



**UNIVERSIDAD NACIONAL
PEDRO RUIZ GALLO**

**FACULTAD DE CIENCIAS HISTÓRICO SOCIALES Y
EDUCACIÓN**



**Unidad de Posgrado de
Ciencias Histórico Sociales y Educación**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA
EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**

Estrategias de aprendizaje cooperativo para desarrollar capacidades de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de la escuela profesional de matemática- FACFyM – UNPRG- Lambayeque.

Tesis presentada para optar el Grado Académico de Maestro en Ciencias de la Educación con Mención en Docencia y Gestión Universitaria.

PRESENTADO POR:

QUIROZ CHAVIL WALTER JOSÉ

LAMBAYEQUE –PERÚ

2019

Estrategias de aprendizaje cooperativo para desarrollar capacidades de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de la escuela profesional de matemática- FACFyM – UNPRG- Lambayeque.

PRESENTADO POR:

QUIROZ CHAVIL WALTER JOSÉ

AUTOR

Dr. JORGE ISAAC CASTRO KIKUCHI

ASESOR

APROBADO POR:

DR. MANUEL BANCES ACOSTA
PRESIDENTE DEL JURADO

DRA. LAURA ISABEL ALTAMIRANO DELGADO
SECRETARIA DEL JURADO

MSC. MARTHA RÍOS RODRÍGUEZ
VOCAL DEL JURADO

Lambayeque – 2019

DEDICATORIA

A mis padres, Bruno y Ruth; y hermanos, Milagros, Ruth, Ernesto, Fernando, Marcos, Giovanna, Kelly, Cesar y Dante.

WALTER JOSE

AGRADECIMIENTO

Al momento de llegar a esta parte del trabajo, es imposible saber todos los que, con poco o mucho, colaboraron para el desarrollo de esta tesis. Sin embargo, no podemos dejar de mencionar a Dios Jehová por brindarnos la vida y las fuerzas para salir adelante cada minuto de nuestros días.

Queremos agradecer de la manera más sublime y afectuosa, a mis padres, Bruno y Ruth, cuyo sacrificio y esfuerzo nunca fue en vano; el amor incondicional, los valores y la educación que nos dieron, es el mejor regalo que hemos podido recibir.

Agradecer a mi asesora en el presente trabajo, cuyas recomendaciones y observaciones que fueron muy valiosas.

Gracias a mis hermanos, sobrinos, y toda mi familia por su grata compañía, en todo este tiempo, por estar siempre pendientes y ayudarnos cuando parecía que ya no hay salida y la frustración se hacía cada vez más grande, estuvieron ahí para darnos la ayuda necesaria.

El autor

ÍNDICE

Pág.

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTO

RESUMEN

ABSTRACT

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I

ANÁLISIS DEL OBJETO DE ESTUDIO

1.1. Ubicación del objeto de estudio	12
1.2. Evolución histórico tendencial del objeto de estudio	14
1.3. Características del problema	19
1.4. Metodología de la Investigación	20
1.4.1. Tipo y diseño de la Investigación	20
1.4.2. Población y muestra	20
1.4.3. Métodos de investigación	21
1.4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos	22

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la Investigación	23
2.2. Sustento teórico	25
2.2.1. Teorías que sustentan el aprendizaje cooperativo	25
2.2.1.1. Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel	25
2.2.1.2. Teoría de Interdependencia Social	28

2.2.1.3. Teoría Cognitiva del Desarrollo	29
2.2.1.4. El enfoque socio – cultural de Vygotsky	32
2.3. Marco conceptual	34
2.3.1. Aprendizaje cooperativo	34
2.3.2. Modelos de aprendizaje cooperativo	39
2.3.3. Estrategias de aprendizaje cooperativo	39
2.3.4. Capacidades matemáticas	41

CAPÍTULO III

RESULTADOS Y PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA

3.1. Análisis e interpretación de los resultados	44
3.2. Modelo teórico	52
3.3. Presentación de la propuesta	53

CONCLUSIONES

RESULTADOS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANEXOS

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación planteó las líneas básicas de una propuesta metodológica que intenta alejarse de modelos didácticos tradicionales para proponer una metodología activa basada en la interacción entre iguales, como eje principal del proceso de enseñanza-aprendizaje, que se apoya en los pilares básicos de la cooperación, convivencia y diálogo. El objetivo fue diseñar y aplicar estrategias de aprendizaje cooperativo para desarrollar las capacidades de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes del primer ciclo de la Escuela Profesional de Matemática en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas en la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, para tal fin se trabajaron las estrategias Student Team Learning (Aprendizaje por Equipos de Estudiantes) y Learning Together (Aprendiendo Juntos).

La investigación fue de tipo cuantitativo con diseño descriptivo – propositivo - aplicativo. La población y muestra estuvo conformada por 22 estudiantes del primer ciclo de dicha Institución, a quienes se aplicó el instrumento de recolección de datos; obteniéndose que la gran mayoría no comprenden los problemas que se les propone (54,6%), tampoco trazan un plan para resolverlos (59.1%), y no ponen en práctica algún plan (54,6%), finalmente el 63,6% no comprueban los resultados obtenidos. Es así que se diseñaron y aplicaron las estrategias, donde se implementó un cronograma de trabajo, se clasificaron los contenidos para cada estrategia, los resultados se llevaron a registros descriptivos de acuerdo a las actividades ejecutadas en las sesiones de aprendizaje con la finalidad de medir los indicadores de logro a través de los aprendizajes esperados. Se observó cómo resultados en los estudiantes, la mejora en sus aprendizajes y rendimiento académico. Igualmente se observó en ellos el desarrollo de su personalidad, relacionadas sobre todo con las cualidades actitudinales y la valoración del aprendizaje cooperativo, el trabajo en equipo, la solidaridad y tolerancia en el aula de clase, así como el respeto por las normas.

Palabras clave: estrategias, aprendizaje cooperativo, capacidades, resolución de problemas.

ABSTRACT

In this research work, he outlined the basic lines of a methodological proposal that tries to move away from traditional didactic models to propose an active methodology based on the interaction between equals, as the main axis of the teaching-learning process, which is based on the basic pillars of cooperation, coexistence and dialogue. The objective was to design and apply cooperative learning strategies to develop mathematical problem solving abilities in the students of the first cycle of the Professional School of Mathematics at the Faculty of Physical and Mathematical Sciences at the National University Pedro Ruiz Gallo, for this purpose the strategies Student Team Learning (Learning by Teams of Students) and Learning Together (Learning Together) were worked.

The research was quantitative with a descriptive - propositive - applicative design. The population and sample consisted of 22 students of the first cycle of said Institution, to whom the data collection instrument was applied; obtaining that the great majority do not understand the problems that are proposed (54.6%), nor do they draw up a plan to solve them (59.1%), and do not implement any plan (54.6%), finally 63.6 % do not check the results obtained. Thus, the strategies were designed and applied, where a work schedule was implemented, the contents for each strategy were classified, the results were taken to descriptive records according to the activities carried out in the learning sessions in order to measure the indicators of achievement through expected learning. It was observed how student results, improvement in their learning and academic performance. Likewise, the development of his personality was observed in them, related above all to the attitudinal qualities and the assessment of cooperative learning, teamwork, solidarity and tolerance in the classroom, as well as respect for the norms.

Keywords: strategies, cooperative learning, skills, problem solving.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la actividad de enseñar y aprender es una tarea que tiene que estar ligada al desarrollo del pensamiento. Son las teorías constructivistas las que sostienen que la construcción de los aprendizajes no es producto de la mera transmisión y recepción de información, sino que más bien, se da a través de la interacción activa entre el profesor y los estudiantes. Sin embargo, en la mayoría de instituciones aún predominan sistemas didácticos tradicionales donde se ignora el uso de estrategias y técnicas que ayuden a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes. Es contraproducente lo que ocurre en nuestra realidad educativa, pues a pesar que los docentes han sido entrenados en el uso de nuevas estrategias de enseñanza y aprendizajes éstos no aplican el aprendizaje cooperativo.

Esta situación también se ha presentado en la escuela profesional de Matemática de la FACFyM, donde los docentes tienen escasa planificación de estrategias en la acción pedagógica, inadecuado uso de estrategias didácticas en la enseñanza-aprendizaje de matemáticas, la actual metodología de enseñanza-aprendizaje de matemáticas no está obteniendo un rendimiento académico favorable, falta de atención a las diferencias individuales para que satisfagan las necesidades de cada estudiante, disociación entre teoría y práctica de matemáticas de modo que se imparta una serie de conocimientos teóricos en que el estudiante no aprecia ninguna relación con las realidades concretas.

Se observa que el problema en los estudiantes es el escaso desarrollo de capacidades matemáticas, en especial de resolver problemas, el cual se formula de la siguiente manera: ¿Cómo las estrategias de aprendizaje cooperativo desarrollan las capacidades en resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de la Escuela Profesional de Matemática de la FACFyM en la Universidad Nacional “Pedro Ruiz Gallo”, región Lambayeque?

En términos operativos, el problema general se delimitó a través de las siguientes preguntas específicas: ¿Qué tipos de estrategias conocen y manejan los estudiantes para resolver problemas matemáticos? ¿Cuáles son las estrategias de

aprendizaje cooperativo que deben utilizar los estudiantes para lograr resolver problemas matemáticos? ¿Cuáles son los recursos de aprendizaje cooperativo que se deben utilizar para promover el desarrollo de un nuevo planteamiento metodológico de matemática? ¿Qué condiciones se necesitan para concretar el aprendizaje cooperativo?

El objeto de estudio de la presente investigación recayó sobre el desarrollo de capacidades en resolución de problemas durante el proceso de enseñanza/aprendizaje. Por lo que se plantea como **objetivo general**: Diseñar y aplicar estrategias de aprendizaje cooperativo para las capacidades en resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de la escuela profesional de matemática de la FACFyM en la Universidad Nacional “Pedro Ruiz Gallo” en la región de Lambayeque. Mientras que los objetivos específicos son: a) Determinar las estrategias de aprendizaje para la resolución de problemas que poseen los estudiantes de Matemática de la FACFyM en la UNPRG; b) Diseñar y aplicar las estrategias de aprendizaje cooperativo a través de los modelos “student team learning” y “learning together”, basadas en la Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, en la teoría de interdependencia social y en la teoría cognitiva del desarrollo, y c) Desarrollar las capacidades en resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de la Escuela profesional de Matemática de dicha Institución Superior.

Además, el campo de acción es el diseño de estrategias de aprendizaje cooperativo; por lo que se propone como hipótesis: “Si se aplican estrategias de aprendizaje cooperativo a través de los modelos Student Team Learning (Aprendizaje por Equipos de Estudiantes) y Learning Together (Aprendiendo Juntos) basadas en la Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, en la teoría de interdependencia social y en la teoría cognitiva del desarrollo, entonces se desarrollarán capacidades en resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de la escuela profesional de Matemática de la FACFyM en la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo en la región Lambayeque.

Por otro lado, si se considera que el profesor acumula una serie de valiosas experiencias en la acción educativa, éstas deben de tomarse en cuenta como punto de partida para emprender los cambios trascendentales que contribuyan a lograr

una mejor calidad de la educación actual. Si se asume que el centro del proceso educativo es el estudiante, entonces, el estímulo de creatividad y su pensamiento crítico reflexivo fortalecerá su aprendizaje significativo; pero para ello se requerirá de estrategias de aprendizaje y si éstas son de aprendizaje cooperativo mejor.

Por eso, esta investigación se planteó y realizó como una alternativa para mejorar la práctica educativa de Matemática. Se asumió el modelo de la investigación cualitativa o interpretativa ya que esta, introduce la participación democrática y comunicativa entre profesor y estudiante, la reflexión del profesor dentro de la dinámica de la propia práctica, logrando introducir cambios significativos en el trabajo de aula. En este marco el docente debe de cumplir su rol de investigador, orientando y gestionando los cambios y mejoras dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En esta perspectiva se realizó el diseño de estrategias de aprendizaje cooperativo para aplicarlas a los estudiantes, logrando de esta manera mejorar el aprendizaje de la Matemática. En su estructura, el presente trabajo de investigación, se ha organizado en tres capítulos:

En el primer capítulo: Análisis del objeto de estudio, que incluye el proceso histórico del aprendizaje cooperativo, el planteamiento del problema, cómo se manifiesta y qué características tiene, y por último una descripción de la metodología empleada.

En el segundo capítulo, corresponde al marco teórico que implica a investigaciones realizadas sobre el aprendizaje cooperativo, sistematiza las bases teóricas científicas que sustentan la investigación.

En el tercer capítulo está referido al análisis e interpretación de los datos, en el cual se presentan los datos en forma objetiva e imparcial. Es la parte del informe donde se demuestra la validez de los resultados obtenidos. Además, se incluye el modelo teórico y la presentación de la propuesta teórica.

Y por último se presentan las conclusiones que el investigador ha arribado y las recomendaciones que propone para tener en cuenta en futuras investigaciones.

CAPÍTULO I

ANÁLISIS DEL OBJETO DE ESTUDIO

1.1. UBICACIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO

Lambayeque es uno de los veinticuatro departamentos, que forman la República del Perú. Su capital es Chiclayo. Está ubicado al noroeste del país, limitando al norte con Piura, al este con Cajamarca, al sur con La Libertad y al oeste con el océano Pacífico. Con 14 231 km² es el segundo departamento menos extenso — por delante de Tumbes— y con 78,2 hab/km², el segundo más densamente poblado, por detrás de Lima. Se fundó el siete de enero de 1872.

Los inciertos orígenes de la civilización de los Lambayeque, admirados por su orfebrería, se remontan hasta el legendario rey Naylamp, quien llegó por mar y decretó la adoración de Yampallec. Quizá la cultura Lambayeque o Sicán aparece cuando colapsa la cultura Moche debido a la intrusión de un nuevo concepto social, ideológico y estilístico llamado Wari. Siglos después fueron incorporados al reino Chimú, distinguiéndose por sus extraordinarias obras hidráulicas como el canal de Raca Rumi, que unía Chongoyape con la costa. Finalmente, en las luchas que abarcaron cuatro décadas, los incas sometieron a los chimús apenas un siglo antes de la invasión española.

Por su parte, la zona serrana de Lambayeque habría estado ocupada por grupos quechuas quienes mantuvieron una estrecha relación con los reinos costeros basada en el intercambio entre productos de la costa (sal, ají o algodón) a cambio de las aguas de las quebradas que nacen en sierra. En las acciones por la Independencia del Perú se distinguió el prócer Juan Manuel Iturregui. Los marinos peruanos Elías Aguirre Romero y Diego Ferré pelearon en el "Huáscar" y murieron en el Combate Naval de Angamos durante la guerra con Chile.

El territorio de Lambayeque fue recortado por disposición del Gobierno Revolucionario de las FF.AA. presidida por el gobierno del General E.P. Juan Velasco Alvarado, en el distrito de Olmos cediéndola a Piura restándole a Lambayeque 1059 km². Ya en 1996 el distrito de Olmos cambió su configuración y la sub región II Lambayeque que a su vez integraba la Región Nor Oriental del Marañón en una línea transversal que dividía Lambayeque de Piura. En el gobierno del presidente Alejandro Toledo eliminó las regiones y como estaban

configuradas y se volvió al esquema departamentos y se tomó como partida la demarcación hecha por el Gral. E.P. Juan Velasco Alvarado.

Por otro lado, el 7 de enero de 1872 el presidente José Balta proyectó la creación del departamento de Lambayeque por Decreto Supremo del 7 de enero de 1872. El 1 de diciembre de 1874, durante el gobierno de Manuel Pardo y Lavalle, se confirmó su creación por el dispositivo legal firmado por el Vicepresidente Manuel Costas; en su origen sus provincias fueron Chiclayo y Lambayeque y su capital la ciudad de Chiclayo, ambas provincias desmembradas del departamento de Trujillo. El 17 de febrero de 1951, por ley N° 11590, se creó la provincia de Ferreñafe, creación de la provincia de Lambayeque.

Es en este distrito donde se encuentra la Universidad Nacional “Pero Ruiz Gallo”, Institución que brinda una educación y formación superior humanista, científica y que conserve el medio ambiente, que contribuye al desarrollo integral y el bienestar de la sociedad, y a la formación de profesionales y líderes objetivos y justos, capaces de atender idóneamente a las exigencias de un entorno local y global. Formando profesionales en distintas carreras.

El 17 de marzo de 1970, según Decreto de Ley N° 18179, se crea la Universidad Nacional Pedro Ruíz Gallo, como fusión de la Universidad Agraria del Norte con sede en Lambayeque y la Universidad Nacional de Lambayeque con sede en Chiclayo. La Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo con sede en la Lambayeque, tuvo como primer Rector al Ing. Antonio Monsalve Morante. Actualmente la Universidad cuenta con catorce Facultades y veintiséis Escuelas Profesionales; Escuela de Posgrado, Centro Preuniversitario, Centro de Aplicación para Educación Primaria y Secundaria.

La Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, fue creada por Resolución Rectoral N°1162-81-R del 05 de noviembre de 1981 con las carreras profesionales de Física, Matemática y Estadística, que comienza a funcionar estatutariamente desde el 18 de marzo de 1984.

La Escuela Profesional de Matemática en el semestre 2017-I, tiene 188 estudiantes matriculados (42 mujeres y 146 varones), las edades de la mayoría están entre 17 y 27 años. La duración de estudios es de 10 semestres académicos

bajo una currícula flexible, la currícula actual es del 2003. La mayoría de estudiantes no son de Lambayeque o Chiclayo, viven alejados de sus hogares o tienen que desplazarse grandes distancias para estar presentes en clases, en el aula permanecen de 24 a 26 horas a la semana y algunos estudiantes que están a expensas de las mensualidades que envían sus padres. Por otra parte, su ingreso a carrera de Matemática la gran mayoría, es tan solo con el propósito de trasladarse a las facultades de ingeniería. Los estudiantes proceden de Lambayeque, Jaén, Bagua y Amazonas, la mayoría de colegios nacionales cuyos familiares se dedican básicamente a la agricultura.

La Escuela profesional de matemática tiene 28 docentes, 09 con maestría (04 en docencia universitaria) y 01 doctor en educación, que hasta el momento son pocos con estudios de docencia universitaria, y siguen aplicando metodologías positivistas que solamente ven los resultados de exámenes y no otras dimensiones que estén influyendo en sus evaluaciones. Más aún la información de los resultados de las evaluaciones por parte de los docentes no es adecuada y en algunos casos, los estudiantes sólo se enteran de sus notas en las matrículas.

1.2. EVOLUCIÓN HISTÓRICO TENDENCIAL DEL OBJETO DE ESTUDIO

Tradicionalmente la educación ha sido concebida como una transmisión de conocimientos en la que la única interacción personal tenida en cuenta era la del profesor con el estudiante. Las relaciones entre iguales en el aula, eran consideradas como un aspecto negativo e incluso pernicioso para el aprendizaje.

Actualmente la educación se encuentra en un proceso de cambio constante, se han divulgado planteamientos teóricos y perspectivas metodológicas sustentadas en un conjunto de aportes provenientes de la Epistemología, la Pedagogía Activa y la Psicología Cognitiva. Son estos planteamientos teóricos que han conllevado a un concepto denominado constructivismo pedagógico considerado:

Como un movimiento que se opone a concebir el aprendizaje receptivo y pasivo, lo considera más bien como una actividad organizadora, compleja del estudiante, que elabora sus nuevos conocimientos partiendo de revisiones, selecciones y transformaciones en cooperación con el maestro y sus compañeros (Calero, 1997:31).

El objetivo fundamental del sistema educativo actual es la educación integral del educando y, como consecuencia de ello, se hace necesaria una forma de organización de las actividades de aprendizaje que den lugar a interacciones entre los estudiantes que produzcan efectos positivos en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Sin embargo, y a pesar de lo expuesto, la escuela sigue exigiendo a cada estudiante que trabaje y actúe como si los demás no existieran (Fernández E, 1999) pero, si es propio de las personas pensar y trabajar cooperativamente, si asumimos que el aprendizaje es un hecho social, ¿Por qué no favorecemos una metodología basada en la estructuración cooperativa del aprendizaje? (Perkins, 1995).

El hecho es que la Institución ha podido prescindir la cooperación entre estudiantes lo que se puede explicar por diversas razones. Una de ellas está en las propias raíces sistema educativo, que sigue y sigue siendo, con matices, un sistema selectivo en la que se tiende dar prioridad a valores como la importancia del esfuerzo personal, otra es la formación del profesorado, primero como estudiantes y después como profesores en ejercicio, de corte individualista y también selectiva tal como el sistema educativo correspondiente les ha formado.

El Aprendizaje Cooperativo no es una experiencia metodológica innovadora, sino que ya cuenta con una amplia trayectoria en el ámbito de la educación, a pesar de ello los modelos educativos predominantes en nuestras escuelas favorecen los modelos de trabajo individualistas y competitivos. Estos modelos parten de la base de que el fin básico de la enseñanza es la adquisición de conocimientos por parte del estudiante, el profesor es el que sabe y el estudiante es un recipiente vacío que hay que llenar. Por tanto, en el proceso de enseñanza/aprendizaje el principal agente es el profesor que transmite los conocimientos a un receptor que es el estudiante.

Históricamente según Johnson & Johnson en 1999, el uso práctico del aprendizaje cooperativo tiene una historia rica y larga. Hace ya miles de años, el propio Talmud afirmaba que, para entenderlo, hacía falta un compañero de aprendizaje. En el siglo V, Quintiliano sostenía que los estudiantes podían obtener muchos

beneficios si se enseñaban los unos a los otros. El filósofo romano Séneca abogaba por el aprendizaje cooperativo mediante afirmaciones como "Qui docet discet" (El que enseña, aprende dos veces). Johann Amos Comenius (1592-1679) creía que los estudiantes obtenían muchos beneficios si les enseñaban a otros estudiantes y los otros les enseñaban a ellos. A fines del siglo XVIII, Joseph Lancaster y Andrew Bell hicieron un amplio uso de los grupos de aprendizaje cooperativo en Inglaterra y la idea llegó hasta los Estados Unidos cuando se abrió una escuela lancasteriana en la ciudad de Nueva York, en 1806. En el Movimiento por la Escuela Pública de los Estados Unidos de comienzos del siglo XIX hubo un fuerte énfasis en el aprendizaje cooperativo. Evidentemente, el uso del aprendizaje cooperativo no es algo nuevo en la educación estadounidense. Hubo períodos en los que tuvo grandes defensores y en los que fue muy utilizado para promover los objetivos educativos de la época.

Uno de los mayores partidarios del aprendizaje cooperativo en los Estados Unidos fue el coronel Francis Parker. En los últimos tres decenios del siglo XIX, el coronel Parker incorporó a la lucha por el aprendizaje cooperativo entusiasmo, idealismo, una actitud práctica y una intensa devoción por la libertad, la democracia y la individualidad en la educación pública. Su fama y su éxito se basaron en el espíritu vívido y regenerador que insufló a la escuela y a su poder para crear un clima verdaderamente cooperativo y democrático en el aula. Cuando era inspector de escuelas en Massachusetts (1875-1880), Parker recibía a más de 30.000 visitantes por año, para observar su uso de los procedimientos de aprendizaje cooperativo (Campbell, 1965).

Sus métodos para estructurar la cooperación entre los estudiantes fueron dominantes en la educación estadounidense de fines del siglo pasado. Siguiendo el camino trazado por Parker, John Dewey promovió el uso de los grupos de aprendizaje cooperativo en su famoso proyecto de método educativo (Dewey, 1924); pero, hacia fines de los años treinta, la escuela pública empezó a enfatizar el uso de la competencia interpersonal (Pepitone, 1980).

Los antecedentes de aprendizaje cooperativo forman parte de la historia de la pedagogía y la humanidad, ya que solo a través de esta se logra el desarrollo de la sociedad. Posibilitando el intercambio de conocimientos, experiencias,

interdependencia, la socialización de procesos y los resultados adquiridos trayendo como efecto el desarrollo integral del ser humano, siendo este un ser social por naturaleza lo cual le ha permitido avanzar, modificando su entorno de manera individual como social. Todo conocimiento adquirido por el ser humano es elaborado socialmente a través de la interacción entre individuos con su medio, según su contexto histórico, siendo esta transmitida de generación en generación a través de la incorporación de las futuras generaciones a la sociedad, siendo fundamental para esto la educación.

En el siglo XX en EE. UU se empieza a difundir el aprendizaje cooperativo, como un modo de luchar contra la concepción educativa predominante: el aprendizaje individualista, en el que se forma al estudiante en destrezas individuales, en la memorización y no en la reflexión y en la competición donde los mejores reciben premios, se supera cada nivel si haber desarrollado habilidades sociales de intercambio y sin madurar el pensamiento reflexivo. En las escuelas de EE.UU es muy habitual que en las clases haya estudiantes de todas partes del mundo, por ello, el aprendizaje cooperativo se planteó para influir de forma positiva en el alto nivel de conflictividad que existe entre tanta variedad de etnias, lenguas, religiones y culturas dentro de las aulas, las técnicas de aprendizaje cooperativo debían de fomentar y favorecer la interacción e interculturalidad, integrando a todos ellos en una misma comunidad, además de incrementar y mejorar su aprendizaje.

En los años sesenta, la investigación y la práctica de métodos cooperativos experimentan gran importancia, continúa evolucionando la teoría y la aplicación de las técnicas cooperativas en el ámbito escolar de EE. UU y Canadá. Se inicia un desarrollo con sus características más esenciales en Israel, Holanda, Noruega e Inglaterra y se va extendiendo hacia los demás países de Europa.

En la actualidad el modelo tradicional de aprendizaje receptivo, pasivo, competitivo e individualista está siendo reemplazado por un tipo de aprendizaje más flexible y dinámico, denominado aprendizaje cooperativo, en relación al cual se han realizado trabajos, tanto teóricos como empíricos, que muestran claramente la eficacia de una variedad de técnicas basadas en este tipo de

aprendizaje, no solo para alcanzar objetivos de socialización sino también para cumplir objetivos de aprendizaje (Ovejero,1990), con la finalidad de resolver problemas sociales y educativos, generados por la creciente pluralidad tanto cultural como étnica de la sociedad moderna.

La sociedad va evolucionando y la forma en la que el docente presenta su enseñanza y pretende el aprendizaje por parte del alumnado debe evolucionar también, el hecho de que el cuerpo docente o los educadores se aferren a métodos de enseñanzas tradicionales constituye un grave problema en el proceso de aprendizaje ya que sus métodos de enseñanzas constituyen, hoy en día, un obstáculo para el aprendizaje.

El aprendizaje cooperativo considerado como una metodología didáctica (Monereo y Duran 2002); no solo implica poner a trabajar juntos a un grupo de estudiantes. Al contrario, los estudiantes que trabajan juntos deben desarrollar un determinado tipo de interacción educativa específica que facilite el cumplimiento de una finalidad asumida por todos los miembros del grupo, que se consigue mediante una acción conjunta y coordinada entre todos.

Siguiendo esta perspectiva emergen cinco dimensiones interrelacionadas y complementarias de la metodología didáctica del aprendizaje cooperativo (Dillenbourg, 1999, Badía, 2005): Se desarrolla dentro de un contexto educativo específico, requiere un grupo de estudiantes, significa para los estudiantes trabajar conjuntamente y división del trabajo entre los miembros del equipo

Interacciones educativas cooperativas

1.3. CARACTERÍSTICAS DEL PROBLEMA

En la Escuela Profesional de Matemática se observa, al igual que en otras instituciones los estudiantes tienen problemas de bajo rendimiento, esto se evidencia al revisar las actas de evaluación y el problema se hace más grande cuando todos los años pocos son los estudiantes que aprueban el curso y avanzan

Los estudiantes culpan a la mala enseñanza, los docentes al poco interés y estudio por parte de los estudiantes. La sociedad al Sistema educativo y así continua la culpabilidad, sin embargo, se ha encontrado que:

- En los docentes, se observa que gran número de ellos no está actualizado, ni se ha capacitado en los últimos años, emplea métodos tradicionales, no planifica su labor pedagógica y se muestra reacio al cambio.
- Los estudiantes provienen de la zona urbano – marginal y del área rural, muchos trabajan por las tardes, en consecuencia, le dedican un reducido tiempo al estudio. Además, vienen de hogares con bajos recursos económicos y de hogares desintegrados con problemas de violencia familiar.
- Los padres de familia poco aportan en la educación de sus hijos, ni mucho menos se acercan a preguntar por su rendimiento académico, en su mayoría son personas que tienen educación primaria o secundaria o no cuentan con estudios y no poseen una fuente de trabajo estable.

En ese orden de ideas, esta investigación anhela ser una realidad para concebir y aplicar estrategias de aprendizaje cooperativo, cuya finalidad es proporcionar al docente las herramientas necesarias para mejorar su labor pedagógica que lo lleve a superar ciertas falencias como:

- a. Escasa planificación de estrategias en la acción pedagógica por parte del docente.
- b. Inadecuado uso de estrategias didácticas en la enseñanza - aprendizaje en matemática.
- c. La actual metodología de enseñanza - aprendizaje de la matemática no está obteniendo un rendimiento académico favorable.
- d. Falta de atención a las diferencias individuales para que satisfagan las necesidades de cada estudiante.
- e. Disociación entre la teoría y la práctica en matemática de modo que se imparta una serie de conocimientos teóricos en los que el estudiante no aprecia ninguna relación con las realidades concretas.

1.4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1. Tipo y diseño de la investigación

El paradigma en el que se basa el presente estudio es Interpretativo orientado al cambio, pues el propósito por el que se realizó la investigación fue desarrollar

las capacidades en resolución de problemas matemáticos a partir de la aplicación de estrategias de aprendizaje cooperativo.

El diseño fue descriptiva – propositiva - aplicativa. Es de tipo cuantitativo, ya que supone la obtención de datos sobre la propuesta en escalas numéricas, lo cual permite un tratamiento estadístico de diferentes niveles de cuantificación; por sus fines que persigue es aplicativo, que tiene como propósito no solo la comprensión e interpretación; sino de acuerdo a los resultados obtenidos de la investigación para la transformación de la realidad estudiada y posteriormente encontrada.

1.4.2. Población y muestra

La población está constituida por los estudiantes del primer ciclo de la Escuela Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas en la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, región Lambayeque; la misma que fue empleada en su totalidad para la muestra.

1.4.3. Métodos de investigación

Se aplicaron métodos teóricos y empíricos, que han permitido abordar con profundidad las estrategias de aprendizaje cooperativo.

Los métodos teóricos utilizados han servido para hacer el análisis de las teorías necesarias que nos sirven para determinar las etapas observadas en la realidad o facto-perceptible, métodos tales como:

- **Histórico - Lógico:** Que sirvió en la compilación de las teorías y la determinación de las tendencias del aprendizaje cooperativo en el tiempo; así como analizar su aplicación en el proceso enseñanza/aprendizaje.
- **Método Inductivo:** Este método se utilizará para identificar la problemática del ámbito de estudio, se manifiesta al momento de observar algunas tareas que realizaban los grupos de estudiantes en el aula.
- **Método Analítico:** Por medio del análisis se estudian los hechos y fenómenos separando sus elementos constitutivos para determinar su importancia, la relación entre ellos, cómo están organizados y cómo funcionan estos elementos, este procedimiento simplifica las dificultades al tratar el

hecho o fenómeno por partes, pues cada parte puede ser examinada en forma separada en un proceso de observación, atención y descripción.

- **Método Sintético:** Reúne las partes que se separaron en el análisis para llegar al todo. La síntesis le exige al estudiante la capacidad de trabajar con elementos para combinarlos de tal manera que constituyan un esquema o estructura que antes no estaba presente con claridad.
- **Método Introspectivo:** Será utilizado para que los mismos estudiantes puedan auto-observar y analizar, de esta manera ellos podrán conocerse y saber lo importante que es para el grupo.
- **Método democrático:** Se tendrá en cuenta en la toma de decisiones de los estudiantes, para lograr el bien común, donde ellos mismo podrán decidir lo que es más conveniente, también estará la actitud de cada grupo para la ejecución de la propuesta.
- **Método Empírico:** Este método se utiliza en la observación espontánea que se realiza en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje.

1.4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Se utilizaron las siguientes técnicas e instrumentos de recolección de datos:

Ficha de contenidos y ficha de actividades: Estos instrumentos permitieron aplicar las estrategias de aprendizaje cooperativo y recopilar información sobre el desarrollo de capacidades cognitivas por parte de los estudiantes.

Guía de observación: Este instrumento permitió conocer el nivel de logro de las estrategias de aprendizaje cooperativo. Mediante la observación directa se anotó la escala en el que se ubicaron cada equipo de trabajo durante el desarrollo de la propuesta de aprendizaje de matemática. Por ese motivo en la guía de observación se organizó las estrategias de aprendizaje cooperativo mencionadas con anteriormente.

Ficha de análisis de contenidos: Este instrumento permitió realizar el análisis de los trabajos realizados por los estudiantes durante el desarrollo del respectivo de la propuesta. Asimismo, este instrumento se utilizó para analizar lo concerniente a las dimensiones cognitivas, procedimentales y actitudinales, las técnicas y recursos que se aplicaron.

Formulario de Entrevista: Este instrumento ayudó en el recojo de testimonios de los estudiantes respecto al uso de las estrategias de aprendizaje cooperativo para conocer así los progresos y dificultades de los estudiantes.

Cuestionario: El cuestionario facilitó la recolección de información referido a la calificación de las estrategias de aprendizaje cooperativo, la repercusión de las mismas y las capacidades cognitivas desarrolladas por los estudiantes.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Ferreiro y Calderón (2000) argumentan que trabajar en grupos cooperativos en el aula facilita la identificación por parte del maestro y los miembros de cada grupo de una zona de desarrollo potencial de cada uno y de cada miembro del grupo; es decir, trabajar cooperativamente con otros, debe implicar el conocimiento de lo que cada miembro del grupo puede hacer o sería capaz de hacer. La ayuda mutua es un componente esencial, ya que, en muchas ocasiones, el ser humano actúa en forma individual y busca satisfacer su necesidad propia antes de brindar ayuda a otros que la pudieran necesitar.

Además es importante hacer notar que, si el maestro expone durante toda la clase, puede causar efectos no muy favorables en los estudiantes; y si estos no entienden puede hacer que sientan aversión hacia la persona del profesor y pierdan por completo el interés en la asignatura, se retrasen en los temas de estudio y en consecuencia reprueben. Por consiguiente, se necesita que los estudiantes se mantengan interesados en lo que se les enseña, que se sientan motivados por entrar a clase para participar ellos mismos en la construcción del conocimiento de la asignatura y adquieran los aprendizajes

Méndez. L (2002), en su trabajo *“La importancia de la planificación de estrategias basadas en el aprendizaje significativo en el rendimiento de matemática en séptimo grado de la Unidad Educativa Nacional Simón Bolívar”*, siendo su objetivo general determinar la importancia de la planificación de estrategias basadas en el aprendizaje significativo en el rendimiento de Matemática. Se llegó a la conclusión que, la utilización de estrategias basadas en el aprendizaje significativo es de gran utilidad porque logra que el estudiante construya su propio saber, tomando en cuenta las experiencias previas y sus necesidades.

López. O (2009), en su artículo *“Estrategias Metodológicas en Matemáticas”* comenta que las Matemáticas son importantes porque busca desarrollar la capacidad del pensamiento del estudiante, permitiéndole determinar hechos, establecer relaciones, deducir consecuencias, potenciar su razonamiento, promover la expresión, elaboración y apreciación de patrones y regularidades; lograr que cada estudiante participe en la construcción de su conocimiento

matemático, estimular el trabajo cooperativo, el ejercicio participativo, la colaboración la discusión y la defensa de las propias ideas.

En consecuencia, la finalidad de las Matemáticas en educación es construir los fundamentos del razonamiento lógico-matemático en los estudiantes. Por lo tanto, en el aula es importante el uso de estrategias que permitan la creatividad e imaginación para descubrir nuevas relaciones o nuevos sentidos en relaciones ya conocidas. Entre las estrategias más utilizadas por los estudiantes en la educación básica se encuentran la estimación, la aproximación, la elaboración de modelos, la construcción de tablas, la búsqueda de patrones, la simplificación de tareas difíciles, la comprobación y el establecimiento de conjeturas.

Coacha. C. y otros (2003). *“La actitud participativa y su relación en la construcción del aprendizaje en el área de estudios sociales y ciudadanía de los alumnos del segundo año de secundaria, turno tarde del Colegio Nacional “Enrique López Albújar”*, la investigación pertenece a la investigación acción – participativa centrada en el aula. La investigación del problema fue percibida en el desarrollo de las actividades del proceso de construcción de aprendizaje, cuyo propósito fue determinar la actitud participativa de los alumnos en la construcción del aprendizaje en el área de Estudios Sociales y Ciudadanía. Se concluyó que el trabajo cooperativo estimula las relaciones interpersonales, así como apertura a la participación activa y mejora el aprendizaje de los alumnos.

Chero. S. y otros (2004). *“Influencia del aprendizaje cooperativo en el aprendizaje y el nivel de desarrollo que se logra en la aplicación de un tratamiento innovador en los alumnos del segundo y tercero de educación secundaria, turno mañana del colegio “Miguel Cortés”*, esta investigación estuvo orientada a conocer el desarrollo del trabajo cooperativo en el aula, y su relación con el aprendizaje. Por lo tanto, pertenece a una investigación acción participativa. Su objetivo se enmarcó en determinar el nivel de aprendizaje que logran los alumnos al aplicar estrategias en el trabajo cooperativo de aula. Llegaron a la conclusión que el diálogo reflexivo y la autocrítica conductual favorecen la auto dirección en la convivencia de aula. A la vez señalan que el trabajo cooperativo generó la participación interactiva y un clima positivo en el trabajo grupal, lo que favoreció obtener un nivel de aprendizaje óptimo.

Ojeda. G. y otra (2006) en su tesis *“Estrategias de Aprendizaje Cooperativo y el Desarrollo de Habilidades Cognitivas”*, estudio realizado con los alumnos del segundo grado de educación secundaria de las secciones “B” y “D” de la IE “José Carlos Mariátegui” de Castilla – Piura 2006, llegaron a la conclusión que las estrategias de aprendizaje cooperativo son una alternativa y uno de los caminos o medios más eficaces para alcanzar aprendizajes óptimos y significativos; además permite que los alumnos se integren y aprendan en equipo en la construcción de nuevas capacidades, conocimientos y comportamientos escolares muy diferentes a los estilos de aprendizaje individual.

2.2. SUSTENTO TEÓRICO

2.2.1. TEORIAS QUE SUSTENTAN EL APRENDIZAJE COOPERATIVO

El aprendizaje cooperativo tiene sus inicios en las aulas de clase, por lo tanto, sus orígenes están en las siguientes perspectivas teóricas generales:

2.2.1.1. Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel

La teoría de Ausubel se inscribe en el marco de las teorías cognitivas y está centrada principalmente en el aprendizaje que ocurre en un ambiente escolar, es decir, en un marco instruccional de carácter formal. *"La esencia del proceso de aprendizaje significativo reside en que ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario, sino sustancial (no al pie de la letra) con lo que el estudiante ya sabe, señaladamente con algún aspecto esencial de su estructura de conocimientos (por ejemplo, una imagen, un símbolo ya con significado, un contexto, una proposición) ..."* (Ausubel, 1976).

En consecuencia, un aprendizaje tendrá el carácter de significativo cuando, al relacionarse con conocimientos previos del sujeto, adquiera significado y así pueda incorporarse a sus estructuras de conocimiento. A este concepto de aprendizaje significativo opone el de aprendizaje memorístico o por repetición, caracterizándolo como aquél en el que los contenidos se relacionan entre sí de manera arbitraria y carente de significado para el sujeto que aprende.

Ventajas del Aprendizaje Significativo:

- Produce una retención más duradera de la información.

- Facilita el adquirir nuevos conocimientos relacionados con los anteriormente adquiridos de forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido.
- La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.
- Es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del estudiante.
- Es personal, ya que la significación de aprendizaje depende de los recursos cognitivos del estudiante.

Requisitos para lograr el Aprendizaje Significativo:

1. Significatividad lógica del material: el material que presenta el maestro al estudiante está organizado, para que dé construcción de conocimientos.
2. Significatividad psicológica del material: que el estudiante conecte el nuevo conocimiento con los previos y que los comprenda. También debe poseer una memoria de largo plazo, porque de lo contrario se le olvidará todo en poco tiempo.
3. Actitud favorable del estudiante: ya que el aprendizaje no puede darse si el estudiante no quiere. Este es un componente de disposiciones emocionales y actitudinales, en donde el maestro sólo puede influir a través de la motivación.

Tipos de Aprendizaje Significativo:

Ausubel identifica y define tres tipos de aprendizaje significativo:

- Aprendizaje de representaciones: es cuando el niño adquiere el vocabulario. Primero aprende palabras que representan objetos reales que tienen significado para él. Sin embargo, no los identifica como categorías.
- Aprendizaje de conceptos: el niño, a partir de experiencias concretas, comprende que la palabra “mamá” puede usarse también por otras personas refiriéndose a sus madres. También se presenta cuando los niños en edad preescolar se someten a contextos de aprendizaje por

recepción o por descubrimiento y comprenden conceptos abstractos como “gobierno”, “país”, “mamífero”

- Aprendizaje de proposiciones: cuando conoce el significado de los conceptos, puede formar frases que contengan dos o más conceptos en donde afirme o niegue algo. Así, un concepto nuevo es asimilado al integrarlo en su estructura cognitiva con los conocimientos previos.

Esta asimilación se da en los siguientes pasos:

Ausubel concibe los conocimientos previos del estudiante en términos de esquemas de conocimiento, los cuales consisten en la representación que posee una persona en un momento determinado de su historia sobre una parcela de la realidad. Estos esquemas incluyen varios tipos de conocimiento sobre la realidad, como son: los hechos, sucesos, experiencias, anécdotas personales, actitudes, normas, etc.

Aplicaciones pedagógicas

- El maestro debe conocer los conocimientos previos del estudiante, es decir, se debe asegurar que el contenido a presentar pueda relacionarse con las ideas previas, ya que al conocer lo que sabe el estudiante ayuda a planear.
- Organizar materiales de manera lógica y jerárquica, teniendo en cuenta que no sólo importa el contenido sino la forma en que se presenta.
- Considerar la motivación como un factor fundamental para que el estudiante se interese por aprender, ya que el hecho de que el estudiante se sienta contento en su clase, con una actitud favorable y una buena relación con el maestro, hará que se motive para aprender.
- El maestro debe utilizar ejemplos, por medio de dibujos, diagramas o fotografías, para enseñar los conceptos.

2.2.1.2. Teoría de Interdependencia Social

Supone que su estructura determina cómo se relacionan los individuos, a su vez determina los resultados que estos obtienen. Los principales promotores de esta teoría han sido:

- 1900 Kurt Kafka: Los grupos como unidades dinámicas en los que varía la interdependencia entre los integrantes.
- 1920 – 1940 Kurt Lewin: La esencia de un grupo es la interdependencia que existe entre sus miembros, creada esta por metas comunes, lo que a su vez les convierte en una unidad dinámica.
- 1940–1970 Morton Deutsch: Formuló Teoría de cooperación y competencia que ha sido desarrollada en la Teoría de Interdependencia social.
- 1960 David & Roger Johnson: La interdependencia positiva o Cooperación, produce interacción fomentadora, pues los individuos alientan y facilitan los esfuerzos mutuos. Los esfuerzos cooperativos están basados en una motivación interna generada por factores interpersonales al trabajar juntos y unir los deseos para alcanzar una meta significativa.

La teoría de la interdependencia social postula que la forma en que esta se estructura determina la manera en que los individuos interactúan, lo cual, a su vez, determina los resultados. La interdependencia positiva (cooperación) da como resultado la interacción promotora, en la que las personas estimulan y facilitan los esfuerzos del otro por aprender. La interdependencia negativa (competencia) suele dar como resultado la interacción de oposición, en la que las personas desalientan y obstruyen los esfuerzos del otro. Si no hay interdependencia (esfuerzos individualistas) no hay interacción, ya que las personas trabajan de manera independiente, sin intercambios con los demás.

La interacción promotora lleva a un aumento en los esfuerzos por el logro, relaciones interpersonales positivas y salud psicológica. La interacción de oposición y la no interacción llevan a una disminución de los esfuerzos para alcanzar el logro.

2.2.1.3. Teoría Cognitiva del Desarrollo

Se basa, fundamentalmente, en el trabajo de Piaget, Vygotsky y algunos teóricos afines como Kohlberg y Murray. Piaget dice que cuando los individuos cooperan en el entorno, surge un conflicto sociocognitivo que crea un desequilibrio, lo cual, a su vez, estimula la habilidad de ver diferentes perspectivas. Paralelamente Vygotsky se basa en que el conocimiento es social

y que se construye a partir de esfuerzos cooperativos por aprender, comprender y solucionar problemas. Los teóricos de controversia como son llamados los hermanos Johnson & Johnson postulan que cuando el individuo se ve enfrentado por argumentos opuestos se crea un conflicto conceptual, que a su vez promueve una reconceptualización y una búsqueda de información que tiene como resultado una conclusión más profunda y reflexiva.

Básicamente puede decirse que el constructivismo es el modelo que mantiene que una persona, tanto en los aspectos cognitivos, sociales y afectivos del comportamiento, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción de estos dos factores.

El Modelo Constructivista está centrado en la persona, en sus experiencias previas de las que realiza nuevas construcciones mentales, considera que la construcción se produce:

- a. Cuando el sujeto interactúa con el objeto del conocimiento (Piaget)
- b. Cuando esto lo realiza en interacción con otros (Vygotsky)
- c. Cuando es significativo para el sujeto (Ausubel)

El constructivismo plantea que "cada estudiante estructura su conocimiento del mundo a través de un patrón único, conectando cada nuevo hecho, experiencia o entendimiento en una estructura que crece de manera subjetiva y que lleva al aprendiz a establecer relaciones racionales y significativas con el mundo. La teoría constructivista parte del supuesto: "el conocimiento no se descubre, se construye".

El Constructivismo Cognitivo de Piaget. (Ramírez P. "Algunas Ideas de Constructivismo en la Educación". 2007) Piaget aporta a la teoría constructivista la concepción del aprendizaje como un proceso interno de construcción en el cual, el individuo participa activamente, adquiriendo estructuras cada vez más complejas denominadas estadios. En su teoría cognitiva, Piaget descubre los estadios de desarrollo cognitivo desde la infancia a la adolescencia: Las estructuras psicológicas se desarrollan a partir de los reflejos innatos, se organizan en esquemas de conducta, se internalizan como modelos de

pensamiento y se desarrollan después en estructuras intelectuales complejas. De esta forma el desarrollo cognitivo se divide en cuatro períodos:

- Etapa sensoriomotora, caracterizada por ser esencialmente motora y en la que no hay representación interna de acontecimientos ni el niño piensa mediante conceptos. Esta etapa se da desde cero a los dos años de edad.
- La segunda etapa preoperacional corresponde a la del pensamiento y el lenguaje.
- La tercera etapa, de operaciones concretas en la que los procesos de razonamiento se vuelven lógicos y pueden aplicarse a problemas concretos.
- Por último, la etapa de operaciones formales, a partir de los once años en la que el adolescente logra la abstracción sobre conocimientos concretos.

Los tres mecanismos para el aprendizaje son:

1. Asimilación: consiste en adecuar una nueva experiencia en una estructura mental existente.
2. Acomodación: consiste en revisar un esquema preexistente a causa de una nueva experiencia.
3. Equilibrio: consiste en buscar estabilidad cognoscitiva a través de la asimilación y la acomodación.

Los principales principios piagetianos en el aula son:

1. Posiblemente, el rol más importante del profesor es proveer un ambiente en el cual el niño pueda experimentar la investigación espontáneamente. Los salones de clase deberían estar llenos con auténticas oportunidades que desafíen a los estudiantes. Los estudiantes deberían tener la libertad para comprender y construir los significados a su propio ritmo a través de las experiencias como ellos las desarrollaron mediante los procesos de desarrollo individuales.
2. El aprendizaje es un proceso activo en el cuál se cometerán errores y las soluciones serán encontradas. Estos serán importantes en la asimilación y la acomodación para lograr el equilibrio.

3. El aprendizaje es un proceso social que debería suceder entre los grupos colaborativos con la interacción de los "pares" (peers) en unos escenarios lo más naturales posible.

Implicaciones Educativas de la Teoría de Piaget; sostiene parte de que la enseñanza se produce "de dentro hacia afuera". Para él la educación tiene como finalidad favorecer el crecimiento intelectual, afectivo y social del niño, pero teniendo en cuenta que ese crecimiento es el resultado de unos procesos evolutivos naturales. La acción educativa, por tanto, ha de estructurarse de manera que favorezcan los procesos constructivos personales, mediante los cuales opera el crecimiento. Las actividades de descubrimiento deben ser, por tanto, prioritarias. Esto no implica que el niño tenga que aprender en solitario. Bien al contrario, una de las características básicas del modelo pedagógico piagetiano es, justamente, el modo en que resaltan las interacciones sociales horizontales.

Las implicaciones del pensamiento piagetiano en el aprendizaje inciden en la concepción constructivista del aprendizaje. Los principios generales del pensamiento piagetiano sobre el aprendizaje son:

4. Los objetivos pedagógicos deben, además de estar centrados en el niño, partir de las actividades del estudiante.
5. Los contenidos, no se conciben como fines, sino como instrumentos al servicio del desarrollo evolutivo natural.
6. El principio básico de la metodología piagetiana es la primacía del método de descubrimiento.
7. El aprendizaje es un proceso constructivo interno.
8. El aprendizaje depende del nivel de desarrollo del sujeto.
9. El aprendizaje es un proceso de reorganización cognitiva.
10. En el desarrollo del aprendizaje son importantes los conflictos cognitivos o contradicciones cognitivas.
11. La interacción social favorece el aprendizaje.
12. La experiencia física supone una toma de conciencia de la realidad que facilita la solución de problemas e impulsa el aprendizaje.

13. Las experiencias de aprendizaje deben estructurarse de manera que se privilegie la cooperación, la colaboración y el intercambio de puntos de vista en la búsqueda conjunta del conocimiento (aprendizaje interactivo).

2.2.1.4. El enfoque socio-cultural de Vygotsky:

La psicología Histórico-Cultural de Vygotsky y sus seguidores postula que el desarrollo psíquico es el resultado de la asimilación de la experiencia social a partir de la práctica individual. El niño, a medida que crece y aprende, asimila la experiencia de la humanidad elaborada a lo largo de su historia. Esta asimilación la realiza en la interacción con el adulto, quien se la transmite al niño principalmente a través de la enseñanza. Desde esta mirada las capacidades de los niños, incluyendo las matemáticas, no son innatas, sino que se forman durante el desarrollo y el proceso de aprendizaje; por lo tanto, todo niño con un cerebro sano tiene potencialidad para aprender lo que se le enseña en la escuela.

Esta perspectiva le concede al maestro un papel fundamental en el desarrollo del niño; es él quien lo orienta y por lo tanto se convierte en elemento clave tanto en el aprendizaje como en el desarrollo psíquico del niño. Para lograr esto debe poder identificar las condiciones que garanticen la formación de las capacidades cognitivas de sus estudiantes con el fin de proponer acciones pedagógicas apropiadas. Esto, sin embargo, no excluye el papel del estudiante, quien es considerado sujeto activo de su aprendizaje a medida que interioriza lo que se le enseña.

En el proceso de enseñanza es necesario distinguir entre los dos niveles de desarrollo planteados por Vygotsky:

- Nivel de desarrollo actual – Lo que el niño ya ha adquirido en su desarrollo y lo puede realizar independientemente, sin apoyo. Por lo tanto, si se enseña al niño a este nivel de desarrollo es poco o nada lo que aprende.
- Zona de Desarrollo Potencial o Próximo (ZDP) – La ZDP incluye todo lo que se encuentra en proceso de maduración y que se puede potenciar con la ayuda de alguien que ya lo tenga establecido. Este nivel de

desarrollo potencial está determinado por la capacidad de resolver un problema bajo la orientación del adulto o de otro niño que ya lo haya adquirido. La enseñanza se debe enfocar hacia este nivel de desarrollo con el fin de lograr un aprendizaje significativo; el adulto plantea al niño acciones y le orienta en la manera de realizarlas adecuadamente.

A medida que un niño aprende, lo que estaba en su ZDP pasa a ser parte de su zona de desarrollo actual y se crea una nueva ZDP hacia la cual se deben dirigir los nuevos esfuerzos de enseñanza.

En un aula de clase el maestro va a encontrar estudiantes con diferentes ZDP y es importante que las pueda descubrir por medio de una evaluación dinámica permanente de tal manera que logre brindarle a cada estudiante algo nuevo para aprender. En el caso de las matemáticas, a los diferentes niños dentro de un aula de clase se les puede plantear problemas distintos que no sean tan fáciles que los puedan resolver sin ayuda ni tan difíciles que aún con apoyo no logren comprenderlos. Los problemas que se presenten a cada niño deben ser suficientemente desafiantes de tal manera que requieran de una exigencia cognoscitiva y un apoyo de alguien más competente. Es recomendable tener un banco de problemas clasificados por nivel de dificultad que se puedan presentar a los niños de diferente nivel de desarrollo dentro del aula.

La contribución de Vygotsky ha significado que ya el aprendizaje no se considere como una actividad individual, sino más bien social. Se valora la importancia de la interacción social en el aprendizaje. Se ha comprobado que el estudiante aprende más eficazmente cuando lo hace en forma cooperativa.

Si bien también la enseñanza debe individualizarse en el sentido de permitir a cada estudiante trabajar con independencia y a su propio ritmo, es necesario promover la colaboración y el trabajo grupal, ya que se establecen mejores relaciones con los demás, aprenden más, se sienten más motivados, aumenta su autoestima y aprenden habilidades sociales más efectivas.

2.3. MARCO CONCEPTUAL

2.3.1. Aprendizaje cooperativo

"El aprendizaje cooperativo se refiere a una serie de estrategias instruccionales que incluyen a la interacción cooperativa de estudiante a estudiante, sobre algún tema, como una parte integral del proceso de aprendizaje" (Kagan, 1994).

El aprendizaje cooperativo es trabajar conjuntamente para concretar distributivamente una meta. Aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los estudiantes trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás. (Johnson)

El aprendizaje cooperativo por lo tanto según Ferreiro y Calderón (2001:31) intensifica la interacción entre los estudiantes miembros del grupo, con el profesor y los restantes equipos, de manera que cada uno aprende el contenido asignado y a su vez, se agrega que todos los integrantes del grupo los aprendan también, planteando una forma diferente de relacionarse maestro estudiante en el proceso de enseñar y aprender.

El aprendizaje cooperativo se define como un proceso que enfatiza el aprendizaje y los esfuerzos de cooperación en grupo para el logro de tareas específicas. Dentro del proceso del aprendizaje cooperativo se destaca la participación activa y la interacción tanto de estudiantes con profesores, (Ovejero, Moral y Pastor, 2000).

El conocimiento es visto como un constructo social, y por tanto el proceso de aprender es facilitado por la interacción, la evaluación y la cooperación entre iguales. La definición que dan Eggen y Kauchak (1999) se identifica más con una propuesta de trabajo organizado dentro del aula.

Mencionan que el aprendizaje cooperativo integra un grupo de estrategias de enseñanza que comprometen al estudiante a trabajar en colectivo para lograr metas comunes y el aprendizaje de habilidades se desarrolla a la par de la participación de los estudiantes, además de que incrementa el liderazgo proactivo y la capacidad de toma de decisiones. Para un mejor entendimiento de hace una diferencia entre trabajo de grupo y trabajo en equipo. Según Barriga y Hernández (2002:115)

Aprendizaje en equipo	Aprendizaje en grupo
<ul style="list-style-type: none"> • Interdependencia positiva. • Valoración por cada uno de los miembros. • Formación de equipos heterogéneos. • Liderazgo compartido. • Responsabilidad por todos. • Se desarrollan habilidades sociales y cognitivas. • El profesor observa e interviene, cumpliendo su rol de mediador 	<ul style="list-style-type: none"> • No hay interdependencia. • No hay valoración individual. • Se trabaja con miembros homogéneos. • Existencia de un solo líder. • Responsabilidad por sí solo. • Se ignoran todo tipo de habilidades. • El profesor ignora los grupos, asume una función que es de facilitador.

Condiciones para que ocurra un aprendizaje cooperativo:

Según (Johnson, Johnson & Holubec, 1999), estas condiciones son:

1. Interdependencia positiva entre los miembros del grupo: Los miembros de un grupo deben tener claro que los esfuerzos de cada integrante no solo benefician a él mismo sino también a los demás miembros. Por tanto, supone compromiso con el éxito de otras personas, además del propio.

Cuando los estudiantes empiezan a trabajar cooperativamente por primera vez, la interdependencia respecto de los objetivos no suele ser suficiente para garantizar la cooperación entre ellos. Hay que desarrollar otros tipos de interdependencia:

- a) Interdependencia respecto de los recursos: El docente dará a cada miembro de un grupo sólo una parte de la información, de modo que los miembros tengan que combinar sus recursos.
- b) Interdependencia respecto de los premios: Hay dos tipos de premios tangibles que puede emplear el docente para implementar la interdependencia positiva: premios escolares, por ejemplo, puntos adicionales, y premios no escolares, como tiempo libre, recreos, o algún otro premio.

- c) Interdependencia de los roles: Esta interdependencia se implementa asignando a los miembros del grupo roles complementarios e interconectados.

Los roles especificarán la responsabilidad de cada uno.

- 2. Interacción cara a cara, facilitadora del aprendizaje: Los estudiantes deben realizar juntos una labor, compartiendo los recursos existentes y ayudándose, respaldándose, alentándose y felicitándose unos a otros por su empeño en aprender.
- 3. Evaluación individualizada y responsabilidad personal para conseguir los objetivos del grupo: Cada miembro será responsable de cumplir con la parte del trabajo que le corresponda. Los estudiantes se dan cuenta de que, si no hacen lo que les toca, perjudican a sus compañeros de grupo, además de perjudicarse a sí mismos.

Durante el aprendizaje cooperativo los estudiantes aprenden conocimientos, destrezas, estrategias o procedimientos dentro de un grupo, y luego los aplican por sí solos para demostrar su dominio personal del material aprendido. Los estudiantes aprenden juntos cómo desempeñarse aún mejor individualmente.

Los modos más comunes de hacerlo son:

- 1) Tomar una prueba individual a cada estudiante. 2) Tomar exámenes orales individuales al azar. 3) Observar a cada grupo y registrar la frecuencia con que cada miembro contribuye al trabajo grupal. 4) Asignarle a un estudiante de cada grupo el rol de encargado de verificar la comprensión. 5) Hacer que los miembros del grupo se corrijan sus respectivos trabajos
- 4. Uso frecuente de destrezas interpersonales y grupales: El aprendizaje cooperativo es más complejo que el aprendizaje individualista y el aprendizaje competitivo porque requiere que los estudiantes aprendan tanto las materias escolares como las prácticas interpersonales necesarias para funcionar como grupo. Así, los miembros del grupo deben saber cómo

ejercer la dirección, tomar decisiones, crear un clima de confianza, comunicarse y manejar los conflictos, y deben sentirse motivados para hacerlo.

5. Evaluación frecuente y regular del funcionamiento del grupo para mejorar la efectividad futura: Los miembros del grupo deben analizar en qué medida están alcanzando sus metas y manteniendo relaciones de trabajo eficaces. Los grupos deben determinar qué acciones de sus miembros son positivas o negativas, y tomar decisiones acerca de qué conductas conservar o modificar.

Tipos de grupos de aprendizaje cooperativo

Johnson (1999) describe básicamente tres tipos de grupos: Grupos formales de aprendizaje cooperativo. En ellos, los estudiantes trabajan juntos para alcanzar objetivos comunes. Estos grupos formales de aprendizaje garantizan la participación activa de los estudiantes en tareas tales como la organización de material, explicarlo, integrarlo a los saberes previos, entre otras tareas intelectuales. Su funcionamiento puede durar desde una hora a varias semanas o clases.

Grupos informales de aprendizaje cooperativo. Las actividades de estos grupos informales pueden consistir en una breve charla de tres a cinco minutos, propuestas por el docente en alguna instancia de la clase con el fin de crear un clima propicio, evaluar diagnóstica y procesualmente, crear expectativas sobre el tema a tratar. También, puede ser útil para que los estudiantes organicen, expliquen, resuman, e integren lo tratado con los saberes previos.

Grupos de base cooperativos. Este dispositivo, tienen un funcionamiento de largo plazo (un año por lo menos). Son grupos heterogéneos y sus miembros son permanentes lo que facilita establecer vínculos que promuevan apoyo, aliento y respaldo entre sus integrantes. Las relaciones personales son importantes, y favorece el cumplimiento de las tareas escolares y un buen desarrollo cognitivo.

La conformación de los grupos.

Los grupos de aprendizaje cooperativo suelen tener de dos a cuatro miembros.

La regla es cuánto más pequeño sea el grupo, tanto mejor. En caso de duda, al docente le conviene formar pares o tríos de estudiantes. Cada vez que se tenga que determinar la dimensión de los grupos cooperativos habrá que tener en cuenta los siguientes factores:

- 1) Dentro de un par, los estudiantes deben manejar solo dos interacciones. Dentro de un trío, habrá seis interacciones que manejar. Dentro de un grupo de cuatro, las interacciones a manejar serán doce. Cuanto mayor es el número de interacciones, mayor será la cantidad de prácticas interpersonales y grupales necesarias para manejar esas interacciones.
- 2) Cuanto menor es el tiempo disponible, más reducido deberá ser el grupo de aprendizaje.
- 3) Cuanto más pequeño es el grupo, más difícil será que algunos estudiantes se dejen estar y no hagan su aporte al trabajo colectivo.
- 4) Cuanto más reducido sea el grupo, más fácil será detectar cualquier dificultad que pudieran tener los estudiantes para trabajar juntos.

Por lo general, son preferibles los grupos heterogéneos. Los grupos compuestos por estudiantes con diferentes rendimientos y distintos intereses permiten que los estudiantes tengan acceso a diversas perspectivas y métodos de resolución de problemas, y producen un mayor desequilibrio cognitivo, necesario para estimular el aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Para formar grupos heterogéneos similares conviene utilizar la distribución estratificada. Este tipo de distribución permite al docente asignar a cada grupo un estudiante de un nivel superior, un estudiante de nivel inferior y el resto de nivel medio. El nivel estará en función del tipo de tarea que se vaya a realizar (escritura de un texto, lectura, resolución de problemas, resolución de ecuaciones, etc.).

2.3.2. MODELOS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO

Walters (2000) señala cuatro modelos principales de aprendizaje cooperativo: Jigsaw (Rompecabezas), Student Team Learning (Aprendizaje por Equipos de

Estudiantes) Learning Together (Aprendiendo Juntos), Group Investigation (Investigación en Grupo).

Las diferencias entre ellos se encuentran en el grado de estructuración de la tarea, la utilización de recompensas y la competición, y los métodos de evaluación individual. (Díaz-Barriga y Hernández, 2001)

2.3.3. ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO.

Según el autor Ferreiro Gravié (2003:60), las estrategias de Aprendizaje Cooperativo: Son las acciones y operaciones que guían y orientan la actividad psíquica del estudiante en equipos cooperativos, para que estos aprendan significativamente; manifiesta además que son los procedimientos empleados por el maestro que hacen que los estudiantes en grupos cooperativos: organicen, codifiquen, decodifiquen, analicen, resuman, integren y elaboren óptimamente la información para su respectiva aplicación y empleo.

En la presente investigación se aplicó las estrategias de aprendizaje cooperativo: Student Team Learning (Aprendizaje por Equipos de Estudiantes) y Learning Together (Aprendiendo Juntos) para mejorar el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas de Matemática, donde se buscó desde la práctica en el aula, demostrar que dichas estrategias cumplen un rol muy significativo en el proceso enseñanza/aprendizaje como es elevar el rendimiento académico, disminuir la deserción escolar y vencer el “terror” hacia la matemática.

- El modelo de Student Team Learning. Slavin (1990) en el Centro para la Organización Social de la Escuela de la John Hopkins University. EE.UU.

Las características son las siguientes:

- Los estudiantes se agrupan durante unas seis semanas en grupos heterogéneos de cuatro miembros.
- Los integrantes del grupo se ayudan unos a otros hasta dominar los materiales presentados por el profesor; posteriormente cada estudiante es evaluado individualmente.

- Los grupos consiguen algún tipo de recompensa que reconozca su éxito solo si se demuestra que todos los integrantes del grupo han aprendido.

▪ **El Modelo Learning Together**

Fue diseñado por los hermanos Roger T. Johnson y David W. Johnson a mediados de los sesenta. Quizás sea el más general de todos los métodos aquí presentados, basándose en las características del aprendizaje cooperativo presentadas anteriormente para organizar grupos de dos a cinco integrantes que abordan una única tarea en la cual todos deben procurar el éxito del grupo y de cada individuo. Junto con el método de Slavin, este modelo es el que cuenta con más investigaciones que demuestran su valor en relación con los resultados académicos (Johnson, Johnson & Stanne, 2000) y la mejora de las relaciones sociales (Johnson & Johnson, 2000).

Los requisitos para implementarlo en el aula son:

- a. Selección de la actividad, de preferencia que involucre la solución de problemas, aprendizaje conceptual, pensamiento divergente o creatividad;
- b. Toma de decisiones respecto al tamaño del grupo, asignación, materiales, etc.,
- c. Realización del trabajo en grupo y
- d. Supervisión de los grupos.

2.3.4. CAPACIDADES MATEMÁTICAS

Las capacidades son potencialidades inherentes a la persona y que esta puede desarrollar a lo largo de toda su vida, dando lugar a la determinación de los logros educativos. Ellas se cimientan en la interrelación de procesos cognitivos, socio afectivos y motores. Cada capacidad contiene procesos cognitivos/motores: Procesos que ocurren en nuestra mente durante el procesamiento de la

información, también se denominan operaciones mentales y cuando se manifiestan mediante la motricidad se denominan procesos motores.

La matemática en educación desarrolla tres capacidades: comunicación matemática, razonamiento y demostración y resolución de problemas. Para efecto de la presente investigación se ha tenido en cuenta esta última, resolución de problemas. Capacidad de Resolución de Problemas

La capacidad de resolución de problemas es de suma importancia por su carácter integrador, ya que posibilita el desarrollo de las otras capacidades. Resolver problemas implica encontrar un camino que no se conoce de antemano, es decir, una estrategia para encontrar una solución. Para ello se requiere de conocimientos previos y capacidades.

A través de la resolución de problemas, muchas veces se construyen nuevos conocimientos matemáticos.

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea.

- Santaló (1985), gran matemático español y además muy interesado en su didáctica, señala que «enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas».
- En una conferencia pronunciada en 1968 George Polya decía: «Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática».

La capacidad que tengan los estudiantes para resolver problemas estará reflejada en los criterios e indicadores de evaluación en la que se debe determinar si son capaces, por ejemplo, de formular problemas, de hacer preguntas, utilizar una información dada y elaborar conjeturas, utilizar estrategias y técnicas adecuadas y comprobar e interpretar los resultados.

De acuerdo con lo planteado en los estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática de la National Council of Teachers of Mathematics (SAEM. Thales), la evaluación de la capacidad que tengan los estudiantes de utilizar la Matemática para la resolución de problemas debe mostrar evidencia de que son capaces de:

- Formular problemas.
- Aplicar diversas estrategias para resolver problemas.
- Resolver problemas.
- Comprobar e interpretar resultados.
- Generalizar soluciones.

Características de la capacidad de resolución de problemas

RASGOS	CAPACIDAD ESPECÍFICA
Agudeza perceptiva	Identifica, descubre observa...
Reflexión lógica	Analiza, deduce, infiere, formula...
Actuación adaptativa	Juzga, enjuicia, revisa, evalúa, utiliza, aplica...
Discriminación selectiva	Clasifica, selecciona, compara, jerarquiza...
Visión prospectiva	Anticipa, predice, imagina, intuye...
Pensamiento estratégico	Extrapolación, planifica, diseña, experimenta, organiza, elabora...
Flexibilidad del pensamiento	Explora, adecúa, adapta, interpreta...
Autonomía	Asume, discrepa...

CAPÍTULO III

RESULTADOS Y PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA

3.1. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para la investigación y recolección de información sobre el objeto de estudio, se ha aplicado la encuesta, con cuestionarios medibles. La muestra elegida para aplicar la encuesta han sido los estudiantes del primer ciclo de la Escuela Profesional de Matemática.

PRE TEST

CUADRO N° 01: CONDICIONES DEL AMBIENTE DE CLASES

ÍTEMS		N°	%
Iluminación	Adecuada	21	95.5
	Inadecuada	01	4.5
TOTAL		22	100
Ventilación	Adecuada	17	77.2
	Inadecuada	05	22.8
TOTAL		22	100
Acústica	Adecuada	09	40.9
	Inadecuada	13	59.1
TOTAL		22	100
Mobiliario	Adecuada	05	8.7
	Inadecuada	17	91.3
TOTAL		22	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer ciclo de la Escuela Profesional de Matemática - FACFyM

INTERPRETACIÓN:

Hernando Romero (1997), sostiene que no todos los espacios físicos son válidos para los modelos educativos en la perspectiva de lograr la excelencia académica, por eso el espacio forma parte inherente de la calidad de la educación. Es así que, una buena disposición espacial ayuda a los estudiantes a sentirse más seguros, pues permite saber dónde comienzan y terminan las áreas de aprendizaje estructuradas. Esto contribuye a crear una sensación de bienestar, satisfacción y comodidad, y a mejorar el estado de ánimo de los estudiantes y el docente.

El arreglo del aula influye en el rendimiento de los estudiantes y en la cantidad de tiempo que dedican a realizar las tareas debido a que, afectan el foco de atención visual y auditivo de los estudiantes. Es necesario también considerar los efectos de la acústica.

En los datos recogidos se comprobó que 95.5% cree que la iluminación es la adecuada, de igual manera con la ventilación, el 77.2% cree que es adecuada. Efectivamente, tanto ventilación como la iluminación en el aula es la adecuada, pues el espacio es amplio al igual que las ventanas. Por otro lado, lo que preocupa es la acústica, el 59.1% opina que es inadecuada por la cantidad de ruidos molestos, que provienen de fuera y en horarios determinados, en cuanto al mobiliario, el 77.3% manifiesta que es inadecuado, por cierto, se trata de carpetas personales no movibles con unos 30 años o más de uso y que por su diseño no son apropiadas para realizar actividades de aprendizaje cooperativo.

Ante tal situación (acústica y mobiliario inadecuados), se sensibilizó a los estudiantes a que contribuyan a crear una sensación de bienestar, satisfacción y comodidad, y a mejorar el estado de ánimo en tratar de realizar las tareas encargadas.

CUADRO N°02: DOMINIO DE ESTRATEGIAS

N°	ESTRATEGIAS		TD	ED	PA	DA	TA	TOTAL
01	Comprendo el problema propuesto	N°	6	6	5	3	2	22
		%	27.3	27.3	22.7	13.6	9.1	100
02	Trazo un plan para resolverlo	N°	6	7	4	3	2	22
		%	27.3	31.8	18.2	13.6	9.1	100
03	Pongo en práctica el plan	N°	6	6	5	2	3	22
		%	27.3	27.3	22.7	9.1	13.6	100
04	Compruebo los resultados obtenidos	N°	7	7	4	2	2	22
		%	31.8	31.8	18.2	9.1	9.1	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer ciclo de la Escuela Profesional de Matemática - FACFyM

INTERPRETACIÓN

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución).

Teniendo en cuenta la formulación que hizo Polya (1945) de las cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema y observando el cuadro anterior diremos que los estudiantes en su gran mayoría no comprenden los problemas que se les propone (54,6%), tampoco trazan un plan para resolverlos (59.1%), y no ponen en práctica algún plan (54,6%), finalmente el 63,6% no comprueban los resultados obtenidos. Por lo tanto, se puede concluir que los estudiantes en su gran mayoría desconocen o no manejan adecuadamente estrategias o procedimientos que le permitan dar solución a un problema planteado.

POST TEST

CUADRO N°03: ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO

N°	“APRENDIENDO JUNTOS”		TD	ED	PA	DA	TA	TOTAL
01	Comprendo el problema propuesto	N°	2	3	1	10	6	22
		%	9.1	13.6	4.5	45.5	27.3	100
02	Trazo un plan para resolverlo	N°	2	3	1	9	7	22
		%	9.1	13.6	4.5	41	31.8	100
03	Pongo en práctica el plan	N°	2	3	3	9	5	22
		%	9.1	13.6	13.6	40.9	22.8	100
04	Compruebo los resultados obtenidos	N°	2	3	2	9	6	22
		%	9.1	13.6	9.1	40.9	27.3	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer ciclo de Matemática - FACFyM

CUADRO N°04: ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO

N°	“APRENDIENDO POR EQUIPOS”		TD	ED	PA	DA	TA	TOTAL
01	Comprendo el problema propuesto	N°	3	3	2	8	6	22
		%	13.6	13.6	9.1	36.4	27.3	100
02	Trazo un plan para resolverlo	N°	2	3	2	9	6	22
		%	9.1	13.6	9.1	40.9	27.3	100
03	Pongo en práctica el plan	N°	2	3	2	9	6	22
		%	9.1	13.6	9.1	40.9	27.3	100
04	Compruebo los resultados obtenidos	N°	3	3	2	8	6	22
		%	13.6	13.6	9.1	36.4	27.3	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer ciclo de Matemática - FACFyM

INTERPRETACIÓN

Al aplicar las estrategias de aprendizaje cooperativo seleccionadas para la presente investigación los resultados obtenidos reflejan que tanto el modelo “Aprendiendo juntos” como el modelo “Aprendizaje por equipos” ayudan a los estudiantes a comprender los problemas planteados (72.8% vs 63.7%), se trazan planes para resolverlos (72.8% vs 68.2%), los ponen en práctica (63.7% vs 68.2%) y comprueban los resultados (68.2% vs 63.7%)

CUADRO N°05: EVALUACIÓN DEL DESARROLLO DE LOS APRENDIZAJES

N°	RANGO	APRENDIENDO JUNTOS				APRENDIENDO EN EQUIPO			
		PRE TEST		POS TEST		PRE TEST		POS TEST	
		N°	%	N°	%	N°	%	N°	%
01	Deficiente	12	54.5	4	18.2	10	45.5	2	9.1
02	Básico	6	27.3	9	40.9	7	31.8	8	36.4
03	Suficiente	3	13.6	7	31.8	3	13.6	8	36.4
04	Satisfactorio	1	4.6	2	9.1	2	9.1	4	18.1
TOTAL		22	100	22	100	22	100	22	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer ciclo de Matemática - FACFyM

INTERPRETACIÓN

Respecto al nivel de logro de los estudiantes tras la aplicación de las estrategias propuestas, el cuadro indica el cambio que existe si se comparan los resultados del pre test con los resultados obtenidos en el post test. Nótese como disminuyeron los elevados porcentajes en el rango deficiente de un promedio de 50%(tomando en cuenta los dos modelos) a un 14%.

Si se tiene en cuenta que los rangos básico, suficiente y satisfactorio significan que el estudiante ha desarrollado la capacidad de solución de problemas y esto equivale a un 86,3% en promedio que aprobó. De este porcentaje de aprobación el 38.6% en promedio se ubica en el rango básico (11 -13.99), el 34.1% en promedio se ubica en el rango suficiente (14 – 17.99), finalmente el 13.6% en promedio está en el rango satisfactorio (18 – 20), lo que demuestra que la propuesta diseñada si tiene efectividad.

**CUADRO N°06: CALIFICACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS APRENDIZAJE
COOPERATIVO**

CALIFICACIONES	N°	%
MUY BUENAS	11	50
BUENAS	09	40.9
ACEPTABLES	02	9.1
DEFICIENTES	00	00
TOTAL	22	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer ciclo de Matemática - FACFyM

INTERPRETACIÓN

Después de la aplicación de las estrategias de aprendizaje cooperativo, el 90.9% opina que son entre buenas y muy buenas y un 9.1% dice que son aceptables, por lo que casi la totalidad de estudiantes está de acuerdo que su uso de alguna manera ha incidido en sus aprendizajes.

**CUADRO N°07: LOGROS CON LA APLICACIÓN DE ESTRATEGIAS
APRENDIZAJE COOPERATIVO**

CALIFICACIONES	N°	%
Mejorar mis aprendizajes	10	45.5
Manejar habilidades cognitivas	04	18.2
Desarrollar el interés por perder	08	36.3
No logré nada	00	00
TOTAL	22	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer ciclo de Matemática - FACFyM

INTERPRETACIÓN

Con respecto a los logros planteados, todos manifiestan haber conseguido alguno después de haberse puesto en marcha la propuesta de estrategias de aprendizaje cooperativo. Así: el 45.5% dice que han mejorado sus aprendizajes, el 18.2% cree saber manejar habilidades cognitivas y un 36.3% manifiesta haber desarrollado el interés por aprender.

CUADRO N°08: REALIZACIÓN PERSONAL AL APLICAR ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO

CALIFICACIONES	N°	%
MUY BIEN	09	41
BIEN	11	50
MAL	01	4.5
MUY MAL	01	4.5
TOTAL	22	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer ciclo de Matemática - FACFyM

INTERPRETACIÓN

Los estudiantes creen sentirse entre bien y muy bien (91%) desarrollar estrategias de aprendizaje cooperativo en sus respectivos equipos a los cuales pertenecen, sólo un 9% manifestó sentirse entre mal y muy mal dentro de sus equipos. Al ser consultados respondieron que no los dejaban participar o de que sólo algunos trabajaban y el resto no, pero que si estaban dispuestos a trabajar en equipos y están convencidos de que es la mejor manera de mejorar sus aprendizajes.

**CUADRO N°09: LOGROS ACTITUDINALES AL APLICAR ESTRATEGIAS
DE APRENDIZAJE COOPERATIVO**

N°	LOGROS		SI	NO	NO OPINA	TOTAL
01	Elevar la autoestima	N°	18	1	3	22
		%	81.8	4.5	13.7	100
02	Perder el temor	N°	17	1	4	22
		%	77.3	4.5	18.2	100
03	Mejor desenvolvimiento	N°	16	1	5	22
		%	72.7	4.5	22.8	100
04	Asumir responsabilidades	N°	15	1	6	22
		%	68.2	4.5	27.3	100
05	Interactuar con compañeros	N°	14	3	5	22
		%	63.6	13.7	22.7	100

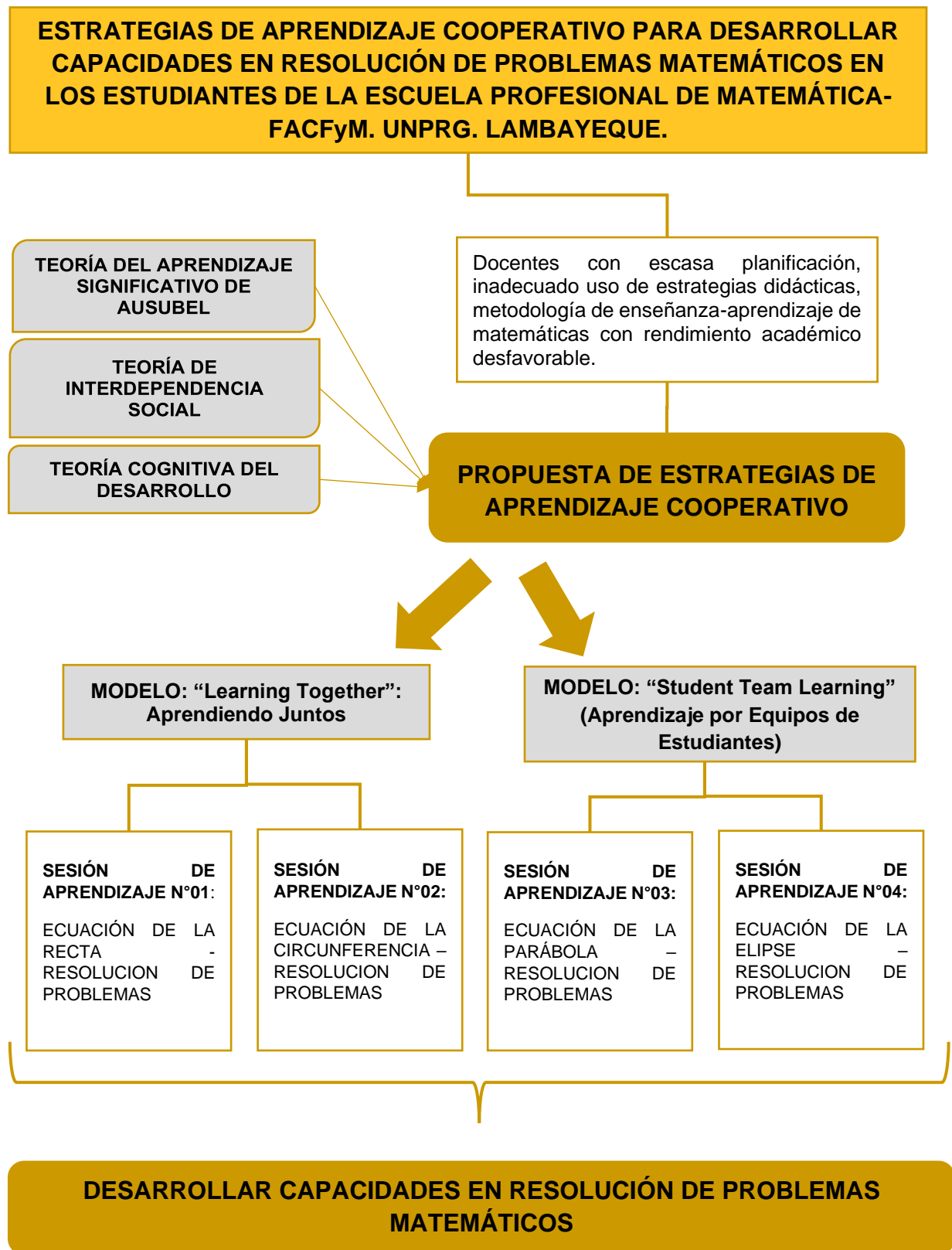
Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer ciclo de Matemática - FACFyM

INTERPRETACION

El aprendizaje cooperativo es parte de la educación inclusiva, un enfoque educativo basado en el respeto por la diversidad de los estudiantes, implica que todos hombres y mujeres aprendan juntos independientemente de sus condiciones físicas, sociales, culturales, emocionales, lingüísticas u otras.

Según los resultados obtenidos luego de la aplicación de las estrategias de aprendizaje cooperativo, los estudiantes manifiestan haber alcanzado ciertos logros como son elevar su autoestima (81.8%), perder el temor (77.3%), un mejor desenvolvimiento (72.7%), asumir responsabilidades (68.2%) e interactuar con sus compañeros (63.6%).

3.2. MODELO TEÓRICO



3.3. PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA

3.3.1. Denominación

Estrategias de aprendizaje cooperativo para desarrollar capacidades en resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de la Escuela Profesional de Matemática- FACFyM. UNPRG. Lambayeque.

3.3.2. Presentación

Al hablar de la atención a la diversidad del alumnado en las aulas, es habitual que salte a la palestra un término muy utilizado en los últimos tiempos que responde a una tendencia que se va abriendo camino en la literatura pedagógica de medio mundo. Nos referimos al concepto de escuela inclusiva.

Hablar de una escuela inclusiva supone plantearnos otra escuela en la que se rompan las barreras del tiempo, espacio, agrupamientos, métodos de trabajo, recursos, etc. Es un replanteamiento total de la escuela que, dicho de este modo, suena inabarcable y sería, de antemano, una empresa abocada al fracaso desde su planteamiento inicial.

El aprendizaje cooperativo se constituye como una medida útil para atender de la diversidad del estudiante presente en las aulas de las Universidades. Diferentes niveles de competencia curricular, diferentes motivaciones y expectativas. En tal sentido se diseñan estrategias de aprendizaje cooperativo que pretende el desarrollo de capacidades para resolver problemas matemáticos, en el que el docente tenga la suficiente destreza para poner en práctica estos modelos de aprendizaje, que faciliten una atención educativa a todo el alumnado sin distinción.

La presente propuesta comprende un conjunto de unidades específicas sobre la utilización de estrategias de aprendizaje cooperativo e influencia en la resolución de problemas de matemática. Lo particular de esta experiencia, es que permitió guiar la acción a través de un proceso cíclico, donde se inició la investigación, mediante la práctica planificada, es por ello que en cada propuesta se propuso actividades muy diversas.

3.3.3. OBJETIVOS:

GENERAL:

Promover el desarrollo de las capacidades en resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de la Escuela Profesional de Matemática, utilizando estrategias de aprendizaje cooperativo que permitan socializar adecuadamente con los demás.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Informar a los estudiantes sobre el propósito de la propuesta de estrategias de aprendizaje cooperativo.
2. Potenciar las capacidades para la mejora de su desempeño para la vida cotidiana.
3. Determinar las capacidades de percepción, de procesamiento de información y crítico – reflexivas que conocen y manejan los estudiantes.
4. Diseñar estrategias de aprendizaje cooperativo que favorezcan el desarrollo de capacidades en resolución de problemas matemáticos en los estudiantes.
5. Diseñar y orientar la utilización de estrategias de aprendizaje cooperativo para promover el desarrollo de la capacidad de solución de problemas de matemática.

3.3.4. JUSTIFICACIÓN

Siguiendo las ideas recogidas por Ribera Mataix (2006), principales ventajas que operan a favor del aprendizaje cooperativo en las aulas son las siguientes:

- Adaptación a la diversidad: eficaz para mejorar: el rendimiento, la motivación por el aprendizaje, el sentido de responsabilidad, la tolerancia y, especialmente, para desarrollar la capacidad de cooperación y mejorar las relaciones entre los estudiantes en contextos heterogéneos.
- Formación de la imagen personal del estudiante y desarrollo de su autocontrol: El grupo es el lugar donde el alumnado ejerce su autenticidad y forma su carácter a través de la observación de conductas en los demás y de su ensayo personal.

- Construcción de la solidaridad: Al incorporar como actividad normal del aula el aprendizaje cooperativo entre compañeros, se generalizan las conductas de pedir y proporcionar ayuda, mejorando con ello tanto el repertorio social de los estudiantes como sus oportunidades de aprendizaje.
- Interdependencia positiva, motivación y aprendizaje: Permite crear una situación en la que la única forma de alcanzar las metas personales es a través de las metas del equipo, lo cual hace que el aprendizaje y el esfuerzo que exige sean mucho más valorados entre los compañeros, aumentando la motivación general, así como el refuerzo y la ayuda que se proporcionan mutuamente en este sentido
- Realización compartida de actividades y activación de la zona de construcción del conocimiento: El aprendizaje cooperativo en equipos heterogéneos puede proporcionar una excelente oportunidad para activar la zona de construcción del conocimiento.
- Oportunidad de obtener éxito y reconocimiento: Una importante ventaja del aprendizaje cooperativo es que permite modificar la estructura de la evaluación e igualar al máximo las oportunidades de obtener éxito y reconocimiento para todos los estudiantes.
- Cambios en el papel del profesorado: El control de las actividades deja de estar centrado en él y pasa a ser compartido por toda la clase.

3.3.5. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

El tema de aprendizaje cooperativo lleva a realizar distintos acercamientos de estudio, como, por ejemplo: psicopedagógico, epistemológico y el filosófico

Fundamentos Psicopedagógicos: Para un constructivista como Piaget, sobresalen cuatro premisas que intervienen en la modificación de estructuras cognitivas: La maduración, la experiencia, el equilibrio y la transmisión social; todas ellas se pueden propiciar a través de ambientes cooperativos.

En la teoría histórico cultural, el estudiante requiere la acción de un agente mediador para acceder a la zona próxima, este será responsable de ir tendiendo un andamiaje que proporcione seguridad y permita que aquel se apropie de su propio conocimiento y lo transfiera a su propio entorno.

Fundamentos Epistemológicos. Existen diferentes formas de organizar al alumnado dentro del aula para realizar las actividades o experiencias programadas. Estas formas de organizar se llaman estructuras de la actividad y pueden ser de tres tipos:

- Aprendizaje competitivo: la actividad se estructura en forma de competición, ya sea competición en tiempo, en calidad, en cantidad; pero generalmente el éxito del estudiante está unido al fracaso del resto.
- Aprendizaje individualizado: la estructura de la actividad es individual. Cada estudiante funciona como punto de referencia para sí mismo. Los criterios de progreso son personales y están basados en el progreso personal.
- Aprendizaje cooperativo: es una estructura de aprendizaje cooperativo cuando se organizan tareas en las que la cooperación es la condición para realizarlas. Son tareas de aprendizaje que no se pueden realizar si no es colaborando entre el grupo. Se liga el éxito personal al éxito del resto.

Fundamentos filosóficos: El hombre es un ser social, que vive en relación con otros y se desarrolla en un proceso de interacción, intercambio y socialización de procesos y resultados en los que la actividad grupal es la forma de expresión de los vínculos que se establecen entre ellos, así como la percepción de la realidad, entendida como fuente del conocimiento que se encuentra en los mismos objetos o sujetos que interactúan; este proceso de interacción representa en su conjunto procesos de construcción para el aprendizaje.

La participación social es un componente clave para la construcción colectiva de nuevos significados. Desde esta perspectiva, podemos suponer que el ambiente educativo es generador de comunidades sociales de aprendizaje en donde se puede privilegiar la adquisición y creación de conocimiento.

3.3.6. DESARROLLO DE LAS SESIONES QUE SE EJECUTARON

El desarrollo de la propuesta consiste básicamente en la implementación de estrategias de aprendizaje cooperativo. En esta propuesta se explicará de manera clara y sencilla las cuestiones esenciales a tener en cuenta para aplicar

las estrategias en el aula. Sin embargo, será absolutamente necesario tener en cuenta algunos requisitos para la realización y profundización de la propuesta.

Es así que se han planteado 04 sesiones en las que se aplican las estrategias de aprendizaje cooperativo (ver anexos)

Requisitos Básicos para el Aprendizaje Cooperativo.

- Los docentes deben conocer la estructura y procesos internos del grupo, sus vías de comunicación, valores y normas; además, debe aprovechar esa información para poder influir en el grupo facilitando su dinámica interna y los procesos de integración y desarrollo grupal.
- El grupo debe compartir una identidad de grupo propio, o bien, en caso contrario, que el profesorado le facilite ocasiones y asesoramiento para que pueda ir elaborando esa identidad de grupo. Para ello se pueden utilizar algunas técnicas de dinámica de grupo.
- El grupo ha de sentir la meta a alcanzar como propia y común para todos sus miembros. Dicha meta no sólo ha de estar clara, sino que además es deseable que sea a largo o medio plazo, no se trata de un trabajo esporádico o solo para un periodo de tiempo corto. Con ello se pretende que el grupo tenga tiempo para estructurarse y desarrollar sus procesos de cooperación.
- El grupo ha de contar con una organización que deje claro que, aunque la meta sea común no por eso la responsabilidad individual puede quedar diluida. Al grupo se le han de facilitar tanto los medios, como unas condiciones ambientales mínimas.
- Los estudiantes deben tener claro los objetivos y exigencias del trabajo para facilitar sus procesos de planificación y realización de tareas.
- El estudiante debe comprender que pertenecer a un grupo es cumplir obligaciones, tareas y responsabilidades recíprocas.
- El papel del profesorado no se reduce al de conocedor del grupo, tiene que preocuparse de ser: proveedor de recursos, facilitador de ocasiones o situaciones, dinamizador y orientador de la actividad, evaluador de procesos, potenciador de aprendizajes.

Características del aprendizaje cooperativo.

Según Johnson, Johnson y Smith (1991), expertos en aprendizaje cooperativo, son las siguientes:

- Los estudiantes construyen, descubren, transforman y amplían el conocimiento. Los docentes crean las condiciones para que el alumnado pueda construir significados.
- El aprendizaje es algo que hace el estudiante. En lugar de aceptar pasivamente el conocimiento, activan sus estructuras cognitivas o construyen estructuras nuevas para asumir nuevas informaciones. La enseñanza debe implicar a los estudiantes activamente en los procesos de aprendizaje.
- El aprendizaje es un evento social, en el que los estudiantes necesitan interactuar con el docente y los compañeros y compañeras. La educación es un proceso social que solo puede ocurrir a través de la interacción.
- Los esfuerzos de los docentes se deben dirigir a desarrollar las competencias y capacidades de los estudiantes. Se asume que, tanto el esfuerzo de los estudiantes como las prácticas educativas, pueden mejorar.
- La educación es una transacción entre estudiantes, entre docentes y estudiantes. No es suficiente la interacción, tiene que ser una interacción personal. El aprendizaje es un proceso personal y social que surge cuando los individuos cooperan para construir un conocimiento compartido.
- Los docentes deben ser capaces de crear buenas relaciones con los estudiantes y crear las condiciones en las cuales los estudiantes desarrollen buenas relaciones unos con otros. La escuela se debe convertir en una comunidad de aprendizaje de estudiantes comprometidos.
- Un contexto cooperativo favorece el desarrollo de las características del nuevo paradigma. Los docentes deben promover situaciones de aprendizaje en las que los estudiantes trabajen juntos de forma cooperativa para optimizar el rendimiento de cada uno. Los datos de investigaciones indican que el aprendizaje cooperativo favorece un mayor rendimiento, relaciones más positivas y un mejor ajuste psicológico que el aprendizaje individualista o competitivo.

- Enseñar es una tarea compleja que requiere formación y actualización continua en capacidades y procedimientos.

Asignación de roles

- Rol del profesor.
 - Diagnosticar necesidades de los estudiantes al inicio de su curso.
 - Estructura y organiza el proceso de enseñanza-aprendizaje de acuerdo a las necesidades detectadas.
 - Estimular conocimientos previos y conectar nuevas experiencias de aprendizaje
 - Utiliza situaciones reales del entorno para estimular el aprendizaje.
 - Mediador durante el proceso de aprendizaje, orienta, cuestiona y guía.
 - Promueve el aprendizaje a través de la solución de problemas.
 - Promueve el aprendizaje colaborativo.
- Rol del estudiante:
 - Busca y amplía la información sobre la base de su autonomía.
 - Decide, en colaboración con sus compañeros y profesor, la forma de trabajo y la organización de los recursos.
 - Identifica y optimiza su estilo de aprendizaje.
 - Transfiere la información a un nuevo contexto.
 - Es creativo en la solución de problemas.
 - Acuerda normas con sus compañeros y profesor y asume compromiso.
 - Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje y el del grupo.

Tipos de estrategias y técnicas concretas que se pueden aplicar

En la presente investigación se diseñó estrategias de aprendizaje cooperativo basados en: Student Team Learning (Aprendizaje por Equipos de Estudiantes) y Learning Together (Aprendiendo Juntos) para mejorar el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas de Matemática, donde se buscó desde la

práctica en el aula, demostrar que dichas estrategias cumplen un rol muy significativo en el proceso enseñanza/aprendizaje.

A. El modelo de Student Team Learning.

Modelo propuesto por Robert Slavin (1990) y sus colaboradores, donde una organización escolar hace referencia esencialmente a dos elementos:

Estructura didáctica de la tarea y la estructura incentiva del estudiante.

- a) Estructura didáctica de la tarea: debe ser de un solo tipo, no estar subdividida o repartida entre los miembros del grupo, sino que todos ellos la acometan a la vez conjuntamente.
- b) Estructura incentiva del estudiante.
 - Se refiere a los instrumentos que el profesor pretende utilizar para estimular la motivación del alumnado.
 - Debe haber recompensas idénticas para todos los miembros del grupo y no centradas en individuos con acciones que se distingan dentro de los grupos.
 - Que a todos se les ofrezcan las mismas posibilidades de hacer sus aportaciones particulares al éxito del equipo.

Articulación de estructuras didácticas: tarea - incentiva del estudiante

- a) Saber intercambiar información, comunicarse, participar, coordinar esfuerzos, establecer procedimientos, etc.
- b) Estructura incentiva cooperativa resultante del esfuerzo colaborativo entre miembros de un mismo grupo por la consecución de sus objetivos.
- c) La estructura cooperativa de la tarea como exigencia para llevarla a término.
- d) Los motivos de la cooperación como deseo de satisfacer necesidades.

Elementos esenciales del modelo Equipos de Estudiantes Aprendiendo Juntos (Student Team Learning) de Slavin (1990)

- a) Recompensa del grupo: Las recompensas pueden ser de distinta índole adaptada a la edad y a la situación, pero substancialmente expresan un reconocimiento público de los resultados conseguidos.
- b) Responsabilidad individual: El éxito del grupo depende del nivel de aprendizaje que cada cual está dispuesto alcanzar y realizar. Todos los miembros son responsables en este empeño. No de un modo individualista, sino colaborativo: ayudándose recíprocamente, explicándose aquello no bien comprendido, controlando el propio aprendizaje a través de preguntas, asegurándose de que cada miembro del grupo está preparado para afrontar una prueba individual sobre cuánto ha aprendido, etc.
- c) Misma oportunidad de éxito: La condición cooperativa asegura que todos los miembros tengan la posibilidad de conseguir el éxito mejorando resultados anteriores.

División de equipos de estudiantes:

- Los maestros asignan grupos heterogéneos (según edad, rendimiento y sexo) de 4 a 5 integrantes.
- El profesor les da un material con contenido académico dividido en guías y los estudiantes trabajan en ellas hasta asegurarse que todos los miembros las dominan. Todos los estudiantes, deben ser examinados en forma individual, sin recibir ayuda de sus compañeros de equipo.
- El profesor comparará la calificación individual con sus puntuaciones anteriores y si la segunda es superior, recibe varios puntos que se suman a los del equipo para formar la puntuación en grupo.
- Solo los equipos que alcancen cierta puntuación obtendrán determinadas recompensas grupales.

B. El Modelo Learning Together

Fue diseñado por los hermanos Roger T. Johnson y David W. Johnson a mediados de los sesenta. Quizás sea el más general de todos los métodos aquí presentados, basándose en las características del aprendizaje cooperativo presentadas anteriormente para organizar grupos de dos a cinco

integrantes que abordan una única tarea en la cual todos deben procurar el éxito del grupo y de cada individuo. Junto con el método de Slavin, este modelo es el que cuenta con más investigaciones que demuestran su valor en relación con los resultados académicos (Johnson, Johnson & Stanne, 2000) y la mejora de las relaciones. Los requisitos para implementarlo en el aula son: Selección de la actividad, de preferencia que involucre la solución de problemas, aprendizaje conceptual, pensamiento divergente o creatividad; toma de decisiones respecto al tamaño del grupo, asignación, materiales, etc., realización del trabajo en grupo y supervisión de los grupos.

3.3.7. EVALUACIÓN

Esta propuesta someterá a la evaluación del currículo, correspondiente en matemática. De este modo, cada una de las medidas propuestas y puestas en marcha constará de instrumentos, momentos y responsables de su evaluación, con el fin de mejorar cada año su implementación. Tratará de valorar la consecución de los objetivos establecidos. Aspectos a tomar en cuenta:

Para garantizar que todos los miembros del equipo trabajen:

- Deben solicitarse tareas que tengan un nivel de complejidad que requieran de la cooperación de los estudiantes, trabajo de todos para poder llevarse a cabo.
- La mejor manera de conseguir que el trabajo sea realmente en equipo, es que el profesor diseñe y desarrolle actividades que garanticen en primer término la responsabilidad individual.
- Garantizar la responsabilidad individual en el trabajo en equipo. Para ello, conviene integrar la lógica de la técnica del rompecabezas a las actividades programadas, donde cada individuo tiene que trabajar una “pieza” y garantizar que los demás la comprendan, para luego sumar entre todas las diversas piezas y dar origen a un producto final nuevo y de mayor complejidad.

Para evaluar que todos los miembros del equipo manejen los contenidos de las tareas y/o productos

- Si bien un adecuado diseño de las actividades a realizar influye en gran medida en el hecho de que los productos sean elaborados en forma grupal,

es conveniente que, al momento de recibir los productos finales, además de evaluarse los contenidos de aprendizaje, se tome un tiempo para evaluar que el producto haya sido efectivamente elaborado en equipo y, por lo tanto, que todos los miembros manejen los contenidos trabajados.

- De acuerdo a la naturaleza del producto solicitado y con los modelos a trabajar, se han diseñado instrumentos como son: ficha de observación del docente hacia el trabajo del estudiante, ficha de autoevaluación (ver anexos), las cuales son presentadas y explicadas a los estudiantes al inicio del proceso, además un representante de cada grupo expondrá los resultados alcanzados, se les evaluará individualmente mediante una prueba escrita.

Para evaluar la dinámica de trabajo grupal

- Además de evaluarse los contenidos de aprendizaje, será importante evaluar la propia dinámica de trabajo en los equipos, asignándole un peso significativo que se traduzca en una nota. Para ello se empleó la evaluación (ver ficha en anexos), en la cual, los estudiantes se evalúan unos a otros, respecto a una serie de criterios especificados por el profesor, sobre su desempeño en el trabajo en equipo.

CONCLUSIONES

1. Las condiciones físicas del ambiente donde se desarrollan las clases de los estudiantes de la Matemática de la FACFyM en la UNPRG, es fundamental para el desarrollo de las sesiones de aprendizaje cooperativo porque contribuye a crear una sensación de bienestar, satisfacción y comodidad, y a mejorar el estado de ánimo de los estudiantes y el docente, por lo que se puede decir que tanto la iluminación y la ventilación son adecuadas, existiendo problemas tanto en la acústica como en el mobiliario, pero que son superables.
2. Al aplicar las estrategias de aprendizaje cooperativo “Aprendiendo Juntos” y “Aprendizaje por Equipos”, los estudiantes con la ayuda del docente interactúan al interior de sus equipos y comienzan a comprender los enunciados de los problemas, elaboran un plan, lo ponen en práctica y comprueban los resultados obtenidos.
3. Los resultados de evaluar las estrategias de aprendizaje “Aprendiendo Juntos” y “Aprendizaje por Equipos” reflejan que el diseño de las estrategias de aprendizaje cooperativo han desarrollado las capacidades en resolución de problemas matemáticos, pues, si se tiene en cuenta que los rangos básico, suficiente y satisfactorio significan que el estudiante ha desarrollado la capacidad de solución de problemas y esto equivale a un 84,7% en promedio que aprobó, lo que demuestra que la propuesta diseñada si tiene efectividad.
4. Queda demostrado que la aplicación de estrategias de aprendizaje cooperativo: “Aprendiendo Juntos” y “Aprendizaje por Equipos” ayudan a desarrollar las capacidades de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes del primer ciclo de la Escuela Profesional de Matemática en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional “Pedro Ruiz Gallo”, región de Lambayeque.

RECOMENDACIONES

Las estrategias de aprendizaje cooperativo trabajadas en la presente propuesta, así como, otras que se mencionan son aplicables en las diversas áreas académicas de los distintos niveles educativos.

- Involucrar al personal administrativo y docentes para incluir la propuesta dentro de la curricula, a fin de darle continuidad y trabajarla en las distintas áreas para de esta manera alcanzar mejores resultados.
- Las estrategias de aprendizaje cooperativo diseñadas en la propuesta se constituyen en una medida útil de atender a la diversidad estudiantil presente en la Institución. Desde esta perspectiva los docentes deben asumir el reto de encabezar buena parte de los procesos de renovación metodológica de los centros educativos.
- A partir de la siguiente propuesta se sugiere trabajar otras estrategias metodológicas como grupo de expertos: Rompecabezas o Jigsaw Student Team Learning Aprendizaje por Equipos Cooperativos y juegos de torneo y Group Investigation (Investigación en Grupo). Estos modelos son aplicables a las distintas áreas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANTUNES, Celso A. Las inteligencias múltiples: Cómo estimularlas y desarrollarlas. Primera Edición, editorial Orbis Ventures S.A.C., Lima-Perú. 2005
2. Abad y Benito (2006): Cómo enseñar juntos a alumnos diversos. Experiencias de atención a la diversidad para una escuela inclusiva. Zaragoza. Egido Editorial.
3. Abbott y Terence Ryan, 1999, "Constructing Knowledge and Shaping Brains". Disponible en: <http://www.21learn.org>
4. Ausubel, D, Novak, L y Hanesian, H. (1998). Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México: Editorial Trillas.
5. BISCARRA ALZINA, Rafael. Educación emocional y bienestar. Editorial PRAXIS, 2ª reimpresión. Barcelona-España, 2002.
6. Cherem, A. et. Al. (2007). Aprendizaje social de Albert Bandura: Marco Teórico. México; Acatlán.
7. Chumba, E. (2009). El Aprendizaje Cooperativo y la Deserción Escolar". Venezuela: Universidad de Yucatán.
8. De Guzmán. M. "Enseñanza de las ciencias y la Matemática" – 2007. Revista Iberoamericana de Educación ISSN: 1685 – 5653 nº 47/3 – 25 de octubre de 2008
9. Díaz-Aguado, M.J. (2003) Educación intercultural y aprendizaje cooperativo. Madrid: Pirámide
10. Díaz, F. (1998). Estrategias Docentes para un aprendizaje Significativo. Editorial Mc Graw-Hill.
11. EPLA. Proceso de Enseñanza-Aprendizaje, Neuropsicología y Martinez, O. (1999). Aprendizaje en la universidad desafío hacia el siglo xxi. Caracas, Venezuela: Mote Ávila Editores.
12. Ferreiro, R. y Calderón, M. (2006) El ABC del aprendizaje cooperativo. Trabajo en equipo para enseñar y aprender. México: Editorial Trillas.
13. Fuentes, L.M y Lledó, A.I. (2007): La atención a la diversidad en la orientación educativa: consideraciones generales y organización.
14. García Ampudia, L. (1998). Desarrollo afectivo y valorativo, Lima: facultad de U.N.M.S.M. primera edición pp. 339.

15. GARDNER, Howard. Las Inteligencias múltiples: Estructura de la mente. Reimpresión en los talleres de Editorial Nomos, S.A. Santafé de Bogotá-Colombia, 1999.
16. García, A. (2010). Estudio sobre el asertividad y las habilidades sociales en el alumnado de Educación Social. Universidad de Huelva. España.
17. GOLEMAN, Daniel. La Inteligencia Emocional. Ediciones B Argentina S.A., Buenos Aires- Argentina, 2000.
18. GOMEZ CUMPA, José. Neurociencia cognitiva y educación. Primera edición. Lambayeque, 2004. Compilador.
19. Gonzaga W. (2005). Las estrategias didácticas en la formación de docentes de educación primaria. Actualmente investigaciones realizadas en la Universidad de Costa Rica.
20. Hernández, A. (2003) Aprendizaje cooperativo en el Aula Inteligente. En El aula inteligente de Segovia Olmo, F.(Coord.). Madrid: Espasa-Calpe, págs. 139-183.
21. HERNANDEZ SAMPIERI, Roberto y otros. Metodología de la Investigación. Cuarta Edición, Mexico, 2006.
22. Johnson, D. (1999), "Cap.1. El concepto de aprendizaje cooperativo" y "Cap.9 La puesta en práctica de la clase cooperativa", en: El aprendizaje cooperativo en el aula, Buenos Aires, Paidós pp.13-30 y pp. 89-98.
23. Johnson DW. Johnson RT, Johnson HE. (1998). Los nuevos círculos del aprendizaje. Buenos Aires: Aique
24. Kagan, S. (1992) Cooperative learning resources for teachers. San Juan Capistrano, CA, Resources for Teachers
25. MARTI, Eduardo y Javier Onrubia. Psicología del desarrollo: El Mundo del adolescente. Primera edición, Lima-Perú, 2005.
26. Monereo, C., y Durán, D, (2002). Entramados: métodos de aprendizaje cooperativo y colaborativo. Barcelona: Edebé.
27. Novak, J. (1988). "Aprendiendo a aprender". Editorial Martínez Roca. Barcelona.
28. OSTROVSKY, Graciela. Como construir competencias en los niños y desarrollar su talento: para padres y educadores. Primera edición. Buenos Aires-Argentina, 2006.

29. Ovejero, A. (1990) El aprendizaje cooperativo, una alternativa eficaz a la enseñanza tradicional. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias
30. Pósito, R. (2010). Programa de Habilidades Sociales Para Mejorar la Convivencia Escolar En los Estudiantes del Quinto de Educación Secundaria de la I.E. Alonso de Alvarado". Trujillo, Perú: Editorial Universidad Cesar Vallejo
31. Pujolás, P. (2005): El cómo, el porqué y el para qué del aprendizaje cooperativo en Cuadernos de Pedagogía, nº 345, abril 2005.
32. Ramírez P."Algunas Ideas de Constructivismo en la Educación". 2007. Disponible en: www.educarchile.cl/
33. Slavin. R. (1999). Aprendizaje cooperativo. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.
34. Vigotsky, L. (1979). El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores. Barcelona: Grijalbo
35. ROMERO, Vicente. La formación de la mentalidad sumisa, Lima-Perú, 2008.p.21
36. SANCHEZ CARLESSI, Hugo. Psicología de la Creatividad. Primera edición. Editorial Visión Universitaria, Lima-Perú, 2003.
37. Torres, J. (2016). La educación moderna en PERÚ. Lima: Ipena.
38. VABELO CORZO, José Ramón. Los valores y sus desafíos actuales. Cuarta Edición general ampliada y primera peruana, Lima-Perú, 2007.
39. Vicente, B. J. (2003). Sé amigo de ti mismo. Editorial Sal Térrea. Trujillo: Sétima edición pp.153.

ANEXOS

ENCUESTA DIRIGIDA A ESTUDIANTES

Estimado estudiante, esta encuesta tiene como objetivo conocer cuál es tu opinión en relación a las estrategias que se maneja en Matemática. Los resultados nos permitirán tomar decisiones de mejora y contribuir a la calidad educativa en nuestra Escuela Profesional. Te invitamos a participar con tus respuestas.

AMBIENTE DEL SALÓN DE CLASES	
Número de estudiantes:	Ciclo académico
La iluminación es: a) Adecuada b) Inadecuada	La ventilación es: a) Adecuada b) Inadecuada
La acústica es: a) Adecuada b) Inadecuada (hay ruidos por construcción, bullicio en general, ruidos de los pasillos, etc)	Equipamiento: Los elementos tecnológicos están en funcionamiento (computadora, ecran, proyector): a) Si b) No
La disposición de las carpetas está: a) En filas b) En círculo c) En grupos d) En cuadrado e) Otros:_____	El mobiliario es: a) Adecuada b) Inadecuada

Para contestar las siguientes preguntas utilice la siguiente escala:

Estrategias de aprendizaje que utilizas (Pre test y post test)

1	2	3	4	5
Totalmente en desacuerdo (TD)	En desacuerdo (ED)	Parcialmente de acuerdo (PA)	De acuerdo (DA)	Totalmente de acuerdo (TA)
01. Comprendo el problema propuesto				
02. Trazo un plan para resolverlo				
03. Pongo en práctica el plan				
04. Compruebo los resultados				

USO DE LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO

1. ¿Cómo calificas las estrategias de aprendizaje cooperativo utilizadas durante el desarrollo de las sesiones de aprendizaje?

- a) Muy buenas b) Buenas c) Aceptables d) Deficientes

2. ¿Qué logros te ha permitido la utilización de estrategias de aprendizaje cooperativo utilizados en las sesiones de aprendizaje?

- a) Mejorar el aprendizaje. b) Manejar habilidades cognitivas
c) Desarrollar más interés por aprender d) No logre nada

3. ¿Qué estrategias de aprendizaje cooperativo influyeron en tu aprendizaje de la matemática? Marca con un aspa lo que creas conveniente:

Sí No

a) Aprendiendo juntos () ()

b) Aprendizaje por equipos () ()

4. ¿Qué cualidades otorgas a los materiales visuales utilizados (texto y ficha técnica)

Sí No

a) Claridad y precisión de la información () ()

b) Limpieza y orden en su presentación del material () ()

c) Presentación de información actualizada y relevante () ()

5. ¿Cómo te sentiste al realizar trabajos con las estrategias de aprendizaje?

- a) Muy bien b) Bien c) Mal d) muy mal

6. ¿Qué dificultades se te presentaron al desarrollar los trabajos en equipos?

a) Que todo el grupo no trabajó ()

b) Que solo algunos trabajaron ()

c) Que uno solo haga el trabajo ()

d) Que el tiempo no fue suficiente ()

e) Que los problemas fueron muy complicados ()

7. ¿Con quién te gustó desarrollar tus trabajos en equipo?

a) Con los que más saben c) Con los de más confianza

b) Con los que me asigne el profesor d) Con cualquier compañero.

8. ¿Qué logros personales tuviste al desarrollar los trabajos mediante las estrategias de aprendizaje cooperativo?

	Sí	No
a) Elevar el autoestima	()	()
b) Desarrollar la socialización	()	()
c) Perder el temor	()	()
d) Desenvolverme mejor	()	()
e) Asumir responsabilidades	()	()

FICHA DE OBSERVACIÓN NO PARTICIPANTE - INDIVIDUAL

Finalidad: obtener información de su actuación individual tanto dentro del grupo cooperativo como ante el resto de sus compañeros

Apellidos y Nombres: _____

Ciclo académico: _____ Fecha : _____

DOMINIOS				
COGNITIVO	SÍ		NO	
	f	%	f	%
Identifica la situación problemática (qué es lo que debe averiguar)				
Utiliza el conocimiento previo pertinente a la situación				
Comprende el problema como se ha planteado (identifica datos)				
Analiza y clasifica la información en partes (problema a resolver y criterios de solución).				
Interpreta el problema				
Anticipa posibles soluciones				
PROCEDIMENTAL	SÍ		NO	
	f	%	f	%
Establece los pasos necesarios para resolverlo				
Aplica conocimientos previos y nuevos en la solución del problema. (compara el problema con otros similares)				
Elige las maneras de resolver el problema				
Realiza cálculos y operaciones elegidas para resolver el problema				
Comprueba los resultados obtenidos.				
Comunica los resultados obtenidos a sus compañeros				
Valora la solución y el nuevo aprendizaje adquirido				
ACTITUDINAL	SÍ		NO	
	f	%	f	%
Motivación por integrarse al equipo				
Asume con responsabilidad las tareas dentro del equipo				

Es solidario con sus compañeros en la realización de las tareas				
Actúa en democracia con pleno ejercicio de sus deberes y derechos				
Satisfacción por la realización y el logro, la autonomía, el crecimiento personal y del equipo.				
TOTAL				

FICHA DE OBSERVACIÓN NO PARTICIPANTE –GRUPO

Grupo N° _____ Fecha: _____

N°	ACCIONES A OBSERVAR	COMPORTAMIENTO		
		SÍ	NO	A.V.
01	El grupo respeta las normas de convivencia			
02	Cada integrante del grupo asume sus responsabilidades			
03	Plantean sus iniciativas con creatividad y originalidad			
04	Todos aportan para mejorar sus aprendizajes			
05	Trabajan en democracia con participación plena			
06	Existe solidaridad entre todos sus miembros			
07	Están motivados por el trabajo que realizan			
08	El grupo logra lo que se propone			
09	El grupo se preocupa por perfeccionar las tareas que realiza			
10	El grupo se siente motivado por los logros alcanzados			
TOTAL				

FICHA DE AUTOEVALUACIÓN

Apellidos y Nombres: _____

Ciclo académico: _____ Fecha: _____

Comprensión del problema:	SÍ	NO
Entiendo qué es lo que debo averiguar.		
Sé con qué datos cuento.		
Uso gráficos, diagramas, símbolos, para representar el problema.		
Plan para encontrar la solución:	SÍ	NO
Selecciono los pasos que voy a seguir para resolver el problema.		
Pienso en un problema parecido al que voy a resolver.		
Escojo las maneras para resolver el problema.		
Elijo las operaciones que voy a realizar.		
Ejecución el plan	SÍ	NO
Sigo los pasos que he seleccionado para resolver el problema		
Realizo los cálculos y operaciones que he elegido.		
Verificación de los resultados	SÍ	NO
Trato de resolver el problema de un modo diferente y comparo los resultados.		
Observo si el resultado que he obtenido se relaciona con los datos del problema.		
Verifico cada uno de los pasos que he seguido al resolver el problema.		

SESIÓN DE APRENDIZAJE

SESIÓN N° 01: ECUACIÓN DE LA RECTA - RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

I. MODELO DE APRENDIZAJE COOPERATIVO: "Learning Together":

Aprendiendo Juntos, cuyo objetivo es: Crear interdependencia en el aprendizaje

II. PROPÓSITOS:

Capacidades de área	Aprendizajes esperados	Contenidos
Resolución de problemas	Resuelve problemas que implican la determinación de la ecuación de la recta	Ecuación de la recta – Formas: a) Punto – pendiente b) Conocidos dos de sus puntos c) Ecuación general de la recta
Actitud ante el área		
Muestra seguridad y perseverancia al resolver y comunicar los resultados matemáticos. Participa en forma permanente y autónoma en el trabajo cooperativo.		

III. VALORES

VALOR	ACTITUDES
Responsabilidad y respeto	Se organiza adecuadamente en su trabajo Colabora con sus compañeros en los trabajos y tareas.

IV. TEMA: EDUCACIÓN PARA EL ÉXITO

MOMENTO	ACTIVIDADES	RECURSOS	TIEMPO
INICIO	<ul style="list-style-type: none">- El docente saluda a los estudiantes y dialoga con ellos acerca del tema transversal para establecer un clima de confianza.- Recupero los saberes previos acerca de las formas de la ecuación de la recta.- Se genera el conflicto cognitivo preguntando: ¿A qué se llama pendiente de una recta?, ¿Cómo calculo la pendiente de una recta?- El docente dialoga con los estudiantes sobre respuestas obtenidas y presenta problemas a resolver, proponen aprendizajes esperados, explicando lo que quiere conseguir con el modelo de aprendizaje cooperativo a utilizar con el intento que el estudiante tenga claro lo que	Pizarra. Palabra hablada. Texto guía del MED. Ejercicios resueltos en clase Nota técnica	25 minutos

	estamos haciendo y cómo estamos haciendo, debe también quedar muy claro que la evaluación será individual.		
PROCESO	<ul style="list-style-type: none"> - El docente previamente resuelve en la pizarra uno o dos problemas - El docente forma grupos heterogéneos de 4 o 5 estudiantes y entrega a cada grupo un conjunto de dos a tres problemas a resolver. - Los estudiantes leen los problemas presentados en la nota técnica, intercambian opiniones, se asignan las tareas correspondientes, buscan la solución a los problemas y comparan resultados. - El docente refuerza lo realizado por los estudiantes y despeja algunas interrogantes que sean planteadas 		55 minutos
SALIDA	Los estudiantes realizan su metacognición para su reflexión respondiendo: ¿Qué aprendí?, ¿Cómo lo aprendí?, ¿Qué no aprendí?, ¿Por qué no lo aprendí?, ¿Para qué me sirve lo que aprendí?, ¿A qué me comprometo?		10 minutos

V. EVALUACIÓN

CRITERIO O CAPACIDAD DE AREA	INDICADOR	TECNICAS E INSTRUMENTOS
Resolución de problemas.	<ul style="list-style-type: none"> - Resuelve problemas que implican la ecuación de la recta tanto individualmente como dentro del grupo expresando los resultados. - Se evalúa el producto del grupo un representante de cada grupo sustentará de manera oral el desarrollo y resultado de un problema elegido al azar ante el resto de sus compañeros. 	Exposición de resultados de forma oral. Ficha de observación Ficha de evaluación Ficha de autoevaluación
ACTITUD ANTE EL ÁREA		
VALORES	ACTITUDES	INSTRUMENTO
Responsables y respeto	<ul style="list-style-type: none"> - Muestra iniciativa e interés en el aula. - Se organiza adecuadamente en su trabajo - Colabora con sus compañeros en los trabajos y tareas - Respeta las ideas de sus compañeros de equipo. - Participa aportando ideas relevantes 	Ficha de autoevaluación

ECUACIÓN DE LA RECTA

Recuperando tus saberes previos:

Pendiente de una recta:

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = m$$

- a) Si dos rectas son paralelas, entonces tienen igual pendiente, $m_1 = m_2$
- b) Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Formas de la ecuación de una línea recta

- Ecuación de la recta que pasa por el origen:

$$y = mx$$

- Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} (X - X_1)$$

- Ecuación general de la recta: $Ax + By + C = 0$

Distancia de un punto a una recta

$$d(P, r) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

EVALUACIÓN

- 1) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto **A (-1, 3)** y es paralela a la recta **$2y - 6x = 10$** .
- 2) Halle la ecuación de la recta que pasa por **(-2,4)** y es paralela **$ax + 3y - 2 = 0$** .
- 3) Halle la ecuación de la recta que pasa por **(-2,5)** y es perpendicular a **$2x + 3y - 4 = 0$** .
- 4) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos **(3,2), (4,3)**.
- 5) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos **(5,1), (8,3)**.
- 6) Hallar la ecuación de la recta **r**, que pasa por **A (1,5)**, y es paralela a la recta **$s \equiv 2x + y + 2 = 0$** .
- 7) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto **(2, -3)** y es paralela a la recta que une los puntos **(4, 1)** y **(-2, 2)**.
- 8) Los puntos **A (-1, 3)** y **B (3, -3)**, son vértices de un triángulo isósceles ABC que tiene su vértice C en la recta **$2x - 4y + 3 = 0$** , siendo AC y BC los lados iguales. Calcular las coordenadas del vértice C.
- 9) Calcular la ecuación de la recta perpendicular a **$r = 8x - y - 1 = 0$** y pasa por el punto **P (-3, 2)**.
- 10) Calcular la distancia del punto **P (2, - 1)** a la recta **r** de ecuación **$3x + 4y = 0$** .
- 11) Calcular la distancia entre la recta **r: $6x + 8y - 10 = 0$** y el punto **P= (2,1)**.
- 12) Determinar la distancia del punto **P (7 ; 1)** a la recta de ecuación: **$3x + 4y + 5 = 0$** .

SESIÓN N° 02: ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA – RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

I. MODELO DE APRENDIZAJE COOPERATIVO: “Learning Together”:

Aprendiendo Juntos, cuyo objetivo es: Crear interdependencia en el aprendizaje

II. PROPOSITOS:

Capacidades de área	Aprendizajes esperados	Contenidos
Resolución de problemas	Resuelve problemas que implican la determinación de la ecuación de la circunferencia.	Ecuación de la circunferencia: a) Ecuación canónica b) Ecuación ordinaria c) Ecuación general de la circunferencia
Actitud ante el área		
Muestra seguridad y perseverancia al resolver y comunicar los resultados matemáticos. Participa en forma permanente y autónoma en el trabajo cooperativo.		

III. VALORES

VALOR	ACTITUDES
Responsabilidad y respeto	Se organiza adecuadamente en su trabajo Colabora con sus compañeros en los trabajos y tareas.

IV. TEMA: EDUCACIÓN PARA EL ÉXITO

MOMENTO	ACTIVIDADES	RECURSOS	TIEMPO
INICIO	<ul style="list-style-type: none"> -El docente saluda a los estudiantes y dialoga con ellos acerca del tema transversal para establecer un clima de confianza. -Recupero los saberes previos acerca de las formas de la ecuación de la circunferencia. -Se genera el conflicto cognitivo preguntando: ¿Qué diferencia existe entre una ecuación canónica y la ecuación ordinaria de la circunferencia?, ¿Cómo determino la ecuación general de la circunferencia? -El docente dialoga con los estudiantes sobre sus respuestas obtenidas y presenta los problemas a resolver, se proponen los aprendizajes esperados, explicando que quiere conseguir con el modelo de 	Pizarra. Palabra hablada. Texto guía del MED. Ejercicios resueltos en clase Nota técnica	25 minutos

	aprendizaje cooperativo a utilizar con el intento que el alumno tenga claro lo que estamos haciendo y el cómo lo estamos haciendo.		
PROCESO	<ul style="list-style-type: none"> - El docente previamente resuelve en la pizarra uno o dos problemas - El docente forma grupos heterogéneos de 4 o 5 estudiantes y entrega a cada grupo un conjunto de dos a tres problemas a resolver. - Los estudiantes leen los problemas presentados en la nota técnica, intercambian opiniones, se asignan las tareas correspondientes, buscan la solución a los problemas y comparan resultados. - El docente refuerza lo realizado por los estudiantes y despeja algunas interrogantes que sean planteadas 		55 minutos
SALIDA	Los estudiantes realizan su metacognición para su reflexión respondiendo: ¿Qué aprendí?, ¿Cómo lo aprendí?, ¿Qué no aprendí?, ¿Por qué no lo aprendí?, ¿Para qué me sirve lo que aprendí?, ¿A qué me comprometo?		10 minutos

V. EVALUACIÓN

CRITERIO O CAPACIDAD DE AREA	INDICADOR	TECNICAS E INSTRUMENTOS
Resolución de problemas.	<ul style="list-style-type: none"> - Resuelve problemas que implican la ecuación de la circunferencia tanto individualmente como interior del equipo expresando los resultados. - Se evalúa el producto del grupo un representante de cada grupo sustentará de manera oral el desarrollo y resultado de un problema elegido al azar ante el resto de sus compañeros. 	Exposición de resultados de forma oral. Ficha de observación Ficha de evaluación Ficha de autoevaluación
ACTITUD ANTE EL ÁREA		
VALORES	ACTITUDES	INSTRUMENTO
Responsables y respeto	<ul style="list-style-type: none"> - Muestra iniciativa e interés en el aula. - Se organiza adecuadamente en su trabajo - Colabora con sus compañeros en los trabajos y tareas - Respeta las ideas de sus compañeros de equipo. 	Ficha de autoevaluación

CIRCUNFERENCIA

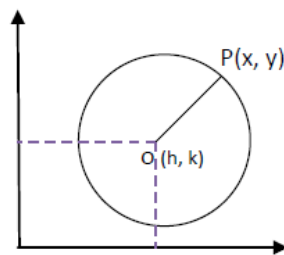
Definición: Sea O un punto del plano y sea " r " un número real positivo. Se define la circunferencia como el conjunto de puntos $P(x, y)$ tal que la distancia de P a O es igual a " r ". Es decir:

$$\text{Circunferencia} = \{P(x, y) / d(P, O) = r\}$$

Al punto " O " se le denomina centro de la circunferencia y a " r " se le denomina radio de la circunferencia.

Ecuación canónica de la circunferencia

Supongamos que O tiene coordenadas (h, k)

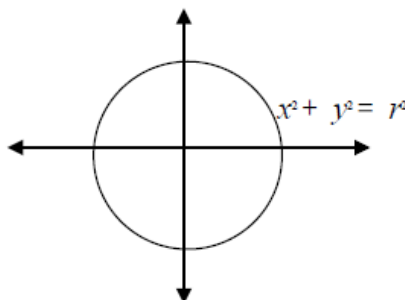


La distancia entre los puntos $P(x, y)$ de la circunferencia y el punto $C(h, k)$, la cual denotamos como " r ", está dada por $r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$, entonces, tenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación canónica de una circunferencia. Para $r^2 > 0$. Un tipo especial de circunferencia es aquella que tiene por ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$

Es decir, una circunferencia con centro $O(0,0)$, el origen:



EJEMPLO: Hallar la ecuación canónica de la circunferencia que tiene centro el punto O (4, 2) y radio 3.

SOLUCIÓN:

Reemplazando en $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, tenemos: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$ La ecuación canónica pedida.

Ahora, en la ecuación canónica del ejemplo anterior $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 3^2$, al elevar al cuadrado y reducir términos semejantes se obtiene:

$$x^2 - 4x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 9 \qquad x^2 + y^2 - 4x - 4y + 11 = 0$$

Se puede decir, entonces que la ecuación de una circunferencia tendrá la forma:

$$x^2 + y^2 + C'x + D'y + F' = 0$$

O también:

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$; esta última ecuación es llamada ECUACIÓN GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA.

Si: $D^2 + E^2 - F > 0$, la circunferencia es real

Si: $D^2 + E^2 - F = 0$, la circunferencia es un punto

Si: $D^2 + E^2 - F < 0$, la circunferencia es imaginaria (no existe).

Ejemplo: Obtener la ecuación general de la circunferencia con centro en C (-3,6) y que pase por el punto P (9,1)

Solución.

Al no tener el radio como dato debe encontrarse mediante la distancia que separa a los puntos. Esa distancia viene dada $r = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Considerando a P como punto uno y al centro como punto dos: sustituyendo se tiene:

$$r = \sqrt{(6 - 1)^2 + (-3 - 9)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Sustituyendo se tiene:

$$(x - (-3))^2 + (y - 6)^2 = 13^2 \dots (x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 169$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 169$$

$$X^2 + y^2 - 6x - 12y - 124 = 0$$

EVALUACIÓN

1. La expresión algebraica: $X^2 + Y^2 - 6X + 10Y + 18 = 0$ es la ecuación de
 - A. Una circunferencia imaginaria con centro en el punto (3, -5).
 - B. Una circunferencia real con centro en (3, -5).
 - C. Una circunferencia real con centro en (-5 , 3).
 - D. Un punto en (4, 2).

2. $X^2 + Y^2 + 12X - 8Y + 27 = 0$, la ecuación anterior es de:
 - A. Una circunferencia real con centro en el punto (- 6 , 4).
 - B. Una circunferencia imaginaria con centro en el punto (- 4, 6).
 - C. Una circunferencia real con centro en (6 , -4).
 - D. Un punto en (-6 , 4).

3. El radio de la circunferencia que tiene de centro el punto (- 4,1) y es tangente la recta $6X + 8Y - 24 = 0$ es:
 - A. Radio = 5
 - B. Radio = - 4
 - C. Radio = 8
 - D. Radio = 4

4. La expresión algebraica: $X^2 + Y^2 - 4X - 14Y + 49 = 0$ es la ecuación de
 - A. Una circunferencia imaginaria con centro en el punto (2 , 7).
 - B. Una circunferencia real con centro en (2 , 7).
 - C. Una circunferencia real con centro en (- 4, 6).
 - D. Un punto en (- 2 , - 7).

5. El radio de la circunferencia que tiene de centro el punto (-2, 1) y es tangente a la recta $7X - 3Y - 23 = 0$ es:
 - A. -40/raíz de 58
 - B. 40/raíz de 58

- C. $40/\text{raíz de } 50$
D. $20/\text{raíz de } 58$
6. $X^2 + Y^2 - 4Y - 5 = 0$ la ecuación anterior es de:
A. Una circunferencia real con centro en $(0, 2)$
B. Una circunferencia imaginaria con centro en el punto $(0, 2)$
C. Una circunferencia real con centro en $(2, 0)$
D. Un punto en $(0, 2)$
7. El radio de la circunferencia que tiene de centro el punto $(6, -1)$ y es tangente a la recta $3X - 4Y + 13 = 0$ es:
A. Radio = 7
B. Radio = -7
C. Radio = Raíz de 40
D. Radio = Raíz de 30
8. $X^2 + Y^2 - 2x - 35 = 0$ la ecuación anterior es de:
A. Una circunferencia imaginaria con centro en el punto $(1, 0)$
B. Una circunferencia real con centro en $(1, 0)$
C. Una circunferencia real con centro en $(0, 1)$
D. Un punto en $(2, 6)$
9. El radio de la circunferencia que tiene de centro el punto $(3, -6)$ y es tangente a la recta $5X - 2Y + 2 = 0$ es:
A. Radio = $29/\text{Raíz de } 29$
B. Radio = 1
C. Radio = $29/\text{Raíz de } 21$
D. Radio = $5/\text{Raíz de } 29$
10. $X^2 + Y^2 - 36 = 0$ la ecuación anterior es de:
A. Una circunferencia real con centro en $(0, 0)$
B. Una circunferencia imaginaria con centro en el punto $(0, 0)$
C. Una circunferencia real con centro en $(1, 1)$
D. Un punto en $(0, 0)$

11. $X^2 + Y^2 - 12x + 10Y + 61 = 0$ la ecuación anterior es de:

- A. Una circunferencia real con centro en (6 , -5)
- B. Un punto en (6 , -5)
- C. Una circunferencia real con centro en (-5 , 6)
- D. Una circunferencia imaginaria con centro en el punto (6, -5)

12. $X^2 + Y^2 - 16x + 4Y + 77 = 0$ la ecuación anterior es de:

- A. Una circunferencia imaginaria con radio = 3i
- B. Una circunferencia real con radio = 3
- C. Una circunferencia real con centro en (1, 1)
- D. Un punto en (8, -2)

13. $X^2 + Y^2 + 20x + 18 Y + 230 = 0$ la ecuación anterior es de:

- A. Una circunferencia imaginaria con radio = 7i
- B. Una circunferencia real con radio = 7
- C. Una circunferencia real con centro en (10, 9)
- D. Un punto en (-10, 9)

SESIÓN N° 03: ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA – RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

I. MODELO DE APRENDIZAJE COOPERATIVO: Student Team Learning (Aprendizaje por Equipos de Estudiantes), cuyo objetivo es: proporcionar a todos los miembros iguales oportunidades de contribuir a la puntuación del grupo, a partir de la responsabilidad que cada uno asume respecto a su aprendizaje y el aprendizaje de los demás integrantes del grupo.

II. PROPOSITOS:

Capacidades de área	Aprendizajes esperados	Contenidos
Resolución de problemas	Resuelve problemas que implican la determinación de la ecuación de la parábola.	Ecuación de la circunferencia: a) Ecuación canónica b) Ecuación ordinaria c) Ecuación general de la parábola
Actitud ante el área		
Muestra seguridad y perseverancia al resolver y comunicar los resultados matemáticos. Participa en forma permanente y autónoma en el trabajo cooperativo.		

III. VALORES

VALOR	ACTITUDES
Responsabilidad y respeto	Se organiza adecuadamente en su trabajo Colabora con sus compañeros en los trabajos y tareas.

IV. TEMA: EDUCACIÓN PARA EL ÉXITO

MOMENTO	ACTIVIDADES	RECURSOS	TIEMPO
INICIO	<ul style="list-style-type: none"> - El docente saluda a los estudiantes y dialoga con ellos acerca del tema transversal para establecer un clima de confianza. - Recupero los saberes previos acerca de las formas de la ecuación de la parábola. - Se genera el conflicto cognitivo preguntando: ¿Qué diferencia existe entre una ecuación canónica y la ecuación ordinaria de la parábola?, ¿Cómo determino la ecuación general de la parábola? - El docente dialoga con los estudiantes sobre sus respuestas obtenidas y presenta los problemas a resolver, se proponen los aprendizajes esperados, explicando que quiere conseguir con el modelo de aprendizaje 	Pizarra. Palabra hablada. Texto guía del MED. Ejercicios resueltos en clase Nota técnica	25 minutos

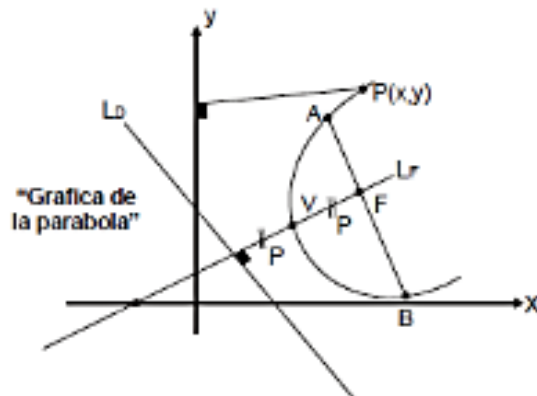
	cooperativo a utilizar con el intento que el estudiante tenga claro lo que estamos haciendo y el cómo lo estamos haciendo.		
PROCESO	<ul style="list-style-type: none"> - El docente previamente resuelve uno o dos problemas - El docente forma grupos heterogéneos de 4 o 5 estudiantes los cuales permanecerán unidos durante toda la semana o más en las horas de clases y entrega a cada grupo una nota técnica conteniendo teoría y un conjunto de problemas a resolver. - Los estudiantes que ya ejercen dominio de la teoría, leen los problemas presentados en la nota técnica, intercambian opiniones, se ayudan mutuamente, buscan la solución a los problemas y analizan resultados - El docente refuerza lo realizado por los estudiantes y despeja algunas interrogantes que sean planteadas 		55 minutos
SALIDA	Los estudiantes realizan su metacognición para su reflexión respondiendo: ¿Qué aprendí?, ¿Cómo lo aprendí?, ¿Qué no aprendí?, ¿Por qué no lo aprendí?, ¿Para qué me sirve lo que aprendí?, ¿A qué me comprometo?		10 minutos

V. EVALUACIÓN

CRITERIO O CAPACIDAD DE AREA	INDICADOR	TECNICAS E INSTRUMENTOS
Resolución de problemas.	<ul style="list-style-type: none"> - Resuelve problemas que implican la ecuación de la parábola tanto individualmente como interior del equipo expresando los resultados. - Debe también quedar muy claro que la evaluación será individual, aunque el grupo será recompensado por el docente sólo si se demuestra que todos sus integrantes han conseguido los logros propuestos. 	Exposición de resultados de forma oral. Ficha de observación Ficha de coevaluación Ficha de autoevaluación
ACTITUD ANTE EL ÁREA		
VALORES	ACTITUDES	INSTRUMENTO
Responsables y respeto	<ul style="list-style-type: none"> - Muestra iniciativa e interés en el aula. - Se organiza adecuadamente en su trabajo - Colabora con sus compañeros en los trabajos y tareas - Respeta las ideas de sus compañeros de equipo. - Participa aportando ideas relevantes 	Ficha de autoevaluación

LA PARÁBOLA

Definición: Es el lugar geométrico de todos los puntos contenidos en un mismo plano tal que cualquier punto perteneciente a la parábola equidista de un punto fijo llamado foco y una recta fija conocida como recta directriz.



Elementos:

L_D : Recta directriz;

L_F : Eje Focal

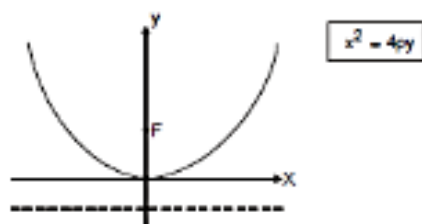
V: Vértice, $V_F = V_{LD} = P$

F: Foco; AB:

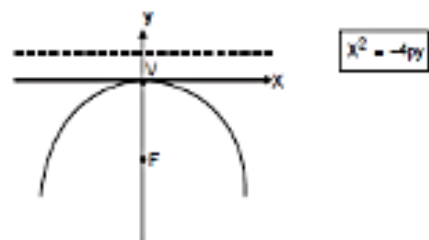
Lado Recto = $|4p|$

Casos:

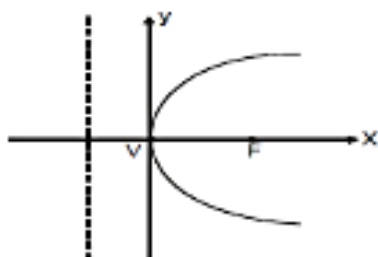
a)



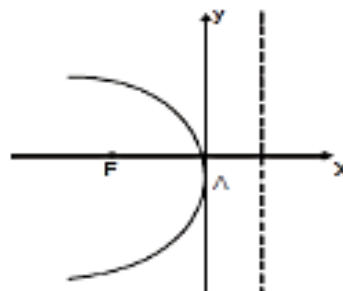
b)



c) $y^2 = 4px$



d) $y^2 = -4px$



ECUACIONES DE LA PARÁBOLA CUYO VÉRTICE NO COINCIDE CON EL ORIGEN

Cuando el vértice se localiza en cualquier punto, al que por convención se le asignan las coordenadas (h, k), y éste es distinto al origen, la ecuación que describe a la parábola cambia en función de la posición de este punto y además de la orientación de la curva respecto de los ejes coordenados.

CASO I

Este lo consideraremos en el caso de que la parábola se extienda en el sentido positivo del eje de las abscisas "X"

- ECUACION DE LA PARABOLA: $(y - k)^2 = 4p (x - h)$
- ECUACIÓN DE LA DIRECTRIZ: $x - h + p = 0$

CASO II

Cuando la parábola se extiende en el sentido negativo del eje de las abscisas "X"

- ECUACIÓN DE LA PARABOLA: $(y - k)^2 = -4p (x - h)$
- ECUACIÓN DE LA RECTA DIRECTRIZ: $x - h - p = 0$

CASO III

Cuando la parábola se extiende en el sentido positivo del eje de las ordenadas

- ECUACIÓN DE LA PARABOLA: $(x - h)^2 = 4p (y - k)$
- ECUACIÓN DE LA RECTA DIRECTRIZ: $y - k + p = 0$

CASO IV

Cuando la parábola se extiende en el sentido negativo del eje de las ordenadas "Y"

- ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA: $(x - h)^2 = -4p (y - k)$
- ECUACIÓN DE LA RECTA DIRECTRIZ: $y - k - p = 0$

ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Que es la ecuación de una parábola horizontal en su forma general.

Análogamente para una parábola de orientación vertical, la ecuación en su forma general será:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

EVALUACIÓN

1. Determina las ecuaciones de las parábolas que tienen:
 - A. De directriz $y = -5$, de foco $(0, 5)$.
 - B. De directriz $x = 2$, de foco $(-2, 0)$.
 - C. De foco $(3, 2)$, de vértice $(5, 2)$.
 - D. De foco $(-2, 5)$, de vértice $(-2, 2)$.
 - E. De foco $(3, 4)$, de vértice $(1, 4)$.

2. Encuentre el vértice, foco, la ecuación de la directriz, así como la longitud del lado recto de las parábolas siguientes:
 - a. $y = x^2 - 4x + 2$
 - b. $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$

3. Calcular las coordenadas del vértice y de los focos, y las ecuaciones de las directrices de las parábolas:
 - a. $y^2 + 4x + 4y = 0$
 - b. $8y^2 + 22x - 24y - 128 = 0$
 - c. $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$
 - d. $6x^2 - 8x + 6y + 1 = 0$
 - e. $5x^2 - 40x + 4y + 84 = 0$

4. Determine la ecuación de la parábola que tiene por vértice al punto $(-3,5)$, de eje paralelo al eje X y que pasa por el punto $(5,9)$.

SESIÓN N° 04: ECUACIÓN DE LA ELIPSE – RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

I. MODELO DE APRENDIZAJE COOPERATIVO: Student Team Learning (Aprendizaje por Equipos de Estudiantes), cuyo objetivo es: proporcionar a todos los miembros iguales oportunidades de contribuir a la puntuación del grupo, a partir de la responsabilidad que cada uno asume respecto a su aprendizaje y el aprendizaje de los demás integrantes del grupo.

II. PROPOSITOS:

Capacidades de área	Aprendizajes esperados	Contenidos
Resolución de problemas	Resuelve problemas que implican la determinación de la ecuación de la elipse.	Ecuación de la circunferencia: a) Ecuación canónica b) Ecuación ordinaria c) Ecuación general de la elipse
Actitud ante el área		
Muestra seguridad y perseverancia al resolver y comunicar los resultados matemáticos. Participa en forma permanente y autónoma en el trabajo cooperativo.		

III. VALORES

VALOR	ACTITUDES
Responsabilidad y respeto	Se organiza adecuadamente en su trabajo Colabora con sus compañeros en los trabajos y tareas.

IV. TEMA: EDUCACIÓN PARA EL ÉXITO

MOMENTO	ACTIVIDADES	RECURSOS	TIEMPO
INICIO	<ul style="list-style-type: none"> - El docente saluda a los estudiantes y dialoga con ellos acerca del tema transversal para establecer un clima de confianza. - Recupero los saberes previos acerca de las formas de la ecuación de la elipse. - Se genera el conflicto cognitivo preguntando: ¿Qué diferencia existe entre una ecuación canónica y la ecuación ordinaria de la elipse?, ¿Cómo determino la ecuación general de la elipse? - El docente dialoga con los estudiantes sobre sus respuestas obtenidas y presenta los problemas a resolver, se proponen los aprendizajes esperados, explicando que quiere 	Pizarra. Palabra hablada. Texto guía del MED. Ejercicios resueltos en clase Nota técnica	25 minutos

	conseguir con el modelo de aprendizaje cooperativo a utilizar con el intento que el estudiante tenga claro lo que estamos haciendo y el cómo lo estamos haciendo.		
PROCESO	<ul style="list-style-type: none"> - El docente previamente resuelve uno o dos problemas - El docente forma grupos heterogéneos de 4 o 5 estudiantes los cuales permanecerán unidos durante toda la semana o más en las horas de clases y entrega a cada grupo una nota técnica conteniendo teoría y un conjunto de problemas a resolver. - Los estudiantes que ya ejercen dominio de la teoría, leen los problemas presentados en la nota técnica, intercambian opiniones, se ayudan mutuamente, buscan la solución a los problemas y analizan resultados - El docente refuerza lo realizado por los estudiantes y despeja algunas interrogantes que sean planteadas 		55 minutos
SALIDA	Los estudiantes realizan su metacognición para su reflexión respondiendo: ¿Qué aprendí?, ¿Cómo lo aprendí?, ¿Qué no aprendí?, ¿Por qué no lo aprendí?, ¿Para qué me sirve lo que aprendí?, ¿A qué me comprometo?		10 minutos

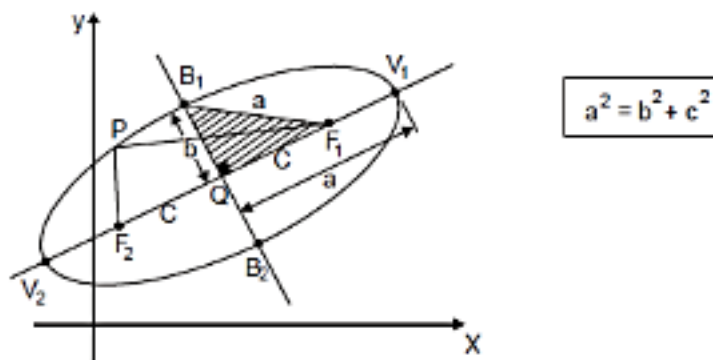
V. EVALUACIÓN

CRITERIO O CAPACIDAD DE AREA	INDICADOR	TECNICAS E INSTRUMENTOS
Resolución de problemas.	<ul style="list-style-type: none"> - Resuelve problemas que implican la ecuación de la elipse tanto individualmente como interior del equipo expresando los resultados. - Debe también quedar muy claro que la evaluación será individual, aunque el grupo será recompensado por el docente sólo si se demuestra que todos sus integrantes han conseguido los logros propuestos. 	Exposición de resultados de forma oral. Ficha de observación Ficha de evaluación Ficha de autoevaluación
ACTITUD ANTE EL ÁREA		
VALORES	ACTITUDES	INSTRUMENTO
Responsables y respeto	<ul style="list-style-type: none"> - Muestra iniciativa e interés en el aula. - Se organiza adecuadamente en su trabajo - Colabora con sus compañeros en los trabajos y tareas - Respeta las ideas de sus compañeros de equipo. - Participa aportando ideas relevantes 	Ficha de autoevaluación

LA ELIPSE

Definición: Es el lugar geométrico de todos los puntos contenidos en un mismo plano tal que las sumas de las distancias de cualquier punto de la elipse a 2 puntos fijos es constante e igual a “2a”; los puntos fijos se denominan focos.

(2a): Es constante.



Donde:

a) $d_{PF_1} + d_{PF_2} = 2a$ (Constante)

b) $F_1 ; F_2$: Focos $\rightarrow [F_1 ; F_2]$

Distancia focal = 2C

c) $V_1 ; V_2$: Vértices $\rightarrow [V_1 ; V_2]$ = eje mayor

V_1V_2 = Eje mayor = 2a

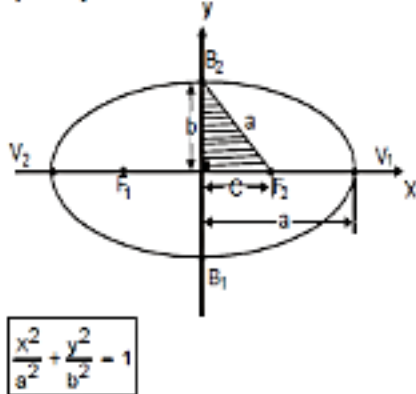
d) AB = Lado Recto = $\frac{2b^2}{a}$

e) Q = Centro

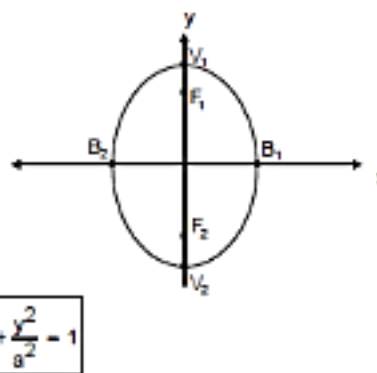
f) B_1B_2 = Eje menor = 2b

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN

I) Elipse Horizontal:



II) Elipse vertical



EXCENTRICIDAD DE UNA ELIPSE

$$\text{EXCENTRICIDAD} = e = \frac{c}{a}$$

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE

Elipse Horizontal

Elipse Vertical

Si el centro es (h; k)

$$\frac{(X - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

Entonces:

$$\frac{(X - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

EVALUACIÓN

1. Representa gráficamente y determina las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes elipses.

1 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

2 $x^2 + 4y^2 = 16$

3 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

4 $3x^2 + 2y^2 = 6$

2. Representa gráficamente y determina las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes elipses.

1 $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5 = 0$

2 $25x^2 + 9y^2 - 18y - 216 = 0$

3 $x^2 + 3y^2 - 6x + 6y = 0$

4 $3x^2 + y^2 - 24x + 39 = 0$

3. Halla la ecuación de la elipse conociendo:

1 $C(0,0), \quad F(2,0), \quad A(3,0)$

2 $C(0,0), \quad F(0,4), \quad A(0,5)$

3 $C(1,-1), \quad F(1,2), \quad A(1,4)$

4 $C(-3,2), \quad F(-1,2), \quad A(2,2)$