UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Optimización de programa fraccional min-max aplicando el enfoque paramétrico primal tipo Dinkelbach"

Tesis

Para optar el título profesional de

Licenciado(a) en Matemáticas

Autores:

Bach.Mat. Veronica Neira Fernandez
Bach.Mat. Miguel Angel Torres Flores

Asesor:

M.Sc. Oscar Antonio Santamaria Santisteban

Lambayeque – Perú
Junio – 2019

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada "Optimización de programa fraccional min-max aplicando el enfoque paramétrico primal tipo Dinkelbach", presentado por el Bach.Mat. Miguel Angel Torres Flores y la Bach.Mat. Veronica Neira Fernandez, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas

Lic.Mat. Manuel Augencio Sandoval Rodríguez
Presidente del Jurado

M.Sc. José Antonio Chiroque Baldera
Secretario del Jurado

M.Sc. Mirian María Estrada Huancas
Vocal del Jurado

Fecha de defensa Junio − 2019

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Tesis:

Optimización de programa fraccional min-max

Bach.Mat. Veronica Neira Fernandez
Autora de la tesis

Bach.Mat. Miguel Angel Torres Flores
Autor de la tesis

M.Sc. Oscar A. Santamaria Santisteban
Asesor

Fecha de defensa Junio − 2019

Agradecimiento

Un infinito agradecimiento a nuestro asesor, Mg. Oscar Santamaría Santisteban, por su paciencia y constante apoyo en la realización de este trabajo.
Igualmente, agradecer al Dr Abelardo Jordán Liza y al Dr. Eladio Ocaña Anaya por los sabios consejos en la estructuración y desarrollo del mismo, consejos que hicieron posible la culminación de este trabajo.
A nuestros profesores de la FACFyM por todas sus enseñanzas brindadas.

Dedicatoria

A Dios, por habernos regalado una vida llena de satisfacciones y brindarnos fe para seguir adelante en todo momento.
A nuestros queridos padres, porque siempre nos dieron impulso, fortaleza y apoyo para lograr nuestras metas a pesar de las adversidades. Por su amor incondicional y sus sabios consejos.
A nuestros hijos, Dayanna y Josué, porque son la fuente de nuestra fortaleza y empeño para seguir adelante siempre.

Contenido

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

1.1. Optimización Matemática 4

1.2. Conjuntos afines 6

1.3. Interior relativo 7

1.4. Conjuntos convexos 8

1.5. Funciones Convexas 11

1.6. Epígrafos 12

1.7. Semicontinuidad 14

1.8. Subgradiente 15

1.9. Tipos de convergencia 17

2. Clasificación de los Programas Fraccionales **18**

2.1. Formulación del Problema 18

2.2. Transformación de Charnes y Cooper 20

3. Enfoque Paramétrico Primal **25**

3.1. Formulación del Problema 25

3.2. Propiedades de las funciones $p_{1,x}$ y p_2 28
3.2.1. Conjuntos de Optimalidad de (P_λ^x) y (P_λ) 33
3.2.2. $p_{1,x}(\lambda)$ es una aplicación Lipschitz continua 36
3.3. Subgradiente de la Función Convexa $p_{1,x}$ 37

4. Algoritmo Primal Tipo Dinkelbach 42
4.1. Algoritmo Primal 42
4.2. Resultados de Convergencia 45
4.3. Existencia de una solución óptima 49
4.4. Ratio de Convergencia de la Sucesión λ_k 52

Conclusiones 59

Sugerencias 60

Bibliografía 61

Resumen

En el presente trabajo usamos el enfoque paramétrico, esto es, reemplazar la función objetivo del programa fraccional por medio de una familia de funciones lineales asociada a un parámetro. El abordaje paramétrico hizo posible usar herramientas de convexidad para resolver los problemas fraccionales min-max y al mismo tiempo para construir un algoritmo que se basa en la solución de una sucesión de problemas de optimización paramétrica.

Introducción

Un Programa Fraccional es un problema de optimización matemática que involucra uno o varios cocientes en la función objetivo, es decir, la función objetivo es una función no lineal. En general, las funciones que se expresan como cociente de funciones no son ni convexas ni cóncavas, y es por ello que resulte de gran importancia extender los resultados básicos de la programación no lineal.

Charnes y Cooper (1962) muestra que un programa fraccional lineal de un solo cociente se puede reducir a un programa lineal utilizando una transformación de variables no lineales. Los problemas de programación fraccional los podemos encontrar en muchas aplicaciones; por ejemplo, en las aplicaciones económicas, maximización de la productividad, maximización de la tasa de rendimiento de las inversiones, problemas de selección de portafolio en finanzas. Por otro lado, indirectamente en la programación estocástica. Otra aplicación importante está dentro del campo de la programación multiobjetivo.

El presente trabajo tiene como objetivo analizar y desarrollar los programas fraccionales min-max de manera general, para ello nos hemos planteado dos objetivos específicos los cuales son: Usar las herramientas de convexidad generalizada para resolver los problemas fraccionales min-max y usar un algoritmo que resuleva el

problema primal.

El abordaje paramétrico, hace posible el uso de herramientas de convexidad para resolver los problemas fraccionales min-max *primal* (P) y al mismo tiempo para construir un algoritmo que resuelve el problema *primal* (P). En el análisis teórico de los programas fraccionales min-max va a resultar que la convexidad juega un papel importante no sólo en lo ya antes mencionado, si no también en el análisis de los tipos de convergencia para el enfoque paramétrico primal tipo Dinkelbach. Cabe resaltar que la matemática, especificamente el análisis convexo, es el soporte teórico para el desarrollo del enfoque paramétrico primal tipo Dinkelbach y algoritmo primal tipo Dinkelbach.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer Capťulo presentamos aquellos resultados básicos del análisis convexo que serán de gran ayuda en el desarrollo de los capítulos posteriores ya que en el estudio de los problemas de optimización la convexidad juega un papel importante, para una revisión más detallada de estos temas puede consultar Aubin (1993); Avriel, Diewert, Shaible y Zang (1988) y Frenk y Kasay (2004). Comenzamos este capítulo con la formulación de un problema de optimización no lineal, problema que será reformulado en el Capítulo 4 y que es el centro de estudio del presente trabajo. Asímismo, las Secciones 2, 3 y 4 son de suma importancia puesto que serán usadas para el análisis de los problemas de optimización así como en la caracterización de sus soluciones óptimas. En las Secciones, 5, 6, 7 y 8 estudiamos las funciones convexas y sus caracterizaciones, los subgradientes de funciones convexas aca juegan un papel importante en los algoritmos para la optimización no diferenciable. Finalmente, en la ultima sección los tipos de convergencia son introducidos ya que nos ayudará a distinguir que tan rápido la sucesión generada por el algoritmo primal tipo Dinkelbach estudiada en el Capítulo 4 converge.

1.1. Optimización Matemática

Un problema de optimización matemática, o simplemente un problema de optimización, tiene la forma

$$\begin{array}{lrcll} \text{Minimizar} & f(x) & & & \\ \text{Sujeto a} & g_i(x) & \leq & 0 & i = 1 \dots m \\ & h_j(x) & = & 0 & j = 1 \dots l \\ & x \in C, & & & \end{array} \tag{1.1}$$

donde $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_l$ son funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ de valor real, C subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y el vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ es la variable de optimización del problema.

La función f es llamada función objetivo. Cada una de las restricciones $g_i(x) \leq 0$ para $i = 1, \dots, m$ se llaman restricciones de desigualdad, y cada una de las restricciones $h_j(x) = 0$ para $j = 1, \dots, l$ se llaman restricciones de igualdad.

Un vector x en C que satisface todas las restricciones se denomina solución factible del problema. El conjunto de todas las soluciones factibles se llama región factible y es denotada por:

$$B = \{x \in C : g_i(x) \leq 0,\ i = 1 \dots m,\ h_j(x) = 0,\ j = 1 \dots l\}.$$

Por tanto, el problema (1.1) consiste en encontrar un punto x^* factible tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para cada punto factible x. El punto x^* se llama óptimo, o una solución del problema (1.1). Si existe más de un óptimo, se los denomina colectivamente como soluciones óptimas alternativas.

El problema (1.1) será llamado un problema de programación no lineal si la función objetivo o las restricciones no son lineales.

Observación 1.1. Si el Problema 1.1 se tratase de un problema de maximización, entonces podemos resolverlo minimizando la función $-f(x)$ sujeto a las restricciones.

Para ilustrar lo descrito líneas arriba, considere el siguiente problema.

$$\text{Minimizar} \quad (x+3)^2 + (y-2)^2 \tag{1.2}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x^2 - y - 3 &\leq 0 \\ y &\leq 1 \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

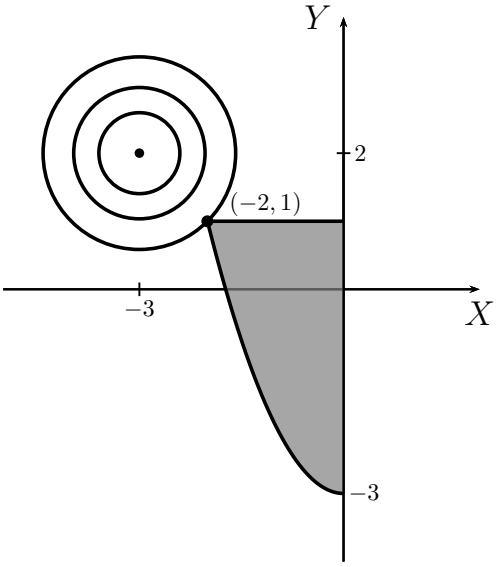

Figura 1.

Claramente, la función objetivo y las restricciones de desigualdad son:

$$\begin{aligned} f(x;y) &= (x+3)^2 + (y-2)^2 \\ g_1(x;y) &= x^2 - y - 3 \\ g_2(x;y) &= y - 1 \\ g_3(x;y) &= x \end{aligned}$$

Note que f y g_1 son funciones no lineales, esto hace del problema (1.2) un problema de optimización no lineal. Las funciones g_2 y g_3 son funciones lineales.
Claramente el óptimo es muy sencillo de encontrar ya que el enfoque geométrico(ver Figura 1) nos permite usar la interpretación del gradiente para encontrar una solución óptima. Las curvas de nivel, circunferencias, representadas por $(x+3)^2 + (y-2)^2 = c$ con centro en $(-3, 2)$ y radio $\sqrt{c}$ crecen cada vez que c aumenta. La región factible está dada por la región sombreada. Por lo tanto, la solución óptima ocurre en el punto $(-2, 1)$ y la función objetivo se minimiza en $f(-2, 1) = 2$

1.2. Conjuntos afines

Suponga que $x_1 \neq x_2$ son dos puntos de $\mathbb{R}^n$. Puntos de la forma

$$y = \theta\, x_1 + (1-\theta)\, x_2,$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$, forma la ***línea*** recta entre x_1 y x_2. Los valores del parámetro $\theta \in [0, 1]$ corresponden al ***segmento de línea*** entre x_1 y x_2.

Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es ***afín*** si la línea que une dos puntos distintos en C está en C, esto es, si para cualquier $x_1,\ x_2\ \in C$ y $\theta \in \mathbb{R}$, tenemos $\theta\, x_1 + (1-\theta)\, x_2 \in C$. Dicho de otra manera, C contiene la combinación lineal de dos puntos cualquiera en C, siempre que los coeficientes en la combinación lineal sumen uno.
Esta idea puede generalizarse a más de dos puntos. Nos referimos a un punto de la forma $\theta_1\, x_1 + \ldots + \theta_k\, x_k$, donde $\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$, como una ***combinación afín*** de los puntos $x_1, \ldots, x_k$. Usando inducción en la definición de conjunto afín (es decir, que contiene todas las combinaciones afines de dos puntos en él), se puede demostrar que un conjunto afín contiene cada combinación afín de sus puntos: Si C es un conjunto afín, $x_1, \ldots, x_k \in C$, y $\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$, entonces el punto $\theta_1\, x_1 + \ldots + \theta_k\, x_k$ también pertenece a C.

El conjunto de todas las combinaciones afines de puntos en algún conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ se llama el ***casco afín*** de C, y se denota **aff** (C):

$$\textbf{aff}\,(C) = \{\theta_1\, x_1 + \ldots + \theta_k\, x_k :\ x_1, \ldots, x_k \in C\,, \theta_1 + \ldots + \theta_k = 1\}. \qquad (1.3)$$

El casco afín es el conjunto afín más pequeño que contiene C, en el siguiente sentido: si S es un conjunto afín con $C \subseteq S$, entonces **aff** $(C) \subseteq S$.

EJEMPLO 1.1. El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, $C = \{x : Ax = b\}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, es un conjunto afín. Para mostrar esto, suponga $x_1,\ x_2\ \in C$, esto es, $Ax_1 = b,\ Ax_2 = b$. Entonces para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) &= \theta A x_1 + (1-\theta) A x_2 \\ &= \theta b + (1-\theta) b \\ &= b \end{aligned}$$

lo que muestra que la combinación afín $\theta x_1 + (1-\theta)x_2$ también está en C.

1.3. Interior relativo

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos el ***interior relativo*** del conjunto C, denotado **ri** (C), como su interior en relación con **aff** (C):

$$\textbf{ri}\,(C) = \{x \in C : B(x;r) \cap \textbf{aff}\,(C)\ \subseteq C \text{ para algún } r > 0\}, \qquad (1.4)$$

donde $B(x;r) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ \|y - x\| < r\}$, la bola de radio r y centro x con la norma euclidiana $\|\cdot\|$.

EJEMPLO 1.2. Considere en $\mathbb{R}^3$ el conjunto C definido por

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 \le x_1 \le 1,\ -1 \le x_2 \le 1,\ x_3 = 0\}. \qquad (1.5)$$

Su casco afín es el plano x_1x_2, es decir; **aff** $(C) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = 0\}$. El interior de C es vacío pero el interior relativo es

$$\textbf{ri}\,(C) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ -1 < x_1 < 1, \ -1 < x_2 < 1, \ x_3 = 0\}. \tag{1.6}$$

1.4. Conjuntos convexos

Un conjunto C es ***convexo*** si el segmento de línea entre dos puntos cualesquiera en C está en C, es decir, si para cualquier $x_1, \ x_2 \ \in C$ y cualquier θ con $0 \leq \theta \leq 1$, se tiene $\theta\, x_1 + (1-\theta)\, x_2 \ \in C$.

A continuación describimos algunas operaciones especiales que preservan convexidad de los conjuntos

Función Perspectiva. Definimos la función perspectiva $P : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, con dominio **Dom** $(P) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, como

$$P(x;t) = \frac{x}{t}, \tag{1.7}$$

donde $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : \ t > 0\}$. Si $C \subset$ **Dom** (P) es convexo, entonces la imagen

$$P(C) = \{P(x) : \ x \in C\}$$

es convexa. Para establecer la convexidad de $P(C)$ necesitamos mostrar que el segmento de línea $[Px), P(y)]$ está en $P(C)$, esto es, que los segmentos de línea llevan segmentos de línea bajo la función perspectiva. En efecto. Supongamos que $x = (\overline{x}, x_t), \ y = (\overline{y}, y_t) \ \in \ \mathbb{R}^{n+1}$ con $x_t > 0, \ y_t > 0$ y $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \ \in \ \mathbb{R}^n$. Entonces para $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\begin{aligned} P(\theta\, x + (1-\theta)\, y) &= \frac{\theta\, \overline{x} + (1-\theta)\, \overline{y}}{\theta\, x_t + (1-\theta)\, y_t} \\ &= \left[\frac{\theta\, x_t}{\theta\, x_t + (1-\theta)\, y_t}\right] \frac{\overline{x}}{x_t} + \left[\frac{(1-\theta)\, y_t}{\theta\, x_t + (1-\theta)\, y_t}\right] \frac{\overline{y}}{y_t} \\ &= \mu\, P(x) + (1-\mu)\, P(y), \end{aligned}$$

donde

$$\mu = \frac{\theta\, x_t}{\theta\, x_t + (1-\theta)\, y_t} \in [0,1].$$

Esta correspondencia entre θ y μ es monótona: como θ varía entre 0 y 1 (que barre el segmento de línea $[x, y]$), μ varía entre 0 y 1 (que barre el segmento de línea $[P(x), P(y)]$). Esto muestra que $P([x; y]) = [P(x), P(y)]$, por tanto $P(C)$ es convexa.

Por otro lado, la imagen inversa de un conjunto convexo bajo la función perspectiva es también convexa: Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces

$$P^{-1}(C) = \{(x; t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x/t \in C,\, t > 0\} \tag{1.8}$$

es convexa. Para mostrar esto, supongamos $(x, t) \in P^{-1}(C)$, $(y, s) \in P^{-1}(C)$, y $0 \leq \theta \leq 1$. Mostraremos que

$$\theta\, (x, t) + (1-\theta)\, (y, s) \in P^{-1}(C),$$

es decir,

$$\frac{\theta\, x + (1-\theta)\, y}{\theta\, t + (1-\theta)\, s} \in C$$

Claramente $\theta\, t + (1-\theta)\, s > 0$, así

$$\begin{aligned} \frac{\theta\, x + (1-\theta)\, y}{\theta\, t + (1-\theta)\, s} &= \left[\frac{\theta\, t}{\theta\, t + (1-\theta)\, s}\right] \frac{x}{t} + \left[\frac{(1-\theta)\, s}{\theta\, t + (1-\theta)\, s}\right] \frac{y}{s} \\ &= \mu\, (x/t) + (1-\mu)\, (y/s), \end{aligned}$$

donde

$$\mu = \frac{\theta\, t}{\theta\, t + (1-\theta)\, s} \in [0,1].$$

Lo que muestra que $P^{-1}(C)$ es convexa.

Funcion Afín. Definimos una función *afín* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como $f(x) = Ax + b$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Al igual que la función perspectiva, las funciones afines conservan la convexidad. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces su imagen

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\}$$

es convexa. Similarmente, $f^{-1}(S) = \{x : f(x) \in S\}$ es convexa si $S \subset \mathbb{R}^m$ es convexo.

Función Fraccional Lineal. Una función *fraccional lineal* es formada por la composición de la función perspectiva con una función afín. Denotamos la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ afín como

$$g(x) = \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. La función $f = P \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$f(x) = \frac{Ax + b}{c^T x + d}$$

con dominio $\mathbf{Dom}\,(f) = \{x : c^T x + d > 0\}$, es llamada función *fraccional lineal*. Las funciones fraccionales lineales también conservan la convexidad. Si C es convexo y se encuentra en el dominio de f (es decir, $c^T x + d > 0$ para $x \in C$), entonces su imagen $f(C)$ es convexa. Esto se deduce inmediatamente de los resultados anteriores: la imagen de C bajo la función afín (1.9) es convexa, y la imagen del conjunto resultante bajo la función perspectiva P, que produce $f(C)$, es convexa. De manera similar, si $C \subset \mathbb{R}^m$ es convexa, entonces la imagen inversa $f^{-1}(C)$ es convexa.

1.5. Funciones Convexas

Una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida sobre un conjunto convexo C es llamada convexa si para todo $x, y \in C$ y $\theta \in [0; 1]$ se tiene

$$f(\,\theta\, x + (1-\theta)\, y\,) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y). \tag{1.10}$$

Si la desigualdad anterior es estricta para $x \neq y$ y $\theta \in]0; 1[$, entonces f es llamada estrictamente convexa. Si f es convexa entonces $g = -f$ es cóncava.

Muchas veces es conveniente extender una función convexa a todo $\mathbb{R}^n$ definiendo su valor como ∞ fuera de su dominio. Si f es convexa, definimos su extensión de valor real extendido $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to]-\infty, \infty]$ por

$$\widehat{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \textbf{Dom}\,(f) \\ \infty & \text{si} \quad x \notin \textbf{Dom}\,(f), \end{cases}$$

La extensión $\widehat{f}$ se define en todos los $\mathbb{R}^n$, y toma valores en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Podemos recuperar el dominio de la función original f de la extensión $\widehat{f}$ como $\textbf{Dom}\,(f) = \{x : \widehat{f}(x) < \infty\}$.

La extensión puede simplificar la notación, ya que no necesitamos describir explícitamente el dominio, o agregar el calificador para todo $x \in \textbf{Dom}\,(f)$ cada vez que nos referimos a $f(x)$. Consideremos, por ejemplo, la definición básica de la desigualdad (1.10). En términos de la extensión $\widehat{f}$, podemos expresarlo como:

$$\widehat{f}\,(\,\theta\, x + (1-\theta)\, y\,) \leq \theta\, \widehat{f}(x) + (1-\theta)\, \widehat{f}(y), \quad 0 < \theta < 1$$

para cualquier x, y. (Para $\theta = 0$ o $\theta = 1$, la desigualdad siempre se cumple). Para $x, y \in \textbf{Dom}\,(f)$, esta desigualdad coincide con (1.10), si cualquiera de los dos está fuera del $\textbf{Dom}\,(f)$, entonces el lado derecho es ∞, y por tanto la desigualdad se mantiene.

De manera similar, podemos extender una función cóncava definiéndola como $-\infty$ fuera de su dominio. En lo que resta del trabajo usaremos el mismo símbolo

para denotar una función convexa y su extensión siempre que no haya confusión.

En el análisis de los problemas de minimización y maximización a menudo es conveniente considerar funciones que toman valores en la recta real extendida $[-\infty, \infty]$ en lugar de sólo $]-\infty, \infty[$. Por ejemplo, consideremos un problema de minimización del tipo

$$\begin{array}{ll} \text{ínf} & g(x) \\ \text{s.a} & x \in B \end{array} \tag{1.11}$$

donde $g : C \to \mathbb{R}$, B conjunto de restricciones y C como un espacio topológico. Con la topología apropiada, $[-\infty, \infty]$ es un intervalo compacto. Así, todo subconjunto $A \subset [-\infty, \infty]$ admite un ínfimo y un supremo: En particular, tomando $A = \{g(x) : x \in B\}$ se tiene que $\text{ínf}\,\{g(x) : x \in B\}$ está bien definido en $[-\infty, \infty]$.

En este contexto resulta muy útil introducir la ***función indicatriz*** del conjunto C, $\delta_B : C \to [-\infty, \infty]$ definida por

$$\delta_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in B \\ \infty & \text{si} \quad x \notin B, \end{cases}$$

Por tanto, el problema (1.11) puede formularse de manera equivalente como

$$\begin{array}{ll} \text{ínf} & f(x) \\ \text{s.a} & x \in C \end{array} \tag{1.12}$$

donde la función $f : C \to]-\infty, \infty]$ se define como $f(x) = (g + \delta_B)(x) = g(x) + \delta_B(x)$. Esto permite considerar las restricciones de manera implícita en la definición de f. En los problemas (1.11) y (1.12) no suponemos a priori que tengan una solución óptima. Por lo tanto, no podemos reemplazar ínfimo por mínimo.

1.6. Epígrafos

Sea $f : X \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ una función. El subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$epi(f) = \{(x, \alpha) : x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \alpha\}$$

es llamado ***epígrafo*** de f. Similarmente, el ***hipógrafo*** de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$hip(f) = \{(x, \alpha) : x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R},\ f(x) \geq \alpha\}.$$

Llamamos ***dominio efectivo*** de f al conjunto

$$\text{dom}\,(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

Para la función f y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $U(f, \alpha)$ definido por

$$U(f, \alpha) = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

es llamado conjunto de ***nivel superior*** α de f, el conjunto

$$L(f, \alpha) = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$$

es llamado conjunto de ***nivel inferior*** α.

TEOREMA 1.1. *Sea X un conjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \to \mathbb{R}$. Entonces f es una función convexa si y solo si $epi(f)$ es un conjunto convexo. Análogamente, f es cóncava si y solo si $hip(f)$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Suponga que f es convexa y $(x; \alpha_1)$ $(y; \alpha_2)$ dos puntos en $epi(f)$. Entonces para cualquier $\theta \in [0; 1]$,

$$f(\,\theta\, x + (1 - \theta)\, y\,) \leq \theta f(x) + (1 - \theta) f(y) \leq \theta \alpha_1 + (1 - \theta)\alpha_2.$$

Por lo tanto, el punto

$$(z, \alpha) = (\theta\, x + (1 - \theta)\, y, \theta\, \alpha_1 + (1 - \theta)\, \alpha_2)$$

es también un punto de $epi(f)$. Recíprocamente, si $epi(f)$ es un conjunto convexo, entonces para dos puntos cualesquiera $(x; \alpha_1) \in epi(f)$, $(y; \alpha_2) \in epi(f)$ y $\theta \in [0; 1]$ se obtiene $(\theta\, x + (1 - \theta)\, y\,,\, \theta\, \alpha_1 + (1 - \theta)\, \alpha_2) \in epi(f)$. Poniendo $\alpha_1 = f(x)$, $\alpha_2 = f(y)$ obtenemos

$$f(\,\theta\, x + (1 - \theta)\, y\,) \leq \theta \alpha_1 + (1 - \theta)\alpha_2 = \theta f(x) + (1 - \theta) f(y),$$

y f es convexa. La segunda parte del Teorema se resolverá de manera análoga. ∎

1.7. Semicontinuidad

Decimos que la función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ es *semicontinua inferior* en un vector $x \in X$ si $\liminf_{k\to+\infty} f(x_k) \geq f(x)$ para cada sucesión $\{x_k\} \subset X$ con $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$. La función f es *semicontinua superior* si $-f$ es semicontinua inferior.

TEOREMA 1.2. *Si $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) La función f es semicontinua inferior en todo $x \in \mathbb{R}^n$.

b) El conjunto epi(f) es cerrado.

c) El conjunto $L(f, \alpha)$ es cerrado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$: Sea $\{(x_k, w_k)\} \subset epi(f)$ con $(x_k, w_k) \longrightarrow (\overline{x}, \overline{w})$. Entonces $f(x_k) \leq w_k$ y $f(\overline{x}) \leq \liminf_{k\to+\infty} f(x_k) \leq \overline{w}$. Por tanto $(\overline{x}, \overline{w}) \in epi(f)$.
$b) \Rightarrow c)$: Sea $\{x_k\} \subset L(f, \alpha)$ y $x_k \longrightarrow \overline{x}$. Entonces $(x_k, \alpha) \in epi(f)$ y $(x_k, \alpha) \longrightarrow (\overline{x}, \alpha)$, así $(\overline{x}, \alpha) \in epi(f)$ y $\overline{x} \in L(f, \alpha)$.
$c) \Rightarrow a)$: Sea $\{x_k\} \subset L(f, \alpha)$ con $x_k \longrightarrow \overline{x}$.
Por contradicción al absurdo, suponer que f no es semicontinua inferior en $\overline{x}$ y $x_{n_k} \longrightarrow \overline{x}$. Entonces $f(\overline{x}) > \alpha > \liminf_{k\to+\infty} f(x_{n_k})$, lo cual es una contradicción con el hecho de suponer que $L(f, \alpha)$ es cerrado. Por tanto, f es semicontinua inferior en todo $x \in \mathbb{R}^n$. ∎

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea $f_i : \mathbb{R}^n \to]-\infty, \infty]$, $i \in I$, donde I es cualquier conjunto de índices. La función $g : \mathbb{R}^n \to]-\infty, \infty]$ dada por*

$$g(x) = \sup_{i\in I} f_i(x) \tag{1.13}$$

es convexa si las f_i son convexas.

Demostración. Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\theta \in [0;1]$. Entonces para todo $i \in I$ se tiene,

$$\begin{aligned} g(\theta\, x + (1-\theta)\, y) &= \sup_{i\in I} f_i(\theta\, x + (1-\theta)\, y) \\ &\leq \sup_{i\in I} \{\theta\, f_i(x) + (1-\theta)\, f_i(y)\} \\ &\leq \theta \sup_{i\in I} f_i(x) + (1-\theta) \sup_{i\in I} f_i(y) \\ &= \theta\, g(x) + (1-\theta)\, g(y) \end{aligned}$$

Esto es,

$$g(\theta\, x + (1-\theta)\, y) \leq \theta\, g(x) + (1-\theta)\, g(y).$$

Por tanto, g es convexa. ∎

En términos de epígrafos, el supremo de funciones corresponde a la intersección de epígrafos: con f, g e $i \in I$ definidas como en (1.13) tenemos

$$\begin{aligned} epi\,(g) &= \{(x,\alpha) :\, x \in \mathbb{R}^n\,,\, \alpha \in \mathbb{R}\,,\, \sup\, f_i(x) \leq \alpha\} \\ &= \{(x,\alpha) :\, x \in \mathbb{R}^n\,,\, \alpha \in \mathbb{R}\,,\, f_i(x) \leq \alpha\,,\, \forall\, i \in I\} \\ &= \bigcap_{i\in I} epi(f_i). \end{aligned}$$

Como $epi(g) = \bigcap_{i\in I} epi(f_i)$ y la intersección de conjuntos cerrados es también un conjunto cerrado se obtiene por Teorema 1.2 que la función $\sup_{i\in I} f_i$ es semicontinua inferior si cada función f_i, $i \in I$ es semicontinua inferior.

1.8. Subgradiente

El vector $z \in \mathbb{R}^n$ es llamado un *subgradiente* de la función convexa $f : \mathbb{R}^n \to]-\infty, \infty]$ en el punto $x_0 \in$ **Dom** (f) si

$$f(x) \geq f(x_0) + z^T(x - x_0) \quad \text{para todo } x \in \textbf{Dom}\ (f). \tag{1.14}$$

El conjunto de todos los subgradientes de f en x_0 es llamado el *subdiferencial* de f en x_0 y es denotado por $\partial\, f(x_0)$.

EJEMPLO 1.3. $f(x) = x^2$ y sea $x_0 = 3$ y el subgradiente $z = 6$. Observe que desde la desigualdad

$$0 \leq (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

obtenemos para cualquier x:

$$f(x) = x^2 \geq 6x - 9 = 9 + 6(x-3) = f(x_0) + 6(x - x_0).$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $z \in \mathbb{R}$ es un subgradiente de f. Por tanto, $\partial f(x_0) = \mathbb{R}$.

EJEMPLO 1.4. $f(x) = |x|$. Entonces es fácil de ver que

- Si $x_0 > 0$, entonces $z = 1$ es un subgradiente de f en x_0.
- Si $x_0 < 0$, entonces $z = -1$ es un subgradiente de f en x_0.
- Si $x_0 = 0$, entonces $z \in [-1, 1]$ es un subgradiente de f en x_0.

En (1.14). Si $x_0 \notin$ **Dom** (f) o $f(x_0) = \infty$, entonces esto implica, tomando $Dom(f)$ no vacío, que el subdiferencial $\partial f(x_0) = \emptyset$ de modo que solo nos interesa el caso donde $f(x_0)$ es finito. El siguiente Teorema muestra la existencia de un subgradiente de f en x_0 en caso $f(x_0)$ sea finito.

TEOREMA 1.3. *Si la función $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ es convexa y $f(x_0)$ es fnito para algún $x_0 \in$ **ri** (**Dom** (f)), entonces el conjunto $\partial f(x_0)$ es no vacío.*

Para la demostración, ver Teorema 1.13 de [10]. En caso de que x_0 no pertenezca a ***ri*** (**Dom** (f)) para alguna función convexa f, puede ocurrir que f no tenga un subgradiente en el punto x_0. El siguiente ejemplo muestra este hecho.

EJEMPLO 1.5. Considere la función convexa $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \infty & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Su casco afín, **aff** (**Dom** (f)) $= \mathbb{R}$. El interior relativo es

$$\textbf{ri}\,(\textbf{Dom}\,(f)) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Como 0 no pertenece a **ri** (**Dom** (f)), entonces $\partial f(0)$ es vacío.

1.9. Tipos de convergencia

Una sucesión $\{s_k \subset \mathbb{R}^n : k \in \mathbb{N}\}$ con límite s_∞ converge linealmente si existe algún $0 < r < 1$ tal que

$$\text{lím sup}_{k\to\infty} \frac{||s_{k+1} - s_\infty||}{||s_k - s_\infty||} \leq r.$$

La sucesión $\{s_k : k \in \mathbb{N}\}$ converge superlinealmente a s_∞ si

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||s_{k+1} - s_\infty||}{||s_k - s_\infty||} = 0.$$

Convergencia Lineal: Considere la sucesión $s_k = \left(\frac{1}{10}\right)^i$, cuyos elementos son:

$$0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots \quad \text{y} \quad s_\infty = 0.$$

Entonces,

$$\text{lím sup}_{k\to\infty} \frac{|(1/10)^{i+1} - 0|}{|(1/10)^i - 0|} = 0{,}1.$$

Convergencia Superineal: Considere la sucesión $s_k = \frac{1}{i}$, cuyos elementos son:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{125}, \ldots \quad \text{y} \quad s_\infty = 0$$

Entonces,

$$\text{lím sup}_{k\to\infty} \frac{|(1/i+1) - 0|}{|(1/i) - 0|} = 0.$$

Capítulo 2

Clasificación de los Programas Fraccionales

En este segundo capítulo presentaremos la terminología necesaria en la discusión y análisis de los programas fraccionales. También analizaremos la transformación de Charnes y Cooper y la posibilidad de reducir tales programas fraccionales a un programa cóncavo lineal.

2.1. Formulación del Problema

Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado no vacío y $f, g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ funciones de valor real extendido con valor finito sobre el conjunto B. Supondremos siempre $g(x) > 0$ para todo $x \in B$. Consideremos el problema no lineal.

$$\inf_{x \in B} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{P_1}$$

El problema (P_1) es llamado *programa fraccional de un solo cociente*. Se va a asumir que la región factible no vacía B está dada por

$$B = \{x \in C : h_j(x) \leq 0, 1 \leq j \leq l\} \tag{2.2}$$

con $C \subset \mathbb{R}^n, (C \neq \varnothing)$ y $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, 1 \leq j \leq l$ conjunto de funciones continuas. Cuando las funciones f, g y $h_j, 1 \leq j \leq l$ son especificas, el problema (P_1) recibe nombres especiales, a saber:

- Si f, g y $h_j, 1 \leq j \leq l$ son funciones afines y $C = \mathbb{R}^n_+$ denota el octante no negativo de $\mathbb{R}^n$, entonces el problema (P_1) es llamado *programa fraccional lineal*.

- Si f, g son funciones cuadráticas, $h_j, 1 \leq j \leq l$ funciones afines y $C = \mathbb{R}^n_+$, entonces el problema (P_1) es llamado *programa fraccional cuadrático*.

- El problema (P_1) será llamado *programa fraccional convexo* si C es un conjunto convexo, $h_j, 1 \leq j \leq l$ y f funciones convexas y g una función cóncava y de valor positivo en B.

- En caso el problema de optimización (P_1) se tratase de un problema de maximización, dicho programa será llamado *programa fraccional cóncavo* si f es cóncavo, g es convexo y h_j convexas. Además, f será no negativa en B si g no es afín.

Muchas veces los problemas de optimización necesitan formularse con más de un cociente en la función objetivo, tales problemas son:

$$\inf_{x \in B} \left\{ \sup \frac{f_i(x)}{g_i(x)}, 1 \leq i \leq m \right\}, \tag{P_2}$$

con funciones $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, $1 \leq i \leq m$ de valor finito en B y $g_i(x) > 0$, $1 \leq i \leq m$ con $x \in B$. El problema (P_2) es llamado *programa fraccional generalizado*. Si uno de los g_i no es afín, es necesario asumir que todos

los f_i son no negativos.

El problema fraccional que estudiaremos se formula de la siguiente manera:

$$\lambda_* := \inf_{x \in B} \lambda_*(x) \tag{P}$$

donde

$$\lambda_*(x) := \sup_{y \in A} \frac{f(y,x)}{g(y,x)} \quad \text{para todo } x \in B. \tag{P^x}$$

$A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos cerrados no vacíos y $f, g : \mathbb{R}^{m+n} \to [-\infty, +\infty]$ funciones de valor finito en $A \times B$. Al igual que los programas anteriores, asumiremos siempre g positivo en $A \times B$. El problema (P) es llamado *programa fraccional min-max*. Para lo que resta del presente trabajo, simplemente lo llamaremos *primal*. Los problemas (P_1) y (P_2) son casos particulares del primal.

Claramente $-\infty \leq \lambda_* \leq \infty$ y $-\infty < \lambda_*(x) \leq \infty$. Además, no necesariamente los problemas de optimización (P) y (P^x) tienen una solución óptima. Por tanto no es posible reemplazar inf por min o sup por max.

EJEMPLO 2.1. Considere el siguiente programa fraccional

$$\sup \left\{ \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta}, Ax \leq b, x \geq 0 \right\}, \tag{2.6}$$

donde $c, d \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y A es una matriz de orden $m \times n$. Se observa que dicho problema es claramente un ejemplo de un programa fraccional lineal; más aún, es un programa fraccional cóncavo.

2.2. Transformación de Charnes y Cooper

A continuación mostraremos que el programa fraccional lineal dado en (2.6) puede reducirse a un programa lineal utilizando una transformación de variables no lineales. Consideremos la región factible del problema (2.6) como B^* dado por

$$B^* = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, x \geq 0\},$$

con $B^* \subset \mathbb{R}^n$ acotado no vacío. En (2.6) asumamos para cada $x \in B^*$,

$$d^T x + \beta > 0.$$

Entonces, el programa fraccional de (2.6) se puede transformar en un programa equivalente lineal por la siguiente transformación de variables no lineales y, z.

$$y = \frac{x}{d^T x + \beta}, \qquad z = \frac{1}{d^T x + \beta}.$$

Obteniendo así, el problema de programación lineal

$$\sup\{c^T y + \alpha z\}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} Ay - bz &\leq 0 \\ d^T y + \beta z &= 1 \\ y, z &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para mostrar la equivalencia, empecemos probando los siguientes Lemas.

LEMA 2.1. *Si (y, z) es factible en (2.7), entonces $z > 0$.*

Demostración. Supongamos que (y, z) es factible en (2.7) con $z = 0$. Si x_1 es factible en B^*, entonces $x = x_1 + ty$ tanbién es factible en B^* para todo $t > 0$ ya que $Ay \leq 0, y \geq 0$. Esto indica que B^* no es acotado, lo cual es una contradicción con el hecho de suponer que B^* está acotado. Por lo tanto $z > 0$. ∎

LEMA 2.2. *Si x es factible en B^*, entonces (y, z) es factible en (2.7).*

Demostración. Como $d^T x + \beta > 0$, obtenemos $y \geq 0$, $z > 0$ para cada $x \in B^*$ y consecuentemente se tiene

$$A \frac{x}{d^T x + \beta} \leq b \frac{1}{d^T x + \beta},$$

que es equivalente a

$$Ay - zb \leq 0.$$

Finalmente,

$$d^T y + \beta z = d^T \frac{x}{d^T x + \beta} + \beta \frac{1}{d^T x + \beta} = 1.$$

Por lo tanto, (y, z) es factible en (2.7). ∎

El siguiente Teorema muestra que, si x es solución óptima de la región factible B^*, entonces x puede expresarse de la forma $x = y/z$ si y, z son consideradas como la transformación de variables no lineales dada líneas arriba.

TEOREMA 2.1. *Si x es una solución óptima de B^* y (y, z) una solución óptima de (2.7), entonces*

$$x = \frac{y}{z}$$

es solución óptima de B^*.

Demostración. Demostración por contradicción. Supongamos que (y, z) es solución óptima de (2.7) y que existe un x_1 en la región factible B^* tal que

$$\frac{c^T x_1 + \alpha}{d^T x_1 + \beta} > \frac{c^T(\frac{y}{z}) + \alpha}{d^T(\frac{y}{z}) + \beta}. \tag{2.8}$$

Como $d^T x_1 + \beta = t > 0$, considere

$$y_1 = x_1 z_1$$

para todo $x_1 \in B^*$ con $z_1 = t^{-1}$. Entonces

$$z_1(d^T x_1 + \beta) = d^T y_1 + \beta z_1 = 1$$

y como (y_1, z_1) tanbién satisface $Ay_1 - bz_1 \leq 0$, $y_1, z_1 \geq 0$, el par (y_1, z_1) es factible en (2.7). Pero,

$$\frac{c^T x_1 + \alpha}{d^T x_1 + \beta} = \frac{z_1(c^T x_1 + \alpha)}{z_1(d^T x_1 + \beta)} = \frac{c^T y_1 + \alpha z_1}{d^T y_1 + \beta z_1} = c^T y_1 + \alpha z_1$$

y

$$\frac{c^T(\frac{y}{z})+\alpha}{d^T(\frac{y}{z})+\beta}=\frac{c^Ty+\alpha z}{d^Ty+\beta z}=c^Ty+\alpha z.$$

Reemplazando las dos últimas ecuaciones en (2.8), resulta

$$c^Ty_1+\alpha z_1>c^Ty+\alpha z.$$

Lo cual es una contradicción con el hecho de suponer que (y,x) es solución óptima de (2.7). Por lo tanto, $x=y/z$ es solución óptima de B^*. ∎

Observación 2.1. Si $d^Tx+\beta<0$, considere la función objetivo de (2.7) como

$$\frac{c^Tx+\alpha}{d^Tx+\beta}=\frac{-(c^Tx+\alpha)}{-(d^Tx+\beta)}.$$

Esto es, reemplazar (c^T,α) y (d^T,β) respectivamente por sus negativos $(-c^T,-\alpha)$ y $(-d^T,-\beta)$.

Finalmente mostramos la equivalencia antes mencionada. Esta quedará formalizada en el siguiente Teorema.

TEOREMA 2.2. *x es una solución óptima de (2.6), si y solo si,*

$$(y,z)=\left(\frac{x}{d^Tx+\beta},\frac{1}{d^Tx+\beta}\right)$$

es una solución óptima de (2.7)

Demostración. Mostraremos primero la ida. Supongamos que x es una solución óptima de (2.6). Dado un par (y_1,z_1) factible en (2.7), entonces por Lema (2.1), $z_1>0$ y considere $x_1=y_1/z_1$. Asumamos $q(x_1)\leq q(x)$ para todo $x_1\in B^*$ con $q(x_1)$ función objetiva de (2.6), así tenemos

$$\begin{aligned}
q(y_1,z_1) &= c^Ty_1+\alpha z_1\\
&= c^Tz_1x_1+\alpha z_1\\
&= z_1(c^Tx_1+\alpha)\\
&= z(c^Tx+\alpha)\\
&= c^Ty+\alpha z\\
&= q(y,z).
\end{aligned}$$

Esto prueba que (y, z) es solución óptima de (2.7). Para mostrar el regreso. Asumamos que (y, z) es solución óptima de (2.7), por Teorema 2.1 se tiene

$$q(x_1) = q(y_1, z_1) \leq q(y, z) = q(x).$$

Esto muestra que x es solución óptima de B. ∎

Capítulo 3

Enfoque Paramétrico Primal

En este capítulo usaremos el enfoque paramétrico para reducir el programa fraccional min-max (*primal*) formulado en el Capítulo 2. Aunque otros enfoques también están disponibles, este hace que sea posible obtener resultados de convexidad y al mismo tiempo para construir un algoritmo que resuelve el problema (P) visto en el Capítulo precedente.

3.1. Formulación del Problema

Para analizar las características del *primal* (P) y al mismo tiempo construir un algoritmo genérico que resuelva este problema, introducimos para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ la función $p : \mathbb{R} \times A \times B \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(\lambda, y, x) := f(y, x) - \lambda g(y, x) \quad \text{para todo } (y; x) \in A \times B$$

y consideremos para cada $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times B$ el problema de optimización

$$p_1(\lambda, x) := \sup_{y \in A} p\,(\lambda, y, x) \tag{P_λ^x}$$

y para cada $x \in B$, la función $p_{1,x} : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ definida por

$$p_{1,x}(\lambda) := p_1(\lambda, x). \tag{3.2}$$

Como $g > 0$ en $A \times B$ y $p_{1,x}$ es el supremo de funciones afines, es evidente que $p_{1,x}$ es una función convexa, semicontinua inferiormente y decreciente. La siguiente Proposición muestra estos resultados

PROPOSICIÓN 3.1. *Se cumplen las siguientes propiedades.*

a) $p_{1,x}$ *es convexa.*

b) $p_{1,x}$ *es decreciente.*

c) $p_{1,x}$ *es semicontinua inferior.*

Demostración. a) Si $0 \leq t \leq 1$ y λ_1 y λ_2 dos números reales cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} p_1(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2, x) &= \sup_{y \in A} p\,(t\,\lambda_1 + (1-t)\,\lambda_2, y, x) \\ &\leq \sup_{y \in A} \{t\,p\,(\lambda_1, y, x) + (1-t)\,p\,(\lambda_2, y, x)\} \\ &\leq t \sup_{y \in A} p\,(\lambda_1, y, x) + (1-t) \sup_{y \in A} p\,(\lambda_2, y, x) \\ &= t\,p_1\,(\lambda_1, x) + (1-t)\,p_1\,(\lambda_2, x), \end{aligned}$$

lo que establece la convexidad de $p_{1,x}$.

b) Para $\lambda_1 < \lambda_2$ elementos de $\mathbb{R}$ y el hecho de que g es positiva en $A \times B$ se tiene la desigualdad $f(y,x) - \lambda_2\, g(y,x) < f(y,x) - \lambda_1\, g(y,x)$. Luego,

$$p_1(\lambda_2, x) \leq p_1(\lambda_1, x) \quad \text{para cada } x \in B. \tag{3.3}$$

Esto muestra que $p_{1,x}$ es una función decreciente.

c) Como $p_{1,x}$ es el supremo de funciones afines, entonces por comentario después

de la Proposición 1.1 se tiene

$$\begin{aligned} epi\,(p_{1,x}(\lambda)) &= \left\{(\lambda,\alpha)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : \text{para cada } x\in B, \sup_{y\in A} p(\lambda,y,x)\leq\alpha\right\} \\ &= \{(\lambda,\alpha)\in\mathbb{R}^2 : \text{para cada } x\in B \wedge \text{todo } y\in A,\ p(\lambda,y,x)\leq\alpha\} \\ &= \{(\lambda,y,x,\alpha) :\ (\lambda,y,x)\in\mathbb{R}\times A\times B,\ \alpha\in\mathbb{R}\,,\ p(\lambda,y,x)\leq\alpha\} \\ &= \bigcap_{(\lambda,y,x)\,\in\,\mathbb{R}\times A\times B} epi\,(p(\lambda,y,x)), \end{aligned}$$

y por Teorema 1.2, $p_{1,x}$ es semicontinua inferior. ∎

Asociada a la función $p_{1,x}$, consideremos para cada $\lambda\in\mathbb{R}$ el problema paramétrico min-max,

$$p_2(\lambda) := \inf_{x\in B} p_1(\lambda,x). \tag{P_λ}$$

Tomando ínfimo sobre los $x\in B$ en (3.3) se obtiene $p_2\,(\lambda_2)\leq p_2\,(\lambda_1)$, lo que también muestra que p_2 es decreciente. Por las definiciones de las funciones $p_{1,x}$ y p_2 se deduce que

$$\bigcup_{x\in B} dom(p_{1,x}) = dom(p_2).$$

En efecto, sea $\lambda\in\bigcup\limits_{x\in B} dom(p_{1,x})$. Entonces, existe un $x\in B$ tal que $p_1(\lambda,x)<\infty$. Tomando ínfimo sobre los $x\in B$ se tiene $p_2(\lambda)<\infty$, lo que implica que $\lambda\in dom(p_2)$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{x\in B} dom(p_{1,x})\subset dom(p_2)$. Ahora, sea $\lambda\in dom(p_2)$, entonces $\inf_{x\in B} p_1(\lambda,x)<\infty$ implica que existe $\overline{x}\in B$; $p_1(\lambda,\overline{x})<\infty$, esto es $\lambda\in dom(p_{1,\overline{x}})$. Por tanto $\lambda\in\bigcup\limits_{x\in B} dom(p_{1,x})$. Obteniendo así la segunda inclusión $dom(p_2)\subset\bigcup\limits_{x\in B} dom(p_{1,x})$.

3.2. Propiedades de las funciones $p_{1,x}$ y p_2

Asociada a la función g, consideraremos las funciones relacionadas $g_{\text{ínf}} : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ y $g_{\sup} : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ definidas por

$$g_{\text{ínf}}(x) := \operatorname*{ínf}_{y \in A} g(y, x) \quad \text{y} \quad g_{\sup}(x) := \sup_{y \in A} g(y, x).$$

Asumamos, a menos que se indique lo contrario, que la siguiente condición se cumple.

Condición 1 Para cada $x \in B$ se tiene $0 < g_{\text{ínf}}(x) \leq g_{\sup}(x) < \infty$.

En caso analicemos el enfoque primal tipo Dinkelbach, no todos los resultados son válidos bajo la Condición 1, y que a menudo necesitamos de la siguiente condición más fuerte.

Condición 2 El conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ es compacto, la función g es de valor positivo sobre $A \times B$ y para todo $x \in B$ las funciones $y \to f(y, x)$ y $y \to g(y, x)$ son de valor finito y continuas sobre algún conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ conteniendo A.

Si la Condición 2 se cumple, entonces

$$0 < g_{\text{ínf}}(x) \leq g_{\sup}(x) < \infty$$

para cada $x \in B$, y así esta la Condición 2 implica la Condición 1. Además, el programa fraccional (P^x) tiene una solución óptima y $\lambda_*(x)$ es finito para cada $x \in B$.

A continuación listamos propiedades para las funciones decrecientes $p_{1,x}$ y p_2 que servirán como base para la construcción del algoritmo primal tipo Dinkelbach.
En el siguiente resultado identificamos para $\lambda_* < \infty$ y $\lambda_*(x) < \infty$ el dominio efectivo de las funciones $p_{1,x}$ y p_2.

LEMA 3.1. *Asumamos que la Condición 1 se cumple. Entonces, $\lambda_* < \infty$, si y solo si, $dom(p_2) = \mathbb{R}$. Por otro lado, $\lambda_*(x)$ es finito, si y solo si, $dom(p_{1,x}) = \mathbb{R}$.*

Demostración. Asumamos $\lambda_* < \infty$. Supongamos por contradicción que existe algún $\lambda \in dom(p_2)$ que satisface $p_2(\lambda) = \infty$. Esto implica para cada $x \in B$ que $p_1(\lambda, x) = \infty$. Por tanto para un $x \in B$ dado, es posible encontrar una sucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ que satisface

$$n \leq \left(\frac{f(y_n, x)}{g(y_n, x)} - \lambda\right) g(y_n, x) \leq \left(\frac{f(y_n, x)}{g(y_n, x)} - \lambda\right) g_{\text{sup}}(x).$$

Dado que $g_{\text{sup}}(x) < \infty$ y λ finito, se obtiene por la última desigualdad que $\lambda_*(x) = \infty$ para cada $x \in B$ con $\lambda_* = \infty$, que contradice lo que hemos asumido. Recíprocamente, si $dom(p_2) = \mathbb{R}$, entonces es evidente que $0 \in dom(p_2)$ y existe algún $x_0 \in B$ que cumple $\sup_{y \in A} f(y, x_0) < \infty$. Devido a que $g_{\text{inf}}(x_0) > 0$, $\lambda_*(x_0) < \infty$ y por tanto $\lambda_* < \infty$. La segunda parte se sigue inmediatamente de la primera parte. ∎

A continuación mostramos el siguiente resultado importante para la función del valor óptimo de p_2 del problema paramétrico min-max (P_λ). La validez del llamado enfoque paramétrico para resolver el problema (P), se basa en el siguiente resultado.

TEOREMA 3.1. *Asumamos que la Condición 1 se cumple y $\lambda_* < \infty$. Entonces $\lambda_* < \lambda < \infty$, si y solo si, $p_2(\lambda) < 0$. Además, si $\lambda_*(x) < \infty$, entonces $\lambda_*(x) < \lambda < \infty$, si y solo si, $p_1(\lambda, x) < 0$.*

Demostración. Si $\lambda_* < \infty$ y $\lambda > \lambda_* = \inf_{x \in B} \lambda_*(x)$, entonces existe algún $x_0 \in B$ y $\epsilon > 0$ tales que.

$$\lambda > \lambda_*(x_0) + \epsilon \geq \frac{f(y, x_0)}{g(y, x_0)} + \epsilon$$

para cada $y \in A$. Como $g_{\text{inf}}(x_0) > 0$ tenemos

$$f(y, x_0) - \lambda g(y, x_0) < -\epsilon g(y, x_0) \leq -\epsilon g_{\text{inf}}(x_0)$$

para cada $y \in A$. Por lo tanto

$$p_2(\lambda) \leq p_1(\lambda, x_0) \leq -\epsilon g_{\text{inf}}(x_0) < 0.$$

Ahora mostramos el recíproco, si $p_2(\lambda) < 0$ entonces existen algún $\epsilon > 0$ y $x_0 \in B$ tales que $p_1(\lambda, x_0) \leq -\epsilon$. Esto implica $f(y, x_0) - \lambda g(y, x_0) \leq -\epsilon$ para todo $y \in A$ y se obtiene para cada $y \in A$:

$$\frac{f(y, x_0)}{g(y, x_0)} \leq \lambda - \frac{\epsilon}{g(y, x_0)} \leq \lambda - \frac{\epsilon}{g_{\text{sup}}(x_0)}.$$

Como $g_{\text{sup}}(x_0) < \infty$, se sigue de esta última desigualdad que $\lambda_* \leq \lambda_*(x_0) < \lambda$. Así, la prueba de la primera parte queda verificada. La segunda parte es inmediata de la primera. ∎

Una implicación bastante útil del Teorema 3.1, es dado por el siguiente resultado.

LEMA 3.2. *Asumamos que la Condición 1 se cumple y $\lambda_*(x) < \infty$ para algún $x \in B$. Entonces $p_1(\lambda_*(x), x) = 0$.*

Demostración. Por la definición $\lambda_*(x)$ obtenemos $f(y, x) - \lambda_*(x)g(y, x) \leq 0$ para todo $y \in A$. Esto imlica $p_1(\lambda_*(x), x) \leq 0$. Mientras que, del Teorema 3.1 se deduce que $p_1(\lambda_*(x), x) \geq 0$. Entonces, de las dos últimas desigualdades se obtiene el resultado deseado. ∎

Observación 3.1.

- Si la Condición 1 se cumple y $\lambda_* < \infty$, obtenemos del Teorema 3.1 y Lema 3.1 que $p_2(\lambda_*) \geq 0$ y $p_2(\lambda)$ es finito para cada $\lambda \leq \lambda_*$.
- Si en el Teorema 3.1 solo suponemos que g es positivo en $A \times B$, entonces es facíl de verificar que $p_2(\lambda) \leq 0$ si $\lambda > \lambda_*$, y $p_2(\lambda) < 0$ implica $\lambda > \lambda_*$.

EJEMPLO 3.1. Para $f(x) = x + 1$, $g(x) = x$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$, se tiene que el problema de optimización (P) es reducido a

$$\lambda_* = \inf_{x \in B} \frac{x + 1}{x},$$

lo cual no admite solución, y $\lambda_* = 1$. También,

$$0 < g_{\text{inf}}(x) = g_{\text{sup}}(x) = x < \infty$$

para todo $x \in B$.
Mientras que:

$$p_2(\lambda) := \inf_{x \in B}\{x + 1 - \lambda x\} = \begin{cases} 2 - \lambda & \text{si} \quad \lambda \leq \lambda_* = 1 \\ -\infty & \text{si} \quad \lambda > \lambda_* = 1, \end{cases}$$

en particular $p_2(\lambda_*) = 1 > 0$. Además, el conjunto de solución óptima del problema de optimización (P_{λ_*}) es igual a B.

EJEMPLO 3.2. Si $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{2x}$ y $B = \mathbb{R}$, el problema de optimización

$$\lambda_* = \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{e^x}{e^{2x}}$$

no admite solución, y $\lambda_* = 0$. También,

$$0 < g_{\text{inf}}(x) = g_{\text{sup}}(x) = e^{2x} < \infty \quad \text{para todo } x \in B.$$

Mientras que:

$$p_2(\theta) := \inf_{x \in B}\{e^x - \lambda e^{2x}\} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \leq \lambda_* = 0, \\ -\infty & \text{si} \quad \lambda > \lambda_* = 0. \end{cases}$$

con $p_2(\lambda_*) = 0$. Además, el conjunto de solución óptima del problema de optimización (P_{λ_*}) es vacío.

Para obtener algunas otras propiedades del llamado enfoque paramétrico, tenemos que investigar en detalle las funciones p_2 y $p_{1,x}$. Primero observemos que la función positiva g en $A \times B$ implica que las funciones p_2 y $p_{1,x}$, $x \in B$, son decrecientes. En el siguiente resultado se muestra que la función decreciente p_2 es semicontinua superiormente.

TEOREMA 3.2. *Asumamos que la Condición 1 se cumple. Entonces la función* $p_2 : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ *es semicontinua superiormente.*

Demostración. Para la demostración se aplicará la contraparte del Teorema 1.2, es decir, si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto de nivel superior

$$U(p_2, \alpha) := \{\lambda \in \mathbb{R} : p_2(\lambda) \geq \alpha\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces p_2 es semicontinua superiormente. En efecto. Si $U(p_2, \alpha) = \varnothing$, se verifica. Ahora supongamos que $U(p_2, \alpha) \neq \varnothing$, consideremos algún punto de acumulación $\lambda_\infty \in \mathbb{R}$ del conjunto $U(p_2, \alpha)$. Por lo tanto, existirá alguna sucesión $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subset U(p_2, \alpha)$ que satisface $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_\infty$. Si para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\lambda_n \geq \lambda_\infty$, entonces por la monoticidad de la función p_2 obtenemos,

$$p_2(\lambda_\infty) \geq p_2(\lambda_n) \geq \alpha$$

y por tanto $\lambda_\infty \in U(p_2, \alpha)$. De modo tal, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda_n < \lambda_\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que para cada $x \in B$ y $n \in \mathbb{N}$

$$p_1(\lambda_\infty, x) \geq p(\lambda_n, y, x) + (\lambda_n - \lambda_\infty) g(y, x)$$

para cada $y \in A$. Luego, usando $\lambda_n < \lambda_\infty$ y $g > 0$ obtenemos

$$p_1(\lambda_\infty, x) \geq p(\lambda_n, y, x) + (\lambda_n - \lambda_\infty) g_{\text{sup}}(x)$$

para cad $y \in A$. Por tanto

$$p_1(\lambda_\infty, x) \geq p_1(\lambda_n, x) + (\lambda_n - \lambda_\infty) g_{\text{sup}}(x). \tag{3.5}$$

Como $\lambda_n \in U(p_2, \alpha)$, se obtiene para cada $x \in B$ que $p_1(\lambda_n, x) \geq \alpha$ pues $p_1(\lambda_n, x) \geq p_2(\lambda_n)$. Entonces, la relación (3.5) la podemos expresar como $p_1(\lambda_\infty, x) \geq \alpha + (\lambda_n - \lambda_\infty) g_{\text{sup}}(x)$. Tomando $n \to \infty$ y siendo $0 < g_{\text{sup}}(x) < \infty$ esto da como resultado para cada $x \in B$ que $p_1(\lambda_\infty, x) \geq \alpha$. Luego $p_2(\lambda_\infty) \geq \alpha$, es decir $\lambda_\infty \in U(p_2, \alpha)$. Esto muestra que $U(p_2, \alpha)$ es cerrado, por tanto, p_2 es semicontinua superiormente. ∎

3.2.1. Conjuntos de Optimalidad de (P_λ^x) y (P_λ)

Una consecuencia importante del Teorema 3.2 tiene que ver con los conjuntos de optimalidad de los problemas

$$\sup_{y\in A} p(\lambda, y, x) \quad \text{y} \quad \inf_{x\in B} p_1(\lambda, x).$$

Específicamente hablamos de los conjuntos

$$S_{p_1}(\lambda, x) := \{y \in A : p_1(\lambda, x) = p(\lambda, y, x)\} \tag{3.6}$$

y

$$S_{p_2}(\lambda) := \{x \in B : p_2(\lambda, x) = p_1(\lambda, x)\}. \tag{3.7}$$

El conjunto $S_{p_1}(\lambda, x)$ representa el conjunto de soluciones óptimas en A del problema de optimización (P_λ^x), mientras que el conjunto $S_{p_2}(\lambda)$ denota el conjunto de soluciones óptimas en B del problema de optimización (P_λ). Estos conjuntos nos inducen a las siguientes aplicaciones, antes veamos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.1. *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$ donde X es cerrado. La aplicación $S : X \rightrightarrows Y$ se llama cerrada si*

$$\textit{graf}(S) = \{(x, y) : y \in S(x) \textit{ para algún } x\}$$

es un conjunto cerrado.

Por la definición de conjunto cerrado, la aplicación $S : X \rightrightarrows Y$ es cerrada, si y solo si, para cualquier sucesión $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset X$ y $y_k \in S(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_\infty \;\; y \;\; \lim_{k\to\infty} y_k = y_\infty \;\Rightarrow\; y_\infty \in S(x_\infty).$$

En nuestro contexto tenemos las aplicaciones

$$S_{p_1} : \mathbb{R} \times B \rightrightarrows A \quad \text{y} \quad S_{p_2} : \mathbb{R} \rightrightarrows B$$

donde S_{p_1} y S_{p_2} están dadas por (3.6) y (3.7). También consideremos la aplicación $S_p : \mathbb{R} \rightrightarrows A \times B$ dada por

$$S_p(\lambda) := \{(y, x) \in A \times B : p_2(\lambda) = p_1(\lambda, x) = p(\lambda, y, x)\}. \tag{3.8}$$

Este conjunto representa el conjunto de soluciones óptimas en $A \times B$ del problema de optimización (P_λ).

LEMA 3.3. *La función* $p_1 : \mathbb{R} \times B \to]-\infty, \infty]$ *definida por*

$$p_1(\lambda, x) := \sup_{y \in A} p(\lambda, y, x)$$

es semicontinua inferior en $\mathbb{R} \times B$.

Demostración. Siguiendo los mismos argumentos que $c)$ de Proposición 3.1 se verifica que p_1 es semicontinua inferior en $\mathbb{R} \times B$. ∎

LEMA 3.4. *Asumamos que la Condición 1 se cumple y las funciones* f *y* g *continuas de valor finito en algún conjunto abierto* $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ *conteniendo* $A \times B$. *Entonces las aplicaciones* S_{p_1}, S_{p_2} *y* S_p *son cerrados.*

Demostración. Primero probaremos que la aplicación S_{p_1} es cerrada. Para verificar esto, consideremos la sucesión

$$\{(\lambda_k, y_k, x_k) : y_k \in S_{p_1}(\lambda_k, x_k), k \in \mathbb{N}\}$$

con $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_\infty \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_\infty$ y $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_\infty$. Como A y B son conjuntos cerrados entonces $x_\infty \in B$ y $y_\infty \in A$ y por la definición de p_1 se obtiene

$$p(\lambda_\infty, y_\infty, x_\infty) \leq p_1(\lambda_\infty, x_\infty). \tag{3.9}$$

Como $p_1(\lambda_k, x_k) = p(\lambda_k, y_k, x_k)$,

$$p(\lambda_\infty, y_\infty, x_\infty) = \lim\inf_{k\to\infty} p\,(\lambda_k, y_k, x_k) = \lim\inf_{k\to\infty} p_1(\lambda_k, x_k).$$

Por Lema 3.3, p_1 es semicontinua inferiormente en $\mathbb{R} \times B$, esto es,

$$\lim\inf_{k\to\infty} p_1(\lambda_k, x_k) \geq p_1(\lambda_\infty, x_\infty).$$

Entonces por relación 3.9, $p(\lambda_\infty, y_\infty, x_\infty) = p_1(\lambda_\infty, x_\infty)$, así $y_\infty \in S_{p_1}(\lambda_\infty, x_\infty)$. Esto prueba que S_{p_1} es cerrada.

Para probar que la aplicación S_{p_2} es cerrada, consideremos una sucesión

$$\{(\lambda_k, x_k) : x_k \in S_{p_2}(\lambda_k),\ k \in \mathbb{N}\}$$

con $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_\infty \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_\infty \in B$. Por Teorema 3.2 se tiene

$$p_2(\lambda_\infty) \geq \lim\sup_{k\to\infty} p_2(\lambda_k). \tag{3.10}$$

Como p_1 es semicontinua inferiormente en $\mathbb{R} \times B$, la siguiente cadena de desigualdades

$$\lim\sup_{k\to\infty} p_2(\lambda_k) \geq \lim\inf_{k\to\infty} p_1(\lambda_k, x_k) \geq p_1(\lambda_\infty, x_\infty).$$

se cumple. Luego, usando (3.10) tenemos

$$p_2(\lambda_\infty) \geq p_1(\lambda_\infty, x_\infty).$$

Así, $x_\infty \in S_{p_2}(\lambda_\infty)$. Por lo tanto hemos verificado que S_{p_2} es cerrada.

Finalmente para probar que S_p es cerrada, consideremos la sucesión

$$\{(\lambda_k, y_k, x_k) : (y_k, x_k) \in S_p(\lambda_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

con $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_\infty \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_\infty$ y $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_\infty$. Como $y_k \in S_{p_1}(\lambda_k, x_k)$, se sigue usando el hecho de que S_{p_1} es cerrada que $y_\infty \in S_{p_1}(\lambda_\infty, x_\infty)$. Esto prueba

$$p(\lambda_\infty, y_\infty, x_\infty) = p_1(\lambda_\infty, x_\infty).$$

Además, como $x_k \in S_{p_2}(\lambda_k)$, obtenemos $x_\infty \in S_{p_2}(\lambda_\infty)$. Luego $p_1(\lambda_\infty, x_\infty) = p_2(\lambda_\infty)$. Por lo tanto (y_∞, x_∞) es una solución óptima del *primal* (P). Esto completa la prueba. ∎

3.2.2. $p_{1,x}(\lambda)$ es una aplicación Lipschitz continua

Ahora considermos para cada $x \in B$ la función convexa decreciente $p_{1,x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como en (3.2). En el siguiente resultado se prueba para $\lambda_*(x)$ finito que esta función es Lipschitz continua con constante de Lipschitz $g_{\text{sup}}(x)$.

LEMA 3.5. *Asumamos que la Condición 1 se cumple y $\lambda_*(x)$ finito para $x \in B$. Entonces la función $p_{1,x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente y Lipschitz continua con constante de Lipschitz $g_{sup}(x)$ tal que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} p_{1,x}(\lambda) = -\infty$ y $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} p_{1,x}(\lambda) = \infty$.*

Demostración. Si $\lambda_*(x)$ es finito para algún $x \in B$, entonces por Lema 3.1 $p_{1,x}(\lambda)$ es finito para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $p_{1,x}$ es estrictamente decreciente, elijamos algún $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\mu > \lambda$ y asumiendo que $g_{\text{inf}}(x) > 0$ se tiene

$$(\mu - \lambda)g(y, x) \geq (\mu - \lambda)g_{\text{inf}}(x)$$

para cada $x \in B$. Sumando el valor finito $p(\mu, y, x)$ obtenemos

$$p(\lambda, y, x) \geq p(\mu, y, x) + (\mu - \lambda)g_{\text{inf}}(x).$$

Esto implica

$$p_{1,x}(\lambda) - p_{1,x}(\mu) \geq (\mu - \lambda)g_{\text{inf}}(x). \tag{3.11}$$

para cada $x \in B$. Puesto que $p_{1,x}(\lambda)$ es también finito y $(\mu - \lambda)g_{\text{inf}}(x) > 0$ obtenemos

$$p_{1,x}(\lambda) > p_{1,x}(\mu)$$

para todo $\mu > \lambda$. Esto muestra que $p_{1,x}$ es estrictamente decreciente. Para probar que $p_{1,x}$ es Lipschitz asumamos $g_{\text{sup}}(x) < \infty$. Entonces para $\mu > \lambda$ y el hecho de que toda función estrictamente decreciente es en particular decreciente, se obtiene de la relación 3.11 la siguiente desigualdad

$$\frac{p_{1,x}(\lambda) - p_{1,x}(\mu)}{\lambda - \mu} \leq g_{\text{sup}}(x)$$

Por otro lado, la desigualdad $(\mu-\lambda)g(y,x) \leq (\mu-\lambda)g_{\text{sup}}(x)$ implica

$$\frac{p_{1,x}(\lambda)-p_{1,x}(\mu)}{\lambda-\mu} \geq -g_{\text{sup}}(x).$$

Por lo tanto, se verifica que

$$\left|p_{1,x}(\lambda)-p_{1,x}(\mu)\right| \leq g_{\text{sup}}(x)|\lambda-\mu|. \tag{3.12}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, $p_{1,x}$ es Lipschitz continua con constante de Lipschitz $g_{\text{sup}}(x) < \infty$. De manera análoga se verifica que $p_{1,x}$ es Lipschitz continua para $\mu < \lambda$.

Finalmente, de la relación (3.11) obtenemos para un μ dado y $\lambda \to -\infty$ que $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} p_{1,x}(\lambda) = \infty$, y para un λ dado y $\mu \to \infty$ se obtiene $\lim\limits_{\mu\to\infty} p_{1,x}(\mu) = -\infty$ ∎

3.3. Subgradiente de la Función Convexa $p_{1,x}$

Si $\lambda_*(x)$ es finito, se sigue por Lema 3.5 que la función convexa $p_{1,x}$ es de valor finito. Luego, por definición de subgradiente, Capítulo 1 y Teorema 1.3, el sibdiferencial $\partial p_{1,x}(\lambda)$ es no vacío. Por lo tanto, para cada $a \in \partial p_{1,x}(\lambda)$ y $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$p_{1,x}(\mu) \geq p_{1,x}(\lambda) + a(\mu-\lambda).$$

Aplicando (3.11) y el hecho de que $p_{1,x}$ es estrictamente decreciente, obtenemos para $\lambda+1=\mu>\lambda$ que

$$-g_{\text{inf}}(x) \geq p_{1,x}(\lambda+1) - p_{1,x}(\lambda),$$

mientras que, en la desigualdad del subgradiente tenemos

$$p_{1,x}(\lambda+1) - p_{1,x}(\lambda) \geq a,$$

obteniendo así

$$-g_{\text{inf}}(x) \geq p_{1,x}(\lambda+1) - p_{1,x}(\lambda) \geq a$$

para cada $a \in \partial_{p_{1,x}}(\lambda)$. Además, aplicando (3.12) obtenemos para $\lambda - 1 = \mu < \lambda$ que

$$g_{\text{sup}}(x) \geq p_{1,x}(\lambda - 1) - p_{1,x}(\lambda) \geq -a$$

para cada $a \in \partial_{p_{1,x}}(\lambda)$. Por tanto se tiene

$$a \in \partial\, p_{1,x}(\lambda) \subset [-g_{\text{sup}}(x), -g_{\text{inf}}(x)]. \tag{3.13}$$

Para dar una representación más detallada del subdiferencial $\partial\, p_{1,x}\,(\lambda)$ es conveniente suponer que el conjunto $S_{p_1}(\lambda, x)$ dado en (3.6) es no vacío. Como se pudo ver, este conjunto representa el conjunto de soluciones óptimas del problema paramétrico (P^x_λ). Afirmamos que $-g(y, x) \in \partial\, p_{1,x}(\lambda)$ para cada $y \in S_{p_1}(\lambda, x)$. En efecto. Como $y \in S_{p_1}(\lambda, x)$,

$$\begin{aligned} p_1(\mu, x) &= \sup_{y \in A} p(\mu, y, x) \\ &\geq f(y, x) - \mu\, g(y, x) - \lambda\, g(y, x) + \lambda\, g(y, x) \\ &= p(\lambda, y, x) - g(y, x)(\mu - \lambda) \\ &= p_1(\lambda, x) - g(y, x)(\mu - \lambda). \end{aligned}$$

Así, $p_{1,x}(\mu) \geq p_{1,x}(\lambda) - g(y, x)(\mu - \lambda)$. Por tanto $-g(y, x) \in \partial\, p_{1,x}(\lambda)$. Esto implica

$$[-\text{sup}_{y \in S_{p_1}\,(\lambda,x)}\, g(y, x), -\text{inf}_{y \in S_{p_1}\,(\lambda,x)}\, g(y, x)] \subset \partial\, p_{1,x}\,(\lambda). \tag{3.14}$$

LEMA 3.6. *Asumamos que la Condición 2 se cumple. Entonces se tiene para cada $x \in B$ que $\lambda_*(x)$ es finito, $S_{p_1}(\lambda, x)$ es un conjunto compacto no vacío para cada $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times B$ y*

$$\partial\, p_{1,x}(\lambda) = [-\mathit{max}_{y \in S_{p_1}\,(\lambda,x)}\, g(y, x), -\mathit{min}_{y \in S_{p_1}(\lambda,x)}\, g(y, x)].$$

También, para cada $a_\lambda \in \partial\, p_{1,x}(\lambda)$ *y* $a_\mu \in \partial\, p_{1,x}(\mu)$ *y* $\lambda > \mu$ *se cumple que* $0 > a_\lambda \geq a_\mu$.

Demostración. Como las funciones $y \to f(y,x)$ y $y \to g(y,x)$ son continuas, $g > 0$ en $A \times B$ y A es compacto, obtenemos por el comentario después de la Condición 2 que $\lambda_*(x)$ es finito. Además, por el mismo argumento se tiene que $S_{p_1}(\lambda, x)$ es no vacío para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. También, por la continuidad de la función $y \to f(y,x) - \lambda g(y,x)$ el conjunto $S_{p_1}(\lambda, x) \subset A$ es cerrado y por lo tanto compacto. Ahora, para verificar la igualdad del subdiferencial $\partial p_{1,x}(\lambda)$, solo resta verificar la inclusión $\subset$ ya que la otra inclusión se cumple por relación (3.14). En efecto. Siguiendo con las desigualdades dadas en (3.11) y (3.12) obtenemos,

$$-g_{\text{sup}}(x) \leq \frac{p_{1,x}(\mu) - p_{1,x}(\lambda)}{\mu - \lambda} \leq -g_{\text{inf}}(x)$$

para $\mu > \lambda$. Esto es, los elementos del conjunto cerrado $[-g_{\text{sup}}(x), -g_{\text{inf}}(x)]$ son de la forma

$$-k = \frac{p_{1,x}(\mu) - p_{1,x}(\lambda)}{\mu - \lambda} < 0,$$

siendo $-k = -g$ ya que $S_{p_1}(\lambda)$ es compacto. Entonces, $p_{1,x}(\mu) \geq p_{1,x}(\mu)$ implica $p_{1,x}(\mu) \geq p_{1,x}(\lambda) - k(\mu - \lambda)$. Por lo tanto,

$$\partial\, p_{1,x}(\lambda) = [-\text{max}_{y \in S_{p_1}(\lambda,x)}\, g(y,x), -\text{min}_{y \in S_{p_1}(\lambda,x)}\, g(y,x)].$$

Finalmente, observe que $a_\lambda \in \partial\, p_{1,y}(\lambda)$ y $a_\mu \in \partial\, p_{1,x}(\mu)$ implican

$$p_{1,x}(\mu) \geq p_{1,x}(\lambda) + a_\lambda(\mu - \lambda)$$

y

$$p_{1,x}(\lambda) \geq p_{1,x}(\mu) + a_\mu(\lambda - \mu)$$

respectivamente. La adición de estas dos desigualdades nos da

$$0 \geq (a_\mu - a_\lambda)(\lambda - \mu)$$

y puesto que $\lambda > \mu$, se tiene $a_\mu - a_\lambda \leq 0$. ∎

LEMA 3.7. *Asumamos que la Condición 1 se cumple y considere el conjunto* $M = \{\lambda \in \mathbb{R} : p_1(\lambda, x) = 0\}$. *Entonces* M *es diferente del vacío, si y solo si,* $\lambda_*(x) < \infty$. *Además, si* M *es no vacío, únicamente va ha contener al valor finito* $\lambda_*(x)$.

Demostración. Si $M \neq \varnothing$, entonces para cualquier $\lambda \in M$,

$$p_1(\lambda, x) = \sup_{y \in A} p(\lambda, y, x) = 0$$

Es decir, $f(y, x) - \lambda g(y, x) \leq 0$ para todo $y \in A$. Como g es positiva en $A \times B$, $\dfrac{f(y, x)}{g(y, x)} \leq \lambda$. Luego, tomando supremo sobre los $y \in A$ se tiene

$$\lambda_*(x) = \sup_{y \in A} \frac{f(y, x)}{g(y, x)} \leq \lambda.$$

Así, $\lambda_*(x) \leq \lambda < \infty$. Ahora probaremos el recíproco. Por Lema 3.2, si $\lambda_*(x) < \infty$ entonces $p_1(\lambda_*(x), x) = 0$. Por tanto los $\lambda \in M$ son de la forma $\lambda = \lambda_*(x)$. Esto prueba la primera parte. Para comprobar la segunda parte, observe que por Lema 3.5, $p_{1,x}$ es estrictamente decreciente entonces $M = \{\lambda_*(x)\}$. ∎

Hasta ahora no hemos asumido que existe algún $x \in B$ satisfaciendo $\lambda_* = \lambda_*(x)$, es decir, que el *primal*(P) tiene una solución óptima en B.
El siguiente Teorema muestra la implicación de esta suposición. Para ello, considere el conjunto $D_0 \subset \mathbb{R}$ dado por

$$D_0 = \{\lambda \in \mathbb{R} : p_2(\lambda) = 0 \text{ y } S_{p_2}(\lambda) \text{ no vacío}\}$$

TEOREMA 3.3. *Si la Condición 1 se cumple, entonces* $\lambda_* = \lambda_*(x_0) < \infty$ *para algún* $x_0 \in B$, *si y solo si,* $D_0 = \{\lambda_*\}$. *Además, si* $\lambda_* = \lambda_*(x_0) < \infty$ *para algún* $x_0 \in B$, *entonces*

$$S_{p_2}(\lambda_*) = \{x \in B : \lambda_* = \lambda_*(x)\}.$$

Demostración. Por Lema 3.2, existe $x \in B$ tal que $\lambda_* = \lambda_*(x) < \infty$ implica $p_1(\lambda_*, x) = 0$. Además, por Teorema 3.1, $p_2(\lambda_*) \geq 0$ y como $p_1(\lambda_*, x) \geq p_2(\lambda_*)$ tenemos la siguiente relación $0 = p_1(\lambda_*, x) \geq p_2(\lambda_*) \geq 0$ y por tanto

$$0 = p_1(\lambda_*, x) = p_2(\lambda_*) \tag{3.15}$$

Usando la última igualdad, con x reemplazado por x_0 se tiene para $\lambda_* = \lambda_*(x_0) < \infty$ que $\lambda_* \in D_0$. Para probar la unicidad, considere arbitrariamente $\lambda \in D_0$. Por la definición de D_0, podemos encontrar un $x_0 \in B$ tal que

$$0 = p_2(\lambda) = p_1(\lambda, x_0)$$

y esto implica, por la segunda parte del Lema 3.7 que $\lambda_*(x_0) = \lambda$. Dado que $p_2(\lambda) = 0$ se tiene por Teorema 3.1 que $\lambda \leq \lambda_*$ lo cual muestra que

$$\lambda_*(x_0) = \lambda \leq \lambda_* \leq \lambda_*(x_0)$$

Luego, $\lambda = \lambda_*$. Esto prueba que D_0 es unitario.
Para probar el recíproco considere $D_0 = \{\lambda_*\}$. Entonces, si $\lambda_* \in D_0$, $0 = p_2(\lambda_*) = p_1(\lambda_*, x_0)$ para algún $x_0 \in B$. Aplicando ahora Lema 3.7 se obtiene $\lambda_*(x_0) < \infty$ con $\lambda_* = \lambda_\star(x_0)$ lo que completa la primera parte.
Finalmente, para verificar la segunda parte, considere $N = \{x \in B : \lambda_* = \lambda_*(x)\}$. Entonces probaremos $N \subset S_{p_2}(\lambda_*)$ y $S_{p_2}(\lambda_*) \subset N$. En efecto, para cada $x \in N$ se tiene $\lambda_* = \lambda_*(x) < \infty$ lo que implica por relación (3.15) que $0 = p_1(\lambda_*, x) = p_2(\lambda_*)$. Esto muestra que $x \in S_{p_2}(\lambda_*)$. Para probar la otra incusión, sea $x \in S_{p_2}(\lambda_*)$. Como $\lambda_* = \lambda_*(x_0) < \infty$ para algún $x_0 \in B$, se tiene por relación (3.15) con x reemplazado con x_0 que $p_2(\lambda_*) = 0$. Como $x \in S_{p_2}(\lambda_*)$, esto implica que $p_1(\lambda_*, x) = p_2(\lambda_*) = 0$. Aplicando ahora 3.7 obtenemos $\lambda_* = \lambda_*(x)$, y así $x \in N$ lo que verifica la segunda inclusión. ∎

Capítulo 4

Algoritmo Primal Tipo Dinkelbach

En este Capítulo vamos ha introducir el Algoritmo primal tipo Dinkelbach para resolver el programa fraccional min-max (*primal*), para ello usaremos las propiedades estudiadas en el Capítulo 3 para mostrar su convergencia. Además, como ya lo mencionamos en el Capítulo 2, no asumiremos que el *primal* tenga una solución óptima.

4.1. Algoritmo Primal

Usando el Lema 3.1 y el hecho de que el primal algoritmo tipo Dinkelbach se basa en la solución de una sucesión de problemas de optimización paramétrica (P_λ) para $\lambda \geq \lambda_*$, es natural suponer que el primal satisface la siguiente condición.

Condición 3

- La Condición 1 se cumple y $\lambda_*(x)$ es finito para cada $x \in B$.
- Si λ_* es finito, entonces para todo $\lambda \geq \lambda_*$ el conjunto $S_{p_2}(\lambda)$ es no vacío, mientras que para $\lambda_* = -\infty$ el conjunto $S_{p_2}(\lambda)$ es no vacío para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Algoritmo

1. Seleccionamos $x_0 \in B$ y $k := 1$ y calculamos

$$\lambda_k := \lambda_*(x_0)$$

2. Determinar $x_k \in S_{p_2}(\lambda_k)$. Si $p_1(\lambda_k, x_k) \geq 0$ parar y volver a λ_k y x_k. De lo contrario calcular

$$\lambda_{k+1} := \lambda_*(x_k)$$

Sea $k := k + 1$ y repetir el paso 1.

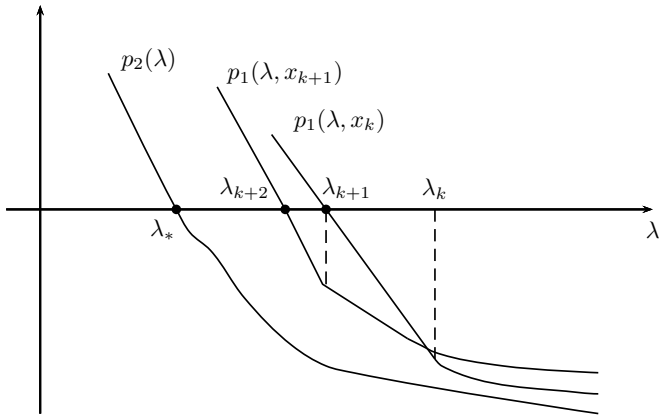

Figura 2.

La interpretación geométrica de este algoritmo es ilustrado en la Figura 2. Por Teorema 3.3 tenemos que encontrar el punto cero λ_* de la función p_2. A partir de un punto dado $\lambda > \lambda_*$ se tiene por Teorema 3.1 que $p_2(\lambda) < 0$. Como la función p_2 no es convexa y es demasiado ambicioso para calcular en un sólo paso su punto cero λ_*, se reemplaza esta función por la función convexa más fácil $p_{1,x}(.)$ con x perteneciente a $S_{p_2}(\lambda)$. Sabemos por la definición de $p_{1,x}$ y $S_{p_2}(\lambda)$ que $p_2(\lambda) = p_{1,x}(\lambda)$ y $p_{1,x}(.) \geq p_2(.)$. Para la función $p_{1,x}(.)$, es fácil de calcular

su punto cero. Por Lema 3.2 esto es dado por $\lambda_*(x)$. Ahora reemplazamos el punto original λ en el problema paramétrico (P_λ) por el valor más pequeño $\lambda_*(x) \geq \lambda_*$. Por el Lema 3.7 es suficiente encontrar en el paso 2 del algoritmo primal tipo Dinkelbacht la solución de la ecuaciónn $p_1(\lambda, x_k) = 0$.

Para ilustrar este algoritmo consideremos el siguiente ejemplo numérico.

EJEMPLO 4.1. Resolver el siguiente problema.

$$\operatorname*{ínf}_{x\in[0,10]} \sup_{1\leq i\leq 3} \frac{f_i(x)}{g_i(x)} \tag{4.1}$$

donde

$$f_1 = \frac{-7x+1}{4x+1}, \quad f_2 = \frac{-11x+1}{2x+2} \quad \text{y} \quad f_3 = \frac{3x-2}{16x+3}$$

Verifiquemos en primer lugar que este problema satisface con todas las condiciones referidas para aplicar el algoritmo precedente.

1. El conjunto admisible B de este problema es un intervalo cerrado, acotado y no vacío.

2. Debido a que la función objetivo del problema (P_λ) es lineal (y por lo tanto continua) y el conjunto admisible B es compacto no vacío, entonces se deduce:

   $a)$ El conjunto solución de (P_λ) es no vacío.

   $b)$ $p_2(\lambda)$ es finito.

   $c)$ Por relación (3.2), p_1 es estrictamente decreciente.

Ahora estamos en condiciones de aplicar el algoritmo:

Paso 1: Consideremos $x_0 = 1$, entonces

$$\lambda_1 = \lambda_*(1) = \frac{1}{19}$$

Paso 2: Para $\lambda_1 = \dfrac{1}{19} = 0,05263$, el problema (P_{λ_1}) es

$$\inf_{[0,10]} \sup_{1\leq i\leq 3} \left\{ -\frac{211}{19}x + \frac{17}{19}, -\frac{137}{19}x + \frac{37}{19}, \frac{41}{19}x - \frac{41}{19} \right\}$$

cuya solucón óptima es $x_1 = \dfrac{39}{89}$. En este caso, $p(\lambda_1, x_1) = -1{,}21$.
Debido a que este valor es negativo, continuamos el algoritmo.
Sea

$$\lambda_2 = \lambda_*(39/89) = -0{,}068.$$

Observamos que, $\lambda_2 \leq \lambda_1$. Lo que nos interesa realmente en este algoritmo es una sucesión decreciente de valores λ_k.

4.2. Resultados de Convergencia

A contninuación exponemos la sucesión generada por el algoritmo primal tipo Dinkelbach y los resultados de convergencia para tal sucesión.

LEMA 4.1. *Si la Condición 3 se cumple, entonces la sucesión λ_k generada por el algoritmo primal tipo Dinkelbach es estrictamente decreciente y satisface $\lambda_k \geq \lambda_* \geq -\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que para algún $x_0 \in B$ el algoritmo se detiene en $k = 1$, esto es, $\lambda_1 = \lambda_*(x_0)$ y por la regla de parada sabemos que $p_2(\lambda_1) \geq 0$. Esto implica por Teorema 3.1 que $\lambda_1 \leq \lambda_*$. Como $\lambda_* \leq \lambda_1$, se tiene $\lambda_* = \lambda_*(x_0)$. Si el Algoritmo no se detiene en el primer paso, entonces $p_2(\lambda_1) < 0$. Como $S_{p_2}(\lambda_1)$ es no vacío, podemos encontrar por el paso 2 del algoritmo un $x_1 \in S_{p_2}(\lambda_1)$. Luego,

$$0 > p_2(\lambda_1) = p_1(\lambda_1, x_1) = \sup_{y\in A} p(\lambda_1, y, x). \tag{4.2}$$

De esta manera para todo $y \in A$ obtenemos $f(y, x_1) - \lambda_1 g(y, x_1) < 0$ y así

$$\frac{f(y, x_1)}{g(y, x_1)} < \lambda_1.$$

Aplicando supremo para cada $y \in A$ tenemos

$$\lambda_*(x_1) = \sup_{y \in A} \frac{f(y, x_1)}{g(y, x_1)} \leq \lambda_1.$$

Tomando $\lambda_*(x_1) = \lambda_2$, lo siguiente siempre se cumple $\lambda_*(x_1) = \lambda_2 < \lambda_1$. Para verificar lo último, probaremos por contradicción. Supongamos que $\lambda_*(x_1) = \lambda_1$. Dado que $x_1 \in S_{p_2}(\lambda_1)$ se tiene por relación (4.2) y Lema 3.7 que

$$0 > p_2(\lambda_1) = p_1(\lambda_1, x_1) = p_1(\lambda_*(x_1), x_1) = 0$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\lambda_2 < \lambda_1$, y por la definición de λ_2 es evidente que $\lambda_* \leq \lambda_2$. Aplicando el mismo argumento iterativamente se muestra que $\lambda_k \geq \lambda_* \geq -\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ∎

Observación 4.1. Por Lema 4.1, la sucesión λ_k generada por el Algoritmo primal tipo Dinkelbach converge siempre para algún límite, digamos w. Así, $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = w \geq -\infty$.

En caso la sucesión generada sea finita, se tiene el siguiente Lema.

LEMA 4.2. *Si la Condición 3 se cumple y el algoritmo primal tipo Dinkelbach se detiene en λ_n, entonces $\lambda_* = \lambda_n = \lambda_{n+1}$ y $p_2(\lambda_n) = 0$.*

Demostración. Como la Condición 3 se cumple, Obtenemos $\lambda_* < \infty$. También, por paso 2 del algoritmo tipo se sigue que $p_2(\lambda_n) \geq 0$. Esto implica por Teorema 3.1 que $\lambda_n \leq \lambda_*$. Además, como $\lambda_* \leq \lambda_n$ siempre se cumple, obtenemos $\lambda_n = \lambda_*$. Usando $x_n \in S_{p_2}(\lambda_n)$ y el hecho de que $\lambda_n := \lambda_*(x_{n-1})$ tenemos

$$0 \leq p_2(\lambda_n) = p_1(\lambda_n, x_n) \leq p_1(\lambda_n, x_{n-1}) = 0.$$

De donde se tiene que

$$p_2(\lambda_n) = p_1(\lambda_n, x_n) = 0.$$

Aplicando ahora Lema 3.7 se tiene

$$\lambda_{n+1} := \lambda_*(x_n) = \lambda_n.$$

Por lo tanto, esto completa la prueba. ∎

En lo que resta de esta sección sólo consideraremos el caso donde el algoritmo primal tipo Dinkelbach genera una sucesión infinita λ_k.

A continuación impondremos en el siguiente Lema una condición adicional para garantizar que el límite de la sucesión λ_k es igual a λ_*. Para simplificar la notación en los siguientes lemas introducimos para la sucesión $\{(\lambda_k, x_k) \in \mathbb{R} \times B : x_k \in S_{p_2}(\lambda_k)\}$ generada por el algoritmo primal tipo Dinkelbach, la suceión $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ con

$$a_k \in \partial p_{1,x_k}(\lambda_{k+1})$$

y para λ_* finito, la sucesión $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ con

$$b_k \in \partial p_{1,x_k}(\lambda_*).$$

Por el comentario al inicio de la Sección 3.3, Capítulo 3, estos conjuntos subgradientes son no vaciós. Ahora es posible mostrar el siguiente resultado.

LEMA 4.3. *Si la Condición 3 se cumple y existe una subsucesión* $\{a_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ *tal que* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^{-1} = -\infty$*, entonces* $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_*$*. Además, para* λ_* *finito se tiene que* $\lim_{k\to\infty} p_2(\lambda_k) = 0 \leq p_2(\lambda_*)$.

Demostración. Por Lema 4.1, la sucesión $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ es estrictamente decreciente con $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = w \geq -\infty$. Si $w = -\infty$, obtenemos usando $\lambda_k \geq \lambda_*$ para cada $k \in \mathbb{N}$ que

$$\lambda_* \leq w = -\infty.$$

Esto muestra que $\lambda_* = -\infty$ y así, $\lim_{k\to\infty} \lambda_n = \lambda_*$. Ahora, considerando w finito y suponiendo que el algoritmo no se detiene en λ_k, obtenemos

$$p_2(\lambda_k) = p_1(\lambda_k, x_k) < 0.$$

Además, como la función p_2 es decreciente y la sucesión $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ generada por el algoritmo primal tipo Dinkelbach es en particular decreciente, se tiene que

la sucesión $\{p_1(\lambda_k, x_k) : k \in \mathbb{N}\}$ es creciente y

$$-\infty < \alpha := \lim_{k\to\infty} p_1(\lambda_k, x_k) \leq 0$$

existe. Si asumimos $\alpha < 0$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ con $p_1(\lambda_k, x_k) < 0$ podemos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que $p_1(\lambda_k, x_k) \leq -\epsilon$. Aplicando la desigualdad del subgradiente para la función convexa p_{1,x_k} obtenemos para todo $k \in \mathbb{N}$ que

$$a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \leq p_1(\lambda_k, x_k) - p_1(\lambda_{k+1}, x_k) \tag{4.3}$$

con $a_k \in \partial p_{1,x_k}(\lambda_{k+1})$. Ahora por Lema 3.2 tenemos para $\lambda_{k+1} := \lambda_*(x_k)$ que

$$p_1(\lambda_{k+1}, x_k) = p_1(\lambda_*(x_k), x_k) = 0.$$

y por tanto la desigualdad dada en 4.3 resulta

$$a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \leq p_1(\lambda_k, x_k) \leq -\epsilon.$$

Como $-\infty < a_k < 0$, $\lambda_k - \lambda_{k+1} \geq -\epsilon a_k^{-1}$. Observe que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = \lambda_1 - \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_1 - w$$

pues w es finito, entonces

$$\lambda_1 - w \geq -\epsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-1} \geq -\epsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^{-1} = \infty$$

implica $w = -\infty$, lo cual es una contradicción con el hecho de suponer que w es finito. Así, $\alpha = 0$ y por tanto $\lim_{k\to\infty} p_2(\lambda_k) = 0$. Por Teorema 3.2, p_2 es semicontinua superiormente, esto es,

$$p_2(w) \geq \lim_{k\to\infty} \sup p_2(\lambda_k) = 0. \tag{4.4}$$

Por Teorema 3.1 se obtiene que $w \leq \lambda_*$, y como por Lema 4.1, $w = \lim_{k\to\infty} \lambda_k \geq \lambda_*$, se concluye que $w = \lambda_*$. Así, la relación 4.4 queda expresada como

$$p_2(\lambda_*) \geq 0 = \lim_{k\to\infty} p_2(\lambda_k).$$

∎

Observación 4.2. Por relación (3.13) se tiene que

$$0 > a_k \geq -g_{\sup}(x_k)$$

Para todo $a_k \in \partial_{1,x_k}(\lambda_{k+1})$, y así se puede aplicar el Lema 4.3 en caso $\sum_{k=1}^{\infty} g_{\sup}(x_{n_k})^{-1} = \infty$

4.3. Existencia de una solución óptima

Para lograr un resultado de tasa de convergencia para la sucesión λ_k generada por algoritmo primal tipo Dinkelbach, debemos suponer en la prueba que $p_2(\lambda_*) = 0$. Para aplicar nuestro procedimiento siempre impondremos que $S_{p_2}(\lambda_*)$ es no vacío para λ_* finito. Luego, por Teorema 3.3 se deduce que $p_2(\lambda_*) = 0$ si y sólo si el *primal* tiene una solución óptima en B o equivalentemente existe algún $x_0 \in B$ tal que $\lambda_* = \lambda_*(x_0)$. Sin embargo, si la condición del Lema 4.3 se cumple, suponemos para λ_* finito que el *primal* podría no tener una solución óptima en B, y así $p_2(\lambda_*)$ no es igual a cero. Usando una condición más fuerte que en el Lema 4.3, mostramos en el Lema siguiente para λ_* finito que la sucesión $\{p_2(\lambda_k) : k \in \mathbb{N}\}$ generada por el algoritmo primal tipo Dinkelbach cumple $\lim_{k\to\infty} p_2(\lambda_k) = p_2(\lambda_*) = 0$. Esta condición suficiente implica la existencia de una solución óptima para el *primal* en B.

LEMA 4.4. *Si la Condición 3 se cumple, λ_* es finito y existe una subsucesión $\{b_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ satisfaciendo $\inf_{k\in\mathbb{N}} b_{n_k} > -\infty$, entonces $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_*$ y $\lim_{k\to\infty} p_2(\lambda_k) = 0 = p_2(\lambda_*)$.*

Demostración. Por la convexidad de la función p_{1,x_k} y la desigualdad del subgradiente obtenemos para todo $k \in \mathbb{N}$ que

$$p_1(\lambda_k, x_k) \geq p_1(\lambda_*, x_k) + b_k(\lambda_k - \lambda_*) \geq p_2(\lambda_*) + b_k(\lambda_k - \lambda_*)$$

con $b_k \in \partial p_{1,x_k}(\lambda_*)$. Suponiendo que el algoritmo no se detiene en λ_k, la última cadena de desigualdades resulta

$$0 > p_2(\lambda_k) \geq p_2(\lambda_*) + b_k(\lambda_k - \lambda_*). \tag{4.5}$$

Como $\lambda_{k+1} > \lambda_*$, se tiene por nuestras hipótesis y la monoticidad de los conjuntos subgradiente como muestra el Lema 3.6 que podemos encontrar un $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$M \leq b_{n_k} \leq a_{n_k} < 0.$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y para toda subsucesión $\{a_{n_k} \subset a_k : k \in \mathbb{N}\}$ con $a_{n_k} \in \partial p_{1,x_k}(\lambda_{k+1})$. Esto muestra

$$a_{n_k}^{-1} \leq b_{n_k}^{-1} \leq M^{-1} < 0.$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, y así, la desigualdad $a_{n_k}^{-1} \leq M^{-1} < 0$ implica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^{-1} = -\infty$. Luego, por Lema 4.3 se tiene $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_*$. Tomando límite $\lambda_k \to \infty$ en (4.5) se obtiene

$$0 \geq \lim_{k\to\infty} p_2(\lambda_k) \geq p_2(\lambda_*).$$

Como por Teorema 3.1 sabemos que $p_2(\lambda_*) \geq 0$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} p_2(\lambda_k) = 0 = p_2(\lambda_*).$$

Esto concluye la demostración. ∎

Observación 4.3. Por relación (3.13) se tiene en caso $\sup_{k\in\mathbb{N}} g_{\sup}(x_k) < \infty$ que la condición del Lema 4.4 se cumple.

En el siguiente Lema consideramos la sucesión generada $\{x_k : x_k \in S_{p_2}(\lambda_k)\}$ y mostramos para B compacto y algunas propiedades topológicas sobre las funciones f y g que esta sucesión contiene una subsucesión convergente.

LEMA 4.5. *Si la Condición 3 se cumple, las funciones f y g son continuas y de valor finito en algún conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ conteniendo $A \times B$, el conjunto B es compacto y existe una subsucesión $\{a_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ satisfaciendo $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^{-1} = -\infty$, entonces*

i) La sucesión $\{x_k : x_k \in S_{p_2}(\lambda_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tiene una subsucesión convergente y cada punto límite* x_∞ *de la sucesión* $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ *satisface* $\lambda_* = \lambda_*(x_\infty)$ *con* λ_* *finito. Adicionalmente,*

ii) Si existe un único $x_* \in B$ *satisfaciendo* $\lambda_* = \lambda_\star(x_*)$*, entonces* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$.

Además, para $A \times B$ *compacto, la sucesión* $\{(y_k, x_k) : (y_k, x_k) \in S_{p_2}(\lambda_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *generada por el algoritmo primal tipo Dinkelbach tiene una subsucesión convergente y cada punto límite de la sucesión* $\{(y_k, x_k) : k \in \mathbb{N}\}$ *es una solución óptima del primal. Si el primal tiene una única solución óptima* $(y_\star, x_*)$*, entonces* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$ *y* $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_*$.

Demostración. i) Para verificar que λ_* es finito obtenemos por Condición 4 y f, g continuas que la función de valor finito $x \to \lambda_*(x)$ es semicontinua inferiormente. Por la compacidad de B esto implica, usando Corolario 12 de [1], que existe algún $x \in B$ satisfaciendo $\lambda_* = \lambda_*(x)$ y así λ_* es finito. Nuevamente por la compacidad de B, la sucesión $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ contiene una subsucesión convergente. Para verificar que cada punto límite x_∞ de la sucesión $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ satisface $\lambda_* = \lambda_*(x_\infty)$, observamos por Lema 4.3 que $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_*$. Esto implica por Lema 3.4 que $x_\infty \in S_{p_2}(\lambda_*)$ y por Teorema 3.3 obtenemos $\lambda_* = \lambda_*(x_\infty)$.
ii) Supongamos $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \neq x_*$ y que existe un $x_* \in B$ tal que $\lambda_* = \lambda_*(x)$. Entonces nuevamente por Teorema 3.3 se obtiene $S_{p_2}(\lambda_*) = \{x_*\}$. Como toda subsucesión convergente de la sucesión $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ converge a un elemento de $S_{p_2}(\lambda_*)$, se tiene que toda subsucesión convergente converge al elemento x_*, lo cual es una contradicción con suponer que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \neq x_*$. Por tanto $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$. Esto completa la prueba de la primera parte.

Finalmente si $A \times B$ es compacto, la sucesión $\{(y_k, x_k) : k \in \mathbb{N}\}$ posee una subsucesión convergente. Considere (y_∞, x_∞) punto límite de la sucesión $\{(y_k, x_k) : k \in \mathbb{N}\}$ y como por Lema 4.3, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_*$. Entonces por Lema 3.4, $(y_\infty, x_\infty) \in$

$S_p(\lambda_*)$ y por Teorema **??** obtenemos $\lambda_* = \lambda_*(x_\infty) = \dfrac{f(y_\infty, x_\infty)}{g(y_\infty, x_\infty)}$. De manera análoga como en la primera parte, suponer $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \neq x_*$ y que existe $(y_*, x_*) \in A \times B$ talque $\lambda_* = \lambda_*(x_\infty) = \dfrac{f(y_\infty, x_\infty)}{g(y_\infty, x_\infty)}$. Entonces por Teorema **??** se obtiene $S_p(\lambda_*) = \{(y_*, x_*)\}$. Como toda subsucesión convergente de la sucesión $\{(y_k, x_k) : k \in \mathbb{N}\}$ converge a un elemento de $S_p(\lambda_*)$, se tiene que toda subsucesión convergente converge al elemento (y_*, x_*), lo cual es una contradicción con suponer que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \neq x_*$. ∎

4.4. Ratio de Convergencia de la Sucesión λ_k

Ahora queremos investigar que tan rápido la sucesión λ_k converge a λ_*. Antes de discutir esto en detalle, mostramos para λ_* finito una desigualdad para los elementos de la sucesión $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ generada por el algoritmo primal tipo Dinkelbach.

TEOREMA 4.1. *Si asumimos que la Condición 3 se cumple y existe algún $x \in B$ satisfaciendo $\lambda_* = \lambda_*(x)$, entonces se tiene para cada $c_k \in \partial\, p_{1,x}(\lambda_k)$ y $a_k \in \partial\, p_{1,x_k}(\lambda_{k+1})$ la siguiente desigualdad*

$$0 \leq \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_*}{\lambda_k - \lambda_*} \leq (1 - c_k a_k^{-1})$$

Demostración. Como $\lambda_* = \lambda_*(x)$ para algún $x \in B$, se obtiene por Lema 3.7 que

$$p_1(\lambda_*, x) = p_1(\lambda_*(x), x) = 0.$$

Aplicando ahora la desigualdad subgradiente a la función $p_{1,x}$ en el punto λ_* se tiene para $c_k \in \partial p_{1,x}(\lambda_k)$ que

$$-p_1(\lambda_k, x) = p_1(\lambda_*, x) - p_1(\lambda_k, x) \geq c_k(\lambda_* - \lambda_k).$$

Luego,

$$p_2(\lambda_k) \leq p_1(\lambda_k, x) \leq c_k(\lambda_k - \lambda_*).$$

Además, para cada $x_k \in S_{p_2}(\lambda_k)$ y suponiendo que el algoritmo no se detiene en el paso λ_k, esto es, $\lambda_{k+1} = \lambda_*(x_k)$, se obtiene nuevamente por el Lema 3.7 que $p_1(\lambda_{k+1}, x_k) = 0$. Aplicando ahora la desigualdad subgradiente a la función $p_{1,x}$ en el punto λ_{k+1} tenemos para $a_k \in \partial\, p_{1,x_k}(\lambda_{k+1})$ que

$$p_2(\lambda_k) = p_1(\lambda_k, x_k) - p_1(\lambda_{k+1}, x_k) \geq a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}).$$

De las dos últimas desigualdades obtenemos

$$-a_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \leq p_2(\lambda_k) \leq c_k(\lambda_k - \lambda_*)$$

y puesto que $-\infty < a_k < 0$, esto implica

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq -c_k a_k^{-1}(\lambda_k - \lambda_*).$$

Usando la última desigualdad se tiene que

$$\lambda_{k+1} - \lambda_* = \lambda_k - \lambda_* + \lambda_{k+1} - \lambda_k \leq (1 - c_k a_k^{-1}).(\lambda_k - \lambda_*).$$

Así,

$$0 \leq \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_*}{\lambda_k - \lambda_*} \leq (1 - c_k a_k^{-1})$$

∎

Observación 4.4. En el caso del programa fraccional (P_1), la función $\lambda \to p_{1,x}(\lambda)$ se reduce a $p_{1,x}(\lambda) = f(x) - \lambda g(x)$, y así para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $\partial p_{1,x}(\lambda) = \{-g(x)\}$. Luego, la desigualdad del Teorema 4.1 se expresa como

$$0 \leq \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_*}{\lambda_k - \lambda_*} \leq \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x_k)}\right). \tag{4.6}$$

Para los resultados de convergencia del Algoritmo primal tipo Dinkelbach, necesitamos las definiciones de ratio de convergencia dadas en el Capítulo 1..

TEOREMA 4.2. *Si la Condición 3 se cumple, λ_* es finito y la sucesión $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ satisface $\inf_{k\in\mathbb{N}} b_k > -\infty$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_*$ y $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ converge linealmente.*

Demostración. Por Lema 4.4 obtenemos $p_2(\lambda_*) = 0$. Dado que la Condición 5 se cumple, podemos encontrar algún $x \in B$ tal que

$$0 = p_2(\lambda_*) = p_1(\lambda_*, x).$$

Esto muestra por Lema 3.7 que $\lambda_* = \lambda_*(x)$. Luego, el conjunto $\{x \in B : \lambda_* = \lambda_*(x)\}$ es no vacío, y para todo x perteneciendo a este conjunto se tiene por Teorema 4.1 que

$$0 \leq \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_*}{\lambda_k - \lambda_*} \leq (1 - c_k a_k^{-1}) \tag{4.7}$$

con $c_k \in \partial_{p_{1,x}}(\lambda_k)$ y $a_k \in \partial_{p_{1,x_k}}(\lambda_{k+1})$. Como $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ es estrictamente decreciente y $\lambda_k > \lambda_*$. Se sigue por Lema 3.6 que la sucesión $\{c_k : k \in \mathbb{N}\}$ es decreciente y satisface $0 > c_k \geq \tau$ con $\tau = \text{máx}\{t : t \in \partial p_{1,x}(\lambda_*)\}$. Afirmamos que $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = c_\infty$ existe. Para identificar c_∞, en vista de $c_k \in \partial p_{1,x}(\lambda_k)$ observamos que:

$$p_1(\lambda, x) \geq p_1(\lambda_k, x) + c_k(\lambda - \lambda_k)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado que la función es continua y usando $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_*$ y $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = c_\infty$ se tiene la siguiente desigualdad

$$p_1(\lambda, x) \geq p_1(\lambda_*, x) + c_\infty(\lambda - \lambda_*)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y así $c_\infty \in \partial p_{1,x}(\lambda_*)$ con $c_\infty \leq \tau$, descartamos $c_\infty < \tau$, pues $\lim\limits_{k\to} c_k = c_\infty < \tau$ implica $c_k < \tau$. Esto contradice el hecho que $c_k \geq \tau$. Por tanto $c_\infty = \tau$, de modo tal que hemos identificado dicho límite. También, por hipótesis existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $-\infty < M \leq b_k \leq a_k$, y esto muestra

$$\lim_{k\to\infty} \sup(1 - c_k a_k^{-1}) \leq 1 - \frac{\tau}{M} < 1.$$

Aplicando la relación (4.7) obtenemos el resultado deseado. ∎

El siguiente Teorema muestra como la sucesión λ_k converge superlinealmente, para ello asumamos que el *primal* tiene una única solución óptima y que además, algunas propiedades topológicas se cumplen en los conjuntos factibles A, B.

TEOREMA 4.3. *Si la Condición 3 se cumple, las funciónes f y g son continuas sobre algún conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ conteniendo al conjunto compacto $A \times B$ y el programa fraccional min-max (P) tiene una única solución (y_*, x_*), entonces $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$, $\lim_{k\to\infty} y_k = y_*$ y $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_*$ y la sucesión converge superlinealmente.*

Demostración. Usando los Lemas 4.3 y 4.5 se tiene la primera parte, por lo que sólo se tiene que verificar que λ_k converge superlinealmente. Teniendo en cuenta la prueba del Teorema 4.2 se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \sup(1 - c_k a_k^{-1}) = 1 - \tau \left(\lim_{k\to\infty} \sup a_k \right)^{-1}$$

con $\tau := \text{máx}\{t : t \in \partial p_{1,x_*}(\lambda_*)\}$ y $a_k \in \partial p_{1,x_k}(\lambda_{k+1}), k \in \mathbb{N}$. Por tanto es suficiente probar que $\lim_{k\to\infty} \sup a_k = \tau$. Como a_k es uniformemente acotada por la compacidad de $A \times B$ y la función g es continua, existe una subsucesión convergente a_{n_k} que satisface

$$a_\infty = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \sup a_k.$$

Para identificar a_∞ observemos para cada $k \in \mathbb{N}$ que

$$p_1(\lambda, x_k) \geq p_1(\lambda, x_k) - p_1(\lambda_{k+1}, x_k) \geq a_k(\lambda - \lambda_{k+1})$$

con $a_k \in \partial p_{1,x_k}(\lambda_{k+1})$. Además, como B es compacto y p continua, se obtiene por Proposición 1.7 [1] que $x \to p_1(\lambda, x)$ es semicontinua superiormente, lo que implica por la última desigualdad que

$$p_1(\lambda, x_*) \geq \lim_{k\to\infty} \sup p_1(\lambda, x_k) \geq a_\infty(\lambda - \lambda_*) \tag{4.8}$$

Como que $x_* \in S_{p_2}(\lambda_*)$, obtenemos $p_1(\lambda_*, x_*) = p_2(\lambda_*) = 0$. Así, la relación (4.8) la podemos expresar como

$$p_1(\lambda, x_*) \geq p_1(\lambda_*, x_*) + a_\infty(\lambda - \lambda_*).$$

Esto es, $a_\infty \in \partial p_{1,x_*}(\lambda_*)$ con $a_\infty \leq \tau$, descartamos $a_\infty < \tau$, pues $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_\infty < \tau$ implica $a_{n_k} < \tau$, esto contradice el hecho de que $0 > a_k \geq \tau$. Por lo tanto $a_\infty = \tau$ ∎

En caso consideremos el programa fraccional (P_1) con B compacto y las funciones f, g continuas obtenemos por Lema 4.5 en (4.6) que

$$\lim_{k\to\infty} \sup g(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_{n_k}) = g(x_*)$$

con x_* una solución óptima de este problema de programación fraccional. Luego, reemplazando en (4.6) x_0 por x_* se obtiene para el programa fraccional (P_1) con B compacto y f, g continuas que la sucesión $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ siempre converge superlinealmente.

Terminamos este Capítulo mostrando una regla de parada práctica para el primal Algoritmo tipo Dinkelbach, teniendo en cuenta que en la práctica dicho Algoritmo se detiene en un número finito de pasos.

LEMA 4.6. *Si asumimos la Condición 3 y existe alguna subsucesión* $\{a_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ *satisfaciendo* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^{-1} = -\infty$ *y algún* $x \in B$ *con* $\lambda_* = \lambda_*(x)$*, entonces la sucesión* $\{c_k^{-1} p_2(\lambda_k) : c_k \in \partial p_{1,x}(\lambda_*)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es decreciente y su límite es igual a cero. Además, se tiene para cada* $k \in \mathbb{N}$ *que*

$$\lambda_* \leq \lambda_k \leq \lambda_* + c_k^{-1} p_2(\lambda_k)$$

Demostración. Por Lema 4.1 la sucesión $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente, y esto implica por Lema 3.6 que la suceción negativa $\{c_k\}$ es decreciente. Además p_2 es decreciente, obtenemos que la sucesión negativa $p_2(\lambda_k)$ es creciente y así la sucesión positiva $\{c_k^{-1} p_2(\lambda_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Aplicando Lema 4.3 y $\lim_{k\to\infty} c_k = \tau$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} c_k^{-1} p_2(\lambda_k) = 0$$

Por otro lado, como $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente con $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_*$ y el hecho de que

$$p_2(\lambda_k) \leq p_1(\lambda_k, x) \leq c_k(\lambda_k - \lambda_*)$$

se tiene

$$\lambda_* \leq \lambda_k \leq \lambda_* + c_k^{-1} p_2(\lambda_k).$$

∎

El siguiente ejemplo muestra claramente un problema de programación fraccional aplicado a la economía, basado en el artículo *A fast algorithm for a class of generalized fractional programs. Management Science* de Gugat (1996).

EJEMPLO 4.2. Un consumidor tiene intención de comprar una canasta de n bienes con funciones de valor $u_i : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Las funciones u_i asociada a cada uno de los bienes son cóncavas para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Definimos la siguiente función que tiene la forma aditiva

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(x_i).$$

Desafortunadamente, el tomador de decisiones no está seguro sobre los factores de ponderación k_i. Solo puede dar intervalos $[\underline{k_i}, \overline{k_i}]$ que contienen a k_i. Dado que es cauteloso, usa la funcón utilidad

$$U(x_1, \cdots, x_n) = \operatorname*{mín}_{k \in K} \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(x_i),$$

donde K es el conjunto convexo de posibles factores de ponderación, por ejemplo

$$K = \{(k_i, \ldots, k_n) : \sum\nolimits_{i=1}^{n} k_i = 1, k_i \in [\underline{k_i}, \overline{k_i}], i = 1, \ldots, n-1, k_n \geq 0\}.$$

El vector $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$, de materias primas, debe satisfacer la restricción presupuestaria $p^T x \leq B$, donde p es el capital invertido y B es lo que el consumidor está dispuesto a gastar

El consumidor tiene intención de invertir al menos el capital $b \leq B$. Así, la desigualdad $b \leq p^T x \leq B$ se debe cumplir. Supongamos que al menos una de las funciones u_i es estrictamente creciente. Luego, para una utilidad que maximiza la

canasta de bienes, el capital B está siempre activo. Como no tiene la intención de gastar todo el presupuesto B en todos los casos, se maximiza la razón de utilidad y costo. Por tanto, adquiere una canasta de bienes tal que la utilidad por unidad de capital invertido es máxima. El resto del capital se guarda para el consumo futuro. Si $b = B$, el problema se reduce al problema de maximización de la utilidad bajo la restricción presupuestaria.

La elección del consumidor (que maximiza la relación de utilidad y costo) también maximiza la utilidad en la restricción presupuestaria, donde B se sustituye por el capital B_I que es realmente invertido. Por lo tanto otra vista del problema es considerar el presupuesto como un parámetro: Nuestro problema fraccional es equivalente a encontrar una selección de B_I (en el intervalo $[b, B]$), tal que para una canasta de bienes que maximiza la utilidad bajo la restricción $p^T x \leq B_I$, la utilidad por unidad de capital invertido es óptima.

Hay más restricciones: por lo menos es necesario una cantidad β_i del i-ésimo bien. Esta es modelizado por las restricciones $x_i \geq \beta_i \geq 0\,(i = 1, \ldots, n)$ donde el vector β satisface la desigualdad $0 < p^T \beta \leq B$.

La formulación matemática del problema es

$$-\lambda_* := \operatorname*{máx}_{x \in S} \operatorname*{mín}_{k \in K} \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i\, u_i(x_i)}{p^T x},$$

donde $S = \{x \in \mathbb{R}^n : b \leq p^T x \leq B,\, \beta_i \leq x_i \leq B/p_i,\, i = 1, \ldots, n\}$ o equivalentemente transformamos el problema en:

$$\lambda_* := \operatorname*{mín}_{x \in S} \operatorname*{máx}_{k \in K} \frac{-\sum_{i=1}^{n} k_i\, u_i(x_i)}{p^T x}$$

que tiene las mismas soluciones.

Conclusiones

Nuestra investigación nos permitió alcanzar el objetivo general que es analizar y desarrollar los programas fraccionarios *min-max* de manera general aplicando el enfoque paramétrico primal tipo Dinkelbach, por medio de los objetivos específicos.

- En cuanto al primer objetivo específico: Usar las herramientas de convexidad generalizada nos permitió caracterizar los óptimos y sus soluciones optimales.

- En cuanto al segundo objetivo específico: Usar el enfoque paramétrico primal tipo Dinkelbach nos permitió desarrollar un algoritmo que resuelva el problema primal ya que con este enfoque es posible salir de la formulación de tales problemas fraccionarios, reemplazando su función objetivo por medio de una familia de funciones lineales asociada a un parámetro. Es decir, resolver los problemas de programación paramétrica es más sencillo debido a que tiene una estructura más simple en la función objetivo.

- El desarrollo de los objetivos específicos nos permitieron alcanzar el objetivo general de nuestra investigación y a la vez responder nuestra pregunta ¿A un problema fraccional *min-max* se le puede dar solución desde el enfoque paramétrico a través del problema paramétrico primal tipo Dinkelbach?

Sugerencias

Cabe señalar que nuestro estudio es un aporte para futuros trabajos, los cuales podrían considerar.

- Trabajar con el problema dual, llamado programa fracional *max-min*, ya que la solución de unos de los problemas (primal o dual) nos proporciona de forma automática la solución del otro programa, es decir, tanto el programa primal como el programa dual son dos formas de abordar el mismo problema. Entonces, es válido preguntarse cuál es la relación entre las soluciones de ambos problemas.

- Introducir el análogo al enfoque paramétrico primal tipo Dinkelbach, llamado enfoque paramétrico dual tipo Dinkelbach y estudiar la relación que existe entre ambos problemas.

- Desarrollar un algoritmo computacional que haga posible dar solución a una sucesión de problemas de optimización paramétrico.

Bibliografía

[1] Aubin, J.B. *Optima and Equilibra (An Introduction to Nonlinear Analysis), volume 140 of Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, Berlin,* 1993.

[2] Avriel, M., Diewert, W.E., Schaible, S. and I.Zang. *Generalized Concavity. Plenum Press, New York,* 1988.

[3] Barros, A. *Discrete and Fractional Programming Techniques for Location Models. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,* 1998.

[4] Barros, A.I. and J.B.G.Frenk. *Generalized fractional programming and cutting plane algorithms. Journal of Optimization Theory and Applications,* 87(1):103-120, 1995

[5] Barros, A.I., Frenk, J.B.G., Schaible, S. and S.Zhang. *A new algorithm for generalized fractional programming. Mathematical Programming,* 72:147-175, 1996.

[6] Birbil, S.I., Frenk, J.B.G. and S.Zhang. *Generalized fractional programming with user interaction. 2004, submitted.*

[7] Charnes, A. and W.W.Cooper. *Programming with linear fractional functionals. Naval Research Logistics Quarterly,* 9:181-186, 1962.

[8] Crouzeix, J.P., Ferland, J.A. and S.Schaible. *An algorithm for generalized fractional programs. Journal of Optimization Theory and Applications,* 47(1):35-49, 1985.

[9] Frenk, J.B.G. and G.Kassay. *Minimax results and finite dimensional minimization. Journal of Optimization Theory and Applications,* 113(2):409-421, 2002.

[10] Frenk, J.B.G. and G.Kassay. *Introduction to convex and quasiconvex analysis: this volume,* 2004.

[11] Gugat, *M. A fast algorithm for a class of generalized fractional programs. Management Science*, 42(10):1493–1499, 1996.

[12] J.B.G. Frenk and S. Schaible. *Fractional Programming. Erasmus Research Institute of Management vol. 2* 2004