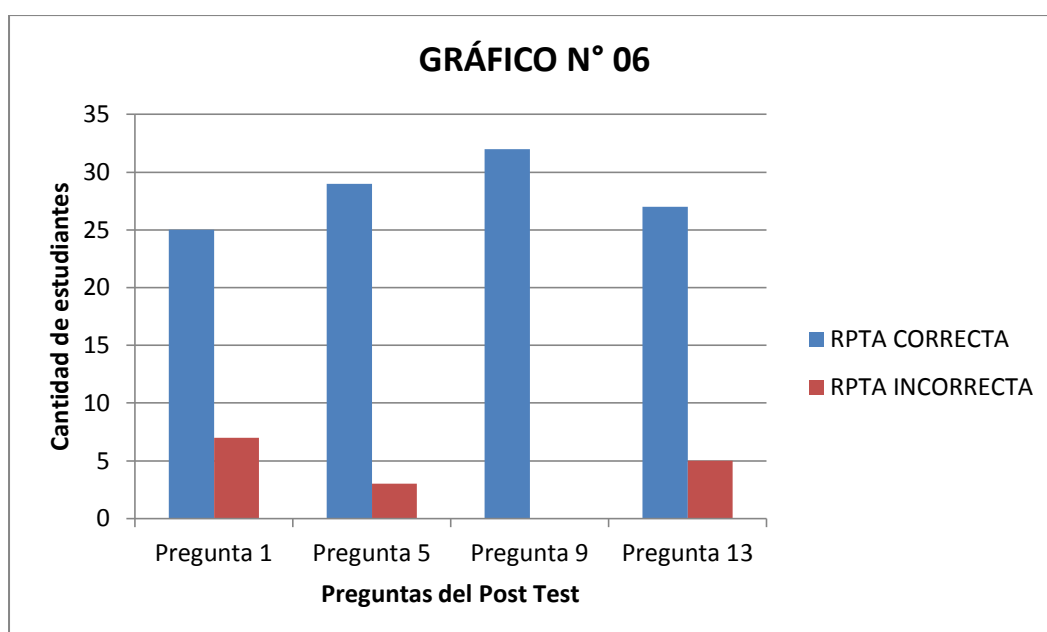


Luego del postest aplicado a los 32 estudiantes, se puede apreciar que el 100,0 % de los evaluados responden correctamente las cuatro preguntas planteadas para el primer nivel.

De acuerdo con la información presentada en la tabla anterior se observa que todos los estudiantes han pasado el primer nivel de pensamiento geométrico; es decir, son capaces de identificar figuras y reproducir figuras.

TABLA N° 06: NIVEL II (ANÁLISIS DE OBJETOS GEOMÉTRICOS)

Preguntas	RPTA CORRECTA		RPTA INCORRECTA	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Pregunta 2	24	75.0	8	25.0
Pregunta 6	25	78.1	7	21.9
Pregunta 10	29	90.6	3	9.4
Pregunta 14	23	71.9	9	28.1
Promedio		78.9		21.1

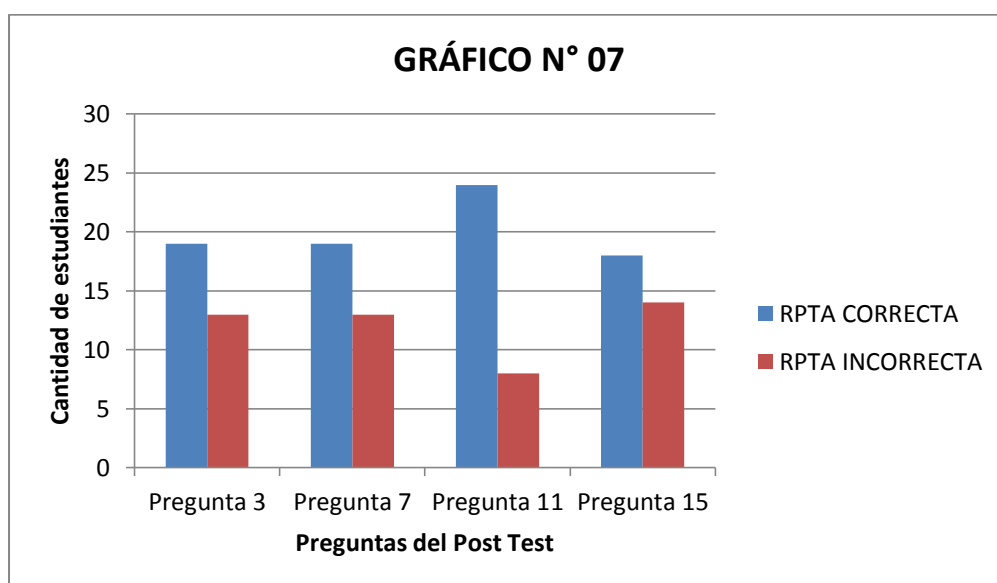


Luego del postest aplicado a los 32 estudiantes, se observa que el 78,9 % de los evaluados responden correctamente las preguntas planteadas para el segundo nivel, resaltando que todos los estudiantes resolvieron de manera adecuada la pregunta nueve.

De acuerdo con la información presentada en la tabla anterior se observa que la mayor parte de los estudiantes han pasado el segundo nivel de pensamiento geométrico; es decir, son capaces de analizar los diferentes objetos geométricos.

TABLA N° 07: NIVEL III (CLASIFICACIÓN DE OBJETOS GEOMÉTRICOS)

Preguntas	RPTA CORRECTA		RPTA INCORRECTA	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Pregunta 3	19	59.4	13	40.6
Pregunta 7	19	59.4	13	40.6
Pregunta 11	24	75.0	8	25.0
Pregunta 15	18	56.2	14	43.8
Promedio		62.5		37.5

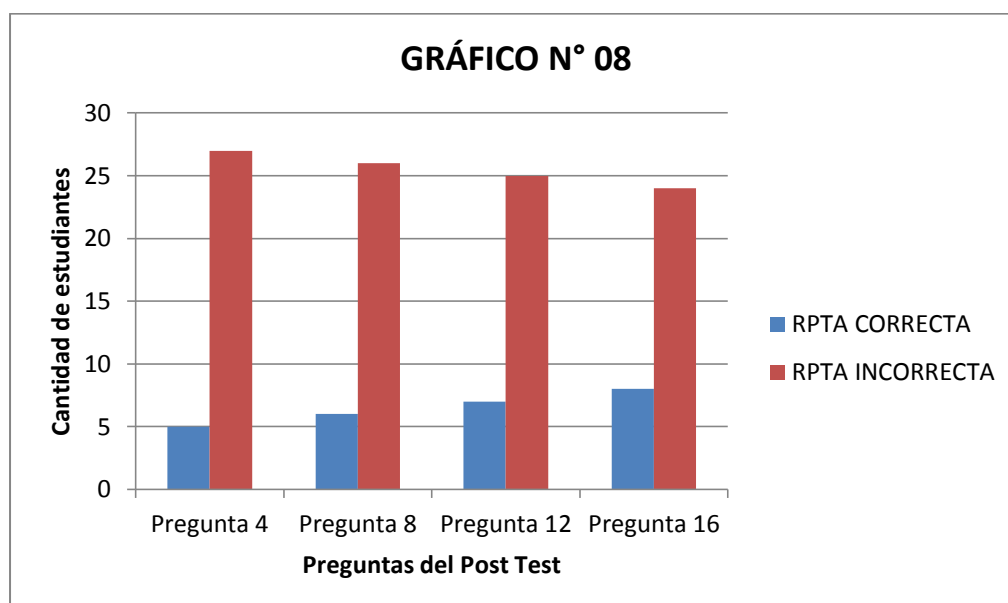


Luego del postest aplicado a los 32 estudiantes, se aprecia que el 62,5 % de los evaluados responden correctamente las preguntas planteadas para el tercer nivel, y el 37,5 % presentan algunas deficiencias en este nivel de pensamiento.

De acuerdo con la información presentada en la tabla anterior se observa que más de la mitad de estudiantes han pasado el tercer nivel de pensamiento geométrico; es decir, son capaces de clasificar los diferentes objetos geométricos.

TABLA N° 08: NIVEL IV (DEDUCCIÓN FORMAL)

Preguntas	RPTA CORRECTA		RPTA INCORRECTA	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Pregunta 4	5	15.6	27	84.4
Pregunta 8	6	18.8	26	81.2
Pregunta 12	7	21.9	25	78.1
Pregunta 16	8	25.0	24	75.0
Promedio		20.3		79.7



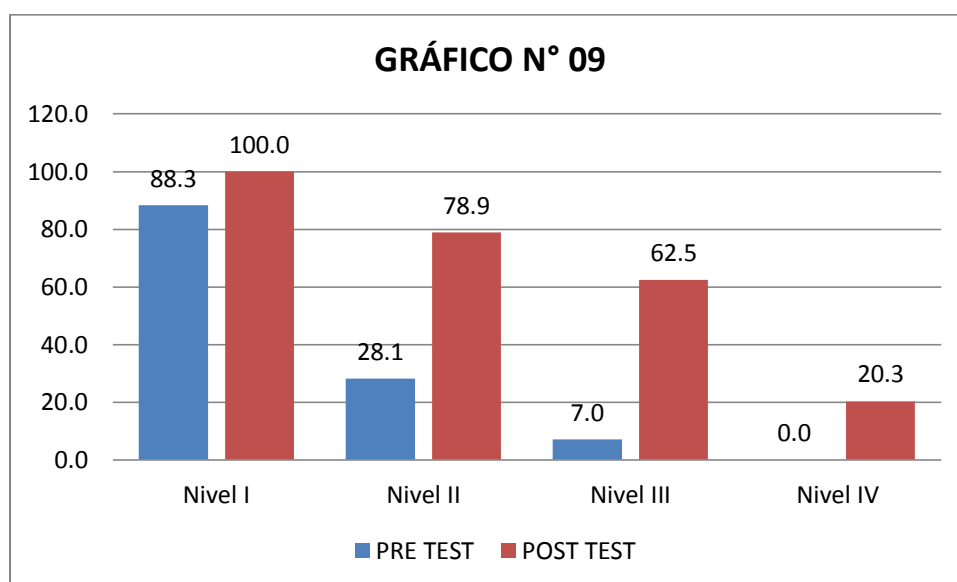
Luego del postest aplicado a los 32 estudiantes, se puede apreciar que el 20,3 % de los evaluados responden correctamente las preguntas planteadas para el cuarto nivel, y el 79,7 % presentan deficiencias en este nivel de pensamiento.

De acuerdo con la información presentada en la tabla anterior se observa que la quinta parte de estudiantes se ubican en el cuarto nivel de pensamiento geométrico; es decir, algunos tienen la capacidad de demostrar teoremas, realizar conjeturas, inferir corolarios.

## ANALISIS COMPARTIVO E INTERPRETACION DE DATOS DEL PRETEST - POSTEST

TABLA N° 09: COMPARACIÓN NIVELES DE PENSAMIENTO

NIVELES	PRETEST		POSTEST	
	si	no	Si	no
Nivel I	88.3	11.7	100.0	0.0
Nivel II	28.1	71.9	78.9	21.1
Nivel III	7.0	93.0	62.5	37.5
Nivel IV	0.0	100.0	20.3	79.7



Comparando los resultados del pre y postest, se observa que todos los estudiantes alcanzaron el primer nivel; el nivel II se incrementó en 50,8 %; el nivel III el 55,5 % y en el cuarto nivel aumentó 20,3 %

De esta información se puede observar que la aplicación del programa ha sido pertinente puesto que se ha mejorado el nivel de pensamiento geométrico de los estudiantes de cuarto grado “B”

## CONCLUSIONES

Del pretest administrado a los 32 discentes de cuarto grado “B” de la I.E.E. Julio Ramón Ribeyro, se infiere que: el 88,3 % está ubicado en el nivel I o nivel de reconocimiento; el 28,1 % en el nivel II; el 7,0 % en el nivel III y ningún estudiante en el nivel IV o nivel de deducción formal. Esto significa que cuando existe un bajo nivel de pensamiento geométrico en los educandos, se ocasiona bajo rendimiento escolar.

Luego de desenvolverse estrategias metodológicas sustentadas en la teoría de Van Hiele, se aplicó un posttest, cuyos efectos fueron: el 100% de los estudiantes ocupan en el nivel I o nivel de reconocimiento; el 78,9 % el nivel II; el 62,5 % el nivel III y el 20,3 % el nivel IV o nivel de deducción formal. Asimismo los mejores resultados se obtuvieron en el tercer nivel de pensamiento, hubo una ampliación del 55,5 % de los discentes.

Las estrategias metodológicas basadas en la teoría de Van Hiele, incrementa significativamente el nivel de pensamiento geométrico de los estudiantes de cuarto grado “B”.

## RECOMENDACIONES

En la Institución Educativa “Julio Ramón Ribeyro”, los docentes deben considerar dentro de sus programaciones y sesiones de aprendizajes estrategias metodológicas correspondientes al componente geometría y medida del área de matemática con el fin incrementar el nivel de pensamiento.

Los directivos de la Unidad de Gestión Educativa Local - Cajamarca, han de incluir en su plan de trabajo anual, la realización de talleres de capacitación sobre estrategias metodológicas, basadas en la teoría de Van Hiele para que los docentes del área las apliquen en instituciones educativas del nivel secundario de la provincia de Cajamarca.

Sugerir que se consulte la presente tesis para aplicarla en investigaciones futuras y ampliar así el campo de la psicopedagogía cognitiva, en similares circunstancias.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfonso, W. (2009). La enseñanza de la geometría en la solución de problemas cotidianos. Medellín Colombia, Universidad de Manizales

Bravo, L. (2009). Psicología Educacional, Psicopedagogía y Educación Especial. Lima: IIPSI.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de las Matemáticas. En: Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 7.

Careaga, R. (1995). 4. Tradición y cambio en la psicopedagogía. Santiago de Chile: Universidad Educare. Bravo y Allende Editores.

Castiblanco, A. (2004). Pensamiento Geométrico Tecnologías Computacionales. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Enlace Editores Ltda. Bogotá, Colombia.

Corberán, R. y otros (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele. Madrid: C.I.D.E., M.E.C.



Coll C. (1991). Psicología y educación: Aproximación a los objetivos y contenidos de la psicología de la educación. En: Desarrollo psicológico y Educación. Madrid: Alianza Editorial.

Crowley, M. (1987). El Modelo de Van Hiele. Recuperado de [www.proyectosur.com/descarga%20innovacion/van\\_hiele.doc](http://www.proyectosur.com/descarga%20innovacion/van_hiele.doc).

D'Amore, B. (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática. México: Reverté S.A.

Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el Modelo de Van Hiele. Sigma Revista de Matemáticas. Recuperado de <http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r>

Gascón, J. (1998). Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. En: Revista Recherches en Didactique des Mathématiques.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*.

Godino, J. D. (2010). De la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. *11th Conference PME*.

Melchor Gómez (2010), Geometría. México D.F.: UAM

Ministerio de Educación (2012). Estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática. Lima: Biblioteca Nacional.

Rico, L. Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la matemática. Madrid: Síntesis.

Romberg, T. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific inquiry. En M.C. Wittrock (Ed.) *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan.

Vargas, G. y Gamboa R. (2013). El Modelo Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría. Revista: Uniciencias. Costa Rica.

Van Hiele, P. M. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría. Tesis

Doctoral. Universidad de Utrech. Holanda. (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight. A theory of mathematics education. Londres. Academic Press.

<http://www.psicopedagogia.com/definicion/psicopedagogia>

[http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles113753\\_archivo.pdf](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles113753_archivo.pdf)

[https://www.uam.es/personal\\_pdi/stmaria/megome/cursos/Matemat/apunt es/2\\_Geometria.pdf](https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/megome/cursos/Matemat/apunt es/2_Geometria.pdf)

## **ANEXOS**



## UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

### Pretest

Estudiante: \_\_\_\_\_

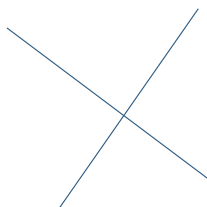
Encontrándome elaborando mi tesis de maestría, respecto a estrategias metodológicas sustentado en la teoría de Van Hiele para mejorar el nivel de pensamiento geométrico, agradeceré responder de manera clara y precisa las siguientes preguntas:

#### I. DATOS GENERALES:

1. Edad: \_\_\_\_\_
2. Sexo: \_\_\_\_\_ a) femenino ( ) b) masculino ( )
3. Grado/Sección \_\_\_\_\_

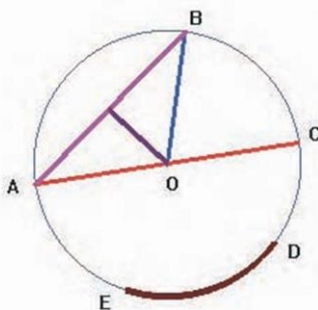
#### II. EJERCICIOS GEOMETRÍA

1. En el dibujo se muestran dos rectas ¿cómo se llama esa relación?



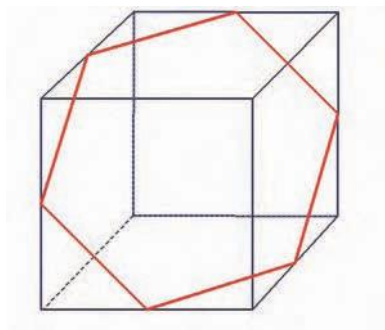
2. ¿Cuántos elementos puedes nombrar en la figura de la derecha?

- a. puntos.
- b. segmentos rectos.
- c. segmentos curvos.
- d. superficies
- e. ángulos



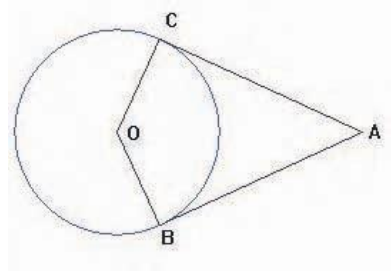
3. La figura muestra una sección hexagonal de un cubo ¿qué respuesta de las siguientes ES FALSA?

- a. Los triángulos sobre las caras son isósceles.
- b. Cada cara del cubo contiene un solo lado del hexágono.
- c. La figura es imposible. En la realidad se trata de una ilusión falsa.
- d. El hexágono es regular.
- e. Las dos partes en que se divide el cubo son idénticas.



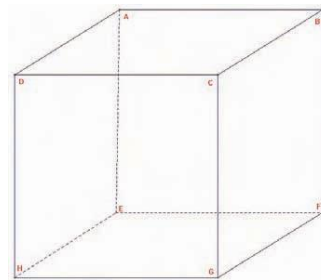
4. En la figura hemos trazado desde "A" los dos segmentos tangentes a la circunferencia. ¿Qué propiedades son verdaderas?

- a. Los ángulos "OCA" y "OBA" son rectos.
- b. Los segmentos "AC" y "AB" miden lo mismo.
- c. Si movemos "A" sobre la recta que pasa por "A" y por "O", no varía la posición de "C" y "B".
- d. Los cuatro puntos A, B, C y O pertenecen a una misma circunferencia.



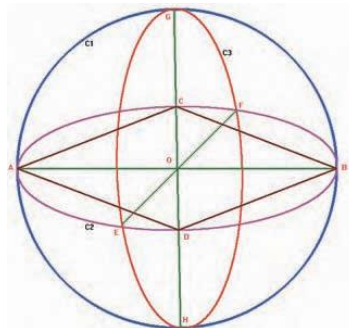
5. La figura de abajo es un cubo. Señala sobre ella lo que es:

- a. una diagonal del cubo.
- b. una arista.
- c. una cara lateral.
- d. dos vértices opuestos.
- e. un vértice cualquiera y sus contiguos.
- f. todas las diagonales de las caras.



6. La figura es la representación de una esfera. ¿qué es ...

- a.C2
- b.C3
- c.AB
- d.ACD
- e.F
- f.O?



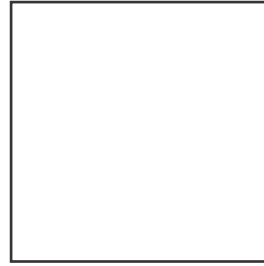
7. Si trazamos la diagonal de un cuadrado. ¿Qué afirmación NO ES CIERTA?

- a. Lo divido en dos triángulos iguales.
- b. Lo divido en dos triángulos isósceles.
- c. Lo divido en dos triángulos rectángulos.
- d. Lo divido en dos triángulos de igual área.
- e. alguna de las anteriores respuestas tiene que ser falsa.

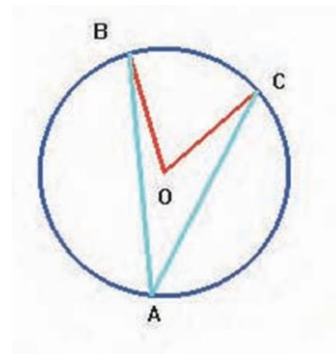
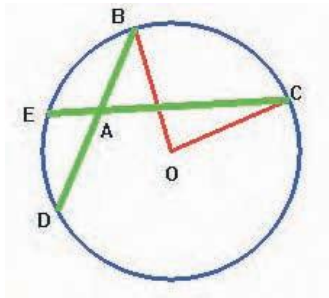
8. ¿Qué se puede deducir de la medida de los ángulos interiores de un triángulo son  $40^\circ$ ,  $100^\circ$  y  $40^\circ$ ?

9. ¿Cuál de las siguientes respuestas, referidas a la figura de la derecha, NO ES CORRECTA?

- a. Es un paralelogramo.
- b. Es un rombo.
- c. Es un cuadrado.
- d. Es un cuadrilátero.
- e. No puede ser todo lo anterior a la vez.

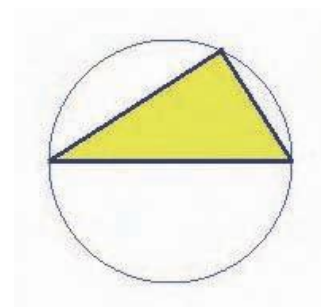


10. ¿Cómo se denominan los ángulos que se señalan en las dos figuras de abajo?



11. Inscribimos un triángulo en una circunferencia coincidiendo dos vértices con los extremos de un diámetro. Entonces ¿es cierto que ese triángulo ...

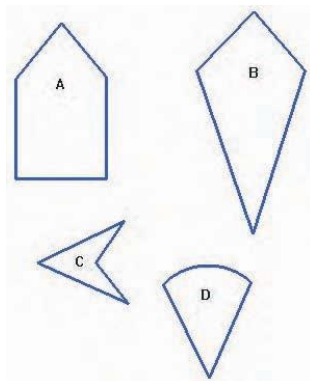
- a. Es siempre rectángulo.
- b. En un caso puede ser isósceles.
- c. Su área presenta un valor máximo al mover el tercer vértice?
- d. alguna de las respuestas anteriores es falsa.



12. Demuestra el teorema: “El cuadrado de un cateto es igual al producto de su proyección por la hipotenusa”

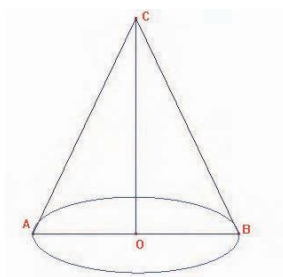
**13.** ¿Cuáles de las siguientes respuestas sobre “COMETAS” son ciertas?

- a. sólo “C” es una cometa.
- b. todas pueden ser cometas.
- c. sólo “B” y “D”.
- d. entre “C” y “B” sólo hay una cometa.
- e. todas las respuestas anteriores son falsas.



**14.** Después de señalar cómo se llama la figura de abajo, responde a: ¿qué es ...

- a. C
- b. O
- c. AB
- d. OC
- e. AC ó BC?



**15.** En un hexágono de centro “O” elegimos tres vértices consecutivos “A”, “B” y “C”, trazamos la diagonal “AC” y el segmento “OB”. ¿qué respuesta es la MÁS CORRECTA?

- a. Son perpendiculares.
- b. Se bisecan uno al otro.
- c. Se cortan en un punto.
- d. Son diagonales de un rombo.

**16.** Demuestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$





## UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

### Postest

Estudiante: \_\_\_\_\_

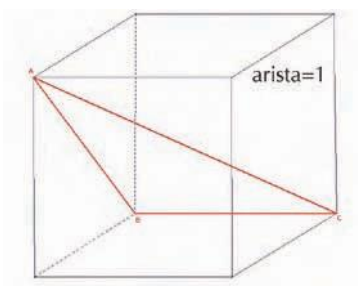
Encontrándome elaborando mi tesis de maestría, respecto a estrategias metodológicas sustentado en la teoría de Van Hiele para mejorar el nivel de pensamiento geométrico, agradeceré responder de manera clara y precisa las siguientes preguntas:

#### I. DATOS GENERALES:

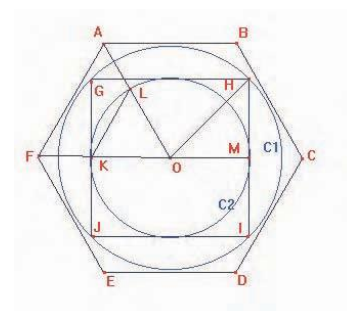
1. Edad: \_\_\_\_\_
2. Sexo: \_\_\_\_\_ a) femenino ( ) b) masculino ( )
3. Grado/Sección \_\_\_\_\_

#### II. EJERCICIOS GEOMETRÍA

1. ¿Qué tipo de triángulo es "ABC"?

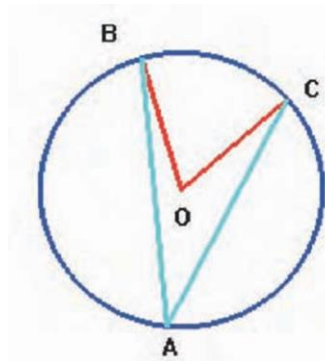
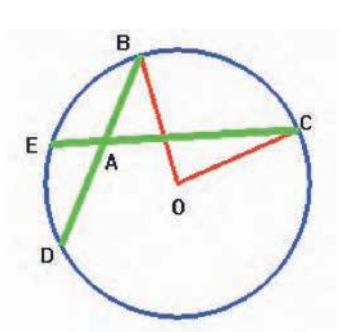


2. En la figura de abajo nombra todos los elementos geométricos que identifiques:

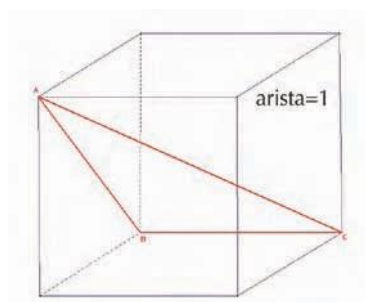


3. Un cuadrilátero tiene de vértices A, B, C y D y sus respectivos ángulos miden  $127^\circ$ ,  $95^\circ$ ,  $85^\circ$  y  $53^\circ$ . Para que se pueda inscribir en una circunferencia el orden de los vértices debe ser ...
- a. A, B, C, D
  - b. B, A, D, C
  - c. nunca se puede inscribir con esos valores.
  - d. todas las anteriores respuestas son falsas.

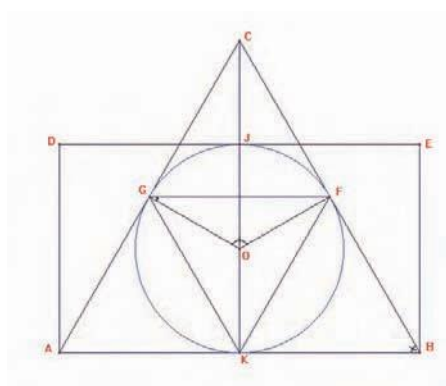
4. ¿Cómo se relacionan los ángulos “a” de cada figura con los arcos que comprenden?, ¿Cómo lo demostrarías?



5. El triángulo rojo de la figura está compuesto por la diagonal del cubo, la diagonal de una cara y una arista. ¿Cuántos triángulos como el descrito podemos dibujar en un cubo?



6. En la figura de abajo nombra todos los elementos geométricos que identifiques



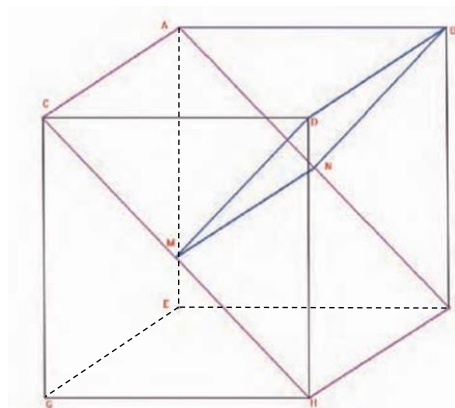
7. Si disponemos de escuadra y papel milimetrado, para trazar paralelas y perpendiculares ¿podemos desde el centro de un hexágono regular trazar ángulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$  y  $180^\circ$ ?

- a. Sólo los múltiplos de  $60^\circ$ .
- b. Sí, en todos los casos.
- c. Todos excepto  $45^\circ$  y  $135^\circ$ .
- d. No porque necesitamos además un compás.
- e. Si no lo inscribimos en una circunferencia será imposible.

8. Discute la validez de las siguientes afirmaciones: dos rectas en un plano son paralelas si

- a. una perpendicular a la primera también lo es a la segunda.
- b. no se cortan en ningún punto.
- c. cada una de ellas es paralela a una tercera recta.
- d. la distancia entre ellas es siempre constante.
- e. construimos un triángulo con dos vértices fijos en una recta y el tercero lo movemos por la segunda recta. el área de ese triángulo es siempre constante.

9. Señala en la figura todos los polígonos y poliedros que identifiques:



10. Señala cuáles de las siguientes propiedades NO SON CIERTAS con respecto a las diagonales de los paralelogramos:

- a. Las diagonales se cortan en su punto medio.
- b. En algún caso los ángulos de corte de las diagonales son iguales.
- c. Los ángulos de corte de las diagonales pueden ser todos menores de  $90^\circ$ .
- d. Si las diagonales no son perpendiculares no puede tratarse de un cuadrado.

11. Tenemos cuatro rectas en el plano: “m”, “n”, “p” y “q”. si “m” es paralela a “n” que, a su vez, lo es de “p”, mientras que “q” es perpendicular a “n”. ¿cuál de las siguientes respuestas es CORRECTA?

- a. “q” también debe ser perpendicular a “m” y “p”.
- b. En algún caso puede que no se cumpla el apartado anterior.
- c. “p” y “q” son paralelas.
- d. Podemos encontrar una recta “s” que sea paralela a “n” y no perpendicular a “q”.

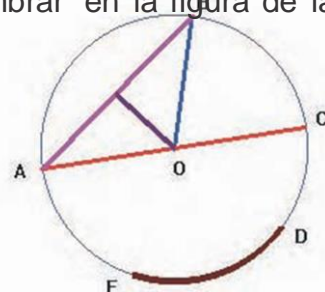
12. Demuestra el teorema: “El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”

13. En el dibujo se muestran dos rectas ¿cómo se llama esa relación?



14. ¿Cuántos elementos puedes nombrar en la figura de la derecha?

- a. puntos.
- b. segmentos rectos.
- c. segmentos curvos.
- d. superficies
- e. ángulos



15. Si trazamos la diagonal de un rectángulo cualquiera ¿qué afirmación NO ES CIERTA?

- a. Lo dividimos en dos triángulos iguales.
- b. Lo dividimos en dos triángulos isósceles.
- c. Lo dividimos en dos triángulos rectángulos.
- d. Lo dividimos en dos triángulos de igual área.
- e. Una de las anteriores respuestas es falsa

16. Demuestra que las diagonales de un cuadrado forman un ángulo recto.





